Algorithmen und Programmierung 3, WS 2019/2020 — 9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 20. Dezember 2019, 12:00 Uhr. Aufgabe 61b klargestellt am 16.12.

59. Hashfunktionen, Vorübung, 7 Punkte

   (a) (6 Punkte) Führen Sie folgendes Experiment für die Werte $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 13, 20$ (getrennt) durch:
   Die Zahlen $0, 1, \ldots, 1023$ werden auf 1024 Fächer verteilt, und zwar kommt die Zahl i in das Fach mit der Nummer $f_t(i) := (t \cdot i) \bmod 1024$. Bestimmen Sie, wie voll das vollste Fach wird. Sie dürfen dabei einen Computer verwenden.

   (b) (1 Punkt) Formulieren Sie eine Vermutung, für welche Werte t die Funktion f_t eine Permutation der Menge $\{0, 1, \ldots, 1023\}$ ist.

   (c) (0 Punkte) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

60. Wolf, Ziege, Kohlkopf. Programmieraufgabe, 5 Punkte

   (a) Erweitern Sie das Programm von Aufgabe 53 vom 7. Zettel so, dass es einen Weg in dem Graphen findet, der einer Lösung des Problems entspricht.

   (b) (0 Punkte) Ist die Lösung eindeutig? Wie kann man feststellen, ob es in einem Graphen nur einen einzigen Weg von s nach t gibt?

61. Halden vom Grad d, 8 Punkte

   (a) Betrachten Sie die Variante einer Halde, bei der jeder innere Knoten $d \geq 2$ Kinder hat. (Für $d = 2$ ergeben sich die gewöhnlichen Halden.) Wie verändert sich die Laufzeit für die Operationen `zugroß` beziehungsweise `zuklein` in Abhängigkeit von d? (Andere Bezeichnungen für diese Operationen sind `bubbledown` und `bubbleup`.) Wie wirkt sich das auf die Operationen *einfügen*, *entferneMin* und *verkleinereSchlüssel* aus?

   (b) Wenn man eine solche d-Halde im Algorithmus von Dijkstra verwendet, wie muss man dann d in Abhängigkeit von der Anzahl n der Knoten und der Anzahl m der Kanten des Graphen wählen, damit man die beste asymptotische Laufzeit erhält? Welche Laufzeit ergibt sich dann für das kürzeste-Wege-Problem? Was passiert in den Extremfällen $m = \Theta(n)$ und $m = \Theta(n^2)$?

62. (0 Punkte) Denken Sie sich einen gierigen Algorithmus aus, der versucht, in einem Graphen einen kurzen Weg von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t zu finden. Welche Probleme können dabei auftreten?

63. Überqueren der Brücke bei Nacht, 0 Punkte

   Vier Leute wollen eine enge Brücke überqueren, die höchstens zwei Personen tragen kann. Da es Nacht ist, kann eine Einzelperson oder ein Paar die Brücke nur überqueren, wenn sie eine Taschenlampe mitführen. Es gibt aber nur eine Taschenlampe, und deshalb muss diese Taschenlampe immer hin- und hergetragen werden. Die Personen haben verschiedene Geschwindigkeiten, und wenn zwei Personen die Brücke gemeinsam überqueren, muss sich die schnellere Person der langsameren anpassen. Person 1 benötigt $t_1 = 1$ Minute zum Überqueren, und die anderen Personen benötigen jeweils $t_2 = 2$, $t_3 = 5$, und $t_4 = 10$ Minuten. Wie können sie am schnellsten alle gemeinsam auf die andere Seite gelangen?

   Modellieren Sie diese Aufgabe als kürzestes-Wege-Problem in einem Graphen, analog zu Aufgabe 53, und lösen Sie es.[1]

[1] Siehe `http://page.mi.fu-berlin.de/rote/Papers/abstract/Crossing+the+bridge+at+night.html` und Roland Backhouse, Hai Truong: The capacity-C torch problem (2016), DOI:10.1016/j.scico.2015.01.003, für Hintergrund zum Problem und weiterführende Literatur.