线代冲刺笔记

奇峰

之前

目录

特征值与特征向量

一. 求特征值和特征向量

i.抽象矩阵

对 $r(A)=1 \Leftrightarrow A=\alpha\beta^\top$ 的矩阵，有

i. $A^n=\mathrm{tr}(A)^{n-1}\alpha\beta^\top$;

ii. $\lambda_1=\mathrm{tr}(A),\alpha_1=\alpha;\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n=0,\alpha_i$ 是 $\beta^\top X=0$ 的解，共 $n-1$ 个。

iii. A 可相似对角化，当且仅当 $\mathrm{tr}(A)\neq 0$;

iv. $A=\sum\lambda_i\gamma_i\gamma_i^\top=\mathrm{tr}(A)\gamma_1\gamma_1^\top$, 其中 γ_i 是经过正交化的特征向量。

实对称矩阵特征向量相互之间是正交的。对三阶实对称矩阵，

- **知二求一**

  求向量积 $\alpha_1\times\alpha_2$, 即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ i & j & k \end{vmatrix}$

- **知一求二**

  取合适的 a,b,c 使得 $\alpha_2=(a,b,0)^\top,\alpha_3=(-b,a,c)$ 与已知的 α_1 两两正交。

ii.具体矩阵

以 $|A-\lambda E|=0$ 求特征值，$|A-\lambda_0 E|X=0$ 求对应特征向量。

例题 设 $\alpha_1=(1,1,0)^\top,\alpha_2=(1,0,1)^\top$ 为三阶矩阵 A 对应 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 的特征向量，$\beta=(-1,1,-2)^\top$, 求 $A^2\beta$.

方法 用已知的特征向量线性**表示**给定的 β. 具体而言，

$$\beta=\alpha_1-2\alpha_2 \Leftrightarrow A^2\beta=A^2\alpha_1-2A^2\alpha^2=\alpha_1-8\alpha_2.$$

二. 相似

例题 设 3 阶矩阵 A 有三个不同的特征值 λ_i, 对应的特征向量是 α_i, $\beta=\sum\alpha_i$.

(a) 证明 β 不是 A 的特征向量。

(b) 证明 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。

(c) 若 $A^3\beta = 2A\beta + A^2\beta$, 求 A 的特征值，求 $|A+2E|$.

方法 (a) 反证即可。

(b) 由于 $(\beta, A\beta, A^2\beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 3 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$, 而后二者都满秩，故前者满秩，故三向量无关。

(c) 通过构造 P 并通过化简得到等式 $AP = PB$ 以找到具体的相似矩阵。

具体而言，令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$, 则

$$\begin{aligned} AP &= (A\beta, A^2\beta, (2A + A^2)\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

那么有 $P^{-1}AP = B$, 那么，$\lambda_A = \lambda_B, |A+2E| = |B+2E|$.

AB^{-1} 的快速求法

$$\left(\begin{array}{c} P_2 \\ \hline P_1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{列变换}} \left(\begin{array}{c} E \\ \hline P_1P_2^{-1} \end{array}\right)$$

类似地，

$$\left(\begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{c|c} E & P_1^{-1}P_2 \end{array}\right)$$

相似对角化结合传递性及其快速求法

若有 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = P_2^{-1}AP_2$, 则有 $B = (P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})$.

事实上，若有三阶 A, B, 存在 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $AP = PB$, 那么

$$AP = PB \Leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$$

由此可以得到三个方程组，分别求出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 即可得到 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

例题 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 求 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

方法 设 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 那么有

$$\begin{aligned} AP = PB &\Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B \\ &\Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, -\alpha_2 - 6\alpha_3, 2\alpha_3) \end{aligned}$$

那么有

$$
\begin{aligned}
&(A-E)\alpha_1=0\\
&(A-2E)\alpha_3=0\\
&(A+E)\alpha_2=-6\alpha_3
\end{aligned}
$$

分别求解，解得

$$\alpha_1=(0,1,1)^\top,\alpha_3=(1,0,0)^\top,\alpha_2=k(0,-1,1)^\top+(-2,0,0)^\top,k\in\mathbb{R}.$$

由于 $k=0$ 时，P 不满秩，令 $k=1$, 得到 $P=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ 满足题设。

例题 设 A 为三阶矩阵，三维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$, 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

方法 由于

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

设 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}=B$, 那么 A,B 相似。

由于 $B=\begin{pmatrix}0&0&\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}+E=(0,1,1)^\top(1,1,2)+E$, 前者特征值为 $3,0,0$, 有 B 的特征值为 $4,1,1$.

相乘为零的矩阵的性质

若 $AB=O$, 有

- $r(A)+r(B)\le n$;
- B 的列向量是 $AX=0$ 的解；
- B 的非零列向量是 A 的特征值为 0 对应的特征向量；
- A 的行向量与 B 的列向量正交。

矩阵的二次方程有两个互异的根

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^2-(\lambda_1+\lambda_2)A+\lambda_1\lambda_2E=(A-\lambda_1E)(\lambda_2-A)=0$$

则

- $r(A-\lambda_1E)+r(\lambda_2E-A)=n$;
- A 可以相似对角化。