

第三章 随机向量

在实际问题中，除了经常用到一个随机变量的情形外，还常用到多个随机变量的情形。例如，观察炮弹在地面弹着点 e 的位置，需要用它的横坐标 $X(e)$ 与纵坐标 $Y(e)$ 来确定，而横坐标和纵坐标是定义在同一个样本空间 $\Omega = \{e\} = \{\text{所有可能的弹着点}\}$ 上的两个随机变量。又如，某钢铁厂炼钢时必须考察炼出的钢 e 的硬度 $X(e)$ 、含碳量 $Y(e)$ 和含硫量 $Z(e)$ 的情况，它们也是定义在同一个 $\Omega = \{e\}$ 上的 3 个随机变量。因此，在实用上，有时只用一个随机变量是不够的，要考虑多个随机变量及其相互联系。本章以两个随机变量的情形为代表，讲述多个随机变量的一些基本内容。

第一节 二维随机向量及其分布

1. 二维随机向量的定义及其分布函数

定义 3.1 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega = \{e\}$ 。设 $X(e)$ 与 $Y(e)$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的两个随机变量，则称 $(X(e), Y(e))$ 为 Ω 上的二维随机向量 (2-dimensional random vector) 或二维随机变量 (2-dimensional random variable)，简记为 (X, Y) 。

类似地，可定义 n 维随机向量或 n 维随机变量 ($n > 2$)。

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega = \{e\}$ ，设随机变量 $X_1(e), X_2(e), \dots, X_n(e)$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，则称向量 $(X_1(e), X_2(e), \dots, X_n(e))$ 为 Ω 上的 n 维随机变量或 n 维随机向量。简记为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 。

与一维随机变量的情形类似，对于二维随机向量，也通过分布函数来描述其概率分布规律。考虑到两个随机变量的相互关系，我们需要将 (X, Y) 作为一个整体来进行研究。

定义 3.2 设 (X, Y) 是二维随机向量，对任意实数 x 和 y ，称二元函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \quad (3-1)$$

为二维随机向量 (X, Y) 的分布函数，或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。

类似地，可定义 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数。

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是 n 维随机变量，对任意实数 x_1, x_2, \dots, x_n ，称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布函数。

我们容易给出分布函数的几何解释。如果把二维随机变量 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么，分布函数 $F(x, y)$ 在 (x, y) 处的函数值就是随机点 (X, Y) 落在直线 $X=x$ 的左侧和直线 $Y=y$ 的下方的无穷矩形域内的概率 (见图 3-1)。

根据以上几何解释并借助于图 3-2，可以算出随机点 (X, Y) 落在矩形域 $\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$ 内的概率为：

$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1). \quad (3-2)$$

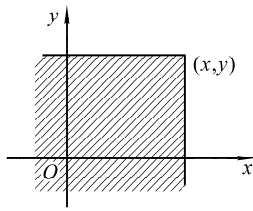


图 3-1

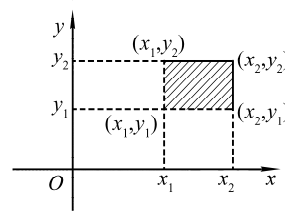


图 3-2

容易证明, 分布函数 $F(x, y)$ 具有以下基本性质:

1° $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数, 即对于任意固定的 y , 当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x , 当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2° $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且对于任意固定的 y , $F(-\infty, y) = 0$; 对于任意固定的 x , $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

3° $F(x, y)$ 关于 x 和 y 是右连续的, 即

$$F(x, y) = F(x+0, y), F(x, y) = F(x, y+0).$$

4° 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 下述不等式成立:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

与一维随机变量一样, 经常讨论的二维随机变量有两种类型: 离散型与连续型.

2. 二维离散型随机变量

定义 3.3 若二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值是有限对或可数无穷多对, 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的一切可能取值为 (x_i, y_j) , $i, j = 1, 2, \dots$, 且 (X, Y) 取各对可能值的概率为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots. \quad (3-3)$$

称 (3-3) 式为 (X, Y) 的 (联合) 概率分布或 (联合) 分布律, 离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律也可用表 3-1 表示.

表 3-1

$X \backslash Y$	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots
y_1	p_{11}	p_{21}	\dots	p_{i1}	\dots
y_2	p_{12}	p_{22}	\dots	p_{i2}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
y_j	p_{1j}	p_{2j}	\dots	p_{ij}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

由概率的定义可知 p_{ij} 具有如下性质:

1° 非负性: $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots$;

2° 规范性: $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}, \quad (3-4)$$

其中和式是对一切满足 $x_i \leq x, y_j \leq y$ 的 i, j 来求和的.

例 3.1 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律如表 3-2 所示: 求 $P\{X > 1, Y \geq 3\}$ 及 $P\{X = 1\}$.

表 3-2

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.3	0
2	0	0	0.2

3	0.1	0.1	0
4	0	0.2	0

解 $P\{X>1, Y\geq 3\}=P\{X=2, Y=3\}+P\{X=2, Y=4\}+P\{X=3, Y=3\}+P\{X=3, Y=4\}=0.3$;
 $P\{X=1\}=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=2\}+P\{X=1, Y=3\}+P\{X=1, Y=4\}=0.2$.

例 3.2 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 这 4 个整数中等可能地取值, 另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数, 试求 (X, Y) 的分布律.

解 由乘法公式容易求得 (X, Y) 的分布律, 易知 $\{X=i, Y=j\}$ 的取值情况是: $i=1, 2, 3, 4, j$ 取不大于 i 的正整数, 且

$$P\{X=i, Y=j\}=P\{Y=j | X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}, i=1, 2, 3, 4; j\leq i.$$

于是 (X, Y) 的分布律如表 3-3 所示.

表 3-3

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

3. 二维连续型随机变量

定义 3.4 设随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 如果存在一个非负可积函数 $f(x, y)$, 使得对任意实数 x, y , 有

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, \quad (3-5)$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 称 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合分布密度或概率密度.

按定义, 概率密度 $f(x, y)$ 具有如下性质:

1° $f(x, y) \geq 0 \quad (-\infty < x, y < +\infty)$;

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = 1$;

3° 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y);$$

4° 设 G 为 xOy 平面上的任一区域, 随机点 (X, Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (3-6)$$

在几何上, 概率密度 $z=f(x, y)$ 表示空间一曲面, 介于它和 xOy 平面的空间区域的立体体积等于 1, $P\{(X, Y) \in G\}$ 的值等于以 G 为底, 以曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体体积.

与一维随机变量相似, 有如下常用的二维均匀分布和二维正态分布.

设 G 是平面上的有界区域, 其面积为 A , 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布.

类似地, 设 G 为空间上的有界区域, 其体积为 A , 若三维随机变量 (X, Y, Z) 具有概率密度

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y, z) \in G, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 (X, Y, Z) 在 G 上服从均匀分布.

设二维随机变量 (X, Y) 具有联合分布密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 则称 (X, Y) 为具有参数 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态随机变量, 记作: $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

例 3.3 设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 上服从均匀分布, 求:

(1) (X, Y) 的概率密度;

(2) $P\{0 < X < 1, 0 < Y < 1\}$.

解 (1) 圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 的面积 $A = 4\pi$, 故 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) G 为不等式 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 所确定的区域, 所以

$$P\{0 < X < 1, 0 < Y < 1\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{4\pi} dy = \frac{1}{4\pi}.$$

例 3.4 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ;

(2) 求 (X, Y) 的分布函数;

(3) 求 $P\{X < Y\}$.

解 (1) 由概率密度的性质, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ke^{-(2x+3y)} dx dy \\ &= k \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy \end{aligned}$$

$$= k \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{3} e^{-3y} \right]_0^{+\infty} = k/6 = 1.$$

于是, $k=6$.

(2) 由联合分布函数的定义, 有

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv \\ &= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 6e^{-(2u+3v)} du dv = (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & y > 0, x > 0. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P\{X < Y\} &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^y 6e^{-(2x+3y)} dx \right] dy = \int_0^{+\infty} 3e^{-3y} (1-e^{-2y}) dy = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

例 3.5 设 $(X, Y) \sim N(0, 0, \sigma^2, \sigma^2, 0)$, 求 $P\{X < Y\}$.

解 易知 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x, y < +\infty$, 所以

$$P\{X < Y\} = \iint_{x < y} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

引进极坐标

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

则

$$P\{X < Y\} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr d\theta = \frac{1}{2}.$$

第二节 边缘分布

二维随机变量 (X, Y) 作为一个整体, 它具有分布函数 $F(x, y)$. 而 X 和 Y 也都是随机变量, 它们各自也具有分布函数. 将它们分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数 (Marginal distribution function). 边缘分布函数可以由 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$ 来确定, 事实上

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty), \quad (3-7)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y). \quad (3-8)$$

下面分别讨论二维离散型随机变量与连续型随机变量的边缘分布.

1. 二维离散型随机变量的边缘分布

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 其分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots.$$

于是, 有边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_j p_{ij}.$$

由此可知, X 的分布律为:

$$P\{X=x_i\} = \sum_j p_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, \quad (3-9)$$

称其为 (X, Y) 关于 X 的**边缘分布律**. 同理, 称 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布律为:

$$P\{Y=y_j\} = \sum_i p_{ij}, \quad j=1, 2, \dots. \quad (3-10)$$

例 3.6 设袋中有 4 个白球及 5 个红球, 现从其中随机地抽取两次, 每次取一个, 定义随机变量 X, Y 如下:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{第一次摸出白球,} \\ 1, & \text{第一次摸出红球;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{第二次摸出白球,} \\ 1, & \text{第二次摸出红球.} \end{cases}$$

写出下列两种试验的随机变量 (X, Y) 的联合分布与边缘分布.

(1) 有放回摸球; (2) 无放回摸球.

解 (1) 采取有放回摸球时, (X, Y) 的联合分布与边缘分布由表 3-4 给出.

表 3-4

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$4/9 \times 4/9$	$4/9 \times 5/9$	$4/9$
1	$5/9 \times 4/9$	$5/9 \times 5/9$	$5/9$
$P\{Y=y_j\}$	$4/9$	$5/9$	

(2) 采取无放回摸球时, (X, Y) 的联合分布与边缘分布由表 3-5 给出.

表 3-5

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$4/9 \times 3/8$	$4/9 \times 5/8$	$4/9$
1	$5/9 \times 4/8$	$5/9 \times 4/8$	$5/9$
$P\{Y=y_j\}$	$4/9$	$5/9$	

在上例的表中, 中间部分是 (X, Y) 的联合分布律, 而边缘部分是 X 和 Y 的边缘分布律, 它们由联合分布经同一行或同一列的和而得到, “边缘”二字即由上表的外貌得来. 显然, 二维离散型随机变量的边缘分布律也是离散的. 另外, 例 3.6 的 (1) 和 (2) 中的 X 和 Y 的边缘分布是相同的, 但它们的联合分布却完全不同. 由此可见, 联合分布不能由边缘分布惟一确定, 也就是说, 二维随机变量的性质不能由它的两个分量的个别性质确定. 此外, 还必须考虑它们之间的联系. 这进一步说明了多维随机变量的作用. 在什么情况下, 二维随机变量的联合分布可由两个随机变量的边缘分布确定, 这是第四节将要学习的内容.

2. 二维连续型随机变量的边缘分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x, y)$, 由

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx,$$

知 X 是一个连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy. \quad (3-11)$$

同理, Y 也是一个连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (3-12)$$

分别称 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘分布密度**或**边缘概率密度**.

例 3.7 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

例 3.8 求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$, 由于

$$\frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \left[\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right]^2 - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2} dy$$

令

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right),$$

则有

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

同理

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

我们看到二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布, 并且都不依赖于 ρ , 亦即对于给定的 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$, 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布, 它们的边缘分布却都是一样的. 这一事实表明, 对于连续型随机变量来说, 单由关于 X 和关于 Y 的边缘分布, 一般也不能确定 X 和 Y 的联合分布.

第三节 条件分布

由条件概率的定义，我们可以定义多维随机变量的条件分布.下面分别讨论二维离散型和二维连续型随机变量的条件分布.

1. 二维离散型随机变量的条件分布律

定义 3.5 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j ，若 $P\{Y=y_j\} > 0$ ，则称

$$P\{X=x_i | Y=y_j\} = P\{X=x_i, Y=y_j\} / P\{Y=y_j\}, \quad i=1, 2, \dots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律** (Conditional distribution) .

同样，对于固定的 i ，若 $P\{X=x_i\} > 0$ ，则称

$$P\{Y=y_j | X=x_i\} = P\{X=x_i, Y=y_j\} / P\{X=x_i\}, \quad j=1, 2, \dots$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

例 3.9 已知 (X, Y) 的联合分布律如表 3-6 所示，求：

表 3-6

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	2	3	4	$P\{Y=y_j\}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	2/16	10/48
$P\{X=x_i\}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

(1) 在 $Y=1$ 的条件下， X 的条件分布律；

(2) 在 $X=2$ 的条件下， Y 的条件分布律.

解 (1) 由联合分布律表可知边缘分布律.于是

$$P\{X=1 | Y=1\} = \frac{1}{4} / \frac{25}{48} = 12/25;$$

$$P\{X=2 | Y=1\} = \frac{1}{8} / \frac{25}{48} = 6/25;$$

$$P\{X=3 | Y=1\} = \frac{1}{12} / \frac{25}{48} = 4/25;$$

$$P\{X=4 | Y=1\} = \frac{1}{16} / \frac{25}{48} = 3/25.$$

即在 $Y=1$ 的条件下， X 的条件分布律如表 3-7 所示.

表 3-7

X	1	2	3	4
P_k	12/25	6/25	4/25	3/25

(2) 同理可求得在 $X=2$ 的条件下， Y 的条件分布律如图 3-8 所示.

表 3-8

Y	1	2	3
P_k	1/2	1/2	0

例 3.10 一射手进行射击, 击中的概率为 p ($0 < p < 1$), 射击到击中目标两次为止. 记 X 表示首次击中目标时的射击次数, Y 表示射击的总次数. 试求 X, Y 的联合分布律与条件分布律.

解 依题意, $\{X=m, Y=n\}$ 表示 “前 $m-1$ 次不中, 第 m 次击中, 接着又 $n-1-m$ 次不中, 第 n 次击中.” 因各次射击是独立的, 故 X, Y 的联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}, \quad m=1, 2, \dots, n-1; \quad n=2, 3, \dots$$

$$\text{又因 } P\{X=m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} (1-p)^{n-2} = p(1-p)^{m-1}, \quad m=1, 2, \dots;$$

$$P\{Y=n\} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n=2, 3, \dots,$$

因此, 所求的条件分布律分别为

当 $n=2, 3, \dots$ 时,

$$P\{X=m | Y=n\} = \frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{Y=n\}} = \frac{1}{n-1}, \quad m=1, 2, \dots, n-1;$$

当 $m=1, 2, \dots$ 时,

$$P\{Y=n | X=m\} = \frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{X=m\}} = p(1-p)^{n-m-1}, \quad n=m+1, m+2, \dots$$

2. 二维连续型随机变量的条件分布

对于连续型随机变量 (X, Y) , 因为 $P\{X=x, Y=y\}=0$, 所以不能直接由定义 3.5 来定义条件分布, 但是对于任意的 $\varepsilon > 0$, 如果 $P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$, 则可以考虑

$$P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}.$$

如果上述条件概率当 $\varepsilon \rightarrow 0+$ 时的极限存在, 自然可以将此极限值定义为在 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布.

定义 3.6 设对于任何固定的正数 ε , $P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$, 若

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{X \leq x, y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数, 记作 $P\{X \leq x | Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x | y)$.

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 分布密度函数为 $f(x, y)$, 且 $f(x, y)$ 和边缘分布密度函数 $f_Y(y)$ 连续, $f_Y(y) > 0$, 则不难验证, 在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du.$$

若记 $f_{X|Y}(x | y)$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布密度, 则

$$f_{X|Y}(x | y) = f(x, y) / f_Y(y).$$

类似地, 若边缘分布密度函数 $f_X(x)$ 连续, $f_X(x) > 0$, 则在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件

分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,v)}{f_X(x)} dv.$$

若记 $f_{Y|X}(y|x)$ 为在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件分布密度, 则

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

例 3.11 设 $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$, 求 $f_{X|Y}(x|y)$ 与 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 易知 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} \quad (-\infty < x, y < +\infty)$, 所以

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}};$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

例 3.12 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 当观察到 $X=x$ ($0 < x < 1$) 时, $Y \sim U(x,1)$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 按题意, X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

类似地, 对于任意给定的值 x , $0 < x < 1$, 在 $X=x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此, X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是, 可得关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

第四节 随机变量的独立性

我们在前面已经知道, 随机事件的独立性在概率的计算中起着很大的作用. 下面我们介绍随机变量的独立性, 它在概率论和数理统计的研究中占有十分重要的地位.

定义 3.7 设 X 和 Y 为两个随机变量, 若对于任意的 x 和 y 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

则称 X 和 Y 是相互独立 (Mutually independent) 的.

若二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 其边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则上述独立性条件等价于对所有 x 和 y 有

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y). \quad (3-13)$$

对于二维离散型随机变量, 上述独立性条件等价于对于 (X, Y) 的任何可能取的值 (x_i, y_j) 有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}. \quad (3-14)$$

对于二维连续型随机变量, 独立性条件的等价形式是对一切 x 和 y 有

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \quad (3-15)$$

这里, $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的概率密度函数, 而 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别是关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度函数.

如在例 3.6 中, (1) 有放回摸球时, X 与 Y 是相互独立的; 而 (2) 无放回摸球时, X 与 Y 不是相互独立的.

例 3.13 设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布, 问 X 和 Y 是否相互独立?

解 (X, Y) 的联合分布密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由此可得

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

可见在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上, $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 和 Y 不相互独立.

例 3.14 设 X 和 Y 分别表示两个元件的寿命 (单位: h), 又设 X 与 Y 相互独立, 且它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x, y)$.

解 由 X 和 Y 相互独立, 可知

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

第五节两个随机变量函数的分布

下面讨论两个随机变量函数的分布问题，就是已知二维随机变量 (X, Y) 的分布律或密度函数，求 $Z = \varphi(X, Y)$ 的分布律或密度函数问题。

1. 二维离散型随机变量函数的分布

设 (X, Y) 为二维离散型随机变量，则函数 $Z = \varphi(X, Y)$ 仍然是离散型随机变量。从下面两例可知，离散型随机变量函数的分布律是不难获得的。

例 3.15 设 (X, Y) 的分布律如表 3-9 所示，求 $Z = X + Y$ 和 $Z = XY$ 的分布律。

表 3-9

X	-1	2
Y		
-1	5/20	3/20
1	2/20	3/20
2	6/20	1/20

解 先列出表 3-10

表 3-10

P	5/20	2/20	6/20	3/20	3/20	1/20
(X, Y)	(-1, -1)	(-1, 1)	(-1, 2)	(2, -1)	(2, 1)	(2, 2)
$X+Y$	-2	0	1	1	3	4
XY	1	-1	-2	-2	2	4

从表中看出 $Z = X + Y$ 可能取值为 -2, 0, 1, 3, 4, 且

$$P\{Z = -2\} = P\{X + Y = -2\} = P\{X = -1, Y = -1\} = 5/20;$$

$$P\{Z = 0\} = P\{X + Y = 0\} = P\{X = -1, Y = 1\} = 2/20;$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X + Y = 1\} = P\{X = -1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = -1\} = 6/20 + 3/20 = 9/20;$$

$$P\{Z = 3\} = P\{X + Y = 3\} = P\{X = 2, Y = 1\} = 3/20;$$

$$P\{Z = 4\} = P\{X + Y = 4\} = P\{X = 2, Y = 2\} = 1/20.$$

于是 $Z = X + Y$ 的分布律如表 3-11 所示。

表 3-11

$X+Y$	-2	0	1	3	4
P	5/20	2/20	9/20	3/20	1/20

同理可得， $Z = XY$ 的分布律如表 3-12 所示。

表 3-12

XY	-2	-1	1	2	4
P_k	9/20	2/20	5/20	3/20	1/20

例 3.16 设 X, Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的泊松分布，求证： $Z = X + Y$ 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布。

证 Z 的可能取值为 0, 1, 2, ..., Z 的分布律为

$$\begin{aligned}
 P\{Z=k\} &= P\{X+Y=k\} = \sum_{i=0}^k P\{X=i\}P\{Y=k-i\} \\
 &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} = \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^k, \quad k=0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

所以 Z 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布.

本例说明,若 X, Y 相互独立, 且 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 则 $X+Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$. 这种性质称为分布的可加性, 泊松分布是一个可加性分布. 类似地, 可以证明二项分布也是一个可加性分布, 即若 X, Y 相互独立, 且 $X \sim b(n_1, p)$, $Y \sim b(n_2, p)$, 则 $X+Y \sim b(n_1+n_2, p)$.

2. 二维连续型随机变量函数的分布

设 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 若其函数 $Z = \varphi(X, Y)$ 仍然是连续型随机变量, 则存在密度函数 $f_Z(z)$. 求密度函数 $f_Z(z)$ 的一般方法如下:

首先求出 $Z = \varphi(X, Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\varphi(X, Y) \leq z\} = P\{(X, Y) \in G\} \\
 &= \iint_G f(u, v) du dv,
 \end{aligned}$$

其中 $f(x, y)$ 是密度函数, $G = \{(x, y) \mid \varphi(x, y) \leq z\}$.

其次是利用分布函数与密度函数的关系, 对分布函数求导, 就可得到密度函数 $f_Z(z)$.

下面讨论两个具体的随机变量函数的分布.

(1) $Z = X+Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy,$$

这里积分区域 $G: x+y \leq z$ 是直线 $x+y=z$ 左下方的半平面, 化成累次积分得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right] dy.$$

固定 z 和 y , 对积分 $\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx$ 作变量变换, 令 $x = u-y$, 得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^z f(u-y, y) du.$$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z f(u-y, y) du dy = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y) dy \right] du.$$

由概率密度的定义, 即得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy. \quad (3-16)$$

由 X, Y 的对称性, $f_Z(z)$ 又可写成

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx. \quad (3-17)$$

这样, 我们得到了两个连续型随机变量和的概率密度的一般公式.

特别地, 当 X 和 Y 相互独立时, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy; \quad (3-18)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx. \quad (3-19)$$

这两个公式称为卷积 (Convolution) 公式,记为 $f_X * f_Y$,即

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

例 3.17 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量,它们都服从 $N(0, 1)$ 分布,求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度.

解 由题设知 X, Y 的分布密度分别为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

由卷积公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx.$$

设 $t = x - \frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}},$$

即 Z 服从 $N(0, 2)$ 分布.

一般, 设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(u_1, \sigma_1^2), Y \sim N(u_2, \sigma_2^2)$, 由公式 (3.19) 经过计算知 $Z=X+Y$ 仍然服从正态分布, 且有 $Z \sim N(u_1+u_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. 这个结论还能推广到 n 个独立正态随机变量之和的情况, 即若 $X_i \sim N(u_i, \sigma_i^2) (i=1, 2, \dots, n)$, 且它们相互独立, 则它们的和

$Z=X_1+X_2+\dots+X_n$ 仍然服从正态分布, 且有 $Z \sim N(\sum_{i=1}^n u_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.

更一般地, 可以证明有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布.

例 3.18 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布密度.

解 X, Y 相互独立, 所以由卷积公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

由题设可知 $f_X(x)f_Y(y)$ 只有当 $0 \leq x \leq 1, y > 0$, 即当 $0 \leq x \leq 1$ 且 $z-x > 0$ 时才不等于

零. 现在所求的积分变量为 x, z 当作参数, 当积分变量满足 x 的不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x < z \end{cases}$ 时, 被

积函数 $f_X(x)f_Y(z-x) \neq 0$. 下面针对参数 z 的不同取值范围来计算积分.

当 $z < 0$ 时, 上述不等式组无解, 故 $f_X(x)f_Y(z-x) = 0$. 当 $0 \leq z \leq 1$ 时, 不等式组的解为 $0 \leq x \leq z$. 当 $z > 1$ 时, 不等式组的解为 $0 \leq x \leq 1$. 所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z}, & 0 \leq z \leq 1, \\ \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e-1), & z > 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例 3.19 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其中 X 的分布律如表 3-13 所示.

X	x_1	x_2
P_k	$1-p$	p

而 Y 的概率密度为 $f_Y(y)$, $f_Y(y)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 求随机变量函数 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解 设 $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数, 则由全概率公式, 之 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X+Y \leq z\} \\ &= (1-p)P\{X+Y \leq z | X=x_1\} + pP\{X+Y \leq z | X=x_2\} \\ &= (1-p)P\{Y \leq z-x_1 | X=x_1\} + pP\{Y \leq z-x_2 | X=x_2\}. \end{aligned}$$

又由于 $f_Y(y)$ 连续, 因此 $F_Y(y)$ 可导, 于是得 Z 的概率密度

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = (1-p)f_Y(z-x_1) + pf_Y(z-x_2)$$

(2) $Z=X/Y$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则 $Z=X/Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X/Y \leq z\} = \iint_{x/y \leq z} f(x,y) dx dy.$$

令 $u=y$, $v=x/y$, 即 $x=uv$, $y=u$. 这一变换的雅可比 (Jacobi) 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u.$$

于是, 代入上式得

$$F_Z(z) = \iint_{v \leq z} f(uv, u) |J| du dv = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(uv, u) |u| du \right] dv.$$

这就是说, 随机变量 Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zu, u) |u| du. \quad (3-20)$$

特别地, 当 X 和 Y 独立时, 有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zu) f_Y(u) |u| du, \quad (3-21)$$

其中 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

例 3.20 设 X 和 Y 相互独立, 且均服从 $N(0, 1)$ 分布, 求 $Z=X/Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 由 (3-21) 式有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zu)f_Y(u)|u|du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2(1+z^2)}{2}} |u|du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} ue^{-\frac{u^2(1+z^2)}{2}} du = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, \quad -\infty < z < +\infty. \end{aligned}$$

例 3.20 设 X, Y 分别表示两只不同型号的灯泡的寿命, X, Y 相互独立, 它们的概率密度依次为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=X/Y$ 的概率密度函数.

解 当 $z > 0$ 时, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} ye^{-yz} 2e^{-2y} dy = \int_0^{+\infty} 2ye^{-(2+z)y} dy = \frac{2}{(2+z)^2};$$

当 $z \leq 0$ 时, $f_Z(z) = 0$. 于是

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(2+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(3) $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X, Y)$ 的分布

设 X, Y 相互独立, 且它们分别有分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$. 求 X, Y 的最大值, 最小值: $M=\max(X,Y)$, $N=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_M(z)$, $F_N(z)$.

由于 $M=\max(X,Y)$ 不大于 z 等价于 X 和 Y 都不大于 z , 故 $P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\}$, 又由于 X 和 Y 相互独立, 因此

$$F_M(z) = P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\} \cdot P\{Y \leq z\} = F_X(z) \cdot F_Y(z). \quad (3-22)$$

类似地, 可得 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_N(z) &= P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \\ &= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)). \end{aligned} \quad (3-23)$$

以上结果容易推广到 n 个相互独立的随机变量的情况. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $M=\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 及 $N=\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_M(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\dots F_{X_n}(z); \quad (3-24)$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\dots[1 - F_{X_n}(z)]. \quad (3-25)$$

特别, 当 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立且有相同分布函数 $F(x)$ 时, 有

$$F_M(z) = (F(z))^n, \quad (3-26)$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n. \quad (3-27)$$

例 3.22 设 X, Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 求 $Z=\max\{X, Y\}$ 的密度函数.

解 设 X, Y 的分布函数为 $F(x)$, 则

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

由于 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} = [F(z)]^2,$$

所以, Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = F'(z) = 2F(z)F'(z) = \begin{cases} 2e^{-z}(1 - e^{-z}), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

下面再举一个由两个随机变量的分布函数求两随机变量的函数的密度函数的一般例子.

例 3.23 设 X, Y 相互独立, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$, 求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的密度函数.

解 先求分布函数

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\}.$$

当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $z > 0$ 时,

$$F_Z(z) = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\} = \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

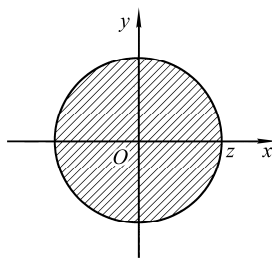


图 3-3

作极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq z$, $0 \leq \theta < 2\pi$ (如图 3-3), 于是有

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

故得所求 Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

此分布称为瑞利分布 (Rayleigh), 它很有用. 例如, 炮弹着点的坐标为 (X, Y) , 设横向偏差 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 纵向偏差 $Y \sim N(0, \sigma^2)$, X, Y 相互独立, 那么弹着点到原点的距离 D 便服从瑞利分布, 瑞利分布还在噪声、海浪等理论中得到应用.

小 结

对一维随机变量的概念加以扩充,就得多维随机变量,我们着重讨论了二维随机变量.

1. 二维随机变量 (X, Y) 的分布函数:

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(1) 离散型随机变量 (X, Y) 定义分布律:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots, \sum_{i,j} p_{ij} = 1.$$

(2) 连续型随机变量 (X, Y) 定义概率密度 $f(x, y) (f(x, y) \geq 0)$:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy, \text{ 对任意 } x, y.$$

一般,我们都是利用分布律或概率密度(不是利用分布函数)来描述和研究二维随机变量的.

2. 二维随机变量的分布律,或概率密度的性质与一维的类似.特别地,对于二维连续型随机变量,有公式

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

其中, G 是平面上的某区域,这一公式常用来求随机变量的不等式成立的概率,例如:

$$P\{Y \leq X\} = P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

其中 G 为半平面 $y \leq x$.

3. 研究二维随机变量 (X, Y) 时,除了讨论上述一维随机变量类似的内容外,还讨论了以下新的内容:边缘分布、条件分布、随机变量的独立性等.

(1) 对 (X, Y) 而言,由 (X, Y) 的分布可以确定关于 X 、关于 Y 的边缘分布.反之,由 X 和 Y 的边缘分布一般是不能确定 (X, Y) 的分布的.只有当 X, Y 相互独立时,由两边缘分布能确定 (X, Y) 分布.

(2) 随机变量的独立性是随机事件独立性的扩充.我们也常利用问题的实际意义去判断两个随机变量的独立性.例如,若 X, Y 分别表示两个工厂生产的显像管的寿命,则可以认为 X, Y 是相互独立的.

(3) 讨论了 $Z=X+Y, Z=X/Y, M=\max(X, Y), N=\min(X, Y)$ 的分布的求法.(设 (X, Y) 分布已知);这是很有用的.

4. 本章在进行各种问题的计算时,例如,在求边缘概率密度,求条件概率密度,求 $Z=X+Y$ 的概率密度或在计算概率 $P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$ 时,要用到二重积分,或用到

二元函数固定其中一个变量对另一个变量的积分.此时千万要搞清楚积分变量的变化范围.题目做错,往往是由于在积分运算时,将有关的积分区间或积分区域搞错了.在做题时,画出有关函数的积分域的图形,对于正确确定积分上下限肯定是有帮助的.另外,所求得的边缘密度、条件密度或 $Z=X+Y$ 的密度,往往是分段函数,正确写出分段函数的表达式当然是必须的.

重要术语及主题

二维随机变量 (X, Y)

(X, Y) 的分布函数

离散型随机变量 (X, Y) 的分布律

连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度

离散型随机变量 (X, Y) 的边缘分布律

连续型随机变量 (X, Y) 的边缘概率密度

条件分布函数

条件概率密度

$Z=X+Y$ 的概率密度

$M=\max(X,Y)$, $N=\min(X,Y)$ 的概率密度

条件分布律

两个随机变量 X, Y 的独立性

$Z=X/Y$ 的概率密度

习 题 三

1. 将一硬币抛掷三次, 以 X 表示在三次中出现正面的次数, 以 Y 表示三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值. 试写出 X 和 Y 的联合分布律.
2. 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球, 在其中任取 4 只球, 以 X 表示取到黑球的只数, 以 Y 表示取到红球的只数. 求 X 和 Y 的联合分布律.
3. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数的部分表达式为

$$F(x, y) = \sin x \sin y, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

求二维随机变量 (X, Y) 在长方形域 $\left\{0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} < y \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ 内的概率.

4. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布密度

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- 求: (1) 常数 A ;
(2) 随机变量 (X, Y) 的分布函数;
(3) $P\{0 \leq X < 1, 0 \leq Y < 2\}$.

5. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 确定常数 k ;
 - (2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$;
 - (3) 求 $P\{X < 1.5\}$;
 - (4) 求 $P\{X+Y \leq 4\}$.
6. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0, 0.2)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求:

- (1) X 与 Y 的联合分布密度;
- (2) $P\{Y \leq X\}$.

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合分布密度.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度.

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度.

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 试确定常数 c ;

(2) 求边缘概率密度.

11. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$.

12. 袋中有五个号码 1, 2, 3, 4, 5, 从中任取三个, 记这三个号码中最小的号码为 X , 最大的号码为 Y .

(1) 求 X 与 Y 的联合概率分布;

(2) X 与 Y 是否相互独立?

13. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律如表 3-14 所示.

表 3-14

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	5	8
0.4	0.15	0.30	0.35
0.8	0.05	0.12	0.03

(1) 求关于 X 和关于 Y 的边缘分布;

(2) X 与 Y 是否相互独立?

14. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度;

(2) 设以 a 为变量的二次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 试求 a 有实根的概率.

15. 设 X 和 Y 分别表示两个不同电子器件的寿命（单位：h），并设 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z=X/Y$ 的概率密度.

16. 设某种型号的电子管的寿命（单位：h）近似地服从 $N(160, 20^2)$ 分布.随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

17. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k), k=0, 1, 2, \dots,$$

$$P\{Y=r\}=q(r), r=0, 1, 2, \dots.$$

证明：随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^i p(k)q(i-k), i=0, 1, 2, \dots.$$

18. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，它们都服从参数为 n, p 的二项分布.证明： $Z=X+Y$ 服从参数为 $2n, p$ 的二项分布.

19. 设随机变量 (X, Y) 的分布律如表 3-15 所示.

表 3-15

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

求：

- (1) $P\{X=2 \mid Y=2\}, P\{Y=3 \mid X=0\}$;
- (2) $V=\max(X, Y)$ 的分布律;
- (3) $U=\min(X, Y)$ 的分布律;
- (4) $W=X+Y$ 的分布律.

20. 雷达的圆形屏幕半径为 R ，设目标出现点 (X, Y) 在屏幕上服从均匀分布.

- (1) 求 $P\{Y>0 \mid Y>X\}$;
- (2) 设 $M=\max\{X, Y\}$ ，求 $P\{M>0\}$.

21. 设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成，二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布，求 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值？

22. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，表 3-16 列出了二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值.试将其余数值填入表中的空白处.

23.表 3-15

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1		1/8		
x_2	1/8			

$P\{Y=y_j\}=p_j$	1/6	1
------------------	-----	---

23. 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 $p (0 < p < 1)$, 且中途下车与否相互独立, 以 Y 表示在中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布. (2001 研考)

24. 设随机变量 X 和 Y 独立, 其中 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, 而 Y 的概率密度为 $f(y)$,

求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$. (2002 研考)

25. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 求 $P\{\max\{X,Y\} \leq 1\}$.

26. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求:

(1) $P\{X > 2Y\}$;

(2) $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$. (2009 研考)

27. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3}, i = -1, 0, 1$, Y 的概率密度

为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 记 $Z=X+Y$, 求

(1) $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right\}$;

(2) Z 的概率密度 $f_Z(z)$. (2008 研考)

28. 袋中有 1 个红球、2 个黑球、3 个白球, 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X, Y, Z 分别表示两次所得红球、黑球与白球的个数, 求:

(1) $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right\}$;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布. (2009 研考)

29. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x, y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率 $f_{Y|X}(y|x)$. (2010 研考)

30. 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别如表 3-17、表 3-18 所示.

表 3-17

X	0	1
P_k	1/3	2/3

表 3-18

Y	-1	0	1
P _k	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$, 求:

(1) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) $Z = XY$ 的概率分布.

(2011 研考)

31. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ X, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$, 求:

(1) Y 的分布函数;

(2) 概率 $P\{X \leq Y\}$.

(2013 研考)