

第四章 随机变量的数字特征

前面讨论了随机变量的分布函数, 我们知道分布函数全面描述了随机变量的统计特性. 但是在实际问题中, 一方面由于求分布函数并非易事; 另一方面, 往往不需要去全面考察随机变量的变化情况而只需知道随机变量的某些特征就足够了. 例如, 在考察一个班级学生的学习成绩时, 只要知道这个班级的平均成绩及其分散程度就可以对该班的学习情况作出比较客观的判断. 这样的平均值及表示分散程度的数字虽然不能完整地描述随机变量, 但能更突出地描述随机变量在某些方面的重要特征, 我们称它们为随机变量的数字特征. 本章将介绍随机变量的常用数字特征: 数学期望、方差、协方差、相关系数和矩等.

第一节 数学期望

1. 数学期望的定义

粗略地说, 数学期望就是随机变量取值的平均数. 在给出数学期望的概念之前, 先看一个例子.

要评判一个射手的射击水平, 需要知道射手平均命中环数. 设射手 A 在同样条件下进行射击, 命中的环数 X 是随机变量, 其分布律如表 4-1 所示:

表 4-1

X	10	9	8	7	6	5	0
p_k	0.1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1

由 X 的分布律可知, 若射手 A 共射击 N 次, 在 N 次射击中, 大约有 $0.1 \times N$ 次击中 10 环, $0.1 \times N$ 次击中 9 环, $0.2 \times N$ 次击中 8 环, $0.3 \times N$ 次击中 7 环, $0.1 \times N$ 次击中 6 环, $0.1 \times N$ 次击中 5 环, $0.1 \times N$ 次脱靶. 于是在 N 次射击中, 射手 A 击中的环数之和为

$$10 \times 0.1N + 9 \times 0.1N + 8 \times 0.2N + 7 \times 0.3N + 6 \times 0.1N + 5 \times 0.1N + 0 \times 0.1N.$$

平均每次击中的环数约为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} (10 \times 0.1N + 9 \times 0.1N + 8 \times 0.2N + 7 \times 0.3N + 6 \times 0.1N + 5 \times 0.1N + 0 \times 0.1N) \\ &= 10 \times 0.1 + 9 \times 0.1 + 8 \times 0.2 + 7 \times 0.3 + 6 \times 0.1 + 5 \times 0.1 + 0 \times 0.1 \\ &= 6.7 (\text{环}). \end{aligned}$$

由这样一个问题的启发及频率的稳定性, 得到一般随机变量取值的“平均数”, 应是随机变量所有可能取值与其相应的概率乘积之和, 也就是以概率为权数的加权平均值, 这就是所谓“数学期望”的概念. 一般地, 有如下定义:

定义 4.1 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad k=1,2,\cdots,$$

若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望(mathematical expectation), 记为

$E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \quad (4-1)$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (4.2)$$

数学期望简称期望, 又称为均值.

例 4.1 某商店在年末大甩卖中进行有奖销售, 摇奖时从摇箱摇出的球的可能颜色为: 红、黄、蓝、白、黑五种, 其对应的奖金额分别为: 10000 元、1000 元、100 元、10 元、1 元. 假定摇箱内装有很多球, 其中红、黄、蓝、白、黑的比例分别为: 0.01%, 0.15%, 1.34%, 10%, 88.5%, 求每次摇奖摇出的奖金额 X 的数学期望.

解每次摇奖摇出的奖金额 X 是一个随机变量, 易知它的分布律如表 4-2 所示.

表 4-2

X	10000	1000	100	10	1
p_k	0.0001	0.0015	0.0134	0.1	0.885

因此, $E(X) = 10000 \times 0.0001 + 1000 \times 0.0015 + 100 \times 0.0134 + 10 \times 0.1 + 1 \times 0.885 = 5.725$.

可见, 平均起来每次摇奖的奖金额不足 6 元. 这个值对商店作计划预算时是很重要的.

例 4.2 按规定, 某车站每天 8:00 至 9:00, 9:00 至 10:00 都有一辆客车到站, 但到站的时刻是随机的, 且两者到站的时间相互独立. 其分布律如表 4-3 所示, 现有一旅客 8:20 到达车站, 求他候车时间的数学期望.

表 4-3

到站时刻	8:10, 9:10	8:30, 9:30	8:50, 9:50
概率	1/6	3/6	2/6

解 设旅客候车时间为 X min, 易知 X 的分布律如表 4-4 所示.

表 4-4

X	10	30	50	70	90
p_k	3/6	2/6	1/36	3/36	2/36

在上表中 p_k 的求法如下, 例如

$$P\{X=70\} = P(AB) = P(A)P(B) = 1/6 \times 3/6 = 3/36,$$

其中 A 为事件“第一班车在 8:10 到站”, B 为事件“第二班车在 9:30 到站”, 于是候车时间的数学期望为

$$E(X) = 10 \times 3/6 + 30 \times 2/6 + 50 \times 1/36 + 70 \times 3/36 + 90 \times 2/36 \approx 27.22(\text{分钟}).$$

例 4.3 有 5 个相互独立工作的电子装置, 它们的寿命 X_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) 服从同一指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \theta > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) 若将这 5 个电子装置串联起来组成整机, 求整机寿命 N 的数学期望;

(2) 若将这 5 个电子装置并联组成整机, 求整机寿命 M 的数学期望.

解 X_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) 串联的情况

由于当 5 个电子装置中有一个损坏时，整机就停止工作，所以这时整机寿命为

$$N = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}.$$

由于 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是相互独立的，于是 $N = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_N(x) &= P\{N \leq x\} = 1 - P\{N > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x, X_4 > x, X_5 > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x\} \cdot P\{X_2 > x\} \cdot P\{X_3 > x\} \cdot P\{X_4 > x\} \cdot P\{X_5 > x\} \\ &= 1 - [1 - F_{X_1}(x)][1 - F_{X_2}(x)][1 - F_{X_3}(x)][1 - F_{X_4}(x)][1 - F_{X_5}(x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^5 \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{5x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 N 的概率密度为

$$f_N(x) = \begin{cases} \frac{5}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

则 N 的数学期望为

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_N(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}} dx = \frac{\theta}{5}$$

(2) 并联的情况

由于当且仅当 5 个电子装置都损坏时，整机才停止工作，所以这时整机寿命为

$$M = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}.$$

又由于 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立，类似地，可得 M 的分布函数为

$$F_M(x) = [F(x)]^5 = \begin{cases} (1 - e^{-\frac{x}{\theta}})^5, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

因而 M 的概率密度为

$$f_M(x) = \begin{cases} \frac{5}{\theta} [1 - e^{-\frac{x}{\theta}}]^4 e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

于是 M 的数学期望为

$$E(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_M(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{5x}{\theta} (1 - e^{-\frac{x}{\theta}}) dx = \frac{137}{60} \theta.$$

这说明：5 个电子装置并联连接工作的平均寿命要大于串联连接工作的平均寿命。

例 4.4 设随机变量 X 服从柯西 (Cauchy) 分布，其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

试证 $E(X)$ 不存在.

证 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = +\infty,$$

故 $E(X)$ 不存在.

2. 随机变量函数的数学期望

在实际问题与理论研究中, 我们经常需要求随机变量函数的数学期望. 这时, 我们可以通过下面的定理来实现.

定理 4.1 设 Y 是随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ (g 是连续函数).

(1) X 是离散型随机变量, 它的分布律为 $P(X=x_k)=p_k, k=1, 2, \dots$, 若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

绝对收敛, 则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k. \quad (4-3)$$

(2) X 是连续型随机变量, 它的概率密度为 $f(x)$, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx. \quad (4-4)$$

定理 4.1 的重要意义在于, 当我们求 $E(Y)$ 时, 不必知道 Y 的分布而只需知道 X 的分布就可以了. 当然, 我们也可以由已知的 X 的分布, 先求出其函数 $g(X)$ 的分布, 再根据数学期望的定义去求 $E[g(X)]$, 然而, 求 $Y=g(X)$ 的分布是不容易的, 所以一般不采用后一种方法.

定理 4.1 的证明超出了本书的范围, 这里不予以证明.

上述定理还可以推广到两个或两个以上随机变量的函数情形.

例如, 设 Z 是随机变量 X, Y 的函数, $Z=g(X, Y)$ (g 是连续函数), 那么 Z 也是一个随机变量, 当 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} (i, j=1, 2, \dots)$ 时, 若 $\sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛, 则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}. \quad (4-5)$$

当 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x, y)$ 时, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$ 绝对收敛, 则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy. \quad (4-6)$$

特别地, 有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) \mathrm{d}x.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) \mathrm{d}y.$$

例 4.5 设随机变量 X 的分布律如表 4-5 所示. 求 $E(X^2)$, $E(-2X+1)$.

表 4-5

X	-1	0	2	3
P_k	1/8	1/4	3/8	1/4

解 由 (4-5) 式, 得

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{8} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{31}{8},$$

$$E(-2X+1) = [-2 \times (-1) + 1] \times \frac{1}{8} + [-2 \times 0 + 1] \times \frac{1}{4} + [-2 \times 2 + 1] \times \frac{3}{8} + [-2 \times 3 + 1] \times \frac{1}{4} = -7/4.$$

例 4.6 对球的直径作近似测量, 设其值均匀分布在区间 $[a, b]$ 内, 求球体积的数学期望.

解 设随机变量 X 表示球的直径, Y 表示球的体积, 依题意, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

球体积 $Y = \frac{1}{6}\pi X^3$, 由 (4.6) 式得

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{1}{6}\pi X^3\right) = \int_a^b \frac{1}{6}\pi x^3 \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{6(b-a)} \int_a^b x^3 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2). \end{aligned}$$

例 4.7 设国际市场每年对我国某种出口商品的需求量 X (单位: t) 服从区间 $[2000, 4000]$ 上的均匀分布. 若售出这种商品 1 吨, 可挣得外汇 3 万元, 但如果销售不出而囤积于仓库, 则每吨需保管费 1 万元. 问应预备多少吨这种商品, 才能使国家的收益最大?

解 设预备这种商品 y t ($2000 \leq y \leq 4000$), 则收益 (万元) 为

$$g(X) = \begin{cases} 3y, & X \geq y, \\ 3X - (y - X), & X < y. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{2000}^{4000} g(x) \cdot \frac{1}{4000-2000} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2000} \int_{2000}^y [3x - (y - x)] \mathrm{d}x + \frac{1}{2000} \int_y^{4000} 3y \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1000} (-y^2 + 7000y - 4 \times 10^6). \end{aligned}$$

当 $y=3500$ t 时, 上式达到最大值. 所以预备 3500 t 此种商品能使国家的收益最大, 最大收益为 8250 万元.

例 4.8 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 A 上服从均匀分布, 其中 A 为 x 轴, y 轴及直

线 $x + \frac{y}{2} = 1$ 所围成的三角区域, 求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

解 由于 (X, Y) 在 A 内服从均匀分布, 所以其概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A \text{ 的面积}}, & (x, y) \in A, \\ 0, & (x, y) \notin A, \end{cases} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A, \\ 0, & (x, y) \notin A. \end{cases}$$

于是

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \iint_A x dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} x dy = \frac{1}{3};$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = \iint_A y dx dy = \int_0^2 y dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} dx = \frac{2}{3};$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{2(1-x)} y dy = 2 \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{6};$$

3. 数学期望的性质

下面讨论数学期望的几条重要性质.

定理 4.2 设随机变量 X, Y 的数学期望 $E(X)$, $E(Y)$ 存在.

1° $E(c) = c$, 其中 c 是常数;

2° $E(cX) = cE(X)$;

3° $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

4° 若 X, Y 是相互独立的, 则有

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

证 就连续型的情况我们来证明性质 3°、性质 4°, 离散型情况和其他性质的证明留给读者.

3° 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 其边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) dy = E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

4° 又若 X 和 Y 相互独立, 此时

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) dy = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

性质 3° 可推广到任意有限个随机变量之和的情形; 性质 4° 可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情形.

例 4.9 设一电路中电流 I (安) 与电阻 R (欧) 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$g(i) = \begin{cases} 2i, & 0 \leq i \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad h(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{9}, & 0 \leq r \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求电压 $V=IR$ 的均值.

解 $E(V) = E(IR)$

$$= E(I) E(R) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} ig(i) di \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} rh(r) dr \right] = \left[\int_0^1 2i^2 di \right] \left[\int_0^3 \frac{r^3}{9} dr \right] = \frac{3}{2} \text{ (V)}.$$

例 4.10 设对某一目标进行射击, 命中 n 次才能彻底摧毁该目标, 假定各次射击是独立的, 并且每次射击命中的概率为 p , 试求彻底摧毁这一目标平均消耗的炮弹数.

解 设 X 为 n 次击中目标所消耗的炮弹数, X_k 表示第 $k-1$ 次击中后至 k 次击中目标之间所消耗的炮弹数, 这样, X_k 可取值 $1, 2, 3, \dots$, 其分布律如表 4-6 所示, 其中 $q=1-p$.

表 4-6

X_k	1	2	3	...	m	...
$P(X_k=m)$	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

X_1 为第一次击中目标所消耗的炮弹数, 则 n 次击中目标所消耗的炮弹数为

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

由性质 3° 可得

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = nE(X_1).$$

又

$$E(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{1}{p},$$

故

$$E(X) = \frac{n}{p}.$$

4. 常用分布的数学期望

(1) (0—1) 分布. 设 X 的分布律如表 4-7 所示, 则 X 的数学期望为

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.$$

表 4-7

X	0	1
P_k	$1-p$	p

(2) 二项分布. 设 X 服从二项分布, 其分布律为

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n, \quad (0 < p < 1).$$

则 X 的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]}, \end{aligned}$$

令 $k-1=t$, 则

$$E(X) = np \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{t![(n-1)-t]!} p^t (1-p)^{[(n-1)-t]} \\ = np[p+(1-p)]^{n-1} = np.$$

若利用数学期望的性质，将二项分布表示为 n 个相互独立的 (0-1) 分布的和，计算过程将简单得多.事实上，若设 X 表示在 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数， $X_i(i=1,2,\cdots,n)$

表示 A 在第 i 次试验中出现的次数，则有 $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

显然，这里 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 服从 (0-1) 分布，其分布率如表 4-8 所示，所以 $E(X_i)=p, i=1,2,\cdots,n$.

表 4-8

X_i	1	0
P	p	$1-p$

由定理 4.2 的性质 3° 有

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np.$$

(3) 泊松分布

设 X 服从泊松分布，其分布律为

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

则 X 的数学期望为

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

令 $k-1=t$ ，则有

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

(4) 均匀分布

设 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 X 的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

(5) 指数分布

设 X 服从指数分布，其分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

则 X 的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

(6) 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 则 X 的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

$$\text{令 } \frac{x-\mu}{\sigma} = t, \text{ 则 } E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

注意到

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,$$

故有 $E(X) = \mu$.

第二节 方 差

1. 方差的定义

数学期望描述了随机变量取值的“平均”. 有时仅知道这个平均值还是不够的. 例如, 有甲, 乙两名射手, 他们每次射击命中的环数分别为 X, Y , 已知 X, Y 的分布律如表 4-9 和表 4-10 所示.

表 4-9

X	8	9	10
$P(X=k)$	0.2	0.6	0.2

表 4-10

Y	8	9	10
$P(Y=k)$	0.1	0.8	0.1

由于 $E(X) = E(Y) = 9$ (环), 可见从均值的角度是分不出谁的射击技术更高, 故还需考虑其他的因素. 通常的想法是: 在射击的平均环数相等的条件下进一步衡量谁的射击技术更稳定些. 也就是看谁命中的环数比较集中于平均值的附近, 通常人们会采用命中的环数 X 与它的平均值 $E(X)$ 之间的离差 $|X - E(X)|$ 的均值 $E[|X - E(X)|]$ 来度量, $E[|X - E(X)|]$ 愈小, 表明 X 的值愈集中于 $E(X)$ 的附近, 即技术稳定; $E[|X - E(X)|]$ 愈大, 表明 X 的值很分散, 技术不稳定. 但由于 $E[|X - E(X)|]$ 带有绝对值, 运算不便, 故通常采用 X 与 $E(X)$ 的离差 $|X - E(X)|$ 的平方平均值 $E[X - E(X)]^2$ 来度量随机变量 X 取值的分散程度. 此例中, 由于

$$\begin{aligned} E[X - E(X)]^2 &= 0.2 \times (8-9)^2 + 0.6 \times (9-9)^2 + 0.2 \times (10-9)^2 = 0.4, \\ E[Y - E(Y)]^2 &= 0.1 \times (8-9)^2 + 0.8 \times (9-9)^2 + 0.1 \times (10-9)^2 = 0.2. \end{aligned}$$

由此可见 B 的技术更稳定些.

定义 4.2 设 X 是一个随机变量, 若 $E[X-E(X)]^2$ 存在, 则称 $E[X-E(X)]^2$ 为 X 的方差 (Variance), 记为 $D(X)$, 即

$$D(X) = E[X-E(X)]^2. \quad (4-7)$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差 (Standard deviation) 或均方差 (Mean square deviation), 记为 $\sigma(X)$.

根据定义可知, 随机变量 X 的方差反映了随机变量的取值与其数学期望的偏离程度. 若 X 取值比较集中, 则 $D(X)$ 较小, 反之, 若 X 取值比较分散, 则 $D(X)$ 较大.

由于方差是随机变量 X 的函数 $g(X) = [X-E(X)]^2$ 的数学期望. 因此若离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1, 2, \dots$, 则

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k. \quad (4-8)$$

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx. \quad (4-9)$$

由此可见, 方差 $D(X)$ 是一个常数, 它由随机变量的分布惟一确定.

根据数学期望的性质可得:

$$\begin{aligned} D(X) &= E[X-E(X)]^2 = E[X^2 - 2X \cdot E(X) + [E(X)]^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

于是得到常用计算方差的简便公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \quad (4-10)$$

例 4.11 设有甲、乙两种棉花, 从中各抽取等量的样品进行检验, 结果如表 4-11 和表 4-12 所示, 其中 X, Y 分别表示甲、乙两个品种的棉花的纤维长度 (单位: mm), 求 $D(X)$ 与 $D(Y)$ 且评定它们的质量.

表 4-11

X	28	29	30	31	32
P_k	0.1	0.15	0.5	0.15	0.1

表 4-12

Y	28	29	30	31	32
P_k	0.13	0.17	0.4	0.17	0.13

解 由于

$$E(X) = 28 \times 0.1 + 29 \times 0.15 + 30 \times 0.5 + 31 \times 0.15 + 32 \times 0.1 = 30,$$

$$E(Y) = 28 \times 0.13 + 29 \times 0.17 + 30 \times 0.4 + 31 \times 0.17 + 32 \times 0.13 = 30,$$

因此得

$$\begin{aligned} D(X) &= (28-30)^2 \times 0.1 + (29-30)^2 \times 0.15 + (30-30)^2 \times 0.5 + (31-30)^2 \times 0.15 + (32-30)^2 \times 0.1 \\ &= 4 \times 0.1 + 1 \times 0.15 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.15 + 4 \times 0.1 = 1.1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(Y) &= (28-30)^2 \times 0.13 + (29-30)^2 \times 0.17 + (30-30)^2 \times 0.4 + (31-30)^2 \times 0.17 + (32-30)^2 \times 0.13 \\ &= 4 \times 0.13 + 1 \times 0.17 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.17 + 4 \times 0.13 = 1.38. \end{aligned}$$

因 $D(X) < D(Y)$, 所以甲种棉花纤维长度的方差小些, 说明其纤维比较均匀, 故甲种棉花质量较好.

例 4.12 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $D(X)$.

$$\text{解 } E(X) = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = 0,$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = 1/6,$$

于是 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/6$.

2. 方差的性质

由数学期望的性质 (定理 4.2) 及方差的定义, 我们可以得到关于方差的几条重要性质.

定理 4.3 设随机变量 X 与 Y 的方差存在, 则

1° 设 c 为常数, 则 $D(c) = 0$;

2° 设 c 为常数, 则 $D(cX) = c^2 D(X)$;

3° $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$;

4° 若 X, Y 相互独立, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;

5° 对任意的常数 $c \neq E(X)$, 有 $D(X) < E[(X-c)^2]$.

证 仅证性质 4°、性质 5°.

$$\begin{aligned} 4^\circ D(X \pm Y) &= E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2 = E[(X - E(X)) \pm (Y - E(Y))]^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 \pm 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))] + E[Y - E(Y)]^2 \\ &= D(X) + D(Y) \pm 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))]. \end{aligned}$$

当 X 与 Y 相互独立时, $X - E(X)$ 与 $Y - E(Y)$ 也相互独立, 由数学期望的性质有

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(X - E(X)) E(Y - E(Y)) = 0.$$

因此有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

性质 4° 可以推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和的情况.

5° 对任意常数 c , 有

$$\begin{aligned} E[(X-c)^2] &= E[(X - E(X) + E(X) - c)^2] \\ &= E[(X - E(X))^2] + 2(E(X) - c) \cdot E[X - E(X)] + (E(X) - c)^2 \\ &= D(X) + (E(X) - c)^2. \end{aligned}$$

故对任意常数 $c \neq EX$, 有 $D(X) < E[(X-c)^2]$.

例 4.13 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$, 方差 $D(X) = \sigma^2$ ($\sigma > 0$), 令 $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma}$,

求 $E(Y)$, $D(Y)$.

$$\text{解 } E(Y) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[X - E(X)] = \frac{1}{\sigma} [E(X) - E(X)] = 0,$$

$$D(Y) = D\left[\frac{X - E(X)}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2} D[X - E(X)] = \frac{1}{\sigma^2} D(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

常称 Y 为 X 的标准化随机变量.

例 4.14 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且服从同一 (0-1) 分布, 分布律为

$$\begin{aligned} P\{X_i = 0\} &= 1-p, \\ P\{X_i = 1\} &= p, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

证明 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 服从参数为 n, p 的二项分布, 并求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 X 所有可能取值为 $0, 1, \cdots, n$, 由独立性知 X 以特定的方式 (例如前 k 个取 1, 后 $n-k$ 个取 0) 取 k ($0 \leq k \leq n$) 的概率为 $p^k(1-p)^{n-k}$, 而 X 取 k 的两两互不相容的方式共有 C_n^k 种, 故

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \cdots, n,$$

即 X 服从参数为 n, p 的二项分布.

由于 $E(X_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$,

$$D(X_i) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = p(1-p), \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

故有

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np.$$

由于 X_1, X_2, \cdots, X_n 相互独立, 得

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = np(1-p).$$

3. 常用分布的方差

(1) (0-1) 分布

设 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, 其分布律如表 4-13 所示, 由例 4.14 知, $D(X)=p(1-p)$.

表 4-13

X	0	1
P	$1-p$	p

(2) 二项分布

设 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 由例 4.14 知, $D(X) = np(1-p)$.

(3) 泊松分布

设 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 由上一节知 $E(X) = \lambda$, 又

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

从而有

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

(4) 均匀分布

设 X 服从 $[a, b]$ 上的均匀分布, 由上一节知 $E(X) = \frac{a+b}{2}$, 又

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

所以

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(5) 指数分布

设 X 服从参数为 λ 的指数分布, 由上一节知.

$$E(X)=1/\lambda, \text{ 又 } E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

所以

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(6) 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 由上一节知 $E(X) = \mu$, 从而

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ 则

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) = \sigma^2. \end{aligned}$$

由此可知: 正态分布的概率密度中的两个参数 μ 和 σ 分别是该分布的数学期望和均方差. 因而正态分布完全可由它的数学期望和方差所确定. 再者, 由上一章第五节例 3.17 知道, 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1, 2, \dots, n$, 且它们相互独立, 则它们的线性组合 $c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$ (c_1, c_2, \dots, c_n 是不全为零的常数) 仍然服从正态分布. 于是由数学期望和方差的性质知道:

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i\mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2\right).$$

这是一个重要的结果.

例 4.15 设活塞的直径 (单位: cm) $X \sim N(22.40, 0.032)$, 气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y 相互独立, 任取一只活塞, 任取一只气缸, 求活塞能装入气缸的概率.

解按题意需求 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$.

令 $Z = X - Y$, 则

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 22.40 - 22.50 = -0.10,$$

$$D(Z) = D(X) + D(Y) = 0.03^2 + 0.04^2 = 0.05^2,$$

即 $Z \sim N(-0.10, 0.05^2)$,

故有

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= P\{Z < 0\} = P\left\{\frac{Z - (-0.10)}{0.05} < \frac{0 - (-0.10)}{0.05}\right\} = \Phi\left(\frac{0.10}{0.05}\right) \\ &= \Phi(2) = 0.9772. \end{aligned}$$

第三节 协方差与相关系数

对于二维随机变量 (X, Y) ，数学期望 $E(X)$ ， $E(Y)$ 只反映了 X 和 Y 各自的平均值，而 $D(X)$ ， $D(Y)$ 反映的是 X 和 Y 各自偏离平均值的程度，它们都没有反映 X 与 Y 之间的关系.在实际问题中，每对随机变量往往相互影响、相互联系.例如，人的年龄与身高；某种产品的产量与价格等.随机变量的这种相互联系称为相关关系，它们也是一类重要的数字特征，本节讨论有关这方面的数字特征.

定义 4.3 设 (X, Y) 为二维随机变量，称

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为随机变量 X, Y 的**协方差 (Covariance)**，记为 $\text{Cov}(X, Y)$ ，即

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}. \quad (4-11)$$

而 $\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 称为随机变量 X, Y 的**相关系数 (Correlation coefficient)**或**标准协方差**

(**Standard covariance**)，记为 ρ_{XY} ，即

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}. \quad (4-12)$$

特别地，

$$\text{Cov}(X,X) = E\{[X-E(X)][X-E(X)]\} = D(X),$$

$$\text{Cov}(Y,Y) = E\{[Y-E(Y)][Y-E(Y)]\} = D(Y).$$

故方差 $D(X)$ ， $D(Y)$ 是协方差的特例.

由上述定义及方差的性质可得

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X,Y).$$

由协方差的定义及数学期望的性质可得下列实用计算公式

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (4-13)$$

若 (X, Y) 为二维离散型随机变量，其联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ ， $i, j=1, 2, \dots$ ，则有

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j [x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p_{ij}. \quad (4-14)$$

若 (X, Y) 为二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x, y)$ ，则有

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)][y - E(Y)]f(x,y)dxdy. \quad (4-15)$$

例 4.16 设 (X, Y) 的分布律如表 4-14 所示， $0 < p < 1$ ，求 $\text{Cov}(X,Y)$ 和 ρ_{XY} .

表 4-14

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

解 易知 X 的分布律为

$$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p,$$

故

$$E(X)=p, \quad D(X)=p(1-p).$$

同理 $E(Y)=p, D(Y)=p(1-p)$ ，易得 $E(XY)=p$. 因此

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = p - p^2 = p(1-p),$$

$$\text{而 } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{p(1-p)} \cdot \sqrt{p(1-p)}} = 1$$

例 4.17 设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $\text{Cov}(X, Y)$.

$$\text{解 由于 } f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2}) dx = \frac{7}{12},$$

$$E(Y) = \int_0^1 y(y + \frac{1}{2}) dy = \frac{7}{12},$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy + \int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{因此 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}.$$

协方差具有下列性质:

1° 若 X 与 Y 相互独立, 则 $\text{Cov}(X, Y) = 0$;

2° $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;

3° $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$;

4° $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$.

证 仅证性质 4°, 其余留给读者.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 + X_2, Y) &= E[(X_1 + X_2)Y] - E(X_1 + X_2)E(Y) \\ &= E(X_1Y) + E(X_2Y) - E(X_1)E(Y) - E(X_2)E(Y) \\ &= [E(X_1Y) - E(X_1)E(Y)] + [E(X_2Y) - E(X_2)E(Y)] \\ &= \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y). \end{aligned}$$

下面给出相关系数 ρ_{XY} 的几条重要性质, 并说明 ρ_{XY} 的含义.

定理 4.4 设 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, ρ_{XY} 为 (X, Y) 的相关系数, 则

1° 如果 X, Y 相互独立, 则 $\rho_{XY} = 0$;

2° $|\rho_{XY}| \leq 1$;

3° $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是存在常数 a, b 使 $P\{Y = aX + b\} = 1$ ($a \neq 0$).

证 由协方差的性质 1° 及相关系数的定义可知 1° 成立.

2° 对任意实数 t , 有

$$\begin{aligned} D(Y - tX) &= E[(Y - tX) - E(Y - tX)]^2 \\ &= E[(Y - E(Y)) - t(X - E(X))]^2 \\ &= E[Y - E(Y)]^2 - 2tE[Y - E(Y)][X - E(X)] + t^2E[X - E(X)]^2 \\ &= t^2D(X) - 2t\text{Cov}(X, Y) + D(Y) \\ &= D(X) \left[t - \frac{\text{cov}(X, Y)}{D(X)} \right]^2 + D(Y) - \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{D(X)}. \end{aligned}$$

令 $t = \frac{\text{cov}(X, Y)}{D(X)} = b$, 于是

$$D(Y - bX) = D(Y) - \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{D(X)} = D(Y) \left\{ 1 - \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{D(X)D(Y)} \right\} = D(Y)(1 - \rho_{XY}^2).$$

由于方差不能为负, 所以 $1 - \rho_{XY}^2 \geq 0$, 从而

$$|\rho_{XY}| \leq 1.$$

性质 3° 的证明较复杂, 从略.

当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 与 Y 不相关, 由性质 1° 可知, 当 X 与 Y 相互独立时, $\rho_{XY} = 0$, 即 X 与 Y 不相关. 反之不一定成立, 即 X 与 Y 不相关, X 与 Y 却不一定相互独立.

例 4.18 设 X 服从 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布, $Y = \cos X, Z = \cos(X+a)$, 这里 a 是常数. 求 ρ_{YZ} .

$$\text{解 } E(Y) = \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 0, \quad E(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x+a) dx = 0,$$

$$D(Y) = E\{[Y - E(Y)]^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2},$$

$$D(Z) = E\{[Z - E(Z)]^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x+a) dx = \frac{1}{2},$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = E\{[Y - E(Y)][Z - E(Z)]\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos(x+a) dx = \frac{1}{2} \cos a,$$

$$\text{因此 } \rho_{YZ} = \frac{\text{cov}(Y, Z)}{\sqrt{D(Y)} \cdot \sqrt{D(Z)}} = \frac{\frac{1}{2} \cos a}{\sqrt{1/2} \cdot \sqrt{1/2}} = \cos a.$$

① 当 $a=0$ 时, $\rho_{YZ}=1$, $Y=Z$, 存在线性关系;

② 当 $a=\pi$ 时, $\rho_{YZ}=-1$, $Y=-Z$, 存在线性关系;

③ 当 $a=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时, $\rho_{YZ}=0$, 这时 Y 与 Z 不相关, 但这时却有 $Y^2+Z^2=1$, 因此, Y 与 Z

不独立.

这个例子说明: 当两个随机变量不相关时, 它们并不一定相互独立, 它们之间还可能存在其他的函数关系.

定理 4.4 告诉我们, 相关系数 ρ_{XY} 描述了随机变量 X, Y 的线性相关程度, $|\rho_{XY}|$ 愈接近 1, 则 X 与 Y 之间愈接近线性关系. 当 $|\rho_{XY}|=1$ 时, X 与 Y 之间依概率 1 线性相关. 不过, 下例表明当 (X, Y) 是二维正态随机变量时, X 和 Y 不相关与 X 和 Y 相互独立是等价的.

例 4.19 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 它的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

求 $\text{Cov}(X, Y)$ 和 ρ_{XY} .

解 可以计算得 (X, Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < +\infty,$$

故 $E(X) = \mu_1$, $E(Y) = \mu_2$, $D(X) = \sigma_1^2$, $D(Y) = \sigma_2^2$.

$$\text{而 } \text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_1)(y-\mu_2) e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2} dxdy$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right), \quad u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad \text{则}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu + \rho\sigma_1\sigma_2u^2) e^{-\frac{u^2}{2} - \frac{t^2}{2}} dt du$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

$$+ \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

$$= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

$$\text{于是 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho.$$

这说明二维正态随机变量 (X, Y) 的概率密度中的参数 ρ 就是 X 和 Y 的相关系数, 从而二维正态随机变量的分布完全可由 X, Y 的各自的数学期望、方差以及它们的相关系数所确定.

由上一章讨论可知, 若 (X, Y) 服从二维正态分布, 那么 X 和 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$, 即 X 与 Y 不相关. 因此, 对于二维正态随机变量 (X, Y) 来说, X 和 Y 不相关与 X 和 Y 相互独立是等价的.

第四节 矩、协方差矩阵

数学期望、方差、协方差是随机变量最常用的数字特征, 它们都是特殊的矩 (Moment).

矩是更广泛的数字特征.

定义 4.4 设 X 和 Y 是随机变量, 若

$$E(X^k), k=1, 2, \dots$$

存在, 称它为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.

若 $E[X-E(X)]^k, k=1, 2, \dots$

存在, 称它为 X 的 k 阶中心矩.

若 $E(X^k Y^l), k, l=1, 2, \dots$

存在, 称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k [Y-E(Y)]^l\}, k, l=1, 2, \dots$

存在, 称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

显然, X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩, 方差 $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩, 协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 是 X 和 Y 的 1+1 阶混合中心矩.

当 X 为离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i$, 则

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i,$$

$$E[X-E(X)]^k = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^k p_i.$$

当 X 为连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 则

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx,$$

$$E[X-E(X)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^k f(x) dx.$$

下面介绍 n 维随机变量的协方差矩阵.

设 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的 1+1 阶混合中心矩

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}, i, j=1, 2, \dots, n$$

都存在, 则称矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵.

由于 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} (i, j=1, 2, \dots, n)$, 因此 Σ 是一个对称矩阵.

协方差矩阵给出了 n 维随机变量的全部方差及协方差, 因此在研究 n 维随机变量的统计规律时, 协方差矩阵是很重要的. 利用协方差矩阵还可以引入 n 维正态分布的概率密度.

首先用协方差矩阵重写二维正态随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度.

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

令 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, (X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

它的行列式 $|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$, 逆矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|} (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \rho^2} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right], \end{aligned}$$

因此 (X_1, X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

上式容易推广到 n 维的情形.

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是 n 维随机变量, 令

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix},$$

定义 n 维正态随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵.

n 维正态随机变量具有以下几条重要性质:

1° n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 服从 n 维正态分布的充要条件是 X_1, X_2, \dots, X_n 的任意的线性组合

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$$

服从一维正态分布. (其中 l_1, l_2, \dots, l_n 不全为零).

2° 若 (X_1, X_2, \dots, X_n) 服从 n 维正态分布, 设 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 是 X_1, X_2, \dots, X_n 的线性函数, 则 (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) 服从 k 维正态分布.

3° 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 服从 n 维正态分布, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立的充要条件是 X_1, X_2, \dots, X_n 两两不相关.

小 结

随机变量的数字特征是由随机变量的分布确定的,能描述随机变量某一个方面的特征的常数.最重要的数字特征是数学期望和方差.数学期望 $E(X)$ 描述随机变量 X 取值的平均大小, 方差 $D(X) = E\{[X-E(X)]^2\}$ 描述随机变量 X 与它自己的数学期望 $E(X)$ 的偏离程度.数学期望和方差虽不能像分布函数、分布律、概率密度一样完整地描述随机变量,但它们能描述随机变量的重要方面或人们最关心方面的特征, 它们在实际应用和理论上都非常重要.

要掌握随机变量的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望 $E(Y) = E[g(X)]$ 的计算公式 (4-3) 式和 (4-4) 式.这两个公式的意义在于当我们求 $E(Y)$ 时,不必先求出 $Y=g(X)$ 的分布律或概率密度,而只需利用 X 的分布律或概率密度就可以了,这样做的好处是明显的.

我们常利用公式 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 来计算方差 $D(X)$, 请注意这里 $E(X^2)$ 和 $[E(X)]^2$ 的区别.

要掌握数学期望和方差的性质,提请读者注意的是:

- (1) 当 X_1, X_2 独立或 X_1, X_2 不相关时, 才有 $E(X_1X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$;
- (2) 设 c 为常数, 则有 $D(cX) = c^2D(X)$;
- (3) $D(X_1 \pm X_2) = D(X_1) + D(X_2) \pm 2\text{Cov}(X_1, X_2)$, 当 X_1, X_2 独立或不相关时才有 $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$.

例如: 若 X_1, X_2 独立, 则有 $D(2X_1 - 3X_2) = 4D(X_1) + 9D(X_2)$.

相关系数 ρ_{XY} 有时也称为线性相关系数, 它是一个可以用来描述随机变量 (X, Y) 的两个分量 X, Y 之间的线性关系紧密程度的数字特征.当 $|\rho_{XY}|$ 较小时 X, Y 的线性相关的程度较差; 当 $\rho_{XY} = 0$ 时称 X, Y 不相关.不相关是指 X, Y 之间不存在线性关系, X, Y 不相关, 它们还可能存在除线性关系之外的关系 (参见第 3 节例 4.18), 又由于 X, Y 相互独立是指 X, Y 的一般关系而言的, 因此有以下的结论: X, Y 相互独立则 X, Y 一定不相关; 反之, 若 X, Y 不相关则 X, Y 不一定相互独立.

特别, 对于二维正态变量 (X, Y) , X 和 Y 不相关与 X 和 Y 相互独立是等价的.而二元正态随机变量的相关系数 ρ_{XY} 就是参数 ρ .于是, 用 “ $\rho = 0$ ” 是否成立来检验 X, Y 是否相互独立是很方便的.

重要术语及主题

数学期望	随机变量函数的数学期望	数学期望的性质
方差	标准差	方差的性质
协方差	相关系数	相关系数的性质
X, Y 不相关	矩	协方差矩阵

为了使用方便,我们列出常见分布及其期望和方差, 如表 4-15 所示:

表 4-15

分布名称	分布律或概率密度	期望	方差	参数范围
(0-1) 分布	$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=q$	p	pq	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$
二项分布 $X \sim b(n, p)$	$P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)	np	npq	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$ n 为自然数
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k=0, 1, 2, \dots$)	λ	λ	$\lambda > 0$

均匀分布 $X \sim U[a, b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$b > a$
指数分布 $X \sim E(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$
正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in R$)	μ	σ^2	μ 任意 $\sigma > 0$

习 题 四

设随机变量 X 的分布律如表 4-16 所示, 求 $E(X)$, $E(X^2)$, $E(2X+3)$.

表 4-16

X	-1	0	1	2
P_k	1/8	1/2	1/8	1/4

2. 已知 100 件产品中有 10 个次品, 求任意取出的 5 个产品中的次品数的数学期望、方差.

3. 设随机变量 X 的分布律如表 4-17 所示, 且已知 $E(X) = 0.1, E(X^2) = 0.9$, 求 P_1, P_2, P_3 .

表 4-17

X	-1	0	1
P_k	p_1	p_2	p_3

4. 袋中有 N 只球, 其中的白球数 X 为一随机变量, 已知 $E(X) = n$, 问从袋中任取 1 球为白球的概率是多少?

5. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $D(X)$.

6. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立, 且 $E(X) = 5, E(Y) = 11, E(Z) = 8$, 求下列随机变量的数学期望.

(1) $U = 2X + 3Y + 1$;

(2) $V = YZ - 4X$.

7. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $E(X) = E(Y) = 3, D(X) = 12, D(Y) = 16$, 求 $E(3X-2Y)$, $D(2X-3Y)$.

8. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试确定常数 k , 并求 $E(XY)$.

9. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(XY)$.

10. 设随机变量 X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求 (1) $E(X+Y)$; (2) $E(2X-3Y^2)$.

11. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-k^2x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求 (1) 系数 c ; (2) $E(X)$; (3) $D(X)$.

12. 袋中有 12 个零件, 其中 9 个合格品, 3 个废品. 安装机器时, 从袋中一个一个地取出 (取出后不放回), 设在取出合格品之前已取出的废品数为随机变量 X , 求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

13. 一工厂生产某种设备的寿命 X (以年计) 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

为确保消费者的利益, 工厂规定出售的设备若在一年内损坏可以调换. 若售出一台设备, 工厂获利 100 元, 而调换一台则损失 200 元, 试求工厂出售一台设备赢利的数学期望.

14. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量, 且有 $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i=1, 2, \dots$,

n , 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. 验证:

$$(1) E(\bar{X}) = \mu, \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$(2) S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right);$$

$$(3) E(S^2) = \sigma^2.$$

15. 对随机变量 X 和 Y , 已知 $D(X) = 2$, $D(Y) = 3$, $\text{Cov}(X, Y) = -1$,

计算: $\text{Cov}(3X-2Y+1, X+4Y-3)$.

16. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

17. 设随机变量 (X, Y) 的分布律如表 4-18 所示, 验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

表 4-18

X	-1	0	1
Y			
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

18. 设二维随机变量 (X, Y) 在以 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 求 $\text{Cov}(X, Y)$, ρ_{XY} .

19. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 和相关系数 ρ_{XY} .

20. 已知二维随机变量 (X, Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 试求 $Z_1 = X - 2Y$ 和 $Z_2 = 2X - Y$ 的相关系数.

21. 对于两个随机变量 V, W , 若 $E(V^2), E(W^2)$ 存在, 证明:

$$[E(VW)]^2 \leq E(V^2) E(W^2).$$

这一不等式称为柯西-许瓦兹 (Cauchy-Schwarz) 不等式.

22. 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从参数 $\lambda = 1/5$ 的指数分布. 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$. (2002 研考)

23. 已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放乙箱后, 求:

(1) 乙箱中次品件数 Z 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率. (2003 研考)

24. 假设由自动线加工的某种零件的内径 X (mm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 内径小于 10 或大于 12 为不合格品, 其余为合格品. 销售每件合格品获利, 销售每件不合格品亏损, 已知销售利润 T (单位: 元) 与销售零件的内径 X 有如下关系

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10, \\ 20, & 10 \leq X \leq 12, \\ -5, & X > 12. \end{cases}$$

问: 平均直径 μ 取何值时, 销售一个零件的平均利润最大?

25. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\pi/3$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

(2002 研考)

26. 两台同样的自动记录仪, 每台无故障工作的时间 $T_i(i=1,2)$ 服从参数为 5 的指数分布, 首先开动其中一台, 当其发生故障时停用而另一台自动开启. 试求两台记录仪无故障工作的总时间 $T=T_1+T_2$ 的概率密度 $f_T(t)$, 数学期望 $E(T)$ 及方差 $D(T)$.

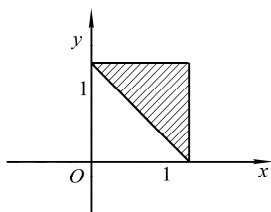
27. 设两个随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 $1/2$ 的正态分布, 求随机变量 $|X-Y|$ 的方差. (1998 研考)

28. 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$, 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时, 即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X , 求 $E(X)$ 和 $D(X)$. (2000 研考)

29. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在点 $(0, 1), (1, 0)$ 及 $(1, 1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布. (如图), 试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差. (2001 研考)

30. 设随机变量 U 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & U \leq -1 \\ 1, & U > -1 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & U \leq 1 \\ 1, & U > 1. \end{cases}$$



试求

(1) X 和 Y 的联合概率分布;

(2) $D(X+Y)$. (2002 研考)

31. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$,

(1) 求 $E(X)$ 及 $D(X)$;

(2) 求 $\text{Cov}(X, |X|)$, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立, 为什么?

32. 已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1, 3^2)$ 和 $N(0, 4^2)$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -1/2$, 设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$.

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ} ;

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立, 为什么?

33. 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 表示正面向上和反面向上的次数. 试求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} . (2001 研考)

34. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布如表 4-19 所示, 试求 X 和 Y 的相关系数 ρ .

表 4-19

Y	-1	0	1
X			
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

(2002 研考)

35. 对于任意两事件 A 和 B , $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 则称

$$\rho = \frac{P(AB) - P(A) \cdot P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$
 为事件 A 和 B 的相关系数. 试证:

(1) 事件 A 和 B 独立的充分必要条件是 $\rho = 0$;

(2) $|\rho| \leq 1$.

(2003 研考)

36. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $\text{Cov}(X, Y)$;

(3) $F(-1/2, 4)$.

(2006 研考)

37. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布如表 4-20 所示, 其中 a, b, c 为常数, 且 X 的数学期望

$$E(X) = -0.2, \quad P\{Y \leq 0 | X \leq 0\} = 0.5,$$
 记 $Z = X + Y$. 求:

(1) a, b, c 的值;

(2) Z 的概率分布;

(3) $P\{X = Z\}$.

(2006 研考)

表 4-20

<div>Y \ X</div>	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

38. 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别如表 4-21 和表 4-22 所示, 且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$. 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(2011 研考)

表 4-21

X	0	1
P_k	1/3	2/3

表 4-22

Y	-1	0	1
P_k	1/3	1/3	1/3

39. 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布如表 4-23 所示.

表 4-23

X \ Y	0	1	2
	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

求：

(1) $P\{X=2Y\}$;

(2) $\text{cov}(X-Y, Y)$.

(2012 研考)

40. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=1/2$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i)$, $i=1, 2$. 求:

(1) Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) $E(Y)$

(2014 研考)