高等数学笔记

奇峰

之前

目录

第一章

函数 极限 连续

I. 函数的性态

i. 有界性的判定

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x)$ 有界；
- 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则其在 $[a, b]$ 有界；
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续，且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 均存在，则其在 (a, b) 有界；
- $f'(x)$ 在有限区间 有界 $\Rightarrow f(x)$ 在该区间有界。

ii. 导函数、原函数的奇偶性与周期性

导函数的奇偶性与周期性

- 可导奇函数的导函数为偶函数；
- 可导偶函数的导函数为奇函数；
- 可导周期函数的导函数为周期函数；

原函数的奇偶性与周期性

- 连续奇函数的原函数均为偶函数；
- 连续偶函数的原函数仅有一个为奇函数，即 $C = 0$ 时；
- 周期函数的原函数为周期函数 $\Rightarrow \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$

II. 极限的概念

讨论数列最值，将其拆分为前 N 个与后无穷个，前者求最值，后者利用极限定义可知其接近极限值。

讨论同时包含 $\sin(x_n), \cos(x_n)$ 的抽象数列时，可以考虑令 $x_n = \begin{cases} \pi/2, & 2i+1 \\ -\pi/2, & 2i \end{cases}$，利用 $\sin, \cos$ 奇偶性的不同。

III. 重点 - 函数极限的计算

i. 0/0 形

洛必达法则

若 $f(x), g(x)$

- $\lim f(x) = \lim g(x) = 0/\infty$;

  可以推广为 $\dfrac{\blacksquare}{\infty}$;
- $f(x), g(x)$ 在 x_0 某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$;

  此处注意，$\begin{cases} n\text{阶可导} & \Rightarrow \text{导}n-1\text{次} + \text{导数定义} \\ n\text{阶连续导数} & \Rightarrow \text{导}n\text{次} \end{cases}$
- $\dfrac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)} = A(\text{或}\infty)$,

则 $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = A(\text{或}\infty)$.

等价代换

当 $x \to 0$ 时，有

- $\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x$;
- $e^x - 1 - x \sim x - \ln(1+x) \sim 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$;
- $x - \sin x \sim \arcsin x - x \sim \dfrac{x^3}{6}$;
- $\tan x - x \sim x - \arctan x \sim \dfrac{x^3}{3}$;
- $\tan x - \sin x \sim \arcsin x - \arctan x \sim \dfrac{x^3}{2}$;

对于以上等价无穷小，有

i. 可变量代换，如 $\sin\square \sim \square$, $\tan\square \sim \square, \cdots$

ii. $x \to 0$ 时，$a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1 \sim x\ln a$, $\log_a(1+x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln a} \sim \dfrac{x}{\ln a}$;

iii. 若 $x \to a$ ，可以令 $t = x - a \to 0$.

泰勒公式

- $e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ ；
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ ；
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ；
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ；
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ；
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$;
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$ ，其中 $C_\alpha^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}$

  如，$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$;
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$ ；
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + o(x^n)$;

泰勒公式求极限时，

- 分子阶数不小于分母阶数；
- 加减不抵消，“齐头并进”；
- 可推广为 $\square \to 0$.

ii. ∞/∞ 形

主要方法有

- 洛必达；
- 抓大头，即每个因式保留高阶无穷大；

  $x \to 0 \Rightarrow \ln^\alpha(x) \ll x^\beta \ll a^x \ll x^x$, 其中 $\alpha, \beta > 0, a > 1$.

iii. $\infty - \infty$ 形

主要方法有

- 通分（有分式时）;
- 有理化（有根号时）;
- 倒代换，即令 $t = \dfrac{1}{x}$.

附录

补充结论

一类无穷阶可导的抽象函数

若 $f(x)$ 满足

- $f(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+\Delta$;
- $f'(x)=f(x)+\Delta$;
- $f''(x)=f'(x)+\Delta$,

其中 Δ 无穷阶可导，则 $f(x)$ 无穷阶可导。