



# 线性代数提高笔记

奇峰

之前

# 目录

<b>第一章 行列式</b>	<b>3</b>
一. 求行列式的值 . . . . .	3
二. 代数余子式 . . . . .	3
三. 抽象矩阵行列式 . . . . .	4
四. 求行列式方程的根 . . . . .	6
<b>第二章 矩阵</b>	<b>8</b>
五. 求解与伴随矩阵相关的问题 . . . . .	8
六. 可逆矩阵的应用 . . . . .	9
七. 初等变换与初等矩阵之间的关系 . . . . .	10
八. 求矩阵的秩 . . . . .	11
九. 求解矩阵方程 . . . . .	12
十. 计算 $n$ 阶矩阵高次幂 . . . . .	13
<b>第三章 向量</b>	<b>14</b>
十一. 相关性 . . . . .	14
十二. 线性表示 . . . . .	15
十三. 秩与极大线性无关组 . . . . .	15
<b>第四章 线性方程组</b>	<b>17</b>
十四. 解的判定 . . . . .	17
十五. 求通解 . . . . .	18
十六. 方程组的同解与公共解 . . . . .	18
<b>第五章 矩阵的特征值与特征向量</b>	<b>21</b>
十七. 矩阵的特征值与特征向量 . . . . .	21
十八. 相似性的判定 . . . . .	22
十九. 相似对角化的判定与运算 . . . . .	24
二十. 实对称矩阵 . . . . .	25
<b>第六章 二次型</b>	<b>28</b>
二十一. 二次型化为标准形 . . . . .	28



---

二十二. 合同判定 . . . . .	31
二十三. 正定判定 . . . . .	32
二十四. 两点总结 . . . . .	33

# 概述

## 题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵 } (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \text{秩（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数 } \left\{ \begin{array}{l} \text{可逆变换} \\ p + q = r \end{array} \right. \end{array} \right.$$

大题部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{方程组 } \left\{ \begin{array}{l} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{array} \right. \\ \text{相似形（二次型）} \end{array} \right.$$

## 一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i) \text{ 是否相关?} \\ AX = 0 \text{ 的基解?} \\ A \sim B \\ p + q = r \end{array} \right.$$

## 一种方法



初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{array} \right.$$

# 第一章

## 行列式

定义与性质

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{三大定义} \left\{ \begin{array}{l} \text{几何定义;} \\ \text{逆序定义;} \\ \text{展开定义;} \end{array} \right. \\ \text{计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{数值形;} \\ \text{含参形;} \\ \text{抽象形;} \end{array} \right. \\ \text{证明} |A| = 0 \left\{ \begin{array}{l} |A| = -|A|; \\ r(A) < n; \\ \text{不可逆 (常用于反证);} \\ AX = 0 \text{ 有非零解;} \\ \exists \lambda_0 = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 一. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
  - 三角形
  - 范德蒙德行列式
  - 分块
- 特殊形状的行列式

### 二. 代数余子式

代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

注意，



- 其为  $(n-1)$  阶子式;
- 其线性组合  $\sum_i a_i A_{ki}$  相当于将行列式第  $k$  行元素替换为  $(a_i)$ ;
- $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 伴随矩阵  $A^* = (A_{ij})^T \triangleq |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}$

对数值型矩阵  $A$ , 求  $A^*$  时, 可先求  $|A|$  并利用  $(A:E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E:A^{-1})$  求  $A^{-1}$ , 再利用公式  $A^* = |A|A^{-1}$  求伴随矩阵。

### 三. 抽象矩阵行列式

性质

- 对已知  $A = (\alpha_i)$  的矩阵, 可以  $\begin{cases} \text{行列式列消} \\ \text{可逆时, } \begin{cases} \text{矩阵乘法} \\ \text{相似} \end{cases} \end{cases}$
- $|kA| = k^n|A|$ , 其中  $k$  可以是行列式;  
 $|A^T| = |A|, |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|;$
- 设  $A$  可逆, 则  $A^*$  可逆, 且有  
 $|A^*| = |A|^{n-1}; (A^*)^* = |A|^{n-2}A;$   
 $|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2};$
- $|A| = \prod \lambda_i; tr(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i;$
- $P^{-1}AP = B \Rightarrow |A| = |B|;$
- $aA + bE$  不可逆  $\Leftrightarrow |aA + bE| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_0 = \frac{-b}{a};$
- $AA^T = A^T A = E \Rightarrow |A| = \pm 1;$
- 对可逆矩阵  $A, |A + \alpha\beta^T| = |A|(1 + \beta^T A^{-1}\alpha);$   
对  $B = \alpha\beta^T, |\lambda E + \alpha\beta^T| = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^T\alpha);$
- 对  $A_n$ , 若  $A^2 = A, A \neq E$ , 则有  $|A| = 0$ .

• 反证

假设  $A$  可逆, 则  $A^2 A^{-1} = AA^{-1} = E \Rightarrow A = E$ , 与题设矛盾, 故  $A$  不可逆, 因此  $|A| = 0$ .

• 秩

$$A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O \Rightarrow r(A) + r(A - E) \leq n;$$

$$A \neq E \Rightarrow r(A - E) > 0 \Rightarrow r(A) < n \Rightarrow |A| = 0.$$



- 方程组

$A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O; A \neq E \Rightarrow AX = O$  存在非零解, 因此  $r(A) < n$ , 即  $|A| = 0$ .

- 特征值

$A(A - E) = O = O(A - E), A \neq E$ , 因此  $A$  存在一特征值  $\lambda_0 = 0$ , 此时  $|A| = \prod \lambda = 0$ .

其中, 对于第八条,

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 + \beta^\top A^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (ii)$$

显然 (i), (ii) 的两边也相等. 此时对二者右边取得行列式, 得到

$$|A + \alpha\beta^\top| = |A|(1 + \beta^\top A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子  $D = \begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x + a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为  $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为  $A$ , 后者为  $\alpha\beta^\top$ .

ii.  $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E - (-\alpha\beta^\top)|$ , 此时视  $A = \lambda E$ ,

套用前述方法有  $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E|(1 + \beta^\top(\lambda E)^{-1}\alpha) = \lambda^n(1 + \frac{\beta^\top\alpha}{\lambda}) = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^\top\alpha)$ .

注意, 若有  $AB = O, B = (\beta_i)$ , 则考虑

- $r(A) + r(B) \leq n$ ;
- $B$  的列向量为  $AX = O$  的一组解;
- $A\beta_i = O = O\beta_i$ , 此时  $B$  的列向量为  $\lambda_A = 0$  的特征向量。

### 计算抽象行列式

计算抽象的行列式时, 若其有法则, 如  $A^{-1}, A^\top, A^*$ , 则利用其法则, 若其无法则, 则利用  $E = AA^{-1}$  或  $E = AA^\top$ .

对求  $|A + B|$  的情况, 由于无法则, 考虑添加  $E$ , 此时“一前一后, 前者前, 后者后。”对于

$$|A + B| = |E_1A + BE_2|, \quad E_1, E_2 \text{ 都是单位矩阵}$$

有





- $E_1$  在  $A$  前,  $E_2$  在  $B$  后, 此谓一前一后;
- $E_1$  拆时, 考虑同在前面的  $B$ , 即  $B^{-1}B$  或  $BB^{-1}$ , 此谓前者前;
- $E_2$  拆时, 考虑同在后面的  $A$ , 即  $A^{-1}A$  或  $AA^{-1}$ , 此谓后者后;

由行列式值求参数

需要加减 • 消元 • 出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数  $\lambda-2$ 。

## 四. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数 (行列式和最高次方)
- 根与系数的关系

$$\text{对 } f(x) = D = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \text{ 及其根 } x_i \text{ 有 } \begin{cases} \sum x_i = -\frac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

矩阵加边

对行列式  $D_n$ , 显然

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

其中, 为 \* 的部分可以为任意值, 因此可以按题面设置易于计算的值。另外, 加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式, 使得其虽然不等于原式, 但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$



可以将其变为

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \leftarrow \text{增补行}$$

并按照第一列展开，此时  $x^3$  的系数  $A_3$  正好为  $-|D|$ ，而  $x^4$  的系数  $A_4$  为范德蒙德行列式，值为  $\prod (x_i - x_j)$ ，由前述结论， $\sum a_i = -\frac{A_3}{A_4}$ ，整理即得到结论。

# 第二章

## 矩阵

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义与运算} \left\{ \begin{array}{l} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^*, A^T \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ 或 } B = 0; A^2 = 0 \text{ 同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{ 当且仅当 } A \text{ 可逆时成立} \end{array} \right. \\ \text{特殊矩阵} - E, \Lambda, A^T = A, AA^T = E \\ \text{伴随矩阵 } A^* \\ \text{可逆矩阵} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明 } A \text{ 可逆} \end{array} \right. \\ \text{初等矩阵 (逆, 变换)} \\ \text{秩 (性质)} \\ \text{应用} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵方程} \\ \text{求 } A^n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 五. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求 } A^* \left\{ \begin{array}{l} \text{定义法} - A^* = (A_{ij})^T \\ \text{公式法} - A^* = |A|A^{-1} \end{array} \right. \\ \text{性质} \left\{ \begin{array}{l} AA^* = A^*A = |A|E (\text{可推广为 } \Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2} \\ A^{-1, T, *} \text{ 之间可以互换, 如 } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

#### 矩阵行列和的结论

对矩阵  $A$ , 若其每行元素和均为  $k$ , 则有  $A(1, 1, 1)^T = (k, k, k)^T = k(1, 1, 1)^T (\lambda\alpha)$ ;

若为每列元素和均为  $k$ , 有  $(1, 1, 1)A = (k, k, k)$ , 转置后与前者相同。



右乘/左乘  $A^*$ , 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i, j), a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = 1$ ;
- $\forall(i, j), a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = -1$ ;

也可以使用矩阵表达式替代  $A$ .

## 六. 可逆矩阵的应用

$$\text{可逆矩阵的判定} \left\{ \begin{array}{l} AB = BA = kE (\text{此时 } A^{-1} = \frac{1}{k}B) \\ A \text{ 可逆} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ r(A) = n \\ A \text{ 的列向量线性无关} \\ AX = 0 \text{ 仅有零解} \\ AX = b \text{ 有唯一解} \\ \forall \lambda, \lambda \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{可逆矩阵的计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象} \left\{ \begin{array}{l} \text{凑 } AB = E \\ \text{利用性质} \left\{ \begin{array}{l} (A^{-1})^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{具体} \left\{ \begin{array}{l} \text{低阶 (2-3)} - A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换} - (A : E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E : A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块

- 仅在主对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。

$$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$



- 副对角分块

副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

- 仅在副对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}DC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$$

### 可交换矩阵的结论

- 线性组合 -  $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$ ;
- 一元二次形式 -  $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$ ;

证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

其中，对前者，

$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B - \mathbf{aE} + \mathbf{aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &= (B - aE)(A - bE) = abE \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = (B - aE)(A - bE) \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。

## 七. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

	符号	行列式	逆
交换	$E_{ij}$	-1	$E_{ij}(k)$
倍乘	$E_i(k)$	$k$	$E_i(1/k)$
倍加	$E_{ij}(k)$	1	$E_{ij}(-k)$

### 利用性质计算矩阵



有例子

$$\begin{aligned} E_{12}A = B &\Rightarrow \begin{cases} -|A| = |B| \\ A^{-1}E_{12} = B^{-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12} = |B|B^{-1} \\ &\Rightarrow -A^*E_{12} = B^* \end{aligned}$$

## 八. 求矩阵的秩

秩的求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \begin{cases} r \text{ 阶至少一非零} \\ r+1 \text{ 阶全为零} \end{cases} \\ \text{初等变换法 (行列均可)} - A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵 } B, \text{ 非零行数即为秩} \\ \text{非零特征根的个数是秩} \end{array} \right.$$

性质

- 对  $A_{m \times n}$ , 有  $r(A) = r(A^\top A) = r(AA^\top) = r(A^\top) = r(kA)$ .

◦ 证明  $r(A^\top A) = r(A)$

利用同解方程组。

$$\begin{aligned} A^\top AX = O &\Rightarrow X^\top A^\top AX = O \\ &\Rightarrow (AX)^\top AX = O \\ &\Rightarrow |AX| = 0 \\ &\Rightarrow AX = O \end{aligned}$$

$$AX = O \Rightarrow A^\top AX = O$$

因此  $A$  与  $A^\top A$  同解, 故其秩相等。

- $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ .
- $r(AB) \leq r(A); r(AB) \leq r(B)$ . 对前者,  $B$  可逆时等号成立。
- $r(A : B) \leq r(A) + r(B)$ ;

$$r\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right) \leq r(A) + r(B)$$

- 对矩阵  $A_{m \times \mathbf{n}}, B_{\mathbf{n} \times s}, AB = O$ , 有  $r(A) + r(B) \leq \mathbf{n}$ .

此即所谓“前看列, 后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时, 都应考虑这一句。

◦ 证明

$$AB = O \Rightarrow B \text{ 的列向量 } \beta_i \text{ 是 } AX = O \text{ 的一组解, 此时 } r(\beta_i) = r(B) \leq n - r(A) \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n.$$



- 对  $A_n$ , 其伴随矩阵的秩  $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 (n \geq 2) \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$
- $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$
- 若  $P, Q$  可逆, 则有  $r(PA) = r(AQ) = \overbrace{r(PAQ)}^{\text{矩阵等价}} = r(A)$   
若  $B = PAQ$  或  $r(B) = r(A)$ , 称  $A, B$  等价。
- 对  $A_{m \times n}$ , 若其行满秩, 则  $r(A) = m, A \sim (E_m, O)$ .
- 对  $A_{m \times n}, r(A) = n \Rightarrow r(AB);$   
 $r(A) = m, r(BA) = r(B)$ .
  - 证明前者成立  
 $r(B) \leq r(AB) \leq r(A^{-1}AB) = r(B)$ , 故  $r(AB) = r(B)$ .

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2 = A \Rightarrow r(A) + r(A - E) = n$ .
- $A^2 = E \Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n$ .
  - 证明后者成立

$$\begin{aligned} (A - E)(A + E) = 0 &\Rightarrow n \geq r(A - E) + r(A + E) = r(A - E) + r(-(\mathbf{A} - \mathbf{E})) \geq r(2E) = n \\ &\Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n \end{aligned}$$

事实上, 对于  $A$  的一元二次式, 若其可因式分解, 则分解后的因式都满秩。

## 九. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$
- $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1}$
- $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX = C \Rightarrow A(X_i) = (C_i)$ , 其中  $X_i, C_i$  是对应矩阵的列向量, 解得到的  $n$  个非齐次方程组即可。
- $XA = C \Rightarrow A^T X^T = C^T$ , 然后同上。



## 十. 计算 $n$ 阶矩阵高次幂

- 归纳运算。

- $r(A) = 1$  时, 有  $A^n = \text{tr}(A)^{n-1}A$ .

- $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} & ac & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n \geq 3} = O.$

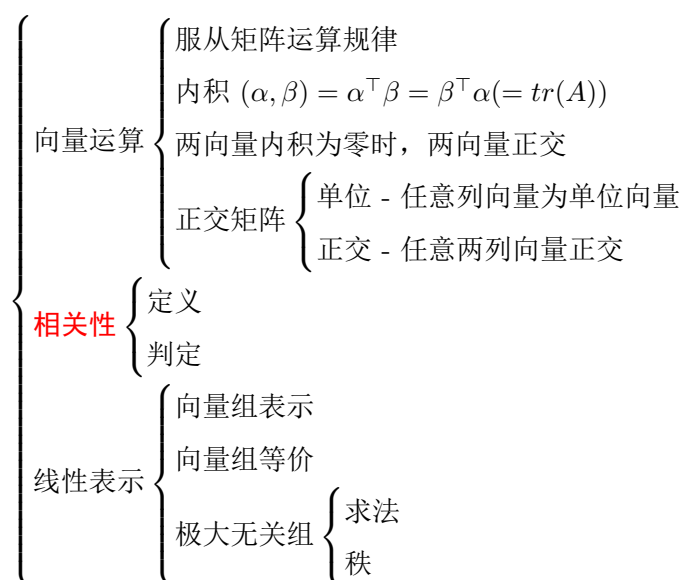
- 相似性

若  $P^{-1}AP = B$ , 则有  $P^{-1}A^nP = B^n$ , 其中  $P$  不变,



# 第三章

## 向量



## 十一. 相关性

### 定义法

定义法常用于证明相关/无关性。

令  $\sum k_i \alpha_i = \vec{0}$ , 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出  $\forall i, k_i = 0$ , 则  $\alpha_i$  线性无关。

### 秩

$$\begin{cases} r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \mathbf{S} \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性无关} \\ r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) < S \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性相关} \end{cases}$$

### 性质



$$\bullet \alpha_i \text{ 线性无关} \Leftrightarrow (\alpha_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 仅有零解。}$$

• 满足以下任意一条则线性相关。

- 内含零向量;
- 内含等比例向量;
- 内含可表示向量。

• 向量个数大于维数必相关 (利用秩证明)。

• 全部无关, 一部无关; 一部相关, 全部相关。

• 原本相关, 缩短相关, 原本无关, 加长无关。(改变的是维数)

• 以少表多, 多必相关。

对于一组能组成方阵的  $(\alpha_i)$ , 若其方阵  $P$  满足  $AP = PB$ , 则这组向量无关。此处运用了相似的性质。

## 十二. 线性表示

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一个向量, } \beta = \sum_{i=1}^s k_i \alpha_i \Leftrightarrow (\alpha_i) X = \beta \\ \text{一组向量, } \beta_i = \sum_{j=1}^s x_{ij} \alpha_j; i = 1, 2, \dots, t \\ \text{两组互相表示, 即} \\ \text{向量组等价} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, \beta_i = \sum_j x_{ij} \alpha_j \\ \forall j, \alpha_j = \sum_i x_{ij} \beta_i \end{cases} \end{array} \right.$$

判定

- $\beta$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出  $\Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta)$ , 注意此时不一定满秩;
- $\forall i, \beta_i$  均可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  表出  $\forall i, \Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta_i)$ ;
- 向量组 (I), (II) 等价  $\Rightarrow r(I) = r(II) = r(I, II)$

## 十三. 秩与极大线性无关组

定义

对  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  中有部分向量  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}$ , 其

- 线性无关;



- 任意剩余向量都可由这组向量表示,

则称  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}$  为极大线性无关组。

### 性质

- 无关组不唯一, 但是其个数唯一;
- 只有  $\vec{0}$  的向量组无极大无关组;
- 向量组的秩为极大无关组向量个数;
- 向量组与其极大无关组等价; 极大无关组之间也等价。

### 求解 - 列写行消

$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \xrightarrow{\text{行变换}} B_{\text{阶梯}}$ , 从每个台阶中选一列组成极大无关组。

# 第四章

## 线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{齐次方程组 } AX = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{表示形式} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵} \\ \text{向量} \end{array} \right. \\ \text{有解的判定} \\ \text{解的性质} \left\{ \begin{array}{l} \text{通解} \\ \text{基解} \\ \text{组合} \end{array} \right. \\ \text{求解方法} \end{array} \right. \\ \text{非齐次方程组 } AX = b \left\{ \begin{array}{l} \text{有解判定} \\ \text{解的性质} \\ \text{解的结构 - 齐通 + 非齐特} \end{array} \right. \\ \text{同解与公共解} \left\{ \begin{array}{l} \text{通解 - 解集相同} \\ \text{公共解 - 解集有交集} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 十四. 解的判定

$$\text{对于齐次方程 } AX = 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{只有零解} \Rightarrow r(A) = n \\ \text{有非零解} \Rightarrow r(A) < n \end{array} \right.$$

其基础解系

- 为  $AX = 0$  的解;
- 线性无关;
- 数量为  $n - r(A)$  个。

$$\text{对于非齐次方程 } AX = b, \left\{ \begin{array}{l} \text{无解} \Rightarrow r(A) \neq r(\bar{A}) \\ \text{有解} \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) \left\{ \begin{array}{l} = n \Rightarrow \text{解唯一} \\ < n \Rightarrow \text{解不唯一 (无穷)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$



## 十五. 求通解

对于具体的数字矩阵, 通过行变换或高斯消元做。

对抽象矩阵,

- 通解为齐通 + 非齐特;
- 齐解任意组合仍然为齐解;
- 若  $\xi_1, \dots, \xi_t$  均为  $AX = b$  的解, 则  $\sum k_i \xi_i$  为  $\begin{cases} \text{齐解, } \sum k = 0 \\ \text{非齐解, } \sum k = 1 \end{cases}$

**例题** 三阶行列式  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有 3 个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ , 则

I.  $r(A) = 2$ ;

II. 若有  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求方程组  $AX = b$  的通解。

**方法** I.  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow$  可列消  $\alpha_3 \Rightarrow r(A) \leq 2$ .

有三个互异特征值  $\Rightarrow$  可相似对角化  $\Rightarrow r(A) \geq 2$  因为至多一个特征值为零。

故  $r(A) = 2$ .

II. 由于  $r(A) = 2$ ,  $X$  的基解有一个向量。

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow$  一非齐解为  $(1, 2, -1)^\top$ .

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow A(1, 1, 1)^\top = \beta$ , 故一非齐解为  $(1, 1, 1)^\top$ .

故通解为  $(1, 1, 1)^\top + k(1, 2, -1)^\top$ , 其中  $k \in \mathbb{R}$ .

**例题** 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ , 求满足  $AB = E_3$  的所有矩阵  $B$ .

**方法** 不妨令  $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 则有  $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 此时对  $A\beta_i = \xi_i$  求解。

注意到可以通过对  $(A \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3)$  做初等行变换一起完成高斯消元。解出  $\beta_i$ , 则  $(\beta_i)$  即为所求  $B$ .

注意, 若待求式为  $XA = B$ , 则转置为  $A^\top X^\top = B^\top$ .

## 十六. 方程组的同解与公共解

**公共解**

即两方程解集交集非空。具体而言,

- 方程组已知 - 联立;



- 知一方程组与另一通解 - 用通解表示公共解，代回方程求解；
- 知两组通解 - 待定系数设通解，使通解相等求系数。

**同解**

即两方程解集相同。

当  $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  时,  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解。

**例题** 设有方程组 (I):  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$  与方程组 (II) 的通解为  $k_1(0, 1, 1, 0)^\top + k_2(-1, 2, 2, 1)^\top$ ,

I. 求 (I) 基础解系;

II. 求 (I), (II) 是否有非零公共解; 若有则将其列出。

**方法** I. 由高斯消元法, 其基础解系为  $(0, 0, 1, 0)^\top, (-1, 1, 0, 1)^\top$ .

II. 不妨设公共解为  $k_1(0, 1, 1, 0)^\top + k_2(-1, 2, 2, 1)^\top$ , 即  $(-k_2, k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, k_2)^\top, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ;

将其代入 (I), 有  $k_1 = -k_2$ , 此时原公共解为  $k(1, -1, -1, -1)^\top, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**例题** 设有  $2 \times 4$  矩阵  $A, B$ , 且 (I)  $AX = 0$  通解为  $k_1(1, 2, 2, -1)^\top + k_2(0, -1, -3, 2)^\top$ , (II)  $BX = 0$  通解为  $\mu_1(2, -1, a+2, 1)^\top + \mu_2(-1, 2, 4, a+8)^\top$ , 其中  $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ , 若 (I), (II) 有非零公共解, 求  $a$  及所有非零公共解。

**方法** 设公共解为  $X = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$ , 即方程  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)(k_1, k_2, l_1, l_2)^\top = 0$  有非零解, 因而  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$  不满秩。

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) &\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -a-15 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -a-15 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{不满秩因而 } a \neq -15} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -a-15 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(a+8)(a+22)}{(a+15)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因此  $a = -8$  或者  $a = -22$ .

$a = -8$  时,  $X = k_1(1, 1, -2, 1)^\top; k_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

$a = -22$  时,  $X = k_2(-1, 1, 8, -5)^\top; k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**例题** 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad (II) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases} ;$$

同解, 求  $a, b, c$ .



**解法** 显然  $r(B) \leq 2 < 3$ ; (I) 有非零二阶子式, 即  $r(A) \geq 2$ ; 又由于 (I), (II) 同解, 可以知道  $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 2$ .

因此,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & c-b-1 \\ 0 & 0 & c-b^2-1 \end{pmatrix}$$

且其秩为 2, 因此  $a-2 = c-b-1 = c-b^2-1 = 0$ , 即  $a=2$ ,  $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**例题** 设有  $A_{m \times n}, B_{m \times n}$ , 则  $AX=0, BX=0$  同解的充要条件为 \_\_\_\_\_.

- A)  $A, B$  向量组等价;
- B)  $A, B$  行向量组等价;
- C)  $A, B$  列向量组等价;
- D)  $A^T x = 0, B^T x = 0$  同解。

**方法** A) 仅有  $r(A) = r(B) = r(A, B), r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  未知;

B) 有  $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ , 符合定义, 因而正确;

C) 仅有  $r(A) = r(B)$ ;

D) 仅有  $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$ ;

# 第五章

## 矩阵的特征值与特征向量

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求 } \lambda_A \text{ 与 } \alpha_A \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象} \\ \text{具体} \\ \text{性质} \end{array} \right. \\ \text{相似} \left\{ \begin{array}{l} A \sim B \\ A \sim \Lambda (\text{判定与求解}) \\ \text{求 } A^n, A, \text{ 相似矩阵 } B \end{array} \right. \\ \text{对角化} \left\{ \begin{array}{l} \text{方阵 } A_n (\text{重根}) \\ \text{对称矩阵 } A (\text{结论}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 十七. 矩阵的特征值与特征向量

可能的情况

对抽象矩阵  $A$ ,

- 凑  $A\alpha = \lambda\alpha$ ;
- $A + kE$  不可逆 (求  $\lambda_A$  );

对具体矩阵  $A$ ,

- $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_A; \forall \lambda_0, (\lambda_0 E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha$ ;
- $A = B + kE, r(B) = 1$ ;

列表法

可以列表表示对  $A$  做变换时, 特征值特征向量的变化。

注意, 可以手动将待求矩阵拆为便于运算的形式, 如  $A = B + kE$  等。

秩为一的矩阵

对秩为一的矩阵,  $r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^\top$ ;

- $\lambda_1 = tr(A) = \alpha^\top \beta = \beta^\top \alpha, \lambda_2 = \dots, \lambda_n = 0$ ;
- 若  $tr(A) \neq 0$ , 对  $\lambda_1 = tr(A), A = \alpha\beta^\top \Rightarrow A\alpha = \alpha\beta^\top \alpha = tr(A)\alpha$ , 故  $\lambda_1 = tr(A)$  对应的无关特征向量为  $\alpha$ .





$A$	$\lambda$	$\alpha$
$A^k$	$\lambda^k$	$\alpha$
$A^m + kE$	$\lambda^m + kE$	$\alpha$
$A^{-1}$	$1/\lambda$	$\alpha$
$A^*$	$ A /\lambda$	$\alpha$
$A^\top$	$\lambda$	无法断定
$P^{-1}AP$	$\lambda$	$P^{-1}\alpha$

对其余的特征值  $\lambda_i = 0$ , 即解  $AX = 0 \Rightarrow \alpha\beta^\top X = 0$ , 发现其与  $\beta^\top X = 0$  同解。由于这里有  $n-1$  个无关特征向量, 加上  $\lambda_1$  的一个后共计  $n$  个无关特征向量, 注意到矩阵  $A$  可以相似对角化。

- 若  $\text{tr}(A) = 0$ , 则所有特征值都为 0. 此时仍求解  $AX = 0$ , 仍能解得  $n-1$  个无关特征向量; 因为不够  $n$  个, 矩阵  $A$  无法相似对角化。

故  $A$  能否相似对角化取决于其迹是否为零。

**例题** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = P^{-1}A^*P$ , 求  $B + 2E$  特征值特征向量。

**方法** 通过表格法, 发现  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda_A}$ , 特征向量仍为  $\alpha_A$ ; 而  $P^{-1}A^*P$  特征值仍为  $\frac{|A|}{\lambda_A}$ , 特征向量为  $P^{-1}\alpha_A$ . 只需求解  $A$  特征向量、特征值、行列式并按上述式计算即可。

**例题** 设  $A_{3 \times 3} = \alpha\beta^\top + \beta\alpha^\top$ ,  $\alpha, \beta$  为单位列向量,  $\alpha^\top\beta = \frac{1}{3}$ , 则

- 0 是  $A$  的特征值;
- $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  都是  $A$  的特征向量;
- $A$  可以相似对角化。

**证明** I.  $r(A) = r(\alpha\beta^\top + \beta\alpha^\top) \leq r(\alpha\beta^\top) + r(\beta\alpha^\top) = 2$ , 因而  $A$  不满秩, 故其必有  $\lambda_i = 0$ .

II. 由于

$$\begin{aligned} A(\alpha + \beta) &= \alpha\beta^\top\alpha + \alpha\beta^\top\beta + \beta\alpha^\top\alpha + \beta\alpha^\top\beta \\ &= [\text{tr}(A) + |\alpha|](\alpha + \beta) = \frac{4}{3}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

因而为特征向量;  $\alpha - \beta$  同理。

III. 可以算出其有特征值  $\lambda = 0, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$  互异, 故可以相似对角化。

## 十八. 相似性的判定

若存在可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = B$ , 或者  $AP = PB$ , 则称  $A, B$  相似。

**性质**

对相似的  $A, B$ ,



- $|A| = |B|; \text{tr}(A) = \text{tr}(B);$   
 $r(A) = r(B); \lambda_A = \lambda_B;$
- $P^{-1}A^nP = B^n; P^{-1}(A + kE)P = B + kE;$
- 若  $A \sim C, C \sim B$ , 则  $A \sim B$ .

**例题** 对相似的  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$ , 求  $a, b, c$ .

**方法** 由相似性质,  $\text{tr}(A) = 12 = \text{tr}(B) = 2b + c;$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 13 - a) = 0$  有解  $\lambda = b, b, c$ .

分别假设  $b = 2, c = 2$ , 得  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**例题** 设  $A_{3 \times 3}$  的互异的特征值为  $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3\}$ ; 对应的特征向量为  $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$ . 令  $\beta = \sum \alpha_i$ ,

- 证明  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关;
- 若  $A^3\beta = A\beta$ , 求  $r(A - E)$  与  $|A + 2E|$ .

**方法** I. 由于特征值互异, 其对应的特征向量线性无关。设有

$$k_1\beta_1 + k_2A\beta_2 + k_3A^2\beta_3 = \sum (k_1 + k_2\lambda_i + k_3\lambda_i^2)\alpha_i = 0;$$

由于  $\alpha_i$  无关, 知  $\forall i, k_1 + k_2\lambda_i + k_3\lambda_i^2 = 0$ , 而  $\lambda$  互异, 故对  $Ak = 0, |A| \neq 0$ , 故该方程只有零解, 故原向量组无关。

II. 当第一问中构造了一组无关向量时, 一般在第二问用到其列矩阵, 应用

- 相似;
- 矩阵乘法;

联系已知矩阵以构建方便计算待求结论的新矩阵。

令  $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$ , 则

$$\begin{aligned} AP &= (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = PB \end{aligned}$$

故  $A, B$  相似, 有  $r(A - E) = r(B - E) = 2, |A + 2E| = |B + 2E| = 6$ .

**例题** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ , 相似,

- 求  $x, y$ ;



II. 求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = B$ .

方法 I. 由题,  $|A| = 4(x-2) = |B| = -2y$ ,  $tr(A) = x-4 = tr(B) = y+1$ , 故解得  $x=3, y=-2$ .

II. 可以知道  $\lambda_A = \lambda_B = 2, -1, -2$ . 故  $A, B$  都相似于  $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ .

此时可以求  $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda, P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$ ;  $P_1, P_2$  各列是对应矩阵的特征向量;  
发现  $B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = \Lambda$ , 因此  $P = P_1P_2^{-1}$ .

## 十九. 相似对角化的判定与运算

### 定义

若存在可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$ , 则称方阵  $A$  可以相似对角化。

### 求解

- 可逆  $P$  阵

$A$  的  $n$  个线性无关的特征向量  $\alpha_A$  构成;

若特征向量的数目不够, 则其不可相似对角化。

- 对角矩阵  $\Lambda$

其由  $n$  个特征值对应, 特征值与特征向量的位置是对应的。

### 判定

- 充分条件

实对称矩阵  $\Rightarrow$  可相似对角化;

有  $n$  个互异特征值的矩阵  $\Rightarrow$  可相似对角化;

- 充要条件

可相似对角化  $\Leftrightarrow$  有  $n$  个无关特征向量

$\Leftrightarrow k$  重特征值对应  $k$  个无关特征向量

$\Leftrightarrow k = n - r(\lambda_0 E - A)$

$\Leftrightarrow r(\lambda_0 E - A) = n - k$

例题 设三阶矩阵  $A$  的特征值为  $1, 3, -2$ , 其对应的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ,

若  $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$ , 则  $P^{-1}A^*P = \underline{\hspace{2cm}}$ .

方法 由于三阶矩阵  $A$  的特征值为  $1, 3, -2$ , 其对应的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 对  $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$ , 其列分别对应的特征值为  $1, -2, 3$ . 注意, 此处  $-\alpha_2$  的系数  $-1$  不影响特征值的正负性。

对  $A^*$ , 其特征值为  $\frac{|A|}{\lambda} = -6, -2, 3$ , 因此  $P^{-1}A^*P$  对应的特征值的次序改变, 为  $-6, 3, -2$ , 因而有

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$



**例题** 设  $A$  为二阶矩阵,  $P = (\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  为非零向量且不是  $A$  的特征值,

I. 证明  $P$  为可逆矩阵;

II. 若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$  并判断其是否与对角矩阵相似。

**方法** I. 假设  $A$  不是可逆矩阵, 则其不满秩, 因而  $\alpha$  与  $A\alpha$  成比例。此时有  $A\alpha = k\alpha$ , 也即  $\alpha$  为  $A$  的特征值, 与题设矛盾, 因而  $A$  是可逆矩阵。

II. 由于

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\alpha, A\alpha) = P^{-1}(A\alpha, A^2\alpha) \\ &= P^{-1}(A\alpha, -A\alpha + 6\alpha) \\ &= P^{-1}(\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_B = P^{-1}PB = B, \end{aligned}$$

而  $\lambda_B = 2, -3$  互异, 因而可以相似对角化, 故  $A$  也可以相似对角化。

**例题** 设  $A, B, C$  为三阶矩阵, 有  $AB = -B, CA^T = 2C$ ,

$$\text{其中 } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix},$$

I. 求矩阵  $A$ ;

II. 求当  $a$  为何值时有  $A^{100}\xi = \xi$ .

**方法** I. 不妨设  $B = (\beta_i), C^T = (\gamma_i)$ , 注意到有  $(CA^T)^T = 2C^T \Rightarrow AC^T = 2C^T$ .

由于  $A\beta_1 = -\beta_1, A\beta_2 = -\beta_2, A\gamma_1 = 2\gamma_1$ , 知  $\lambda_A = -1, -1, 2, \alpha_A = \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ .

$$\text{因此, } A = P^{-1}\Lambda P, P = (\beta_1, \beta_2, \gamma_1), \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{可以解得 } A = P\Lambda P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & -15 & -9 \\ -6 & 22 & 18 \\ 3 & -15 & -17 \end{pmatrix}$$

II. 由于  $\beta_1, \beta_2$  为  $A$  的无关特征向量, 必有  $A^{100}(k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = (-1)^{100}(k_1\beta_1 + k_2\beta_2)$ , 而  $A^{100}\xi = \xi$ , 可以知道  $\xi$  可被  $\beta_1, \beta_2$  线性表出, 因此  $\xi = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$  必有解, 即

$$(\beta_1, \beta_2, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

有解, 因此  $a = -3$ .

## 二十. 实对称矩阵

对角化



- 可逆矩阵  $P$

必定存在可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 其中  $P$  由特征向量组成;

- 正交矩阵  $Q$

必定存在正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda$ , 其中  $Q$  经过了施密特正交单位化。

施密特正交化时, 对无关的一组  $\alpha_i$ , 有

- $\beta_1 = \alpha_1$ ;
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$
- $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$

### 求原矩阵

- 对  $P$  有  $A = P \Lambda P^{-1}$ ;
- 对  $Q = (\gamma_i)$  有  $A = Q \Lambda Q^T$ ;

特别地, 若  $r(A) = 1, A = \text{tr}(A) \gamma_1 \gamma_1^T$ .

**例题** 已知  $A$  为三阶实对称矩阵, 各行元素和均为 3, 且  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, (0, -1, 1)^T$  是  $AX = 0$  的解。

- 求  $A$  特征值与特征向量;
- 求正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q = \Lambda$ ;
- 求  $A$  以及  $(A - \frac{3}{2}E)^6$ .

**方法** I. 求特征向量时, 若未明示求无关特征向量, 则需给出全部特征向量。

由各行和均为 3 知  $A(1, 1, 1)^T = (3, 3, 3)^T = 3(1, 1, 1)^T$ , 故  $A$  有特征值 3, 其对应无关特征向量为  $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ ;

由题设,  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $\lambda = 0$  对应的无关特征向量。

因此,  $\lambda = 0$  对应的特征向量为  $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

$\lambda = 3$  对应的特征向量为  $k_3 \alpha_3, k_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

II. 可以知道  $\lambda_A = 0, 0, 3$ , 对应的无关特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

因为  $\alpha_3$  与另外二者正交, 对  $\alpha_1, \alpha_2$  做施密特正交化。故有

- $\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$ ;
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)^T$ ;

对全体做单位化, 故有  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \beta_1; \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_2; \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \beta_3$ ;

此时, 有  $Q = (\gamma_i)$  使得  $Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ .



III. 显然  $A = Q\Lambda Q^\top$ . 而  $r(A) = 1, \lambda = 0, 0, 3$ ,

$$\text{故有 } A = \text{tr}(A)\alpha_1\alpha_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \frac{3}{2}E)^6 = Q^\top(\Lambda - \frac{3}{2})Q$$

$$\begin{aligned} (A - \frac{3}{2}E)^6 &= Q^\top(\Lambda - \frac{3}{2})^6Q \\ &= Q^\top \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^6 Q \\ &= (\frac{3}{2})^6 Q^\top Q = (\frac{3}{2})^6 E. \end{aligned}$$

**例题** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$ , 有正交矩阵  $Q$  使得  $Q^\top A Q = \Lambda$ , 若  $Q$  的第一列为  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^\top$ , 求  $a, Q$ .

**方法** 由于存在特征值  $\lambda_1$  使得  $A\lambda_1 = \lambda_1(1, 2, 1)^\top$ , 可以解得  $a = -1, \lambda_1 = 2$ .

代入  $a = -1$ , 求  $|\lambda E - A| = 0$ , 解得  $\lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$ . 通过  $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$  求  $\alpha_2$ , 显然  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  正交. 因此由正交性,

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2i - 2j + 2k$$

$$\text{此时 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \end{pmatrix}.$$

# 第六章

## 二次型

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{二次型与性质} \left\{ \begin{array}{l} X^T A T \\ \text{二次型与标准形} \\ p+q=n \end{array} \right. \\ \text{二次型化为标准形} \left\{ \begin{array}{l} \text{配方法} \\ \text{正交变换} \end{array} \right. \\ \text{合同关系 } P^T A P = B (P \text{可逆}) \\ \text{正定判定} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义 } X^T A X > 0 \\ \text{充要条件} \\ \text{必要条件} \left\{ \begin{array}{l} a_{ii} > 0 \\ |A| > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 二十一. 二次型化为标准形

#### 可逆变换

若存在可逆  $C$  使得对  $X = CY, f = X^T A X = (CY)^T A C Y = Y^T C^T A C Y$ .

若有  $C^T A C = \Lambda$ , 则将  $f$  标准化了。

#### 正交变换

存在正交矩阵  $Q$  使得  $X = QY$ , 则  $f = X^T A X = Y^T \Lambda Y = \sum \lambda_i y_i^2$ ,

#### 配方法

利用完全平方式凑平方和, 进行变换。

**例题** 设有可逆矩阵  $P$  使得  $P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $P$ .

**方法** 要将  $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$  变为  $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$ ,

只需令  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P Y$  即可。此时的  $P$  即为所求。



**例题** 设实二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$  经正交变换  $X = QY$  可化为二次型  $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2, a \geq b$ ,

I. 求  $a, b$  的值;

II. 求  $Q$ .

**方法** I. 可以发现, 对  $f$  的矩阵  $A, g$  的矩阵  $B$ , 有  $Q_1^T A Q_1 = \Lambda = Q_2^T B Q_2$ ,

因此必有  $Q_2 Q_1^T A Q_1 Q_2^T = Q^T A Q = B$ , 而  $Q$  是实对称矩阵, 因此  $A, B$  相似;

其中,  $Q$  是第二问中的待求正交矩阵。

由于  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B), |A| = |B|, a \geq b$ , 解得  $a = 4, b = 1$ .

II. 对  $A$  的两个特征值  $5, 0$ , 对应的无关特征向量为  $(1, 2)^T, (2, -1)^T$ ,

对其单位化后得到  $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ;

对  $B$  的两个特征值  $5, 0$ , 对应的无关特征向量为  $(2, 1)^T, (1, -2)^T$ ,

对其单位化后得到  $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ;

前面已经指出,  $Q = Q_1 Q_2^T$ .

**例题** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$ ,

I. 写出  $f$  对应的矩阵;

II. 求正交变换  $x = Qy$  对应的矩阵;

III. 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解。

**方法** I. 显然  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

II. 由于  $A = \beta\beta^T, \beta = (1, 2, 3)^T$ , 有  $r(A) = 1, \lambda_A = 14, 0, 0$ ;

其中,  $\lambda = 14$  对应的无关特征向量为  $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$ ;  $\lambda = 0$  对应的无关特征向量为  $\alpha_2 = (2, -1, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, -1)^T$ .

对  $P = (\alpha_i)$  做施密特正交单位化, 得到

$$\circ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 3);$$

$$\circ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2, 1, 0);$$

$$\circ \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(3, 6, -5);$$

此时有  $Q = (\gamma_i)$  使得  $X = QY$  时有  $f(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2$ .

III. 配方, 发现  $f = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2$ , 因此  $f = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ .

显然该方程的所有解为  $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

**例题** 设二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_1x_2$  经正交变换  $x = QY$  化为  $3y_1^2 + by_2^2$ , 若  $B = Q_2^{-1}A^*Q$ , 其中

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$





- I. 求  $a, b$  及正交矩阵  $Q$ ;  
 II. 求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}BP = \Lambda$ , 并写出该  $\Lambda$ .

方法 I. 题设两个二次型中, 前者的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ , 后者的矩阵为  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . 可以知道,  $|A| = |B|$  且  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ , 因此  $a = 1, b = -1$ , 因此二者有特征值  $3, -1$ .

对  $A, \lambda = 3$  对应的无关特征向量为  $\alpha_1 = (1, 1)^\top$ ,  $\lambda = -1$  对应的无关特征向量为  $\alpha_2 = (-1, 1)^\top$ .

对  $(\alpha_1, \alpha_2)$  做施密特正交单位化, 得到  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

故存在上述  $Q$  使得  $X = QY$  时有  $f = 3y_1^2 - y_2^2$ .

II. 由上问知  $\exists P_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$  使得  $P_1^{-1}AP = \Lambda_1$ . 故  $P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{\lambda_1} & \\ & \frac{|A|}{\lambda_2} \end{pmatrix}$ .

$A^* = P_1\Lambda_1P_1^{-1}, B = Q_2^{-1}A^*Q_2$ , 故有  $B = Q_2^{-1}A^*Q_2 = Q_2^{-1}P_1\Lambda_1P_1^{-1}Q_2$ , 即  $P_1^{-1}Q_2\Lambda_1Q_2^{-1}P_1 = (Q_2^{-1}P_1)^{-1}\Lambda_1(Q_2^{-1}P_1) = \Lambda_1$ . 此时  $P = Q_2^{-1}P_1$ .

因此上述  $P$  可使得  $P^{-1}BP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$ .

例题 设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$ , 其中  $a$  是参数,

- I. 求  $f = 0$  的解;  
 II. 求  $f$  的规范型.

方法 I. 令  $f = 0$ , 由  $f$  的半正定性, 有

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

当  $a \neq 2$  时, 方程仅有零解;

当  $a = 2$  时, 方程的解为  $k(-2, -1, 1)^\top, k \in \mathbb{R}$ .

II. 当  $a \neq 2$  时,  $A$  可逆, 因此令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + ax_3 \end{cases}$$

此时有  $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ;

当  $a = 2$  时,  $A$  不可逆. 注意到  $f = 2(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2$ ,

故令  $\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{3}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$  则有  $f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$ ;



$$\text{令 } \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}y_1 \\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{则有 } f = z_1^2 + z_2^2.$$

**例题** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_1x_3$ , 利用可逆线性变换  $X = PZ$  使得  $f$  化为标准形, 并求二次型的正负惯性指数。

$$\text{方法 令 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \text{ 则有 } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1 Y.$$

此时有  $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_1y_2 + y_2y_3$ .

此时又有  $f = 2(y_1 + \frac{7}{4}y_3)^2 - 2(y_2 - \frac{y_3}{4})^2 - 6y_3^2$ ,

$$\text{故令 } \begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{7}{4}y_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{y_3}{4} \\ z_3 = 6y_3 \end{cases}, \text{ 则有 } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1 Y.$$

此时有  $f = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 6z_3^2$ .

因此正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

## 二十二. 合同判定

### 定义

若存在可逆矩阵使得  $P^T A P = B$ , 则称  $A, B$  合同。

二次型变化的矩阵是合同的, 因为

$$\begin{aligned} f \xrightarrow{X=PY} X^T A X &\Rightarrow (PY)^T A (PY) \\ &= X^T (P^T A P) Y \triangleq Y^T B Y \end{aligned}$$

### 判定

- 惯性指数相同  $\Leftrightarrow$  合同;
- 特征值正负个数相同  $\Leftrightarrow$  合同;

相似  $\Rightarrow$  特征值相等  $\Rightarrow$  合同, 故相似必合同。

**例题** 设  $A, B$  均为  $n$  阶实对称矩阵可逆矩阵, 则在

- A)  $PA = B$ ;
- B)  $P^{-1}ABP = BA$ ;
- C)  $P^{-1}AP = B$ ;



D)  $P^T A^2 P = B^2$ .

中, 正确的是 \_\_\_\_\_.

方法 A) 由于  $PA = B$ , 有  $r(A) = r(B)$ , 而  $r(A) = r(B) = n$ , 故  $P$  必定存在。

B) 当  $P = A$  时显然成立。

C) 可以知道  $A, B$  分别与一对角矩阵相似, 但两对角矩阵不一定相同。

D) 由于  $A, B$  可逆, 其必定满秩, 所有特征值都不为零, 故  $A^2, B^2$  特征值均大于零, 故二者正惯性指数均为  $n$ , 负惯性指数均为  $0$ , 因而合同。

## 二十三. 正定判定

定义

若对任意非零  $X$  都有  $f = X^T A X > 0$ , 则称  $f(x)$  为正定二次型。

判定

二次型  $A$  正定与以下任意一点等价。

- $A$  的所有顺序主子式大于零。

三阶方阵的顺序主子式形如

$$\begin{vmatrix} | & | & | \\ | & \cdot & \cdot \\ | & \cdot & \cdot \\ | & \cdot & \cdot \\ | & \cdot & \cdot \\ | & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

- 所有特征值大于零;
- 正惯性指数为  $n$ ;
- $A$  与  $E$  合同, 即  $\exists P, A = P^T P$ .

例题 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $r(A) = m$ , 则在命题

- A)  $AA^T$  与单位矩阵等价;
- B)  $AA^T$  与对角矩阵相似;
- C)  $AA^T$  与单位矩阵合同;
- D)  $AA^T$  是正定矩阵;

中, 正确的是 \_\_\_\_\_.

方法

$$\begin{aligned} r(AA^T) = r(A) = m &\Leftrightarrow |AA^T| \neq 0 \Leftrightarrow AA^T \text{可逆} \\ &\Leftrightarrow AA^T \text{与 } E_m \text{等价} \Leftrightarrow AA^T \text{行/列向量无关} \\ &\Leftrightarrow (AA^T)X = 0 \text{仅有零解} \Leftrightarrow (AA^T)X = b \text{仅有唯一解} \\ &\Leftrightarrow AA^T \text{任意特征值不为零} \end{aligned}$$

由于  $(AA^T)^T = AA^T$ , 其必能相似对角化, 因而正定, 与  $E$  合同。



## 二十四. 两点总结

### 矩阵的三大关系

- 等价
  - 对  $m \times n$  的  $A, B, A \xrightarrow{\text{变换}} B$  成立;
  - $PAQ = B$  或  $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A, B$  等价;
- 相似
  - 对  $A_n, B_n, P^{-1}AP = B$  成立;
  - $\lambda_A = \lambda_B$  且  $A, B$  均可相似对角化  $\Leftarrow$  相似;
- 合同
  - 对  $A_n, B_n, P^{\top}AP = B$  成立;
  - 惯性指数相同  $\Leftrightarrow$  合同。

**例题** 已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $t$  为何值时,

- I.  $A$  是正定矩阵;
- II.  $A, B$  等价;
- III.  $A, C$  相似;
- IV.  $A, D$  合同。

**方法** I. 由于  $A$  的一、二阶顺序主子式大于零, 只需让其三阶主子式也即行列式大于零, 此时  $t > 0$ ;  
 II. 可以知道  $r(B) = 2$ , 因此  $r(A) = 2$  时二者等价, 此时  $t = 0$ .  
 III. 显然  $C$  的特征值为  $1, 3, 5$ , 且其显然可以相似对角化, 因此只需令  $A$  特征值也为  $1, 3, 5$  时就有二者相似, 此时  $t = 5$ ;  
 IV. 由于  $f = X^{\top}DX$  的正负惯性指数分别为  $2, 1$ , 因此只需让  $f = X^{\top}AX$  正负惯性指数与其相同即可, 此时  $t < 0$ .

### 变换

仅可用行变换的有

- 求逆矩阵  $(A : E) \rightarrow (E : A^{-1})$ ;
- 极大无关组;
- 求解线性方程组 (齐次/非齐次);
- 求特征向量;



仅可用列变换的有求逆矩阵  $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$ ;

行列均可的有

- 求行列式  $|A|$ ;
- 求秩  $r(A)$ ;
- 初等矩阵的理解

在不知道初等矩阵放在左边还是右边时，按行或按列理解都可以。

不能应用行列变换的有

- 求特征值;
- 化简矩阵等式。