Example Optimization Problems in Daily Life by Qiao

Tuesday, September 22, 2020 12:18 PM

Review for 生活中的优化问题 by Qiao for NLP8 2020-09-26

- 优化问题的抽象表达
- 具体问题
 - 。 运输问题举例
- 。 整数规划举例
- 求解工具:
 - o scipy
 o cvxpy

回顾: 优化问题的抽象数学表达形式:

minimize
$$f_0(x)$$

subject to $f_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., m$
 $h_i(x) = 0$, $i = 1, ..., p$

式子中的各个函数、变量:

- x ∈ Rⁿ: 优化变量
- f₀: Rⁿ → R, 目标函数/代价函数;
- f_i: Rⁿ → R, 不等式约束条件;
- h_i: Rⁿ → R, 等式约束条件;
- 定义域 $\mathbf{D} = \cap_{i=0}^m \mathbf{dom} \, f_i \, \, \cap_{i=1}^p \mathbf{dom} \, h_i$

运输问题 (运费最小的分配方案)

1.产销平衡

例3.1 某公司从两个产地A₁、A₂将物品运往三个销地B₁, B₂, B₃, 各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件 物品的运费如下表所示,问:应如何调运可使总运输费用最

	B1	B2	В3	产量
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量	150	150	200	

解:产销平衡问题:总产量=总销量=500

设 x_{ij} 为从产地A_i运往销地B_j的运输量,得到下列运输量

表:

	BI	B2	B3	产量
Al	X _{II}	X12	XII	200
A2	X21	X22	X23	300
55 Mb	150	150	200	

 $\begin{array}{l} \text{Min } C = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{21} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} \\ \text{s.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + 150 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{31} + x_{32} = 200 \\ x_{10} \geq 0 \ (i = 1, \ 2, \ j = 1, \ 2, \ 3) \end{array}$

2.更一般的物品运输:产>销

	B1	B2	В3	产量(M)
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量(D)	150	100	200	

$$\min C = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$
 s.t.
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300$$

$$x_{11} + x_{21} = 150$$

$$x_{12} + x_{22} = 100$$

$$x_{13} + x_{23} = 200$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$$
 这类问题通用

$$x_{12} + x_{22} = 100$$

 $x_{13} + x_{23} = 200$
 $x_{12} > 0 \ (i = 1.2; i = 1.2.3)$

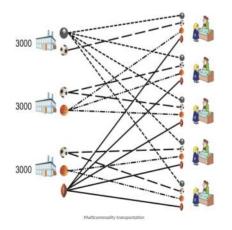
这类问题通用的数学表达形式 $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$ minimize Subject to:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = d_j \qquad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \le M_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad \forall i \in I, j \in J$$

3.更更一般的物品运输:多物品运输



通用表达形式

$$\text{minimize } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk}$$

Subject to:

$$\sum_{i \in I} x_{ijk} = d_{jk} \qquad j \in J, k \in K$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijk} \le M_{ik} \qquad \forall i \in I, k \in K$$

 $x_{ijk} \geq 0$, $\forall\; i\in I, j\in J, k\in K$

	B1	B2	В3	产量(M)
A1	[6, 3]	[4, 5]	[6, 2]	[200, 150]
A2	[6, 9]	[5, 3]	[5, 4]	[300, 500]
销量(D)	[150, 50]	[150, 300]	[200, 250]	

 $\min \frac{C = 6x_{111} + 4x_{121} + 6x_{131} + 6x_{211} + 5x_{221} + 5x_{231}}{+ 3x_{112} + 5x_{122} + 2x_{132} + 9x_{212} + 3x_{222} + 4x_{232}}$ s.t. $x_{111} + x_{121} + x_{131} \le 200$ $x_{211} + x_{221} + x_{231} \le 300$ $x_{111} + x_{211} = 150$ $x_{121} + x_{221} = 150$ $x_{131} + x_{231} = 200$ $x_{112} + x_{122} + x_{132} \le 150$ $x_{212} + x_{222} + x_{232} \leq 500$ $x_{112} + x_{212} = 50$

 $x_{122} + x_{222} = 300$ $x_{132} + x_{232} = 250$



 $\begin{array}{l} 2.2 & 2.2 \\ x_{212} + x_{222} + x_{232} \le 500 \\ x_{112} + x_{212} = 50 \\ x_{122} + x_{222} = 300 \\ x_{132} + x_{232} = 250 \\ \end{array}$ $x_{ijk} \ge 0 \ (i = 1,2; j = 1,2,3; k = 1,2)$

整数规划问题

1.让你不禁回首夕阳下的奔跑和逝去青春的伪鸡兔同笼问题:

这回不仅有鸡和兔子,我们还抓了八爪鱼放在同一个笼子里(意不意外,惊不惊喜?)。

传统艺能:

- 数头: 32个头
- 数Jio(爪/足/触手): 80个

问:

兔子和八爪鱼和起来最少有几只?

minimize: y + zSubject to: x + y + z = 322x + 4y + 8z = 80 $x, y, z \ge 0$ $x, y, z \in Z$

Solution: x=28, y=2, z=2

3. 花最少的钱满足营养需求,吃什么好呢? 选得脑壳疼的话,不如做个优化吧? **饮食规**划问题:

	Min	Max
Calory	2000	-
Carbo	350	375
Protein	55	-
VitA	100	-
VitC	100	-
Calc	100	-
Iron	100	-

	价格	Calory	Carbo	Protein	VitA	VitC	Calc	Iron
芝士牛肉堡	1.84	510	34	28	15	6	30	20
马卡龙	2.19	370	35	24	15	10	20	20
巨无霸	1.84	500	42	25	6	2	25	20
FFilet	1.44	370	38	14	2	0	15	10
鸡肉	2.29	400	42	31	8	15	15	8
炸薯条	0.77	220	26	3	0	15	0	2
麦满分	1.29	345	27	15	4	0	20	15
1%LF Milk	0.60	110	12	9	10	4	30	0
橙汁	0.72	80	20	1	2	120	2	2

目标:

满足营养摄入、热量不超标,花最少的钱? (你当然可以选其他目标)

Minimize v subject to: $\sum d_{ij}x_i = z_j, \quad \forall j \in N$

v 是吃下来的总价钱 F是食物集合,N是营养成分集合 d..即食物;由今有营养成分;的量

2.动规解不来?用整数优化表示**背包问题**,全部交给solver解:

这回我们的背包容积是10,000立方厘米,承重极限7 kg。我们有四个物品,重量分别是2,3,4 和 5,体积分别是3000,3500,5100和7200。四个物品的价值分别是 16,19,23 和 28。

问: 价值最大的方案?

 $\begin{aligned} & \text{maximize: } & 16x + 19y + 23z + 28w \\ & \text{Subject to:} \\ & & 30x + 35y + 51z + 72w \leq 100 \\ & 2x + 3y + 4z + 5w \leq 7 \\ & x, y, z, w \in \{0,1\} \end{aligned}$

Solution: x=0,y=1,z=1,w=0

Optimization Page

$$Minimize$$
 v subject to:
$$\sum_{i \in F} d_{ij} x_i = z_j, \quad \forall \, j \in \mathbb{N}$$

$$v = \sum_{i \in F} c_i x_i$$

$$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$$
 $\forall \, i \in \mathbb{F}$
$$a_j \leq z_j \leq b_j, \quad \forall \, i \in \mathbb{N}$$
 $v \in \mathbb{R}$ $v \in \mathbb{R}$

 a_j, b_j 为营养成分i的推荐摄入下限和上限

最大摄入热量在[inf, 3500, 3000, 2500]的区间内,可以品尝的食物种类数和饮食开销会波动。 怎么吃好呢???

用一个真实数据做优化问题

读书问题:

因为996我每周只有固定的一小段时间可以读书,我想尽可能多读精品,这样在你们面前吹 起牛来可以字字珠玑有深度。假设我1个小时能看60页书。每周只有5个小时自由时间,一 年之内尽可能多读书、读好书。我拉了GoodReads (类比豆瓣) 上面的书评,有每本书的评 分和页数,现在怎么从这个单子上选书读呢?

Book title	Rating	# Pages	author	url
All the Light We Cannot See	4.29	530	Anthony Doerr	
The Fault in Our Stars	4.36	313	John Green	
The Nightingale	4.54	438	Kristin Hannah	

目标:

读的书最多,读的书的总评分最高

$$\max_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} x_i + (1-\gamma) \sum_{i=1}^{N} r_i x_i$$
 subject to:
$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i \leq 60 \times 5 \times 52$$

$$x_i \in \{0,1\}$$