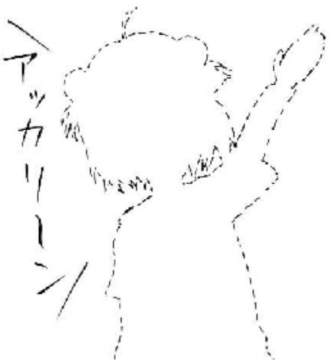


# 线性代数提高笔记

奇峰

之前

# 目录

# 概述

## 题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\begin{cases} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵}\ (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \textcolor{red}{\text{秩}}\text{（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数} \begin{cases} \text{可逆变换} \\ p+q=r \end{cases} \end{cases}$$

大题部分主要涵盖

$$\begin{cases} \text{方程组} \begin{cases} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{cases} \\ \text{相似形（二次型）} \end{cases}$$

## 一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\begin{cases} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i)\text{是否相关}? \\ AX = 0\text{的基解}? \\ A \sim B \\ p+q=r \end{cases}$$

## 一种方法

初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\begin{cases} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{cases}$$

# 第一章

# 行列式

定义与性质

$$
\begin{cases}
\text{三大定义}\begin{cases}\text{几何定义;}\\ \text{逆序定义;}\\ \text{展开定义;}\end{cases}\\
\text{计算}\begin{cases}\text{数值形;}\\ \text{含参形;}\\ \text{抽象形;}\end{cases}\\
\text{证明}|A|=0\begin{cases}|A|=-|A|;\\ r(A)<n;\\ \text{不可逆（常用于反证）;}\\ AX=0\text{有非零解;}\\ \exists\lambda_0=0;\end{cases}
\end{cases}
$$

## I. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
  - 三角形
  - 范德蒙德行列式
  - 分块
- 特殊形状的行列式

## II. 代数余子式

代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

注意，

- 其为 $(n-1)$ 阶子式;
- 其线性组合 $\sum_i a_i A_k i$ 相当于将行列式第 $k$ 行元素替换为 $(a_i)$;
- $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$
- 伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^\top \triangleq \mathbf{|A|\cdot A^{-1}}$

对数值型矩阵 $A$, 求 $A^*$ 时，可先求 $|A|$ 并利用 $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\vdots A^{-1})$ 求 $A^{-1}$, 再利用公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 求伴随矩阵。

# III. 抽象矩阵行列式

性质

i. 对已知 $A=(\alpha_i)$ 的矩阵，可以 $\begin{cases}\text{行列式列消}\\ \text{可逆时，}\begin{cases}\text{矩阵乘法}\\ \text{相似}\end{cases}\end{cases}$

ii. $|kA|=k^n|A|$, 其中 $k$ 可以是行列式;

$|A^\top|=A, |AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$;

iii. 设 $A$ 可逆，则 $A^*$ 可逆，且有

$|A^*|=|A|^{n-1}; (A^*)^*=|A|^{n-2}A$;

$|(A^*)^*|=A^{(n-1)^2}$;

iv. $|A|=\prod\lambda_i; tr(A)=\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$;

v. $P^{-1}AP=B\Rightarrow|A|=|B|$;

vi. $aA+bE$ 不可逆 $\Leftrightarrow|aA+bE|=0\Rightarrow\exists\lambda_0=\dfrac{-b}{a}$;

vii. $AA^\top=A^\top A=E\Rightarrow|A|=\pm1$;

viii. 对可逆矩阵 $A, |A+\alpha\beta^T|=|A|(1+\beta^TA^{-1}\alpha)$;

对 $B=\alpha\beta^T, |\lambda E+\alpha\beta^T|=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$;

ix. 对 $A_n$, 若 $A^2=A, A\neq E$, 则有 $|A|=0$.

- 反证

  假设 $A$ 可逆，则 $A^2A^{-1}=AA^{-1}=E\Rightarrow A=E$, 与题设矛盾，故 $A$ 不可逆，因此 $|A|=0$.

- 秩

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O\Rightarrow r(A)+r(A-E)\leq n$;

  $A\neq E\Rightarrow r(A-E)>0\Rightarrow r(A)<n\Rightarrow|A|=0$.

- 方程组

  $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=O; A\neq E\Rightarrow AX=O$ 存在非零解，因此 $r(A)<n$, 即 $|A|=0$.

- 特征值

  $A(A-E)=O=O(A-E), A\neq E$, 因此 $A$ 存在一特征值 $\lambda_0=0$, 此时 $|A|=\prod\lambda=0$.

其中，对于第八条，

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+\alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix} \qquad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix} \qquad (ii)$$

显然 $(i),(ii)$ 的两边也相等。此时对二者右边取得行列式，得到

$$|A+\alpha\beta^T|=|A|(1+\beta^T A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子 $D=\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为 $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为 $A$, 后者为 $\alpha\beta^\top$.

ii. $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E-(-\alpha\beta^\top)|$, 此时视 $A=\lambda E$,

套用前述方法有 $|\lambda E+\alpha\beta^\top|=|\lambda E|(1+\beta^T(\lambda E)^{-1}\alpha)=\lambda^n(1+\frac{\beta^\top\alpha}{\lambda})=\lambda^{n-1}(\lambda+\beta^\top\alpha)$.

注意，若有 $AB=O, B=(\beta_i)$, 则考虑

- $r(A)+r(B)\leq n$;
- $B$ 的列向量为 $AX=O$ 的一组解；
- $A\beta_i=O=O\beta_i$, 此时 $B$ 的列向量为 $\lambda_A=0$ 的特征向量。

**计算抽象行列式**

计算抽象的行列式时，若其有法则，如 $A^{-1}, A^\top, A^*$, 则利用其法则，若其无法则，则利用 $E=AA^{-1}$ 或 $E=AA^\top$.

对求 $|A+B|$ 的情况，由于无法则，考虑添加 $E$, 此时“一前一后，前者前，后者后。”对于

$$|A+B|=|E_1A+BE_2|,\quad E_1,E_2\text{都是单位矩阵}$$

有

- $E_1$ 在 $A$ 前，$E_2$ 在 $B$ 后，此谓一前一后；
- $E_1$ 拆时，考虑同在前面的 $B$, 即 $B^{-1}B$ 或 $BB^{-1}$, 此谓前者前；
- $E_2$ 拆时，考虑同在后面的 $A$, 即 $A^{-1}A$ 或 $AA^{-1}$, 此谓后者后；

**由行列式值求参数**

需要加减・消元・出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数 $\lambda-2$.

# IV. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数（行列式和最高次方）
- 根与系数的关系

  对 $f(x)=D=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ 及其根 $x_i$ 有 $\begin{cases} \sum x_i = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$

**矩阵加边**

对行列式 $D_n$, 显然

$$|D| = \left|\begin{array}{c:ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right|$$

其中，为 $*$ 的部分可以为任意值，因此可以按题面设置易于计算的值。另外，加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式，使得其虽然不等于原式，但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$

可以将其变为

$$f(x)=\begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{增补行} \\ \\ \end{matrix}$$

并按照第一列展开，此时 $x^3$ 的系数 $A_3$ 正好为 $-|D|$, 而 $x^4$ 的系数 $A_4$ 为范德蒙德行列式，值为 $\prod(x_i-x_j)$, 由前述结论，$\sum a_i=-\dfrac{A_3}{A_4}$, 整理即得到结论。

# 第二章

# 矩阵

$$
\begin{cases}
\text{定义与运算}\begin{cases} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^{*}, A^{T} \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \not\Leftrightarrow A = 0\text{或}B = 0; A^{2} = 0\text{同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{当且仅当}A\text{可逆时成立} \end{cases} \\
\text{特殊矩阵 - } E, \Lambda, A^{\top} = A, AA^{\top} = E \\
\text{伴随矩阵}A^{*} \\
\text{可逆矩阵}\begin{cases} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明}A\text{可逆} \end{cases} \\
\text{初等矩阵（逆，变换）} \\
\text{秩(性质)} \\
\text{应用}\begin{cases} \text{矩阵方程} \\ \text{求}A^{n} \end{cases}
\end{cases}
$$

# V. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$
\begin{cases}
\text{求}A^{*}\begin{cases} \text{定义法 - } A^{*} = (A_{ij})^{\top} \\ \text{公式法 - } A^{*} = |A|A^{-1} \end{cases} \\
\text{性质}\begin{cases} AA^{*} = A^{*}A = |A|E(\text{可推广为}\Delta\Delta^{*} = \Delta^{*}\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^{*} = k^{n-1}A^{*} \\ (A^{*})^{*} = |A|^{n-2}A \\ |A^{*}| = |A|^{n-1} \\ |(A^{*})^{*}| = |A|^{(n-1)^{2}} \\ A^{-1,\top,*}\text{之间可以互换，如}(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1} \end{cases}
\end{cases}
$$

### 矩阵行列和的结论

对矩阵 $A$, 若其每行元素和均为 $k$, 则有 $A(1,1,1)^{\top} = (k,k,k)^{\top} = k(1,1,1)^{\top}(\lambda\alpha)$;

若为每列元素和均为 $k$, 有 $(1,1,1)A = (k,k,k)$, 转置后与前者相同。

右乘/左乘 $A^*$, 可以求伴随矩阵的行/列和。

**关于伴随矩阵和转置矩阵的结论**

- $\forall(i,j), a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^* = A^\top \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;
- $\forall(i,j), a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^* = -A^\top \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = -1$;

也可以使用矩阵表达式替代 $A$.

# VI. 可逆矩阵的应用

$$\text{可逆矩阵的判定}\begin{cases} AB = BA = kE(\text{此时}A^{-1} = \dfrac{1}{k}B) \\ A\text{可逆} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ r(A) = n \\ A\text{的列向量线性无关} \\ AX = 0\text{仅有零解} \\ AX = b\text{有唯一解} \\ \forall\lambda, \lambda \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{可逆矩阵的计算}\begin{cases} \text{抽象}\begin{cases} \text{凑}AB = E \\ \text{利用性质}\begin{cases} (A^{-1})^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{cases} \end{cases} \\ \text{具体}\begin{cases} \text{低阶 (2-3) - } A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换 - } (A:E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E:A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{cases} \end{cases}$$

**分块矩阵求逆**

- 主对角分块
  - 仅在主对角上非零的分块
    $$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$
  - 仅“缺一块”的分块

    方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。
    $$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$
    $$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 副对角分块

  副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

  - 仅在副对角上非零的分块
    $$\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$
  - 仅“缺一块”的分块
    $$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}DC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$
    $$\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$$

**可交换矩阵的结论**

- 线性组合 - $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$;
- 一元二次形式 - $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$;

  证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

  其中，对前者，
$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B \mathbf{-aE+aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &\Rightarrow (B - aE)(A - bE) = abE \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。

# VII. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

| | 符号 | 行列式 | 逆 |
|---|---|---|---|
| 交换 | $E_{ij}$ | $-1$ | $E_{ij}(k)$ |
| 倍乘 | $E_i(k)$ | $k$ | $E_i(1/k)$ |
| 倍加 | $E_{ij}(k)$ | 1 | $E_{ij}(-k)$ |

**利用性质计算矩阵**

有例子

$$\begin{aligned} E_{12}A = B &\Rightarrow \begin{cases} -|A| = |B| \\ A^{-1}E_{12} = B^{-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12} = |B|B^{-1} \\ &\Rightarrow -A^{*}E_{12} = B^{*} \end{aligned}$$

# VIII. 求矩阵的秩

**秩的求解**

$$\begin{cases} \text{定义}\begin{cases} r\text{阶至少一非零} \\ r+1\text{阶全为零} \end{cases} \\ \text{初等变换法（行列均可）- } A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵}B\text{, 非零行数即为秩} \\ \text{非零特征根的个数是秩} \end{cases}$$

**性质**

- 对 $A_{m\times n}$, 有 $r(A)=r(A\top A)=r(AA^\top)=r(A^\top)=r(kA)$.
  - 证明 $r(A^\top A)=r(A)$
    利用同解方程组。
    $$\begin{aligned} A^\top AX=O &\Rightarrow X^\top A^\top AX=O \\ &\Rightarrow (AX)^\top AX=O \\ &\Rightarrow |AX|=0 \\ &\Rightarrow AX=O \end{aligned}$$
    $$AX=O \Rightarrow A^\top AX=O$$
    因此 $A$ 与 $A^\top A$ 同解，故其秩相等。
- $r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$.
- $r(AB)\le r(A); r(AB)\le r(B)$. 对前者，$B$ 可逆时等号成立。
- $r(A:B)\le r(A)+r(B)$;
  $r(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix})\le r(A)+r(B)$
- 对矩阵 $A_{m\times \mathbf{n}}, B_{\mathbf{n}\times s}, AB=O$, 有 $r(A)+r(B)\le \mathbf{n}$.
  此即所谓“前看列，后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时，都应考虑这一句。
  - 证明
    $AB=O\Rightarrow B$ 的列向量 $\beta_i$ 是 $AX=O$ 的一组解，此时 $r(\beta_i)=r(B)\le n-r(A)\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$.
- 对 $A_n$, 其伴随矩阵的秩 $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1(n\ge 2) \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$
- $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$

- 若 $P,Q$ 可逆，则有 $r(PA)=r(AQ)=\overbrace{r(PAQ)=r(A)}^{\text{矩阵等价}}$
  若 $B=PAQ$ 或 $r(B)=r(A)$, 称 $A,B$ 等价。
- 对 $A_{m\times n}$, 若其行满秩，则 $r(A)=m, A\sim(E_m,O)$.
- 对 $A_{m\times n}, r(A)=n\Rightarrow r(AB)$;
  $r(A)=m, r(BA)=r(B)$.
  - 证明前者成立
    $r(B)\le r(AB)\le r(A^{-1}AB)=r(B)$, 故 $r(AB)=r(B)$.

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2=A\Rightarrow r(A)+r(A-E)=n.$
- $A^2=E\Rightarrow r(A-E)+r(A+E)=n.$
  - 证明后者成立

$$(A-E)(A+E)=0\Rightarrow n\ge r(A-E)+r(A+E)=r(A-E)+r(-(\mathbf{A}-\mathbf{E}))\ge r(2E)=n$$
$$\Rightarrow r(A-E)+r(A+E)=n$$

事实上，对于 $A$ 的一元二次式，若其可因式分解，则分解后的因式都满秩。

# IX. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX=C\Rightarrow X=A^{-1}C$
- $XA=C\Rightarrow X=CA^{-1}$
- $AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX=C\Rightarrow A(X_i)=(C_i)$, 其中 $X_i,C_i$ 是对应矩阵的列向量，解得到的 $n$ 个非齐次方程组即可。
- $XA=C\Rightarrow A^\top X^\top=C^\top$, 然后同上。

# X. 计算 $n$ 阶矩阵高次幂

- 归纳运算。

- $r(A)=1$ 时，有 $A^n = tr(A)^{n-1}A$.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} & & ac \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n\geq 3} = O.$
- 相似性

  若 $P^{-1}AP = B$, 则有 $P^{-1}A^nP = B^n$, 其中 $P$ 不变，

# 第三章

# 向量

- 向量运算
  - 服从矩阵运算规律
  - 内积 $(\alpha,\beta)=\alpha^\top\beta=\beta^\top\alpha(=tr(A))$
  - 两向量内积为零时，两向量正交
  - 正交矩阵
    - 单位 - 任意列向量为单位向量
    - 正交 - 任意两列向量正交
- 相关性
  - 定义
  - 判定
- 线性表示
  - 向量组表示
  - 向量组等价
  - 极大无关组
    - 求法
    - 秩

## XI. 相关性

**定义法**

定义法常用于证明相关/无关性。

令 $\sum k_i\alpha_i=\vec{0}$, 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出 $\forall i, k_i=0$, 则 $\alpha_i$ 线性无关。

**秩**

$$\begin{cases} r(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathbf{s}})=\mathbf{S}\Rightarrow(\alpha_i)\text{线性无关} \\ r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<S\Rightarrow(\alpha_i)\text{线性相关} \end{cases}$$

**性质**

- $\alpha_i$ 线性无关 $\Leftrightarrow (\alpha_i)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$ 仅有零解。

- 内含零向量<br>内含等比例向量　中满足任一 $\Leftrightarrow$ 线性相关<br>内含可表示向量

- 向量个数大于维数必相关（利用秩证明）。

- 全部无关，一部无关；一部相关，全部相关。

- 原本相关，缩短相关，原本无关，加长无关。（改变的是维数）

- 以少表多，多必相关。

对于一组能组成方阵的 $(\alpha_i)$, 若其方阵 $P$ 满足 $AP = PB$, 则这组向量无关。此处运用了相似的性质。

# XII. 线性表示

$$\begin{cases} \text{一个 -}\beta = \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i \Leftrightarrow (\alpha_i)X = \beta \\ \text{一组 -}\beta_i = \sum_{j=1}^{s} x_{ij}\alpha_j; i = 1, 2, \cdots, t \\ \text{两组 - 互相表示} \\ \text{向量组等价} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, \beta_i = \sum_j x_{ij}\alpha_j \\ \forall j, \alpha_j = \sum_i x_{ij}\beta_i \end{cases} \end{cases}$$

**判定**

- $\beta$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta)$, 注意此时不一定满秩；

- $\forall i, \beta_i$ 均可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出 $\forall i, \Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta_i)$;

- 向量组 (I),(II) 等价 $\Rightarrow r(\text{I}) = r(\text{II}) = r(\text{I,II})$