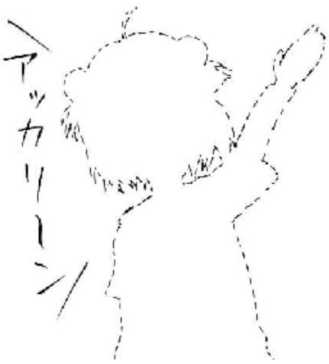

线代强化笔记

奇峰

之前

目录

概述

题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\begin{cases}\text{行列式计算（特殊；抽象）}\\ \text{矩阵 }(A^n, A^{-1}, A^*)\\ \text{初等矩阵（左/右）}\\ \text{秩（性质）}\\ \text{相关性（系数、秩）}\\ \text{等价、相似、合同}\\ \text{惯性系数}\begin{cases}\text{可逆变换}\\ p+q=r\end{cases}\end{cases}$$

大题部分主要涵盖

$$\begin{cases}\text{方程组}\begin{cases}\text{相关}\\ \text{解}\\ \text{矩阵方程}\end{cases}\\ \text{相似形（二次型）}\end{cases}$$

一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\begin{cases}|A|=0?\\ \exists A^{-1}?\\ A=(\alpha_i)\text{是否相关?}\\ AX=0\text{的基解?}\\ A\sim B\\ p+q=r\end{cases}$$

一种方法

初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\begin{cases} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{cases}$$

第一章
行列式

定义与性质

$$\begin{cases} \text{三大定义}\begin{cases}\text{几何定义};\\ \text{逆序定义};\\ \text{展开定义};\end{cases}\\ \text{计算}\begin{cases}\text{数值形};\\ \text{含参形};\\ \color{red}{\text{抽象形}};\end{cases}\\ \text{证明}|A|=0\begin{cases}|A|=-|A|;\\ r(A)<n;\\ \text{不可逆（常用于反证）};\\ AX=0\text{有非零解};\\ \exists\lambda_0=0;\end{cases}\end{cases}$$

一. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
  - 三角形
  - 范德蒙德行列式
  - 分块
- 特殊形状的行列式

二. 代数余子式

代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

注意，

- 其为 $(n-1)$ 阶子式;
- 其线性组合 $\sum_i a_i A_k i$ 相当于将行列式第 k 行元素替换为 (a_i);
- $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$
- 伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^\top \triangleq \mathbf{|A|\cdot A^{-1}}$

对数值型矩阵 A, 求 A^* 时，可先求 $|A|$ 并利用 $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\vdots A^{-1})$ 求 A^{-1}, 再利用公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 求伴随矩阵。

三. 抽象矩阵行列式

性质

i. 对已知 $A=(\alpha_i)$ 的矩阵，可以 $\begin{cases}\text{行列式列消}\\ \text{可逆时，}\begin{cases}\text{矩阵乘法}\\ \text{相似}\end{cases}\end{cases}$

ii. $|kA|=k^n|A|$, 其中 k 可以是行列式；

$|A^\top|=|A|,|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$;

iii. 设 A 可逆，则 A^* 可逆，且有

$|A^*|=|A|^{n-1};(A^*)^*=|A|^{n-2}A$;

$|(A^*)^*|=A^{(n-1)^2}$;

iv. $|A|=\prod\lambda_i;tr(A)=\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$;

v. $P^{-1}AP=B\Rightarrow|A|=|B|$;

vi. $aA+bE$ 不可逆 $\Leftrightarrow|aA+bE|=0\Rightarrow\exists\lambda_0=\dfrac{-b}{a}$;

vii. $AA^\top=A^\top A=E\Rightarrow|A|=\pm1$;

viii. 对可逆矩阵 $A,|A+\alpha\beta^\top|=|A|(1+\beta^\top A^{-1}\alpha)$;

对 $B=\alpha\beta^\top,|\lambda E+\alpha\beta^\top|=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$;

ix. 对 A_n, 若 $A^2=A,A\neq E$, 则有 $|A|=0$.

- 反证

  假设 A 可逆，则 $A^2A^{-1}=AA^{-1}=E\Rightarrow A=E$, 与题设矛盾，故 A 不可逆，因此 $|A|=0$.

- 秩

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O\Rightarrow r(A)+r(A-E)\leq n$;

  $A\neq E\Rightarrow r(A-E)>0\Rightarrow r(A)<n\Rightarrow|A|=0$.

- 方程组

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O;A\neq E\Rightarrow AX=O$ 存在非零解，因此 $r(A)<n$, 即 $|A|=0$.

- 特征值

  $A(A-E)=O=O(A-E),A\neq E$, 因此 A 存在一特征值 $\lambda_0=0$, 此时 $|A|=\prod\lambda=0$.

其中，对于第八条，

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix}E & -\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \alpha\\ -\beta^\top & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+\alpha\beta^\top & 0\\ -\beta^\top & 1\end{pmatrix}\qquad (i)$$

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ \beta^\top A^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \alpha\\ -\beta^\top & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \alpha\\ 0 & 1+\beta^\top A^{-1}\alpha\end{pmatrix}\qquad (ii)$$

显然 $(i),(ii)$ 的两边也相等。此时对二者右边取得行列式，得到

$$|A+\alpha\beta^\top|=|A|(1+\beta^\top A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子 $D=\begin{pmatrix}x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n\end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为 $\begin{pmatrix}x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$

此时可令前者为 A, 后者为 $\alpha\beta^\top$.

ii. $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E-(-\alpha\beta^\top)|$, 此时视 $A=\lambda E$,

套用前述方法有 $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E|(1+\beta^\top(\lambda E)^{-1}\alpha)=\lambda^n(1+\frac{\beta^\top\alpha}{\lambda})=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$.

注意，若有 $AB=O,B=(\beta_i)$, 则考虑

- $r(A)+r(B)\leq n$;
- B 的列向量为 $AX=O$ 的一组解；
- $A\beta_i=O=O\beta_i$, 此时 B 的列向量为 $\lambda_A=0$ 的特征向量。

计算抽象行列式

计算抽象的行列式时，若其有法则，如 $A^{-1},A^\top,A^*$, 则利用其法则，若其无法则，则利用 $E=AA^{-1}$ 或 $E=AA^\top$.

对求 $|A+B|$ 的情况，由于无法则，考虑添加 E, 此时“一前一后，前者前，后者后。”对于

$$|A+B|=|E_1A+BE_2|,\quad E_1,E_2\text{都是单位矩阵}$$

有

- E_1 在 A 前，E_2 在 B 后，此谓一前一后；
- E_1 拆时，考虑同在前面的 B, 即 $B^{-1}B$ 或 BB^{-1}, 此谓前者前；
- E_2 拆时，考虑同在后面的 A, 即 $A^{-1}A$ 或 AA^{-1}, 此谓后者后；

由行列式值求参数

需要加减・消元・出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数 $\lambda-2$.

四. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数（行列式和最高次方）
- 根与系数的关系

  对 $f(x)=D=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ 及其根 x_i 有 $\begin{cases} \sum x_i = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$

矩阵加边

对行列式 D_n, 显然

$$|D| = \left|\begin{array}{c:ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right|$$

其中，为 $*$ 的部分可以为任意值，因此可以按题面设置易于计算的值。另外，加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式，使得其虽然不等于原式，但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$

可以将其变为

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{增补行} \\ \\ \end{array}$$

并按照第一列展开，此时 x^3 的系数 A_3 正好为 $-|D|$, 而 x^4 的系数 A_4 为范德蒙德行列式，值为 $\prod(x_i - x_j)$, 由前述结论，$\sum a_i = -\dfrac{A_3}{A_4}$, 整理即得到结论。

第二章

矩阵

$$
\begin{cases}
\text{定义与运算}\begin{cases} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^*, A^T \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \nLeftrightarrow A = 0\text{或}B = 0; A^2 = 0\text{同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{当且仅当}A\text{可逆时成立} \end{cases} \\
\text{特殊矩阵 - } E, \Lambda, A^\top = A, AA^\top = E \\
\text{伴随矩阵}A^* \\
\text{可逆矩阵}\begin{cases} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明}A\text{可逆} \end{cases} \\
\text{初等矩阵（逆，变换）} \\
\text{秩(性质)} \\
\text{应用}\begin{cases} \text{矩阵方程} \\ \text{求}A^n \end{cases}
\end{cases}
$$

五. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$
\begin{cases}
\text{求}A^*\begin{cases} \text{定义法 - } A^* = (A_{ij})^\top \\ \text{公式法 - } A^* = |A|A^{-1} \end{cases} \\
\text{性质}\begin{cases} AA^* = A^*A = |A|E(\text{可推广为}\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2} \\ A^{-1,\top,*}\text{之间可以互换，如}(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} \end{cases}
\end{cases}
$$

矩阵行列和的结论

对矩阵 A, 若其每行元素和均为 k, 则有 $A(1,1,1)^\top = (k,k,k)^\top = k(1,1,1)^\top(\lambda\alpha)$;

若为每列元素和均为 k, 有 $(1,1,1)A = (k,k,k)$, 转置后与前者相同。

右乘/左乘 A^*, 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i,j), a_{ij}=A_{ij} \Leftrightarrow A^*=A^\top \Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;
- $\forall(i,j), a_{ij}=-A_{ij} \Leftrightarrow A^*=-A^\top \Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$;

  也可以使用矩阵表达式替代 A.

六. 可逆矩阵的应用

$$
\text{可逆矩阵的判定}\begin{cases} AB=BA=kE(\text{此时}A^{-1}=\dfrac{1}{k}B) \\ A\text{可逆} \Leftrightarrow \begin{cases} |A|\neq 0 \\ r(A)=n \\ A\text{的列向量线性无关} \\ AX=0\text{仅有零解} \\ AX=b\text{有唯一解} \\ \forall\lambda,\lambda\neq 0 \end{cases} \end{cases}
$$

$$
\text{可逆矩阵的计算}\begin{cases} \text{抽象}\begin{cases} \text{凑}AB=E \\ \text{利用性质}\begin{cases} (A^{-1})^{-1}=A \\ (kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \end{cases} \end{cases} \\ \text{具体}\begin{cases} \text{低阶 (2-3) - } A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换 - } (A:E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E:A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{cases} \end{cases}
$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块
  - 仅在主对角上非零的分块

    $$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$
  - 仅“缺一块”的分块

    方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。

    $$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

    $$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 副对角分块

  副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

  - 仅在副对角上非零的分块
    $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$
  - 仅“缺一块”的分块
    $\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$
    $\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{pmatrix}$

可交换矩阵的结论

- 线性组合 - $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$;
- 一元二次形式 - $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$;

  证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

  其中，对前者，

$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B \mathbf{-aE} + \mathbf{aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &= (B - aE)(A - bE) = abE \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = (B - aE)(A - bE) \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。

七. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

	符号	行列式	逆
交换	E_{ij}	-1	$E_{ij}(k)$
倍乘	$E_i(k)$	k	$E_i(1/k)$
倍加	$E_{ij}(k)$	1	$E_{ij}(-k)$

利用性质计算矩阵

有例子

$$
\begin{aligned}
E_{12}A=B \Rightarrow &\begin{cases}-|A|=|B| \\ A^{-1}E_{12}=B^{-1}\end{cases} \\
&\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12}=|B|B^{-1} \\
&\Rightarrow -A^*E_{12}=B^*
\end{aligned}
$$

八. 求矩阵的秩

秩的求解

$$
\begin{cases}
\text{定义}\begin{cases} r\text{阶至少一非零} \\ r+1\text{阶全为零}\end{cases} \\
\text{初等变换法（行列均可）- } A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵}B\text{, 非零行数即为秩} \\
\text{非零特征根的个数是秩}
\end{cases}
$$

性质

- 对 $A_{m\times n}$, 有 $r(A)=r(A^\top A)=r(AA^\top)=r(A^\top)=r(kA)$.
  - 证明 $r(A^\top A)=r(A)$
    利用同解方程组。
    $$
    \begin{aligned}
    A^\top AX=O &\Rightarrow X^\top A^\top AX=O \\
    &\Rightarrow (AX)^\top AX=O \\
    &\Rightarrow |AX|=0 \\
    &\Rightarrow AX=O \\
    AX=O &\Rightarrow A^\top AX=O
    \end{aligned}
    $$
    因此 A 与 $A^\top A$ 同解，故其秩相等。
- $r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$.
- $r(AB)\le r(A); r(AB)\le r(B)$. 对前者，$B$ 可逆时等号成立。
- $r(A:B)\le r(A)+r(B)$;
  $r\binom{A}{B}\le r(A)+r(B)$
- 对矩阵 $A_{m\times \mathbf{n}}, B_{\mathbf{n}\times s}, AB=O$, 有 $r(A)+r(B)\le \mathbf{n}$.
  此即所谓“前看列，后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时，都应考虑这一句。
  - 证明
    $AB=O\Rightarrow B$ 的列向量 β_i 是 $AX=O$ 的一组解，此时 $r(\beta_1,\cdots,\beta_s)=r(B)\le n-r(A)\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$.

- 对 A_n, 其伴随矩阵的秩 $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1(n\geq 2) \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$
- $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$
- 若 P,Q 可逆，则有 $r(PA)=r(AQ)=\overbrace{r(PAQ)=r(A)}^{\text{矩阵等价}}$
  若 $B=PAQ$ 或 $r(B)=r(A)$, 称 A,B 等价。
- 对 $A_{m\times n}$, 若其行满秩，则 $r(A)=m, A\sim(E_m,O)$.
- 对 $A_{m\times n}, r(A)=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$;
  $r(A)=m, r(BA)=r(B)$.
  - 证明前者成立
    $r(B)\geq r(AB)\geq r(A^{-1}AB)=r(B)$, 故 $r(AB)=r(B)$.

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2=A\Rightarrow r(A)+r(A-E)=n$.
- $A^2=E\Rightarrow r(A-E)+r(A+E)=n$.
  - 证明后者成立

$$(A-E)(A+E)=0\Rightarrow n\geq r(A-E)+r(A+E)=r(A+E)+r(-(\mathbf{A}-\mathbf{E}))\geq r(2E)=n$$
$$\Rightarrow r(A-E)+r(A+E)=n$$

事实上，对于 A 的一元二次式，若其可因式分解，则分解后的因式都满秩。

九. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX=C\Rightarrow X=A^{-1}C$
- $XA=C\Rightarrow X=CA^{-1}$
- $AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX=C\Rightarrow A(X_i)=(C_i)$, 其中 X_i,C_i 是对应矩阵的列向量，解得到的 n 个非齐次方程组即可。
- $XA=C\Rightarrow A^{\top}X^{\top}=C^{\top}$, 然后同上。

十. 计算 n 阶矩阵高次幂

- 归纳运算。
- $r(A)=1$ 时，有 $A^n = tr(A)^{n-1}A$.
- $A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ & 0 & c\\ & & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} & & ac\\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n\geq 3}=O.$
- 相似性

  若 $P^{-1}AP=B$, 则有 $P^{-1}A^nP=B^n$, 其中 P 不变，

第三章

向量

$$
\begin{cases}
\text{向量运算}\begin{cases}
\text{服从矩阵运算规律} \\
\text{内积 } (\alpha,\beta)=\alpha^\top\beta=\beta^\top\alpha(=tr(A)) \\
\text{两向量内积为零时，两向量正交} \\
\text{正交矩阵}\begin{cases}\text{单位 - 任意列向量为单位向量} \\ \text{正交 - 任意两列向量正交}\end{cases}
\end{cases} \\
\text{相关性}\begin{cases}\text{定义} \\ \text{判定}\end{cases} \\
\text{线性表示}\begin{cases}
\text{向量组表示} \\
\text{向量组等价} \\
\text{极大无关组}\begin{cases}\text{求法} \\ \text{秩}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

十一. 相关性

定义法

定义法常用于证明相关/无关性。

令 $\sum k_i\alpha_i=\vec{0}$, 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出 $\forall i, k_i=0$, 则 α_i 线性无关。

秩

$$
\begin{cases}
r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=\mathbf{S}\Rightarrow(\alpha_i)\text{线性无关} \\
r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<S\Rightarrow(\alpha_i)\text{线性相关}
\end{cases}
$$

性质

- α_i 线性无关 $\Leftrightarrow (\alpha_i)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_s\end{pmatrix}=0$ 仅有零解。
- 满足以下任意一条则线性相关。
  - 内含零向量；
  - 内含等比例向量；
  - 内含可表示向量。
- 向量个数大于维数必相关（利用秩证明）。
- 全部无关，一部无关；一部相关，全部相关。
- 原本相关，缩短相关，原本无关，加长无关。（改变的是维数）
- 以少表多，多必相关。

对于一组能组成方阵的 (α_i), 若其方阵 P 满足 $AP=PB$, 则这组向量无关。此处运用了相似的性质。

十二. 线性表示

$$\begin{cases}\text{一个向量，}\beta=\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\Leftrightarrow(\alpha_i)X=\beta\\ \text{一组向量，}\beta_i=\sum_{j=1}^{s}x_{ij}\alpha_j;i=1,2,\cdots,t\\ \text{两组互相表示，即}\\ \text{向量组等价}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall i,\beta_i=\sum_j x_{ij}\alpha_j\\ \forall j,\alpha_j=\sum_i x_{ij}\beta_i\end{cases}\end{cases}$$

判定

- β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow r(\alpha_i)=r(\alpha_i,\beta)$, 注意此时不一定满秩；
- $\forall i,\beta_i$ 均可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出 $\forall i,\Leftrightarrow r(\alpha_i)=r(\alpha_i,\beta_i)$;
- 向量组 (I),(II) 等价 $\Rightarrow r(\text{I})=r(\text{II})=r(\text{I,II})$

十三. 秩与极大线性无关组

定义

对 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中有部分向量 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it}$, 其

- 线性无关；

- 任意剩余向量都可由这组向量表示，

则称 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it}$ 为极大线性无关组。

性质

- 无关组不唯一，但是其个数唯一；
- 只有 $\vec{0}$ 的向量组无极大无关组；
- 向量组的秩为极大无关组向量个数；
- 向量组与其极大无关组等价；极大无关组之间也等价。

求解 - 列写行消

$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\xrightarrow{\text{行变换}}B_{\text{阶梯}}$, 从每个台阶中选一列组成极大无关组。

第四章

线性方程组

$$
\begin{cases}
\text{齐次方程组}AX=0\begin{cases}\text{表示形式}\begin{cases}\text{矩阵}\\ \text{向量}\end{cases}\\ \text{有解的判定}\\ \text{解的性质}\begin{cases}\text{通解}\\ \text{基解}\\ \text{组合}\end{cases}\\ \text{求解方法}\end{cases}\\
\text{非齐次方程组}AX=b\begin{cases}\text{有解判定}\\ \text{解的性质}\\ \text{解的结构 - 齐通 + 非齐特}\end{cases}\\
\text{同解与公共解}\begin{cases}\text{通解 - 解集相同}\\ \text{公共解 - 解集有交集}\end{cases}
\end{cases}
$$

十四. 解的判定

对于齐次方程 $AX=0,\begin{cases}\text{只有零解} \Rightarrow r(A)=n\\ \text{有非零解} \Rightarrow r(A)<n\end{cases}$.

其基础解系

- 为 $AX=0$ 的解；
- 线性无关；
- 数量为 $n-r(A)$ 个。

对于非齐次方程 $AX=b,\begin{cases}\text{无解} \Rightarrow r(A)\neq r(\bar{A})\\ \text{有解} \Rightarrow r(A)=r(\bar{A})\begin{cases}=n \Rightarrow \text{解唯一}\\ <n \Rightarrow \text{解不唯一（无穷）}\end{cases}\end{cases}$

十五. 求通解

对于具体的数字矩阵，通过行变换或高斯消元做。

对抽象矩阵，

- 通解为齐通 + 非齐特；
- 齐解任意组合仍然为齐解；
- 若 $\xi_1, \cdots, \xi_t$ 均为 $AX = b$ 的解，则 $\sum k_i \xi_i$ 为 $\begin{cases} \text{齐解，} \sum k = 0 \\ \text{非齐解，} \sum k = 1 \end{cases}$

例题 三阶行列式 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 则

I. $r(A) = 2$;

II. 若有 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $AX = b$ 的通解。

方法 I. $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow$ 可列消 $\alpha_3 \Rightarrow r(A) \leq 2$.

有三个互异特征值 $\Rightarrow$ 可相似对角化 $\Rightarrow r(A) \geq 2$ 因为至多一个特征值为零。

故 $r(A) = 2$.

II. 由于 $r(A) = 2, X$ 的基解有一个向量。

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ 一齐解为 $(1, 2, -1)^\top$.

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow A(1, 1, 1)^\top = \beta$, 故一非齐解为 $(1, 1, 1)^\top$.

故通解为 $(1, 1, 1)^\top + k(1, 2, -1)^\top$, 其中 $k \in \mathbb{R}$.

例题 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 求满足 $AB = E_3$ 的所有矩阵 B.

方法 不妨令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则有 $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 此时对 $A\beta_i = \xi_i$ 求解。

注意到可以通过对 $\begin{pmatrix} A & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}$ 做初等行变换一起完成高斯消元。解出 β_i, 则 (β_i) 即为所求 B.

注意，若待求式为 $XA = B$, 则转置为 $A^\top X^\top = B^\top$.

十六. 方程组的同解与公共解

公共解

即两方程解集交集非空。具体而言，

- 方程组已知 - 联立；

- 知一方程组与另一通解 - 用通解表示公共解，代回方程求解；
- 知两组通解 - 待定系数设通解，使通解相等求系数。

同解

即两方程解集相同。

当 $r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 时，$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解。

例题 设有方程组 $(I):\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$ 与方程组 (II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^\top+k_2(-1,2,2,1)^\top$,

I. 求 (I) 基础解系；

II. 求 $(I),(II)$ 是否有非零公共解；若有则将其列出。

方法 I. 由高斯消元法，其基础解系为 $(0,0,1,0)^\top,(-1,1,0,1)^\top$.

II. 不妨设公共解为 $k_1(0,1,1,0)^\top+k_2(-1,2,2,1)^\top$, 即 $(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^\top,k_1,k_2\in\mathbb{R}$; 将其代入 (I), 有 $k_1=-k_2$, 此时原公共解为 $k(1,-1,-1,-1)^\top,k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

例题 设有 2×4 矩阵 A,B, 且 $(I)AX=0$ 通解为 $k_1(1,2,2,-1)^\top+k_2(0,-1,-3,2)^\top,(II)BX=0$ 通解为 $\mu_1(2,-1,a+2,1)^\top+\mu_2(-1,2,4,a+8)^\top$, 其中 $k_1,k_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, 若 $(I),(II)$ 有非零公共解，求 a 及所有非零公共解。

方法 设公共解为 $X=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$, 即方程 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)(k_1,k_2,l_1,l_2)^\top=0$ 有非零解，因而 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ 不满秩。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&5&-4\\0&0&-a-15&7\\0&0&7&-a-15\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{不满秩因而}a\neq-15}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&5&-4\\0&0&-a-15&7\\0&0&0&-\dfrac{(a+8)(a+22)}{(a+15)}\end{pmatrix}$$

因此 $a=-8$ 或者 $a=-22$.

$a=-8$ 时，$X=k_1(1,1,-2,1)^\top;k_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

$a=-22$ 时，$X=k_2(-1,1,8,-5)^\top;k_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

例题 已知齐次线性方程组

$$(I)\quad\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases};\quad(II)\quad\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases};$$

同解，求 a,b,c.

解法 显然 $r(B) \le 2 < 3$; (I) 有非零二阶子式，即 $r(A) \ge 2$; 又由于 (I),(II) 同解，可以知道 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 2$.

因此，

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & c-b-1 \\ 0 & 0 & c-b^2-1 \end{pmatrix}$$

且其秩为 2, 因此 $a-2 = c-b-1 = c-b^2-1 = 0$, 即 $a = 2, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例题 设有 $A_{m\times n}, B_{m\times n}$, 则 $AX = 0, BX = 0$ 同解的充要条件为 ______.

A) A, B 向量组等价；

B) A, B 行向量组等价；

C) A, B 列向量组等价；

D) $A^\top x = 0, B^\top x = 0$ 同解。

方法 A) 仅有 $r(A) = r(B) = r(A, B), r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 未知；

B) 有 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 符合定义，因而正确；

C) 仅有 $r(A) = r(B)$;

D) 仅有 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A^\top \\ B^\top \end{pmatrix}$;

第五章

矩阵的特征值与特征向量

$$
\begin{cases}
\text{求}\lambda_A\text{与}\alpha_A \begin{cases} \text{抽象} \\ \text{具体} \\ \text{性质} \end{cases} \\
\text{相似} \begin{cases} A \sim B \\ A \sim \Lambda(\text{判定与求解}) \\ \text{求}A^n, A, \text{相似矩阵}B \end{cases} \\
\text{对角化} \begin{cases} \text{方阵}A_n(\text{重根}) \\ \text{对称矩阵}A(\text{结论}) \end{cases}
\end{cases}
$$

十七. 矩阵的特征值与特征向量

可能的情况

对抽象矩阵 A,

- 凑 $A\alpha = \lambda\alpha$;
- $A + kE$ 不可逆 (求 λ_A);

对具体矩阵 A,

- $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_A; \forall\lambda_0, (\lambda_0 E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha$;
- $A = B + kE, r(B) = 1$;

列表法

可以列表表示对 A 做变换时，特征值特征向量的变化。

注意，可以手动将待求矩阵拆为便于运算的形式，如 $A = B + kE$ 等。

秩为一的矩阵

对秩为一的矩阵，$r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^\top$;

- $\lambda_1 = tr(A) = \alpha^\top\beta = \beta^\top\alpha, \lambda_2 = \cdots, \lambda_n = 0$;
-
  - 若 $tr(A) \neq 0$, 对 $\lambda_1 = tr(A)$, $A = \alpha\beta^\top \Rightarrow A\alpha = \alpha\beta^\top\alpha = tr(A)\alpha$, 故 $\lambda_1 = tr(A)$ 对应的无关特征向量为 α.

A	λ	α
A^k	λ^k	α
A^m+kE	λ^m+kE	α
A^{-1}	$1/\lambda$	α
A^*	$\lvert A\rvert/\lambda$	α
$A^\top$	λ	无法断定
$P^{-1}AP$	λ	$\mathbf{P^{-1}}\alpha$

对其余的特征值 $\lambda_i=0$, 即解 $AX=0\Rightarrow\alpha\beta^\top X=0$, 发现其与 $\beta^\top X=0$ 同解。由于这里有 $n-1$ 个无关特征向量，加上 λ_1 的一个后共计 n 个无关特征向量，注意到矩阵 A 可以相似对角化。

◦ 若 $tr(A)=0$, 则所有特征值都为 0. 此时仍求解 $AX=0$, 仍能解得 $n-1$ 个无关特征向量；因为不够 n 个，矩阵 A 无法相似对角化。

故 A 能否相似对角化取决于其迹是否为零。

例题 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=P^{-1}A^*P$, 求 $B+2E$ 特征值特征向量。

方法 通过表格法，发现 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_A}$, 特征向量仍为 α_A; 而 $P^{-1}A^*P$ 特征值仍为 $\dfrac{|A|}{\lambda_A}$, 特征向量为为 $P^{-1}\alpha_A$. 只需求解 A 特征向量、特征值、行列式并按上述式计算即可。

例题 设 $A_{3\times3}=\alpha\beta^\top+\beta\alpha^\top,\alpha,\beta$ 为单位列向量，$\alpha^\top\beta=\dfrac{1}{3}$, 则

I. 0 是 A 的特征值；

II. $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 都是 A 的特征向量；

III. A 可以相似对角化。

证明 I. $r(A)=r(\alpha\beta^\top+\beta\alpha^\top)\le r(\alpha\beta^\top)+r(\beta\alpha^\top)=2$, 因而 A 不满秩，故其必有 $\lambda_i=0$.

II. 由于

$$\begin{aligned}A(\alpha+\beta)&=\alpha\beta^\top\alpha+\alpha\beta^\top\beta+\beta\alpha^\top\alpha+\beta\alpha^\top\beta\\&=[tr(A)+|\alpha|](\alpha+\beta)=\frac{4}{3}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

因而为特征向量；$\alpha-\beta$ 同理。

III. 可以算出其有特征值 $\lambda=0,\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}$ 互异，故可以相似对角化。

十八. 相似性的判定

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$, 或者 $AP=PB$, 则称 A,B 相似。

性质

对相似的 A,B,

- $|A|=|B|;tr(A)=tr(B);$
  $r(A)=r(B);\lambda_A=\lambda_B;$
- $P^{-1}A^nP=B^n;P^{-1}(A+kE)P=B+kE;$
- 若 $A\sim C,C\sim B$, 则 $A\sim B$.

例题 对相似的 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&5&1\\4&12&6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b&&\\&b&\\&&c\end{pmatrix}$, 求 a,b,c.

方法 由相似性质，$tr(A)=12=tr(B)=2b+c$;

$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+13-a)=0$ 有解 $\lambda=b,b,c$.

分别假设 $b=2,c=2$, 得 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-8\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-12\\5\\2\end{pmatrix}$.

例题 设 $A_{3\times3}$ 的互异的特征值为 $\lambda_i,i\in\{1,2,3\}$; 对应的特征向量为 $\alpha_i,i\in\{1,2,3\}$. 令 $\beta=\sum\alpha$,

I. 证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关；

II. 若 $A^3\beta=A\beta$, 求 $r(A-E)$ 与 $|A+2E|$.

方法 I. 由于特征值互异，其对应的特征向量线性无关。设有

$$k_1\beta_1+k_2A\beta_2+k_3A^2\beta_3=\sum(k_1+k_2\lambda_i+k_3\lambda_i^2)\alpha_i=0;$$

由于 α_i 无关，知 $\forall i,k_1+k_2\lambda_i+k_3\lambda_i^2=0$, 而 λ 互异，故对 $Ak=0,|A|\neq0$, 故该方程只有零解，故原向量组无关。

II. 当第一问中构造了一组无关向量时，一般在第二问用到其列矩阵，应用

- 相似；
- 矩阵乘法；

联系已知矩阵以构建方便计算待求结论的新矩阵。

令 $P=(\beta,A\beta,A^2\beta)$, 则

$$\begin{aligned}AP&=(A\beta,A^2\beta,A^3\beta)=(A\beta,A^2\beta,A\beta)\\&=(\beta,A\beta,A^2\beta)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=PB\end{aligned}$$

故 A,B 相似，有 $r(A-E)=r(B-E)=2,|A+2E|=|B+2E|=6$.

例题 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$, 相似，

I. 求 x,y;

II. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

方法 I. 由题，$|A| = 4(x-2) = |B| = -2y, tr(A) = x - 4 = tr(B) = y + 1$, 故解得 $x = 3, y = -2$.

II. 可以知道 $\lambda_A = \lambda_B = 2, -1, -2$. 故 A, B 都相似于 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

此时可以求 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda, P_2^{-1}BP_2 = \Lambda; P_1, P_2$ 各列是对应矩阵的特征向量；

发现 $B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = \Lambda$, 因此 $P = P_1P_2^{-1}$.

十九. 相似对角化的判定与运算

定义

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$, 则称方阵 A 可以相似对角化。

求解

- 可逆 P 阵

  A 的 n 个线性无关的特征向量 α_A 构成；

  若特征向量的数目不够，则其不可相似对角化。

- 对角矩阵 Λ

  其由 n 个特征值对应，特征值与特征向量的位置是对应的。

判定

- **充分条件**

  实对称矩阵 $\Rightarrow$ 可相似对角化；

  有 n 个互异特征值的矩阵 $\Rightarrow$ 可相似对角化；

- **充要条件**

$$\begin{aligned} \text{可相似对角化} &\Leftrightarrow \text{有}n\text{个无关特征向量} \\ &\Leftrightarrow k\text{重特征值对应}k\text{个无关特征向量} \\ &\Leftrightarrow k = n - r(\lambda_0 E - A) \\ &\Leftrightarrow r(\lambda_0 E - A) = n - k \end{aligned}$$

例题 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 其对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 则 $P^{-1}A^*P =$ ______.

方法 由于三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 其对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 对 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 其列分别对应的特征值为 $1, -2, 3$. 注意，此处 $-\alpha_2$ 的系数 -1 **不影响特征值的正负性**。

对 A^*, 其特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda} = -6, -2, 3$, 因此 $P^{-1}A^*P$ 对应的特征值的次序改变，为 $-6, 3, -2$, 因而有 $\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

例题 设 A 为二阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$, 其中 α 为非零向量且不是 A 的特征值，

I. 证明 P 为可逆矩阵；

II. 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$ 并判断其是否与对角矩阵相似。

方法 I. 假设 A 不是可逆矩阵，则其不满秩，因而 α 与 $A\alpha$ 成比例。此时有 $A\alpha = k\alpha$, 也即 α 为 A 的特征值，与题设矛盾，因而 A 是可逆矩阵。

II. 由于

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\alpha, A\alpha) = P^{-1}(A\alpha, A^2\alpha) \\ &= P^{-1}(A\alpha, -A\alpha + 6\alpha) \\ &= P^{-1}(\alpha, A\alpha)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = P^{-1}PB = B, \end{aligned}$$

而 $\lambda_B = 2, -3$ 互异，因而可以相似对角化，故 A 也可以相似对角化。

例题 设 A, B, C 为三阶矩阵，有 $AB = -B, CA^\top 2C$,

其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$,

I. 求矩阵 A;

II. 求当 a 为何值时有 $A^{100}\xi = \xi$.

方法 I. 不妨设 $B = (\beta_i), C^\top = (\gamma_i)$, 注意到有 $(CA^\top)^\top = 2C^\top \Rightarrow AC^\top = 2C^\top$.

由于 $A\beta_1 = -\beta_1, A\beta_2 = -\beta_2, A\gamma_1 = 2\gamma_1$, 知 $\lambda_A = -1, -1, 2, \alpha_A = \beta_1, \beta_2, \gamma_1$.

因此，$A = P^{-1}\Lambda P, P = (\beta_1, \beta_2, \gamma_1), \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

可以解得 $A = P\Lambda P^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -15 & -9 \\ -6 & 22 & 18 \\ 3 & -15 & -17 \end{pmatrix}$

II. 由于 β_1, β_2 为 A 的无关特征向量，必有 $A^{100}(k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = (-1)^{100}(k_1\beta_1 + k_2\beta_2)$, 而 $A^{100}\xi = \xi$, 可以知道 ξ 可被 β_1, β_2 线性表出，因此 $\xi = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$ 必有解，即

$$(\beta_1, \beta_2, \xi) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

有解，因此 $a = -3$.

二十. 实对称矩阵

对角化

- 可逆矩阵 P

  必定存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 P 由特征向量组成;

- 正交矩阵 Q

  必定存在正交矩阵 Q 使得 $Q^\top AQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$, 其中 Q 经过了施密特正交单位化。

施密特正交化时，对无关的一组 α_i, 有

- $\beta_1=\alpha_1$;
- $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$
- $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

求原矩阵

- 对 P 有 $A=P\Lambda P^{-1}$;
- 对 $Q=(\gamma_i)$ 有 $A=Q\Lambda Q^\top$;

  特别地，若 $r(A)=1, A=tr(A)\gamma_1\gamma_1^\top$.

例题 已知 A 为三阶实对称矩阵，各行元素和均为 3, 且 $\alpha_1=(-1,2,-1)^\top,(0,-1,1)^\top$ 是 $AX=0$ 的解。

I. 求 A 特征值与特征向量;

II. 求正交矩阵 Q 使得 $Q^\top AQ=\Lambda$;

III. 求 A 以及 $(A-\dfrac{3}{2}E)^6$.

方法 I. 求特征向量时，**若未明示求无关特征向量，则需给出全部特征向量。**

由各行和均为 3 知 $A(1,1,1)^\top=(3,3,3)^\top=3(1,1,1)^\top$, 故 A 有特征值 3, 其对应无关特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^\top$;

由题设，α_1,α_2 是 $\lambda=0$ 对应的无关特征向量。

因此，$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2, k_1,k_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

$\lambda=3$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3, k_3\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

II. 可以知道 $\lambda_A=0,0,3$, 对应的无关特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

因为 α_3 与另外二者正交，对 α_1,α_2 做施密特正交化。故有

- $\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^\top$;
- $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(-1,0,1)^\top$;

对全体做单位化，故有 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\beta_1;\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_2;\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\beta_3$;

此时，有 $Q=(\gamma_i)$ 使得 $Q^{-1}AQ=Q^\top AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

III. 显然 $A=Q\Lambda Q^\top$. 而 $r(A)=1,\lambda=0,0,3$,

故有 $A=tr(A)\alpha_1\alpha_1^\top=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$;

$(A-\frac{3}{2}E)^6=Q^\top(\Lambda-\frac{3}{2})Q$

$$\begin{aligned}(A-\frac{3}{2}E)^6&=Q^\top(\Lambda-\frac{3}{2})^6Q\\&=Q^\top\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}^6Q\\&=(\frac{3}{2})^6Q^\top Q=(\frac{3}{2})^6E.\end{aligned}$$

例题 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$, 有正交矩阵 Q 使得 $Q^\top AQ=\Lambda$, 若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^\top$, 求 a,Q.

方法 由于存在特征值 λ_1 使得 $A\lambda_1=\lambda_2(1,2,1)^\top$, 可以解得 $a=-1,\lambda_1=2$.

代入 $a=-1$, 求 $|\lambda E-A|=0$, 解得 $\lambda_2=-4,\lambda_3=5$. 通过 $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$ 求 α_2, 显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交。因此由正交性,

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}i&j&k\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=2i-2j+2k$$

此时 $Q=\left(\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}\right)$.

第六章

二次型

$$
\begin{cases}
\text{二次型与性质}\begin{cases} X^\top AT \\ \text{二次型与标准形} \\ p+q=n \end{cases} \\
\text{二次型化为标准形}\begin{cases} \text{配方法} \\ \text{正交变换} \end{cases} \\
\text{合同关系}P^\top AP = B(P\text{可逆}) \\
\text{正定判定}\begin{cases} \text{定义 } X^\top AX > 0 \\ \text{充要条件} \\ \text{必要条件}\begin{cases} a_{ii} > 0 \\ |A| > 0 \end{cases} \end{cases}
\end{cases}
$$

二十一. 二次型化为标准形

可逆变换

若村咋可逆 C 使得对 $X = CY, f = X^\top AX = (CY)^\top ACY = Y^\top C^\top ACY.$

若有 $C^\top AC = \Lambda$, 则将 f 标准化了。

正交变换

存在正交矩阵 Q 使得 $X = QY$, 则 $f = X^\top AX = Y^\top \Lambda Y = \sum \lambda_i y_i^2,$

配方法

利用完全平方式凑平方和，进行变换。

例题 设有可逆矩阵 P 使得 $P^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 P.

方法 要将 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ 变为 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2,$

只需令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = PY$ 即可。此时的 P 即为所求。

例题 设实二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $X=QY$ 可化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2, a\geq b$,

I. 求 a,b 的值；

II. 求 Q.

方法 I. 可以发现，对 f 的矩阵 A, g 的矩阵 B, 有 $Q_1^\top AQ_1=\Lambda=Q_2^\top BQ_2$,
因此必有 $Q_2Q_1^\top AQ_1Q_2^\top=Q^\top AQ=B$, 而 Q 是实对称矩阵，因此 A,B 相似；
其中，Q 是第二问中的待求正交矩阵。
由于 $tr(A)=tr(B), |A|=|B|, a\geq b$, 解得 $a=4, b=1$.

II. 对 A 的两个特征值 $5,0$, 对应的无关特征向量为 $(1,2)^\top,(2,-1)^\top$,
对其单位化后得到 $Q_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$；
对 B 的两个特征值 $5,0$, 对应的无关特征向量为 $(2,1)^\top,(1,-2)^\top$,
对其单位化后得到 $Q_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$；
前面已经指出，$Q=Q_1Q_2^\top$.

例题 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j}^{3}ijx_ix_j$,

I. 写出 f 对应的矩阵；

II. 求正交变换 $x=Qy$ 对应的矩阵；

III. 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

方法 I. 显然 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

II. 由于 $A=\beta\beta^\top, \beta=(1,2,3)^\top$, 有 $r(A)=1, \lambda_A=14,0,0$;
其中，$\lambda=14$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_1=(1,2,3)^\top$; $\lambda=0$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_2=(2,-1,0)^\top, \alpha_3=(3,0,-1)^\top$.
对 $P=(\alpha_i)$ 做施密特正交单位化，得到

- $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,3)$;
- $\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-2,1,0)$;
- $\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{70}}(3,6,-5)$;

此时有 $Q=(\gamma_i)$ 使得 $X=QY$ 时有 $f(y_1,y_2,y_3)=14y_1^2$.

III. 配方，发现 $f=(x_1+2x_2+3x_3)^2$, 因此 $f=0\Rightarrow x_1+2x_2+3x_3=0$.
显然该方程的所有解为 $k_1\alpha_2+k_2\alpha_3, k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

例题 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+ax_2^2+4x_1x_2$ 经正交变换 $x=QY$ 化为 $3y_1^2+by_2^2$, 若 $B=Q_2^{-1}A^*Q$, 其中 $Q=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$,

I. 求 a,b 及正交矩阵 Q;

II. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}BP=\Lambda$, 并写出该 Λ.

方法 I. 题设两个二次型中，前者的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&a\end{pmatrix}$, 后者的矩阵为 $A_1=\begin{pmatrix}3&0\\0&b\end{pmatrix}$. 可以知道，$|A|=|B|$ 且 $tr(A)=tr(B)$, 因此 $a=1,b=-1$, 因此二者有特征值 $3,-1$.

对 $A,\lambda=3$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_1=(1,1)^\top$, $\lambda=-1$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_2=(-1,1)^\top$.

对 (α_1,α_2) 做施密特正交单位化，得到 $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

故存在上述 Q 使得 $X=QY$ 时有 $f=3y_1^2-y_2^2$.

II. 由上问知 $\exists P_1=(\alpha_1,\alpha_2)$ 使得 $P_1^{-1}AP=\Lambda_1$. 故 $P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}\frac{|A|}{\lambda_1}&\\&\frac{|A|}{\lambda_2}\end{pmatrix}$.

$A^*=P_1\Lambda_1P_1^{-1},B=Q_2^{-1}A^*Q_2$, 故有 $B=Q_2^{-1}A^*Q_2=Q_2^{-1}P_1\Lambda_1P_1^{-1}Q_2$, 即 $P_1^{-1}Q_2\Lambda_1Q_2^{-1}P_1=(Q_2^{-1}P_1)^{-1}\Lambda_1(Q_2^{-1}P_1)=\Lambda_1$. 此时 $P=Q_2^{-1}P_1$.

因此上述 P 可使得 $P^{-1}BP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&\\&3\end{pmatrix}$.

例题 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数，

I. 求 $f=0$ 的解；

II. 求 f 的规范型。

方法 I. 令 $f=0$, 由 f 的半正定性，有

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3&=0\\x_2+x_3&=0\\x_1+ax_3&=0\end{cases}\longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$

当 $a\neq2$ 时，方程仅有零解；

当 $a=2$ 时，方程的解为 $k(-2,-1,1)^\top,k\in\mathbb{R}$.

II. 当 $a\neq2$ 时，A 可逆，因此令

$$\begin{cases}y_1&=x_1-x_2+x_3\\y_2&=x_2+x_3\\y_3&=x_1+ax_3\end{cases}$$

此时有 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

当 $a=2$ 时，A 不可逆。注意到 $f=2(x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2$,

故令 $\begin{cases}y_1=x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{3}{2}x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 则有 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$;

令 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}y_1 \\ z_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 则有 $f = z_1^2 + z_2^2$.

例题 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_1x_3$, 利用可逆线性变换 $X = PZ$ 使得 f 化为标准形，并求二次型的正负惯性指数。

方法 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 则有 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1Y.$

此时有 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_1y_2 + y_2y_3$.

此时又有 $f = 2(y_1 + \dfrac{7}{4}y_3)^2 - 2(y_2 - \dfrac{y_3}{4})^2 - 6y_3^2$,

故令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{7}{4}y_3 \\ z_2 = y_2 - \dfrac{y_3}{4} \\ z_3 = 6y_3 \end{cases}$, 则有 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1Y.$

此时有 $f = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 6z_3^2$.

因此正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

二十二. 合同判定

定义

若存在可逆矩阵使得 $P^\top AP = B$, 则称 A, B 合同。

二次型变化的矩阵是合同的，因为

$$\begin{aligned} f \xlongequal{X=PY} X^\top AX &\Rightarrow (PY)^\top A(PY) \\ &= X^\top(P^\top AP)Y \stackrel{\triangle}{=} Y^\top BY \end{aligned}$$

判定

- 惯性指数相同 $\Leftrightarrow$ 合同；
- 特征值正负个数相同 $\Leftrightarrow$ 合同；

  相似 $\Rightarrow$ 特征值相等 $\Rightarrow$ 合同，故相似必合同。

例题 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵可逆矩阵，则在

A) $PA = B$;

B) $P^{-1}ABP = BA$;

C) $P^{-1}AP = B$;

D) $P^\top A^2 P = B^2$.

中，正确的是 ______.

方法 A) 由于 $PA = B$, 有 $r(A) = r(B)$, 而 $r(A) = r(B) = n$, 故 P 必定存在。

B) 当 $P = A$ 时显然成立。

C) 可以知道 A, B 分别与一对角矩阵相似，但两对角矩阵不一定相同。

D) 由于 A, B 可逆，其必定满秩，所有特征值都不为零，故 A^2, B^2 特征值均大于零，故二者正惯性指数均为 n, 负惯性指数均为 0, 因而合同。

二十三. 正定判定

定义

若对任意非零 X 都有 $f = X^\top AX > 0$, 则称 $f(x)$ 为正定二次型。

判定

二次型 A 正定与以下任意一点等价。

- A 的所有顺序主子式大于零。

$$\text{三阶方阵的顺序主子式形如} \quad \left|\begin{matrix} \left|\begin{matrix} |\cdot| & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}\right| & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

- 所有特征值大于零；
- 正惯性指数为 n;
- A 与 E 合同，即 $\exists P, A = P^\top P$.

例题 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，$r(A) = m$, 则在命题

A) $AA^\top$ 与单位矩阵等价；

B) $AA^\top$ 与对角矩阵相似；

C) $AA^\top$ 与单位矩阵合同；

D) $AA^\top$ 是正定矩阵；

中，正确的是 ______.

方法

$$\begin{aligned} r(AA^\top) = r(A) = m &\Leftrightarrow |AA^\top| \neq 0 \Leftrightarrow AA^\top\text{可逆} \\ &\Leftrightarrow AA^\top\text{与}E_m\text{等价} \Leftrightarrow AA^\top\text{行/列向量无关} \\ &\Leftrightarrow (AA^\top)X = 0\text{仅有零解} \Leftrightarrow (AA^\top)X = b\text{仅有唯一解} \\ &\Leftrightarrow AA^\top\text{任意特征值不为零} \end{aligned}$$

由于 $(AA^\top)^\top = AA^\top$, 其必能相似对角化，因而正定，与 E 合同。

二十四. 两点总结

矩阵的三大关系

- **等价**
  - 对 $m\times n$ 的 $A,B,A\xrightarrow{\text{变换}}B$ 成立；
  - $PAQ=B$ 或 $r(A)=r(B)\Leftrightarrow A,B$ 等价；
- **相似**
  - 对 $A_n,B_n,P^{-1}AP=B$ 成立；
  - $\lambda_A=\lambda_B$ 且 A,B 均可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 相似；
    若特征值相等但一个可相似对角化，另一个不行，则必然不相似。
- **合同**
  - 对 $A_n,B_n,P^\top AP=B$ 成立；
  - 惯性指数相同 $\Leftrightarrow$ 合同。

例题 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&5\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 t 为何值时，

I. A 是正定矩阵；

II. A,B 等价；

III. A,C 相似；

IV. A,D 合同。

方法 I. 由于 A 的一、二阶顺序主子式大于零，只需让其三阶主子式也即行列式大于零，此时 $t>0$;

II. 可以知道 $r(B)=2$, 因此 $r(A)=2$ 时二者等价，此时 $t=0$.

III. 显然 C 的特征值为 $1,3,5$, 且其显然可以相似对角化，因此只需令 A 特征值也为 $1,3,5$ 时就有二者相似，此时 $t=5$;

IV. 由于 $f=X^\top DX$ 的正负惯性指数分别为 $2,1$, 因此只需让 $f=X^\top AX$ 正负惯性指数与其相同即可，此时 $t<0$.

变换

仅可用行变换的有

- 求逆矩阵 $(A:E)\to(E:A^{-1})$;
- 极大无关组；
- 求解线性方程组（齐次/非齐次）；
- 求特征向量；

仅可用列变换的有列求逆矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$;

行列均可的有

- 求行列式 $|A|$;
- 求秩 $r(A)$;
- 初等矩阵的理解

  在不知道初等矩阵放在左边还是右边时，按行或按列理解都可以。

不能应用行列变换的有

- 求特征值；
- 化简矩阵等式。