高等数学笔记

奇峰

之前

目录

第一章

函数 极限 连续

I. 函数的性态

i. 有界性的判定

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x)$ 有界；
- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则其在 $[a,b]$ 有界；
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在，则其在 (a,b) 有界；
- $f'(x)$ 在有限区间 有界 $\Rightarrow f(x)$ 在该区间有界。

ii. 导函数、原函数的奇偶性与周期性

导函数的奇偶性与周期性

- 可导奇函数的导函数为偶函数；
- 可导偶函数的导函数为奇函数；
- 可导周期函数的导函数为周期函数；

原函数的奇偶性与周期性

- 连续奇函数的原函数均为偶函数；
- 连续偶函数的原函数仅有一个为奇函数，即 $C = 0$ 时；
- 周期函数的原函数为周期函数 $\Rightarrow \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$

II. 极限的概念

讨论数列最值，将其拆分为前 N 个与后无穷个，前者求最值，后者利用极限定义可知其接近极限值。

讨论同时包含 $\sin(x_n),\cos(x_n)$ 的抽象数列时，可以考虑令 $x_n=\begin{cases}\pi/2, & 2i+1\\ -\pi/2, & 2i\end{cases}$，利用 $\sin,\cos$ 奇偶性的不同。

III. 重点 - 函数极限的计算

i. 0/0 形

洛必达法则

若 $f(x),g(x)$

- $\lim f(x)=\lim g(x)=0/\infty$;
  可以推广为 $\dfrac{\blacksquare}{\infty}$;
- $f(x),g(x)$ 在 x_0 某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；
  此处注意，$\begin{cases} n\text{阶可导} & \Rightarrow \text{洛}n-1\text{次}+\text{导数定义}\\ n\text{阶连续导数} & \Rightarrow \text{洛}n\text{次}\end{cases}$
- $\dfrac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)}=A(\text{或}\infty)$,

则 $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=A(\text{或}\infty)$.

等价代换

当 $x\to 0$ 时，有

- $\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x$;
- $e^x-1-x\sim x-\ln(1+x)\sim 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$;
- $x-\sin x\sim\arcsin x-x\sim\dfrac{x^3}{6}$;
- $\tan x-x\sim x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{3}$;
- $\tan x-\sin x\sim\arcsin x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{2}$;

对于以上等价无穷小，有

i. 可变量代换，如 $\sin\square\sim\square,\ \tan\square\sim\square,\cdots$

ii. $x\to 0$ 时，$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a,\ \log_a(1+x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln a}\sim\dfrac{x}{\ln a}$;

iii. 若 $x \to a$ ，可以令 $t = x - a \to 0$.

iv. 不能在复合函数的自变量处做等价代换，如 $x \to 0 \nRightarrow f(x) \sim f(\sin x)$.

泰勒公式

- $e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$;
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$, 其中 $C_\alpha^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}$

  如，$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$;
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$;
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + o(x^n)$;

泰勒公式求极限时，

- 分子阶数不小于分母阶数；
- 加减不抵消，“齐头并进”；
- 可推广为 $\square \to 0$.

ii. ∞/∞ 形

主要方法有

- 洛必达；
- 抓大头，即每个因式保留高阶无穷大；

  $x \to 0 \Rightarrow \ln^\alpha(x) \ll x^\beta \ll a^x \ll x^x$, 其中 $\alpha, \beta > 0, a > 1$.

iii. $\infty - \infty$ 形

主要方法有

- 通分（有分式时）；
- 有理化（有根号时）；
- 倒代换，即令 $t = \dfrac{1}{x}$.

iv. 0^0 与 ∞^0 形

若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0(\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \exp\left(\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)\right)$.

v. 1^∞ 形

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} [1+u(x)]^{v(x)} = \exp\left(\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)\right)$.
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \exp\left(\lim\limits_{x\to x_0} v(x)[u(x)-1]\right)$.

事实上，有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{i=0}^n a_i^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{\prod a_i}$$

IV. 已知极限反求参数

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且 $g\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq \mathbf{0}$ 且 $g\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

例

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

- 证明

  $b = 0$ 时原式显然成立。

  $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t} > 0(t \neq 0) \Rightarrow b \neq 0$ 时原式不成立。

  因此，b 只能为零。

V. 无穷小阶的比较

例

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$, 则存在一组唯一的 $\lambda_i, i=1,2,3$ 使得 $h\to 0$ 时，有 $\sum\lambda_i f(ih)-f(0)$ 是 h^2 的高阶无穷小。

- 一般证明

  $\sum\lambda_i f(ih)-f(0)$ 是 h^2 的高阶无穷小 $\Rightarrow \sum\lambda_i f(ih)-f(0)=0$;

  对上式两边求导，有 $\sum\lambda_i if'(ih)=0$;

  对上式两边求导，有 $\sum\lambda_i^2 if''(ih)=0$;

  因此，有 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 由于系数矩阵满秩，其有唯一解，因而得证。

- 泰勒法

  将 $f(h), f(2h), f(3h)$ 展开至二阶，代入 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sum\lambda_i f(ih)-f(0)}{h^2}$, 然后和前述做法一致。

VI. 重点 - 数列极限的计算

i. 夹逼定理

左边缩，右边放，两边极限相等。

放缩时，有不等式

- $0<x<\pi/2$, 则 $\sin x<x<\tan x; \sin x<x<\pi/2\sin x; 2/\pi x<\sin x<x$;

  利用 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的性质证明。

- $x>0, x>\sin x; x<0, x<\sin x$;

- $e^x>1+x, x\neq 0$;

- $\dfrac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x, x>-1, x\neq 0.$

ii. 单调有界定理

对数列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 求极限，方法如下。

- 适当放缩以证明有界性；

- 做差、做商或求导证明单调性；

- 若其单调，由单调有界知 $\lim x_n$ 存在；
- 令 $\lim x_n = a$, 对原式两端取极限，有 $a = f(a)$, 因此可以解得 a;
- 若其不单调，则设 $\lim x_n = a$, 再利用夹逼定理证明前者确实成立。

iii. 定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{d\to 0}\sum_{i=i}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

其中，$\xi_i \in \left[a+\frac{i-1}{n}(b-a), a+\frac{i}{n}(b-a)\right]$.

VII. 间断点的判定

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一间断点，

i. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 均存在，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一个第一类间断点，其还能**且必须要**分为
   - 可去间断点 - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$;
   - 跳跃间断点 - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$;

ii. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 中有至少一个不存在，则称其为第二类间断点。第二类间断点不用强制细分。

   第二类间断点可以分为
   - 无穷间断点 - 左右极限至少有一个为无穷；
   - 震荡间断点 - 左右极限至少有一个不存在，但不是无穷；

可能存在间断点的地方：

- 初等函数的无定义点；
- 分段函数的分段点。

第二章
一元函数微分学

I. 导数与微分的概念

一极限在已知/未知导数存在情况下的区别

已知 $f(0)=0,\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在不能推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，因为此种推导过程中事实上是在导数存在的假设之下进行的。

但是，若已知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0-mh)-f(x_0-nh)}{h}=(m-nf'(x_0))$, 因为此处可导性已知，故可以利用导数的定义。

$f(x)$ 可导与 $|f(x)|$ 可导之间的关系

假设 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 连续。

- 若 $f(x_0)\neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在此处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在此处可导（由保序性）;
- 若 $f(x_0)=0$, 则 $|f(x)|$ 在此处可导 $\Rightarrow f'(x_0)\overset{\exists}{=}0.$

左右导数存在性与连续性的关系

$$\left.\begin{matrix} f'_+(x_0)\text{存在}\Leftrightarrow f(x)\text{于此处右连续} \\ f'_-(x_0)\text{存在}\Leftrightarrow f(x)\text{于此处左连续}\end{matrix}\right\}\text{但左右导数不相等}\Rightarrow f(x)\text{于此处连续}$$

一个分段函数连续、可导、有连续导数的条件

对于 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}/x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases},\beta>0$, 有

$$f(x)\text{在}x=x_0\text{处}\begin{cases}\text{连续}\Leftrightarrow\alpha>0\\ \text{连续}\Leftrightarrow\alpha>1\\ \text{连续}\Leftrightarrow\alpha>1+\beta\end{cases}$$

II. 导数与微分的计算

分段函数

分段函数分段求，分断点处用定义。

复合函数

复合函数使用链式法则求解,对嵌套类函数 $f(f(x))$, 可以考虑直接找出其表达式,也可以令 $f(x)=u$, 然后使用链式法则直接求解。

隐函数

- **直接求导** - 对 $F(x,y)=0$ 两端对 x 求导，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- 公式法 - 使用隐函数求导公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.
- 全微分 - $F(x,y)=0$ 两端求全微分，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

反函数

设 $x=f^{-1}(y)$ 由 $y=f(x)$ 确定，则

- 若 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{f'(x)}$.
- 若 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$.

参数方程

设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定。此时，$t=t(x),y=y(t(x))$.

对于其导数，有

- 若 $x(t),y(t)$ 均可导，且 $x'(t)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$;
- 若 $x(t),y(t)$ 均二阶可导，且 $x'(t)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$.

高阶导数

- 奇偶性

  奇函数偶阶导数或偶函数求奇阶导为奇函数，此时 $f(0)=0$.

- 递推公式
  - $[(ax+b)^{\alpha}]^{(n)}=\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}(ax+b)^{\alpha-n}a^n=\alpha(\alpha-1)\cdots(a-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}a^n$,

    特别地，$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$;
  - $(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b},(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$;
  - $[\ln(ax+b)]^{(n)}=a\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n-1)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$;
  - $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\dfrac{n\pi}{2})$;
  - $[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\dfrac{n\pi}{2})$.

- 莱布尼茨公式 - 乘积的高阶导数

若 $u=u(x), v=v(x)$ 均 n 阶可导，则有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

- 泰勒公式 - 一般而言，应用于 $x=0$ 处

  求 n 阶导时，找到含有 x^n 的项，其求 n 阶导数后正好剩下常数。

III. 极重点 - 导数应用求切线和法线

直角坐标表示的曲线

对直角坐标 $y=f(x)$ 表示的曲线，有

- **切线方程** - $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.
- **法线方程** - $y-y_0=\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

参数方程表示的曲线

对参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 表示的曲线，其切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=t_0}$$

注意 $(x,y)=(x_0,y_0)$ 时 t 的取值。

极坐标表示的曲线

对极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ 表示的曲线，可以将其表示为 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$

此时其就转化为参数方程。

IV. 导数应用求渐近线

水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, 则称 $y=b$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线，也叫铅直渐近线。

垂直渐近线只需要讨论分母为零的点或者函数无定义的端点。

斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(kx+b)=0\ (x\to-\infty)$, 则称 $y=kx+b$ 为斜渐近线。

具体而言，若

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$;

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-kx=b$,

则有斜渐近线 $y=kx+b$ 。$x\to-\infty$ 时同理。

注意，

- 即使 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ 存在，斜渐近线也不一定存在；
- 一侧不会同时存在水平渐近线和斜渐近线。

求斜渐近线的简单方法

对 $y=f(x)$, 若能凑形式使得其形如 $y=ax+g(x)$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=b$, 则 $y=ax+b$ 即为对应方向的斜渐近线。

V. 导数应用求曲率

曲率为

$$k=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径 ρ 为 k 的倒数。

若已知曲率圆，则其切点处与原方程同函数值，同导数值。

VI. 导数应用求极值与最值

极值第一充分条件

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，$f'(x)$ 在 $x=x_0$ 的左右去心邻域内异号，则 $f(x_0)$ 为极值点。

极值第二充分条件

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $f'(x)=0$, 则若 $f''(x)>0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值，$f''(x)<0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值。

极值第三充分条件

若对 $f(x)$ 和任意偶数 n 有 $\forall i<n, f^{(i)}(x)=0, f^{(n)}\neq 0$, 则若 $f^{(n)}(x)>0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值，若 $f^{(n)}(x)<0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值。

费马引理

可导函数的每一个可导的极值点都是驻点。

VII. 导数应用求凹凸性与拐点

注意，拐点确实是点。

拐点第一充分条件

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，$f''(x)$ 在 $x=x_0$ 的左右去心邻域内异号，则 $f(x_0)$ 为拐点。

拐点第二充分条件

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $f''(x)=0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

拐点第三充分条件

若对 $f(x)$ 和任意奇数 n 有 $\forall i<n, f^{(i)}(x)=0, f^{(n)}\neq 0$, 则其为拐点。

VIII. 导数应用证明不等式

其主要分为三种方法。

- 单调性
- 凹凸性

  设 $f(x)$ 可导，则其为凹函数等价于下面任一情况。

  - $f'(x)$ 单调递增；
  - 曲线在其切线上方，即

    $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), x\neq x_0$
  - 曲线在其割线下方，即

    $f(x)<f(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), x\in(a,b)$

IX. 导数应用求方程的根

应用导数求方程的根时，以单调性结合零点定理。

X. 微分中值定理证明

含有一个点 ξ 的等式

- 若待证式中不含导数，则适用零点定理；
- 若待证式中含有导数，则应用零点定理。

  构造函数时，可以

- ○ 观察待证式，如 $f'(x_0)+g'(x_0)f(x_0)=0 \Rightarrow \left[e^{g(x_0)}f(x_0)\right]'=0.$
- ○ 强行构造原函数，即
  - ∗ 将待证式中的 ξ 改为 x;
  - ∗ 积分以去导数符号并令 $C=0$;
  - ∗ 移项至待证式左边并构造辅助函数。

含有 η,ξ 两个点的等式

- 题设 $\xi\neq\eta$ 时，分区间 $(a,c),(c,b)$ 并用两次拉格朗日；

  对于 c, 需要先在题干结论中引入 c 并将其反解。

- 未明示 $\xi\neq\eta$ 时，对待证式，若其两个变量能分离至两边，则将其分离至两边之后，使用拉格朗日或柯西将两边联系至同一个值，以证明其相等。

含有高阶导数 $(n\geq 2)$ 的等式或不等式

当 $n\geq 2$ 时就可以考虑使用泰勒，若 $n>2$, 必定使用泰勒。

泰勒展开时，x_0 可以取中点和端点，但更常用的还是**极值与最值**等有性质的点。

第三章
一元函数积分学

I. 定积分的概念

判定含有变限积分函数的不等式时，常可以将非变限积分函数放入积分号；此时，可以比较被积函数。

可以使用凹凸性判定含有变限积分函数的不等式。利用曲线割线与凹凸性的关系，可以很容易地比较一函数 $f(x)$ 与 x 之间的几何上的关系，或者说 $\dfrac{f(x)}{x}$ 与 1 的关系。

II. 不定积分的计算

不定积分常见的计算方式如下。

- 不定积分凑微分

  对 $f(u)$ 及其原函数 $F(u)$, 若 $u=u(x)$ 可导，则有
  $\displaystyle\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int f(u(x))\mathrm{d}u(x)=F(u(x))+C$

- 分布积分法

  设 $u=u(x), v=v(x)$ 可导，则 $\displaystyle\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

- 换元法

  设 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\phi'(t)\neq 0$, 若 $\displaystyle\int f(\varphi(t))\mathrm{d}t=F(t)+C$,

  则 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$

- 三角代换

  - 对 $\sqrt{a^2-x^2}$, 令 $x=a\sin t$;
  - 对 $\sqrt{x^2-a^2}$, 令 $x=a\sec t$;
  - 对 $\sqrt{a^2+x^2}$, 令 $x=a\tan t$;

- 根式代换

  - 令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$;

  - 令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$;
  - 对同时有 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$ 的，令 $\sqrt[l]{ax+b}=t$, 其中 l 为 m,n 的最小公倍数；

- 倒代换

  令 $x=\dfrac{1}{t}$, 仅在系数 ≥ 2 时予以考虑。

- 万能代换 - 三角有理式

  令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 则 $x=2\arctan t, \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

- 整体代换

  令复杂函数整体 $=t$.

附录

补充结论

一类无穷阶可导的抽象函数

若 $f(x)$ 满足

- $f(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x + \Delta$;
- $f'(x) = f(x) + \Delta$;
- $f''(x) = f'(x) + \Delta$,

其中 Δ 无穷阶可导，则 $f(x)$ 无穷阶可导。

幂与可导函数积的高阶导数

设 $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导且 $g(x_0) \neq 0$, 则

$$\forall i < n, f^{(i)}(x_0) = 0, f^{(n)} \neq 0$$

变限积分函数的初始条件

对变限积分函数 $g(x) = \displaystyle\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$, 注意到 $g(b) = 0$.