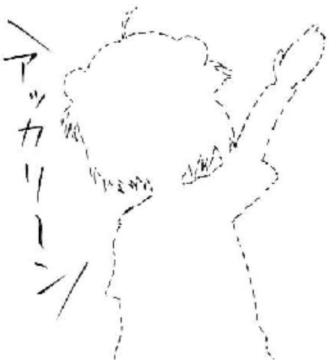

高等数学笔记

奇峰

之前

目录

第一章

函数、极限、连续

I. 函数

i.函数的性质

奇偶性

奇函数导数为偶函数; 偶函数导数为奇函数;

奇函数积分为偶函数; 偶函数积分不一定为奇函数.

且对

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

有

$$\begin{cases}\text{若}f(t)\text{可积}, & \text{则}F(t)\text{连续}\\ \text{若}f(t)\text{连续}, & \text{则}F(t)\text{可导，且}F'(t)=f(t)\end{cases}$$

有界性

(上、下) 界均为常数

$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$ 收敛.

证明 显然前者单调递增. 而

$$\begin{aligned}x_n&<1+\frac{1}{1\times 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\\&=1+1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\&\leq 2<\infty\end{aligned}$$

故其有上界，因而收敛. ■

注意，证明中**必须指出作为常数的上界的存在性**.

求导与有界的相关性

在一区间上，$f(x)$ 有界与 $f'(x)$ 有界相互无法推出，但是在一闭区间 $[a,b]$ 上，$f'(x)$ 有界可以推出 $f(x)$ 有界.

证明 只需证明 $\exists M', \forall x \in [a,b], |f'(x)| \leq M'$ 成立. 由于

$$\begin{aligned} |f(x)| = & \quad |f(x)-f(a)+f(a)| \\ < & \quad |f(x)-f(a)|+|f(a)| \\ \leq & \quad |f'(\varepsilon)|(b-a)+|f(a)| \end{aligned}$$

因此，令 $M' = |f'(\varepsilon)|(b-a)+|f(a)|$，则令前式成立的 M' 显然存在. ■

周期性

i. 周期函数的导数是周期函数，且周期一致;

ii. 周期函数的原函数不一定是周期函数;

iii. 周期函数之和不一定是周期的，如 $f(x)=\sin(2x), \quad g(x)=\cos(\pi x)$ 的和显然不是周期函数.

单调性

定义 1.1.1 单调性的等价定义

$\forall x_1 \neq x_2$, 有

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 & \text{则单增} \\ \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 & \text{则单减} \end{cases}$$

仅使用**单调增加 (减少)** 和**单调不减 (增)** 的概念.

ii.函数

函数的复合及反问题

仅考察**有分段函数参与的复合问题**.

初等函数

考研数学中常出现的非初等函数：

i. 分段函数;

ii. 绝对值函数;

iii. 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)$;

iv. 最值函数;

v. 取整函数 $[x]$，即不超过 x 的最大整数;

vi. 极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^{2n}}$;

vii. 变限积分函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

其中，对取整函数，有一例: 求

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D:\{x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\}$$

此时，由于 $x^2+y^2\leq\sqrt{2}$，对 D，可以在 $\rho=\sqrt{2}$ 处分块.

对变限积分函数，有

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

II. 无穷大与无穷小

i.无穷小的判定

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小 (量). 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大 (量).

无穷大 (小) 与极限过程有关.

ii.无穷小的性质

i. 无穷小与有界量之积仍为无穷小;

ii. 有限个无穷小之和仍为无穷小 (但无限个不一定);

iii. 有限个无穷小之积仍为无穷小 (但无限个不一定).

iii.无穷小的比较

i. $f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)\sim g(x)$;

ii. 分子分母上的乘积因式可等价代换;

iii. 分子分母上的代数和一般不能等价代换.

代数和求等价

i. 抓大头;

ii. 充分条件：若 $x \to x_0$ 时 $f(x) \sim f_1(x)$，$g(x) \sim g_1(x)$，且 $f(x) \nsim g(x)$，则 $f(x)-g(x) \sim f_1(x)-g_1(x)$;

iii. **泰勒展开**.

iv. 常用的等价无穷小及其替换定理

当 $x \to 0$ 时，有

- $\sin x \sim x$;
- $\tan x \sim x$;
- $\arcsin x \sim x$;
- $\arctan x \sim x$;
- $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
- $e^x - 1 \sim x$;
- $\ln(1+x) \sim x$;
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

对于以上等价无穷小，有

i. 可变量代换。如 $\sin \square \sim \square,\ \tan \square \sim \square, \cdots$ ；

ii. $x \to 0$ 时，$a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a,\ \log_a(1+x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln a} \sim \frac{x}{\ln a}$；

iii. 若 $x \to a$ ，可以令 $t = x - a \to 0$ 。

广义等价

若有 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ，则称 $x \to x_0$ ，$f(x) \sim g(x)$ ，如在 $x \to 0$ 时，$(1+\cos x)^2 \sim 4,\ e^x + 1 \sim 2$

定义 1.2.1 广义等价替换定理

若 $x \to x_0$ 时，$f(x) \sim f_1(x),\ g(x) \sim g_1(x)$ ，则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

注：

i. 分子分母上的乘积因式可等价代换；

ii. 分子分母上的代数和一般不能等价代换；

iii. 若 $x \to x_0$ ，总可以令 $t = x - x_0 \to 0$ 。

等价替换三步骤：

i. 判断形态；

ii. 化简：

(a) 等价代换

(b) 四则运算

(c) 变量代换

(d) 恒等变换

iii. 泰勒展开/洛必达法则。

v.无穷小的阶

定义 1.2.2 无穷小阶的定义

设 $x \to x_0$ 时 $f(x), g(x)$ 无穷小，若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g^k(x)} = k \neq 0$ ，则称 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小，也称与 $g^k(x)$ 同阶。

vi.极限和无穷小的关系

对于极限和无穷小，

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{其中} \lim \alpha(x) = 0$$

常用于已知抽象函数一表达式极限时求该函数另一表达式的极限。

vii.无穷大

定义 1.2.3 无穷大的定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \forall M \geq 0$,$\exists\, \delta > 0$,使得 $\forall x \in \bigcup\limits_{\delta}^{o}(x_0)$,有 $|f(x)| > M \Leftrightarrow f(x) < -M \text{或} f(x) > M$。

定义 1.2.4 有界和无界的定义

若 $f(x)$ 在 x_0 附近一区间 E 有界，则 $\exists M \geq 0$ ，使得 $\forall x \in E$ ，有 $|f(x)| \leq M$，反之则无界。

无穷大必无界，反之不一定。例：

i. $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x_2}\sin(\frac{1}{x})$ 无界，非无穷大；

ii. $x \to 0$ 时，$f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x_2}\sin(\frac{1}{x})$ 无界，非无穷大；

iii. 数列 $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ 无界，无穷大；

iv. 数列 $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$ 无界，无穷大；

v. 数列 $1, 0, 2, 0, \ldots, n, 0, \ldots$ 无界，非无穷大。

viii.无穷大与无穷小的关系

在 x 的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

III. 极限

i.极限概念

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$ ，当 $n > N$ ，有 $|x_n - A| < \varepsilon$ ，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 。

设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ ，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称函数 $f(x)$ 收敛于 A ，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 。

$f(x)$ 在 x_0 上是否有定义与该极限是否存在没有关系。

ii.性质

保序性

定理 1.3.1 保序性

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, 若 $a < b$，则 $\exists\ N \in \mathbb{N}$ ，$\forall n \geq N$，有 $x_n < y_n$ 。

当 $a \leq b$ 时，该性质不再成立。

推论 1.3.1 保号性

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，若 $a \leqslant 0$ ，则 $\exists\ N \in \mathbb{N}$ ，$\forall n \geq N$，有 $x_n \leqslant 0$ 。

定理 1.3.2

若 $x_n \leq y_n$ ，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ ，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ ，则有 $a \leq b$ 。

定理 1.3.3

设 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{n\to x_0} g(x) = b$, 若 $a < b$，则 $\exists\ \delta > 0$ ，$\forall x \in \overset{o}{\bigcup\limits_{\delta}}(x_0)$ 有 $f(x) < g(x)$ 。

当 $a \leq b$ 时，该性质不再成立。

推论 1.3.2

设 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x)=a$，若 $a\leqslant 0$ ，则 $\exists\ \delta>0$ ，$\forall x\in \overset{o}{\bigcup\limits_{\delta}}(x_0)$ 有 $f(x)\leqslant 0$ 。

定理 1.3.4

若在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x)\leq g(x)$ ，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ ，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ ，则 $a\leq b$ 。

唯一性

定理 1.3.5 唯一性

设 $\lim f(x)=A$ ，$\lim f(x)=B$ ，则 $A=B$ 。

局部有界性

定理 1.3.6

收敛数列必有界。即，若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\exists M\geq 0$ ，$\forall n\in\mathbb{N}$ ，都有 $|x_n|\leq M$ 。

定理 1.3.7

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ，则 $\exists M\geq 0$,$\exists\delta>0$ 使 $\forall x\in \overset{o}{\bigcup\limits_{\delta}}(x_0)$ 有 $|f(x)|\leq M$ 。

iii.极限存在定理

夹逼定理

定理 1.3.8 夹逼定理

若数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足

i. $y_n<x_n<z_n$ ；

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ ，其中 a 是常数；

则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 。

对于 n 项和的极限，常见的求法有

i. 直接求和；

ii. 夹逼定理；

iii. 定积分定义；

iv. 数项级数求和。

两个常见的极限

i. $\forall a>0, \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ ；

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$ 。

单调有界原理

- 数列单调递增有上界必收敛；
- 数列单调递减有下界必收敛。

注意，

i. 常用于证明无通项公式的数列收敛，如
   - 由递推公式给出的数列；
   - 不等式；
   - 方程的根；

ii. **必须先证明收敛性**，再求极限。

iv.重要极限

以下是部分重要的极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$$

对以上极限，可以应用变量代换。

v.极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)$ 存在且等于 A ，$\lim g(x)$ 存在且等于 B ，那么

i. $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 存在且为 $A\pm B$ ；

ii. $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 存在且为 AB ；

iii. 若 $B\neq 0$ ，$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且为 $\frac{A}{B}$ 。

若 $\lim f(x)$ 存在但 $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim f(x)\star g(x)$ 不存在，其中 $\star$ 为任意四则运算符。

广义极限四则运算

- 若 $\lim f(x)$ 存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$ ；

- 若 $\lim f(x)$ 存在且不为 0，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$ ；
- 若 $\lim f(x)$ 存在且不为 0，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 。

注意，这里不要求也无法直接给出 $\lim g(x)$ 的存在性。

vi.洛必达法则

定理 1.3.9 $\frac{0}{0}$ **形式的洛必达法则**

设

i. $\lim f(x)=0,\lim g(x)=0$;

ii. x 变化过程中，$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在；

iii. $\frac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)}=A(\text{或}\infty)$ ，

则 $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=A(\text{或}\infty)$ 。

定理 1.3.10 $\frac{\infty}{\infty}$ **形式的洛必达法则**

设

i. $\lim f(x)=\infty,\lim g(x)=\infty$;

ii. x 变化过程中，$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在；

iii. $\frac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)}=A(\text{或}\infty)$ ，

则 $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=A(\text{或}\infty)$ 。

注意：

i. 对非以上两种情况的未定型 $(0\cdot\infty;\infty-\infty;1^\infty;0^0;\infty^0$)，将其变为以上两种情况。其中，对于 $\infty-\infty$ 型，可以采用的方法有

   (a)（有分母时）通分；

   (b)（有无理数时）有理化；

   (c) 倒代换。

ii. 优先应用等价代换、四则运算、变量代换以及恒等变换化简后再应用洛必达法则；

iii. 注意要求 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 的存在性；

iv. 洛必达法则是充分非必要的；

v. 已知极限（连续、可导）求参数时，**慎用**洛必达法则。

vii.海因定理

定理 1.3.11 海因定理

若函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ ，则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$ 。

注意：对数列，必须先应用海因定理才能使用洛必达法则。

viii.关于极限的命题

极限命题 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均存在且相等。

常用于

- 分段点处求极限；
- $x\to x_0$ 而极限式中含 $\frac{1}{x-x_0}$；此时，有

$$\begin{aligned} x\to x_0^+ \quad & \tfrac{1}{x-x_0}\to\infty \\ x\to x_0^- \quad & \tfrac{1}{x-x_0}\to-\infty \end{aligned}$$

极限命题 2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$

极限命题 3

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=0$

极限命题 4

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 成立，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 也成立。

极限命题 4 推论

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ 成立，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 也成立。

极限命题 5

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\exists}{=} l\neq 0$ ，则

i. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ ；

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)=\infty$ ；

常用于已知极限求参数。

IV. 连续与间断

i.连续的概念

连续

定义 1.4.1 连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，若 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于 x_0 处函数值 $f(x_0)$ ，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。

定义 1.4.2 连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，若 $x \to x_0$ 时，若自变量的变化量 Δx (初值为 x_0) 趋近于 0 时，相应函数的变化量 Δy 也趋近于 0 ，也即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y=0$$

或者

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。

事实上，以上的两个定义完全等价。

左右连续

定义 1.4.3 左、右连续的定义

设函数 $y=f(x)$ ，若 $\lim\limits_{x \to x_0^{+(-)}} f(x)=f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点处左（右）连续。

左右连续与连续之间的关系

定理 1.4.1

$$f(x)\text{在}x_0\text{点连续} \Leftrightarrow f(x)\text{在}x_0\text{点左连续且右连续}$$

也即

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x)=\lim_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

常用于讨论分段函数的分界点处的连续性。

ii.连续函数的运算性质

- **四则运算性质** - 在区间 I 连续的函数和、差、积以及（分母不为 0 时）商在区间 I 仍然连续。
- **复合函数连续性** - 由连续函数经过有限次复合而成的复合函数在其定义区间内仍是连续函数。
- **反函数连续性** - 在区间 I 连续且单调的函数的反函数，在对应的区间内仍然连续且单调。
- **初等函数连续性** - 初等函数在其定义区间内连续。

以上结论是可显然可易证的。

iii.闭区间上函数的性质

定理 1.4.2 最值定理

若 $f(x) \in C[a,b]$ ，则在 $[a,b]$ 上必然存在最大值 M 和最小值 m 。

定理 1.4.3 介值定理

若 $f(x) \in C[a,b]$，且其最大值与最小值分别为 M, m ，则对于任意介于 m 和 M 的 c ，都存在至少一个 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = c$ 。

注意：

- 对连续函数，函数值的平均值还是函数值。
- 常见的平均值：
  - 算数平均值
    $$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$
  - 几何平均值
    $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(x_n)}, \quad (f(x_i) \geq 0)$$
  - 加权平均值
    $$\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} k_i}, \quad k_i > 0$$
    或者
    $$\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i), k_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = 1$$

定义 1.4.4 零点定理

若 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$ ，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$，也即 ξ 为函数的一个零点。

注意：

i. 可将其应用于证明方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上至少有一根。

ii. 零点定理的变形 - 若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)\leq 0$ ，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$，也即 ξ 为函数的一个零点。

iv.函数连续的常见命题

连续命题 1

$f(x)$ 在区间 I 上连续 $\Rightarrow |f(x)|$ 在区间 I 上连续。

连续命题 2

$f(x),g(x)$ 在区间 I 上连续 $\Rightarrow \max(f,g),\min(f,g)$ 在 I 上连续。

v.间断点及其分类

定义

定义 1.4.5 间断点

设函数 $f(x)$

- 在 $x=a$ **的一去心邻域内有定义** ；
- 在 $x=a$ 处不连续，

则称 $x=a$ 为一个间断点。

注意，

- 定义区间的端点；
- 孤立点

一般不是间断点。

间断点的分类

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一间断点，

i. 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 均存在，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一个第一类间断点，其还能**且必须要**分为

- $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 时 - 可去间断点；

- $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ 时 - 跳跃间断点；

ii. 若 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 中有至少一个不存在，则称其为第二类间断点。

可能存在间断点的地方：

- 初等函数的无定义点；
- 分段函数的分段点。

第二章
一元函数的微分学

I. 导数

i.导数的概念

定义 2.1.1 导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，因变量 y 相应地有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处的导数，也称微商，记作

$$f'(x)\text{或 } y'|_{x=x_0}\text{ 或 }\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导。若上述极限不存在，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导。

导数定义的等价变形

导数定义可以等价变形为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+x_0)-f(x)}{x-x_0}$$

前者适合用于求导函数。

注意：

- 定义式中分子和分母的增量必须相对应，如

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\neq f'(x)$$

- 在定义式中，分子中两项应当“一动一静”，否则无法推出可导性。注意，

$$f(x)\text{在}x_0\text{处可导}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

  $\Leftarrow$ 反例：$f(x)=|x|$ ，$x_0=0$ ；

- 若已知 $f(x)$ 在一点 x_0 可导，则可能可以利用导数定义。

定义 2.1.2 左、右导数

若

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\exists}{=} f'_-(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，$f'_-(x_0)$ 称为其左导数；若

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\exists}{=} f'_+(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，$f'_+(x_0)$ 称为其右导数；

函数在区间上的可导性

- 若对 $\forall x \in (a,b)$ 有 $f(x)$ 在 x_0 可导，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导；
- 若对 $\forall x \in (a,b)$ 有 $f(x)$ 在 x_0 可导，且其在 a 点右可导，在 b 点左可导，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导；

ii.函数可导的条件

定理 2.1.1 函数可导的必要条件

可导必连续。

$\Leftarrow$ 反例：

- $f(x) = |x|, x_0 = 0$ ；
- $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0$ 此时其左右导数均无穷大。

定理 2.1.2 函数可导的充要条件

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在且相等。

其常用于：

i. 已知可导性求参数；

ii.（后者）分段函数分段点的可导性。

iii.导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处导数 $f'(x_0)$ **存在**，则在几何上，$f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率，即

- 切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ；
- 法线方程 $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ；

注意：

- 求切法线的步骤：
  i. 求切点坐标；
  ii. 求斜率；
  iii. 写方程。
- 可用于处理
  - 显函数 $y=f(x)$ ；
  - 隐函数 $F(x,y)=0$ ；
  - 参数方程、极坐标方程，极坐标时可以代 r 入 θ 。

iv.导数的运算

以下是一些基本初等函数的导数公式：

$$
\begin{aligned}
&(c)'=0 && (x^a)'=ax^{a-1}\\
&(\sin x)'=\cos x && (\cos x)'=-\sin x\\
&(\tan x)'=\sec^2 x && (\cot x)'=-\csc^2 x\\
&(\sec x)'=\tan x\sec x && (\csc x)'=-\cot x\csc x\\
&(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} && (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\\
&(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} && (\mathrm{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}\\
&(a^x)'=a^x\ln a && (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}
$$

注意到对于三角函数，带有“正”字的正弦、正切、正割、反正弦、反正切的导数都不包含负号，而带有“余”字的余弦、余切、余割、反余弦、反余切的导数都包含负号。

导数的四则运算法则

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x 点可导，则

i. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$ ；

ii. $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ ；

iii. $\frac{f(x)}{g(x)}'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$，其中要求 $g(x)\neq 0$ ；

注意，若 $f(x)$ 可导但是 $g(x)$ 不可导于 $x=x_0$ ，则 $f(x)\pm g(x)$ 也不可导于 $x=x_0$ 。

可以将和、差、积的公式推广至有限多个。对乘法，有

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)'=\sum_{i=1}^{n}\left(f_i'(x)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x)\right)$$

行列式函数求导

行列式函数求导可以按行或按列求导。

如对二阶行列式函数，有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})' \\ &= a_{11}a_{12}' + a_{11}'a_{22} - a_{12}a_{21}' - a_{12}'a_{21} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22}' \end{bmatrix}\end{aligned}$$

复合函数求导

设 $y = f(u)$ ，$u = \varphi(x)$ ，若 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，且 $f(u)$ 在对应的 u 处可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

对应地，有

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

隐函数求导数

设 $y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x})$$

常见初等函数的 n 阶导数公式

i. $y = e^x \Rightarrow y^{(n)} = e^x$;

ii. $y = a^x(a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$;

iii. $y = \sin x \Rightarrow y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$;

iv. $y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$;

v. $(\frac{1}{x+a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

vi. $y = \ln(x + a) \Rightarrow y^{(n)} = (\frac{1}{x+a})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

II. 微分

i.微分的概念

定义 2.2.1 微分

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有增量 Δx 时，若函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ 可以表为 $\Delta y=A(x_0)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$ ，其中 $A(x_0)$ 与 Δx 无关，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，Δy 中的主要线性部分（也称**线性主部**）$A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x+0}$$

ii.可微与导数的的关系

定理 2.2.1 可微与导数的关系

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $\mathrm{d}x|_{x=x_0}=A(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$

一般地，$y=f(x)$ 则有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ ，故导数 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 也称微商，即微分之商。

iii.微分公式与法则

- $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm\mathrm{d}g(x)$;
- $\mathrm{d}[f(x)\cdot g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$;
- $g(x)\neq 0$ 时，$\mathrm{d}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}$.

III. 微分中值定理

i.罗尔定理

定理 2.3.1 罗尔定理

若函数满足

i. 在闭区间 $[a,b]$ 连续；

ii. 在开区间 (a,b) 可导；

iii. $f(a)=f(b)$ ，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$ 。

注意：

- 常用于证明**形如** $f(x)=g(x)$ 的方程在一开区间上有根；
- 难点：
  - 构造区间；
  - **构造辅助函数**，其中 $F(x)$ 一般为 $f(x)-g(x)$ 的原函数，或 $f(x)-g(x)$ 的解。

构造辅助函数的方法

i. 将等式化为方程；
ii. 变形，直到能够积分为止；具体而言，可以
   - 同乘同除一因式；
   - 添加能正负相消的两项。
iii. 取不定积分；
iv. 整理，直到满足其在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导为止

注意，以上方法在草稿纸上，不注重严谨性。

不难发现，

- $f(x)g'(x)-f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{-g(x)}$ ；
- $f(x)+f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{x}$ ；
- $f(x)-f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{-x}$ ；
- $f(x)+\lambda f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{\lambda x}$ ；

ii.拉格朗日中值定理

定理 2.3.2 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足

i. 在 $[a,b]$ 上连续；

ii. 在 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$ ；

注意：

i. 证明：令 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 并且利用罗尔定理；

ii. 可证方程在开区间 (a,b) 上有根；

iii. 可证不等式；

iv. 出现一函数增量 $\Rightarrow$ 利用拉格朗日中值定理；

v. 联系 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的桥梁；

vi. 与割线有关。

推论 2.3.1 拉格朗日中值定理推论

- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数；
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv k$ ，则在 (a,b) 上 $f(x)=kx+c$ ，其中 c 为常数。

IV. 柯西中值定理

定理 2.4.1 柯西中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

i. 在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续；

ii. 在开区间 (a,b) 内皆可导；

iii. 且 $g'(x)\neq 0$ ；

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(a<\xi<b)$ 。

注意：

i. 证明：令 $F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)-f(x)$，利用罗尔定理可证；

ii. 可证方程有根；

iii. 出现两个函数增量 $\Rightarrow$ 使用柯西中值定理证明；

iv. 若要求两个不同的中值，则寻求一特殊点 c 将 a,b 分为两子区间，并分别运用中值定理，如罗尔定理。

V. 泰勒中值定理

定理 2.5.1 带拉格朗日余项的泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的一邻域 $U_\delta(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则对 $x \in U_\delta$ ，有

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中，$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 ，$R_n(x)$ 称为拉格朗日余项。

定理 2.5.2 带皮亚诺余项的泰勒定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 n 阶导数，则

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$, $x \to x_0$ 称为皮亚诺余项。

以下是一些常用函数的带皮亚诺余项的马克劳林展开式。

- $e^x = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(2n)$;
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n);$
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3);$
- $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$, 其中 $C_\alpha^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$;
- $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + o(x^n);$

注意，对于泰勒公式，

i. (a) 可证不等式；
   (b) 可证方程有根；
   (c) 可求等价函数；
   (d) 可求极限；
   (e) 可求高阶导数值；
   (f) 可近似计算。

ii. 在不等式证明、方程有根题目中应用拉格朗日余项，否则应用皮亚诺余项。

iii. 题目出现高阶 (至少 2 阶) 导数 $\Rightarrow$ 可能应用泰勒中值定理。

iv. 一般在导数已知的点展开。

求高阶导数值时，

i. 求高阶导函数并代入 $x = x_0$ (不推荐)；

ii. 泰勒公式；

iii. 奇偶性。

VI. 导数应用

i.函数单调判定定理

定理 2.6.1 函数单调判定定理

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，若恒有 $f'(x) > 0(< 0)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增 (递减)；若恒有 $f'(x) \geq 0(\leq 0)$，则其在 (a,b) 内单调不减 (不增)。

注意，

- 此为充分不必要条件；
- 成立条件：要求一区间，而非一点。反例：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- 可证不等式。

VII. 极值

i. 定义

定义 2.7.1 极值

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，$x_0 \in (a,b)$ ，则

- 若 x_0 存在一邻域 U ，使得对 U 内任一点 $x \neq x_0$，都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值，x_0 为 $f(x)$ 一个极大值点；
- 若 x_0 存在一邻域 U ，使得对 U 内任一点 $x \neq x_0$，都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极小值，x_0 为 $f(x)$ 一个极小值点；

函数的极大值和极小值统称极值。极大值点与极小值点统称极值点。

ii. 极值的必要条件

- 若 $f'(x_0) = 0$ ，则称 x_0 为一个驻点；
- 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，而 $f(x_0)$ 为极值，则 $f(x_0) = 0$；
- 极值点 $\not\Leftrightarrow$ 驻点，如 $f(x) = |x|, x = 0$ ；
- 可能的极值点：
  - $f'(x) = 0$ 处；
  - $f'(x)$ 不存在处。

iii. 极值的充分条件

定理 2.7.1 极值第一充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内可导，$f'(x_0)$ 不存在或等于 *0*，则

i. 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点 x 处有 $f'(x) > 0$ ，而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点 x 处有 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；

ii. 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点 x 处有 $f'(x) < 0$ ，而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点 x 处有 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点；

iii. 若 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点处导数同号，则 $f(x_0)$ 不为极值，x_0 不为极值点。

定理 2.7.2 极值第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$ ，$f''(x_0) \neq 0$ ，则

- 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；
- 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点。

VIII. 最大值、最小值问题

极值与最值的区别有

i. 前者局部，后者整体；

ii. 最值可为区间端点，极值不可以；

iii. 区间内部最值必为极值。

最值可用于证明不等式。

应用问题的最值求法的步骤如下。

i. 设出合适的自变量；

ii. 表示出目标函数；

iii. 求目标函数的最值。

i.凹向与拐点

定义 2.8.1 凹凸性

设 $f(x)$ 在区间 I 连续，若对任意两点 $x_1 \neq x_2$ ，都有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})>(<)\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸 *(凹)* 的。

几何上，若曲线 $y=f(x)$ 上任意两点割线在曲线下 (上)，则 $y=f(x)$ 是凸 (凹) 的。

若 $f(x)$ 有切线，而每一点的切线都在曲线之上 (下)，则称 $y=f(x)$ 是凸 (凹) 的。

定理 2.8.1 凹凸判定定理

设函数在 (a,b) 上有二阶导数，

- 若对任意 $x\in(a,b)$ 都有 $f''(x)>0$ ，则称 $f(x)$ 是凹函数；
- 若对任意 $x\in(a,b)$ 都有 $f''(x)<0$ ，则称 $f(x)$ 是凸函数；

定义 2.8.2 拐点

连续曲线上凹凸的分界点是曲线的拐点。

定理 2.8.2 二阶可导点为拐点的必要条件

若 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点，且 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x_0) = 0$ 。

定理 2.8.3 二阶可导点为拐点的充分条件

设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，在 x_0 的一去心邻域内二阶可导，

i. 若二阶导函数在 $x = x_0$ 两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为一拐点；若同号，则不是拐点；

ii. 若在 x_0 处二阶导数为零，而三阶导数不为零，则其为拐点；若三阶导数也为零，则不是拐点。

注意，$f'(x)$ 的极值点事实上就是 $f(x)$ 的拐点横坐标。

求拐点的步骤：

i. 求 x_0 使得 $f''(x_0) = 0$ 或不存在；

ii. 判断；

iii. 写拐点。

ii.渐近线定义及其求法

水平渐近线

若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ，则称 $y = b$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$ 时同理。

垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$，则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线，也叫铅直渐近线。

斜渐近线

若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (kx + b) = 0\ (x \to -\infty)$ ，则称 $y = kx + b$ 为斜渐近线。

具体而言，若

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ；

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - kx = b$ ，

则有斜渐近线 $y = kx + b$ 。$x \to -\infty$ 时同理。

注意，一侧不会同时存在水平渐近线和斜渐近线。

IX. 曲率及曲率半径

曲率为

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径 ρ 为 k 的倒数。

第三章 一元函数积分学

I. 不定积分

i.原函数

定义 3.1.1 原函数

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $F'(x)=f(x)$ 在区间 I 上成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数。

注意，原函数存在 $\Rightarrow$ 有无穷多个，每个原函数之间仅差一个常数。

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数，但是其不一定是初等函数，如 $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$,$\int \cos x^2 \mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,$\int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$, $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 等，称其为“积不出来”。

若 $f(x)$ 在区间 I 上存在第一类间断点或第二类中的无穷间断点，则其在该区间内没有原函数。

注意，函数在区间内有震荡间断点的，可能有原函数。

ii.不定积分

定义 3.1.2 不定积分

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数 $\{F(x)+C\}, C\in\mathbb{R}$ 为 $f(x)$ 在 I 的不定积分，记为 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$。

不定积分基本性质

设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ ，其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 一原函数，C 为一常数，则

- $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$;
- $[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$;
- $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$;
- $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$;

基本积分公式

C 为任意常数，则

i. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$；

ii. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

iii. $\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\ (a>0,a\neq 1)$，特别地，$\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+C$；

iv. $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

v. $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

vi. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$；

vii. $\int -\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\cot x+C$；

viii. $\int \frac{\tan x}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos x}+C$；

ix. $\int \frac{\cot x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sin x}+C$；

x. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C=-\mathrm{arccot}x+C$；

xi. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C$；

iii.不定积分法

第一换元法 (凑微分)

设 $g(\varphi(x))=f(x)$，则计算的原则是

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x&=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x\\&=\int g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\\&=F(\varphi(x))+C\end{aligned}$$

常见的凑微分形式如下。

i. $\int f(ax+b)(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)(a\neq 0)$；

ii. $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)(an\neq 0)$；

iii. $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

iv. $\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$；

v. $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$；

vi. $\int f(a^x)a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)$, 特别地，$\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x=\int f(e^x)\mathrm{d}(e^x)$；

vii. $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$；

viii. $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$;

ix. $\int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$;

x. $\int \frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$;

xi. $\int f(\sec x)\sec x\tan x\mathrm{d}x = \int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x)$;

xii. $\int f(\csc x)\csc x\cot x\mathrm{d}x = -\int f(\csc x)\mathrm{d}(\csc x)$;

xiii. $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$;

xiv. $\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int f(\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x)$;

xv. $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$;

xvi. $\int \frac{f(\mathrm{arccot} x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\int f(\mathrm{arccot} x)\mathrm{d}(\mathrm{arccot} x)$;

xvii. $\int \frac{f(\arctan \frac{1}{x})}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\int f(\arctan \frac{1}{x})\mathrm{d}(\arctan \frac{1}{x})$;

xviii. $\int \frac{f|ln(x+\sqrt{x^2+a^2})|}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \int f|ln(x+\sqrt{x^2+a^2})|\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt(x^2+a^2)))$;

xix. $\int \frac{f|ln(x+\sqrt{x^2-a^2})|}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \int f|ln(x+\sqrt{x^2-a^2})|\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt(x^2-a^2)))$;

xx. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C\ (f(x)\neq 0)$.

第二换元法

设 $x=\varphi(t)$ 具有连续导数且单调，且 $\varphi'(t)\neq 0$ ，若

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C$$

则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C = G[\varphi^{-1}(x)]+C$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

第二换元法多用于根式的被积函数，通过换元法去根式，具体而言，可以分为两类。

i. 被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 或由 e^x 构成的代数式的根式，则令 $\sqrt[n]{g(x)}=t$，使得 $x=\varphi(t)$ 中不再含有根式，此时做变量代换 $x=\varphi(t)$ 即可。

ii. 被积函数含有 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}(A\neq 0)$ 时，先根据 A 的符号将其整理为 $\sqrt{A[(x-x_0)^2\pm l^2]}$ 或 $\sqrt{-A[l^2-(x-x_0)^2]}$ ，然后做三角替换。

(a) 根式形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，做 $x=a\sin t$，此时 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ；

(b) 根式形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，做 $x=a\sec t$，此时 $t\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{pi}{2},\pi]$

(c) 根式形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，做 $x=a\tan t$，此时 $t\in(-\frac{pi}{2},\frac{pi}{2})$ 。

分部积分法

对 $\int uv'\mathrm{d}x$ ，有

$$\int uv'\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

注意，

- 被积函数为两类函数乘积；
- 凑微分的优先性：指数 > 三角函数 > 幂函数。

注意，不定积分结果中一定包含常数 C ，**即使在计算过程中积分号下内容相消干净。**

iv.特殊类型的不定积分

有理分式的不定积分

定理 3.1.1

任何实系数多项式在实数域内均可分解为一次因式和二次因式的乘积。

定理 3.1.2

设 $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 是有理真分式，若在实数域内分母 $Q_n(x)$ 可因式分解为

$$Q_n(x) = (x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta$$

则有

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(x-a)^i} + \sum_{i=1}^{\beta} \frac{C_i x + D_i}{(x^2+px+q)^i}$$

其中 A_i, B_i, C_i, D_i 等系数都是实数。

具体而言，其步骤为

i. 将假分式分为多项式和真分式；
ii. 将真分式分母整理至最简；
iii. 裂项，分别积分。

求待定系数时，去分母，并注意

- 多项式相等条件：同次数的系数相等；
- 待定系数的个数为分母次数。

分母次数大于 4 的时候，一般不用裂项法，而是寻求特殊方法。

待定系数时可以代入特殊值。

三角有理函数的不定积分

三角有理函数指由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 进行有限次四则运算得到的函数。

三角有理函数的不定积分一般方法

利用万能代换，即 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，此时 $\sin x=\dfrac{2t}{t^2+1}$, $\cos x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $x=2\arctan t$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{1+t^2}$.

注意，应用万能代换时，x 的次数不应当超过一次，形如

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$$

特殊三角有理函数的积分

- 对
$$I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x$$
可以使用待定系数法，令
$$a\sin x+b\cos x=A(c\sin x+d\cos x)+B(c\sin x+d\cos x)'$$
其中 A,B 是待定系数，将其解出并代入原式，得
$$I=Ax+B\ln|c\sin x+d\cos x|+C$$
-
  - 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ ，令 $\cos x=t$ 并换元；
  - 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ ，令 $\sin x=t$ 并换元；
  - 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ ，令 $\tan x=t$ 并换元；
  - 针对上一条，若 R 形如
  $$\int\sin^{2m}x+\cos^{2n}x\mathrm{d}x$$
  其中 $m,n\in N$ ，则应使用二倍角公式降幂。

II. 定积分

i.定积分概念

定义 3.2.1

将 $[a,b]$ 任意地划分为 n 个小区间 $a=x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ ，细度 $d=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$, ξ_i 为 $[x_{i-1},x_i]$ 任意一点；则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{d\to 0}\sum_{i=i}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

若上述极限存在。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上确有定积分，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。

定理 3.2.1 连续必可积

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。

定理 3.2.2

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，且在 $[a,b]$ 中仅有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。

定理 3.2.3 可积必有界

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则其在 $[a,b]$ 有界。

定理 3.2.4 定积分值的变量符号无关性

定积分的值与积分变量的符号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

利用定积分定义求极限

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=i}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}(b-a))\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

具体而言，其步骤为

- 令 Δx_i 为 $\frac{1}{n}$ 或 $\frac{k}{n}$；
- 取 ξ_i 的位置，如
  - ξ_i 取右端点：$a+\frac{i}{n}(b-a)$；
  - ξ_i 取左端点：$a+\frac{i-1}{n}(b-a)$；
  - ξ_i 取中点：$a+\frac{2i-1}{2n}(b-a)$；
  - ξ_i 取三等分点：$a+\frac{3i-2}{3n}(b-a)$；
  - ξ_i 取三分之二等分点：$a+\frac{3i-1}{3n}(b-a)$ 等等。
- 求 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1, b=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$
- 将求得的 a,b 用于验证 Δx_i 的取法是否正确，即是否有 $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a$ 。

n 项和的求和方式：

- 直接求和；
- 夹逼定理；
- 定积分定义；
- 数项级数。

定积分的几何意义

定积分的几何意义为面积的代数和。

ii.定积分的性质

i. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;

ii. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;

iii. $\int_a^b [k_1 f_1(x)] + k_2[f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$;

iv. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，即使 $c \notin [a,b]$;

v. 设 $a \le b$ ，$f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

vi. 设 $a < b$ ，$m \le f(x) \le M$ ，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$;

vii. 设 $a < b$ ，则 $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| < \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$;

viii. **定积分中值定理** - 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$;

ix. 称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的广义平均值。

注意，

- 定积分值与被积函数在有限个点上的值无关;
- 定积分中值定理可证方程有根。

iii.重要定理、公式、关系

定义 3.2.2 变上限函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则函数形如 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$ 称为变上限积分函数。

定理 3.2.5 变上限积分求导定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x)$。

注意，

- 设
$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$$
且 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，则有
$$F'(x) = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$
- 若 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个跳跃间断点，则 $F(x)$ 在 x_0 连续，但不可导;
- 若 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个可去间断点，则 $F(x)$ 在 x_0 处可导，但 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数。

定理 3.2.6 牛顿——莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任意原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

iv.定积分求法

利用牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

分部积分法

$$\int_a^b u'v\mathrm{d}x = \int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

其利用技巧与不定积分的分部积分法完全一致。

换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变量替换 $x=\varphi(t)$ 满足

i. $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或者 $[\beta,\alpha]$) 上连续；

ii. $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ ，且当 $\alpha<t<\beta$ 时，有 $a \leq \varphi(t) < b$ ，

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

v.常用的定积分公式

对称区间奇偶函数的积分公式

i. 设 $f(x)$ 是在区间 $[-a,a],(a>0)$ 上连续的偶函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

ii. 设 $f(x)$ 是在区间 $[-a,a],(a>0)$ 上连续的奇函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

可用于积分等式的方法：

i. 含有中值：积分中值定理；

ii. 不含中值：

- 积分区间分割；
- 换元法

周期函数的积分公式

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是以 T 为周期的周期函数，则对任意常数 a 、任意自然数 n 都有

i. $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

ii. $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

三角函数的积分公式

定理 3.2.7 ***Wallis*** **公式（分部积分推导）**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n} x\mathrm{d}x = \frac{(n-1)!!}{(n)!!}\cdot(\frac{\pi}{2})^{\texttt{(int)(!(n\%2))}}$$

注意，当被积函数中有自然数 n 时，通过分部积分法构造递推公式，并用递推公式推出结果。

三角函数的公式还有如下几个。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

其中，$ii)$ 利用了区间再现公式，具体而言，令 $t=a+b-x$ 即可。

难以计算原函数的积分称为变态积分。对变态积分的计算，可以

- 构造递推公式；
- 积分区间再现。

III. 定积分应用

i.平面图形求面积

直角坐标系下平面图形求面积

对于由 $x=x_1,x=x_2,y=f_1(x),y=f_2(x)(x_1<x_2,\forall x\in[x_1,x_2]f_1(x)>f_2(x))$ 围成的图形，有

$$S=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x$$

对于由 $y=y_1,y=y_2,x=f_1(y),x=f_2(y)(y_1<y_2,\forall y\in[y_1,y_2]f_1(y)>f_2(y))$ 围成的图形，有

$$S=\int_a^b[f_1(y)-f_2(y)]\mathrm{d}y$$

极坐标下的平面图形求面积

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

需要记住的平面曲线：

- 心型线 $r=a(1+\cos\theta)$;
- 摆线（旋轮线）;
- 星型线；
- 双扭线；
- 阿基米德螺线 $r=a\theta$;
- 对数螺线；
- 三叶玫瑰线 $r=\sin(3\theta),(0\le\theta\le\frac{\pi}{3})$;

ii.旋转体求体积

绕 x 轴旋转时，有 $\mathrm{d}V_x=\pi y^2\mathrm{d}x$ ，则体积为

$$V=\int_a^b\pi f(x)^2\mathrm{d}x$$

是为薄片法。

绕 y 轴旋转时，有 $\mathrm{d}V_y=2\pi xy\mathrm{d}x$ ，则体积为

$$V=\int_a^b2\pi xf(x)\mathrm{d}x$$

是为柱壳法。

iii.平均值

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的平均值为

$$\frac{\int_a^bf(x)\mathrm{d}x}{b-a}$$

iv.平行截面面积已知的立体体积

$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x, a<b$ ，其中 $A(x)$ 是待求体积立体截面面积。

v.平面曲线段的弧长

对曲线段 $y=f(x), x\in[a,b]$ ，设 $f(x)$ 有连续导数，则给定平面曲线段弧长元素和弧长分别为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x; s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

若曲线能表示为 $x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$，且其在 (α,β) 内有连续导数，则给定平面曲线段弧长元素和弧长分别为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{y'^2(t)+x'^2(t)}\mathrm{d}t; s=\int_a^b\sqrt{y'^2(t)+x'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

若曲线能表示为 $\rho=\rho(\theta), \theta\in[\theta_1,\theta_2]$，则给定平面曲线段弧长元素和弧长分别为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta; s=\int_a^b\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

vi.旋转曲面求侧面积

曲线 $y=f(x), x\in(a,b)$ 弧绕 x 轴旋转所得曲面表面积为 $S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)^2]}\mathrm{d}x$

曲线 $y=f(x), x\in(a>0,b)$ 弧绕 y 轴旋转所得曲面表面积为 $S=2\pi\int_a^b x\cdot\sqrt{1+[f'(x)^2]}\mathrm{d}x$

IV. 反常积分

定积分存在两种限制，由此可以引申出两种反常积分。对 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ，

- $[a,b]$ 必须是有限区间 $\Rightarrow$ 无穷区间上的反常积分；
- $f(x)$ 必须有界 $\Rightarrow$ 无界函数的反常积分。

i.无穷区间上的反常积分

$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 称为无穷区间上的反常积分，若其存在，则称该反常积分收敛，否则发散。

对 $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 同理。

对 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，将其拆成以上两种情况的反常积分，若二者都收敛，则称其收敛，否则称其发散。

注意，

i. 计算方法与积分类似，如 $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}=F(x)\Big|_{a}^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(a)$ ；

ii. 反常积分收敛时，适用对称奇偶性，否则不适用；

iii. p 积分：对 $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,\ a>0$, 当 $p>1$ 时积分收敛，$p\leq 1$ 时发散；

iv. 利用分部积分法时，可以先进行不定积分，然后再引入上下限。

定理 3.4.1 比较判别法

设 f 与 g 在 $[a,+\infty)$ 上非负且在任意区间 $[a,b],b<\infty$ 可积，且 $f\leq g$ ，$x\in[a,+\infty)$ ，则

i. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

ii. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定理 3.4.2 比较判别法

设 f 与 g 在 $[a,+\infty)$ 上非负，则

i. 若 $g(x)>0$ 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$ ，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同；

ii. 若当 $x\to+\infty$ 时，$f\sim g$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同。

定理 3.4.3 绝对收敛必收敛

若 $f(x)\in C[a,\infty)$ 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

ii.无界函数的反常积分

设 $\displaystyle\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$，则称 b 为瑕点，$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 为无界函数的反常积分，若其存在，称其收敛，否则其发散。

瑕点在区间左端点或区间内时类似。瑕点在区间内而拆成两个积分时，二积分全部收敛则收敛，否则发散。

注意，

i. 计算方法与积分类似，如 $\displaystyle\int_a^b=F(x)\Big|_a^b=\lim_{t\to b^-}F(t)-F(a)$ ；

ii. 反常积分收敛时，适用对称奇偶性，否则不适用；

iii. p 积分：对 $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,\ a>0$, 当 $p<1$ 时积分收敛，$p\geq 1$ 时发散；

iv. 利用分部积分法时，可以先进行不定积分，然后再引入上下限。

定理 3.4.4 比较判别法

设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty$ ，f,g 在 $[a,b)$ 非负且对任意 $\xi<b$ 都有在 $[a,\xi]$ 上可积，$f\le g$ ，则

i. 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

ii. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定理 3.4.5 比较判别法

设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty$ ，f,g 在 $[a,b)$ 非负

i. 若 $g(x)>0, x\in[a,b)$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\ne 0$ ，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同；

ii. 若当 $x\to b^-$ 时，$f\sim g$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同。

定理 3.4.6 绝对收敛必收敛

若 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 且 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

第四章
多元函数微分学

I. 多元函数微分法

i. 多元函数

定义 4.1.1 二元函数极限

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某去心邻域有定义，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得只要 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称当 (x,y) 趋近于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 的极限存在，值为 A，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或者 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$；否则，称为极限不存在。

注意，

i. 求二重极限可用的方法有

- 极限的四则运算；
- 夹逼定理；
- 等价代换；
- 重要极限；
- 无穷小与有界量积仍为无穷小；
- 连续性；
- 极坐标变换。

ii. 二重积分存在充要条件

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \Leftrightarrow \text{当}(x,y)\text{以任意形式趋近于}(x_0,y_0)\text{时都有}f(x,y)\to A$$

其逆否命题常用。

定义 4.1.2 二元函数连续

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 或者 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=0$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。若 $f(x,y)$ 在区域 D 中每一点均连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 内连续。

ii.偏导数

定义 4.1.3 偏导数

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，令 $y=y_0$ ，给 x 以增量 Δx ，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称其为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$ 或者 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或者 $\left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)}$ 。此外，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

y 的偏导数可以类似地定义。

注意，两偏导数在 (x_0,y_0) 处存在 $\not\Leftrightarrow$ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

定义 4.1.4 高阶偏导数

设对 $z=(x,y)$ 有 f'_x 和 f'_y ，则有

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}$ ；
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}$ ；
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$ ；
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$ ；

其中后二者称为混合二阶偏导数。

定理 4.1.1 二阶混合偏导数相等的充分条件

若对 $z=f(x,y)$ 有 f''_{xy} 与 f''_{yx} 于 (x_0,y_0) 连续，则有 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ 。

iii.全微分

定义 4.1.5 全微分

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ ，若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ ，仅与 x_0,y_0 有关，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\mathrm{d}f\right|_{(x_0,y_0)}$

注意，

$$z=f(x,y)\text{在}(x_0,y_0)\text{可微}$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\overbrace{f(x,y)-f(x_0,y_0)}^{\Delta z}-\overbrace{f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}^{\mathrm{d}z}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

定理 4.1.2 可微的必要条件

若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则

- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续；
- $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处均存在。

定理 4.1.3 可微的充分条件

若 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 均连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

多元函数几个概念的联系

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 连续} \\ f'_x(x,y)\text{ 和 }f'_y(x_0,y_0)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 均连续} & \longrightarrow & f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 可微} & & \\ & & & \searrow & f'_x(x,y), f'_y(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处均存在} \end{array}$$

iv.复合函数微分法

求二阶偏导数时，二阶偏导和一阶偏导的偏导结构相同。

v.隐函数求导

定理 4.1.4 隐函数存在定理

若有

- 函数 $F(x,y)$ 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某区域 $D \subset R^2$ 上连续；
- $F(x_0,y_0)=0$ *(称为初始条件)*;
- 在 D 内存在连续的偏导数 $F'_y(x,y)$ *;*
- $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$,

则在点 P_0 的某邻域 $\bigcup_{P_0} \subset D$ 内，方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定一个定义在区间 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内的隐函数 $y=f(x)$ ，使得

i. $f(x_0)=y_0$ 且 $x \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 时，$F(x_0, f(x_))\equiv 0$ *;*

ii. 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内连续。

对一方程 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求导数时，有三种方法。

i. 直接求导 - 对方程两边同时关于自变量求偏导，即

$$
\begin{aligned}
&F'_x\cdot 1+F'_y\cdot 0+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0\\
\Rightarrow&\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}
\end{aligned}
$$

对 y 同理；

ii. 全微分 - 对方程两边同时取全微分，有 $\mathrm{d}F(x,y,z)=0$ ，而

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}F(x,y,z)=F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y+F'_z\mathrm{d}z\\
\Rightarrow&\mathrm{d}z=-\frac{F'_x}{F'_z}\mathrm{d}x-\frac{F'_y}{F'_y}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

又 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ ，故有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$;

iii. 公式法 - 利用上述结论，直接求得 F'_x,F'_y,F'_z 代入。

其中，直接求导法应用广泛。

对方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定的隐函数 $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ ，求偏导数时，对每个方程求偏导，然后解关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的、新的方程组。

II. 多元函数极值

i.无条件极值

定义 4.2.1 无条件极值

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，若对该邻域内除 P_0 的任意一点 $P(x,y)$ 都有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ ，则称点 P_0 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；类似地，可以定义极小值点。前二者统称为极值点，极大值和极小值统称极值。

事实上，对 (x,y) 某去心邻域内的任意 (x_0,y_0) ，若总有 $\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$ ，则极值为极大值点；若 $\Delta f>0$ 时则为极小值点；若任意去心邻域内上述两条都不成立即不保号，则不是极值点。

定理 4.2.1 二元函数极值存在的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 某邻域有定义，且存在一阶偏导数，若 P_0 是极值点，则其必定为驻点。

注意，驻点 $\not\Leftrightarrow$ 极值点，仅当可微时极值点才是驻点。

对二元函数，可能的极值点仅需要注意驻点。

定理 4.2.2 二元函数极值存在的充分条件

函数 $z = f(x,y)$ 在 P_0 某邻域内有二阶连续偏导数，且 P_0 为驻点，设 $A = f''_{xx}(x_0,y_0), B = f''_{xy}(x_0,y_0), C = f''_{yy}(x_0,y_0)$ ，则

- $AC - B^2 > 0$ 时，P_0 是极值点，且若 $A > 0$ ，其为极小值点，$A < 0$ 时为极大值点；
- $AC - B^2 > 0$ 时其不是极值点；
- $AC - B^2 = 0$ 时该判别法失效，此时用定义，即判断 Δf 在 P_0 去心邻域是否保号。

事实上，该定义可以理解为

$$\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

当 $AC - B^2$ 判别法失效，判定保号性时，若难以正面判定，可以利用不同情况下的符号证明保号性不成立。

给定 $F(x,y,z)$ 求 $z = z(x,y)$ 极值时，对 F 关于 x,y 求偏导，并且令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都等于零，将得到的式子反带入 f 求解得到一组点，利用 $AC - B^2$ 判别法确定其其是否为极值点。

ii.条件极值

给定 $z = f(x,y)$ ，约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ ，求极值，解决方法是将其化为无条件极值，具体而言，可以

- 直接代入；
- 拉格朗日乘数法。

对于后者，令 $L = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ ，前者称为拉格朗日函数，λ 是拉格朗日乘数。对 L 关于 x,y,λ 都求偏导，解得驻点，利用实际意义判别驻点是否为极值。

有多个约束条件时，有拉格朗日函数 $L = f(x,y) + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ ，后面同理。

给定方程，在闭区域内求极值，则在边界与区域内部都求极值，然后比较。

III. 二重积分

i.性质

- $\displaystyle\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ ；
- $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y) \pm g(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$ ；

- $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ ，其中 $D = D_1 \cup D_2$ ，且后者除公共边界不重合；
- 若 $f(x,y) \leq g(x,y)$, $(x,y) \in D$ ，有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$ ；
- 对 $m \leq f(x,y) \leq M, (x,y) \in D$ ，有 $mS \leq \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq MS$ ，其中 S 为区域 D 的面积。
- $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$ ；
- 积分中值定理 - 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，S 为 D 的面积，必定存在 $(\xi,\eta) \in D$ 使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta) \cdot S$.

注意，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $f(x,y)$ 在 D 上有限条曲线上的值无关。

ii.二重积分的计算

可以将二重积分化为直角坐标下的二次积分计算。

设有界闭区域 $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ，其中 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$.

在 $D = \{(x,y)|c \leq y \leq d, \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}$ 上同理。

计算时，为了方便计算，可以考虑交换积分次序。

部分二重积分具有如下性质。

定理 4.3.1 对称性

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,y)\text{对}y\text{为奇函数} \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{对}y\text{为偶函数} \end{cases}$$

D 关于 y 轴对称，函数关于 x 轴对称时类似。

定理 4.3.2 轮换对称性

若积分域 D 关于 $y=x$ 对称，或相对于积分域两坐标轴的相对位置相同，又或者将 x,y 对调后，积分域的边界方程不变，则二重积分具有轮换对称性，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可以将二重积分化为极坐标下的二次积分计算，此时有 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

将直角坐标化为极坐标时，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

若积分域为圆或圆的一部分时，或被积函数中含有 x^2, y^2, xy, x^2+y^2 等 x, y 的二次函数，可以考虑应用极坐标。

第五章
微分方程

I. 概念

微分方程中未知函数的导数的最高阶为该微分方程的阶。

满足微分方程的函数称为微分方程的解。

通解为含有相互独立的方程阶数个任意常数的解。通解称为一般解，其不一定是全部解。

不在通解中的解是奇解。

不含有任意常数或任意常数确定后的解为特解。

II. 一阶微分方程

i.可分离变量的一阶微分方程

其形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ ，其微分形式为 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0.$

可以使用分离变量法，即将含有 x, y 分离到等式两边，然后取积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x.$

ii.一阶齐次微分方程

其形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\dfrac{y}{x})$ ，此时可令 $\dfrac{y}{x} = u$ ，然后应用分离变量法。

事实上，此时有 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = f(u)$.

iii.一阶线性微分方程

其形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ ，其中未知数及其导数次数为 1.

其有公式

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

其中包含三个不定积分，其常数 C 已经事先提出。

iv.全微分方程

一阶微分方程形如 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 时，称为全微分方程。

全微分方程的通解为

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y=C$$

v.伯努利方程

形如 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ 的方程是伯努利方程。此时令 $z=y^{1-n}$ 将其变为一阶线性方程。

III. 可降阶的高阶微分方程

形如 $y^{(n)}=f(x)$ 时

只需要积分 n 次即可得到方程通解。

不显含函数 y 的二阶可降阶方程 $y''=f(x,y')$

令 $y=p'(x)$ ，则有 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$ ，因而可以将原方程降为一阶。

不显含自变量 x 的二阶可降阶方程 $y''=f(y,y')$

令 $y'=p$ ，则有 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ ，因而可将其降为一阶。

在解可降阶高阶微分方程时，应当边解边确定常数，常数确定得越早越好。

IV. 高阶线性微分方程

i.高阶线性微分方程概念

n 阶的线性微分方程形如

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$$

其中若 $f(x)\equiv 0$ ，称方程为齐次的，否则为非齐次的。

ii.线性微分方程解的结构

考虑二阶线性微分方程，其有如下性质。

- 对二阶齐次线性微分方程的两特解 y_1, y_2 ，其任意一组线性组合都是同一方程的特解；若两特解线性无关，其线性组合为通解；
- 若 y_1, y_2 为二阶非齐次线性微分方程的两特解，则 $y_1 - y_2$ 是对应齐次方程的一特解；
- 若 $\hat{y}, y^*$ 分别为一二阶齐次线性微分方程以及与前者对应的非齐次方程的特解，则其和为对应非齐次方程的一特解；
- 若 $\hat{y}, y^*$ 分别为一二阶齐次线性微分方程的通解以及与前者对应的非齐次方程的特解，则其和为对应非齐次方程的通解；
- 对方程 $y''p_1(x)y' + p_0(x)y = f_1(x), y''p_1(x)y' + p_0(x)y = f_2(x)$ ，若其分别有特解 y_1, y_2, 则 $y_1 + y_2$ 为 $y''p_1(x)y' + p_0(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

iii.常系数齐次线性微分方程的求解

对二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ ，其中 p, q 为常数，其具有特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，根据特征方程的根，可以分为三种情况。

对 $\Delta = p^2 - 4p$,

i. 若 $\Delta > 0$ ，特征方程有二实根 λ_1, λ_2 ，此时方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数；

ii. 若 $\Delta = 0$ ，特征方程有一二重实根 λ ，此时方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数；

iii. 若 $\Delta < 0$ ，特征方程有一对共轭复根 $\alpha \pm \beta i$ ，此时方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。

事实上，以上是在复数域中对特征方程进行求解。

对 n 阶常系数齐次线性微分方程是类似的。对

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

其中 $p_i, i=1,2,\ldots n$ 为常数，有特征方程

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

特征根与方程通解的关系与二阶情形很类似。

- 若 λ_0 为特征方程的 k 重实根，则特征方程的通解中含有

$$e^{\lambda_0 x}\sum_{i=1}^{k} C_i x^{i-1}$$

- 若 λ_1 为特征方程的 k 重共轭复根，则方程通解中含有

$$e^{\alpha x}\left[\cos\beta x\sum_{i=1}^{k} C_i x^{i-1} + \sin\beta x\sum_{i=1}^{k} D_i x^{i-1}\right]$$

iv.二阶常系数线性非齐次微分方程的求解

对形如 $y''+py'+qy=f(x)$ 的二阶常系数线性非齐次微分方程，其通解的结构为 $y=\hat{y}+y^*$ ，其中 $\hat{y}$ 为对应齐次方程的通解，y^* 为本方程的一个特解。

对方程形如 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{ax}$, 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式，则原方程有一个特解形如

$$y^* = x^k Q_m(x)e^{ax}$$

其中 a 为 $\overset{\text{齐次特征方程}}{\lambda^2+p\lambda+q=0}$ 的 k 重根，将其代入原方程求 $Q_m(x)$.

对方程形如 $y''+py'+qy=e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\right]$, 其中 $P_l(x), P_n(x)$ 为 x 的 l,n 次多项式，则原方程有一个特解形如

$$y^* = x^k e^{ax}\left[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$$

其中 $m=\max(l,n)$ ，且若 $\alpha+\beta i$ 是齐次特征方程的一对共轭复根，则 $k=1$ ；否则 $k=0$.

代入原方程，求 $Q_m(x), R_m(x)$ 。

事实上，令 $\beta=0$ ，则后者转化为前者。

v.欧拉方程

形如 $x^n y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i x^{n-i} y^{(n-i)} = f(x)$ 的方程为欧拉方程。令 $x=e^t$ ，将其转化为以 t 为自变量的常系数线性方程。

具体而言，若设 $x=e^t$ ，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}y_t'; \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{y_t''-y_t'}{x^2}$$

第六章

无穷级数

I. 数项级数

i.数项级数概念

定义 6.1.1 数项级数

无穷多个数 $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ 按照一定的顺序相加得到的表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为数项级数，简称级数，其中 u_n 称为通项。

级数是无数个的，也是有序的。

定义 6.1.2 级数收敛

称 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 为级数的部分和，数列 $\{S_n\}$ 即为部分和数列。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \overset{\exists}{=\!=} S$ ，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且和为 S ; 反之，若极限不存在，则称其为发散的，发散级数没有和的概念。

以下是几个重要级数及其敛散性。

- 几何级数 - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n$ ，当 $|r| < 1$ 时，其收敛于 $\dfrac{a}{1-r}$; 若 $|r| \geq 1$ ，则其发散。
- p 级数 - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ ，若 $p > 1$ ，其收敛；若 $p \leq 1$ ，其发散。

事实上，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

II. 级数基本性质及其收敛必要条件

级数有以下性质。

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

- 在级数中增加、减少、改变有限项不会影响级数敛散性。
- 收敛级数具有结合律，即可以对级数的项任意地添加括号，新级数仍然收敛于同一个和。注意，去括号不成立。
- 对 $k \neq 0$ 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的敛散性。
- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

III. 正项级数及其敛散性判别法

定义 6.3.1 正项级数

若 $u_n \geq 0$ ，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为正项级数。

定理 6.3.1 正项级数收敛基本定理

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 有上界。

正项级数有以下几种判别法。

定理 6.3.2 直接比较法

设当 $n \geq N$ 时，有 $0 \leq u_n \leq v_n$ 总是成立，则

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

定理 6.3.3 间接比较法

设 $u_n \geq 0, v_n > 0, n = 1, 2, 3, \ldots$ ，且有 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A$ ，则

- 若 $0 < A < +\infty$ ，两级数具有相同的敛散性；
- 若 $A = 0$ ，则若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
- 若 $A = +\infty$ ，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

定理 6.3.4 比值判别法

设 $u_n > 0$ ，有 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，则

- 若 $\rho > 1$ ，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

- 若 $\rho < 1$ ，则其发散；
- 若 $\rho = 1$ ，该判别法失效。

定理 6.3.5 根值判别法

设 $u_n \leq 0$ ，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ ，则

- 若 $\rho > 1$ 甚至为 $+\infty$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
- 若 $\rho < 1$ ，则其发散；
- 若 $\rho = 1$ ，该判别法失效。

定理 6.3.6 积分准则

若函数在 $[1, +\infty)$ 上非负、连续、递减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性。

注意，判别正项级数敛散性时，

$$\begin{gathered}\text{间接比较法}\\ \Downarrow \\ \text{比值法}\\ \Downarrow \\ \text{根值法}\\ \Downarrow \\ \text{积分准则}\\ \Downarrow \\ \text{直接比较法}\\ \Downarrow \\ \text{定义·部分和数列}\\ \Downarrow \\ \text{收敛级数定义}\end{gathered}$$

此外，若通项为积分或者是抽象的，从直接比较法开始应用，试图放缩被积函数以去除积分号。

IV. 任意项级数

i.交错级数及其敛散性判别法

定义 6.4.1 交错级数

若 $u_n > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 称为交错级数。

定理 6.4.1 莱布尼茨判别法

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足

- $u_{n+1} \leq u_n$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

则该交错级数收敛，且 $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \leq u_1$.

ii.条件收敛与绝对收敛

定义 6.4.2 条件收敛与绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为条件收敛。

绝对收敛的级数有交换律，而条件收敛的级数没有。

定理 6.4.2 条件收敛必收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

V.幂级数

i.函数项级数

定义 6.5.1 函数项级数

设 $u_n(x), n = 1, 2, \ldots$ 定义在 I 上，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 称为区间 I 上的函数项级数。

定义 6.5.2 收敛点与收敛域

对 $x_0 \in I$ ，若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点；反之，若其发散，则为发散点。

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的全部收敛点构成的集合是收敛域，全部发散点构成的集合是发散域。

定义 6.5.3 和函数

和函数 $S(x) =: \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ ，其定义域为收敛域。

ii.幂级数

定义 6.5.4 幂级数

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数称为 $(x-x_0)$ 的幂级数，常数 a_n 称为幂级数的系数。

显然，当 $x_0=0$ 时，有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 称为 x 的幂级数。

定理 6.5.1 阿贝尔定理

若幂级数 $\sum u_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处收敛，则对任意 x 满足 $|x|<|x_0|$ ，都有 $\sum u_n(x)$ 绝对收敛；若在 $x=x_0$ 发散，则对任意 x 满足 $|x|>|x_0|$ 都有 $\sum u_n(x)$ 发散。

iii.幂级数收敛半径及其求法

幂级数的收敛半径 R 可以由以下公式求出。

- $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
- $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

注意，公式仅对标准幂级数成立，即要求幂函数的次数逐次增长；

收敛区间的中心为 x_0. 以 $x=0$ 为例子，若存在收敛半径 $R\geq 0$ ，则 $x\in(-R,R)$ 时级数绝对收敛，$x\in R\backslash(-R,R)$ 时级数发散。若级数有条件收敛点，则其只能在 $\pm R$ 处，因而最多有两个。

在求收敛半径后，必须写出收敛区间，然后判断端点处敛散性。

iv.幂级数的性质

幂级数的加减运算

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x), |x|<R_1; \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = g(x), |x|<R_2$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n = f(x)\pm g(x), |x|<\min(R_1,R_2)$.

幂级数的逐项求导与逐项积分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$ 且有和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，则成立以下性质。

- $S(x)$ 在 $\overset{\text{收敛区间}}{(-R,R)}$ 内可导，且有逐项求导公式

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

求导后幂级数收敛半径不变，因而 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内有任意阶导数；

- $S(x)$ 在 $\overset{\text{收敛区间}}{(-R,R)}$ 内有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

  积分后收敛半径不变；

- 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛域上连续。

单位幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 称为单位幂级数, 显然其收敛半径是 1, 且收敛区间内，有 $\sum x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$ 收敛半径也是 1, 且收敛区间内，有 $\sum x^n=\dfrac{1}{1+x}$.

VI. 函数展开成幂级数

i.概念

设 $f(x)$ 是给定的函数，若存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 使得任意 $x\in I$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 都收敛到 $f(x)$ ，即 $\forall x\in I, f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上可展开为 $x-x_0$ 的幂级数，称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 的幂级数。

定义 6.6.1 幂级数展开唯一性

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可以展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ，则该展开式是唯一的，且为泰勒级数，即有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n$

ii.函数展开成幂级数的条件及其形式

泰勒级数与马克劳林级数的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一领域 $|x-x_0|<\sigma$ 内具有任意阶导数，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数。

特别地，若 $x_0=0$ ，称级数为 $f(x)$ 的马克劳林级数。

函数展开成为幂级数的充要条件

设 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内有任意阶导数，其泰勒公式为

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 为 n 阶余项，其拉格朗日型为 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\theta\in(0,1)$ ，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{ni!}(x-x_0)^n,|x-x_0|<R$ 的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,|x-x_0|<R$.

特别地，当 $x_0=0$ 时得到函数展开为马克劳林级数的充要条件。

iii.函数展开成为幂级数的方法

- 公式法

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{ni!}(x-x_0)^n,|x-x_0|<R$$

- 变量替换；
- 逐项求导；
- 逐项积分；
- 恒等变形、变量代换等。

幂级数有 8 个常用的展开式。

- $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n,|x|<\infty$
- $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},|x|<\infty$
- $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},|x|<\infty$
- $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{C}_\alpha^n}{n!}x^n,|x|<1$
- $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,|x|<1$
- $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,|x|<1$
- $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n},-1<x\le 1$
- $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n},-1\le x<1$

以上都展成马克劳林级数。若要展成泰勒级数，经过适当处理后可以利用马克劳林级数的结果。

展开的结果尽量合成一个级数，级数后要注收敛范围。

可以利用幂级数求数项级数，即将数项级数视为幂级数的 x 取了定值。

VII. 傅里叶级数

i.傅里叶级数及傅里叶系数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上黎曼可积，则称公式

- $a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x$
- $b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数。称以 a_k,b_k 为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶级数，记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

类似地，可以定义周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数，即

- $a_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$
- $b_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$
- $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

ii.傅里叶级数的收敛定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，并满足迪利克雷条件，即

- 在一个周期内连续或有有限个第一类间断点；
- 在一个周期内有有限个极值点，即单调区间个数有限，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & x\text{为 } f(x) \text{ 的连续点}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为 } f(x) \text{ 的间断点}\end{cases}$$

iii.奇偶函数的傅里叶级数

若 $f(x)$ 是奇函数，则有 $a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ ，是为正弦级数。

若 $f(x)$ 是偶函数，则有 $b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0, f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l}$ ，是为余弦级数。

以上二级数，都有 $x \in \{f\text{的连续点}\}$.

iv.有限区间上的函数的傅里叶级数

将有限区间上的函数展为正弦级数时，将 $f(x)$ 延拓为周期为 2π 的奇函数 $F(x)$. 此时 $a_n = 0, b_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ ，用分部积分法求 b_n . 然后有 $f(x) \xlongequal{\text{f(x) 延拓的部分}} F(x) \xlongequal{\text{连续点}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 并给出 x 的区间。

展成余弦级数同理。

第七章
多元函数积分学

I. 三重积分

三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 的体积元素为 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

三重积分有多种计算方法。

i.三重积分的计算方法

对称性

定理 7.1.1 对称性

设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 连续，而 Ω 关于平面 xoy 对称，则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases}0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数}\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数}\end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 中 $z\geq 0$ 的一部分。

对 Ω 关于平面 yoz 与平面 zox 对称的同理。

定理 7.1.2 轮换对称性

若相对积分域 Ω 三坐标轴的相对位置相同，或应用映射 $(x,y,z)\Rightarrow(y,z,x)$ 后，积分域 Ω 的边界方程不变，则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} f(y,z,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} f(z,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

先计算一个或两个轴

若 Ω 由 z_1,z_2 上下两个面夹成，设 $\forall(x,y,z)\in\Omega,(x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\mathrm{d}z$$

对由 x_1, x_2 前后或者 y_1, y_2 左右夹成的积分域同理。

若积分域垂直于一坐标轴 (以 z 轴为例) 的截面简单，被积函数 f 对另外两轴成的平面的积分运算容易，则

$$\iiint_{\Omega} f\mathrm{d}V = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用三次积分法

可以直接化为三次积分，即

$$\iiint_{\Omega} f\mathrm{d}V = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int f\mathrm{d}z$$

一般情况下，先算先算比较简单的积分。

利用球坐标系

做变换 $(x, y, z) \Rightarrow (\rho, \theta, \varphi)$ ，此时有

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

其中 $\varphi \in [0, pi], \theta \in [0, 2\pi], \rho \geq 0$, 且有 $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

若积分域为球的一部或全部，被积函数有 $x^2 + y^2 + z^2$ 的一部或全部，则适用球坐标系。

利用柱坐标系

做变换 $(x, y, z) \Rightarrow (\rho, \theta, z)$ ，此时有

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

其中 $\rho \geq 0, \theta \in R$ ，且有 $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

若积分域为圆柱一部或全部，被积函数中含有 $x^2 + y^2, xy$ 或其一部时，适用柱面坐标系。

柱面坐标系的常用积分次序有 $\displaystyle\int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\rho \int \mathrm{d}z$ 以及 $\int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\rho.$

ii.三重积分的应用

定理 7.1.3 质心公式

一物体在空间占有空间 Ω ，其上一点 (x,y,z) 的体密度为 $\rho(x,y,z)$ ，则该密度在 Ω 连续，且其有质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ，则有

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho \mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} \rho \mathrm{d}V}$$

对 $\bar{y},\bar{z}$ 同理。

II. 曲线积分

i. 第一类曲线积分

物理意义

一条线密度为 $f(x,y,z)$ 的线的总质量

$$m=\int\limits_{L} f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是弧长元素。

第一类曲线积分的性质

第一类曲线积分有如下性质。

- **线性性**
  $\int\limits_{L}(f\pm g)\mathrm{d}s=\int\limits_{L} f\mathrm{d}s\pm\int\limits_{L} g\mathrm{d}s$
  $k\int\limits_{L} f\mathrm{d}s=\int\limits_{L} kf\mathrm{d}s$
- **积分域的分割**
  $\int\limits_{L} f\mathrm{d}s=\int\limits_{L_1} f\mathrm{d}s+\int\limits_{L_2} f\mathrm{d}s$, 其中 $L=L_1+L_2$
- **保序性**
  $f\le g\Rightarrow\int\limits_{L} f\mathrm{d}s\le\int\limits_{L} g\mathrm{d}s$
- **L 弧长计算公式**
  $S_L=\int\limits_{L}\mathrm{d}s$

第一类曲线积分的计算方法

利用特殊方法计算

第一类曲线积分的对称奇偶性、轮换对称性与二、三重积分类似。

计算第一类曲线积分，可以将曲线方程代入被积函数。

第一类曲线积分具有

- 形心公式

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int x\mathrm{d}s}{\displaystyle\int \mathrm{d}s}$$

  y, z 同理；

- 形心公式

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int xf\mathrm{d}s}{\displaystyle\int f\mathrm{d}s}$$

  其中 f 是密度；对 y, z 同理。

利用定积分

有 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$.

设空间曲线 L 有参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ ，则有

$$\int\limits_L f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\mathrm{d}t$$

在化为定积分后，要保证积分下限小，积分上限大。

ii.第二类曲线积分

物理意义

考虑一质点 P 因变力 F 从 A 移动到 B. 有 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 其中 P, Q, R 都是关于 x, y, z 的标量函数。

此时有弧微分向量 $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{I}\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, 其中 $\vec{I}$ 是单位切向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 那么就有上述质点在移动过程中做的功 $W = \int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, 其中称 $P\mathrm{d}x$ 为对 x 的积分，y, z 同理。

基本性质

第二类曲线积分有如下性质。

- **线性性**

  $$\int\limits_L (\vec{F_1} \pm \vec{F_2})\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_L F_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s} \pm \int\limits_L F_2 \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

  $$k\int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_L kF\mathrm{d}\vec{s}$$

- **积分域的分割**

  $\int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{L_1} \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} + \int\limits_{L_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$, 其中 $L = L_1 + L_2$

- **反向曲线值变号**

  设 L^- 是 L 的反向曲线，则有

  $$\int\limits_{L^-} \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = -\int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$$

注意，不考虑对称奇偶性；轮换对称性仍然存在。

利用定积分计算第二类曲线积分

设空间有向曲线 L 有参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 起点 A 对应参数为 α, 终点 B 对应参数为 β, 且 $\beta > \alpha$ 不一定成立，若 P, Q, R 均连续，$x'(t), y'(t), z'(t)$ 也都连续，则有

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\}\mathrm{d}t$$

化为定积分后，要保证积分下限对应起点，积分上限对应终点。

iii.格林公式及曲线积分与路径无关的条件

格林公式

定义 7.2.1 正方向

对一有界闭区域 D ，其边界为 L , 沿着边界线环形，当行进方向是正方向时，区域在前进方向的左侧，此时 D 有正向边界 ∂D .

定理 7.2.1 格林公式

设 xy 平面上一有界单连通闭区域 D 由一条逐段光滑闭曲线 L 围成，L 取正向，且 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则有

$$\oint\limits_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

格林公式可以推广到 $(n+1)$ 连通区域上，若 $n > 1$ 有穷。

当不满足格林公式的适用条件时，构造辅助线创造符合适用条件的正向边界。此时，需要给出辅助线的符号、表达式和方向。

平面上曲线积分与路径无关的条件

定义 7.2.2 与路径无关

对任意从 A 到 B 的有向曲线 l_1, l_2 若都有

$$\int\limits_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则称 $\int\limits_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起点、终点有关。此时，将其记为

$$\int_{\alpha}^{\beta} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

设 $F\{P, Q\}$ 的分量 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数，则以下命题等价。

- 对 D 内任意光滑闭曲线 L，有 $\oint\limits_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$
- 对任意 $L = \widehat{AB} \subset D, \int\limits_{\widehat{AB}}$ 仅与起点 A 和终点 B 有关，与 L 的取法无关，也称曲线积分与路径无关；
- $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}u(x, y)$ 成立，此时称 $u(x, y)$ 为 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的原函数；
- 在 D 内 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$ 处处成立。

由于曲线积分与路径无关，可以尽量选择简单的路径。

原函数的求法

定义 7.2.3 原函数

若存在 $u(x, y)$ 使得 $\mathrm{d}u(x, y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 则称 $u(x, y)$ 似乎 $P(x, y)\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数。

显然若 $u(x, y)$ 是 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数，则 $u(x, y) + C$ 也是其一个原函数。

定理 7.2.2 原函数存在定理

设 D 是单连通区域，P, Q 都具有连续的偏导数，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial x} \Leftrightarrow P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y\text{在}D\text{内存在原函数}u(x, y)$$

且

$$u(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x_0,y_0)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y + C$$

一般令上述 (x_0, y_0) 为原点，若在原点没有定义，则选择坐标轴上一点。

iv.两类曲线积分的关系

设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 平面上一个逐段光滑有定向的曲线，向量函数 $\vec{A}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 在 L 上连续，$\vec{T}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为曲线弧在点 (x,y) 处沿从 A 到 B 方向的单位切向量，即方向余弦，且 $\mathrm{d}\vec{s}=\vec{T}\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 为该点的弧微分向量，则

$$\int\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int\limits_L \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int\limits_L \vec{A}\cdot\vec{T}\mathrm{d}s=\int\limits_L \left[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\right]\mathrm{d}s$$

在空间上同理。

III. 曲面积分

i.第一类曲面积分

物理意义

对一面密度为 $f(x,y,z)$ 的立体，其质量为

$$m=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是体积元素。

基本性质

第一类曲面积分有以下性质。

- **线性性**
  $\int\limits_{\Sigma}(f\pm g)\mathrm{d}S=\int\limits_{\Sigma} f\mathrm{d}S\pm\int\limits_{\Sigma} g\mathrm{d}S$
  $k\int\limits_{\Sigma} f\mathrm{d}S=\int\limits_{\Sigma} f\mathrm{d}S$
- **积分域的分割**
  $\int\limits_{\Sigma} f\mathrm{d}S=\int\limits_{\Sigma_1} f\mathrm{d}S+\int\limits_{\Sigma_2} f\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$
- **Σ 面积计算公式**
  $S_{\Sigma}=\int\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$