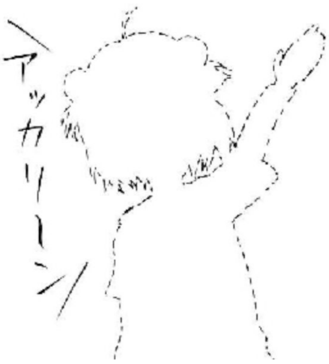

线性代数提高笔记

奇峰

之前

目录

概述

题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\begin{cases} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵 } (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \text{秩（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数} \begin{cases} \text{可逆变换} \\ p+q=r \end{cases} \end{cases}$$

大题部分主要涵盖

$$\begin{cases} \text{方程组} \begin{cases} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{cases} \\ \text{相似形（二次型）} \end{cases}$$

一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\begin{cases} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i)\text{是否相关?} \\ AX = 0\text{的基解?} \\ A \sim B \\ p+q=r \end{cases}$$

一种方法

初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\begin{cases} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{cases}$$

第一章

行列式

定义与性质

$$\begin{cases} 三大定义 \begin{cases} 几何定义; \\ 逆序定义; \\ 展开定义; \end{cases} \\ 计算 \begin{cases} 数值形; \\ 含参形; \\ 抽象形; \end{cases} \\ 证明|A| = 0 \begin{cases} |A| = -|A|; \\ r(A) < n; \\ 不可逆（常用于反证）; \\ AX = 0有非零解; \\ \exists \lambda_0 = 0; \end{cases} \end{cases}$$

I. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
  - 三角形
  - 范德蒙德行列式
  - 分块
- 特殊形状的行列式

II. 代数余子式

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

注意，

- 其为 $(n-1)$ 阶子式;
- 其线性组合 $\sum_i a_i A_k i$ 相当于将行列式第 k 行元素替换为 (a_i);
- $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}$
- 伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^\top \triangleq \mathbf{|A|\cdot A^{-1}}$

对数值型矩阵 A, 求 A^* 时，可先求 $|A|$ 并利用 $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\vdots A^{-1})$ 求 A^{-1}, 再利用公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 求伴随矩阵。

III. 抽象矩阵行列式

性质

i. 对已知 $A=(\alpha_i)$ 的矩阵，可以 $\begin{cases} \text{行列式列消} \\ \text{可逆时，} \begin{cases} \text{矩阵乘法} \\ \text{相似} \end{cases} \end{cases}$

ii. $|kA|=k^n|A|$, 其中 k 可以是行列式;

$|A^\top|=A, |AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$;

iii. 设 A 可逆，则 A^* 可逆，且有

$|A^*|=|A|^{n-1}; (A^*)^*=|A|^{n-2}A$;

$|(A^*)^*|=A^{(n-1)^2}$;

iv. $|A|=\prod\lambda_i; tr(A)=\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$;

v. $P^{-1}AP=B\Rightarrow|A|=|B|$;

vi. $aA+bE$ 不可逆 $\Leftrightarrow |aA+bE|=0\Rightarrow\exists\lambda_0=\dfrac{-b}{a}$;

vii. $AA^\top=A^\top A=E\Rightarrow|A|=\pm1$;

viii. 对可逆矩阵 $A, |A+\alpha\beta^T|=|A|(1+\beta^TA^{-1}\alpha)$;

对 $B=\alpha\beta^T, |\lambda E+\alpha\beta^T=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$;

ix. 对 A_n, 若 $A^2=A, A\neq E$, 则有 $|A|=0$.

- 反证

  假设 A 可逆，则 $A^2A^{-1}=AA^{-1}=E\Rightarrow A=E$, 与题设矛盾，故 A 不可逆，因此 $|A|=0$.

- 秩

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O\Rightarrow r(A)+r(A-E)\leq n$;

  $A\neq E\Rightarrow r(A-E)>0\Rightarrow r(A)<n\Rightarrow|A|=0$.

- 方程组

  $A^2=A \Rightarrow A(A-E)=O; A\neq E \Rightarrow AX=O$ 存在非零解，因此 $r(A)<n$, 即 $|A|=0$.

- 特征值

  $A(A-E)=O=O(A-E), A\neq E$, 因此 A 存在一特征值 $\lambda_0=0$, 此时 $|A|=\prod\lambda=0$.

其中，对于第八条，

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+\alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (ii)$$

显然 $(i),(ii)$ 的两边也相等。此时对二者右边取得行列式，得到

$$|A+\alpha\beta^T|=|A|(1+\beta^T A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子 $D=\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为 $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为 A, 后者为 $\alpha\beta^\top$.

ii. $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E-(-\alpha\beta^\top)|$, 此时视 $A=\lambda E$,

套用前述方法有 $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E|(1+\beta^T(\lambda E)^{-1}\alpha)=\lambda^n(1+\frac{\beta^\top\alpha}{\lambda})=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$.

注意，若有 $AB=O, B=(\beta_i)$, 则考虑

- $r(A)+r(B)\leq n$;
- B 的列向量为 $AX=O$ 的一组解;
- $A\beta_i=O=O\beta_i$, 此时 B 的列向量为 $\lambda_A=0$ 的特征向量。

计算抽象行列式

计算抽象的行列式时，若其有法则，如 $A^{-1}, A^\top, A^*$, 则利用其法则，若其无法则，则利用 $E=AA^{-1}$ 或 $E=AA^\top$.

对求 $|A+B|$ 的情况，由于无法则，考虑添加 E, 此时“一前一后，前者前，后者后。”对于

$$|A+B|=|E_1A+BE_2|,\quad E_1,E_2\text{都是单位矩阵}$$

有

- E_1 在 A 前，E_2 在 B 后，此谓一前一后；
- E_1 拆时，考虑同在前面的 B, 即 $B^{-1}B$ 或 BB^{-1}, 此谓前者前；
- E_2 拆时，考虑同在后面的 A, 即 $A^{-1}A$ 或 AA^{-1}, 此谓后者后；

由行列式值求参数

需要加减・消元・出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数 $\lambda-2$.

IV. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数（行列式和最高次方）
- 根与系数的关系

  对 $f(x)=D=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ 及其根 x_i 有 $\begin{cases} \sum x_i = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$

矩阵加边

对行列式 D_n, 显然

$$|D| = \left|\begin{array}{c:ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hdashline 0 & \square & \square & \square \\ \vdots & \square & D & \square \\ 0 & \square & \square & \square \end{array}\right|$$

其中，为 $*$ 的部分可以为任意值，因此可以按题面设置易于计算的值。另外，加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式，使得其虽然不等于原式，但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$

可以将其变为

$$f(x)=\begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{增补行} \\ \\ \end{matrix}$$

并按照第一列展开，此时 x^3 的系数 A_3 正好为 $-|D|$, 而 x^4 的系数 A_4 为范德蒙德行列式，值为 $\prod(x_i-x_j)$, 由前述结论，$\sum a_i=-\dfrac{A_3}{A_4}$, 整理即得到结论。

第二章

矩阵

$$
\begin{cases}
\text{定义与运算}\begin{cases} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^*, A^T \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \not\Leftrightarrow A = 0\text{或}B = 0; A^2 = 0\text{同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{当且仅当}A\text{可逆时成立} \end{cases} \\
\text{特殊矩阵 - } E, \Lambda, A^\top = A, AA^\top = E \\
\text{伴随矩阵}A^* \\
\text{可逆矩阵}\begin{cases} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明}A\text{可逆} \end{cases} \\
\text{初等矩阵（逆，变换）} \\
\text{秩(性质)} \\
\text{应用}\begin{cases} \text{矩阵方程} \\ \text{求}A^n \end{cases}
\end{cases}
$$

V. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$
\begin{cases}
\text{求}A^*\begin{cases} \text{定义法 - } A^* = (A_{ij})^\top \\ \text{公式法 - } A^* = |A|A^{-1} \end{cases} \\
\text{性质}\begin{cases} AA^* = A^*A = |A|E(\text{可推广为}\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2} \\ A^{-1,\top,*}\text{之间可以互换，如}(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} \end{cases}
\end{cases}
$$

矩阵行列和的结论

对矩阵 A, 若其每行元素和均为 k, 则有 $A(1,1,1)^\top = (k,k,k)^\top = k(1,1,1)^\top(\lambda\alpha)$;
若为每列元素和均为 k, 有 $(1,1,1)A = (k,k,k)$, 转置后与前者相同。

右乘/左乘 A^*, 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i,j), a_{ij}=A_{ij} \Leftrightarrow A^*=A^\top \Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;
- $\forall(i,j), a_{ij}=-A_{ij} \Leftrightarrow A^*=-A^\top \Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$;

  也可以使用矩阵表达式替代 A.

VI. 可逆矩阵的应用

$$
\text{可逆矩阵的判定}\begin{cases}
AB=BA=kE(\text{此时}A^{-1}=\dfrac{1}{k}B) \\
A\text{可逆} \Leftrightarrow \begin{cases}
|A|\neq 0 \\
r(A)=n \\
A\text{的列向量线性无关} \\
AX=0\text{仅有零解} \\
AX=b\text{有唯一解} \\
\forall\lambda, \lambda\neq 0
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\text{可逆矩阵的计算}\begin{cases}
\text{抽象}\begin{cases}
\text{凑}AB=E \\
\text{利用性质}\begin{cases}
(A^{-1})^{-1}=A \\
(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1} \\
(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}
\end{cases}
\end{cases} \\
\text{具体}\begin{cases}
\text{低阶 (2-3) - } A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^* \\
\text{初等变换 - } (A:E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E:A^{-1}) \\
\text{分块矩阵}
\end{cases}
\end{cases}
$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$
- 副对角分块 $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$
- “仅缺一块的”分块

  方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。

  - $\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$

可交换矩阵的结论

- 线性组合 - $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$;
- 一元二次形式 - $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$;

  证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

  其中，对前者，

$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B \mathbf{- aE + aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &\Rightarrow (B - aE)(A - bE) = abE \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。