



线性代数提高笔记

奇峰

之前

目录

第一章 行列式	3
II. 求行列式的值	3
III. 代数余子式	3
IV. 抽象矩阵行列式	4
V. 求行列式方程的根	6
第二章 矩阵	8
VI. 求解与伴随矩阵相关的问题	8
VII. 可逆矩阵的应用	9
VIII. 初等变换与初等矩阵之间的关系	10
IX. 求矩阵的秩	11
X. 求解矩阵方程	12
XI. 计算 n 阶矩阵高次幂	12
第三章 向量	14
XII. 相关性	14

概述

题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵 } (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \text{秩（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数 } \left\{ \begin{array}{l} \text{可逆变换} \\ p + q = r \end{array} \right. \end{array} \right.$$

大题部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{方程组 } \left\{ \begin{array}{l} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{array} \right. \\ \text{相似形（二次型）} \end{array} \right.$$

一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i) \text{ 是否相关?} \\ AX = 0 \text{ 的基解?} \\ A \sim B \\ p + q = r \end{array} \right.$$

一种方法



初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{array} \right.$$

第一章

行列式

定义与性质

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{三大定义} \left\{ \begin{array}{l} \text{几何定义;} \\ \text{逆序定义;} \\ \text{展开定义;} \end{array} \right. \\ \text{计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{数值形;} \\ \text{含参形;} \\ \text{抽象形;} \end{array} \right. \\ \text{证明} |A| = 0 \left\{ \begin{array}{l} |A| = -|A|; \\ r(A) < n; \\ \text{不可逆 (常用于反证);} \\ AX = 0 \text{有非零解;} \\ \exists \lambda_0 = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

I. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
 - 三角形
 - 范德蒙德行列式
 - 分块
- 特殊形状的行列式

II. 代数余子式

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

注意，



- 其为 $(n-1)$ 阶子式;
- 其线性组合 $\sum_i a_i A_{ki}$ 相当于将行列式第 k 行元素替换为 (a_i) ;
- $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 伴随矩阵 $A^* = (A_{ij})^T \triangleq |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}$

对数值型矩阵 A , 求 A^* 时, 可先求 $|A|$ 并利用 $(A:E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E:A^{-1})$ 求 A^{-1} , 再利用公式 $A^* = |A|A^{-1}$ 求伴随矩阵。

III. 抽象矩阵行列式

性质

- 对已知 $A = (\alpha_i)$ 的矩阵, 可以 $\begin{cases} \text{行列式列消} \\ \text{可逆时, } \begin{cases} \text{矩阵乘法} \\ \text{相似} \end{cases} \end{cases}$
- $|kA| = k^n|A|$, 其中 k 可以是行列式;
 $|A^T| = |A|, |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|;$
- 设 A 可逆, 则 A^* 可逆, 且有
 $|A^*| = |A|^{n-1}; (A^*)^* = |A|^{n-2}A;$
 $|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2};$
- $|A| = \prod \lambda_i; \text{tr}(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i;$
- $P^{-1}AP = B \Rightarrow |A| = |B|;$
- $aA + bE$ 不可逆 $\Leftrightarrow |aA + bE| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_0 = \frac{-b}{a};$
- $AA^T = A^T A = E \Rightarrow |A| = \pm 1;$
- 对可逆矩阵 $A, |A + \alpha\beta^T| = |A|(1 + \beta^T A^{-1}\alpha);$
对 $B = \alpha\beta^T, |\lambda E + \alpha\beta^T| = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^T\alpha);$
- 对 A_n , 若 $A^2 = A, A \neq E$, 则有 $|A| = 0$.
 - 反证
假设 A 可逆, 则 $A^2 A^{-1} = AA^{-1} = E \Rightarrow A = E$, 与题设矛盾, 故 A 不可逆, 因此 $|A| = 0$.
 - 秩
 $A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O \Rightarrow r(A) + r(A - E) \leq n;$
 $A \neq E \Rightarrow r(A - E) > 0 \Rightarrow r(A) < n \Rightarrow |A| = 0.$



- 方程组

$A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O; A \neq E \Rightarrow AX = O$ 存在非零解, 因此 $r(A) < n$, 即 $|A| = 0$.

- 特征值

$A(A - E) = O = O(A - E), A \neq E$, 因此 A 存在一特征值 $\lambda_0 = 0$, 此时 $|A| = \prod \lambda = 0$.

其中, 对于第八条,

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 + \beta^\top A^{-1} \alpha \end{pmatrix} \quad (ii)$$

显然 (i), (ii) 的两边也相等. 此时对二者右边取得行列式, 得到

$$|A + \alpha\beta^\top| = |A|(1 + \beta^\top A^{-1} \alpha)$$

考虑一个例子 $D = \begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x + a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为 $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为 A , 后者为 $\alpha\beta^\top$.

ii. $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E - (-\alpha\beta^\top)|$, 此时视 $A = \lambda E$,

套用前述方法有 $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E|(1 + \beta^\top (\lambda E)^{-1} \alpha) = \lambda^n (1 + \frac{\beta^\top \alpha}{\lambda}) = \lambda^{n-1} (\lambda + \beta^\top \alpha)$.

注意, 若有 $AB = O, B = (\beta_i)$, 则考虑

- $r(A) + r(B) \leq n$;
- B 的列向量为 $AX = O$ 的一组解;
- $A\beta_i = O = O\beta_i$, 此时 B 的列向量为 $\lambda_A = 0$ 的特征向量。

计算抽象行列式

计算抽象的行列式时, 若其有法则, 如 A^{-1}, A^\top, A^* , 则利用其法则, 若其无法则, 则利用 $E = AA^{-1}$ 或 $E = AA^\top$.

对求 $|A + B|$ 的情况, 由于无法则, 考虑添加 E , 此时 “一前一后, 前者前, 后者后。” 对于

$$|A + B| = |E_1 A + B E_2|, \quad E_1, E_2 \text{ 都是单位矩阵}$$

有



- E_1 在 A 前, E_2 在 B 后, 此谓一前一后;
- E_1 拆时, 考虑同在前面的 B , 即 $B^{-1}B$ 或 BB^{-1} , 此谓前者前;
- E_2 拆时, 考虑同在后面的 A , 即 $A^{-1}A$ 或 AA^{-1} , 此谓后者后;

由行列式值求参数

需要加减 • 消元 • 出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数 $\lambda-2$ 。

IV. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数 (行列式和最高次方)
- 根与系数的关系

$$\text{对 } f(x) = D = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \text{ 及其根 } x_i \text{ 有 } \begin{cases} \sum x_i = -\frac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

矩阵加边

对行列式 D_n , 显然

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \square & \square & \square \\ \vdots & \square & D & \square \\ 0 & \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

其中, 为 $*$ 的部分可以为任意值, 因此可以按题面设置易于计算的值。另外, 加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式, 使得其虽然不等于原式, 但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$



可以将其变为

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \leftarrow \text{增补行}$$

并按照第一列展开，此时 x^3 的系数 A_3 正好为 $-|D|$ ，而 x^4 的系数 A_4 为范德蒙德行列式，值为 $\prod(x_i - x_j)$ ，由前述结论， $\sum a_i = -\frac{A_3}{A_4}$ ，整理即得到结论。

第二章

矩阵

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义与运算} \left\{ \begin{array}{l} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^*, A^T \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ 或 } B = 0; A^2 = 0 \text{ 同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{ 当且仅当 } A \text{ 可逆时成立} \end{array} \right. \\ \text{特殊矩阵} - E, \Lambda, A^T = A, AA^T = E \\ \text{伴随矩阵 } A^* \\ \text{可逆矩阵} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明 } A \text{ 可逆} \end{array} \right. \\ \text{初等矩阵 (逆, 变换)} \\ \text{秩 (性质)} \\ \text{应用} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵方程} \\ \text{求 } A^n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

V. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求 } A^* \left\{ \begin{array}{l} \text{定义法} - A^* = (A_{ij})^T \\ \text{公式法} - A^* = |A|A^{-1} \end{array} \right. \\ \text{性质} \left\{ \begin{array}{l} AA^* = A^*A = |A|E (\text{可推广为 } \Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2} \\ A^{-1, T, *} \text{ 之间可以互换, 如 } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

矩阵行列和的结论

对矩阵 A , 若其每行元素和均为 k , 则有 $A(1, 1, 1)^T = (k, k, k)^T = k(1, 1, 1)^T (\lambda\alpha)$;

若为每列元素和均为 k , 有 $(1, 1, 1)A = (k, k, k)$, 转置后与前者相同。



右乘/左乘 A^* , 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i, j), a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;
- $\forall(i, j), a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = -1$;

也可以使用矩阵表达式替代 A .

VI. 可逆矩阵的应用

$$\text{可逆矩阵的判定} \left\{ \begin{array}{l} AB = BA = kE (\text{此时 } A^{-1} = \frac{1}{k}B) \\ A \text{ 可逆} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ r(A) = n \\ A \text{ 的列向量线性无关} \\ AX = 0 \text{ 仅有零解} \\ AX = b \text{ 有唯一解} \\ \forall \lambda, \lambda \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{可逆矩阵的计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象} \left\{ \begin{array}{l} \text{凑 } AB = E \\ \text{利用性质} \begin{cases} (A^{-1})^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{cases} \end{array} \right. \\ \text{具体} \left\{ \begin{array}{l} \text{低阶 (2-3)} - A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换} - (A : E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E : A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块

- 仅在主对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。

$$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$



- 副对角分块

副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

- 仅在副对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}DC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$$

可交换矩阵的结论

- 线性组合 - $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$;
- 一元二次形式 - $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$;

证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

其中，对前者，

$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B - \mathbf{aE} + \mathbf{aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &\Rightarrow (B - aE)(A - bE) = abE \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。

VII. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

	符号	行列式	逆
交换	E_{ij}	-1	$E_{ij}(k)$
倍乘	$E_i(k)$	k	$E_i(1/k)$
倍加	$E_{ij}(k)$	1	$E_{ij}(-k)$

利用性质计算矩阵

有例子

$$\begin{aligned} E_{12}A = B &\Rightarrow \begin{cases} -|A| = |B| \\ A^{-1}E_{12} = B^{-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12} = |B|B^{-1} \\ &\Rightarrow -A^*E_{12} = B^* \end{aligned}$$



VIII. 求矩阵的秩

秩的求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \begin{cases} r \text{ 阶至少一非零} \\ r+1 \text{ 阶全为零} \end{cases} \\ \text{初等变换法（行列均可）} - A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵 } B, \text{ 非零行数即为秩} \\ \text{非零特征根的个数是秩} \end{array} \right.$$

性质

- 对 $A_{m \times n}$, 有 $r(A) = r(A^T A) = r(AA^T) = r(A^T) = r(kA)$.

◦ 证明 $r(A^T A) = r(A)$

利用同解方程组。

$$\begin{aligned} A^T A X = O &\Rightarrow X^T A^T A X = O \\ &\Rightarrow (AX)^T AX = O \\ &\Rightarrow |AX| = 0 \\ &\Rightarrow AX = O \end{aligned}$$

$$AX = O \Rightarrow A^T A X = O$$

因此 A 与 $A^T A$ 同解，故其秩相等。

- $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$.
- $r(AB) \leq r(A); r(AB) \leq r(B)$. 对前者， B 可逆时等号成立。
- $r(A : B) \leq r(A) + r(B)$;

$$r\left(\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right) \leq r(A) + r(B)$$

- 对矩阵 $A_{m \times n}, B_{n \times s}, AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq n$.

此即所谓“前看列，后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时，都应考虑这一句。

◦ 证明

$$AB = O \Rightarrow B \text{ 的列向量 } \beta_i \text{ 是 } AX = O \text{ 的一组解, 此时 } r(\beta_i) = r(B) \leq n - r(A) \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n.$$

- 对 A_n , 其伴随矩阵的秩 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 (n \geq 2) \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$

$$r\left(\begin{array}{cc} A & O \\ O & B \end{array}\right) = r(A) + r(B)$$



- 若 P, Q 可逆, 则有 $r(PA) = r(AQ) = \overbrace{r(PAQ)}^{\text{矩阵等价}} = r(A)$
若 $B = PAQ$ 或 $r(B) = r(A)$, 称 A, B 等价。
- 对 $A_{m \times n}$, 若其行满秩, 则 $r(A) = m, A \sim (E_m, O)$.
- 对 $A_{m \times n}, r(A) = n \Rightarrow r(AB);$
 $r(A) = m, r(BA) = r(B)$.
 - 证明前者成立
 $r(B) \leq r(AB) \leq r(A^{-1}AB) = r(B)$, 故 $r(AB) = r(B)$.

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2 = A \Rightarrow r(A) + r(A - E) = n$.
- $A^2 = E \Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n$.
 - 证明后者成立

$$\begin{aligned} (A - E)(A + E) = 0 &\Rightarrow n \geq r(A - E) + r(A + E) = r(A - E) + r(-(\mathbf{A} - \mathbf{E})) \geq r(2E) = n \\ &\Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n \end{aligned}$$

事实上, 对于 A 的一元二次式, 若其可因式分解, 则分解后的因式都满秩。

IX. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$
- $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1}$
- $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX = C \Rightarrow A(X_i) = (C_i)$, 其中 X_i, C_i 是对应矩阵的列向量, 解得到的 n 个非齐次方程组即可。
- $XA = C \Rightarrow A^T X^T = C^T$, 然后同上。

X. 计算 n 阶矩阵高次幂

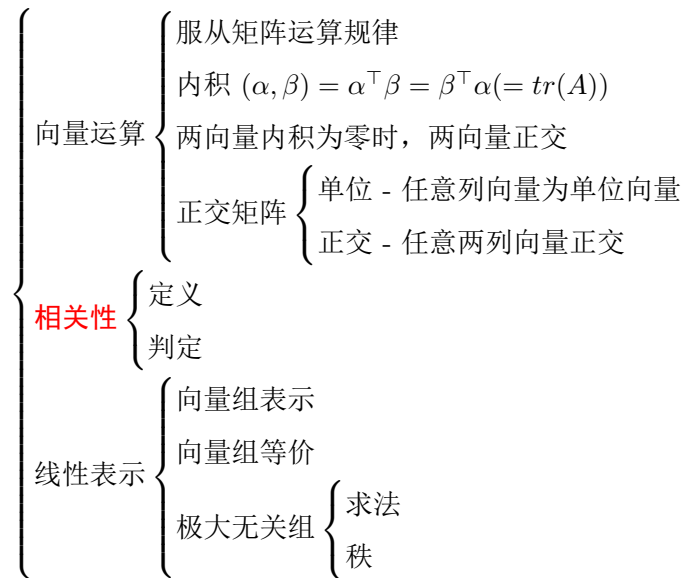
- 归纳运算。



- $r(A) = 1$ 时, 有 $A^n = \text{tr}(A)^{n-1}A$.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} & ac & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n \geq 3} = O$.
- 相似性
若 $P^{-1}AP = B$, 则有 $P^{-1}A^nP = B^n$, 其中 P 不变,

第三章

向量



XI. 相关性

定义法

定义法常用于证明相关/无关性。

令 $\sum k_i \alpha_i = \vec{0}$, 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出 $\forall i, k_i = 0$, 则 α_i 线性无关。

秩

$$\begin{cases} r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \mathbf{S} \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性无关} \\ r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) < S \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性相关} \end{cases}$$

性质



- α_i 线性无关 $\Leftrightarrow (\alpha_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$ 仅有零解。

•

}