ALP3 U13

Übungsgruppe: Qianli Wang und Nazar Sopiha

January 22, 2020

1 Aufgabe 84:

Gegeben sind 3 verschiedene Farben 1,2,3. Wir färben den Graphen so, dass alle Knoten möglicherweise nur durch 2 Farben(also 1 und 2) gefärbt werden. Wenn es dringend die dritte Farbe benötigt wird, bedeutet es aber, dass dieser Knoten 2 Nachbarn mit verschiedenen Farben hat. Dann bestimmen wir die Anzahl der Knoten mit Farbe 1, Farbe 2 und Farbe 3 und nehmen das Maximum davon.

Behauptung:
G hat größte unabhängige Knotenmenge mit m Elementen, genau dann wenn es im Graphen G maximal m Knoten mit gleicher Farbe gibt.

Beweis:
Wir haben m Knoten mit gleicher Farbe, angenommen Farbe 1. Nach der Färbung gemäß unserem Regel existiert es dann nur 2 folgende Fälle für die verbleibenden Knoten: Dieser Knoten ist der Nachbar des einen von m Knoten. (In diesem Fall ist der Graph nur mit 2 Farben gefärbt) Dieser Knoten ist der Nachbar von mehreren (≥ 2) Knoten. (Mit der dritten Farbe) Also, es kann nicht mehr als m Knoten mit Farbe 1 geben $\rightarrow$ In diesem Graphen G kann nur m unabhängige Knoten geben

2 Aufgabe 87:

$e^{-l_i} \geq 1 - l_i$ **(Nach der Definition)**
$\Leftrightarrow e^{-l_i} e^{L_i} e^{-L_i} \geq 1 - l_i$
$\Leftrightarrow e^{-l_i} e^{L_i} \geq (1 - l_i)(1 - L_i)$
$\Leftrightarrow e^{-l_i} \geq e^{-L_i}(1 - l_i)(1 - L_i)$
$\because e^{-l_i} = 2^{-\frac{l_i}{ln2}}$
$\Leftrightarrow \sqrt[ln2]{2^{-l_i}} \geq \sqrt[ln2]{2^{-L_i}}(1 - l_i)(1 - L_i)$
$\Leftrightarrow 2^{-l_i} \geq 2^{-L_i}(1 - l_i)^{ln2}(1 - L_i)^{ln2}$

$(1-l_i)^{ln2}(1-L_i)^{ln2} \geq (1-ln2 \cdot l_i)(1-ln2 \cdot L_i) = 1-ln2 \cdot l_i - ln2 \cdot L_i + ln^2 2 \cdot L_i l_i$
(Nach der Definition von Binomischer Lehrsatz für natürliche Exponenten)

Bleibt zu zeigen:
$-ln2 \cdot L_i + ln^2 2 \cdot L_i l_i \geq ln2 \cdot L_i$
$\Leftrightarrow L_i(ln2 - 1 + l_i) \geq L_i$
Es ist sehr offensichtlich, dass $ln2 - 1 + l_i$ größer als 1, weil die Tief immer größer als 1 ist.
$\Rightarrow 2^{-l_i} \geq 2^{-L_1}(1 - ln2 \cdot (l_i - L_i))$
$l_i := \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$ einsetzen:

$1 = \sum 2^{-l_i} \geq \sum 2^{\log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)}$
$\Rightarrow 1 \geq \sum p_i \cdot (1 - ln2 \cdot l_i + ln2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right))$
$\Leftrightarrow 1 \geq \sum p_i - \sum p_i \cdot ln2 \cdot l_i + \sum ln2 \cdot p_i \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$
Nach der Aufgabenstellung: $\sum p_i = 1$
$\Rightarrow \sum ln2 \cdot p_i \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leq \sum p_i \cdot ln2 \cdot l_i$
Also, die mittlere Codewortlänge ist durch die Entropie von unten beschränkt