

ALP3 U13

Übungsgruppe: Qianli Wang und Nazar Sopiha

January 25, 2020

1 Aufgabe 84:

Gegeben sind 3 verschiedene Farben 1,2,3. Wir färben den Graphen so, dass alle Knoten möglicherweise nur durch 2 Farben(also 1 und 2) gefärbt werden. Wenn es dringend die dritte Farbe benötigt wird, bedeutet es aber, dass dieser Knoten 2 Nachbarn mit verschiedenen Farben hat. Dann bestimmen wir die Anzahl der Knoten mit Farbe 1, Farbe 2 und Farbe 3 und nehmen das Maximum davon.

Behauptung:

G hat größte unabhängige Knotenmenge mit m Elementen, genau dann wenn es im Graphen G maximal m Knoten mit gleicher Farbe gibt.

Beweis:

Wir haben m Knoten mit gleicher Farbe, angenommen Farbe 1. Nach der Färbung gemäß unserer Regel existiert es dann nur 2 folgende Fälle für die verbleibenden Knoten: Dieser Knoten ist der Nachbar des einen von m Knoten. (In diesem Fall ist der Graph nur mit 2 Farben gefärbt) Dieser Knoten ist der Nachbar von mehreren (≥ 2) Knoten. (Mit der dritten Farbe) Also, es kann nicht mehr als m Knoten mit Farbe 1 geben \rightarrow In diesem Graphen G kann nur m unabhängige Knoten geben

2 Aufgabe 87:

$e^{-l_i} \geq 1 - l_i$ (Nach der Definition)

$$\Leftrightarrow e^{-l_i} e^{L_i} e^{-L_i} \geq 1 - l_i$$

$$\Leftrightarrow e^{-l_i} e^{L_i} \geq (1 - l_i)(1 - L_i)$$

$$\Leftrightarrow e^{-l_i} \geq e^{-L_i} (1 - l_i)(1 - L_i)$$

$$\because e^{-l_i} = 2^{-\frac{l_i}{\ln 2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\ln 2]{2^{-l_i}} \geq \sqrt[\ln 2]{2^{-L_i}} (1 - l_i)(1 - L_i)$$

$$\Leftrightarrow 2^{-l_i} \geq 2^{-L_i} (1 - l_i)^{\ln 2} (1 - L_i)^{\ln 2}$$

$(1 - l_i)^{\ln 2} (1 - L_i)^{\ln 2} \geq (1 - \ln 2 \cdot l_i)(1 - \ln 2 \cdot L_i) = 1 - \ln 2 \cdot l_i - \ln 2 \cdot L_i + \ln^2 2 \cdot L_i l_i$
(Nach der Definition von Binomischer Lehrsatz für natürliche Exponenten)

Bleibt zu zeigen:

$$-ln2 \cdot L_i + ln^2 2 \cdot L_i l_i \geq ln2 \cdot L_i$$

$$\Leftrightarrow L_i(ln2 - 1 + l_i) \geq L_i$$

Es ist sehr offensichtlich, dass $ln2 - 1 + l_i$ größer als 1, weil die Tief immer größer als 1 ist.

$$\Rightarrow 2^{-l_i} \geq 2^{-L_i}(1 - ln2 \cdot (l_i - L_i))$$

$l_i := \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$ einsetzen:

$$1 = \sum 2^{-l_i} \geq \sum 2^{\log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \sum p_i \cdot (1 - ln2 \cdot l_i + ln2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right))$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sum p_i - \sum p_i \cdot ln2 \cdot l_i + \sum ln2 \cdot p_i \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

Nach der Aufgabenstellung: $\sum p_i = 1$

$$\Rightarrow \sum ln2 \cdot p_i \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leq \sum p_i \cdot ln2 \cdot l_i$$

Also, die mittlere Codewortlänge ist durch die Entropie von unten beschränkt

3 Aufgabe 90 b:

名称	修改日期	类型	大小
 Sternstunden.txt	2020/1/25 11:06	文本文档	428 KB
 Sternstunden1.txt	2020/1/25 11:07	文本文档	255 KB
 U13_90.py	2020/1/24 9:59	Python File	9 KB
 Wintermärchen.txt	2020/1/22 18:39	文本文档	78 KB
 Wintermärchen1.txt	2020/1/25 11:07	文本文档	47 KB

Der Kompressionsfaktor:

Wintermärchen: $\frac{78}{47} = 1.659$

Sternstunden der Menschheit: $\frac{428}{255} = 1.678$