赛博题本

奇峰

之前

目录

第一部分
错题

I. 练习

问题 1 ♢

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{4n^2+n}\pi=()$

(A) 0

(B) 1

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 不存在

问题 2 660T9 ♢

$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\dfrac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t}{x^2}=$______.

问题 3 660T11 ♢

设 $a>0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x)^{x^a}=$______.

问题 4 660T17 ♢

设 a,b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$，则 a=______,b=______.

问题 5 660T21 ♢

已知 $x\to0$ 时 $F(x)=\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t$ 是 x^n 的同阶无穷小，则 $n=$______.

问题 6 660T27 ♢

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq0\\ -1, & x=0\end{cases}$，其中 b 为常数，$f(x)$ 在定义域上处处可导，则 $f'(x)=$______.

问题 7 660T28 ♢

设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$，若 $f(x)$ 可导，则 a 满足_____, 若 $f'(x)$ 连续，则 a 满足_____.

问题 8 660T29 ♢

设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且为偶函数，$f'(-2)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(5-2\sin h)-f(5)}=$_____.

问题 9 660T30 ♢

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0)=1, f'(0)=3$，则数列极限

$I=\lim\limits_{n\to\infty}(f(\dfrac{1}{n}))^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}=$_____.

问题 10 660T33 ♢

$f(x)=x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$，则 $f''(0)=$_____.

问题 11 660T34 ♢

设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$_____, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$_____, $y=y(x)$ 在任意点处的曲率 K 为_____.

问题 12 660T38 ♢

设函数 $y=f(x)$ 为由方程 $\int_b^y(2+\sin^2 t)\mathrm{d}t=1$ 确认的隐函数，则 $\mathrm{d}y=$_____.

问题 13 660T40 ♢

设 $f(x)=\ln\dfrac{1-2x}{1+3x}$，则 $f^{(3)}(0)=$_____.

问题 14 660T48 ♢

曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\dfrac{1}{x})$ 的全部渐近线为_____.

问题 15 660T49 ♢

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-1}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程为_____.

问题 16 660T51 ♢

设 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\arctan x+C$，则 $f(x)=$_____.

问题 17 660T52 ♢

$I=\int\sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}}\mathrm{d}x=$______.

问题 18 660T59 ♢

$I=\int_0^1\arcsin x\cdot\arccos x\mathrm{d}x=$______.

问题 19 660T60 ♢

$\int_0^1\left[\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{(1-x^2)^3}\right]\mathrm{d}x=$______.

问题 20 660T64 ♢

设 $f(x)=\max\{1,x^2\}$，则 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=$______.

问题 21 660T68 ♢

$I=\int_1^{+\infty}\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\mathrm{d}x$，则 $a=$______$,b=$______.

问题 22 660T70 ♢

摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t),t\in[0,2\pi]$ 与 x 轴围成的图形绕 $y=2a$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V=$______.

II. 考试

问题 23 C1T5 ♢

设 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})=()$

(A) 不存在且非无穷大

(B) 0

(C) $\ln a$

(D) ∞

问题 24 C1T11 ♢

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a+b=$______.

问题 25 C1T12 ♢

设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\dfrac{x}{\sin t-\sin x}}$ ，则 $f(x)$ 的可去间断点为 $x=$_____.

问题 26 C1T15 ♢

若 $a>0,b>0$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}=$_____.

问题 27 C1T16 ♢

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\dfrac{1}{\cos x-\sin x}}=$_____.

问题 28 C1T20 ♢

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

- ■ 求 $f(x)$ 最小值；
- □ 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ ，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限。

问题 29 C1T22 ♢

设函数 $f(x)$ 满足 $a\le f(x)\le b,\ \forall x,y\in[a,b],|f(x)-f(y)|<|x-y|$.

设 $x_1\in[a,b]$ ，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$ ，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为且满足 $c=f(c)$.

问题 30 C2T1 ♢

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则 ()

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

问题 31 C2T8 ♢

已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n},n=1,2,\dots\end{cases}$$

则 ()

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续但不可导

(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 可导

问题 32 C2T11 $\diamondsuit$

已知 $y=y(x)$ 满足 $y^3+x^3-3xy=0$ ，且存在斜渐近线，则该斜渐近线为_____.

问题 33 C2T17 $\diamondsuit$

设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ ，求高阶导数值 $f^{(2020)}(0)$ 与 $f^{(2021)}(0)$ 。

问题 34 C2T20 $\diamondsuit$

设 a 为常数，讨论方程 $x^2=ae^x$ 的实根个数及其所在范围。

问题 35 C2T21 $\diamondsuit$

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$c\in(0,1)$, $f(0)\neq F(1)$ ，则存在 $\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$ 使得

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi)$$

问题 36 C2T22 $\diamondsuit$

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$ ，则

- ■ 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$
- □ 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

问题 37 C3T2 $\diamondsuit$

下列命题中，正确的命题有_____ 个。

- 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的某原函数为常数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒为零；
- 若 $f(x)$ 的某个原函数为零，则其所有的原函数都为常数；
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内不是连续函数，则 $f(x)$ 在这个区间内必定没有原函数；
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数，则 $F(x)$ 在 (a,b) 内必为连续函数。

问题 38 C3T13 ◇

设 $F(x)=\sin\left[\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^3 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]$，则 $F'(x)=$ ______.

问题 39 C3T21 ◇

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调递增，$0\le g(x)\le 1$ ，则

- ■ $0\le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le x-a, x\in[a,b]$;
- □ $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

第二部分
答案及注意事项

I. 练习

答案 **1**　求 n 时，求出一个定值　■

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{4n^2+n}\pi &= \lim_{n\to\infty}\sin(2n+\sqrt{4n^2+n}-2n)\pi \\
&= \lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{4n^2+n}-2n)\pi \\
&= \lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\pi \\
&= \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

答案 **2**　通过换元法将 x 剔除出积分式　■

令 $s=xt$ ，则有

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin s}{s}\mathrm{d}s}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x-\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2-3\sin x^3}{2x^2}=1
\end{aligned}$$

答案 **3**　不要先想象分类讨论的结果再补画靶子　■

令原极限 $=I$ ，$t=\dfrac{1}{x}$ ，则有

$$\begin{aligned}
I&=\exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{t+1}{t^2}}{t^a}\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)-2\ln t}{t^a}\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{2}{t}}{at^{a-1}}\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{-t-2}{a(t+1)t^{a+1}}\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{a(a+1)t^{a+1}+a^2t^a}\right\}=1
\end{aligned}$$

答案 4　对根式，令 $t=-\dfrac{1}{x^6},x\to\infty$，然后泰勒展开　■

由于

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1-x^6}&=-x^2\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^6}}\\
&\xlongequal{t=-\frac{1}{x^6}}-x^2\left(1+\frac{1}{3}t+o(t)\right)=-x^2\left(1-\frac{1}{3x^6}+o(x^{-6})\right)
\end{aligned}$$

代回原极限，发现当且仅当 $a=-1,b=0$ 时原极限成立。

答案 5　利用一次洛必达法则后不要忘记分母的次数为 $n-1$　■

由题，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^n}&=\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^n}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{ln(1+x-\sin x)(1-\cos x)}{nx^{n-1}}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3\cdot\frac{1}{2}x^2}{nx^{n-1}}=a
\end{aligned}$$

其中 a 是常数，故 $n-1=5$ ，即 $n=6$ 。

答案 6　注意题目要求的是单点还是函数　■

由 $f(x)$ 在定义域的可导性，有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，因此有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$ ，故 $b=-1$ 。当 $x\neq0$ 时，可以直接得出 $f'(x)=\dfrac{x-(x-1)\ln(1-x)}{(x-1)x^2}$ ；$x=0$ 时，由定义，

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{ln(1-x)}{x}+1}{x}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

故可以知道，

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-(x-1)\ln(1-x)}{(x-1)x^2}, & x<1,x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

答案 7　在写作业的时候不要听狗叫 ■

$f(x)$ 在 $R\backslash\{0\}$ 上的可导性显然。而

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^{a-1}\sin\frac{1}{x}\end{aligned}$$

而 $f'(x)_-=0$ ，当 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导时，显然 $a>1$ 。

$f'(x)$ 在 $R\backslash\{0\}$ 上的连续性显然，而 $f'(0)=0$ ，当 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续时，有

$$\lim_{x\to 0}f'(x)-f'(0)=\lim_{x\to 0}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}+ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}=0$$

故此时显然 $a>2$.

答案 8　注意不要漏掉分式上下同乘除的式子 ■

由 $f'(-2)=-1$ 以及 $f(x)$ 的偶性质，有 $f'(5)=f'(-1)=-f'(1)=-f'(-2)=1$ ，故有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(5-2\sin h)-f(5)}&=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin h}{f(5-2\sin h)-f(5)}\cdot\frac{1}{-2}\\&=\frac{1}{-2f'(5)}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

答案 9　对原式取对数运算后，要将 e 放回答案中 ■

利用海因定理，令 $t=\dfrac{1}{n}$ ，有

$$\begin{aligned}I&=\exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\cos t}\ln f(t)\right)\\&=\exp\lim_{t\to 0}\frac{2\ln f(t)}{t}\\&=\exp\lim_{t\to 0}\frac{2f'(t)}{f(t)}=e^6\end{aligned}$$

答案 10　计算时要检查是否将乘法和加法混淆 ■

将 $f(x)$ 展开，其最后一项必定为 $1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot x^2=36x^2$，而其他项的次数显然大于 2，故 $f''(0)=72$。

答案 11　不要将分子和分母搞混 ■

显然

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{t^2+1}}{\frac{t}{t^2+1}}=\frac{1}{t}$$

又，显然

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{t^2+1}}=-\frac{t^2+1}{t^3}$$

因此有

$$\begin{aligned}K&=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{t^2+1}{|t|^3}}{(1+\frac{1}{t^2})^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

答案 12　注意区分 $\sin^2 t$ 和 $\sin t^2$ 的区别 ■

对方程两侧关于 x 取导数，有

$$2x+(2+\sin y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{-2x}{2+\sin y^2}\mathrm{d}x$$

答案 13　注意记住 $\ln(1+t)$ 和 $\ln(1-t)$ 的泰勒展开式 ■

由于

$$\begin{aligned}f(x)\ln\frac{1-2x}{1+3x}&=\ln(1-2x)-\ln(1+3x)\\&=-(\frac{2x}{1}+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}+o(x^3))-(\frac{3x}{1}-\frac{9x^2}{2}+\frac{27x^3}{3}+o(x^3))\end{aligned}$$

可以知道 $f^{(3)}(0)=-\frac{35\cdot 3\cdot 2}{3}=-70$.

答案 14　注意必须严格验证每一条渐近线的存在性；必须考虑正无穷和负无穷处和每一个间断点 ■

由 y 的方程，$x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\bigcup(0,+\infty)$ 而 $x\to-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，因此 $x=-\frac{1}{2}$ 是 y 的一条垂直渐近线。而 $\lim\limits_{x\to 0}y=0$ ，故其不是 y 的渐近线。显然，$\lim\limits_{x\to+\infty}y$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}y$ 均不存在。而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{t\to 0}\sqrt{4+t}\ln(2+t)=2\ln 2$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})-2\ln 2x\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t}=1+\frac{\ln 2}{4}$$

故有 y 的一条斜渐近线 $y=2\ln 2x+1+\frac{\ln x}{4}$. 同理，在 $-\infty$ 方向，有 y 的一条斜渐近线 $y=-(2\ln 2x+1+\frac{\ln x}{4})$. 因此存在三条渐近线：

- $x=-\frac{1}{2}$;
- $y=2\ln 2x+1+\frac{\ln x}{4}$;

- $y=-(2\ln 2x+1+\dfrac{\ln x}{4})$.

答案 15　真的，我不知道应该写些什么 ■

显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ ，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x-1}=2\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$ 则切线斜率为 2 ，即法线斜率为 $-\dfrac{1}{2}$ 。

又，$f(0)=0$ ，有法线方程 $y=-\dfrac{1}{2}x$.

答案 16　注意积分时不要遗漏常数项 C ■

对原等式两头求导，有

$$\begin{aligned}xf'(x)=\frac{1}{1+x^2}&\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}\\&\Rightarrow f(x)+C=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x^2\\&\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C\end{aligned}$$

答案 17　注意将答案化简为人话 ■

显然

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3+2x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{3}{2}\sin t}\frac{3}{2}\int\frac{3\cos t}{3+3\sin t}\cos t\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{2}\int 1-\sin t\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{2}(t+\cos t)+C\\&=\frac{3}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\cos(\arcsin\frac{2}{3}x)+C\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{3}{2}\cos(\arcsin\dfrac{2}{3}x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4x^2}$ ，故原积分为 $\dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4x^2}+C$ 其中 C 为任意常数。

答案 18　注意不要漏掉提出去的系数 ■

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\arcsin x(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}\sin t\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}\sin t-\int_a^{\frac{\pi}{2}}t^2\mathrm{d}\sin t=-\frac{\pi}{2}+2\end{aligned}$$

答案 19　注意计算准确性 ■

有 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$ ，由几何意义后式中前者显然为 $\frac{\pi}{4}$ ，而

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{16}$$

因此原积分为 $\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$.

答案 20　注意定积分的定义和上下限交换的意义（呃呃呃……） ■

分类讨论，有

- $x < -1$ 时，原积分显然为 $\int_{-1}^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$;
- $x \in [-1, 1]$ 时，原积分显然为 $1-x$;
- $x > 1$ 时，原积分显然为 $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$.

因此，有

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}, & x < -1 \\ 1-x, & -1 \le x \le 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

答案 21　注意计算准确性 ■

显然 $I = \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x$，而 I 存在，因此必有 $b-a=0$，即 $a=b$.

那么有

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a}\mathrm{d}x \\ &= \ln \frac{x}{2x+a}\bigg|_0^{+\infty} = \ln(2+a) - \ln 2 = 1 \end{aligned}$$

因此有 $a = b = 2e-2$.

答案 22　注意所列式所求体积与待求体积的关系 ■

设将摆线段向下平移 $2a$ 格后与 x 轴围成图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积为 V_1 ; $y=2a, x=2\pi, x=0, y=0$ 围成的长方形绕 x 轴转一周得到的体积为 V_0，则显然有 $V = V_0 - V_1$.

显然 $V_0=8\pi^2a^3$. 而

$$\begin{aligned}V_1&=\pi\int_0^{2\pi}(2a-y)^2\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{2\pi}a^2(2-1+\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=a^3\pi\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=a^3\pi\left[\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}\sin t\right]\\&=a^3\pi^2\end{aligned}$$

因此原体积 $V=V_0-V_1=7\pi^2a^3$.

II. 考试

答案 23　化简，然后应用 $e^x-1\sim x(x\to 0)$ ■

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})&=\lim_{n\to+\infty}n^2a^{\frac{1}{(n+1)}}(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)\\&=\lim_{n\to+\infty}n^2a^{\frac{1}{(n+1)}}(e^{\frac{\ln a}{n(n+1)}}-1)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2a^{\frac{1}{(n+1)}}\ln a}{n^2+n}=\ln a\end{aligned}$$

答案 24　将上面平方开，通过等价求 a,b ■

由题，

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(1-2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}$$

故有 $1-a^2=0$, $1-2ab=0$ 可以解得 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ ，故 $a+b=\frac{3}{2}$ 。

答案 25　考试前至晚 1 个小时喝咖啡 ■

由于

$$\begin{aligned}f(x)&=\exp\left(\lim_{t\to x}\frac{x\ln(\frac{\sin t}{\sin x})}{\sin t-\sin x}\right)\\&=\exp\left(\lim_{t\to x}\frac{x(\frac{\sin t}{\sin x}-1)}{\sin t-\sin x}\right)\\&=\exp(\frac{x}{\sin x})\end{aligned}$$

可以知道 $f(x)$ 的间断点有 $x=2n\pi,n\in Z$ ，且其中只有 0 是可去的，因为其他点处 $f(x)$ 左右极限均不存在。

答案 26　不要认为令 $a=b=1$ 的结果一定能代表答案 ■

设原极限为 I ，则对函数 $f(n), n \in (-\infty, +\infty)$ ，有

$$
\begin{aligned}
I &= \exp\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})-\ln 2}{1/n}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\sqrt[n]{a}\ln a+\sqrt[n]{b}\ln b}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}\right) \\
&= \exp(\ln(ab)^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

答案 27　对原式取对数运算后，要将 e 放回答案中　■

设原极限为 I ，则有

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\exp\left(\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}\right) \\
&= \exp(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}) = e^{-\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

答案 28　利用前问结论推导后问结论　■

由 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x+\dfrac{1}{x_n}>0$，有 $x_n>0$ 。故有

$$
\begin{aligned}
&\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\le f(x_n)=\ln x_n+\frac{1}{x_n} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_n<x_{n+1}
\end{aligned}
$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增。而

$$
\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\Rightarrow \ln x_n<1\Rightarrow x_n<e
$$

故由单调有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，有 $\ln a+\dfrac{1}{a}\le 1$ ；同时 $\ln a+\dfrac{1}{a}=f(a)\ge 1$ ，故由夹逼定理，有 $\ln a+\dfrac{1}{a}=f(a)=1$ ，此时解得 $a=1$ ，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

答案 29　构建合适的辅助函数，并对其使用零点定理　■

由 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ ，有 $f(x)\in[a,b]$ 。

令 $F(x)=x-f(x)$ ，显然 $F(x)\in C[a,b]$ 。又由 $F(a)\cdot F(b)=[a-f(a)][b-f(b)]\le 0$ ，运用零点定理知，至少存在一点 $c\in[a,b]$ ，使得 $F(c)=0$ ，即 $f(c)=c$.

假设 $\exists d\in[a,b], c\ne d$ 使得 $d=f(d)$ ，则有

$$
|c-d|=|f(c)-f(d)|\le|c-d|
$$

这显然是矛盾的，故 c 唯一。

因为 $a \le f(x) \le b$ ，$x_1 \in [a,b], x_{n+1} = \dfrac{1}{2}[f(x_n)+x_n]$ ，可以由数学归纳法证明 $\forall x_n, a \le x_n \le b$ ，此时 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 必然存在，假设其为 a 。对 $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$ 两边取极限，有 $f(a) = a$ ，由 c 的唯一性，$a = c$ 。

答案 30　拐点第二充分条件在 $f''(x) = 0$ 时无法使用 ■

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，可以知道 $f''(x) = 0$ ，此时不能运用拐点的第二充分条件。而由极限的保序性，当 x 趋近于 0 的时候，$f''(x) > 0$ ，而 $f'(x) =$ ，故 $f(0)$ 显然为极小值。

答案 31　不应当着急下结论 ■

显然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ，而由 $\dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n}$ ，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ，故 $f(x)$ 在 R 上连续。

而

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{xn} \end{aligned}$$

同时 $1 \le \dfrac{1}{xn} \le \dfrac{n+1}{n}$ ，因此由夹逼定理，$f'_+(0) = 1$ ，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导。

答案 32　利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} y + x$ ■

由于存在斜渐近线，可以知道 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}$ 一定存在。而由题给方程，可以知道

$$1 + (\frac{y}{x})^3 - \frac{3y}{x^2} = 0 (x \ne 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} 1 + (\frac{y}{x})^3 - \frac{3y}{x^2} = 0$$

此时，显然有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = -1$ 。

又，

$$\begin{aligned} y^3 + x^3 - 3xy = 0 &\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{3xy} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(x+y) = \lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2} \end{aligned}$$

故解得 $\lim\limits_{x\to\infty} x + y = -1$ ，因此可以知道，斜渐近线的方程为 $y = -x - 1$ 。

答案 33 ■

答案 34 ■

答案 35 ■

答案 36 ■

答案 37 注意存在间断点时不定积分的存在性 ■

对于每一项，

- $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=C$ ，其中 C 是常数，那么 $F'(x)\equiv 0$ ；
- $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=0$ ，那么其全部原函数为 $F(x)=0+C=C$ ；
- 若 $f(x)$ 在区间内有震荡间断点，则其有可能有原函数；
- 由于 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，可以知道 $F(x)$ 可导，而可导必连续。

因此，正确的有 3 项。

答案 38 注意不要将变限积分函数求导公式错误应用 ■

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos\left[\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^3 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]\cdot\left[\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^3 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]' \\ &= \cos\left[\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^3 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]\cdot\sin\left(\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

注意，对变限积分函数求导时，不对里面的函数求导，只对积分上下限关于 x 求导。

答案 39 构造辅助函数，通过辅助函数的单调性证明结论 ■

令

$$F(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$$

由于 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，有 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且

$$F'(x)=\left[f(a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u)-f(x)\right]g(x)$$

又由 $a+\displaystyle\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\le x$ ，而 $f(x)$ 单调递增，$g(x)\le 0$ ，有 $F'(x)\le 0$ ，即 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调不增。又由 $F(a)=0$ ，可以知道 $F(b)\le 0$ ，即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$