

# 第一章 概率论的基本概念

在现实生活和社会活动中发生的现象千姿百态,人们通常将这些现象归结为两类:确定性的和随机性的.例如:水在通常条件下温度达到  $100^{\circ}\text{C}$  时必然沸腾,温度为  $0^{\circ}\text{C}$  时必然结冰;同性电荷相互排斥,异性电荷相互吸引等等,这类现象称为确定性现象,它们在一定条件下一定会发生.另有一类现象,在一定条件下,试验有多种可能的结果,但事先又不能确定哪一种结果会发生,这类现象称为随机现象.例如,测量一个物体的长度,其测量误差的大小;从一批电视机中任意取一台,被选取的这台电视机的寿命长短等都是随机现象.概率论与数理统计,就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科.

这里我们注意到,随机现象是与一定的条件密切联系的.例如,在城市交通的某一路口,指定的一  $h$  内,汽车的流量多少就是一个随机现象,而“指定的一  $h$  内”就是条件,若换成  $2h$  内,  $5h$  内,流量就会不同.如将汽车的流量换成自行车的流量,差别就会更大,故随机现象与一定的条件是有密切联系的.

概率论与数理统计的应用是很广泛的,几乎渗透到所有科学技术领域,工业、农业、国防与国民经济的各个部门都要用到它.例如,工业生产中,人们应用概率统计方法进行质量控制,工业试验设计,产品的抽样检查等.还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报、地震预报及在经济活动中的投资决策和风险评估等.另外,概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了各种边缘性的应用学科,如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

## 第一节 样本空间、随机事件

### 1. 随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的,把对随机现象加以研究所进行的观察或实验,称为试验.若一个试验具有下列三个特点:

- 1° 可以在相同的条件下重复地进行;
- 2° 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以明确试验所有可能出现的结果;
- 3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称这一试验为随机试验 (random trial), 记为  $E$ .

下面举一些随机试验的例子.

$E_1$ : 抛一枚硬币, 观察正面  $H$  和反面  $T$  出现的情况;

$E_2$ : 掷两颗骰子, 观察出现的点数;

$E_3$ : 在一批电视机中任意抽取一台, 测试它的寿命;

$E_4$ : 城市某一交通路口, 观察指定一  $h$  内的汽车流量;

$E_5$ : 记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

### 2. 样本空间与随机事件

在一个试验中, 不论可能出现的结果有多少, 总可以从中找出一组基本结果, 满足:

- 1° 每进行一次试验, 必然出现且只能出现其中的一个基本结果.
- 2° 任何结果, 都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验  $E$  的所有基本结果组成的集合称为样本空间 (sample space), 记为  $\Omega$ . 样本空间的元素, 即  $E$  的每个基本结果, 称为样本点. 下面写出前面提到的试验  $E_k(k=1,2,3,4,5)$  的

样本空间  $\Omega$ :

$$\Omega_1: \{H, T\};$$

$$\Omega_2: \{(i, j) \mid i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$\Omega_3: \{t \mid t \geq 0\};$$

$$\Omega_4: \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$\Omega_5: \{(x, y) \mid T_0 \leq x \leq y \leq T_1\}$ , 这里  $x$  表示最低温度,  $y$  表示最高温度, 并设这一地区温度不会小于  $T_0$  也不会大于  $T_1$ .

随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega$  的子集称为  $E$  的随机事件 (random event), 简称事件<sup>①</sup>, 通常用大写字母  $A, B, C, \dots$  表示. 在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生. 例如, 在掷骰子的试验中, 可以用  $A$  表示“出现点数为偶数”这个事件, 若试验结果是“出现 6 点”, 就称事件  $A$  发生.

特别地, 由一个样本点组成的单点集, 称为基本事件. 例如, 试验  $E_1$  有两个基本事件  $\{H\}, \{T\}$ ; 试验  $E_2$  有 36 个基本事件  $\{(1, 1)\}, \{(1, 2)\}, \dots, \{(6, 6)\}$ .

每次试验中都必然发生的事件, 称为必然事件. 样本空间  $\Omega$  包含所有的样本点, 它是  $\Omega$  自身的子集, 每次试验中都必然发生, 故它就是一个必然事件. 因而必然事件我们也用  $\Omega$  表示. 在每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件. 空集  $\emptyset$  不包含任何样本点, 它作为样本空间的子集, 在每次试验中都不可能发生, 故它就是一个不可能事件. 因而不可能事件我们也用  $\emptyset$  表示.

### 3. 事件之间的关系及其运算

事件是一个集合, 因而事件间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

**1° 如果事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 则称事件  $A$  包含于事件  $B$  (或称事件  $B$  包含事件  $A$ ), 记作  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ ).**

$A \subset B$  的一个等价说法是, 如果事件  $B$  不发生, 则事件  $A$  必然不发生.

若  $A \subset B$  且  $B \subset A$ , 则称事件  $A$  与  $B$  相等 (或等价), 记为  $A=B$ .

为了方便起见, 规定对于任一事件  $A$ , 有  $\emptyset \subset A$ . 显然, 对于任一事件  $A$ , 有  $A \subset \Omega$ .

**2° “事件  $A$  与  $B$  中至少有一个发生”的事件称为  $A$  与  $B$  的并 (和), 记为  $A \cup B$ .**

由事件并的定义, 可立即得到:

对于任一事件  $A$ , 有

$$A \cup \Omega = \Omega; \quad A \cup \emptyset = A.$$

$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  表示 “ $A_1, A_2, \dots, A_n$  中至少有一个发生”这一事件.

$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  表示 “可数无穷多个事件  $A_i$  中至少有一个发生”这一事件.

**3° “事件  $A$  与  $B$  同时发生”的事件称为  $A$  与  $B$  的交 (积), 记为  $A \cap B$  (或  $AB$ ).**

由事件交的定义, 可立即得到:

对于任一事件  $A$ , 有

$$A \cap \Omega = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

<sup>①</sup>严格地说, 事件是指  $\Omega$  中满足某些条件的子集. 当  $\Omega$  是由有限个元素或由无穷可列个元素组成时, 每个子集都可作为一个事件. 若  $\Omega$  是由不可数无限个元素组成时, 某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后, 我们讲的事件都是指它是容许考虑的那种子集.

$B = \bigcap_{i=1}^n B_i$  表示 “ $B_1, \dots, B_n$  这  $n$  个事件同时发生” 这一事件.

$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  表示 “可数无穷多个事件  $B_i$  同时发生” 这一事件.

4° “事件  $A$  发生而  $B$  不发生” 的事件称为  $A$  与  $B$  的差, 记为  $A-B$ .

由事件差的定义, 可立即得到:

对于任一事件  $A$ , 有

$$A-A=\emptyset; \quad A-\emptyset=A; \quad A-\Omega=\emptyset.$$

5° 如果两个事件  $A$  与  $B$  不可能同时发生, 则称事件  $A$  与  $B$  为互不相容 (互斥), 记作  $A \cap B = \emptyset$ .

基本事件是两两互不相容的.

6° 若  $A \cup B = \Omega$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  互为逆事件 (对立事件).  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}$  是由所有不属于  $A$  的样本点组成的事件, 它表示 “ $A$  不发生” 这样一个事件. 显然  $\bar{\bar{A}} = A$ .

在一次试验中, 若  $A$  发生, 则  $\bar{A}$  必不发生 (反之亦然), 即在一次试验中,  $A$  与  $\bar{A}$  二者只能发生其中之一, 并且也必然发生其中之一. 显然有  $\bar{\bar{A}} = A$ .

对立事件必为互不相容事件, 反之, 互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用文氏 (Venn) 图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间  $\Omega$ , 矩形内的点表示样本点, 圆  $A$  与圆  $B$  分别表示事件  $A$  与事件  $B$ , 则  $A$  与  $B$  的各种关系及运算如下列各图所示 (见图 1-1~图 1-6).

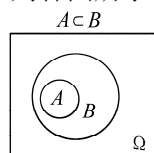


图 1-1

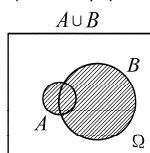


图 1-2

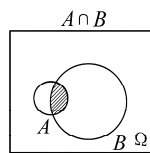


图 1-3

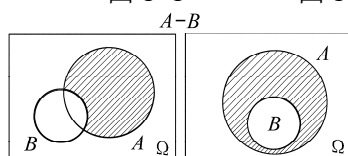


图 1-4

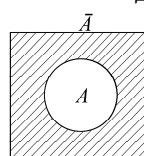


图 1-5

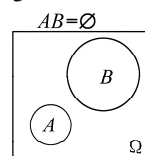


图 1-6

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

1° 交换律  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ ;

2° 结合律  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3° 分配律  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

分配律可以推广到有穷或可数无穷的情形, 即

$$A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i), \quad A \cup \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup A_i);$$

$$A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i), \quad A \cup \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup A_i).$$

$$4^\circ \quad A - B = A \bar{B} = A - AB;$$

5° 对有穷个或可列无穷个事件  $A_i$ , 恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i;$$

**例 1.1** 设  $A, B, C$  为 3 个事件, 试用  $A, B, C$  的运算式表示下列事件:

- (1)  $A$  发生而  $B$  与  $C$  都不发生;
- (2)  $A, B$  都发生而  $C$  不发生;
- (3)  $A, B, C$  至少有两个事件发生;
- (4)  $A, B, C$  至多有两个事件发生;
- (5)  $A, B, C$  恰有两个事件发生;
- (6)  $A, B$  中至少有一个发生而  $C$  不发生.

解 (1)  $A \bar{B} \bar{C}$  或  $A - B - C$  或  $A - (B \cup C)$  或  $\overline{AB \cup C}$ ;

(2)  $AB \bar{C}$  或  $AB - C$ ;

(3)  $(AB) \cup (AC) \cup (BC)$ ;

(4)  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ ;

(5)  $(AB \bar{C}) \cup (A \bar{B} C) \cup (\bar{A} BC)$ ;

(6)  $(A \cup B) \bar{C}$ .

**例 1.2** 在数学系的学生中任选一名学生. 若事件  $A$  表示“被选学生是男生”, 事件  $B$  表示“该生是三年级学生”, 事件  $C$  表示“该生是运动员”.

- (1) 叙述  $AB \bar{C}$  的意义.
- (2) 在什么条件下  $ABC = C$  成立?
- (3) 在什么条件下  $\bar{A} \subset B$  成立?

**解** (1) 该生是三年级男生, 但不是运动员.  
 (2) 全系运动员都是三年级男生.  
 (3) 全系女生都在三年级.

**例 1.3** 设事件  $A$  表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，求其对立事件  $\bar{A}$ 。

**解** 设  $B$  = “甲种产品畅销”， $C$  = “乙种产品滞销”，则  $A=BC$ ，故

$$\bar{A} = \overline{BC} = \bar{B} \cup \bar{C} = \text{“甲种产品滞销或乙种产品畅销”}.$$

## 第二节 概率、古典概型

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生.人们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的.为此，我们首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而我们再引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

### 1. 频率

**定义 1.1** 设在相同的条件下，进行了  $n$  次试验.若随机事件  $A$  在  $n$  次试验中发生了  $k$  次，则比值  $k/n$  称为事件  $A$  在这  $n$  次试验中发生的频率（frequency），记为  $f_n(A)=k/n$ .

由定义 1.1 容易推知，频率具有以下性质：

1° 对于任一事件  $A$ ，有  $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ；

2° 对于必然事件  $\Omega$ ，有  $f_n(\Omega)=1$ ；

3° 若事件  $A, B$  互不相容，则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

一般地，若事件  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i).$$

事件  $A$  发生的频率  $f_n(A)$  表示  $A$  发生的频繁程度，频率大，事件  $A$  发生就频繁，在一次试验中， $A$  发生的可能性也就大.反之亦然.因而，直观的想法是用  $f_n(A)$  表示  $A$  在一次试验中发生可能性的大小.但是，由于试验的随机性，即使同样是进行  $n$  次试验， $f_n(A)$  的值也不一定相同.但大量实验证实，随着重复试验次数  $n$  的增加，频率  $f_n(A)$  会逐渐稳定于某个常数附近，而偏离的可能性很小.频率具有“稳定性”这一事实，说明了刻画事件  $A$  发生可能性大小的数——概率具有一定的客观存在性.

历史上有一些著名的试验，德·摩根（De Morgan）、蒲丰（Buffon）和皮尔逊（Pearson）曾进行过大量掷硬币试验，所得结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

可见，出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数增加，它逐渐稳定于 0.5.这个 0.5 就反映正面出现的可能性的.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应,因而可将频率  $f_n(A)$  在  $n$  无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件  $A$  发生的概率.这就是概率的统计定义.

**定义 1.2** 设事件  $A$  在  $n$  次重复试验中发生的次数为  $k$ , 当  $n$  很大时, 频率  $k/n$  在某一数值  $p$  的附近摆动, 而随着试验次数  $n$  的增加, 发生较大摆动的可能性越来越小, 则称数  $p$  为事件  $A$  发生的概率, 记为  $P(A)=p$ .

要注意的是, 上述定义并没有提供确切计算概率的方法, 因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 在实际中, 我们不可能对每一个事件都做大量的试验, 况且我们不知道  $n$  要取多大才行. 如果  $n$  取很大, 不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为, 取试验次数为  $n+1$  来计算频率, 总会比取试验次数为  $n$  来计算频率将会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要, 我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发, 给出概率的公理化定义.

## 2. 概率的公理化定义

**定义 1.3** 设  $\Omega$  为样本空间,  $A$  为事件, 对于每一个事件  $A$  赋予一个实数, 记作  $P(A)$ , 如果  $P(A)$  满足以下条件:

1° 非负性:  $P(A) \geq 0$ ;

2° 规范性:  $P(\Omega)=1$ ;

3° 可数可加性: 对于两两互不相容的可数无穷多个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称实数  $P(A)$  为事件  $A$  的概率 (probability).

在第五章中将证明, 当  $n \rightarrow \infty$  时频率  $f_n(A)$  在一定意义下接近于概率  $P(A)$ . 基于这一事实, 我们就有理由用概率  $P(A)$  来表示事件  $A$  在一次试验中发生的可能性的.

由概率公理化定义, 可以推出概率的一些性质.

**性质 1**  $P(\emptyset)=0$

**证** 令  $A_n = \emptyset \quad n=1, 2, \dots,$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset, \quad \text{且 } A_i A_j = \emptyset \quad i \neq j, i, j=1, 2, \dots.$$

由概率的可数可加性, 得

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset),$$

而由  $P(\emptyset) \geq 0$  及上式, 知  $P(\emptyset)=0$ .

这个性质说明: 不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立, 我们将在第二章加以说明.

**性质 2 (有限可加性)** 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为两两互不相容事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

**证** 令  $A_{n+1}=A_{n+2}=\dots=\emptyset$ , 则当  $i \neq j, i, j=1, 2, \dots$  时,  $A_i A_j = \emptyset$ . 由可数可加性, 得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

**性质 3** 设  $A, B$  是两个事件, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(AB).$$

**证** 由于  $AB \subset B$ , 因此  $B = (AB) \cup (B-A)$ , 而  $(AB) \cap (B-A) = \emptyset$ , 则由性质 2, 有

$$P(B) = P(AB) + P(B-A),$$

$$P(B-A) = P(B) - P(AB).$$

由性质 3, 我们很容易推出如下相似的一个性质:

**性质 3'** 设  $A, B$  是两个事件, 若  $A \subset B$ , 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A); \quad P(A) \leq P(B).$$

**性质 4** 对于任一事件  $A$ ,  $P(A) \leq 1$

**证** 因为  $A \subset \Omega$ , 由性质 3', 得

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

**性质 5** 对于任一事件  $A$ , 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

**证** 因为  $\bar{A} \cup A = \Omega$ ,  $\bar{A} \cap A = \emptyset$ ,

由有限可加性, 得

$$1 = P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A),$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

**性质 6 (加法公式)** 对于任意两个事件  $A, B$ , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

**证** 因为  $A \cup B = A \cup (B-AB)$  且  $A \cap (B-AB) = \emptyset$ . 由性质 2、性质 3, 得

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B-AB)) = P(A) + P(B-AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 6 还可推广到 3 个事件的情形. 例如, 设  $A_1, A_2, A_3$  为任意 3 个事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

一般地, 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为任意  $n$  个事件, 可由归纳法证得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

**例 1.4** 设  $A, B$  为两事件,  $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(AB) = 0.1$ , 求:

- (1)  $A$  发生但  $B$  不发生的概率;
- (2)  $A$  不发生但  $B$  发生的概率;
- (3) 至少有一个事件发生的概率;

- (4)  $A, B$  都不发生的概率;  
 (5) 至少有一个事件不发生的概率.

解 (1)  $P(\overline{A\overline{B}}) = P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB) = 0.4;$

(2)  $P(\overline{A}B) = P(B-AB) = P(B) - P(AB) = 0.2;$

(3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = 0.7;$

(4)  $P(\overline{A\overline{B}}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3;$

(5)  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.1 = 0.9.$

### 3. 古典概型

定义 1.4 若随机试验  $E$  满足以下条件:

1° 试验的样本空间  $\Omega$  只有有限个样本点, 即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\};$$

2° 试验中每个基本事件的发生是等可能的, 即

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}),$$

则称此试验为古典概型, 或称为等可能概型.

由定义可知  $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$  是两两互不相容的, 故有

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_n\}),$$

又每个基本事件发生的可能性相同, 即

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}),$$

故

$$1 = nP(\{\omega_i\}),$$

从而

$$P(\{\omega_i\}) = 1/n, \quad i=1, 2, \dots, n$$

设事件  $A$  包含  $k$  个基本事件

即

$$A = \{\omega_{i1}\} \cup \{\omega_{i2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{ik}\},$$

则有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\omega_{i1}\} \cup \{\omega_{i2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{ik}\}) = P(\{\omega_{i1}\}) + P(\{\omega_{i2}\}) + \dots + P(\{\omega_{ik}\}) \\ &= \underbrace{1/n + 1/n + \dots + 1/n}_{k \text{ 个}} = k/n \end{aligned}$$

由此, 得到古典概型中事件  $A$  的概率计算公式为

$$P(A) = k/n = A \text{ 所包含的样本点数} / \Omega \text{ 中样本点总数} \quad (1-1)$$

称古典概型中事件  $A$  的概率为古典概率. 一般地, 可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算  $k$  和  $n$ , 进而求得相应的概率.

例 1.5 将一枚硬币抛掷三次, 求:

- (1) 恰有一次出现正面的概率;  
 (2) 至少有一次出现正面的概率.

解 将一枚硬币抛掷三次的样本空间

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$\Omega$  中包含有限个元素, 且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同.

(1) 设  $A$  表示“恰有一次出现正面”,

则

$$A = \{HTT, THT, TTH\},$$

故有

$$P(A) = 3/8.$$

(2) 设  $B$  表示“至少有一次出现正面”,



由  $\bar{B} = \{TTT\}$ , 得

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 1/8 = 7/8$$

当样本空间的元素较多时, 我们一般不再将  $\Omega$  中的元素一一列出, 而只需分别求出  $\Omega$  中与  $A$  中包含的元素的个数 (即基本事件的个数), 再由 (1-1) 式求出  $A$  的概率.

**例 1.6** 一口袋装有 6 只球, 其中 4 只白球, 2 只红球. 从袋中取球两次, 每次随机地取一只. 考虑两种取球方式:

(a) 第一次取一只球, 观察其颜色后放回袋中, 搅匀后再任取一球. 这种取球方式叫做有放回抽取.

(b) 第一次取一球后不放回袋中, 第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做不放回抽取.

试分别就上面两种情形求:

- (1) 取到的两只球都是白球的概率;
- (2) 取到的两只球颜色相同的概率;
- (3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

**解** 设  $A$  表示事件“取到的两只球都是白球”,  $B$  表示事件“取到的两只球都是红球”,  $C$  表示事件“取到的两只球中至少有一只是白球”. 则  $A \cup B$  表示事件“取到的两只球颜色相同”, 而  $C = \bar{B}$ .

在袋中依次取两只球, 每一种取法为一个基本事件, 显然此时样本空间中仅包含有限个元素, 且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同, 因而可利用 (1-1) 式来计算事件的概率.

(a) 有放回抽取的情形

第一次从袋中取球有 6 只球可供抽取, 第二次也有 6 只球可供抽取. 由乘法原理知共有  $6 \times 6$  种取法, 即基本事件总数为  $6 \times 6$ . 对于事件  $A$  而言, 由于第一次有 4 只白球可供抽取, 第二次也有 4 只白球可供抽取, 由乘法原理知共有  $4 \times 4$  种取法, 即  $A$  中包含  $4 \times 4$  个元素. 同理,  $B$  中包含  $2 \times 2$  个元素, 于是

$$P(A) = (4 \times 4) / (6 \times 6) = 4/9,$$

$$P(B) = (2 \times 2) / (6 \times 6) = 1/9$$

由于  $AB = \Phi$ , 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 5/9,$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 8/9.$$

(b) 不放回抽取的情形:

第一次从 6 只球中抽取, 第二次只能从剩下的 5 只球中抽取, 故共有  $6 \times 5$  种取法, 即样本点总数为  $6 \times 5$ . 对于事件  $A$  而言, 第一次从 4 只白球中抽取, 第二次从剩下的 3 只白球中抽取, 故共有  $4 \times 3$  种取法, 即  $A$  中包含  $4 \times 3$  个元素, 同理  $B$  中包含  $2 \times 1$  个元素, 于是

$$P(A) = (4 \times 3) / (6 \times 5) = \frac{P_4^2}{P_6^2} = 2/5,$$

$$P(B) = (2 \times 1) / (6 \times 5) = \frac{P_2^2}{P_6^2} = 1/15.$$

由于  $AB=\Phi$ , 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 7/15,$$

$$P(C) = 1 - P(B) = 14/15.$$

在不放回抽取中, 一次取一个, 一共取  $m$  次也可看作一次取出  $m$  个, 故本例中也可用组合的方法, 得

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = 2/5, \quad P(B) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = 1/15.$$

**例 1.7** 箱中装有  $a$  只白球,  $b$  只黑球, 现做不放回抽取, 每次一只. 求:

(1) 任取  $m+n$  只, 恰有  $m$  只白球,  $n$  只黑球的概率 ( $m \leq a, n \leq b$ );

(2) 第  $k$  次才取到白球的概率 ( $k \leq b+1$ );

(3) 第  $k$  次恰取到白球的概率 ( $k \leq a+b$ ).

**解** (1) 可看作一次取出  $m+n$  只球, 与次序无关, 是组合问题. 从  $a+b$  只球中任取  $m+n$  只, 所有可能的取法共有  $C_{a+b}^{m+n}$  种, 每一种取法为一基本事件且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 从  $a$  只白球中取  $m$  只, 共有  $C_a^m$  种不同的取法, 从  $b$  只黑球中取  $n$  只, 共有  $C_b^n$  种不同的取法. 由乘法原理知, 取到  $m$  只白球,  $n$  只黑球的取法共有  $C_a^m C_b^n$  种, 于是所求概率为

$$p_1 = \frac{C_a^m C_b^n}{C_{a+b}^{m+n}}.$$

(2) 抽取与次序有关. 每次取一只, 取后不放回, 一共取  $k$  次, 每种取法即是从  $a+b$  个不同元素中任取  $k$  个不同元素的一个排列, 每种取法是一个基本事件, 共有  $P_{a+b}^k$  个基本事件, 且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 前  $k-1$  次都取到黑球, 从  $b$  只黑球中任取  $k-1$  只的排法种数有  $P_b^{k-1}$  种, 第  $k$  次抽取的白球可为  $a$  只白球中任一只, 有  $P_a^1$  种不同的取法. 由乘法原理知, 前  $k-1$  次都取到黑球, 第  $k$  次取到白球的取法共有  $P_b^{k-1} P_a^1$  种, 于是所求概率为

$$p_2 = \frac{P_b^{k-1} P_a^1}{P_{a+b}^k}.$$

(3) 基本事件总数仍为  $P_{a+b}^k$ . 第  $k$  次必取到白球, 可为  $a$  只白球中任一只, 有  $P_a^1$  种不同的取法, 其余被取的  $k-1$  只球可以是其余  $a+b-1$  只球中的任意  $k-1$  只, 共有  $P_{a+b-1}^{k-1}$  种不同的取法, 由乘法原理知, 第  $k$  次恰取到白球的取法有  $P_a^1 P_{a+b-1}^{k-1}$  种, 故所求概率为

$$p_3 = \frac{P_a^1 P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b}.$$

例 1.7(3)中值得注意的是  $p_3$  与  $k$  无关, 也就是说其中任一次抽球, 抽到白球的概率都跟第一次抽到白球的概率相同, 为  $\frac{a}{a+b}$ , 而跟抽球的先后次序无关 (例如, 购买福利彩票时, 尽管购买的先后次序不同, 但各人得奖的机会是一样的) .

**例 1.8** 有  $n$  个人, 每个人都以同样的概率  $1/N$  被分配在  $N$  ( $n < N$ ) 间房中的任一间中, 求恰好有  $n$  个房间, 其中各住一人的概率.

**解** 每个人都有  $N$  种分法, 这是可重复排列问题,  $n$  个人共有  $N^n$  种不同分法. 因为没有指定是哪几间房, 所以首先选出  $n$  间房, 共有  $C_N^n$  种选法. 对于其中每一种选法, 每间房各住一人共有  $n!$  种分法, 故所求概率为

$$p = \frac{C_N^n n!}{N^n}.$$

许多直观背景很不相同的实际问题, 都和本例具有相同的数学模型. 比如生日问题: 假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的, 那么随机选取  $n$  ( $n \leq 365$ ) 个人, 他们的生日各不相同的概率为

$$p_1 = \frac{C_{365}^n n!}{365^n},$$

因而  $n$  个人中至少有两个人生日相同的概率为

$$p_2 = 1 - \frac{C_{365}^n n!}{365^n}.$$

例如  $n=64$  时  $p_2=0.997$ , 这表示在仅有 64 人的班级里, “至少有两人生日相同” 的概率与 1 相差无几, 因此几乎总是会出现的. 这个结果也许会让大多数人惊奇, 因为 “一个班级中至少有两人生日相同” 的概率并不如人们直觉中想象的那样小, 而是相当大. 这也告诉我们, “直觉” 并不很可靠, 说明研究随机现象统计规律是非常重要的.

**例 1.9** 12 名新生中有 3 名优秀生, 将他们随机地平均分配到 3 个班中去, 试求:

- (1) 每班各分配到一名优秀生的概率;
- (2) 3 名优秀生分配到同一个班的概率.

**解** 12 名新生平均分配到三个班的可能分法总数为

$$C_{12}^4 C_8^4 C_4^4 = \frac{12!}{(4!)^3}$$

(1) 设  $A$  表示 “每班各分配到一名优秀生”

3 名优秀生每一个班分配一名共有  $3!$  种分法, 而其他 9 名学生平均分配到 3 个班共有  $\frac{9!}{(3!)^3}$  种分法, 由乘法原理,  $A$  包含基本事件数为

$$3! \cdot \frac{9!}{(3!)^3} = \frac{9!}{(3!)^2}$$

故有

$$P(A) = \frac{9!}{(3!)^2} / \frac{12!}{(4!)^3} = 16/55$$

(2) 设  $B$  表示“3 名优秀生分到同一班”，故 3 名优秀生分到同一班共有 3 种分法，其他 9 名学生分法总数为  $C_9^1 C_8^4 C_4^4 = \frac{9!}{1!4!4!}$ ，故由乘法原理， $B$  包含样本总数为  $3 \cdot \frac{9!}{1!4!4!}$ 。故有

$$P(B) = \frac{3 \cdot 9!}{(4!)^2} / \frac{12!}{(4!)^3} = 3/55$$

#### 4. 几何概型

上述古典概型的计算，只适用于具有等可能性的有限样本空间，若试验结果无穷多，它显然已不适合。为了克服有限的局限性，可将古典概型的计算加以推广。

设试验具有以下特点：

1° 样本空间  $\Omega$  是一个几何区域，这个区域大小可以度量（如长度、面积、体积等），并把  $\Omega$  的度量记作  $m(\Omega)$ 。

2° 向区域  $\Omega$  内任意投掷一个点，落在区域内任一个点处都是“等可能的”。或者设落在  $\Omega$  中的区域  $A$  内的可能性与  $A$  的度量  $m(A)$  成正比，与  $A$  的位置和形状无关。

不妨也用  $A$  表示“掷点落在区域  $A$  内”的事件，那么事件  $A$  的概率可用下列公式计算：

$$P(A) = m(A)/m(\Omega),$$

称它为几何概率。

**例 1. 10** 在区间  $(0, 1)$  内任取两个数，求这两个数的乘积小于  $1/4$  的概率。

**解** 设在  $(0, 1)$  内任取两个数为  $x, y$ ，则

$$0 < x < 1, 0 < y < 1$$

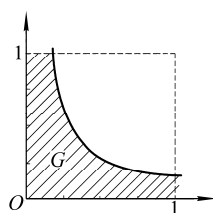


图 1-7

即样本空间是由点  $(x, y)$  构成的边长为 1 的正方形  $\Omega$ ，其面积为 1。

令  $A$  表示“两个数乘积小于  $1/4$ ”，则

$$A = \{ (x, y) \mid 0 < xy < 1/4, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \}$$

事件  $A$  所围成的区域见图 1-7，则所求概率

$$P(A) = \frac{1 - \int_{1/4}^1 dx \int_{1/4x}^1 dy}{1} = \frac{1 - \int_{1/4}^1 (1 - \frac{1}{4x}) dx}{1} = 1 - \frac{3}{4} + \int_{1/4}^1 \frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

**例 1. 11** 两人相约在某天下午 2:00-3:00 在预定地点见面，先到者要等候 20min，过时则离去。如果每人在这指定的一 h 内任一时刻到达是等可能的，求约会的两人能会到面的概率。

**解** 设  $x, y$  为两人到达预定地点的时刻, 那么, 两人到达时间的一切可能结果落在边长为 60 的正方形内, 这个正方形就是样本空间  $\Omega$ , 而两人能会面的充要条件是  $|x-y| \leq 20$ , 即

$$x-y \leq 20 \text{ 且 } y-x \leq 20.$$

令事件  $A$  表示“两人能会到面”, 这区域如图 1-8 中的  $A$ . 则

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

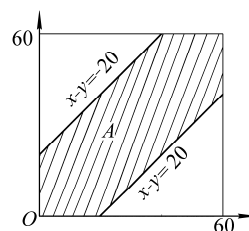


图 1-8

### 第三节 条件概率、全概率公式

#### 1. 条件概率的定义

**定义 1.5** 设  $A, B$  为两个事件, 且  $P(B) > 0$ , 则称  $P(AB)/P(B)$  为事件  $B$  已发生的条件下事件  $A$  发生的条件概率, 记为  $P(A|B)$ , 即

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

易验证,  $P(A|B)$  符合概率定义的 3 条公理, 即:

1° 对于任一事件  $A$ , 有  $P(A|B) \geq 0$ ;

2°  $P(\Omega|B) = 1$ ;

$$3^\circ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B),$$

其中  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  为两两互不相容事件.

这说明条件概率符合定义 1.3 中概率应满足的三个条件, 故对概率已证明的结果都适用于条件概率. 例如, 对于任意事件  $A_1, A_2$ , 有

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 A_2 | B)$$

又如, 对于任意事件  $A$ , 有

$$P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B).$$

**例 1.12** 某电子元件厂有职工 180 人, 其中男职工有 100 人, 女职工有 80 人, 男女职工中非熟练工人分别有 20 人与 5 人. 现从该厂中任选一名职工,

(1) 该职工为非熟练工人的概率是多少?

(2) 若已知被选出的是女职工, 她是非熟练工人的概率又是多少?

**解** 题 (1) 的求解我们已很熟悉, 设  $A$  表示“任选一名职工为非熟练工人”的事件, 则

$$P(A) = 25/180 = 5/36$$

而题 (2) 的条件有所不同, 它增加了一个附加的条件, 已知被选出的是女职工, 记“选出女职工”为事件  $B$ , 则题 (2) 就是要求出“在已知  $B$  事件发生的条件下  $A$  事件发生的概率”, 这就要用到条件概率公式, 有

$$P(A|B) = P(AB)/P(B) = (5/180)/(80/180) = 1/16$$

此题也可考虑用缩小样本空间的方法来做, 既然已知选出的是女职工, 那么男职工就可

排除在考虑范围之外,因此“ $B$ 已发生条件下的事件 $A$ ”就相当于在全部女职工中任选一人,并选出了非熟练工人.从而 $\Omega_B$ 样本点总数不是原样本空间 $\Omega$ 的180人,而是全体女职工人数80人,而上述事件中包含的样本点总数就是女职工中的非熟练工人数5人,因此所求概率为

$$P(A|B)=5/80=1/16$$

**例 1.13** 某科动物出生之后活到20岁的概率为0.7,活到25岁的概率为0.56,求现年为20岁的动物活到25岁的概率.

**解** 设 $A$ 表示“活到20岁以上”的事件, $B$ 表示“活到25岁以上”的事件,则有  
 $P(A)=0.7, P(B)=0.56$  且  $B \subset A$ .

得  $P(B|A)=P(AB)/P(A)=P(B)/P(A)=0.56/0.7=0.8$ .

**例 1.14** 一盒中装有5只产品,其中有3只正品,2只次品,从中取产品两次,每次取一只,作不放回抽样,求在第一次取到正品条件下,第二次取到的也是正品的概率.

**解** 设 $A$ 表示“第一次取到正品”的事件, $B$ 表示“第二次取到正品”的事件,由条件得

$$P(A)=(3 \times 4)/(5 \times 4)=3/5, \quad P(AB)=(3 \times 2)/(5 \times 4)=3/10,$$

故有

$$P(B|A)=P(AB)/P(A)=(3/10)/(3/5)=1/2.$$

此题也可按产品编号来做,设1,2,3号为正品,4,5号为次品,则样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ ,若 $A$ 已发生,即在1,2,3中抽走一个,于是第二次抽取所有可能结果的集合中共有4只产品,其中有2只正品,故得

$$P(B|A)=2/4=1/2.$$

## 2. 乘法定理

由条件概率定义  $P(B|A)=P(AB)/P(A)$  ( $P(A)>0$ ),两边同乘以  $P(A)$  可得  
 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ , 由此可得下述定理:

**定理 1.1 (乘法定理)** 设  $P(A)>0$ , 则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

易知,若  $P(B)>0$ , 则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

乘法定理也可推广到3个事件的情况,例如,设 $A, B, C$ 为3个事件,且  $P(AB)>0$ , 则有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

一般地,设 $n$ 个事件为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 若  $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1})>0$ , 则有

$$P(A_1A_2 \cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}).$$

事实上,由  $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset A_1A_2 \cdots A_{n-1}$ , 有

$$P(A_1) \geq P(A_1A_2) \geq \cdots \geq P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$$

故公式右边的条件概率每一个都有意义,由条件概率定义,可知

$$\begin{aligned} & P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} \cdots \frac{P(A_1A_2 \cdots A_n)}{P(A_1A_2 \cdots A_{n-1})} = P(A_1A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

**例 1.15** 一批彩电,共100台,其中有10台次品,采用不放回抽样依次抽取3次,每次抽一台,求第3次才抽到合格品的概率.

**解** 设  $A_i (i=1,2,3)$  表示“第 $i$ 次抽到合格品”的事件,则有

$$P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(A_3 | \overline{A_1} \overline{A_2}) = 10/100 \cdot 9/99 \cdot 90/98 \approx 0.0083.$$

**例 1.16** 设盒中有  $m$  只红球,  $n$  只白球, 每次从盒中任取一只球, 看后放回, 再放入  $k$  只与所取颜色相同的球. 若在盒中连取 4 次, 试求第一次, 第二次取到红球, 第三次, 第四次取到白球的概率.

**解** 设  $R_i (i=1,2,3,4)$  表示“第  $i$  次取到红球”的事件,  $\overline{R_i} (i=1,2,3,4)$  表示“第  $i$  次取到白球”的事件. 则有

$$\begin{aligned} P(R_1 R_2 \overline{R_3} \overline{R_4}) &= P(R_1)P(R_2 | R_1)P(\overline{R_3} | R_1 R_2)P(\overline{R_4} | R_1 R_2 \overline{R_3}) \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k} \cdot \frac{n}{m+n+2k} \cdot \frac{n+k}{m+n+3k}. \end{aligned}$$

**例 1.17** 袋中有  $n$  个球, 其中  $n-1$  个红球, 1 个白球.  $n$  个人依次从袋中各取一球, 每人取一球后不再放回袋中, 求第  $i (i=1,2,\dots,n)$  人取到白球的概率.

**解** 设  $A_i$  表示“第  $i$  人取到白球” ( $i=1,2,\dots,n$ ) 的事件, 显然

$$P(A_1) = 1/n.$$

由  $\overline{A_1} \supset A_2$ , 故  $A_2 = \overline{A_1} A_2$ , 于是

$$P(A_2) = P(\overline{A_1} A_2) = P(\overline{A_1}) P(A_2 | \overline{A_1}) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = 1/n.$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) P(A_3 | \overline{A_1} \overline{A_2}) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = 1/n. \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

$$P(A_n) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{n-1}} A_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1/n$$

因此, 第  $i$  个人 ( $i=1,2,\dots,n$ ) 取到白球的概率与  $i$  无关, 都是  $1/n$ .

这个例题与例 1.7(3)实际上是同一个概率模型.

### 3. 全概率公式和贝叶斯公式

为建立两个用来计算概率的重要公式, 我们先引入样本空间  $\Omega$  的划分的定义.

**定义 1.6** 设  $\Omega$  为样本空间,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $\Omega$  的一组事件, 若满足

1°  $A_i A_j = \Phi, i \neq j, i, j=1,2,\dots,n,$

$$2^\circ \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega,$$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分.

例如:  $A, \overline{A}$  就是  $\Omega$  的一个划分.

若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $\Omega$  的一个划分, 那么, 对每次试验, 事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中必有一个且仅有一个发生.

**定理 1.2 (全概率公式)** 设  $B$  为样本空间  $\Omega$  中的任一事件,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $\Omega$  的一

个划分, 且  $P(A_i) > 0, i=1,2,\dots,n$ , 则有

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

称上述公式为全概率公式.

全概率公式表明, 在许多实际问题中事件  $B$  的概率不易直接求得, 如果容易找到  $\Omega$  的一个划分  $A_1, \dots, A_n$ , 且  $P(A_i)$  和  $P(B|A_i)$  为已知, 或容易求得, 那么就可以根据全概率公式求出  $P(B)$ .

$$\begin{aligned} \text{证 } P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup \dots \cup BA_n) \\ &= P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \end{aligned}$$

另一个重要公式叫做贝叶斯公式.

**定理 1.3(贝叶斯(Bayes)公式)** 设样本空间为  $\Omega$ ,  $B$  为  $\Omega$  中的事件,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $\Omega$  的一个划分, 且  $P(B) > 0, P(A_i) > 0, i=1,2,\dots,n$ , 则有

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

称上式为贝叶斯(Bayes)公式, 也称为逆概率公式.

**证** 由条件概率公式及全概率公式, 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

**例 1.18** 某工厂生产的产品以 100 件为一批, 假定每一批产品中的次品数最多不超过 4 件, 且具有如下的概率:

一批产品中的次品数	0	1	2	3	4
概率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

现进行抽样检验, 从每批中随机取出 10 件来检验, 若发现其中有次品, 则认为该批产品不合格, 求一批产品通过检验的概率.

**解** 以  $A_i$  表示事件“一批产品中有  $i$  件次品”,  $i=0,1,2,3,4$ ,  $B$  表示事件“通过检验”, 则由题意得

$$P(A_0) = 0.1, \quad P(B|A_0) = 1,$$

$$P(A_1) = 0.2, \quad P(B|A_1) = \frac{C_{99}^{10}}{C_{100}^{10}} = 0.9,$$

$$P(A_2) = 0.4, \quad P(B|A_2) = \frac{C_{98}^{10}}{C_{100}^{10}} = 0.809,$$

$$P(A_3) = 0.2, \quad P(B|A_3) = \frac{C_{97}^{10}}{C_{100}^{10}} = 0.727,$$

$$P(A_4) = 0.1, \quad P(B|A_4) = \frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}} = 0.652.$$



由全概率公式，得

$$P(B) = \sum_{i=0}^4 P(A_i)P(B|A_i) = 0.1 \times 1 + 0.2 \times 0.9 + 0.4 \times 0.809 + 0.2 \times 0.727 + 0.1 \times 0.652 \approx 0.814.$$

**例 1.19** 设某工厂有甲、乙、丙 3 个车间生产同一种产品，产量依次占全厂的 45%，35%，20%，且各车间的次品率分别为 4%，2%，5%，现在从一批产品中检查出 1 个次品，问该次品是由哪个车间生产的可能性最大？

**解** 设  $A_1, A_2, A_3$  表示产品来自甲、乙、丙 3 个车间， $B$  表示“产品为次品”的事件，易知  $A_1, A_2, A_3$  是样本空间  $\Omega$  的一个划分，且有

$$P(A_1) = 0.45, \quad P(A_2) = 0.35, \quad P(A_3) = 0.2, \\ P(B|A_1) = 0.04, \quad P(B|A_2) = 0.02, \quad P(B|A_3) = 0.05.$$

由全概率公式，得

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ = 0.45 \times 0.04 + 0.35 \times 0.02 + 0.2 \times 0.05 = 0.035.$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B) = (0.45 \times 0.04) / 0.035 = 0.514, \\ P(A_2|B) = (0.35 \times 0.02) / 0.035 = 0.200, \\ P(A_3|B) = (0.20 \times 0.05) / 0.035 = 0.286$$

由此可见，该次品由甲车间生产的可能性最大。

**例 1.20** 由以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下效果：被诊断者有癌症，试验反应为阳性的概率为 0.95；被诊断者没有癌症，试验反应为阴性的概率为 0.95。现对自然人群进行普查，设被试验的人群中患有癌症的概率为 0.005，求：已知试验反应为阳性，该被诊断者确有癌症的概率。

**解** 设  $A$  表示“患有癌症”， $\bar{A}$  表示“没有癌症”， $B$  表示“试验反应为阳性”，则由条件得

$$P(A) = 0.005, \quad P(\bar{A}) = 0.995, \\ P(B|A) = 0.95, \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.95$$

由此

$$P(B|\bar{A}) = 1 - 0.95 = 0.05$$

由贝叶斯公式，得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \approx 0.087.$$

这就是说，根据以往的数据分析可以得到，患有癌症的被诊断者，试验反应为阳性的概率为 95%，没有患癌症的被诊断者，试验反应为阴性的概率为 95%，都叫做先验概率。而在得到试验结果反应为阳性，该被诊断者确有癌症的重新加以修正的概率 0.087 叫做后验概率。此项试验也表明，用它作为普查，正确性诊断只有 8.7%（即 1000 人具有阳性反应的人中大约只有 87 人的确患有癌症），由此可看出，若把  $P(B|A)$  和  $P(A|B)$  搞混淆就会造成误诊的不良后果。

概率乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式称为条件概率的 3 个重要公式。它们在解决某

些复杂事件的概率问题中起到十分重要的作用.

## 第四节 独立性

### 1. 事件的独立性

独立性是概率统计中的一个重要概念, 在讲独立性的概念之前先介绍一个例题.

**例 1.21** 某公司有工作人员 100 名, 其中 35 岁以下的青年人 40 名, 该公司每天在所有工作人员中随机选出一人为当天的值班员, 而不论其是否在前一天刚好值过班. 求:

- (1) 已知第一天选出的是青年人, 第二天选出青年人的概率;
- (2) 已知第一天选出的不是青年人, 第二天选出青年人的概率;
- (3) 第二天选出青年人的概率.

**解** 以事件  $A_1, A_2$  表示“第一天, 第二天选得青年人”, 则

$$P(A_1) = 40/100 = 0.4,$$

$$P(A_1 A_2) = 40/100 \cdot 40/100 = 0.16$$

故 (1) 为  $P(A_2 | A_1) = P(A_1 A_2) / P(A_1) = 0.4$ .

$$(2) \text{ 为 } P(A_2 | \bar{A}_1) = P(A_2 \bar{A}_1) / P(\bar{A}_1) = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{40}{100}}{\frac{60}{100}} = 0.4.$$

$$(3) \text{ 为 } P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = 0.4 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4 = 0.4.$$

设  $A_1, A_2$  为两个事件, 若  $P(A_1) > 0$ , 则可定义  $P(A_2 | A_1)$ , 一般情形,  $P(A_2) \neq P(A_2 | A_1)$ , 即事件  $A_1$  的发生对事件  $A_2$  发生的概率是有影响的. 在特殊情况下, 一个事件的发生对另一事件发生的概率没有影响, 如例 1.21 有

$$P(A_2) = P(A_2 | A_1) = P(A_2 | \bar{A}_1).$$

此时乘法公式

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) = P(A_1) P(A_2).$$

**定义 1.7** 若事件  $A_1, A_2$  满足

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2),$$

则称事件  $A_1, A_2$  是相互独立的.

容易知道, 若  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , 则如果  $A, B$  相互独立, 就有  $P(AB) = P(A)P(B) > 0$ , 故  $AB \neq \emptyset$ , 即  $A, B$  相容. 反之, 如果  $A, B$  互不相容, 即  $AB = \emptyset$ , 则  $P(AB) = 0$ , 而  $P(A)P(B) > 0$ , 所以  $P(AB) \neq P(A)P(B)$ , 此即  $A$  与  $B$  不独立. 这就是说, 当  $P(A) > 0$  且  $P(B) > 0$  时,  $A, B$  相互独立与  $A, B$  互不相容不能同时成立.

**定理 1.4** 若事件  $A$  与  $B$  相互独立, 则下列各对事件也相互独立:

$$A \text{ 与 } \bar{B}, \bar{A} \text{ 与 } B, \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}.$$

证 因为  $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$ , 显然  $(AB) \cap (A\bar{B}) = \emptyset$ ,

故  $P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)P(B) + P(A\bar{B})$ ,

于是  $P(A\bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$ .

即  $A$  与  $\bar{B}$  相互独立. 由此可立即推出,  $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  相互独立, 再由  $\bar{\bar{B}} = B$ , 又可推出  $\bar{A}$  与  $B$  相互独立.

**定理 1.5** 若事件  $A, B$  相互独立, 且  $0 < P(A) < 1$ , 则

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B).$$

定理的正确性由乘法公式、相互独立性定义容易推出.

在实际应用中, 还经常遇到多个事件之间的相互独立问题. 例如: 对 3 个事件的独立性可作如下定义.

**定义 1.8** 设  $A_1, A_2, A_3$  是三个事件, 如果满足等式

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

则称  $A_1, A_2, A_3$  为相互独立的事件.

这里要注意, 若事件  $A_1, A_2, A_3$  仅满足定义中前 3 个等式, 则称  $A_1, A_2, A_3$  是两两独立的. 由此可知,  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 则  $A_1, A_2, A_3$  是两两独立的. 但反过来, 则不一定成立.

**例 1.22** 设一个盒中装有 4 张卡片, 4 张卡片上依次标有下列各组字母:

$$XXY, XYX, YXX, YYY,$$

从盒中任取一张卡片, 用  $A_i$  表示“取到的卡片第  $i$  位上的字母为  $X$ ” ( $i=1,2,3$ ) 的事件. 求证:

$A_1, A_2, A_3$  两两独立, 但  $A_1, A_2, A_3$  并不相互独立.

证 易求出

$$P(A_1) = 1/2, P(A_2) = 1/2, P(A_3) = 1/2$$

$$P(A_1 A_2) = 1/4, P(A_1 A_3) = 1/4, P(A_2 A_3) = 1/4$$

故  $A_1, A_2, A_3$  是两两独立的.

但  $P(A_1 A_2 A_3) = 0$ , 而  $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/8$ , 故

$$P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

因此,  $A_1, A_2, A_3$  不是相互独立的.

**定义 1.9** 对  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 若以下  $2^n - n - 1$  个等式成立:

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), 1 \leq i < j \leq n;$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), 1 \leq i < j < k \leq n;$$

.....

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n),$$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是相互独立的事件.

由定义可知,

1° 若  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) 相互独立, 则其中任意  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) 个事件也相互独立.

2° 若  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$  相互独立, 则将  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中任意多个事件换成它们的对立事件, 所得的  $n$  个事件仍相互独立.

在实际应用中, 对于事件相互独立性, 我们往往不是根据定义来判断, 而是按实际意义来确定.

**例 1.23** 设高射炮每次击中飞机的概率为 0.2, 问至少需要多少门这种高射炮同时独立发射 (每门射一次) 才能使击中飞机的概率达到 95% 以上.

**解** 设需要  $n$  门高射炮,  $A$  表示 “飞机被击中”,  $A_i$  表示 “第  $i$  门高射炮击中飞机” ( $i=1, 2, \dots, n$ ). 则

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}) = 1 - (1-0.2)^n$$

令  $1 - (1-0.2)^n \geq 0.95$ , 得  $0.8^n \leq 0.05$ , 即得

$$n \geq 14.$$

即至少需要 14 门高射炮才能有 95% 以上的把握击中飞机.

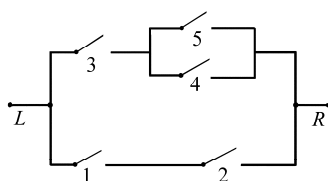


图 1-9

**例 1.24** 设电路如图 1-9 所示, 其中 1, 2, 3, 4, 5 为继电器接点, 设各继电器接点闭合与否相互独立, 且每一继电器闭合的概率为  $p$ , 求  $L$  至  $R$  为通路的概率.

**解** 设事件  $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  表示 “第  $i$  个继电器接点闭合”,  $A$  表示 “ $L$  至  $R$  为通路”, 于是

$$\begin{aligned} A &= (A_1 A_2) \cup (A_3 A_4) \cup (A_3 A_5) \\ P(A) &= P((A_1 A_2) \cup (A_3 A_4) \cup (A_3 A_5)) \\ &= P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) + P(A_3 A_5) - P(A_1 A_2 A_3 A_4) \\ &\quad - P(A_1 A_2 A_3 A_5) - P(A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \end{aligned}$$

由  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  的相互独立性可知

$$P(A) = 3p^2 - 2p^4 - p^3 + p^5$$

## 2. 伯努利 (Bernoulli) 试验

随机现象的规律性要从大量的现象中分析得出. 在相同条件下进行重复试验或观察, 是一种非常重要的概率模型.

若试验  $E$  只有两个可能结果:  $A$  及  $\overline{A}$ , 则称  $E$  为伯努利试验. 设  $P(A)=p$ ,  $0 < p < 1$ , 此时  $P(\overline{A})=1-p$ . 将  $E$  独立地重复进行  $n$  次, 则称这一串重复的独立试验为  $n$  重伯努利试验.

这里 “重复” 是指每次试验是在相同的条件下进行, 在每次试验中  $P(A)=p$  保持不变;

“独立” 是指各次试验的结果互不影响, 即若以  $C_i$  记第  $i$  次试验的结果,  $C_i$  为  $A$  或  $\overline{A}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 则

$$P(C_1 C_2 \cdots C_n) = P(C_1)P(C_2) \cdots P(C_n).$$

$n$  重伯努利试验在实际中有广泛的应用, 是研究最多的模型之一. 例如, 将一枚硬币抛掷一次, 观察出现的是正面还是反面, 这是一个伯努利试验. 若将一枚硬币抛  $n$  次, 就是  $n$  重

伯努利试验.又如抛掷一颗骰子,若  $A$  表示得到“6 点”,则  $\bar{A}$  表示得到“非 6 点”,这是一个伯努利试验.将骰子抛  $n$  次,就是  $n$  重伯努利试验.再如在  $N$  件产品中有  $M$  件次品,现从中任取一件,检测其是否是次品,这是一个伯努利试验.如有放回地抽取  $n$  次,就是  $n$  重伯努利试验.

对于贝努里概型,我们关心的是  $n$  重试验中,  $A$  出现  $k$  次的概率 ( $0 \leq k \leq n$ ) 是多少? 我们用  $P_n(k)$  表示  $n$  重伯努利试验中,  $A$  出现  $k$  次的概率.

$$\text{由} \quad P(A)=p, \quad P(\bar{A})=1-p,$$

又因为

$$\underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个}} \underbrace{\bar{A} \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k \text{ 个}} \cup \underbrace{AA \cdots A}_{k-1 \text{ 个}} \underbrace{\bar{A} \bar{A} \bar{A} \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k-1 \text{ 个}} \cup \cdots \cup \underbrace{\bar{A} \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k \text{ 个}} \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个}}$$

表示  $C_n^k$  个互不相容事件的并,由独立性可知每一项的概率为  $p^k(1-p)^{n-k}$ ,再由有限可加性,可得

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

这就是  $n$  重伯努利试验中  $A$  出现  $k$  次的概率计算公式.

**例 1.25** 设在  $N$  件产品中有  $M$  件次品,现进行  $n$  次有放回的检查抽样,试求抽得  $k$  件次品的概率.

**解** 由条件,这是有放回抽样,可知每次试验是在相同条件下重复进行,故本题符合  $n$  重伯努利试验的条件,令  $A$  表示“抽到一件次品”的事件.则

$$P(A) = p = M/N,$$

以  $P_n(k)$  表示  $n$  次有放回抽样中,有  $k$  次出现次品的概率,由伯努利概型计算公式,可知

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots, n.$$

**例 1.26** 设某个车间里共有 5 台车床,每台车床使用电力是间歇性的,平均起来每小时约有 6min 使用电力.假设车工们工作是相互独立的,求在同一时刻:

- (1) 恰有两台车床被使用的概率;
- (2) 至少有 3 台车床被使用的概率;
- (3) 至多有 3 台车床被使用的概率;
- (4) 至少有 1 台车床被使用的概率.

**解**  $A$  表示“使用电力”即车床被使用,则

$$P(A) = p = 6/60 = 0.1,$$

$$P(\bar{A}) = 1-p = 0.9.$$

$$(1) \quad p_1 = P_5(2) = C_5^2 (0.1)^2 (0.9)^3 = 0.0729.$$

$$(2) \quad p_2 = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 (0.1)^3 (0.9)^2 + C_5^4 (0.1)^4 (0.9) + (0.1)^5 = 0.00856.$$

$$(3) \quad p_3 = 1 - P_5(4) - P_5(5) = 1 - C_5^4 (0.1)^4 (0.9) - (0.1)^5 = 0.99954.$$

$$(4) \quad p_4 = 1 - P_5(0) = 1 - (0.9)^5 = 0.40951.$$

**例 1.27** 一张英语试卷, 有 10 道选择填空题, 每题有 4 个选择答案, 且其中只有一个正确答案. 某同学投机取巧, 随意填空, 试问他至少填对 6 道的概率是多大?

**解** 设  $B =$  “他至少填对 6 道”. 每答一道题有两个可能的结果:  $A =$  “答对” 及  $\bar{A} =$  “答错”,  $P(A) = 1/4$ , 故作 10 道题就是 10 重伯努利试验,  $n=10$ , 所求概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=6}^{10} P_{10}(k) = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-k} \\ &= C_{10}^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4 + C_{10}^7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_{10}^9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \\ &\approx 0.01973. \end{aligned}$$

人们在长期实践中总结得出“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”(称之为实际推断原理), 故如本例所说, 该同学随意猜测, 能在 10 道题中猜对 6 道以上的概率是很小的, 在实际中几乎是不会发生的.

## 小 结

在一个随机试验中总可以找出一组基本结果, 由所有基本结果组成的集合  $\Omega$  称为样本空间. 样本空间  $\Omega$  的子集称为随机事件. 由于事件是一个集合, 因此事件之间的关系和运算可以用集合间的关系和运算来处理. 对集合间的关系和运算读者是熟悉的, 重要的是要知道它们在概率论中的含义. 另外, 用其他事件的运算来表示一个事件时, 方法往往不唯一. 我们要学会用不同的方法表示同一事件.

我们不仅要明确一个试验中可能会发生哪些事件, 更重要的是知道某些事件在一次试验中发生的可能性的. 事件发生的频率的稳定性表明刻画事件发生可能性大小的数——概率是客观存在的. 我们从频率的稳定性及频率的性质得到启发, 给出了概率的公理化定义, 并由此推出了概率的一些基本性质.

古典概型是满足只有有限个基本事件且每个基本事件发生的可能性相等的概率模型. 计算古典概型中事件  $A$  的概率, 关键是弄清试验的基本事件的具体含义. 计算基本事件总数和事件  $A$  中包含的基本事件数的方法灵活多样, 没有固定模式, 一般可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算. 将古典概型中只有有限个基本事件推广到有无穷个基本事件的情形, 并保留等可能性的条件, 就得到几何概型.

条件概率定义为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

可以证明, 条件概率  $P(A|B)$  满足概率的公理化定义中的 3 个条件, 因而条件概率是一种概率. 对概率证明具有的性质, 条件概率也同样具有. 计算条件概率  $P(A|B)$  通常有两种方法: 一是按定义, 先算出  $P(B)$  和  $P(AB)$ , 再求出  $P(A|B)$ ; 二是在缩减样本空间  $\Omega_B$  中计算事件  $A$  的概率, 即得到  $P(A|B)$ .

由条件概率定义公式变形即得到乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B), P(B) > 0.$$

在解题中要注意  $P(A|B)$  和  $P(AB)$  间的联系和区别.全概率公式

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

是概率论中最重要的公式之一.由全概率公式和条件概率定义很容易得到贝叶斯公式

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

若把全概率公式中的  $B$  视作“果”，而把  $\Omega$  的每一划分  $A_i$  视作“因”，则全概率公式反映“由因求果”的概率问题， $P(A_i)$  是根据以往信息和经验得到的，所以被称为先验概率.而贝叶斯公式则是“执果溯因”的概率问题，即在“结果” $B$  已发生的条件下，寻找  $B$  发生的“原因”，公式中  $P(A_i|B)$  是得到“结果” $B$  后求出的，称为后验概率.

独立性是概率论中一个非常重要的概念，概率论与数理统计中很多内容都是在独立性的前提下讨论的.就解题而言，独立性有助于简化概率计算.比如计算相互独立事件的积的概率，可简化为

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n);$$

计算相互独立事件的并的概率，可简化为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n).$$

$n$  重伯努利试验是一类很重要的概型.解题前，首先要确认试验是不是多重独立重复试验及每次试验结果是否只有两个（若有多个结果，可分成  $A$  及  $\bar{A}$ ），再确定重数  $n$  及一次试验中  $A$  发生的概率  $p$ ，以求出事件  $A$  在  $n$  重伯努利试验中发生  $k$  次的概率.

### 重要术语及主题

随机试验      样本空间      随机事件

基本事件      频率      概率

古典概型       $A$  的对立事件  $\bar{A}$  及其概率

两个互不相容事件的和事件的概率      概率的加法公式

条件概率      概率的乘法公式      全概率公式

贝叶斯公式      事件的独立性       $n$  重伯努利试验

## 习 题 一

1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点.

(1) 掷一颗骰子，出现奇数点.

(2) 掷二颗骰子，

$A$  = “出现点数之和为奇数，且恰好其中有一个 1 点.”

$B$  = “出现点数之和为偶数，但没有一颗骰子出现 1 点.”

(3) 将一枚硬币抛两次，

$A$  = “第一次出现正面.”

$B$  = “至少有一次出现正面.”

$C$  = “两次出现同一面.”

2. 设  $A, B, C$  为三个事件, 试用  $A, B, C$  的运算关系式表示下列事件:

- (1)  $A$  发生,  $B, C$  都不发生;
- (2)  $A, B, C$  都发生;
- (3)  $A, B, C$  至少有 1 个发生;
- (4)  $A, B, C$  都不发生;
- (5)  $A, B, C$  不都发生;
- (6)  $A, B, C$  至多有 1 个不发生.

3. 指出下列等式命题是否成立, 并说明理由:

- (1)  $A \cup B = (AB) \cup B$ ;
- (2)  $\overline{A}B = A \cup B$ ;
- (3)  $\overline{A \cup B} \cap C = \overline{AB} \cap C$ ;
- (4)  $(AB) \cap (\overline{AB}) = \emptyset$ ;
- (5) 若  $A \subset B$ , 则  $A = AB$ ;
- (6) 若  $AB = \emptyset$ , 且  $C \subset A$ , 则  $BC = \emptyset$ ;
- (7) 若  $A \subset B$ , 则  $\overline{B} \supset \overline{A}$ ;
- (8) 若  $B \subset A$ , 则  $A \cup B = A$ .

4. 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(A) = 0.7, P(A-B) = 0.3$ , 求  $P(\overline{AB})$ .

5. 设  $A, B$  是两事件, 且  $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$ , 求:

- (1) 在什么条件下  $P(AB)$  取到最大值?
- (2) 在什么条件下  $P(AB)$  取到最小值?

6. 设  $A, B, C$  为 3 个事件, 且  $P(A) = P(B) = 1/4, P(C) = 1/3$  且  $P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = 1/12$ , 求  $A, B, C$  至少有一事件发生的概率.

7. 从 52 张扑克牌中任意取出 13 张, 问有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张梅花的概率是多少?

8. 对一个 5 人学习小组考虑生日问题, 求:

- (1) 5 个人的生日都在星期日的概率;
- (2) 5 个人的生日都不在星期日的概率;
- (3) 5 个人的生日不都在星期日的概率.

9. 从一批由 45 件正品, 5 件次品组成的产品中任取 3 件, 求其中恰有一件次品的概率.

10. 一批产品共  $N$  件, 其中  $M$  件正品. 从中随机地取出  $n$  件 ( $n < N$ ). 试求其中恰有  $m$  件 ( $m \leq M$ ) 正品 (记为  $A$ ) 的概率. 如果:

- (1)  $n$  件是同时取出的;
- (2)  $n$  件是无放回逐件取出的;
- (3)  $n$  件是有放回逐件取出的.

11. 在电话号码簿中任取一电话号码, 求后面 4 个数全不相同的概率 (设后面 4 个数中的每一个数都是等可能地取自 0, 1, ..., 9).



12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上, 每个部件用 3 只铆钉, 其中有 3 个铆钉强度太弱.若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱.求发生一个部件强度太弱的概率是.

13. 一个袋内装有大小相同的 7 个球, 其中 4 个是白球, 3 个是黑球, 从中一次抽取 3 个, 计算至少有两个是白球的概率.

14. 有甲、乙两批种子, 发芽率分别为 0.8 和 0.7, 在两批种子中各随机取一粒, 求:

- (1) 两粒都发芽的概率;
- (2) 至少有一粒发芽的概率;
- (3) 恰有一粒发芽的概率.

15. 掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止.求:

- (1) 正好在第 6 次停止的概率;
- (2) 正好在第 6 次停止的情况下, 第 5 次也是出现正面的概率.

16. 甲、乙两个篮球运动员, 投篮命中率分别为 0.7 及 0.6, 每人各投了 3 次, 求两人进球数相等的概率.

17. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 求这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

18. 某地某天下雪的概率为 0.3, 下雨的概率为 0.5, 既下雪又下雨的概率为 0.1,求:

- (1) 在下雨条件下下雪的概率;
- (2) 这天下雨或下雪的概率.

19. 已知一个家庭有 3 个小孩, 且其中一个为女孩, 求至少有一个男孩的概率 (小孩为男、为女是等可能的).

20. 已知 5%的男人和 0.25%的女人是色盲, 现随机地挑选一人, 此人恰为色盲, 问此人是男人的概率 (假设男人和女人各占人数的一半).

21. 两人约定上午 9:00~10:00 在公园会面, 求一人要等另一人 0.5h 以上的概率.

22. 从 (0, 1) 中随机地取两个数, 求:

- (1) 两个数之和小于  $6/5$  的概率;
- (2) 两个数之积小于  $1/4$  的概率.

23. 设  $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5$ , 求  $P(B|A\cup\bar{B})$ .

24. 在一个盒中装有 15 个乒乓球, 其中有 9 个新球, 在第一次比赛中任意取出 3 个球, 比赛后放回原盒中; 第二次比赛同样任意取出 3 个球, 求第二次取出的 3 个球均为新球的概率.

25. 按以往概率论考试结果分析, 努力学习的学生有 90%的可能考试及格, 不努力学习的学生有 90%的可能考试不及格.据调查, 学生中有 80%的人是努力学习的, 试问:

- (1) 考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人?
- (2) 考试不及格的学生有多大可能是努力学习的人?

26. 将两信息分别编码为  $A$  和  $B$  传递出来, 接收站收到时,  $A$  被误收作  $B$  的概率为 0.02, 而  $B$  被误收作  $A$  的概率为 0.01.信息  $A$  与  $B$  传递的频繁程度为 2:1.若接收站收到的信息是  $A$ , 试问原发信息是  $A$  的概率是多少?

27. 在已有两个球的箱子中再放一白球, 然后任意取出一球, 若发现这球为白球, 试求箱子中原有一白球的概率 (箱中原有的球为什么颜色是等可能的, 已知球的颜色只有黑、白两种).

28. 某工厂生产的产品中 96%是合格品, 检查产品时, 一个合格品被误认为是次品的概率为 0.02, 一个次品被误认为是合格品的概率为 0.05, 求在被检查后认为是合格品产品确是合格品的概率.

29. 某保险公司把被保险人分为 3 类：“谨慎的”“一般的”“冒失的”.统计资料表明，上述 3 种人在一年内发生事故的的概率依次为 0.05,0.15 和 0.30；如果“谨慎的”被保险人点 20%，“一般的”占 50%，“冒失的”占 30%，现知某被保险人在一年内出了事故，则他是“谨慎的”的概率是多少？

30. 加工某一零件需要经过 4 道工序，设第一、第二、第三、第四道工序的次品率分别为 0.02,0.03,0.05,0.03，假定各道工序是相互独立的，求加工出来的零件的次品率.

31. 设某人每次射击的命中率为 0.2，问至少必须进行多少次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于 0.9？

32. 设  $A, B$  为两个随机事件，证明：若  $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ ，则  $A, B$  相互独立.

33. 3 人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为  $1/5, 1/3, 1/4$ ，求将此密码破译出的概率.

34. 甲、乙、丙 3 人独立地向同一飞机射击，设击中的概率分别是 0.4,0.5,0.7，若只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；若有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；若三人都击中，则飞机一定被击落，求飞机被击落的概率.

35. 一架升降机开始时有 6 位乘客，并等可能地停于 10 层楼的每一层.试求下列事件的概率：

- (1)  $A =$  “某指定的一层有两位乘客离开”；
- (2)  $B =$  “没有两位及两位以上的乘客在同一层离开”；
- (3)  $C =$  “恰有两位乘客在同一层离开”；
- (4)  $D =$  “至少有两位乘客在同一层离开”.

36.  $n$  个朋友随机地围绕圆桌而坐，

- (1) 求甲、乙两人坐在一起，且乙坐在甲的左边的概率；
- (2) 求甲、乙、丙 3 人坐在一起的概率；
- (3) 如果  $n$  个人并排坐在长桌的一边，求上述事件的概率.

37. 将线段  $[0, a]$  任意折成 3 折，试求这 3 折线段能构成三角形的概率.

38. 某人有  $n$  把钥匙，其中只有一把能开他的门.他逐个将它们去试开(抽样是无放回的).证明试开  $k$  次 ( $k=1,2,\dots,n$ ) 才能把门打开的概率与  $k$  无关.

39. 把一个表面涂有颜色的立方体等分为 1000 个小立方体，在这些小立方体中，随机地取出一个，试求它有  $i$  面涂有颜色的概率  $P(A_i)$  ( $i=0,1,2,3$ ).

40. 对任意的随机事件  $A, B, C$ ，试证

$$P(AB) + P(AC) - P(BC) \leq P(A).$$

41. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

42. 将一枚均匀硬币掷  $2n$  次，求出现正面次数多于反面次数的概率.

43. 证明“确定的原则”(Sure Thing): 若  $P(A|C) \geq P(B|C), P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C})$ ，则  $P(A) \geq P(B)$ .

44. 一列火车共有  $n$  节车厢，有  $k(k \geq n)$  个旅客上火车并随意地选择车厢.求每一节车厢内至少有一个旅客的概率.

45. 设随机试验中，某一事件  $A$  出现的概率为  $\varepsilon > 0$ .试证明：不论  $\varepsilon > 0$  如何小，只要不断地独立重复做此试验，则  $A$  迟早会出现的概率为 1.

46. 袋中装有  $m$  枚正品硬币， $n$  枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽).在袋中任取一枚，将它投掷  $r$  次，已知每次都得到国徽.试问这枚硬币是正品的概率是多少？

47. 求  $n$  重伯努利试验中  $A$  出现奇数次的概率.

48. 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 求此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率. (2007 研考)

49. 设  $A, B, C$  是随机事件,  $A$  与  $C$  互不相容,  $P(AB) = \frac{1}{2}$ ,  $P(C) = \frac{1}{3}$ , 求  $P(AB|\bar{C})$ . (2012 研考)

50. 设  $A, B$  是任意两个随机事件, 求  $P((\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}))$  的值.

51. 设两两相互独立的 3 个事件,  $A, B$  和  $C$  满足条件:

$$ABC = \Phi, P(A) = P(B) = P(C) < 1/2, \text{ 且 } P(A \cup B \cup C) = 9/16,$$

求  $P(A)$ .

52. 设两个相互独立的事件  $A$  和  $B$  都不发生的概率为  $1/9$ ,  $A$  发生、 $B$  不发生的概率与  $B$  发生、 $A$  不发生的概率相等, 求  $P(A)$ . (2000 研考)

53. 随机地向半圆  $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$  ( $a$  为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与  $x$  轴的夹角小于  $\pi/4$  的概率为多少?

54. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 求另一件也是不合格品的概率.

55. 设有来自 3 个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表, 从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率  $p$ ;

(2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率  $q$ .

56. 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(B) > 0, P(A|B) = 1$ , 试比较  $P(A \cup B)$  与  $P(A)$  的大小. (2006 研考)

57. 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$ , 求  $P(B - A)$ . (2014 研考)