线代冲刺笔记

奇峰

之前

目录

特征值与特征向量

一. 求特征值和特征向量

i.抽象矩阵

对 $r(A)=1 \Leftrightarrow A=\alpha\beta^\top$ 的矩阵，有

i. $A^n=\mathrm{tr}(A)^{n-1}\alpha\beta^\top$;

ii. $\lambda_1=\mathrm{tr}(A),\alpha_1=\alpha;\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n=0,\alpha_i$ 是 $\beta^\top X=0$ 的解，共 $n-1$ 个。

iii. A 可相似对角化，当且仅当 $\mathrm{tr}(A)\neq 0$;

iv. $A=\sum\lambda_i\gamma_i\gamma_i^\top=\mathrm{tr}(A)\gamma_1\gamma_1^\top$, 其中 γ_i 是经过正交化的特征向量。

实对称矩阵特征向量相互之间是正交的。对三阶实对称矩阵，

- **知二求一**

  求向量积 $\alpha_1\times\alpha_2$, 即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ i & j & k \end{vmatrix}$

- **知一求二**

  取合适的 a,b,c 使得 $\alpha_2=(a,b,0)^\top,\alpha_3=(-b,a,c)$ 与已知的 α_1 两两正交。

ii.具体矩阵

以 $|A-\lambda E|=0$ 求特征值，$|A-\lambda_0 E|X=0$ 求对应特征向量。

例题 设 $\alpha_1=(1,1,0)^\top,\alpha_2=(1,0,1)^\top$ 为三阶矩阵 A 对应 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 的特征向量，$\beta=(-1,1,-2)^\top$, 求 $A^2\beta$.

方法 用已知的特征向量线性**表示**给定的 β. 具体而言，

$$\beta=\alpha_1-2\alpha_2 \Leftrightarrow A^2\beta=A^2\alpha_1-2A^2\alpha^2=\alpha_1-8\alpha_2.$$

二. 相似

例题 设 3 阶矩阵 A 有三个不同的特征值 λ_i, 对应的特征向量是 α_i, $\beta=\sum\alpha_i$.

(a) 证明 β 不是 A 的特征向量。

(b) 证明 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。

(c) 若 $A^3\beta = 2A\beta + A^2\beta$, 求 A 的特征值，求 $|A+2E|$.

方法 (a) 反证即可。

(b) 由于 $(\beta, A\beta, A^2\beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 3 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}$, 而后二者都满秩，故前者满秩，故三向量无关。

(c) 通过构造 P 并通过化简得到等式 $AP = PB$ 以找到具体的相似矩阵。

具体而言，令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$, 则

$$\begin{aligned} AP &= (A\beta, A^2\beta, (2A+A^2)\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

那么有 $P^{-1}AP = B$, 那么，$\lambda_A = \lambda_B, |A+2E| = |B+2E|$.

AB^{-1} 的快速求法

$$\begin{pmatrix} P_2 \\ \hdashline P_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \hdashline P_1P_2^{-1} \end{pmatrix}$$

类似地，

$$\left(P_1 \;\vdots\; P_2 \right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(E \;\vdots\; P_1^{-1}P_2 \right)$$

相似对角化结合传递性及其快速求法

若有 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = P_2^{-1}AP_2$, 则有 $B = (P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})$.

事实上，若有三阶 A, B, 存在 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $AP = PB$, 那么

$$AP = PB \Leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$$

由此可以得到三个方程组，分别求出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 即可得到 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

例题 设 $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2\end{pmatrix}$ 求 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

方法 设 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 那么有

$$\begin{aligned} AP = PB &\Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B \\ &\Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, -\alpha_2 - 6\alpha_3, 2\alpha_3) \end{aligned}$$

那么有

$$
\begin{aligned}
&(A-E)\alpha_1=0\\
&(A-2E)\alpha_3=0\\
&(A+E)\alpha_2=-6\alpha_3
\end{aligned}
$$

分别求解，解得

$$\alpha_1=(0,1,1)^\top,\alpha_3=(1,0,0)^\top,\alpha_2=k(0,-1,1)^\top+(-2,0,0)^\top,k\in\mathbb{R}.$$

由于 $k=0$ 时，P 不满秩，令 $k=1$, 得到 $P=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ 满足题设。

例题 设 A 为三阶矩阵，三维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$, 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

方法 由于

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

设 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}=B$, 那么 A,B 相似。

由于 $B=\begin{pmatrix}0&0&\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}+E=(0,1,1)^\top(1,1,2)+E$, 前者特征值为 $3,0,0$, 有 B 的特征值为 $4,1,1$.

相乘为零的矩阵的性质

若 $AB=O$, 有

- $r(A)+r(B)\le n$;
- B 的列向量是 $AX=0$ 的解；
- B 的非零列向量是 A 的特征值为 0 对应的特征向量；
- A 的行向量与 B 的列向量正交。

矩阵的二次方程有两个互异的根

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^2-(\lambda_1+\lambda_2)A+\lambda_1\lambda_2E=(A-\lambda_1E)(\lambda_2-A)=0$$

则

- $r(A-\lambda_1E)+r(\lambda_2E-A)=n$;
- A 可以相似对角化。

三. 实对称矩阵的计算

i.求正交矩阵

i. 特征值 $\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

ii. 特征向量 $\Rightarrow P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

iii. 单位化 $\Rightarrow Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$

ii.求实对称矩阵

- $P^{-1}AP = \Lambda, A = P\Lambda P^{-1}$
- $Q^\top AQ = \Lambda, A = Q\Lambda Q^\top$
- 分解定理 - $A = \sum \lambda_i \gamma_i \gamma_i^\top$
- 特别地，$r(A) = 1$ 时，$A = \mathrm{tr}(A)\gamma_1\gamma_1^\top$

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow$ A 为实对称矩阵。

证明 由于 A 可正交相似对角化 $\Rightarrow Q^\top AQ = \Lambda \Rightarrow A = Q\Lambda Q^\top \Rightarrow A^\top = Q^\top \Lambda Q = A$, 故 A 为实对称矩阵。

例题 设 A 为三阶实对称矩阵，正交矩阵 $Q = (\gamma_i)$ 使得 $Q^\top AQ = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, 求 $A - \gamma_1\gamma_1^\top$ 的特征值。

方法 由于 $A = \sum \lambda_i \gamma_i \gamma_i^\top \Rightarrow A - \gamma_1\gamma_1^\top = 1\gamma_1\gamma_1^\top + 3\gamma_2\gamma_2^\top + 4\gamma_3\gamma_3^\top$ 因此特征值分别为 $1, 3, 4$.

例题 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q 使得 $Q^\top(A + A^*)Q$ 为对角矩阵。

※ 需要 A 与 A^* 同时正交相似对角化。

方法 可以求出正交矩阵 $Q = (\gamma_i)$ 令 $Q^\top AQ \overset{\triangle}{=} \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$. 其中，

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^\top, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^\top, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^\top.$$

此时，由于

$$A = Q\Lambda Q^\top \Rightarrow A^* = (Q\Lambda Q^\top)^* = (Q^\top)^*\Lambda^* Q^*$$

$$Q^\top A^* Q = Q^\top (Q^\top)^* \Lambda^* Q^* Q = |Q^\top|\Lambda^*|Q| = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 $Q^\top(A+A^*)Q = Q^\top AQ + Q^\top A^* Q = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

方法 **表格法推广**

对三阶 A 的伴随矩阵 A^*, 有

A^*	λ	α
1	$\lambda_2\lambda_3$	α_1
2	$\lambda_1\lambda_3$	α_2
3	$\lambda_1\lambda_2$	α_3

那么，若 A 对应的特征值是 $0,1,4$, 由表可以知道 A^* 对应的特征值是 $4,0,0$, 由此可以快速地计算 A 与 A^* 的对角矩阵。

例题 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 C 使得 $A = C^3$.

方法 分解出秩为一的矩阵

对矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & \square & a \\ y & \square & b \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$, 尝试将其分解为 $\begin{pmatrix} z & \square & a \\ y & \square & b \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}_B + kE$ 使得 z, y 与 a, b 等比例。

此时可以通过 B 求 A 特征值特征向量。由于 $A = C^3, C$ 的特征值 $\lambda_C = \sqrt[3]{\lambda_A}$.

例题 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, 求矩阵 C 使得 $A = C^3$.

方法 由于 A 是实对称矩阵，可以相似对角化，因此可以直接求 Q 使得 $Q^\top AQ = \Lambda$.

二次型

四. 求二次型的标准形或规范型

- 拉格朗日配方法

  i. 配方（配干净）

  ii. 换元 $X = CY$

- 合同变换法

  $$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行列成对的初等变换}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

  即行怎么变，列马上怎么变。如，

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ & \cdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一行/列的负二倍加到第二行/列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

  $$\xrightarrow{\text{第一行/列的负三倍加到第三行/列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

  $$\xrightarrow{\text{第二行/列的负二倍加到第三行/列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

- 正交变换法

  i. 特征值

  ii. 特征向量

  iii. 单位化

  得到正交变换 $X = QY$ 使得 $f = \sum \lambda_i y_i^2$.

- 经过可逆线性变换二次型矩阵合同

  $$X^\top AX \xlongequal{X=CY} (CY)^\top A(CY) = Y^\top \overbrace{C^\top AC}^{B} Y$$

- 经过正交变换二次型矩阵既相似又合同

$$X^\top AX \xlongequal{X=QY} (QY)^\top A(QY) = Y^\top \overbrace{Q^\top AQ}^{B} Y = Y^\top \overbrace{Q^{-1}AQ}^{B} Y$$

其中 Q 是正交矩阵。

例题 求二次型 $x^\top Ax = (x_1 + 2x_2 + ax_3)(x_1 + 5x_2 + bx_3)$ 的正惯性指数和负惯性指数。

方法 普通配方法

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + ax_3 \\ y_2 = x_1 + 5x_2 + bx_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

由于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 5 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列式均不为零，故前二者均为可逆变换，因此可以得到

$$x^\top Ax = z_1^2 - z_2^2$$

因此其正惯性指数和负惯性指数均为 1.

例题 设三阶实对称矩阵 A 满足 $A^*\alpha = \alpha, \alpha = (-1,-1,1)^\top$, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^\top AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$,

(a) 求矩阵 A;

(b) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^\top (A^*)^{-1} x$ 的表达式与规范型。

方法 (a) **法一**

由于 $AA^*\alpha = 2\alpha = A\alpha$, 有 α 是 A 对应特征值为 2 的特征向量。

可以知道，A 有特征向量 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^\top, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^\top$ 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$;

有特征向量 $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^\top$ 对应 $\lambda_3 = 2$.

那么有 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 使得 $Q^\top AQ = \Lambda$. 那么，$A = Q\Lambda Q^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

法二

由 $Q^\top \overbrace{(A+E)}^{r=1} Q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 有 $A + E = \lambda_3\gamma_3\gamma_3^\top$, 其中 $\lambda_3 = 3, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^\top$.

(b) 由于 $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}A$, 有 $f = \frac{1}{2}x^\top Ax = x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$.

由于 $\frac{1}{2}A$ 的特征值为 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$, 知道二次型的规范型为 $f = -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

例题 设 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$, 求正交变换 $x=Qy$ 将二次型 $x^\top Ax$ 转化为标准形。

方法 此处 A 不是实对称矩阵。

法一

将 $x^\top Ax$ 展开并求二次型的矩阵 B.

法二

可以知道，二次型的矩阵 $B=\dfrac{1}{2}(A+A^\top)$.

例题 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$,

(a) 求正交变换 $x=Qy$ 将二次型化为标准形。

(b) 当 $x^\top x=2$ 时，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值。

方法 (a) 略。

(b) 当 $x\top x=2$ 时，

$$x^\top x=(Qy)^\top(Qy)=y^\top Q^\top Qy=y^\top y=y_1^2+y_2^2+y_3^2=2$$

而

$$x^\top Ax=5y_2^2+6y_3^2\le 6(y_1^2+y_2^2+y_3^2)|_{y_3^2=2}=12$$

故最大值为 12.

同理，

$$x^\top Ax\ge 0(y_1^2+y_2^2+y_3^2)|_{y_1^2=2}=0$$

二次型的最值

设 n 元二次型 $f=x^\top Ax$ 的特征值为 λ_i, 则对任意 n 维列向量 x, 有

$$\lambda_{\min}x^\top x\le x^\top Ax\le\lambda_{\max}x^\top x$$

例题 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$,

(a) 证明 A,B 不相似；

(b) 求可逆矩阵 C 使得 $C^\top AC=B$.

方法 规范型结合传递性

由于 $\mathrm{tr}(A)\ne\mathrm{tr}(B)$, 二者不相似。

$$C_1^\top AC_1=\overset{\text{规范型}}{\Lambda}=C_2^\top BC_2\Rightarrow B=(C_1C_2^{-1})^\top A(C_1C_2^{-1})$$