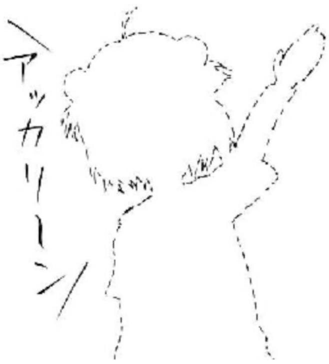

线性代数提高笔记

奇峰

之前

目录

概述

题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\begin{cases} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵 } (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \text{秩（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数} \begin{cases} \text{可逆变换} \\ p+q=r \end{cases} \end{cases}$$

大题部分主要涵盖

$$\begin{cases} \text{方程组} \begin{cases} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{cases} \\ \text{相似形（二次型）} \end{cases}$$

一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\begin{cases} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i)\text{是否相关?} \\ AX = 0\text{的基解?} \\ A \sim B \\ p+q=r \end{cases}$$

一种方法

初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\begin{cases} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{cases}$$

第一章

行列式

定义与性质

$$\begin{cases} \text{三大定义} \begin{cases} \text{几何定义;} \\ \text{逆序定义;} \\ \text{展开定义;} \end{cases} \\ \text{计算} \begin{cases} \text{数值形;} \\ \text{含参形;} \\ \text{抽象形;} \end{cases} \\ \text{证明}|A| = 0 \begin{cases} |A| = -|A|; \\ r(A) < n; \\ \text{不可逆（常用于反证）;} \\ AX = 0\text{有非零解;} \\ \exists \lambda_0 = 0; \end{cases} \end{cases}$$

一. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
  - 三角形
  - 范德蒙德行列式
  - 分块
- 特殊形状的行列式

二. 代数余子式

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

注意，

- 其为 $(n-1)$ 阶子式;
- 其线性组合 $\sum_i a_i A_k i$ 相当于将行列式第 k 行元素替换为 (a_i);
- $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$
- 伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^\top \triangleq \mathbf{|A|\cdot A^{-1}}$

对数值型矩阵 A, 求 A^* 时，可先求 $|A|$ 并利用 $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\vdots A^{-1})$ 求 A^{-1}, 再利用公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 求伴随矩阵。

三. 抽象矩阵行列式

性质

i. 对已知 $A=(\alpha_i)$ 的矩阵，可以 $\begin{cases}\text{行列式列消}\\ \text{可逆时，}\begin{cases}\text{矩阵乘法}\\ \text{相似}\end{cases}\end{cases}$

ii. $|kA|=k^n|A|$, 其中 k 可以是行列式;

$|A^\top|=|A|,|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$;

iii. 设 A 可逆，则 A^* 可逆，且有

$|A^*|=|A|^{n-1};(A^*)^*=|A|^{n-2}A$;

$|(A^*)^*|=A^{(n-1)^2}$;

iv. $|A|=\prod\lambda_i;tr(A)=\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$;

v. $P^{-1}AP=B\Rightarrow|A|=|B|$;

vi. $aA+bE$ 不可逆 $\Leftrightarrow|aA+bE|=0\Rightarrow\exists\lambda_0=\dfrac{-b}{a}$;

vii. $AA^\top=A^\top A=E\Rightarrow|A|=\pm1$;

viii. 对可逆矩阵 $A,|A+\alpha\beta^\top|=|A|(1+\beta^\top A^{-1}\alpha)$;

对 $B=\alpha\beta^\top,|\lambda E+\alpha\beta^\top|=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$;

ix. 对 A_n, 若 $A^2=A,A\neq E$, 则有 $|A|=0$.

- 反证

  假设 A 可逆，则 $A^2A^{-1}=AA^{-1}=E\Rightarrow A=E$, 与题设矛盾，故 A 不可逆，因此 $|A|=0$.

- 秩

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O\Rightarrow r(A)+r(A-E)\leq n$;

  $A\neq E\Rightarrow r(A-E)>0\Rightarrow r(A)<n\Rightarrow|A|=0$.

- 方程组

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O; A\neq E\Rightarrow AX=O$ 存在非零解，因此 $r(A)<n$, 即 $|A|=0$.
- 特征值

  $A(A-E)=O=O(A-E), A\neq E$, 因此 A 存在一特征值 $\lambda_0=0$, 此时 $|A|=\prod\lambda=0$.

其中，对于第八条，

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+\alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta^\top A^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (ii)$$

显然 $(i),(ii)$ 的两边也相等。此时对二者右边取得行列式，得到

$$|A+\alpha\beta^\top|=|A|(1+\beta^\top A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子 $D=\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为 $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为 A, 后者为 $\alpha\beta^\top$.

ii. $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E-(-\alpha\beta^\top)|$, 此时视 $A=\lambda E$,

套用前述方法有 $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E|(1+\beta^\top(\lambda E)^{-1}\alpha)=\lambda^n(1+\frac{\beta^\top\alpha}{\lambda})=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$.

注意，若有 $AB=O, B=(\beta_i)$, 则考虑

- $r(A)+r(B)\leq n$;
- B 的列向量为 $AX=O$ 的一组解；
- $A\beta_i=O=O\beta_i$, 此时 B 的列向量为 $\lambda_A=0$ 的特征向量。

计算抽象行列式

计算抽象的行列式时，若其有法则，如 $A^{-1}, A^\top, A^*$, 则利用其法则，若其无法则，则利用 $E=AA^{-1}$ 或 $E=AA^\top$.

对求 $|A+B|$ 的情况，由于无法则，考虑添加 E, 此时“一前一后，前者前，后者后。”对于

$$|A+B|=|E_1A+BE_2|,\quad E_1,E_2\text{都是单位矩阵}$$

有

- E_1 在 A 前，E_2 在 B 后，此谓一前一后；
- E_1 拆时，考虑同在前面的 B, 即 $B^{-1}B$ 或 BB^{-1}, 此谓前者前；
- E_2 拆时，考虑同在后面的 A, 即 $A^{-1}A$ 或 AA^{-1}, 此谓后者后；

由行列式值求参数

需要加减・消元・出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数 $\lambda-2$.

四. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数（行列式和最高次方）
- 根与系数的关系

  对 $f(x)=D=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ 及其根 x_i 有 $\begin{cases} \sum x_i = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$

矩阵加边

对行列式 D_n, 显然

$$|D| = \left|\begin{array}{c:ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right|$$

其中，为 $*$ 的部分可以为任意值，因此可以按题面设置易于计算的值。另外，加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式，使得其虽然不等于原式，但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$

可以将其变为

$$f(x)=\begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{增补行} \\ \\ \end{matrix}$$

并按照第一列展开，此时 x^3 的系数 A_3 正好为 $-|D|$, 而 x^4 的系数 A_4 为范德蒙德行列式，值为 $\prod(x_i-x_j)$, 由前述结论，$\sum a_i=-\dfrac{A_3}{A_4}$, 整理即得到结论。

第二章

矩阵

$$\begin{cases} \text{定义与运算}\begin{cases} AB\neq BA;(kE,A^{-1},A^*,A^T\Leftrightarrow A)\\ AB=0\not\Leftrightarrow A=0\text{或}B=0;A^2=0\text{同理}\\ AB=AC\Rightarrow B=C,\text{当且仅当}A\text{可逆时成立}\end{cases}\\ \text{特殊矩阵 - }E,\Lambda,A^\top=A,AA^\top=E\\ \text{伴随矩阵}A^*\\ \text{可逆矩阵}\begin{cases}\text{定义}\\ \text{求法}\\ \text{证明}A\text{可逆}\end{cases}\\ \text{初等矩阵（逆，变换）}\\ \text{秩(性质）}\\ \text{应用}\begin{cases}\text{矩阵方程}\\ \text{求}A^n\end{cases}\end{cases}$$

五. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$\begin{cases} \text{求}A^*\begin{cases}\text{定义法 - }A^*=(A_{ij})^\top\\ \text{公式法 - }A^*=|A|A^{-1}\end{cases}\\ \text{性质}\begin{cases} AA^*=A^*A=|A|E(\text{可推广为}\Delta\Delta^*=\Delta^*\Delta=|\Delta|E)\\ (kA)^*=k^{n-1}A^*\\ (A^*)^*=|A|^{n-2}A\\ |A^*|=|A|^{n-1}\\ |(A^*)^*|=|A|^{(n-1)^2}\\ A^{-1,\top,*}\text{之间可以互换，如}(A^{-1})^\top=(A^\top)^{-1}\end{cases}\end{cases}$$

矩阵行列和的结论

对矩阵 A, 若其每行元素和均为 k, 则有 $A(1,1,1)^\top=(k,k,k)^\top=k(1,1,1)^\top(\lambda\alpha)$;

若为每列元素和均为 k, 有 $(1,1,1)A=(k,k,k)$, 转置后与前者相同。

右乘/左乘 A^*, 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i,j), a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^* = A^\top \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;
- $\forall(i,j), a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^* = -A^\top \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = -1$;

  也可以使用矩阵表达式替代 A.

六. 可逆矩阵的应用

$$\text{可逆矩阵的判定}\begin{cases} AB = BA = kE(\text{此时}A^{-1} = \dfrac{1}{k}B) \\ A\text{可逆} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ r(A) = n \\ A\text{的列向量线性无关} \\ AX = 0\text{仅有零解} \\ AX = b\text{有唯一解} \\ \forall\lambda, \lambda \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{可逆矩阵的计算}\begin{cases} \text{抽象}\begin{cases} \text{凑}AB = E \\ \text{利用性质}\begin{cases} (A^{-1})^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{cases} \end{cases} \\ \text{具体}\begin{cases} \text{低阶 (2-3) - } A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换 - } (A:E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E:A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{cases} \end{cases}$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块
  - 仅在主对角上非零的分块
    $$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$
  - 仅“缺一块”的分块

    方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。
    $$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$
    $$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 副对角分块

  副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

  - 仅在副对角上非零的分块
    $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$
  - 仅“缺一块”的分块
    $\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}DC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$
    $\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$

可交换矩阵的结论

- 线性组合 - $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$;
- 一元二次形式 - $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$;

  证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

  其中，对前者，

$$
\begin{aligned}
AB = aA + bB \Rightarrow\ & A(B - aE) - bB = O \\
& \Rightarrow A(B - aE) - b(B \mathbf{- aE + aE}) = O \\
& \Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\
& = (B - aE)(A - bE) = abE \\
& \Rightarrow (A - bE)(B - aE) = (B - aE)(A - bE)
\end{aligned}
$$

展开，可以证明结论。

七. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

	符号	行列式	逆
交换	E_{ij}	-1	$E_{ij}(k)$
倍乘	$E_i(k)$	k	$E_i(1/k)$
倍加	$E_{ij}(k)$	1	$E_{ij}(-k)$

利用性质计算矩阵

有例子

$$
\begin{aligned}
E_{12}A = B \Rightarrow &\begin{cases} -|A| = |B| \\ A^{-1}E_{12} = B^{-1} \end{cases} \\
&\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12} = |B|B^{-1} \\
&\Rightarrow -A^*E_{12} = B^*
\end{aligned}
$$

八. 求矩阵的秩

秩的求解

$$
\begin{cases}
\text{定义}\begin{cases} r\text{阶至少一非零} \\ r+1\text{阶全为零} \end{cases} \\
\text{初等变换法（行列均可）- } A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵}B\text{, 非零行数即为秩} \\
\text{非零特征根的个数是秩}
\end{cases}
$$

性质

- 对 $A_{m\times n}$, 有 $r(A) = r(A^\top A) = r(AA^\top) = r(A^\top) = r(kA)$.
  - 证明 $r(A^\top A) = r(A)$
    利用同解方程组。
    $$
    \begin{aligned}
    A^\top AX = O &\Rightarrow X^\top A^\top AX = O \\
    &\Rightarrow (AX)^\top AX = O \\
    &\Rightarrow |AX| = 0 \\
    &\Rightarrow AX = O
    \end{aligned}
    $$
    $$AX = O \Rightarrow A^\top AX = O$$
    因此 A 与 $A^\top A$ 同解，故其秩相等。
- $r(A_{m\times n}) \leq \min(m, n)$.
- $r(AB) \leq r(A); r(AB) \leq r(B)$. 对前者，$B$ 可逆时等号成立。
- $r(A : B) \leq r(A) + r(B)$;
  $r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B)$
- 对矩阵 $A_{m\times \mathbf{n}}, B_{\mathbf{n}\times s}, AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq \mathbf{n}$.
  此即所谓“前看列，后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时，都应考虑这一句。
  - 证明
    $AB = O \Rightarrow B$ 的列向量 β_i 是 $AX = O$ 的一组解，此时 $r(\beta_i) = r(B) \leq n - r(A) \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$.

- 对 A_n, 其伴随矩阵的秩 $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1(n\geq 2) \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

- $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$

- 若 P,Q 可逆，则有 $r(PA)=r(AQ)=\overbrace{r(PAQ)=r(A)}^{\text{矩阵等价}}$
  若 $B=PAQ$ 或 $r(B)=r(A)$, 称 A,B 等价。

- 对 $A_{m\times n}$, 若其行满秩，则 $r(A)=m, A\sim(E_m,O)$.

- 对 $A_{m\times n}, r(A)=n\Rightarrow r(AB)$;
  $r(A)=m, r(BA)=r(B)$.
  - 证明前者成立
    $r(B)\leq r(AB)\leq r(A^{-1}AB)=r(B)$, 故 $r(AB)=r(B)$.

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2=A\Rightarrow r(A)+r(A-E)=n$.
- $A^2=E\Rightarrow r(A-E)+r(A+E)=n$.
  - 证明后者成立

$$\begin{aligned}(A-E)(A+E)=0\Rightarrow n\geq r(A-E)+r(A+E)=r(A-E)+r(-(\mathbf{A}-\mathbf{E}))\geq r(2E)=n\\ \Rightarrow r(A-E)+r(A+E)=n\end{aligned}$$

事实上，对于 A 的一元二次式，若其可因式分解，则分解后的因式都满秩。

九. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX=C\Rightarrow X=A^{-1}C$
- $XA=C\Rightarrow X=CA^{-1}$
- $AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX=C\Rightarrow A(X_i)=(C_i)$, 其中 X_i,C_i 是对应矩阵的列向量，解得到的 n 个非齐次方程组即可。
- $XA=C\Rightarrow A^\top X^\top=C^\top$, 然后同上。

十. 计算 n 阶矩阵高次幂

- 归纳运算。
- $r(A)=1$ 时，有 $A^n=tr(A)^{n-1}A$.
- $A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ & 0 & c\\ & & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} & & ac\\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n\geq 3}=O$.
- 相似性

  若 $P^{-1}AP=B$, 则有 $P^{-1}A^nP=B^n$, 其中 P 不变，

第三章

向量

$$
\begin{cases}
\text{向量运算}\begin{cases}
\text{服从矩阵运算规律} \\
\text{内积 } (\alpha,\beta)=\alpha^{\top}\beta=\beta^{\top}\alpha(=tr(A)) \\
\text{两向量内积为零时，两向量正交} \\
\text{正交矩阵}\begin{cases}\text{单位 - 任意列向量为单位向量} \\ \text{正交 - 任意两列向量正交}\end{cases}
\end{cases} \\
\text{相关性}\begin{cases}\text{定义} \\ \text{判定}\end{cases} \\
\text{线性表示}\begin{cases}
\text{向量组表示} \\
\text{向量组等价} \\
\text{极大无关组}\begin{cases}\text{求法} \\ \text{秩}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

十一. 相关性

定义法

定义法常用于证明相关/无关性。

令 $\sum k_i\alpha_i=\vec{0}$, 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出 $\forall i, k_i=0$, 则 α_i 线性无关。

秩

$$
\begin{cases}
r(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathbf{s}})=\mathbf{S}\Rightarrow(\alpha_i)\text{线性无关} \\
r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<S\Rightarrow(\alpha_i)\text{线性相关}
\end{cases}
$$

性质

- α_i 线性无关 $\Leftrightarrow (\alpha_i)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$ 仅有零解。
- 满足以下任意一条则线性相关。
  - 内含零向量；
  - 内含等比例向量；
  - 内含可表示向量。
- 向量个数大于维数必相关（利用秩证明）。
- 全部无关，一部无关；一部相关，全部相关。
- 原本相关，缩短相关，原本无关，加长无关。（改变的是维数）
- 以少表多，多必相关。

对于一组能组成方阵的 (α_i), 若其方阵 P 满足 $AP = PB$, 则这组向量无关。此处运用了相似的性质。

十二. 线性表示

$$\begin{cases} \text{一个向量，} \beta = \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i \Leftrightarrow (\alpha_i)X = \beta \\ \text{一组向量，} \beta_i = \sum_{j=1}^{s} x_{ij}\alpha_j; i = 1, 2, \cdots, t \\ \text{两组互相表示，即} \\ \text{向量组等价} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, \beta_i = \sum_j x_{ij}\alpha_j \\ \forall j, \alpha_j = \sum_i x_{ij}\beta_i \end{cases} \end{cases}$$

判定

- β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta)$, 注意此时不一定满秩；
- $\forall i, \beta_i$ 均可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出 $\forall i, \Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta_i)$;
- 向量组 (I),(II) 等价 $\Rightarrow r(\text{I}) = r(\text{II}) = r(\text{I,II})$

十三. 秩与极大线性无关组

定义

对 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中有部分向量 $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{it}$, 其

- 线性无关；

- 任意剩余向量都可由这组向量表示，

  则称 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it}$ 为极大线性无关组。

性质

- 无关组不唯一，但是其个数唯一；
- 只有 $\vec{0}$ 的向量组无极大无关组；
- 向量组的秩为极大无关组向量个数；
- 向量组与其极大无关组等价；极大无关组之间也等价。

求解 - 列写行消

$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\xrightarrow{\text{行变换}}B_{\text{阶梯}}$, 从每个台阶中选一列组成极大无关组。

第四章

线性方程组

$$\begin{cases} \text{齐次方程组}AX=0\begin{cases}\text{表示形式}\begin{cases}\text{矩阵}\\ \text{向量}\end{cases}\\ \text{有解的判定}\\ \text{解的性质}\begin{cases}\text{通解}\\ \text{基解}\\ \text{组合}\end{cases}\\ \text{求解方法}\end{cases}\\ \text{非齐次方程组}AX=b\begin{cases}\text{有解判定}\\ \text{解的性质}\\ \text{解的结构 - 齐通 + 非齐特}\end{cases}\\ \text{同解与公共解}\begin{cases}\text{通解 - 解集相同}\\ \text{公共解 - 解集有交集}\end{cases}\end{cases}$$

十四. 解的判定

对于齐次方程 $AX=0,\begin{cases}\text{只有零解}\Rightarrow r(A)=n\\ \text{有非零解}\Rightarrow r(A)<n\end{cases}$.

其基础解系

- 为 $AX=0$ 的解；
- 线性无关；
- 数量为 $n-r(A)$ 个。

对于非齐次方程 $AX=b,\begin{cases}\text{无解}\Rightarrow r(A)\neq r(\bar{A})\\ \text{有解}\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})\begin{cases}=n\Rightarrow\text{解唯一}\\ <n\Rightarrow\text{解不唯一（无穷）}\end{cases}\end{cases}$

十五. 求通解

对于具体的数字矩阵，通过行变换或高斯消元做。

对抽象矩阵，

- 通解为齐通 + 非齐特；
- 齐解任意组合仍然为齐解；
- 若 $\xi_1,\cdots,\xi_t$ 均为 $AX=b$ 的解，则 $\sum k_i\xi_i$ 为 $\begin{cases}\text{齐解，} \sum k=0\\ \text{非齐解，} \sum k=1\end{cases}$

例题 三阶行列式 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$, 则

I. $r(A)=2$;

II. 若有 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 求方程组 $AX=b$ 的通解。

方法 I. $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2\Rightarrow$ 可列消 $\alpha_3\Rightarrow r(A)\leq 2$.

有三个互异特征值 $\Rightarrow$ 可相似对角化 $\Rightarrow r(A)\geq 2$ 因为至多一个特征值为零。

故 $r(A)=2$.

II. 由于 $r(A)=2, X$ 的基解有一个向量。

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2\Rightarrow\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0\Rightarrow$ 一齐解为 $(1,2,-1)^\top$.

$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\Rightarrow A(1,1,1)^\top=\beta$, 故一非齐解为 $(1,1,1)^\top$.

故通解为 $(1,1,1)^\top+k(1,2,-1)^\top$, 其中 $k\in\mathbb{R}$.

例题 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$, 求满足 $AB=E_3$ 的所有矩阵 B.

方法 不妨令 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则有 $A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 此时对 $A\beta_i=\xi_i$ 求解。

注意到可以通过对 $\begin{pmatrix}A&\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{pmatrix}$ 做初等行变换一起完成高斯消元。解出 β_i, 则 (β_i) 即为所求 B.

注意，若待求式为 $XA=B$, 则转置为 $A^\top X^\top=B^\top$.

十六. 方程组的同解与公共解

公共解

即两方程解集交集非空。具体而言，

- 方程组已知 - 联立；

- 知一方程组与另一通解 - 用通解表示公共解，代回方程求解；
- 知两组通解 - 待定系数设通解，使通解相等求系数。

同解

即两方程解集相同。

当 $r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 时，$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解。

例题 设有方程组 $(I):\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$ 与方程组 (II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^\top+k_2(-1,2,2,1)^\top$,

I. 求 (I) 基础解系；

II. 求 $(I),(II)$ 是否有非零公共解；若有则将其列出。

方法 I. 由高斯消元法，其基础解系为 $(0,0,1,0)^\top,(-1,1,0,1)^\top$.

II. 不妨设公共解为 $k_1(0,1,1,0)^\top+k_2(-1,2,2,1)^\top$, 即 $(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^\top,k_1,k_2\in\mathbb{R}$; 将其代入 (I), 有 $k_1=-k_2$, 此时原公共解为 $k(1,-1,-1,-1)^\top,k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

例题 设有 2×4 矩阵 A,B, 且 $(I)AX=0$ 通解为 $k_1(1,2,2,-1)^\top+k_2(0,-1,-3,2)^\top,(II)BX=0$ 通解为 $\mu_1(2,-1,a+2,1)^\top+\mu_2(-1,2,4,a+8)^\top$, 其中 $k_1,k_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, 若 $(I),(II)$ 有非零公共解，求 a 及所有非零公共解。

方法 设公共解为 $X=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$, 即方程 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)(k_1,k_2,l_1,l_2)^\top=0$ 有非零解，因而 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ 不满秩。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&5&-4\\0&0&-a-15&7\\0&0&7&-a-15\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{不满秩因而}a\neq-15}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&5&-4\\0&0&-a-15&7\\0&0&0&-\dfrac{(a+8)(a+22)}{(a+15)}\end{pmatrix}$$

因此 $a=-8$ 或者 $a=-22$.

$a=-8$ 时，$X=k_1(1,1,-2,1)^\top;k_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

$a=-22$ 时，$X=k_2(-1,1,8,-5)^\top;k_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

例题 已知齐次线性方程组

$$(I)\quad\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases};\quad(II)\quad\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases};$$

同解，求 a,b,c.

解法 显然 $r(B) \leq 2 < 3$; (I) 有非零二阶子式，即 $r(A) \geq 2$; 又由于 (I),(II) 同解，可以知道 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 2$.

因此，

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & c-b-1 \\ 0 & 0 & c-b^2-1 \end{pmatrix}$$

且其秩为 2, 因此 $a-2 = c-b-1 = c-b^2-1 = 0$, 即 $a = 2, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例题 设有 $A_{m\times n}, B_{m\times n}$, 则 $AX = 0, BX = 0$ 同解的充要条件为 ______.

A) A, B 向量组等价；

B) A, B 行向量组等价；

C) A, B 列向量组等价；

D) $A^\top x = 0, B^\top x = 0$ 同解。

方法 A) 仅有 $r(A) = r(B) = r(A, B), r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 未知；

B) 有 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 符合定义，因而正确；

C) 仅有 $r(A) = r(B)$;

D) 仅有 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A^\top \\ B^\top \end{pmatrix}$;

第五章
矩阵的特征值与特征向量

$$
\begin{cases}
\text{求}\lambda_A\text{与}\alpha_A \begin{cases} \text{抽象} \\ \text{具体} \\ \text{性质} \end{cases} \\
\text{相似} \begin{cases} A \sim B \\ A \sim \Lambda(\text{判定与求解}) \\ \text{求}A^n, A, \text{相似矩阵}B \end{cases} \\
\text{对角化} \begin{cases} \text{方阵}A_n(\text{重根}) \\ \text{对称矩阵}A(\text{结论}) \end{cases}
\end{cases}
$$

十七. 矩阵的特征值与特征向量

可能的情况

对抽象矩阵 A,

- 凑 $A\alpha = \lambda\alpha$;
- $A + kE$ 不可逆 (求 λ_A);

对具体矩阵 A,

- $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_A; \forall\lambda_0, (\lambda_0 E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha$;
- $A = B + kE, r(B) = 1$;

列表法

可以列表表示对 A 做变换时，特征值特征向量的变化。

注意，可以手动将待求矩阵拆为便于运算的形式，如 $A = B + kE$ 等。

秩为一的矩阵

对秩为一的矩阵，$r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^\top$;

- $\lambda_1 = tr(A) = \alpha^\top\beta = \beta^\top\alpha, \lambda_2 = \cdots, \lambda_n = 0$;
-
  - 若 $tr(A) \neq 0$, 对 $\lambda_1 = tr(A)$, $A = \alpha\beta^\top \Rightarrow A\alpha = \alpha\beta^\top\alpha = tr(A)\alpha$, 故 $\lambda_1 = tr(A)$ 对应的无关特征向量为 α.

A	λ	α
A^k	λ^k	α
A^m+kE	λ^m+kE	α
A^{-1}	$1/\lambda$	α
A^*	$\lvert A\rvert/\lambda$	α
$A^\top$	λ	无法断定
$P^{-1}AP$	λ	$\mathbf{P^{-1}}\alpha$

对其余的特征值 $\lambda_i=0$, 即解 $AX=0\Rightarrow\alpha\beta^\top X=0$, 发现其与 $\beta^\top X=0$ 同解。由于这里有 $n-1$ 个无关特征向量，加上 λ_1 的一个后共计 n 个无关特征向量，注意到矩阵 A 可以相似对角化。

- 若 $tr(A)=0$, 则所有特征值都为 0. 此时仍求解 $AX=0$, 仍能解得 $n-1$ 个无关特征向量；因为不够 n 个，矩阵 A 无法相似对角化。

故 A 能否相似对角化取决于其迹是否为零。

例题 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=P^{-1}A^*P$, 求 $B+2E$ 特征值特征向量。

方法 通过表格法，发现 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_A}$, 特征向量仍为 α_A; 而 $P^{-1}A^*P$ 特征值仍为 $\dfrac{|A|}{\lambda_A}$, 特征向量为为 $P^{-1}\alpha_A$. 只需求解 A 特征向量、特征值、行列式并按上述式计算即可。

例题 设 $A_{3\times3}=\alpha\beta^\top+\beta\alpha^\top,\alpha,\beta$ 为单位列向量，$\alpha^\top\beta=\dfrac{1}{3}$, 则

I. 0 是 A 的特征值；

II. $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 都是 A 的特征向量；

III. A 可以相似对角化。

证明 I. $r(A)=r(\alpha\beta^\top+\beta\alpha^\top)\le r(\alpha\beta^\top)+r(\beta\alpha^\top)=2$, 因而 A 不满秩，故其必有 $\lambda_i=0$.

II. 由于

$$\begin{aligned}A(\alpha+\beta)&=\alpha\beta^\top\alpha+\alpha\beta^\top\beta+\beta\alpha^\top\alpha+\beta\alpha^\top\beta\\&=[tr(A)+|\alpha|](\alpha+\beta)=\frac{4}{3}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

因而为特征向量；$\alpha-\beta$ 同理。

III. 可以算出其有特征值 $\lambda=0,\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}$ 互异，故可以相似对角化。

十八. 相似性的判定

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$, 或者 $AP=PB$, 则称 A,B 相似。

性质

对相似的 A,B,

- $|A| = |B|; tr(A) = tr(B);$
  $r(A) = r(B); \lambda_A = \lambda_B;$
- $P^{-1}A^nP = B^n; P^{-1}(A+kE)P = B+kE;$
- 若 $A \sim C, C \sim B$, 则 $A \sim B$.

例题 对相似的 $A = \begin{pmatrix} 1 & a1 & \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, 求 a, b, c.

方法 由相似性质，$tr(A) = 12 = tr(B) = 2b + c$;

$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 13 - a) = 0$ 有解 $\lambda = b, b, c$.

分别假设 $b = 2, c = 2$, 得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

例题 设 $A_{3\times 3}$ 的互异的特征值为 $\lambda_i, i \in \{1,2,3\}$; 对应的特征向量为 $\alpha_i, i \in \{1,2,3\}$. 令 $\beta = \sum \alpha$,

I. 证明 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关；

II. 若 $A^3\beta = A\beta$, 求 $r(A - E)$ 与 $|A + 2E|$.

方法 I. 由于特征值互异，其对应的特征向量线性无关。设有

$$k_1\beta_1 + k_2A\beta_2 + k_3A^2\beta_3 = \sum(k_1 + k_2\lambda_i + k_3\lambda_i^2)\alpha_i = 0;$$

由于 α_i 无关，知 $\forall i, k_1 + k_2\lambda_i + k_3\lambda_i^2 = 0$, 而 λ 互异，故对 $Ak = 0, |A| \neq 0$, 故该方程只有零解，故原向量组无关。

II. 当第一问中构造了一组无关向量时，一般在第二问用到其列矩阵，应用

- 相似；
- 矩阵乘法；

联系已知矩阵以构建方便计算待求结论的新矩阵。

令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$, 则

$$\begin{aligned} AP &= (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = PB \end{aligned}$$

故 A, B 相似，有 $r(A - E) = r(B - E) = 2, |A + 2E| = |B + 2E| = 6$.

例题 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$, 相似，

I. 求 x, y;

II. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

方法 I. 由题，$|A| = 4(x-2) = |B| = -2y, tr(A) = x - 4 = tr(B) = y + 1$, 故解得 $x = 3, y = -2$.

II. 可以知道 $\lambda_A = \lambda_B = 2, -1, -2$. 故 A, B 都相似于 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

此时可以求 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda, P_2^{-1}BP_2 = \Lambda; P_1, P_2$ 各列是对应矩阵的特征向量；

发现 $B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = \Lambda$, 因此 $P = P_1P_2^{-1}$.

十九. 相似对角化的判定与运算

定义

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$, 则称方阵 A 可以相似对角化。

求解

- 可逆 P 阵

  A 的 n 个线性无关的特征向量 α_A 构成；

  若特征向量的数目不够，则其不可相似对角化。

- 对角矩阵 Λ

  其由 n 个特征值对应，特征值与特征向量的位置是对应的。

判定

- **充分条件**

  实对称矩阵 $\Rightarrow$ 可相似对角化；

  有 n 个互异特征值的矩阵 $\Rightarrow$ 可相似对角化；

- **充要条件**

$$\begin{aligned} \text{可相似对角化} &\Leftrightarrow \text{有}n\text{个无关特征向量} \\ &\Leftrightarrow k\text{重特征值对应}k\text{个无关特征向量} \\ &\Leftrightarrow k = n - r(\lambda_0E - A) \\ &\Leftrightarrow r(\lambda_0E - A) = n - k \end{aligned}$$

例题 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 其对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 则 $P^{-1}A^*P =$ ______.

方法 由于三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 其对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 对 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 其列分别对应的特征值为 $1, -2, 3$. 注意，此处 $-\alpha_2$ 的系数 -1 **不影响特征值的正负性**。

对 A^*, 其特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda} = -6, -2, 3$, 因此 $P^{-1}A^*P$ 对应的特征值的次序改变，为 $-6, 3, -2$, 因而有 $\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

例题 设 A 为二阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$, 其中 α 为非零向量且不是 A 的特征值，

I. 证明 P 为可逆矩阵；

II. 若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$, 求 $P^{-1}AP$ 并判断其是否与对角矩阵相似。

方法 I. 假设 A 不是可逆矩阵，则其不满秩，因而 α 与 $A\alpha$ 成比例。此时有 $A\alpha=k\alpha$, 也即 α 为 A 的特征值，与题设矛盾，因而 A 是可逆矩阵。

II. 由于

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\alpha, A\alpha)=P^{-1}(A\alpha, A^2\alpha) \\ &= P^{-1}(A\alpha, -A\alpha+6\alpha) \\ &= P^{-1}(\alpha, A\alpha)\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{B}=P^{-1}PB=B, \end{aligned}$$

而 $\lambda_B=2,-3$ 互异，因而可以相似对角化，故 A 也可以相似对角化。

例题 设 A,B,C 为三阶矩阵，有 $AB=-B, CA^\top 2C$,

其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}, \xi=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ a\end{pmatrix}$,

I. 求矩阵 A;

II. 求当 a 为何值时有 $A^{100}\xi=\xi$.

方法 I. 不妨设 $B=(\beta_i), C^\top=(\gamma_i)$, 注意到有 $(CA^\top)^\top=2C^\top\Rightarrow AC^\top=2C^\top$.

由于 $A\beta_1=-\beta_1, A\beta_2=-\beta_2, A\gamma_1=2\gamma_1$, 知 $\lambda_A=-1,-1,2, \alpha_A=\beta_1,\beta_2,\gamma_1$.

因此，$A=P^{-1}\Lambda P, P=(\beta_1,\beta_2,\gamma_1), \Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

可以解得 $A=P\Lambda P^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}-5 & -15 & -9\\ -6 & 22 & 18\\ 3 & -15 & -17\end{pmatrix}$

II. 由于 β_1,β_2 为 A 的无关特征向量，必有 $A^{100}(k_1\beta_1+k_2\beta_2)=(-1)^{100}(k_1\beta_1+k_2\beta_2)$, 而 $A^{100}\xi=\xi$, 可以知道 ξ 可被 β_1,β_2 线性表出，因此 $\xi=x_1\beta_1+x_2\beta_2$ 必有解，即

$$(\beta_1,\beta_2,\xi)\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a+3\end{pmatrix}$$

有解，因此 $a=-3$.

二十. 实对称矩阵

对角化

- 可逆矩阵 P

  必定存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 P 由特征向量组成;

- 正交矩阵 Q

  必定存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\top}AQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$, 其中 Q 经过了施密特正交单位化。

  施密特正交化时，对无关的一组 α_i, 有

- $\beta_1=\alpha_1$;
- $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$
- $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

求原矩阵

- 对 P 有 $A=P\Lambda P^{-1}$;
- 对 $Q=(\gamma_i)$ 有 $A=Q\Lambda Q^{\top}$;

  特别地，若 $r(A)=1, A=tr(A)\gamma_1\gamma_1^{\top}$.

例题 已知 A 为三阶实对称矩阵，各行元素和均为 3, 且 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\top},(0,-1,1)^{\top}$ 是 $AX=0$ 的解。

I. 求 A 特征值与特征向量;

II. 求正交矩阵 Q 使得 $Q^{\top}AQ=\Lambda$;

III. 求 A 以及 $(A-\dfrac{3}{2}E)^6$.

方法 I. 求特征向量时，**若未明示求无关特征向量，则需给出全部特征向量。**

由各行和均为 3 知 $A(1,1,1)^{\top}=(3,3,3)^{\top}=3(1,1,1)^{\top}$, 故 A 有特征值 3, 其对应无关特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^{\top}$;

由题设，α_1,α_2 是 $\lambda=0$ 对应的无关特征向量。

因此，$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2, k_1,k_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

$\lambda=3$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3, k_3\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

II. 可以知道 $\lambda_A=0,0,3$, 对应的无关特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

因为 α_3 与另外二者正交，对 α_1,α_2 做施密特正交化。故有

- $\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^{\top}$;
- $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(-1,0,1)^{\top}$;

对全体做单位化，故有 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\beta_1;\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_2;\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\beta_3$;

此时，有 $Q=(\gamma_i)$ 使得 $Q^{-1}AQ=Q^{\top}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

III. 显然 $A=Q\Lambda Q^\top$. 而 $r(A)=1,\lambda=0,0,3$,

故有 $A=tr(A)\alpha_1\alpha_1^\top=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$;

$(A-\frac{3}{2}E)^6=Q^\top(\Lambda-\frac{3}{2})Q$

$$\begin{aligned}(A-\frac{3}{2}E)^6&=Q^\top(\Lambda-\frac{3}{2})^6Q\\&=Q^\top\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}^6Q\\&=(\frac{3}{2})^6Q^\top Q=(\frac{3}{2})^6E.\end{aligned}$$

例题 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$, 有正交矩阵 Q 使得 $Q^\top AQ=\Lambda$, 若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^\top$, 求 a,Q.

方法 由于存在特征值 λ_1 使得 $A\lambda_1=\lambda_2(1,2,1)^\top$, 可以解得 $a=-1,\lambda_1=2$.

代入 $a=-1$, 求 $|\lambda E-A|=0$, 解得 $\lambda_2=-4,\lambda_3=5$. 通过 $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$ 求 α_2, 显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交。因此由正交性，

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}i&j&k\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=2i-2j+2k$$

此时 $Q=\left(\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}\right)$.

第六章
二次型

$$
\begin{cases}
\text{二次型与性质}\begin{cases} X^\top AT \\ \text{二次型与标准形} \\ p+q=n \end{cases} \\
\text{二次型化为标准形}\begin{cases} \text{配方法} \\ \text{正交变换} \end{cases} \\
\text{合同关系} P^\top AP = B (P\text{可逆}) \\
\text{正定判定}\begin{cases} \text{定义 } X^\top AX > 0 \\ \text{充要条件} \\ \text{必要条件}\begin{cases} a_{ii} > 0 \\ |A| > 0 \end{cases} \end{cases}
\end{cases}
$$

二十一. 二次型化为标准形

可逆变换

若村咋可逆 C 使得对 $X = CY, f = X^\top AX = (CY)^\top ACY = Y^\top C^\top ACY$.

若有 $C^\top AC = \Lambda$, 则将 f 标准化了。

正交变换

存在正交矩阵 Q 使得 $X = QY$, 则 $f = X^\top AX = Y^\top \Lambda Y = \sum \lambda_i y_i^2$,

配方法

利用完全平方式凑平方和，进行变换。

例题 设有可逆矩阵 P 使得 $P^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 P.

方法 要将 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ 变为 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$,

只需令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = PY$ 即可。此时的 P 即为所求。

例题 设实二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $X=QY$ 可化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2, a\geq b$,

I. 求 a,b 的值;

II. 求 Q.

方法 I. 可以发现,对 f 的矩阵 A, g 的矩阵 B, 有 $Q_1^\top AQ_1=\Lambda=Q_2^\top BQ_2$,
因此必有 $Q_2Q_1^\top AQ_1Q_2^\top=Q^\top AQ=B$, 而 Q 是实对称矩阵,因此 A,B 相似;
其中,Q 是第二问中的待求正交矩阵。
由于 $tr(A)=tr(B), |A|=|B|, a\geq b$, 解得 $a=4, b=1$.

II. 对 A 的两个特征值 $5,0$, 对应的无关特征向量为 $(1,2)^\top,(2,-1)^\top$,
对其单位化后得到 $Q_1=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$;
对 B 的两个特征值 $5,0$, 对应的无关特征向量为 $(2,1)^\top,(1,-2)^\top$,
对其单位化后得到 $Q_2=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$;
前面已经指出,$Q=Q_1Q_2^\top$.

例题 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^3\sum\limits_{j}^3 ijx_ix_j$,

I. 写出 f 对应的矩阵;

II. 求正交变换 $x=Qy$ 对应的矩阵;

III. 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

方法 I. 显然 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

II. 由于 $A=\beta\beta^\top, \beta=(1,2,3)^\top$, 有 $r(A)=1, \lambda_A=14,0,0$;
其中,$\lambda=14$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_1=(1,2,3)^\top$; $\lambda=0$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_2=(2,-1,0)^\top, \alpha_3=(3,0,-1)^\top$.
对 $P=(\alpha_i)$ 做施密特正交单位化,得到

- $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt6}(1,2,3)$;
- $\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt3}(-2,1,0)$;
- $\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{70}}(3,6,-5)$;

此时有 $Q=(\gamma_i)$ 使得 $X=QY$ 时有 $f(y_1,y_2,y_3)=14y_1^2$.

III. 配方,发现 $f=(x_1+2x_2+3x_3)^2$, 因此 $f=0\Rightarrow x_1+2x_2+3x_3=0$.
显然该方程的所有解为 $k_1\alpha_2+k_2\alpha_3, k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

例题 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+ax_2^2+4x_1x_2$ 经正交变换 $x=QY$ 化为 $3y_1^2+by_2^2$, 若 $B=Q_2^{-1}A^*Q$, 其中 $Q=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$,

I. 求 a,b 及正交矩阵 Q;

II. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}BP=\Lambda$, 并写出该 Λ.

方法 I. 题设两个二次型中，前者的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&a\end{pmatrix}$, 后者的矩阵为 $A_1=\begin{pmatrix}3&0\\0&b\end{pmatrix}$. 可以知道，$|A|=|B|$ 且 $tr(A)=tr(B)$, 因此 $a=1,b=-1$, 因此二者有特征值 $3,-1$.

对 $A,\lambda=3$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_1=(1,1)^\top$, $\lambda=-1$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_2=(-1,1)^\top$.

对 (α_1,α_2) 做施密特正交单位化，得到 $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

故存在上述 Q 使得 $X=QY$ 时有 $f=3y_1^2-y_2^2$.

II. 由上问知 $\exists P_1=(\alpha_1,\alpha_2)$ 使得 $P_1^{-1}AP=\Lambda_1$. 故 $P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}\frac{|A|}{\lambda_1}&\\&\frac{|A|}{\lambda_2}\end{pmatrix}$.

$A^*=P_1\Lambda_1P_1^{-1},B=Q_2^{-1}A^*Q_2$, 故有 $B=Q_2^{-1}A^*Q_2=Q_2^{-1}P_1\Lambda_1P_1^{-1}Q_2$, 即 $P_1^{-1}Q_2\Lambda_1Q_2^{-1}P_1=(Q_2^{-1}P_1)^{-1}\Lambda_1(Q_2^{-1}P_1)=\Lambda_1$. 此时 $P=Q_2^{-1}P_1$.

因此上述 P 可使得 $P^{-1}BP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&\\&3\end{pmatrix}$.

例题 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数，

I. 求 $f=0$ 的解；

II. 求 f 的规范型。

方法 I. 令 $f=0$, 由 f 的半正定性，有

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3&=0\\x_2+x_3&=0\\x_1+ax_3&=0\end{cases}\longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$

当 $a\neq2$ 时，方程仅有零解；

当 $a=2$ 时，方程的解为 $k(-2,-1,1)^\top,k\in\mathbb{R}$.

II. 当 $a\neq2$ 时，A 可逆，因此令

$$\begin{cases}y_1&=x_1-x_2+x_3\\y_2&=x_2+x_3\\y_3&=x_1+ax_3\end{cases}$$

此时有 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

当 $a=2$ 时，A 不可逆。注意到 $f=2(x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2$,

故令 $\begin{cases}y_1=x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{3}{2}x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 则有 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$;

令 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}y_1 \\ z_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 则有 $f = z_1^2 + z_2^2$.

例题 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_1x_3$, 利用可逆线性变换 $X = PZ$ 使得 f 化为标准形，并求二次型的正负惯性指数。

方法 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 则有 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1 Y.$

此时有 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_1y_2 + y_2y_3$.

此时又有 $f = 2(y_1 + \frac{7}{4}y_3)^2 - 2(y_2 - \frac{y_3}{4})^2 - 6y_3^2$,

故令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{7}{4}y_3 \\ z_2 = y_2 - \dfrac{y_3}{4} \\ z_3 = 6y_3 \end{cases}$, 则有 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1 Y.$

此时有 $f = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 6z_3^2$.

因此正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

二十二. 合同判定

定义

若存在可逆矩阵使得 $P^\top AP = B$, 则称 A, B 合同。

二次型变化的矩阵是合同的，因为

$$\begin{aligned} f &\xlongequal{X=PY} X^\top AX \Rightarrow (PY)^\top A(PY) \\ &= X^\top (P^\top AP) Y \stackrel{\triangle}{=} Y^\top BY \end{aligned}$$

判定

- 惯性指数相同 $\Leftrightarrow$ 合同；
- 特征值正负个数相同 $\Leftrightarrow$ 合同；

  相似 $\Rightarrow$ 特征值相等 $\Rightarrow$ 合同，故相似必合同。

例题 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵可逆矩阵，则在

A) $PA = B$;

B) $P^{-1}ABP = BA$;

C) $P^{-1}AP = B$;

D) $P^\top A^2 P = B^2$.

中，正确的是 ______.

方法 A) 由于 $PA = B$, 有 $r(A) = r(B)$, 而 $r(A) = r(B) = n$, 故 P 必定存在。

B) 当 $P = A$ 时显然成立。

C) 可以知道 A, B 分别与一对角矩阵相似，但两对角矩阵不一定相同。

D) 由于 A, B 可逆，其必定满秩，所有特征值都不为零，故 A^2, B^2 特征值均大于零，故二者正惯性指数均为 n, 负惯性指数均为 0, 因而合同。

二十三. 正定判定

定义

若对任意非零 X 都有 $f = X^\top AX > 0$, 则称 $f(x)$ 为正定二次型。

判定

二次型 A 正定与以下任意一点等价。

- A 的所有顺序主子式大于零。

$$\text{三阶方阵的顺序主子式形如}\quad \left|\begin{matrix} \left|\begin{matrix} |\cdot| & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}\right| & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

- 所有特征值大于零；
- 正惯性指数为 n;
- A 与 E 合同，即 $\exists P, A = P^\top P$.

例题 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，$r(A) = m$, 则在命题

A) $AA^\top$ 与单位矩阵等价；

B) $AA^\top$ 与对角矩阵相似；

C) $AA^\top$ 与单位矩阵合同；

D) $AA^\top$ 是正定矩阵；

中，正确的是 ______.

方法

$$\begin{aligned} r(AA^\top) = r(A) = m &\Leftrightarrow |AA^\top| \neq 0 \Leftrightarrow AA^\top\text{可逆} \\ &\Leftrightarrow AA^\top\text{与}E_m\text{等价} \Leftrightarrow AA^\top\text{行/列向量无关} \\ &\Leftrightarrow (AA^\top)X = 0\text{仅有零解} \Leftrightarrow (AA^\top)X = b\text{仅有唯一解} \\ &\Leftrightarrow AA^\top\text{任意特征值不为零} \end{aligned}$$

由于 $(AA^\top)^\top = AA^\top$, 其必能相似对角化，因而正定，与 E 合同。

二十四. 总结 - 矩阵的三大关系

- **等价**
  - 对 $m \times n$ 的 $A, B, A \xrightarrow{\text{变换}} B$ 成立；
  - $PAQ = B$ 或 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A, B$ 等价；
- **相似**
  - 对 $A_n, B_n, P^{-1}AP = B$ 成立；
  - $\lambda_A = \lambda_B$ 且 A, B 均可相似对角化 $\Leftarrow$ 相似；
- **合同**
  - 对 $A_n, B_n, P^{\top}AP = B$ 成立；
  - 惯性指数相同 $\Leftrightarrow$ 合同。

例题 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 t 为何值时，

I. A 是正定矩阵；

II. A, B 等价；

III. A, C 相似；

IV. A, D 合同。

方法 I. 由于 A 的一、二阶顺序主子式大于零，只需让其三阶主子式也即行列式大于零，此时 $t > 0$;

II. 可以知道 $r(B) = 2$, 因此 $r(A) = 2$ 时二者等价，此时 $t = 0$.

III. 显然 C 的特征值为 $1, 3, 5$, 且其显然可以相似对角化，因此只需令 A 特征值也为 $1, 3, 5$ 时就有二者相似，此时 $t = 5$;

IV. 由于 $f = X^{\top}DX$ 的正负惯性指数分别为 $2, 1$, 因此只需让 $f = X^{\top}AX$ 正负惯性指数与其相同即可，此时 $t < 0$.