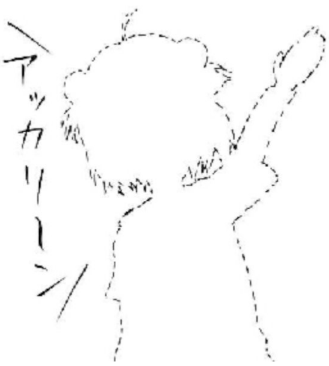

高等数学笔记

奇峰

之前

目录

第一章
函数、极限、连续

I. 函数

i.函数的性质

奇偶性

奇函数导数为偶函数; 偶函数导数为奇函数;

奇函数积分为偶函数; 偶函数积分不一定为奇函数.

且对

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

有

$$\begin{cases}\text{若}f(t)\text{可积，} & \text{则}F(t)\text{连续}\\ \text{若}f(t)\text{连续，} & \text{则}F(t)\text{可导，且}F'(t)=f(t)\end{cases}$$

有界性

(上、下) 界均为常数

$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$ 收敛.

- **证明**

  显然前者单调递增. 而

$$\begin{aligned}x_n&<1+\frac{1}{1\times 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\\&=1+1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\&\le 2<\infty\end{aligned}$$

  故其有上界，因而收敛.

注意，证明中**必须指出作为常数的上界的存在性**.

求导与有界的相关性

在一区间上，$f(x)$ 有界与 $f'(x)$ 有界相互无法推出，但是在一闭区间 $[a,b]$ 上，$f'(x)$ 有界可以推出 $f(x)$ 有界.

- **证明**

  只需证明 $\exists M', \forall x \in [a,b], |f'(x)| \leq M'$ 成立. 由于

$$\begin{aligned}|f(x)| = & \quad |f(x) - f(a) + f(a)| \\ < & \quad |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ \leq & \quad |f'(\varepsilon)|(b-a) + |f(a)|\end{aligned}$$

  因此，令 $M' = |f'(\varepsilon)|(b-a) + |f(a)|$，则令前式成立的 M' 显然存在.

周期性

i. 周期函数的导数是周期函数，且周期一致;

ii. 周期函数的原函数不一定是周期函数;

iii. 周期函数之和不一定是周期的，如 $f(x) = \sin(2x), \quad g(x) = \cos(\pi x)$ 的和显然不是周期函数.

单调性

定义 1.1.1 单调性的等价定义

$\forall x_1 \neq x_2$, 有

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 & \text{则单增} \\ \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 & \text{则单减} \end{cases}$$

仅使用**单调增加 (减少)** 和**单调不减 (增)** 的概念.

ii.函数

函数的复合及反问题

仅考察**有分段函数参与的复合问题**.

初等函数

考研数学中常出现的非初等函数：

i. 分段函数;

ii. 绝对值函数;

iii. 符号函数 $y = \mathrm{sgn}(x)$;

iv. 最值函数;

v. 取整函数 $[x]$，即不超过 x 的最大整数;

vi. 极限函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+x^{2n}}$;

vii. 变限积分函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

其中，对取整函数，有一例: 求

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D:\{x^2+y^2\le\sqrt{2}, x\ge 0, y\ge 0\}$$

此时，由于 $x^2+y^2\le\sqrt{2}$，对 D，可以在 $\rho=\sqrt{2}$ 处分块.

对变限积分函数，有

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

II. 无穷大与无穷小

i.无穷小的判定

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小 (量). 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大 (量).

无穷大 (小) 与极限过程有关.

ii.无穷小的性质

i. $x\to 0 \Rightarrow o(x^m)+o(x^n)=o(x^l), l=\min\{m,n\}; o(x^n)+o(x^n)=o(x^n)$;

ii. $k\cdot o(x^n) = o(x^n)$;

iii. $o(x^m)x^n = x^m o(x^n) = o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$;

iv. $\dfrac{o(x^m)}{x^n} = o(x^{m-n}) \quad (m>n)$;

v. 有限个无穷小之和、积仍然是无穷小;

iii. 无穷小的比较

i. $f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)\sim g(x)$;

ii. 分子分母上的乘积因式可等价代换;

iii. 分子分母上的代数和一般不能等价代换.

代数和求等价

i. 充分条件：若 $x\to x_0$ 时 $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，且 $f(x)\nsim g(x)$，则 $f(x)-g(x)\sim f_1(x)-g_1(x)$;

ii. **泰勒展开**.

iv. 常用的等价无穷小及其替换定理

当 $x\to 0$ 时，有

- $\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x$;
- $e^x-1-x\sim x-\ln(1+x)\sim 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$;
- $x-\sin x\sim\arcsin x-x\sim\dfrac{x^3}{6}$;
- $\tan x-x\sim x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{3}$;
- $\tan x-\sin x\sim\arcsin x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{2}$;

对于以上等价无穷小，有

i. 可变量代换，如 $\sin\Box\sim\Box$, $\tan\Box\sim\Box,\cdots$

ii. $x\to 0$ 时，$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$, $\log_a(1+x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln a}\sim\dfrac{x}{\ln a}$;

iii. 若 $x\to a$ ，可以令 $t=x-a\to 0$.

广义等价

若有 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ，则称 $x\to x_0, f(x)\sim g(x)$, 如在 $x\to 0$ 时，$(1+\cos x)^2\sim 4$, $e^x+1\sim 2$.

定义 1.2.1 广义等价替换定理

若 $x\to x_0$ 时，$f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

注意，

i. 分子分母上的乘积因式可等价代换；

ii. 分子分母上的代数和仅当加减最简形式不抵消时可以代换；

当抵消时，可以

- 拆项，添加正负项将原等式化为不抵消的两式；
- 泰勒公式；

iii. 若 $x \to x_0$ ，总可以令 $t = x - x_0 \to 0$ 。

等价替换三步骤：

i. 判断形态；

ii. 化简：

(a) 等价代换

(b) 四则运算

(c) 变量代换

(d) 恒等变换

iii. 泰勒展开/洛必达法则。

v.无穷小的阶

定义 1.2.2 无穷小阶的定义

设 $x \to x_0$ 时 $f(x), g(x)$ 无穷小，若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g^k(x)} = k \neq 0$ ，则称 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小，也称与 $g^k(x)$ 同阶。

vi.极限和无穷小的关系

对于极限和无穷小，

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{其中} \lim \alpha(x) = 0$$

常用于已知抽象函数一表达式极限时求该函数另一表达式的极限。

vii.无穷大

定义 1.2.3 无穷大的定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \forall M \geq 0$ ，$\exists\, \delta > 0$ ，使得 $\forall x \in \bigcup\limits_{\delta}^{o}(x_0)$ ，有 $|f(x)| > M \Leftrightarrow f(x) < -M$ 或 $f(x) > M$。

定义 1.2.4 有界和无界的定义

若 $f(x)$ 在 x_0 附近一区间 E 有界，则 $\exists M \geq 0$ ，使得 $\forall x \in E$ ，有 $|f(x)| \leq M$，反之则无界。

无穷大必无界，反之不一定。例：

i. $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x_2}\sin(\frac{1}{x})$ 无界，非无穷大；

ii. $x \to 0$ 时，$f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x_2}\sin(\frac{1}{x})$ 无界，非无穷大；

iii. 数列 $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ 无界，无穷大；

iv. 数列 $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$ 无界，无穷大；

v. 数列 $1, 0, 2, 0, \ldots, n, 0, \ldots$ 无界，非无穷大。

viii.无穷大与无穷小的关系

在 x 的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

III. 极限

i.极限概念

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ ，当 $n > N$ ，有 $|x_n - A| < \varepsilon$ ，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 。

设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ ，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称函数 $f(x)$ 收敛于 A ，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 。

$f(x)$ 在 x_0 上是否有定义与该极限是否存在没有关系。

ii.性质

保序性

定理 1.3.1 保序性

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, 若 $a < b$, 则 $\exists\ N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, 有 $x_n < y_n$ 。

当 $a \leq b$ 时，该性质不再成立。

推论 1.3.1 保号性

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 若 $a \lesseqgtr 0$ ，则 $\exists\ N \in \mathbb{N}$ ，$\forall n \geq N$, 有 $x_n \lesseqgtr 0$ 。

定理 1.3.2

若 $x_n \leq y_n$ ，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ ，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ ，则有 $a \leq b$ 。

定理 1.3.3

设 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x)=a$,$\lim\limits_{n\to x_0} g(x)=b$, 若 $a<b$, 则 $\exists\ \delta>0$, $\forall x\in \overset{o}{\bigcup\limits_{\delta}}(x_0)$ 有 $f(x)<g(x)$ 。

当 $a\leq b$ 时，该性质不再成立。

推论 1.3.2

设 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x)=a$，若 $a\leqslant 0$ ，则 $\exists\ \delta>0$ ，$\forall x\in \overset{o}{\bigcup\limits_{\delta}}(x_0)$ 有 $f(x)\leqslant 0$ 。

定理 1.3.4

若在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x)\leq g(x)$ ，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ ，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ ，则 $a\leq b$ 。

唯一性

定理 1.3.5 唯一性

设 $\lim f(x)=A$ ，$\lim f(x)=B$ ，则 $A=B$ 。

局部有界性

定理 1.3.6

收敛数列必有界。即，若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\exists M\geq 0$ ，$\forall n\in\mathbb{N}$ ，都有 $|x_n|\leq M$ 。

定理 1.3.7

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ，则 $\exists M\geq 0$,$\exists\delta>0$ 使 $\forall x\in \overset{o}{\bigcup\limits_{\delta}}(x_0)$ 有 $|f(x)|\leq M$ 。

iii.极限存在定理

夹逼定理

定理 1.3.8 夹逼定理

若数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足

i. $y_n<x_n<z_n$;

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, 其中 a 是常数；

则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

对于 n 项和的极限，常见的求法有

i. 直接求和；

ii. 夹逼定理；

iii. 定积分定义；

iv. 数项级数求和。

两个常见的极限

i. $\forall a>0, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$;

ii. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

单调有界原理

- 数列单调递增有上界必收敛；
- 数列单调递减有下界必收敛。

注意，

i. 常用于证明无通项公式的数列收敛，如
   - 由递推公式给出的数列；
   - 不等式；
   - 方程的根；

ii. **必须先证明收敛性**，再求极限。

iv.重要极限

以下是部分重要的极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$$

对以上极限，可以应用变量代换。

v.极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)$ 存在且等于 A ，$\lim g(x)$ 存在且等于 B ，那么

i. $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 存在且为 $A\pm B$ ；

ii. $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 存在且为 AB ；

iii. 若 $B\neq 0$ ，$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且为 $\frac{A}{B}$ 。

若 $\lim f(x)$ 存在但 $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim f(x)\star g(x)$ 不存在，其中 $\star$ 为任意四则运算符。

广义极限四则运算

- 若 $\lim f(x)$ 存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$ ；
- 若 $\lim f(x)$ 存在且不为 0，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ ；
- 若 $\lim f(x)$ 存在且不为 0，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 。

注意，这里不要求也无法直接给出 $\lim g(x)$ 的存在性。

vi.洛必达法则

定理 1.3.9 $\frac{0}{0}$ 形式的洛必达法则

若

- $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0;$
- x 变化过程中，$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在；
- $\dfrac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)} = A(\text{或}\infty),$

则 $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = A(\text{或}\infty)$ 。

定理 1.3.10 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式的洛必达法则

若

- $\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = \infty;$
- x 变化过程中，$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在；
- $\dfrac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)} = A(\text{或}\infty),$

则 $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = A(\text{或}\infty)$ 。

注意：

i. 对非以上两种情况的未定型 $(0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0)$，将其变为以上两种情况。其中，对于 $\infty - \infty$ 型，可以采用的方法有

  (a)（有分母时）通分；

  (b)（有无理数时）有理化；

  (c) 倒代换。

  对 $0^0, \infty^0$, 常用 $\lim u^v = \lim \exp(v \ln u)$.

  对 $0^\infty, \lim u = 0, \lim v = \infty \Rightarrow \lim[1+u]^v = \exp(\lim uv).$

  对 $1^\infty, \lim u = 1, \lim v = \infty \Rightarrow \lim u^v = \exp(\lim[u-1]v).$

ii. 优先应用等价代换、四则运算、变量代换以及恒等变换化简后再应用洛必达法则；

iii. 注意要求 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 的存在性；

iv. 洛必达法则是充分非必要的；

v. 已知极限（连续、可导）求参数时，**慎用**洛必达法则。

vii.海因定理

定理 1.3.11 海因定理

若函数极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 则数列极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 。

注意：对数列，必须先应用海因定理才能使用洛必达法则。

viii.关于极限的命题

极限命题 1

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 均存在且相等。

常用于

- 分段点处求极限；
- $x\to x_0$ 而极限式中含 $\dfrac{1}{x-x_0}$；此时，有

$$x\to x_0^+,\quad \frac{1}{x-x_0}\to\infty$$
$$x\to x_0^-,\quad \frac{1}{x-x_0}\to-\infty$$

极限命题 2

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$

极限命题 3

$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$

极限命题 4

若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ 成立，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ 也成立。

极限命题 4 推论

若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ 成立，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 也成立。

极限命题 5

若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\exists}{=}l\neq 0$ ，则

i. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ；

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ；

常用于已知极限求参数。

IV. 连续与间断

i.连续的概念

连续

定义 1.4.1 连续

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，若 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于 x_0 处函数值 $f(x_0)$ ，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续。

定义 1.4.2 连续

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，若 $x \to x_0$ 时，若自变量的变化量 Δx (初值为 x_0) 趋近于 0 时，相应函数的变化量 Δy 也趋近于 0 ，也即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

或者

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续。

事实上，以上的两个定义完全等价。

左右连续

定义 1.4.3 左、右连续的定义

设函数 $y = f(x)$ ，若 $\lim\limits_{x \to x_0^{+(-)}} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点处左（右）连续。

左右连续与连续之间的关系

定理 1.4.1

$$f(x)\text{在}x_0\text{点连续} \Leftrightarrow f(x)\text{在}x_0\text{点左连续且右连续}$$

也即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

常用于讨论分段函数的分界点处的连续性。

ii.连续函数的运算性质

- **四则运算性质** - 在区间 I 连续的函数和、差、积以及（分母不为 0 时）商在区间 I 仍然连续。
- **复合函数连续性** - 由连续函数经过有限次复合而成的复合函数在其定义区间内仍是连续函数。
- **反函数连续性** - 在区间 I 连续且单调的函数的反函数，在对应的区间内仍然连续且单调。
- **初等函数连续性** - 初等函数在其定义区间内连续。

以上结论是可显然可易证的。

iii.闭区间上函数的性质

定理 1.4.2 最值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$ ，则在 $[a,b]$ 上必然存在最大值 M 和最小值 m 。

定理 1.4.3 介值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$，且其最大值与最小值分别为 M,m ，则对于任意介于 m 和 M 的 c ，都存在至少一个 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=c$ 。

注意：

- 对连续函数，函数值的平均值还是函数值。
- 常见的平均值：
  - 算数平均值
  $$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$
  - 几何平均值
  $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(x_n)},\quad (f(x_i)\geq 0)$$
  - 加权平均值
  $$\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} k_i},\quad k_i>0$$
  或者
  $$\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i), k_i\geq 0,\quad \sum_{i=1}^{n} k_i=1$$

定义 1.4.4 零点定理

若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$ ，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$，也即 ξ 为函数的一个零点。

注意：

i. 可将其应用于证明方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上至少有一根。

ii. 零点定理的变形 - 若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)\le 0$ ，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$，也即 ξ 为函数的一个零点。

iv.函数连续的常见命题

连续命题 1

$f(x)$ 在区间 I 上连续 $\Rightarrow |f(x)|$ 在区间 I 上连续。

连续命题 2

$f(x),g(x)$ 在区间 I 上连续 $\Rightarrow \max(f,g),\min(f,g)$ 在 I 上连续。

v.间断点及其分类

定义

定义 1.4.5 间断点

设函数 $f(x)$

- 在 $x=a$ 的**一去心邻域**内有定义；
- 在 $x=a$ 处不连续，

则称 $x=a$ 为一个间断点。

注意，

- 定义区间的端点；
- 孤立点

一般不是间断点。

间断点的分类

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一间断点，

i. 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 均存在，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一个第一类间断点，其还能**且必须要**分为
   - 可去间断点 - $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$;
   - 跳跃间断点 - $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$;

ii. 若 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ 中有至少一个不存在，则称其为第二类间断点。第二类间断点不用强制细分。

第二类间断点可以分为

- 无穷间断点 - 左右极限至少有一个为无穷；
- 震荡间断点 - 左右极限至少有一个不存在，但不是无穷；

可能存在间断点的地方：

- 初等函数的无定义点；
- 分段函数的分段点。

第二章 一元函数的微分学

I. 导数

i. 导数的概念

定义 2.1.1 导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，因变量 y 相应地有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处的导数，也称微商，记作

$$f'(x)\text{或 } y'|_{x=x_0} \text{ 或 } \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导。若上述极限不存在，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导。

导数定义的等价变形

导数定义可以等价变形为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

前者适合用于求导函数。

注意：

- 定义式中分子和分母的增量必须相对应，如

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\neq f'(x)$$

- 在定义式中，分子中两项应当“一动一静”，否则无法推出可导性。注意，

$$f(x)\text{在}x_0\text{处可导}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

  $\Leftarrow$ 反例 - $f(x)=|x|,x_0=0;$

- 若已知 $f(x)$ 在一点 x_0 可导，则可能可以利用导数定义。

定义 2.1.2 左、右导数

若

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\exists}{=}f'_-(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，$f'_-(x_0)$ 称为其左导数；若

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\exists}{=}f'_+(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，$f'_+(x_0)$ 称为其右导数；

函数在区间上的可导性

- 若对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)$ 在 x_0 可导，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导；
- 若对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)$ 在 x_0 可导，且其在 a 点右可导，在 b 点左可导，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。

ii.函数可导的条件

定理 2.1.1 函数可导的必要条件

可导必连续。

$\Leftarrow$ 反例如下。

- $f(x)=|x|,x_0=0$；
- $f(x)=\sqrt[3]{x},x_0=0$ 此时其左右导数均无穷大。

定理 2.1.2 函数可导的充要条件

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在且相等。

其常用于：

i. 已知可导性求参数；

ii.（后者）分段函数分段点的可导性。

iii.导数的几何意义

若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处导数 $f'(x_0)$ **存在**，则在几何上，$f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，即

- 切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
- 法线方程 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

注意：

- 求切法线的步骤：
  i. 求切点坐标；

ii. 求斜率；

iii. 写方程。

- 可用于处理
  - 显函数 $y = f(x)$ ；
  - 隐函数 $F(x, y) = 0$ ；
  - 参数方程、极坐标方程，极坐标时可以代 r 入 θ.

iv.导数的运算

以下是一些基本初等函数的导数公式：

$$
\begin{array}{ll}
(c)' = 0 & (x^a)' = ax^{a-1} \\
(\sin x)' = \cos x & (\cos x)' = -\sin x \\
(\tan x)' = \sec^2 x & (\cot x)' = -\csc^2 x \\
(\sec x)' = \tan x \sec x & (\csc x)' = -\cot x \csc x \\
(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \\
(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & (\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\
(a^x)' = a^x \ln a & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}
\end{array}
$$

注意到对于三角函数，带有“正”字的正弦、正切、正割、反正弦、反正切的导数都不包含负号，而带有“余”字的余弦、余切、余割、反余弦、反余切的导数都包含负号。

导数的四则运算法则

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x 点可导，则

i. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ ；

ii. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ ；

iii. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$，其中要求 $g(x) \neq 0$ ；

注意，若 $f(x)$ 可导但是 $g(x)$ 不可导于 $x = x_0$, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也不可导于 $x = x_0$.

可以将和、差、积的公式推广至有限多个。对乘法，有

$$
\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} f_j(x) \right)
$$

行列式函数求导

行列式函数求导可以按行或按列求导。

如对二阶行列式函数，有

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})' \\
&= a_{11}a_{12}' + a_{11}'a_{22} - a_{12}a_{21}' - a_{12}'a_{21} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22}' \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

复合函数求导

设 $y = f(u)$ ，$u = \varphi(x)$ ，若 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，且 $f(u)$ 在对应的 u 处可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

对应地，有

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

隐函数求导数

设 $y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x})$$

反函数求导数

设 $x = f^{-1}(y)$ 由 $y = f(x)$ 确定，则

- 若 $f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{f'(x)}$.
- 若 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(x) \neq 0$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$.

$f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$ 说明 $f(x)$ 单调且存在反函数。

参数方程求导数

设 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定。此时，$t = t(x), y = y(t(x))$.

对于其导数，有

- 若 $x(t), y(t)$ 均可导，且 $x'(t) \neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$;
- 若 $x(t), y(t)$ 均二阶可导，且 $x'(t) \neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$.

常见初等函数的 n 阶导数公式

i. $y=e^x \Rightarrow y^{(n)}=e^x$;

ii. $y=a^x(a>0,a\neq 1) \Rightarrow y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$;

iii. $y=\sin x \Rightarrow y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$;

iv. $y=\cos x \Rightarrow y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$;

v. $(\frac{1}{x+a})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

vi. $y=\ln(x+a) \Rightarrow y^{(n)}=(\frac{1}{x+a})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

II. 微分

i.微分的概念

定义 2.2.1 微分

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有增量 Δx 时，若函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ 可以表为 $\Delta y=A(x_0)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$ ，其中 $A(x_0)$ 与 Δx 无关，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，Δy 中的主要线性部分（也称**线性主部**）$A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x+0}$$

ii.可微与导数的的关系

定理 2.2.1 可微与导数的关系

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $\mathrm{d}x|_{x=x_0}=A(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$

一般地，$y=f(x)$ 则有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$, 故导数 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 也称微商，即微分之商。

iii.微分公式与法则

- $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm \mathrm{d}g(x)$;
- $\mathrm{d}[f(x)\cdot g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$;
- $g(x)\neq 0$ 时，$\mathrm{d}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}$.

III. 微分中值定理

i. 罗尔定理

定理 2.3.1 罗尔定理

若函数满足

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续；
- 在开区间 (a,b) 可导；
- $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

注意：

- 常用于证明**形如** $f(x)=g(x)$ 的方程在一开区间上有根；
- 难点：
    - 构造区间；
    - **构造辅助函数**，其中 $F(x)$ 一般为 $f(x)-g(x)$ 的原函数，或 $f(x)-g(x)$ 的解。

构造辅助函数的方法

i. 将等式化为方程；
ii. 变形，直到能够积分为止；具体而言，可以
    - 同乘同除一因式；
    - 添加能正负相消的两项。
iii. 取不定积分；
iv. 整理，直到满足其在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导为止。

注意，以上方法仅用于发掘可能的辅助函数，不注重严谨性。

不难发现，

- $xf'(x)+nf(x)=0\Rightarrow F(x)=x^nf(x)$;
- $f(x)g'(x)-f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{-g(x)}$;
    - $f(x)+f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{x}$;
    - $f(x)-f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{-x}$;
    - $f(x)+\lambda f'(x)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{\lambda x}$;

ii.拉格朗日中值定理

定理 2.3.2 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足

i. 在 $[a,b]$ 上连续；

ii. 在 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\xi)(b-a) = f(b)-f(a)$.

注意：

i. 证明：令 $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 并且利用罗尔定理；

ii. 可证方程在开区间 (a,b) 上有根；

iii. 可证不等式；

iv. 出现一函数增量 $\Rightarrow$ 利用拉格朗日中值定理；

v. 联系 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的桥梁；

vi. 求极限时，若出现 $f(b)-f(a)$, 可能应用拉格朗日得 $f'(\xi)(b-a)$, 再利用夹逼定理处理 ξ;

vii. 与割线有关。

推论 2.3.1 拉格朗日中值定理推论

- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数；
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) \equiv k$, 则在 (a,b) 上 $f(x) = kx + c$, 其中 c 为常数。

iii.柯西中值定理

定理 2.3.3 柯西中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

i. 在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续；

ii. 在开区间 (a,b) 内皆可导；

iii. $g'(x) \neq 0$,

则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(a < \xi < b)$.

注意：

i. 证明：令 $F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x) - f(x)$, 利用罗尔定理可证；

ii. 可证方程有根；

iii. 出现两个函数增量 $\Rightarrow$ 使用柯西中值定理证明；

iv. 若要求两个不同的中值，则寻求一特殊点 c 将 a, b 分为两子区间，并分别运用中值定理，如罗尔定理。

iv.泰勒中值定理

定理 2.3.4 带拉格朗日余项的泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的一邻域 $U_\delta(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则对 $x \in U_\delta$, 有

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中，$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \xi$ 介于 x 与 x_0, $R_n(x)$ 称为拉格朗日余项。

定理 2.3.5 带皮亚诺余项的泰勒定理

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 n 阶导数，则

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$, $x \to x_0$ 称为皮亚诺余项。

以下是一些常用函数的带皮亚诺余项的马克劳林展开式。

- $e^x = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$;
- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$;
- $\ln(1-x) = -(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}) + o(x^3)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$, 其中 $C_\alpha^k = \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}$

  如，$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$;

- $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{i=0}^{n}x^i+o(x^n)$；
- $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i x^i+o(x^n)$;

注意到泰勒展开时，对展开式的第二项，有

$$\sin x \xRightarrow{\text{正负变换}} \arcsin x \xRightarrow{\text{去掉阶乘}} \tan x \xRightarrow{\text{正负变换}} \arctan x \xRightarrow{\text{增加阶乘}} \sin x.$$

注意，对于泰勒公式，

i. (a) 可证不等式；
   (b) 可证方程有根；
   (c) 可求等价函数；
   (d) 可求极限；
   (e) 可求高阶导数值；
   (f) 可近似计算；

ii. 在不等式证明、方程有根题目中应用拉格朗日余项，否则应用皮亚诺余项；

iii. 题目出现高阶 (至少 2 阶) 导数 $\Rightarrow$ 可能应用泰勒中值定理；

iv. 一般在导数已知的点展开；

v. 使用泰勒公式时，$x\to 0$ 可以推广为 $\square\to 0$.

IV. 导数应用

i.函数单调判定定理

定理 2.4.1 函数单调判定定理

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，若恒有 $f'(x)>0(<0)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增 *(递减)*；若恒有 $f'(x)\geq 0(\leq 0)$ ，则其在 (a,b) 内单调不减 *(不增)*。

注意，

- 此为充分不必要条件；
- 成立条件：要求一区间，而非一点。反例：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

- 可证不等式。

V. 极值

i.定义

定义 2.5.1 极值

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，$x_0 \in (a,b)$ ，则

- 若 x_0 存在一邻域 U ，使得对 U 内任一点 $x \neq x_0$，都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值，x_0 为 $f(x)$ 一个极大值点；
- 若 x_0 存在一邻域 U ，使得对 U 内任一点 $x \neq x_0$，都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极小值，x_0 为 $f(x)$ 一个极小值点；

函数的极大值和极小值统称极值。极大值点与极小值点统称极值点。

ii.极值的性质

- 若 $f'(x_0) = 0$ ，则称 x_0 为一个驻点；
- 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，而 $f(x_0)$ 为极值，则 $f'(x_0) = 0$, 即可导的极值点导数为零；
- 极值点 $\not\Leftrightarrow$ 驻点，如 $f(x) = |x|, x = 0$;
- 可能的极值点：
    - $f'(x) = 0$ 处；
    - $f'(x)$ 不存在处。

iii.极值的充分条件

定理 2.5.1 极值第一充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内可导，$f'(x_0)$ 不存在或等于 *0*, 则

i. 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点 x 处有 $f'(x) > 0$ ，而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点 x 处有 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；

ii. 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点 x 处有 $f'(x) < 0$ ，而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点 x 处有 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点；

iii. 若 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点处导数同号，则 $f(x_0)$ 不为极值，x_0 不为极值点。

定理 2.5.2 极值第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$ ，$f''(x_0) \neq 0$ ，则

- 当 $f''(x_0) < 0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；
- 当 $f''(x_0) > 0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点。

VI. 最大值、最小值问题

极值与最值的区别有

i. 前者局部，后者整体；

ii. 最值可为区间端点，极值不可以；

iii. 区间内部最值必为极值。

最值可用于证明不等式。

应用问题的最值求法的步骤如下。

i. 设出合适的自变量；

ii. 表示出目标函数；

iii. 求目标函数的最值。

i.凹向与拐点

定义 2.6.1 凹凸性

设 $f(x)$ 在区间 I 连续，若对任意两点 $x_1 \neq x_2$ ，都有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > (<) \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸 *(凹)* 的。

几何上，若曲线 $y=f(x)$ 上任意两点割线在曲线下 (上)，则 $y=f(x)$ 是凸 (凹) 的。

若 $f(x)$ 有切线，而每一点的切线都在曲线之上 (下)，则称 $y=f(x)$ 是凸 (凹) 的。

定理 2.6.1 凹凸判定定理

设函数在 (a,b) 上有二阶导数，

- 若对任意 $x \in (a,b)$ 都有 $f''(x)>0$ ，则称 $f(x)$ 是凹函数；
- 若对任意 $x \in (a,b)$ 都有 $f''(x)<0$ ，则称 $f(x)$ 是凸函数；

定义 2.6.2 拐点

连续曲线上凹凸的分界点是曲线的拐点。

定理 2.6.2 二阶可导点为拐点的必要条件

若 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点，且 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x_0)=0$ 。

定理 2.6.3 二阶可导点为拐点的充分条件

设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，在 x_0 的一去心邻域内二阶可导，

i. 若二阶导函数在 $x = x_0$ 两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为一拐点；若同号，则不是拐点；

ii. 若在 x_0 处二阶导数为零，而三阶导数不为零，则其为拐点；若三阶导数也为零，则不是拐点。

注意，$f'(x)$ 的极值点事实上就是 $f(x)$ 的拐点横坐标。

求拐点的步骤：

i. 求 x_0 使得 $f''(x_0) = 0$ 或不存在；

ii. 判断；

iii. 写拐点。

ii.渐近线定义及其求法

水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, 则称 $y = b$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线，也叫铅直渐近线。

垂直渐近线只需要讨论分母为零的点或者函数无定义的端点。

斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (kx + b) = 0$ $(x \to -\infty)$, 则称 $y = kx + b$ 为斜渐近线。

具体而言，若

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$;

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = b$,

则有斜渐近线 $y = kx + b$ 。$x \to -\infty$ 时同理。

注意，

- 即使 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}$ 存在，斜渐近线也不一定存在；
- 一侧不会同时存在水平渐近线和斜渐近线。

VII. 曲率及曲率半径

曲率为

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径 ρ 为 k 的倒数。

第三章 一元函数积分学

I. 不定积分

i.原函数

定义 3.1.1 原函数

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $F'(x)=f(x)$ 在区间 I 上成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数。

注意，原函数存在 $\Rightarrow$ 有无穷多个，每个原函数之间仅差一个常数。

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数，但是其不一定是初等函数，如 $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$,$\int \cos x^2 \mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,$\int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$, $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 等，称其为“积不出来”。

若 $f(x)$ 在区间 I 上存在第一类间断点或第二类中的无穷间断点，则其在该区间内没有原函数。

注意，函数在区间内有震荡间断点的，可能有原函数；总结如下。

定理 3.1.1 原函数存在定理

- 连续函数存在原函数；
- 含有第一类间断点或无穷间断点的函数不存在原函数；
- 含有震荡间断点的函数可能存在原函数。

ii.不定积分

定义 3.1.2 不定积分

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数 $\{F(x)+C\}, C\in\mathbb{R}$ 为 $f(x)$ 在 I 的不定积分，记为 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$。

不定积分基本性质

设 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, 其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 一原函数，C 为一常数，则

- $\displaystyle\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或 $\displaystyle\int \mathrm{d}F(x) = f(x)+C$;

- $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$;
- $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$;
- $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$;

基本积分公式

C 为任意常数，则

i. 幂函数

$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$,

特别地，$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

ii. 指数函数

$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$;

特别地，$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$;

iii. 对数函数

$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$;

iv. 三角函数

$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C, \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$;

$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C, \int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$;

$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec + \tan x| + C, \int \csc x = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \tan x| + C$;

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C, \int -\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \cot x + C$;

$\int \dfrac{\tan x}{\cos x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos x} + C, \int \dfrac{\cot x}{\sin x}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\sin x} + C$;

v. 平方和

$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\mathrm{arccot} x + C$;

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$;

vi. 平方差

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$;

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

vii. 根号下平方差

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

viii. 根号下平方和

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C;$$

iii.不定积分法

第一换元法 (凑微分)

设 $g(\varphi(x)) = f(x)$ ，则计算的原则是

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) \\ &= F(\varphi(x)) + C\end{aligned}$$

常见的凑微分形式如下。

i. $\int f(ax+b)(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)(a \neq 0)$;

ii. $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)(an \neq 0)$;

iii. $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$;

iv. $\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$;

v. $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$;

vi. $\int f(a^x)a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)$, 特别地，$\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\mathrm{d}(e^x)$;

vii. $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$;

viii. $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$;

ix. $\int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$;

x. $\int \frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$;

xi. $\int f(\sec x)\sec x\tan x\mathrm{d}x = \int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x)$;

xii. $\int f(\csc x)\csc x\cot x\mathrm{d}x = -\int f(\csc x)\mathrm{d}(\csc x)$;

xiii. $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$;

xiv. $\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int f(\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x)$;

xv. $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$;

xvi. $\int \frac{f(\mathrm{arccot} x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\int f(\mathrm{arccot} x)\mathrm{d}(\mathrm{arccot} x)$;

xvii. $\int \frac{f(\arctan \frac{1}{x})}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\int f(\arctan \frac{1}{x})\mathrm{d}(\arctan \frac{1}{x})$;

xviii. $\int \frac{f|ln(x+\sqrt{x^2+a^2})|}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \int f|ln(x+\sqrt{x^2+a^2})|\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt(x^2+a^2)))$;

xix. $\int \frac{f|ln(x+\sqrt{x^2-a^2})|}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \int f|ln(x+\sqrt{x^2-a^2})|\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt(x^2-a^2)))$;

xx. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C\ (f(x) \neq 0)$.

第二换元法

设 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数且单调，且 $\varphi'(t) \neq 0$ ，若

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C$$

则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令}x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C = G[\varphi^{-1}(x)] + C$$

其中 $t = \varphi^{-1}(x)$ 为 $x = \varphi(t)$ 的反函数。

第二换元法多用于根式的被积函数，通过换元法去根式，具体而言，可以分为两类。

i. 根号下一次方

- $\sqrt[n]{ax+b} = t$;
- $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$;
- 当式中同时存在 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[m]{ax+b}$ 时，取 $t = \sqrt[l]{ax+b}$, 其中 l 为 m, n 的最小公倍数。

ii. 根号下二次方

- 根式形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，令 $x = a\sin t$, 此时 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- 根式形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x = a\sec t$, 此时 $t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$;
- 根式形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，令 $x = a\tan t$, 此时 $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

分部积分法

对 $\int uv'\mathrm{d}x$ ，有

$$\int uv'\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

注意，

- 被积函数为两类函数乘积；
- 凑微分的优先性：指数 > 三角函数 > 幂函数。

注意，不定积分结果中一定包含常数 C, **即使在计算过程中积分号下内容相消干净。**

分部积分法可以利用列表法做。具体而言，为上导下积，对角相乘，正负相间。以 $\int x^2e^x\mathrm{d}x$ 为例，则有表格

$$
\begin{array}{c|ccc}
x^2 & 2x & 2 & 0 \\
\hline
e^x & e^x & e^x & e^x
\end{array}
$$

此时结果为 $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

iv.特殊类型的不定积分法

通用方法

- 倒代换 - 分母次数高的，令 $x = \dfrac{1}{t}$;
- 整体代换 - 含有复杂函数的，令复杂部分为 t;

有理分式的不定积分

定理 3.1.2

任何实系数多项式在实数域内均可分解为一次因式和二次因式的乘积。

定理 3.1.3

设 $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 是有理真分式，若在实数域内分母 $Q_n(x)$ 可因式分解为

$$Q_n(x) = (x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta$$

则有

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha}\frac{A_i}{(x-a)^i} + \sum_{i=1}^{\beta}\frac{C_ix+D_i}{(x^2+px+q)^i}$$

其中 A_i B_i C_i D_i 等系数都是实数。

具体而言，其步骤为

i. 将假分式分为多项式和真分式；

ii. 将真分式分母整理至最简；

iii. 裂项，分别积分。

求待定系数时，去分母，并注意

- 多项式相等条件：同次数的系数相等；
- 待定系数的个数为分母次数。

分母次数大于 4 的时候，一般不用裂项法，而是寻求特殊方法。

待定系数时可以代入特殊值求解系数。

一个例子是，

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+1}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)} \\
&= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

注意，

- 分母有高次幂的，待定系数时次数从低到高都要有；
- 待定系数时分子次数比分母次数低一次。

对分母中的因子，若其存在一线性组合是常数，则可以在分子中凑因子化简。

三角有理函数的不定积分

三角有理函数指由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 进行有限次四则运算得到的函数。

三角有理函数的不定积分一般方法

利用万能代换，即 $\tan\frac{x}{2}=t$，此时 $\sin x=\frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $x=2\arctan t$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{1+t^2}$.

注意，应用万能代换时，x 的次数不应当超过一次，形如

$$
\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}
$$

特殊三角有理函数的积分

- 对
  $$
  I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x
  $$
  可以使用待定系数法，令
  $$
  a\sin x+b\cos x=A(c\sin x+d\cos x)+B(c\sin x+d\cos x)'
  $$
  其中 A,B 是待定系数，将其解出并代入原式，得
  $$
  I=Ax+B\ln|c\sin x+d\cos x|+C
  $$
-
  - 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ ，令 $\cos x=t$ 并换元；
  - 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ ，令 $\sin x=t$ 并换元；
  - 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ ，令 $\tan x=t$ 并换元；
  - 针对上一条，若 R 形如
    $$
    \int\sin^{2m}x+\cos^{2n}x\mathrm{d}x
    $$
    其中 $m,n\in N$ ，则应使用二倍角公式降幂。

II. 定积分

i.定积分概念

定义 3.2.1

将 $[a,b]$ 任意地划分为 n 个小区间 $a=x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ ，细度 $d=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$ ，ξ_i 为 $[x_{i-1},x_i]$ 任意一点；则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{d\to 0}\sum_{i=i}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

若上述极限存在。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上确有定积分，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。

定理 3.2.1 连续必可积

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。

定理 3.2.2

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，且在 $[a,b]$ 中仅有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。

定理 3.2.3 可积必有界

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则其在 $[a,b]$ 有界。

定理 3.2.4 定积分值的变量符号无关性

定积分的值与积分变量的符号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

利用定积分定义求极限

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=i}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{i}{n}(b-a))\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

具体而言，其步骤为

- 令 Δx_i 为 $\frac{1}{n}$ 或 $\frac{k}{n}$;
- 取 ξ_i 的位置，如
  - ξ_i 取右端点：$a+\frac{i}{n}(b-a)$;
  - ξ_i 取左端点：$a+\frac{i-1}{n}(b-a)$;
  - ξ_i 取中点：$a+\frac{2i-1}{2n}(b-a)$;
  - ξ_i 取三等分点：$a+\frac{3i-2}{3n}(b-a)$;

- ◦ ξ_i 取三分之二等分点：$a+\frac{3i-1}{3n}(b-a)$ 等等。

- 求 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1, b=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$
- 将求得的 a,b 用于验证 Δx_i 的取法是否正确，即是否有 $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b-a$ 。

特别地，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

此即所谓“零到一，n 等分，取端点”的极限。

利用二重积分定义求极限

若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\frac{b-a}{n}\frac{d-c}{n}=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

其中

$$\xi_i\in[a+\frac{i-1}{n}(b-a),a+\frac{i}{n}(b-a)],\xi_j\in[c+\frac{j-1}{n}(d-c),a+\frac{j}{n}(d-c)],$$

其具体的步骤与一维情况类似。

特别地，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\frac{1}{n^2}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

n 项和求法

n 项和的求和有如下的方式。

- 直接求和；
- 夹逼定理；
- 定积分定义；
- 数项级数。

定积分的几何意义

定积分的几何意义为面积的代数和。

ii.定积分的性质

- 线性性 - $\int_a^b [k_1 f_1(x)]+k_2[f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x;$
- 区间可加性 - $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$ 即使 $c\notin[a,b];$

- 比较定理 - 设 $a \leq b, f(x) \leq g(x)$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

  推论 - $a < b \Rightarrow |\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| < \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$;

- 估值定理 - $a < b, m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$;

- 积分中值定理 - 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$;

  加强形式 - 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$;

  加强形式 - 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 不变号，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

注意，

- 定积分值与被积函数在有限个点上的值无关；
- 定积分中值定理可证方程有根。

iii.重要定理、公式、关系

定义 3.2.2 变上限函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则函数形如 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$ 称为变上限积分函数。

定理 3.2.5 变上限积分求导定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x)$。

注意，

- 设

  $$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

  且 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，则有

  $$F'(x) = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

  变限积分求导，被积函数不含 x.

- 若 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个跳跃间断点，则 $F(x)$ 在 x_0 连续，但不可导；
- 若 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个可去间断点，则 $F(x)$ 在 x_0 处可导，但 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数。

定理 3.2.6 牛顿——莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任意原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

iv.定积分求法

利用牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

分部积分法

$$\int_a^b u'v\mathrm{d}x = \int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

其利用技巧与不定积分的分部积分法完全一致。

换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变量替换 $x=\varphi(t)$ 满足

i. $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或者 $[\beta,\alpha]$) 上连续；

ii. $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ ，且当 $\alpha<t<\beta$ 时，有 $a\leq\varphi(t)<b$,

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

v.常用的定积分公式

对称区间奇偶函数的积分公式

i. 设 $f(x)$ 是在区间 $[-a,a],(a>0)$ 上连续的偶函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

ii. 设 $f(x)$ 是在区间 $[-a,a],(a>0)$ 上连续的奇函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

可用于积分等式的方法：

i. 含有中值：积分中值定理；

ii. 不含中值：

- 积分区间分割；
- 换元法

周期函数的积分公式

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是以 T 为周期的周期函数，则对任意常数 a 、任意自然数 n 都有

i. $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

ii. $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

三角函数的积分公式

定理 3.2.7 *Wallis* 公式 - 分部积分推导

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n} x\mathrm{d}x = \frac{(n-1)!!}{(n)!!}\cdot(\frac{\pi}{2})^{\texttt{(int)(!(n\%2))}}$$

注意，当被积函数中有自然数 n 时，通过分部积分法构造递推公式，并用递推公式推出结果。

三角函数的公式还有如下几个。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

其中，$ii)$ 利用了区间再现公式，具体而言，令 $t=a+b-x$ 即可。

难以计算原函数的积分称为变态积分。对变态积分的计算，可以

- 构造递推公式；
- 积分区间再现。

III. 反常积分

定积分存在两种限制，由此可以引申出两种反常积分。对 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

- $[a,b]$ 必须是有限区间 $\Rightarrow$ 无穷区间上的反常积分；
- $f(x)$ 必须有界 $\Rightarrow$ 无界函数的反常积分。

反常积分时定积分的极限。

i.无穷区间上的反常积分

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 称为无穷区间上的反常积分，若其存在，则称该反常积分收敛，否则发散。

对 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 同理。

对 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，将其拆成以上两种情况的反常积分，若二者都收敛，则称其收敛，否则称其发散。

注意，

i. 计算方法与积分类似，如 $\int_{a}^{+\infty} = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) - F(a)$;

ii. 反常积分收敛时，适用对称奇偶性，否则不适用；

iii. p 积分：对 $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,\ a>0$, 当 $p>1$ 时积分收敛，$p\le 1$ 时发散；

iv. 利用分部积分法时，可以先进行不定积分，然后再引入上下限。

定理 3.3.1 比较判别法

设 f 与 g 在 $[a,+\infty)$ 上非负且在任意区间 $[a,b], b<\infty$ 可积，且 $f\le g$ ，$x\in[a,+\infty)$ ，则

i. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

ii. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定理 3.3.2 比较判别法

设 f 与 g 在 $[a,+\infty)$ 上非负，则

i. 若 $g(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k \ne 0$ ，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同；

ii. 若当 $x\to+\infty$ 时，$f\sim g$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同。

定理 3.3.3 绝对收敛必收敛

若 $f(x)\in C[a,\infty)$ 且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

ii.无界函数的反常积分

设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$，则称 b 为瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 为无界函数的反常积分，若其存在，称其收敛，否则其发散。

瑕点在区间左端点或区间内时类似。瑕点在区间内而拆成两个积分时，二积分全部收敛则收敛，否则发散。

注意，

i. 计算方法与积分类似，如 $\int_a^b = F(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{t\to b^-} F(t) - F(a)$ ；

ii. 反常积分收敛时，适用对称奇偶性，否则不适用；

iii. p 积分：对 $\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,\ a>0$, 当 $p<1$ 时积分收敛，$p\ge 1$ 时发散；

iv. 利用分部积分法时，可以先进行不定积分，然后再引入上下限。

定理 3.3.4 比较判别法

设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty$ ，f,g 在 $[a,b)$ 非负且对任意 $\xi<b$ 都有在 $[a,\xi]$ 上可积，$f\leq g$ ，则

i. 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

ii. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定理 3.3.5 比较判别法

设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty$ ，f,g 在 $[a,b)$ 非负

i. 若 $g(x)>0, x\in[a,b)$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$ ，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同；

ii. 若当 $x\to b^-$ 时，$f\sim g$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同。

定理 3.3.6 绝对收敛必收敛

若 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 且 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

IV. 定积分的几何应用

主要应用于求面积、体积、弧长、侧面积。

i.平面图形求面积

直角坐标系下平面图形求面积

对于由 $x=x_1, x=x_2, y=f_1(x), y=f_2(x)(x_1<x_2, \forall x\in[x_1,x_2]f_1(x)>f_2(x))$ 围成的图形，有

$$S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x$$

对于由 $y=y_1, y=y_2, x=f_1(y), x=f_2(y)(y_1<y_2, \forall y\in[y_1,y_2]f_1(y)>f_2(y))$ 围成的图形，有

$$S=\int_a^b [f_1(y)-f_2(y)]\mathrm{d}y$$

极坐标下的平面图形求面积

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

由参数方程表示的平面图形求面积

对由 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ 表示的平面图形，其面积为 $\displaystyle\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\mathrm{d}t.$

重要的平面曲线

重要的平面曲线如下。

- 心型线 $r = a(1+\cos\theta)$;
- 摆线（旋轮线）;
- 星型线;
- 双扭线;
- 阿基米德螺线 $r = a\theta$;
- 对数螺线;
- 三叶玫瑰线 $r = \sin(3\theta), (0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3})$;

ii.旋转体求体积

薄片法

绕 x 轴旋转时，有 $\mathrm{d}V_x = \pi y^2 \mathrm{d}x$ ，则体积为

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \mathrm{d}x$$

柱壳法

绕 y 轴旋转时，有 $\mathrm{d}V_y = 2\pi xy\mathrm{d}x$ ，则体积为

$$V = \int_a^b 2\pi \left| xf(x) \right| \mathrm{d}x$$

iii.平均值

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的平均值为

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$$

iv.平行截面面积已知的立体体积

$V = \displaystyle\int_a^b A(x)\mathrm{d}x, a < b$ ，其中 $A(x)$ 是待求体积立体截面面积。

v.平面曲线段的弧长

直角坐标

对曲线段 $y = f(x), x \in [a,b]$ ，设 $f(x)$ 有连续导数，则给定平面曲线段弧长元素和弧长分别为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x; s = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

参数方程

若曲线能表示为 $x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$，且其在 (α,β) 内有连续导数，则给定平面曲线段弧长元素和弧长分别为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{y'^2(t)+x'^2(t)}\mathrm{d}t; s=\int_a^b\sqrt{[y^2(t)]^2+[x'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

极坐标

若曲线能表示为 $\rho=\rho(\theta), \theta\in[\theta_1,\theta_2]$, 则给定平面曲线段弧长元素和弧长分别为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta; s=\int_a^b\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

vi.旋转曲面求侧面积

曲线 $y=f(x), x\in(a,b)$ 弧绕 x 轴旋转所得曲面表面积为 $S=2\pi\int_a^b|f(x)|\overbrace{\sqrt{1+[f'(x)^2]}\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}s}$

曲线 $y=f(x), x\in(a>0,b)$ 弧绕 y 轴旋转所得曲面表面积为 $S=2\pi\int_a^b x\cdot\overbrace{\sqrt{1+[f'(x)^2]}\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}s}$

当旋转曲面使用极坐标或参数方程表示时，将 $\mathrm{d}s$ 改为相对应的即可。

vii.曲线的形心公式

对于由 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 给出的曲线，其在 $[\alpha,\beta]$ 的形心为

$$\bar{x}=\frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t}$$

$$\bar{y}=\frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t}$$

V. 定积分的物理应用

定积分的物理应用主要有以下几种。

- 做功 $W=FS$;
- 受力

- 万有引力 $F=\dfrac{GMm}{r^2}$;
- 液体压力 $F=PS=\rho ghS$;

第四章

多元函数微分学

I. 多元函数微分法

i. 多元函数

定义 4.1.1 二元函数极限

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某去心邻域有定义，
若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得只要 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$,
则称当 (x,y) 趋近于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 的极限存在，其值为 A;
将其记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或者 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$. 否则，称为极限不存在。

注意，

i. 求二重极限可用的方法有
   - 极限的四则运算；
   - 夹逼定理；
   - 等价代换；
   - 重要极限；
   - 无穷小与有界量积仍为无穷小；
   - 连续性；
   - 极坐标变换。

ii. 二重积分存在充要条件

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \Leftrightarrow \text{当}(x,y)\text{以任意形式趋近于}(x_0,y_0)\text{时都有}f(x,y)\to A$$

iii. 当证明二重积分不存在时，常用的方法如下。
   - 二重积分存在条件的逆否命题，即取不同路径；
   - 利用极坐标，将极限变为 $\lim\limits_{\rho\to0^+}$；

使用极坐标变换求重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$ 时，极限 $\begin{cases}\text{为}0. & \alpha+\beta>2\\ \text{不存在}. & \alpha+\beta\le 2\end{cases}$

当上式中分母含有奇数次时，极限必然不存在，因为分母总会在某曲线上等于零，使得原式在该处无定义。

定义 4.1.2 二元函数连续

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 或者 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=0$, 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。若 $f(x,y)$ 在区域 D 中每一点均连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 内连续。

闭区域连续函数也有最值定理、介值定理、零点定理。

ii.偏导数

定义 4.1.3 偏导数

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，令 $y=y_0$, 给 x 以增量 Δx,
若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称其为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，
记为 $f'_x(x_0,y_0)$ 或者 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或者 $\left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)}$ 。此外，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

y 的偏导数可以类似地定义。

注意，两偏导数在 (x_0,y_0) 处存在 $\nLeftrightarrow$ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

事实上，$f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 的导数，$f'_y(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 的导数。

定义 4.1.4 高阶偏导数

设对 $z=(x,y)$ 有 f'_x 和 f'_y ，则有

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}$ ；
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}$ ；
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$ ；
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$ ；

其中后二者称为混合二阶偏导数。

定理 4.1.1 二阶混合偏导数相等的充分条件

若对 $z=f(x,y)$ 有 f''_{xy} 与 f''_{yx} 于 (x_0,y_0) 连续，则有 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ 。

iii.全微分

定义 4.1.5 全微分

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$, 若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ ，仅与 x_0,y_0 有关，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\mathrm{d}f\big|_{(x_0,y_0)}$

注意，

$$z=f(x,y)\text{在}(x_0,y_0)\text{可微}$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{\overbrace{f(x,y)-f(x_0,y_0)}^{\Delta z}-\overbrace{f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}^{\mathrm{d}z}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

定理 4.1.2 可微的必要条件

若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则

- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续；
- $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处均存在；

  事实上，$\mathrm{d}z=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$

定理 4.1.3 可微的充分条件

若 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 均连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

多元函数几个概念的联系

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续

$\nearrow$

$f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 均连续 $\longrightarrow$ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微

$\searrow$

$f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处均存在

iv.复合函数微分法

存在至少两个中间变量或自变量时考虑复合函数。

若 $f(u,v)$ 可微，$u=u(x,y),v=v(x,y)$, 偏导数存在，则 $z=f(x,y)$ 偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y};$$

求二阶偏导数时，二阶偏导和一阶偏导的偏导结构相同，也即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

v.隐函数求导

定理 4.1.4 隐函数存在定理

若有

- 函数 $F(x,y)$ 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某区域 $D\subset R^2$ 上连续；
- $F(x_0,y_0)=0$(称为初始条件);
- 在 D 内存在连续的偏导数 $F'_y(x,y)$;
- $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则在点 P_0 的某邻域 $\bigcup_{P_0}\subset D$ 内，方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定一个定义在区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的隐函数 $y=f(x)$ ，使得

i. $f(x_0)=y_0$ 且 $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时，$F(x_0,f(x_0))\equiv 0$ *;*

ii. 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内连续。

对一方程 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求导数时，有三种方法。

i. 直接求导 - 对方程两边同时关于自变量求偏导，即

$$F'_x\cdot 1+F'_y\cdot 0+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$
$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

对 y 同理;

ii. 全微分 - 对方程两边同时取全微分，有 $\mathrm{d}F(x,y,z)=0$ ，而

$$\mathrm{d}F(x,y,z)=F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y+F'_z\mathrm{d}z$$
$$\Rightarrow\mathrm{d}z=-\frac{F'_x}{F'_z}\mathrm{d}x-\frac{F'_y}{F'_y}\mathrm{d}y$$

又 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$, 故有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$;

iii. 公式法 - 利用上述结论，直接求得 F'_x,F'_y,F'_z 代入。

其中，直接求导法应用广泛。

注意，$F'_x=\frac{\partial F}{\partial x}$, 其中 z 视为常数。

对方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定的隐函数 $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ ，求偏导数时，对每个方程求偏导，然后解关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的、新的方程组。

II. 多元函数极值

i.无条件极值

定义 4.2.1 无条件极值

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，若对该邻域内除 P_0 的任意一点 $P(x,y)$ 都有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ ，则称点 P_0 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；类似地，可以定义极小值点。前二者统称为极值点，极大值和极小值统称极值。

事实上，对 (x,y) 某去心邻域内的任意 (x_0,y_0), 若总有 $\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$ ，则极值为极大值点；若 $\Delta f>0$ 时则为极小值点；若任意去心邻域内上述两条都不成立即不保号，则不是极值点。

定理 4.2.1 二元函数极值存在的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 某邻域有定义，且存在一阶偏导数，若 P_0 是极值点，则其必定为驻点，也即偏导数存在的极值点偏导数为零。

注意，驻点 $\nLeftrightarrow$ 极值点，仅当可微时极值点才是驻点。

对二元函数，可能的极值点仅需要注意驻点。

定理 4.2.2 二元函数极值存在的充分条件

函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 某邻域内有二阶连续偏导数，且 P_0 为驻点，

设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, 则

- $AC-B^2>0$ 时，P_0 是极值点，且若 $A>0$ ，其为极小值点，$A<0$ 时为极大值点；
- $AC-B^2<0$ 时其不是极值点；
- $AC-B^2=0$ 时该判别法失效，此时用定义，即判断 Δf 在 P_0 去心邻域是否保号。

事实上，该定义可以理解为

$$\mathrm{d}f=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

当 $AC-B^2$ 判别法失效，判定保号性时，若难以正面判定，可以利用不同情况下的符号证明保号性不成立。

给定 $F(x,y,z)$ 求 $z=z(x,y)$ 极值时，对 F 关于 x,y 求偏导，并且令 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都等于零，将得到的式子反带入 f 求解得到一组点，利用 $AC-B^2$ 判别法确定其其是否为极值点。

ii.条件极值

给定 $z=f(x,y)$ ，约束条件 $\varphi(x,y)=0$ ，求极值。此时求的是边界最值。解决方法是将其化为无条件极值，具体而言，可以

- 直接代入；
- 拉格朗日乘数法。

对于后者，令 $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 前者称为拉格朗日函数，$\lambda$ 是拉格朗日乘数。对 L 关于 x,y,λ 都求偏导，得到

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

此时消去 λ, 得到驻点。比较各处驻点处的函数值，得到最值。

有多个约束条件时，有拉格朗日函数 $L=f(x,y)+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ ，后面同理。

给定方程，在闭区域内求极值，则在边界与区域内部都求极值，然后比较。

求边界极值时，可以将闭区域边界代入原方程，代入时可以使用极坐标，将其转化为一元极值。

III. 二重积分

i.性质

- $\displaystyle\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$;
- $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\pm g(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$;
- $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ ，其中 $D=D_1\cup D_2$ ，且后者除公共边界不重合；
- 若 $f(x,y)\le g(x,y)$, $(x,y)\in D$ ，有 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$;
- 对 $m\le f(x,y)\le M,(x,y)\in D$ ，有 $\displaystyle mS\le\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le MS$ ，其中 S 为区域 D 的面积。
- $\displaystyle\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$;

- 积分中值定理 - 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，S 为 D 的面积，必定存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$.

  注意，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $f(x,y)$ 在 D 上有限条曲线上的值无关。

ii.二重积分的计算

直角坐标化累次积分

可以将二重积分化为直角坐标下的二次积分计算。

设有界闭区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ ，其中 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$.

确定上下限时，先确定 x 的范围，然后沿 y 正方向穿针确定 y 的范围，穿入为下限，穿出为上限。

在 $D=\{(x,y)|c\le y\le d,\Psi_1(y)\le x\le\Psi_2(y)\}$ 上同理。

极坐标变换

当被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 或者 D 为圆域，考虑极坐标变换 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 使得 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$.

先确定 θ 的范围，从原点引射线确定 ρ 范围，穿入为下限，穿出为上限，此时有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

交换积分次序

计算时，为了方便计算，可以考虑交换积分次序。

iii.二重积分的性质

部分二重积分具有如下性质。

定理 4.3.1 对称性

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{对}y\text{为奇函数}\\ 2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{对}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

D 关于 y 轴对称，函数关于 x 轴对称时类似。

定理 4.3.2 轮换对称性

若积分域 D 关于 $y=x$ 对称，或相对于积分域两坐标轴的相对位置相同，又或者将 x,y 对调后，积分域的边界方程不变，则二重积分具有轮换对称性，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可以将二重积分化为极坐标下的二次积分计算，此时有 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

将直角坐标化为极坐标时，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

若积分域为圆或圆的一部分时，或被积函数中含有 x^2,y^2,xy,x^2+y^2 等 x,y 的二次函数，可以考虑应用极坐标。

定理 4.3.3 形心公式

若区域 D 的形心或几何中心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$, 则

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{x}S_D$$

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{y}S_D$$

第五章
微分方程

I. 概念

微分方程中未知函数的导数的最高阶为该微分方程的阶。

满足微分方程的函数称为微分方程的解。

通解为含有相互独立的方程阶数个任意常数的解。通解也称为一般解，其不一定是全部解。

不在通解中的解是奇解。

不含有任意常数或任意常数确定后的解为特解。

II. 一阶微分方程

i.可分离变量的一阶微分方程

其形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ ，其微分形式为 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0.$

可以使用分离变量法，即将含有 x, y 分离到等式两边，然后取积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x.$

对于形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c)$ 的方程，令 $ax+by+c=u$, 则有

$$
\begin{aligned}
a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + bf(u) \\
\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)} = \int \mathrm{d}x = x + C
\end{aligned}
$$

ii.一阶齐次微分方程

其形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$ ，此时可令 $\frac{y}{x} = u$ ，然后应用分离变量法。

事实上，此时有

$$
\begin{aligned}
y=xu \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}
$$

然后可以解得 u 并将其转换回 $\dfrac{y}{x}$, 得到方程的通解。

iii.一阶线性微分方程

其形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$, 其中未知数及其导数次数均为 1.

其有公式

$$
y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)
$$

其中包含三个不定积分，其常数 C 已经事先提出。

一阶微分方程为非常见类型时，转化为反函数，然后正常求解。

III. 可降阶的高阶微分方程

形如 $y^{(n)}=f(x)$ 时

只需要积分 n 次即可得到方程通解。

不显含函数 y 的二阶可降阶方程 $y''=f(x,y') \to$ 缺 y

令 $y=p'(x)$ ，则有 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$ ，因而可以将原方程降为一阶微分方程 $p'=f(x,p)$.

不显含自变量 x 的二阶可降阶方程 $y''=f(y,y') \to$ 缺 x

令 $y'=p$ ，则有 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 因而可将其降为一阶微分方程 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$.

在解可降阶高阶微分方程时，应当边解边确定常数，常数确定得越早越好。

IV. 高阶线性微分方程

i.高阶线性微分方程概念

n 阶的线性微分方程形如

$$
y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)
$$

其中若 $f(x)\equiv 0$ ，称方程为齐次的，否则为非齐次的。

ii.线性微分方程解的性质和结构

考虑二阶线性微分方程，其有如下性质。

- 若 y_1, y_2 为齐次方程解，则其任意一组线性组合都是齐次方程的解；
- 若 $\hat{y}$ 是齐次方程的解，y^* 是非齐次方程的解，则 $\hat{y} + y^*$ 为非齐次方程的解；
- 若 y_1^*, y_2^* 为非齐次方程解，则 $y_1^* - y_2^*$ 为齐次方程解。

推广 - 若 y_1^*, y_2^* 为非齐次方程解，则 $C_1 y_1^* + C_2 y_2^*$ 为 $\begin{cases} \text{齐次方程解}, & C_1 + C_2 = 0 \\ \text{非齐次方程解}, & C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$

考虑二阶线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, 其有如下结构，也即通解。

- 若 y_1, y_2 为齐次方程**线性无关**特解，则齐次方程通解为 $C_1 y_1 + C_2 y_2$;
- 若 y_1, y_2 为齐次方程**线性无关**特解，y^* 为非齐次方程特解，则非齐次方程通解为 $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$;
- 叠加原理 - 对方程 $y'' p(x)y' + q(x)y = f_1(x), y'' p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$,
  若其分别有特解 y_1, y_2, 则 $y_1 + y_2$ 为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

iii.常系数齐次线性微分方程的求解

对二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ ，其中 p, q 为常数，其具有特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，根据特征方程的根，可以分为三种情况。

对 $\Delta = p^2 - 4q$ ，

i. 若 $\Delta > 0$ ，特征方程有二实根 λ_1, λ_2 ，此时方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数；

ii. 若 $\Delta = 0$ ，特征方程有一二重实根 λ ，此时方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数；

iii. 若 $\Delta < 0$ ，特征方程有一对共轭复根 $\alpha \pm \beta i$ ，此时方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。

事实上，以上是在复数域中对特征方程进行求解。

对 n 阶常系数齐次线性微分方程是类似的。对

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

其中 $p_i, i=1,2,\dots n$ 为常数，有特征方程

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

特征根与方程通解的关系与二阶情形很类似。

- 若 λ_0 为特征方程的 k 重实根，则特征方程的通解中含有

$$e^{\lambda_0 x}\sum_{i=1}^{k} C_i x^{i-1}$$

- 若 λ_1 为特征方程的 k 重共轭复根，则方程通解中含有

$$e^{\alpha x}\left[\cos\beta x\sum_{i=1}^{k} C_i x^{i-1} + \sin\beta x\sum_{i=1}^{k} D_i x^{i-1}\right]$$

iv.二阶常系数线性非齐次微分方程的求解

对形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的二阶常系数线性非齐次微分方程，其通解的结构为 $y = \hat{y} + y^*$, 其中 $\hat{y}$ 为对应齐次方程的通解，y^* 为本方程的一个特解。

对方程形如 $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{ax}$, 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式，则原方程有一个特解形如

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{ax}$$

其中 a 为 $\overbrace{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}^{\text{齐次特征方程}}$ 的 k 重根，若 a 不是根则为 0 重根，然后将其代入原方程求 $Q_m(x)$.

对方程形如 $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\right]$, 其中 $P_l(x), P_n(x)$ 为 x 的 l, n 次多项式，则原方程有一个特解形如

$$y^* = x^k e^{ax}\left[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$$

其中 $m = \max(l, n)$ ，且若 $\alpha + \beta i$ 是齐次特征方程的一对共轭复根，则 $k=1$ ；否则 $k=0$.

代入原方程，求 $Q_m(x), R_m(x)$ 。

事实上，令 $\beta = 0$ ，则后者转化为前者。

附录

补充结论

反三角公式

- $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\arctan x + \mathrm{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$

n 次根式的极限

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_n^n} = a_m\ (a_m = \max\{a_i\})$;

递推数列求极限

对数列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 求极限，方法如下。

- 适当放缩以证明有界性；
- 做差、做商或求导证明单调性；
- 若其单调，由单调有界知 $\lim x_n$ 存在；
- 令 $\lim x_n = a$, 对原式两端取极限，有 $a = f(a)$, 因此可以解得 a;
- 若其不单调，则设 $\lim x_n = a$, 再利用夹逼定理证明前者确实成立。

均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots a_n^2}{n}}$$

函数不等式

- $\sin x < x < \tan x\ (x \in (0, \dfrac{\pi}{2}))$;
- $\sin x < x\ (x > 0),\quad \sin x > x\ (x < 0)$;
- $e^x > 1 + x\ (x \neq 0)$;
- $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x\ (x \in (-1,0) \cup (0,\infty))$;

零点定理应用

若 $f(x) \in C[0,1], f(0) = f(1)$, 则对任意 $n \geq 2, \exists \xi \in [0,1]$ 使得 $f(\xi + \dfrac{1}{n}) = f(\xi)$.

- **证明**

  构造 $F(x) = f(x + \dfrac{1}{n}) - f(x)$, 由于 $F(\dfrac{0}{n}), \cdots, F(\dfrac{n-1}{n})$ 的平均值为 0, 说明 0 是 $F(x)$ 的函数值，因此必定有 ξ 使得 $F(\xi) = f(\xi + \dfrac{1}{n}) - f(\xi) = 0$.

比值的极限推导数

设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = A$, 则 $f(0) = 0, f'(0) = A$.

一类带绝对值函数的可导性

设 $f(x) = (x - x_0)^n |x - x_0|$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，但 $n+1$ 阶不可导。

和差化积公式与二倍角公式

- 和差化积公式
  - $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
  - $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
  - $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
- 二倍角公式
  - $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
  - $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  - $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$
- 降幂公式
  - $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
  - $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

幂指函数求导公式

若 $u = u(x), v = v(x)$ 均可导，且 $u(x) > 0$, 则有 $(u^v)' = (e^{v\ln u})' = u^v(v\ln u)'$.

高阶导数值的求法

求高阶导数值时，有如下的求法。

i. 奇偶性 - 奇函数求偶阶导或偶函数求奇阶导为奇函数。

ii. 递推公式

- $[(ax+b)^{\alpha}]^{(n)} = \dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}(ax+b)^{\alpha-n}a^n = \alpha(\alpha-1)\cdots(a-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}a^n$,

  特别地，$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$;
- $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}, (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$;
- $[\ln(ax+b)]^{(n)} = a\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$;
- $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}); [\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\dfrac{n\pi}{2})$.

iii. 莱布尼茨公式 - 乘积的高阶导数

若 $u=u(x), v=v(x)$ 均 n 阶可导，则有

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

iv. 泰勒公式 - 一般而言，应用于 $x=0$ 处。

拉格朗日证明包含两点导数的等式

对区间 $[a,c],[c,b]$ 分别应用拉格朗日，其中 c 根据题干结论确定。

柯西中值定理证明包含两点导数的等式

- 对 $f(x)$ 使用拉格朗日；
- 对 $f(x), g(x)$ 使用柯西。

导数与单调性的推断

- 已知一点导数符号 $\nRightarrow$ 单调区间

  $$f(x) = \begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$
- 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有一阶连续函数且 $f'(x_0)>0$, 则在 $x=x_0$ 某邻域内有 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增。

一个包含 $e^x, \sin, \cos$ 的积分的结论

也即上导下抄。

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x \mathrm{d}x = \frac{\begin{vmatrix} (e^{\alpha x})' & (\sin\beta x)' \\ e^{\alpha x} & \sin\beta x \end{vmatrix}}{\alpha^2+\beta^2} + C$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \mathrm{d}x = \frac{\begin{vmatrix} (e^{\alpha x})' & (\cos\beta x)' \\ e^{\alpha x} & \cos\beta x \end{vmatrix}}{\alpha^2+\beta^2} + C$$

微分方程中“任意常数”的写法

- 等式中无 $\ln \to C$;
- 等式中有 $\ln(\square) \to \ln C$;
- 等式中有 $\ln|\square| \to \ln|C|$;

Γ 积分

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!$$

偏导数逆问题

对偏导数求积分时，常数项为不含该未知量的函数，如

$$f''_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f'_y(x,y) = \int f''_{yy}(x,y)\mathrm{d}y = 2y + \mathbf{c(x)}$$

然后利用其他已知条件求解原函数。

欧拉积分、泊松积分

欧拉积分可积，但不可求积，其主要包括

- $e^{\pm x^2}, e^{1/x}, \frac{1}{\ln x}$;
- $\sin x^2, \sin\frac{1}{x}, \frac{\sin x}{x}$;
- $\cos x^2, \cos\frac{1}{x}, \frac{\cos x}{x}$ 等。

泊松积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

求极坐标下，曲线在某点的切线

极坐标下显然有 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 成立，此时只需要将曲线方程代入上式，就转化为参数方程。