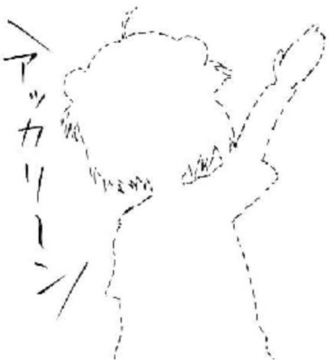

冲刺高数笔记

奇峰

之前

目录

第一章

函数、极限、连续

I. 函数极限的计算

$$\text{计算函数极限时，考虑}\begin{cases}\text{洛必达}\\\text{等价}\\\text{泰勒}\\\text{导数定义}\\\text{拉格朗日}\end{cases}$$

$$\text{已知极限时，考虑}\begin{cases}\text{函数值 - 分母推分子}\\\text{导数值 - 导数定义}\\\text{函数符号 - 保号性}\\\text{函数表达式 - 去极限号，即高阶无穷小}\end{cases}$$

函数极限 - T1.2

直接设三次多项式为 $f(x) = A(x-2a)(x-4a)(x-x_0)$, 代入已知条件求解。

微分方程性质 - T1.3

$$\text{微分方程含有 } y, y', y'' \text{ 时，其}\begin{cases}\text{无穷阶可导}\\\text{含有初始条件}\end{cases}$$

利用泰勒展开将其展开，然后通过方程求系数。

变限积分求极限 - T1.4-6

变限积分函数求极限时，

- 洛必达 -

  n 阶连续可导，洛 n 次；

  n 阶可导，洛 $n-1$ 次，最后一阶用定义。

- 变限积分等价

  变限积分函数，被积函数比值极限为 1, 则变限积分等价；

  即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1, \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{\varphi(x)} g(t)\mathrm{d}t} = 1.$

- 泰勒展开 - 泰勒展开为多项式，然后求积分。

泰勒嵌套泰勒 - T1.7-9

利用泰勒展开一部分后，将结果再次利用泰勒展开，化为多项式；如对 $f(g(x))$, 先展开 $g(x)$ 得到 $f(t \triangleq g(0)+g'(0)x+\cdots)$, 再展开为 $f(0)+tf'(0)+\cdots$

具体而言，

$$\begin{aligned}\tan\tan x &= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + o(x^3)\\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{3}[x+o(x)]^3 + o(x^3)\\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

注意，马克劳林展开要求 $x, t = 0$.

拉格朗日/积分中值定理 - T1.8

对 $f(g_1(x)) - f(g_2(x)) = g'(\xi)(g_1(x)-g_2(x))$, 应用二定理需要 $g'(\xi)$

$$\begin{cases}\text{为非零因子}\\ \text{为零因子，结合夹逼准则}\end{cases}$$

$\exists \xi$ 介于 $\sin x, \tan x$, 则 $\xi \to 0$, 因此当 $g'(\xi) =$

- $\cos\xi \to 1$;
- $\sin\xi \sim \xi \sim x$ 由于 ξ 介于 $\sin x, \tan x$

时，都可以应用。

对数求导法 T1.10

对 $f(x) = \prod g(x)$ 时，求

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= \sum \ln g(x)\\ \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \sum \frac{g'(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

通过 $f'(x)/f(x)$ 与 $f(x)$ 的极限求 $f'(x)$ 的极限。

等价 T1.10

$\square \to 1, \square - 1 = \ln(1+\square-1) = \ln(\square)$.

T1.11-13

$x \to 0$ 时，

$$\begin{aligned}&\text{拆项:} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}+1-1) \sim x+\sqrt{x^2+1}-1 \sim x+\frac{x^2}{2} \sim x\\ &\text{泰勒:} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

中值的极限 T1.14

例题 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 二阶可导，$f''(x) \neq 0$,

若 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0), \theta \in (0,1)$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta$.

求解 由上式，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta(x-x_0))\\
\Rightarrow&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x_0+\theta(x-x_0))-f'(x_0)\\
\Rightarrow&\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))-f'(x_0)}{\theta(x-x_0)}\cdot\theta\\
\Rightarrow&f''(x_0)\lim_{x\to x_0}\theta=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}f''(x_0)
\end{aligned}$$

而 $f''(x_0)\neq 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

可以向更高阶拓展，求解方法是类似的；如三阶，$\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\dfrac{1}{3}$.

事实上，对 $n+1$ 阶可导，$f^{(n+1)}(0)\neq 0$ 的情况，$\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

II. 数列极限的计算

$$\text{计算数列极限时，考虑}\begin{cases}\text{单调有界}\\\text{夹逼准则}\\\text{定积分}\end{cases}$$

有递推公式的数列 T1.15-17

$$\text{对 } x_{n+1}=f(x_n)\begin{cases}f(x)\text{递增}\begin{cases}x_1<x_2,x_2=f(x_1)<f(x_2)=x_3,\cdots\{x_n\}\uparrow\\x_1>x_2,x_2=f(x_1)>f(x_2)=x_3,\cdots\{x_n\}\downarrow\end{cases}\quad\text{使用单调有界定理}\\f(x)\text{递减，数列不单调，则使用夹逼准则}\end{cases}$$

例题 证明数列 $2,2+\dfrac{1}{2},2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}\cdots$ 收敛，并求其极限。

证明 i. 假设 $\{x_n\}$ 收敛，取极限得极限值 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

ii. 压缩映射

利用夹逼定理证明极限是 a.

有 $0\leq|x_{n+1}-a|=|f(x_n)-f(a)|$, 通过通分或拉格朗日得到

原式 $=\dfrac{1}{ax_n}|x_n-a|<\dfrac{1}{4}|x_n-a|<\dfrac{1}{4^2}|x_{n-1}-a|\cdots<\dfrac{1}{4^n}|x_1-a|\to 0(n\to\infty)$

此处每次下标减 1 时，提出一个 $\dfrac{1}{4}$. 这里 $\dfrac{1}{4}$ 是压缩因子。

压缩因子 k 是常数，其满足 $0<k<1$.

故由夹逼定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-a|=0$.

例题 设 $f(x)=x+\ln(2-x)$,

I. 求 $f(x)$ 最大值；

II. 若 $x_1=\ln 2, x_{n+1}=f(x_n), n\in N$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

方法 i. 求导，最大值点为 $x=1, f(1)=1$.

ii. 数学归纳法证明 $\forall i\in N, x_i<1$, 故其有上界。

$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n=\ln(2-x_n)>0$, 故其单调递增。

故 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，故收敛。两端取极限求极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

ii. 假设数列收敛，两端取极限求极限值。

$0\le |x_{n+1}-1|=|f(x_n)-f(1)|\xlongequal{\text{拉格朗日}}|f'(\xi)||x_n-1|<\cdots<0$, 故类似地，由夹逼定理证明数列收敛于上述极限值。

例题 见 T1.17.

方法 i. 假设数列收敛，两端取极限求极限值。分类证明 x_1 有不同的值时极限存在。（都用单调有界）或者使用压缩映射法。

ii. $x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n+c-c)}{c+x_n}=c+\dfrac{c-c^2}{c+x_n}$.
假设其收敛，两端取极限求极限值。

n 次根号下 n 项和 - T1.18

将 n 项设为 $\{x_n\}$ 的元素，利用夹逼准则，

构造形如 $\sqrt[n]{x_i}<$ 原式 $<\sqrt[n]{nx_i}$ 的式子，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_i}, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{nx_i}$ 都存在；

其中 x_i 取 x_k 中最大的；利用单调性求最大值。

n 项和: 夹逼准则结合定积分 - T1.19

n 项积: 取对数转化为 n 项和 - T1.20-21

利用夹逼准则，使得 $g(n)\sum f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}<$ 原式 $<\sum f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$,

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=1$.

Stolz 定理 - 数列洛必达

若数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足

- $\{y_n\}$ 单调递减趋于零，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或者 $\{y_n\}$ 单调递增趋于正无穷；（即 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\square}{\infty}$ 型）
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在或为无穷，

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

特别地，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n).$$

达朗贝尔-柯西

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\exp(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n})=\exp[\lim_{n\to\infty}(\ln a_{n+1}-\ln a_n)]\\&=\exp(\lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

n 项积: 定积分 T1.22

任意区间，任意分割，任意取点，化简换元转化为 $[0,1], n$ 等分，任意取点，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

对介于 $\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}$ 的任意 ξ_i 都成立。

第二章

一元函数微分学

I. 导数应用求极值最值

求极值最值时，考虑 $\begin{cases} \text{定义} \\ \text{充分条件 (三个)} \end{cases}$

极值与最值、驻点、拐点的关系

可导极值点一定是驻点，一定不是拐点。

极值必要条件

- $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导，$x = x_0$ 为 $f(x)$ 极值点，则 $f'(x_0) = 0$;
- $f(x)$ 在 $x = x_0$ 二阶可导，$x = x_0$ 为 $f(x)$ 极小值点，则 $f'(x) = 0, f''(x) \geq 0$.

最值必要条件

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导，$f(x_0) = \max_{[a,b]} f(x)$,

- $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$;
- $x_0 = a \Rightarrow f'_+(a) \leq 0$;
- $x_0 = b \Rightarrow f'_-(b) \geq 0$.

$f(x)$ 与 x^k 商的极限

设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^k}$, $k > 1$ 存在，则 $f(0) = f'(0) = 0$.

II. 导数求凹凸性与拐点

求凹凸性与拐点时，考虑充分条件（三个）。

平方积函数极拐点个数 - T2.22

例题 求 $f(x) = x^2(x-1)^2(x-3)^2$ 拐点个数。

方法 令 $g(x) = x(x-1)(x-3)$, 则有 $f(x) = g^2(x), f'(x) = 2g(x)g'(x)$.

由罗尔定理得 $g'(x)$ 两零点 ξ_1, ξ_2, 由其与 $x = 0, x = 1, x = 3$ 得 $f''(x)$ 四个零点，由四个零点得 f''' 三个零点，由前二者多项式次数，知道 $f''(x)$ 四个零点导数值都不为零，因此其均为 $f(x)$ 的拐点横坐标。

事实上，曲线 $f(x)=\prod^{n}(x-x_i)^2$ 极值点个数为 $2n-1$, 拐点个数为 $2n-2$.

III. 导数应用证明不等式

$$\text{证明不等式时，考虑}\begin{cases}\text{单调性}\\ \text{凹凸性}\\ \text{中值定理}\begin{cases}\text{拉格朗日}\\ \text{柯西}\\ \text{泰勒}\end{cases}\end{cases}$$

Hadamard 不等式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $f''(x)>0$, 则

- **凹凸性充分条件**

  $\forall x_1<x_2\in[a,b], f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;

  拉格朗日 $\xi_1\in(x_1,\mathrm{mid}),\xi_2\in(\mathrm{mid},x_2)$; 泰勒 $x=x_1,x=x_2$ 处展开证明。

  也即曲线在切线上方，在割线下方。

- **Hadamard 不等式**

  $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

凹凸性的充要条件

设 $f(x)$ 可导，则

- $f(x)$ 为凹函数；
- $f'(x)$ 单调递增；
- $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), x\neq x_0$;
- $f(x)<f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), x\in(a,b)$;

互为充要条件。

IV. 导数定义求方程的根

$$\text{考虑}\begin{cases}\text{单调性结合零点定理}\\ \text{罗尔定理}\end{cases}$$

补例 设 $f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^i(x)$,

I. 证明方程 $f_n(x)=1$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 内有一实根；

II. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求该极限值。

方法 令 $\sin x = t$ 即可。

V. 罗尔中值定理证明题

$$\text{考虑}\begin{cases}\text{观察法 - } f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0\\ \text{原函数法 - 将题给条件作为微分方程求解}\end{cases}$$

罗尔定理推论

若 $f^{(n)}(x)\neq 0$, 则 $f(x)$ 至多有 n 个零点。

总结

设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 有一阶连续导数，$\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)=0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 至少有两个零点。

$f''(x)-f(x)=f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)$.

VI. 拉格朗日中值定理证明

例题 设 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=l$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

方法 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，由拉格朗日定理，$\forall x,\exists\xi\in(x,x+1)$ 使得 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$,
那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$,
因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

方法 由题设，

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}\xlongequal{\text{洛必达:}\frac{\square}{\infty}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=l.$$

VII. 泰勒中值定理

$$x_0\text{ 可取}\begin{cases}\text{端点}\\ \text{中点}\\ \text{极值/最值点 - 导数为零}\end{cases}$$

积分结合泰勒中值定理

例题 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(x)}{24}(b-a)^3$.

方法 由泰勒公式，存在 η 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$, 使得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2}f''(\eta)$$

那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b \overbrace{(x-\frac{a+b}{2})^2}^{\text{不变号}}f''(\eta)\mathrm{d}x$$

由**广义积分中值定理**，有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

泰勒公式 x 在 x_0 处展开 - T2.44-45

不对特定点，而是对函数定义域上任意一点展开。

$$f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(x_0-x)^2$$

例题 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\le 1,|f''(x)|\le 1$, 则 $|f'(x)|\le 2$.

方法 对任意 $x\in(0,2)$, 有 $\xi_1\in(0,x),\xi_2\in(x,2)$ 使得

$$f(0)=f(x)+(0-x)f'(x)+\frac{(0-x)^2}{2}f''(\xi_1)$$
$$f(2)=f(x)+(2-x)f'(x)+\frac{(2-x)^2}{2}f''(\xi_2)$$

由上式减去下式，有

$$f'(x)=-\frac{1}{2}[f(0)-f(2)]+\frac{1}{4}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(2-x)^2]$$

由 $|f(x)|\le 1,|f''(x)|\le 1$, 有

$$|f'(x)|\le\frac{1}{2}[|f(0)|+|f(2)|]+\frac{1}{4}[|f''(\xi_1)|x^2+|f''(\xi_2)|(2-x)^2]$$
$$\le 1+\frac{1}{4}[x^2+(2-x)^2]\le 1+\frac{1}{4}\cdot 4=2.$$

事实上，若 $f(x)$ 在 $[a,a+2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\le 1,|f''(x)|\le 1$, 则 $|f'(x)|\le 2$.

例题 设 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A,\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

方法 由泰勒公式，存在 $\xi_1\in(x-1,x),\xi_2\in(x,x+1)$ 使得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$
$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

通过加减上下式构造 $f'(x),f''(x)$, 由 $f(x),f'''(x)$ 极限求待求极限。

第三章

一元函数积分学

I. 定积分的计算

计算定积分时，考虑

$$\begin{cases}\text{不定积分}\begin{cases}\text{凑微分}\\ \text{分部}\\ \text{换元}\end{cases}\\ \text{定积分}\begin{cases}\text{奇偶性}\\ \text{周期性}\\ \text{Wallis 公式}\end{cases}\end{cases}\qquad \text{其中，换元包括}\begin{cases}\text{不定积分}\begin{cases}\text{三角代换}\\ \text{根式代换}\\ \text{倒代换}\\ \text{万能代换}\\ \text{整体代换}\end{cases}\\ \text{定积分}\begin{cases}\text{区间再现公式}\\ \text{平移变换}\end{cases}\end{cases}$$

反函数的积分 T3.15

$$\int_a^b g(y)\mathrm{d}y \xlongequal{y=f(x)} \int_\alpha^\beta \overbrace{g(f(x))}^{x} f'(x)\mathrm{d}x$$

事实上，设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调连续，反函数为 $x=f^{-1}(y)=g(y)$, 且 $f(a)=c, f(b)=d$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d g(y)\mathrm{d}y=bd-ac.$$

反函数的二重积分，本质上是变限积分函数的积分。

平移变换结合奇偶性 T3.16

令 $x=\dfrac{a+b}{2}+t$, 使得区间变为对称区间，以便使用奇偶性。

区间再现公式

山穷水尽时，使用区间再现公式。

令 $x=a+b-t$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$$

例题 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$.

方法 可以知道

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln\cos x+\ln\sin x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\ln 2\\(\text{令}t=2x)&=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{4}\ln 2\end{aligned}$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

例题 求 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

方法 可以知道

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan x)}{\sec^2 x}\mathrm{d}\tan x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

此外，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}+\ln\left[\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]-\ln\cos x\mathrm{d}x$$

而后二项在积分完毕后正好相等。

Wallis 公式

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x.$

证明：递推公式 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, 递推至 $n=1$ 或 $n=0$ 即可。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}.$$

证明：由 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$ 推出，右边由夹逼准则得到。

II. 变限积分函数的计算

考虑 $\begin{cases}\text{分部积分法}\\\text{交换积分次序}\end{cases}$

经典错误：变限积分求导结合微分方程 - T3.22

例题 设 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内连续，且有 $f(x)\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1\right]=\dfrac{xe^x}{2(x+1)^2}$, 求 $f(x)$.

方法 此题不能求导，因为求导无法消出有效的微分方程。

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1$, 则有 $2F'(x)F(x)=\big(F(x)^2\big)'=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$, 积分计算 $F^2(x)\Rightarrow F(x)\Rightarrow f(x)$.

对于 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则有 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}[F(x)^2]'$.

例题 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)=A$, 求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

方法 可以知道

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^1 f(x)\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ (\text{令}F(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y)&=-\int_0^1\frac{1}{2}\left[F(x)^2\right]'\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{2}\left[F(x)^2\right]\Big|_0^1=\frac{A^2}{2}.\end{aligned}$$

方法 可以知道

$$\iint\limits_{D_1}=\iint\limits_{D_2}=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=\frac{A^2}{2}.$$

此处利用轮换对称性的推广，即对 $D:(x,y)$ 与 $D':(y,x)$,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

III. 反常积分的计算

迪利克雷积分

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\\ &=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xy}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\arctan y\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}2x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

IV. 定积分的几何应用

$$\begin{cases} 面积\begin{cases}直角坐标\\ 极坐标\\ 参数方程\end{cases} \\ 体积\begin{cases}\text{x 轴}\\ \text{y 轴}\\ 平移\end{cases} \\ 弧长\begin{cases}直角坐标\\ 极坐标\\ 参数方程\end{cases} \\ 侧面积 \end{cases}$$

区域绕直线旋转的体积

区域 D 绕直线 $L: Ax+By+C=0$ 旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = 2\pi \iint\limits_D r(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $r(x,y)$ 为 D 中点到 L 距离 $\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 要求 D 与 L 无公共点。

特别地，若 $L: y-C=0$, 则有

$$V = 2\pi \iint\limits_D (y-c)\mathrm{d}\sigma = |2\pi(\bar{y}-C)S_D|$$

其中 $\bar{y}$ 是 D 的形心，S_D 是其面积。注意，体积是非负的。

V. 定积分物理应用

$$微元法考虑\begin{cases} 功\quad W=Fs \\ 力\begin{cases} 万有引力F=\dfrac{GMm}{r^2} \\ 液体压力F=PS=\overbrace{\rho g h}^{液体压力}S \end{cases} \end{cases}$$

VI. 切比雪夫不等式和柯西不等式

切比雪夫不等式

设 $f(x),g(x),p(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $p(x)$ 不变号，

- 若 $f(x),g(x)$ 单调性相同，则有

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)p(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)p(x)\mathrm{d}x$$

- 若 $f(x),g(x)$ 单调性不同，则有

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)p(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)p(x)\mathrm{d}x$$

柯西不等式

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则有

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

第四章
微分方程

I. 一阶微分方程

$y' = f(ax+by+c) \Rightarrow$ 令 $u = ax+by+c$.

$2yy' = (y^2)'; y'\cos y = (\sin y)'$.

微分方程解的极限 - T4.3

不定积分可以转化为变限积分函数。

$$\int f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + C,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$. 事实上，0 可以改为任何数，甚至 $-\infty$ (若其收敛)。

微分方程解的有界性与周期性 - T4.4

例题 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上有界的连续函数，则

- 微分方程 $y' + y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在一有界解；
- 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则前述解也以 T 为周期。

方法 题设方程的通解为 $e^{-x}\left[\int_{-\infty}^x e^t f(t)\mathrm{d}t + C\right]$, 不妨令 $C=0$, 则有一解 $y = e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)\mathrm{d}t$.

由于 $f(x)$ 有界即 $|f(x)| \le M$, 有

$$\begin{aligned} |y| &= \left|e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\le e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t |f(t)|\mathrm{d}t \\ &\le Me^{-x}\int_{-\infty}^x e^t\mathrm{d}t = M. \end{aligned}$$

因此 y 有界。

此时，若 $f(x)$ 周期为 T, 则有

$$\begin{aligned}
y(x+T) &= e^{-x-T}\int_{-\infty}^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t \\
&= e^{-x-T}\int_{-\infty}^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t \\
&= e^{-x-T}\int_{-\infty}^{u} e^{u+t} f(u+t)\mathrm{d}u (t=u+T) \\
&= e^{-x-T+T}\int_{-\infty}^{u} e^{u} f(u)\mathrm{d}u = y(x).
\end{aligned}$$

II. 二阶线性微分方程

微分方程的逆问题

对给定通解，求多阶导数，直到能将所有任意常数都消去。

对给定多特解，做差求无关解，线性组合得齐次通解。齐次通解得到齐次方程，结合特解得非齐次方程。

也可以直接求非齐次通解再求导。

高阶常系数线性齐次方程 $(n \geq 3)$ **- T4.7**

对方程形如

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

解其特征方程

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

其中，若有

- k 重实根 $r = r_i$, 则通解中包含
  $(C_0 + C_1 x + \cdots C_{k-1}x^{k-1})e^{r_i x}$;
- k 重共轭复根 $r = \alpha \pm \beta i$, 则通解中包含
  $e^{\alpha x}[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x + (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x]$.

T4.8

例题 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$, 则

- $f''(x)f(y) = f''(y)f(x)$;
- 若 $f''(1) = f(1) = 1$, 求 $f(x)$.

方法 对题设关于 x 求偏导，有

$$2f(x)f'(x) = f(x+y)f'(x-y) + f'(x+y)f(x-y)$$

再关于 y 求偏导，有

$$\begin{aligned}&0=f'(x+y)f'(x-y)-f(x+y)f''(x-y)-f'(x-y)f'(x+y)+f(x-y)f''(x+y)\\ \Rightarrow &f(x+y)f''(x-y)=f(x-y)f''(x+y)\end{aligned}$$

令 $u=x+y, v=x-y$ 即证。

对第一问结论，令 $y=1$, 则有 $f''(x)-f(x)=0$, 又有 $f(0)=0, f(1)=1$, 可以解得 $f(x)$.

非齐次项为分段函数 - T4.9

例题 求 $y''+y'-2y=\min\{e^x,1\}$ 的通解。

方法 分段地讨论两个方程的通解，事实上，其为

$$y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{1}{3}xe^x;\quad y_2=C_3e^{-2x}+C_4e^x-\frac{1}{2},$$

其中 $C_i\in\mathbb{R}$.

由于原方程通解在 $x=0$ 处可导，有

$$\begin{cases}C_1+C_2=C_3+C_4-\dfrac{1}{2}\\ -2C_1+C_2+\dfrac{1}{3}=-2C_3+C_4\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}C_3=C_1+\dfrac{1}{18}\\ C_4=C_2+\dfrac{4}{9}\end{cases}$$

代入，得到原方程通解，其中 $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

III. 微分方程综合题

$$\begin{cases}\text{导函数}\\ \text{切法线}\\ \text{变限积分函数}\\ \text{定积分应用}\\ \text{偏导数}\\ \text{二重积分}\end{cases}$$

T4.11

例题 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}, f'(0)=1$, 求 $f(x)$.

方法 令 $x=y=0$, 有 $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-f^2(0)}\Rightarrow f(0)=0$. 而

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)(1-f(x)f(\Delta x))}{\Delta x(1-f(x)f(\Delta x))}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)(1+f^2(x))}{\Delta x}=1+f^2(x)\end{aligned}$$

因此有 $\int \frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)} = \int \mathrm{d}x$, 解得 $\arctan f(x) = x + C$, 而 $f(0)=0$, 故有 $f(x) = \tan x$.

T4.12

例题 设曲线 $y=f(x)$ 位于第一象限且过 $(1,\sqrt{3})$, 其上任意一点 $P(x,y)$ 的切线与 x 轴正半轴交点为 A, 且有 $\angle OPA = \frac{\pi}{4}$, 求 $f(x)$.

方法 由题，设 P 切线倾斜角为 θ, 则有 $\theta = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{y}{x}$. 那么，

$$y' = \tan\theta = \tan(\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{y}{x}) = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

求解上式即可。

变限积分函数结合微分方程 - T4.13

例题 设有连续函数 $f(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 tf^2(t)\mathrm{d}t, f(t) \not\equiv 0$, 求 $f(x)$.

方法 显然 $f(x)$ 无穷阶可导，对原式求导，有 $f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^x$, 其中 $C \in \mathbb{R}$.

若令 $A = \int_0^1 tf^2(t)\mathrm{d}t$, 则有 $f(0) = A$, 故 $C = A$, 即 $f(x) = Ae^x$.

那么将 $x=0$ 代入原式，则有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 tf^2(t)\mathrm{d}t = A = A^2\int_0^1 te^{2t}\mathrm{d}t = \frac{A^2}{4}(e^2+1) \\
\Rightarrow &A\left(\frac{e^2+1}{4}A - 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

而由题，$f(x) \not\equiv 0 \Rightarrow a \neq 0$, 因此 $a = \frac{4}{e^2+1}$, 即 $f(x) = \frac{4}{e^2+1}e^x$.

例题 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，满足

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right], x_1, x_2 \in [a,b]$$

求 $f(x)$.

方法 令 $x_1 = a, x_2 = x \neq a$, 则有

$$\begin{aligned}
&2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = (x-a)[f(x)-f(a)] \\
\Rightarrow &2f(x) = (x-a)f'(x) + f(x) - f(a) \\
\Rightarrow &f(x) = C(x-a) + f(a), C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

例题 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续，满足

$$\int_0^\pi \min\{x,y\}f(y)\mathrm{d}y = 4f(x)$$

求 $f(x)$.

方法 由题，可以知道

$$\begin{aligned}&\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+x\int_x^\pi f(y)\mathrm{d}y=4f(x)\\ \Rightarrow &xf(x)-xf(x)+\int_x^\pi f(y)\mathrm{d}y=4f'(x)\\ \Rightarrow &f''(x)+\frac{1}{4}f(x)=0\\ \Rightarrow &f(x)=C_1\cos\frac{1}{2}x+C_2\sin\frac{1}{2}x,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

而 $f(0)=0$, 则有 $C_1=0$, 即 $f(x)=C\sin\frac{1}{2}x$, 其中 $C\in\mathbb{R}$.

例题 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$.

方法 由题，可以知道

$$\begin{aligned}&x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x}(t-x)f(t)\mathrm{d}t\\ \Rightarrow &f(x)=1+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\\ \Rightarrow &f'(x)=-f(-x)\Rightarrow f'(-x)=-f(x)\\ \Rightarrow &f''(x)=f'(-x)\\ \Rightarrow &f''(x)+f(x)=0\\ \Rightarrow &f(x)=A\sin x+B\cos x.\end{aligned}$$

可以知道 $f(0)=1, f'(0)=-1$, 故有 $f(x)=\cos x-\sin x$.

T4.14

当待解微分方程中出现形如 $x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的式子时，不要直接求导，而应当设 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 后再计算。

T4.15

例题 设 $f(x,y)=F(\frac{y}{x})$ 有 $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=0$, 求 $f(x,y)$.

方法 设 $\frac{y}{x}=u$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=-F'(u)\frac{y}{x^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}&=\frac{2y}{x^3}F'(u)+\frac{y^2}{x^4}F''(u)\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{1}{x}F'(u)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}&=\frac{1}{x^2}F''(u)\end{aligned}$$

那么，可以知道

$$
\begin{aligned}
&\frac{2y}{x^3}F'(u)+\frac{y^2}{x^4}F''(u)+\frac{1}{x^2}F''(u)=0\\
\Rightarrow&(1+u^2)F''(u)+2uF'(u)=0\\
\Rightarrow&\left[(1+u^2)F'(u)\right]'=0\\
\Rightarrow&F'(u)=\frac{C_1}{1+u^2}\\
\Rightarrow&F(u)=C_1\arctan(u)+C_2,
\end{aligned}
$$

即 $f(x,y)=C_1\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+C_2$, 其中 $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.