

Review for 生活中的优化问题 by Qiao for NLP8 2020-09-26

- 优化问题的抽象表达
- 具体问题
 - o 运输问题举例
 - o 整数规划举例
- 求解工具:
 - o scipy
 - o cvxpy

回顾：优化问题的抽象数学表达形式：

minimize $f_0(x)$
subject to $f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$
 $h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p$

式子中的各个函数、变量：

- $x \in R^n$: 优化变量
- $f_0: R^n \rightarrow R$, 目标函数/代价函数;
- $f_i: R^n \rightarrow R$, 不等式约束条件;
- $h_i: R^n \rightarrow R$, 等式约束条件;
- 定义域 $D = \cap_{i=0}^m \text{dom } f_i \cap \cap_{i=1}^p \text{dom } h_i$

运输问题（运费最小的分配方案）

1.产销平衡

例3.1 某公司从两个产地A₁、A₂将物品运往三个销地B₁、B₂、B₃，各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件物品的运费如下表所示，问：应如何调运可使总运输费用最小？

	B1	B2	B3	产量
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量	150	150	200	

解：产销平衡问题：总产量 = 总销量 = 500
设 x_{ij} 为从产地A_i运往销地B_j的运输量，得到下列运输量表：

	B1	B2	B3	产量
A1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	200
A2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	300
销量	150	150	200	

Min $C = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$
s.t. $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200$
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300$
 $x_{11} + x_{21} = 150$
 $x_{12} + x_{22} = 150$
 $x_{13} + x_{23} = 200$
 $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$

2.更一般的物品运输：产>销

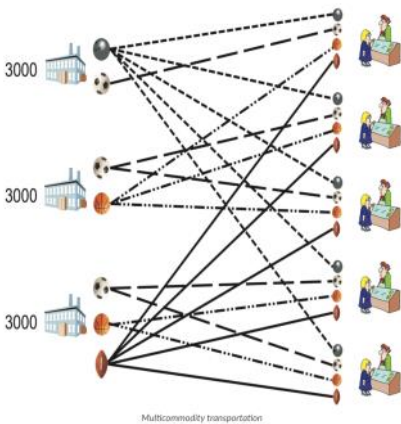
	B1	B2	B3	产量(M)
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量(D)	150	100	200	

$\min C = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$
s. t.
 $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 200$
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$
 $x_{11} + x_{21} = 150$
 $x_{12} + x_{22} = 100$
 $x_{13} + x_{23} = 200$
 $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$

这类问题通用的数学表达形式

minimize $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$
Subject to:
 $\sum_{i \in I} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in J$
 $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq M_i \quad \forall i \in I$
 $x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J$

3.更更一般的物品运输：多物品运输

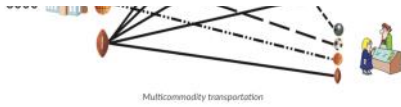


通用表达形式

minimize $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk}$
Subject to:
 $\sum_{i \in I} x_{ijk} = d_{jk} \quad j \in J, k \in K$
 $\sum_{j \in J} x_{ijk} \leq M_{ik} \quad \forall i \in I, k \in K$
 $x_{ijk} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K$

	B1	B2	B3	产量(M)
A1	[6, 3]	[4, 5]	[6, 2]	[200, 150]
A2	[6, 9]	[5, 3]	[5, 4]	[300, 500]
销量(D)	[150, 50]	[150, 300]	[200, 250]	

$\min C = 6x_{111} + 4x_{121} + 6x_{131} + 6x_{211} + 5x_{221} + 5x_{231} + 3x_{112} + 5x_{122} + 2x_{132} + 9x_{212} + 3x_{222} + 4x_{232}$
s. t.
 $x_{111} + x_{121} + x_{131} \leq 200$
 $x_{211} + x_{221} + x_{231} \leq 300$
 $x_{111} + x_{211} = 150$
 $x_{121} + x_{221} = 150$
 $x_{131} + x_{231} = 200$
 $x_{112} + x_{122} + x_{132} \leq 150$
 $x_{212} + x_{222} + x_{232} \leq 500$
 $x_{112} + x_{212} = 50$
 $x_{122} + x_{222} = 300$
 $x_{132} + x_{232} = 250$



$$\begin{aligned}x_{212} + x_{222} + x_{232} &\leq 500 \\x_{112} + x_{212} &= 50 \\x_{122} + x_{222} &= 300 \\x_{132} + x_{232} &= 250\end{aligned}$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3; k = 1, 2)$$

整数规划问题

1.让你不禁回首夕阳下的奔跑和逝去青春的伪**鸡兔同笼**问题:

这回不仅有鸡和兔子，我们还抓了八爪鱼放在同一个笼子里（意不意外，惊不惊喜？）。

传统艺能:

- 数头: 32个头
- 数脚: 80个

问:

兔子和八爪鱼加起来最少有几只?

$$\begin{aligned}\text{minimize: } & y + z \\ \text{Subject to: } & \\ & x + y + z = 32 \\ & 2x + 4y + 8z = 80 \\ & x, y, z \geq 0 \\ & x, y, z \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Solution: $x=28, y=2, z=2$

2.动规解不来?用整数优化表示**背包问题**，全部交给solver解:

这回我们的背包容积是10,000立方厘米，承重极限7 Kg。我们有四个物品，重量分别是2, 3, 4 和 5，体积分别是3000, 3500, 5100和7200。四个物品的价值分别是 16, 19, 23 和 28。

问:

价值最大的方案?

$$\begin{aligned}\text{maximize: } & 16x + 19y + 23z + 28w \\ \text{Subject to: } & \\ & 30x + 35y + 51z + 72w \leq 100 \\ & 2x + 3y + 4z + 5w \leq 7 \\ & x, y, z, w \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

Solution: $x=0, y=1, z=1, w=0$

3. 花最少的钱满足营养需求，吃什么好呢? 选得脑壳疼的话，不如做个优化吧? **饮食规划问题**:

	Min	Max
Calory	2000	-
Carbo	350	375
Protein	55	-
VitA	100	-
VitC	100	-
Calc	100	-
Iron	100	-

	价格	Calory	Carbo	Protein	VitA	VitC	Calc	Iron
芝士牛肉堡	1.84	510	34	28	15	6	30	20
马卡龙	2.19	370	35	24	15	10	20	20
巨无霸	1.84	500	42	25	6	2	25	20
FFilet	1.44	370	38	14	2	0	15	10
鸡肉	2.29	400	42	31	8	15	15	8
炸薯条	0.77	220	26	3	0	15	0	2
麦满分	1.29	345	27	15	4	0	20	15
1%LF Milk	0.60	110	12	9	10	4	30	0
橙汁	0.72	80	20	1	2	120	2	2

目标:

满足营养摄入、热量不超标，花最少的钱?

(你当然可以选其他目标)

Minimize v
subject to:

$$\sum_i d_{ij} x_i = z_j, \quad \forall j \in N$$

v 是吃下来的总价钱

F 是食物集合, N 是营养成分集合

d_{ij} 即食物 i 中含有营养成分 j 的量

