



线性代数提高笔记

奇峰

之前

目录

第一章 行列式	3
一. 求行列式的值	3
二. 代数余子式	3
三. 抽象矩阵行列式	4
四. 求行列式方程的根	6
第二章 矩阵	8
五. 求解与伴随矩阵相关的问题	8
六. 可逆矩阵的应用	9
七. 初等变换与初等矩阵之间的关系	10
八. 求矩阵的秩	11
九. 求解矩阵方程	12
十. 计算 n 阶矩阵高次幂	13
第三章 向量	14
十一. 相关性	14
十二. 线性表示	15
十三. 秩与极大线性无关组	15
第四章 线性方程组	17
十四. 解的判定	17
十五. 求通解	18
十六. 方程组的同解与公共解	18
第五章 矩阵的特征值与特征向量	21
十七. 矩阵的特征值与特征向量	21
十八. 相似性的判定	22
十九. 相似对角化的判定与运算	24
二十. 实对称矩阵	25
第六章 二次型	28
二十一. 二次型化为标准形	28



二十二. 合同判定	31
二十三. 正定判定	32
二十四. 两点总结	33

概述

题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵 } (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \text{秩（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数 } \left\{ \begin{array}{l} \text{可逆变换} \\ p + q = r \end{array} \right. \end{array} \right.$$

大题部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{方程组 } \left\{ \begin{array}{l} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{array} \right. \\ \text{相似形（二次型）} \end{array} \right.$$

一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i) \text{ 是否相关?} \\ AX = 0 \text{ 的基解?} \\ A \sim B \\ p + q = r \end{array} \right.$$

一种方法



初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{array} \right.$$

第一章

行列式

定义与性质

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{三大定义} \left\{ \begin{array}{l} \text{几何定义;} \\ \text{逆序定义;} \\ \text{展开定义;} \end{array} \right. \\ \text{计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{数值形;} \\ \text{含参形;} \\ \text{抽象形;} \end{array} \right. \\ \text{证明} |A| = 0 \left\{ \begin{array}{l} |A| = -|A|; \\ r(A) < n; \\ \text{不可逆 (常用于反证);} \\ AX = 0 \text{ 有非零解;} \\ \exists \lambda_0 = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

一. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
 - 三角形
 - 范德蒙德行列式
 - 分块
- 特殊形状的行列式

二. 代数余子式

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

注意，



- 其为 $(n-1)$ 阶子式;
- 其线性组合 $\sum_i a_i A_{ki}$ 相当于将行列式第 k 行元素替换为 (a_i) ;
- $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 伴随矩阵 $A^* = (A_{ij})^T \triangleq |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}$

对数值型矩阵 A , 求 A^* 时, 可先求 $|A|$ 并利用 $(A:E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E:A^{-1})$ 求 A^{-1} , 再利用公式 $A^* = |A|A^{-1}$ 求伴随矩阵。

三. 抽象矩阵行列式

性质

- 对已知 $A = (\alpha_i)$ 的矩阵, 可以 $\begin{cases} \text{行列式列消} \\ \text{可逆时, } \begin{cases} \text{矩阵乘法} \\ \text{相似} \end{cases} \end{cases}$
- $|kA| = k^n|A|$, 其中 k 可以是行列式;
 $|A^T| = |A|, |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|;$
- 设 A 可逆, 则 A^* 可逆, 且有
 $|A^*| = |A|^{n-1}; (A^*)^* = |A|^{n-2}A;$
 $|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2};$
- $|A| = \prod \lambda_i; \text{tr}(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i;$
- $P^{-1}AP = B \Rightarrow |A| = |B|;$
- $aA + bE$ 不可逆 $\Leftrightarrow |aA + bE| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_0 = \frac{-b}{a};$
- $AA^T = A^T A = E \Rightarrow |A| = \pm 1;$
- 对可逆矩阵 $A, |A + \alpha\beta^T| = |A|(1 + \beta^T A^{-1}\alpha);$
对 $B = \alpha\beta^T, |\lambda E + \alpha\beta^T| = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^T\alpha);$
- 对 A_n , 若 $A^2 = A, A \neq E$, 则有 $|A| = 0$.

• 反证

假设 A 可逆, 则 $A^2 A^{-1} = AA^{-1} = E \Rightarrow A = E$, 与题设矛盾, 故 A 不可逆, 因此 $|A| = 0$.

• 秩

$$A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O \Rightarrow r(A) + r(A - E) \leq n;$$

$$A \neq E \Rightarrow r(A - E) > 0 \Rightarrow r(A) < n \Rightarrow |A| = 0.$$



- 方程组

$A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O; A \neq E \Rightarrow AX = O$ 存在非零解, 因此 $r(A) < n$, 即 $|A| = 0$.

- 特征值

$A(A - E) = O = O(A - E), A \neq E$, 因此 A 存在一特征值 $\lambda_0 = 0$, 此时 $|A| = \prod \lambda = 0$.

其中, 对于第八条,

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 + \beta^\top A^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (ii)$$

显然 (i), (ii) 的两边也相等. 此时对二者右边取得行列式, 得到

$$|A + \alpha\beta^\top| = |A|(1 + \beta^\top A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子 $D = \begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x + a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为 $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为 A , 后者为 $\alpha\beta^\top$.

ii. $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E - (-\alpha\beta^\top)|$, 此时视 $A = \lambda E$,

套用前述方法有 $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E|(1 + \beta^\top(\lambda E)^{-1}\alpha) = \lambda^n(1 + \frac{\beta^\top\alpha}{\lambda}) = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^\top\alpha)$.

注意, 若有 $AB = O, B = (\beta_i)$, 则考虑

- $r(A) + r(B) \leq n$;
- B 的列向量为 $AX = O$ 的一组解;
- $A\beta_i = O = O\beta_i$, 此时 B 的列向量为 $\lambda_A = 0$ 的特征向量。

计算抽象行列式

计算抽象的行列式时, 若其有法则, 如 A^{-1}, A^\top, A^* , 则利用其法则, 若其无法则, 则利用 $E = AA^{-1}$ 或 $E = AA^\top$.

对求 $|A + B|$ 的情况, 由于无法则, 考虑添加 E , 此时“一前一后, 前者前, 后者后。”对于

$$|A + B| = |E_1A + BE_2|, \quad E_1, E_2 \text{ 都是单位矩阵}$$

有



- E_1 在 A 前, E_2 在 B 后, 此谓一前一后;
- E_1 拆时, 考虑同在前面的 B , 即 $B^{-1}B$ 或 BB^{-1} , 此谓前者前;
- E_2 拆时, 考虑同在后面的 A , 即 $A^{-1}A$ 或 AA^{-1} , 此谓后者后;

由行列式值求参数

需要加减 • 消元 • 出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数 $\lambda-2$ 。

四. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数 (行列式和最高次方)
- 根与系数的关系

$$\text{对 } f(x) = D = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \text{ 及其根 } x_i \text{ 有 } \begin{cases} \sum x_i = -\frac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

矩阵加边

对行列式 D_n , 显然

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

其中, 为 $*$ 的部分可以为任意值, 因此可以按题面设置易于计算的值。另外, 加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式, 使得其虽然不等于原式, 但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$



可以将其变为

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \leftarrow \text{增补行}$$

并按照第一列展开，此时 x^3 的系数 A_3 正好为 $-|D|$ ，而 x^4 的系数 A_4 为范德蒙德行列式，值为 $\prod(x_i - x_j)$ ，由前述结论， $\sum a_i = -\frac{A_3}{A_4}$ ，整理即得到结论。

第二章

矩阵

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义与运算} \left\{ \begin{array}{l} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^*, A^T \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ 或 } B = 0; A^2 = 0 \text{ 同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{ 当且仅当 } A \text{ 可逆时成立} \end{array} \right. \\ \text{特殊矩阵} - E, \Lambda, A^T = A, AA^T = E \\ \text{伴随矩阵 } A^* \\ \text{可逆矩阵} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明 } A \text{ 可逆} \end{array} \right. \\ \text{初等矩阵 (逆, 变换)} \\ \text{秩 (性质)} \\ \text{应用} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵方程} \\ \text{求 } A^n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

五. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求 } A^* \left\{ \begin{array}{l} \text{定义法} - A^* = (A_{ij})^T \\ \text{公式法} - A^* = |A|A^{-1} \end{array} \right. \\ \text{性质} \left\{ \begin{array}{l} AA^* = A^*A = |A|E (\text{可推广为 } \Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2} \\ A^{-1, T, *} \text{ 之间可以互换, 如 } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

矩阵行列和的结论

对矩阵 A , 若其每行元素和均为 k , 则有 $A(1, 1, 1)^T = (k, k, k)^T = k(1, 1, 1)^T (\lambda\alpha)$;

若为每列元素和均为 k , 有 $(1, 1, 1)A = (k, k, k)$, 转置后与前者相同。



右乘/左乘 A^* , 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i, j), a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;
- $\forall(i, j), a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = -1$;

也可以使用矩阵表达式替代 A .

六. 可逆矩阵的应用

$$\text{可逆矩阵的判定} \left\{ \begin{array}{l} AB = BA = kE (\text{此时 } A^{-1} = \frac{1}{k}B) \\ A \text{ 可逆} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ r(A) = n \\ A \text{ 的列向量线性无关} \\ AX = 0 \text{ 仅有零解} \\ AX = b \text{ 有唯一解} \\ \forall \lambda, \lambda \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{可逆矩阵的计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象} \left\{ \begin{array}{l} \text{凑 } AB = E \\ \text{利用性质} \left\{ \begin{array}{l} (A^{-1})^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{具体} \left\{ \begin{array}{l} \text{低阶 (2-3)} - A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换} - (A : E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E : A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块

- 仅在主对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。

$$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$



- 副对角分块

副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

- 仅在副对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}DC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$$

可交换矩阵的结论

- 线性组合 - $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$;
- 一元二次形式 - $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$;

证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

其中，对前者，

$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B - \mathbf{aE} + \mathbf{aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &= (B - aE)(A - bE) = abE \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = (B - aE)(A - bE) \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。

七. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

	符号	行列式	逆
交换	E_{ij}	-1	$E_{ij}(k)$
倍乘	$E_i(k)$	k	$E_i(1/k)$
倍加	$E_{ij}(k)$	1	$E_{ij}(-k)$

利用性质计算矩阵



有例子

$$\begin{aligned} E_{12}A = B &\Rightarrow \begin{cases} -|A| = |B| \\ A^{-1}E_{12} = B^{-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12} = |B|B^{-1} \\ &\Rightarrow -A^*E_{12} = B^* \end{aligned}$$

八. 求矩阵的秩

秩的求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \begin{cases} r \text{ 阶至少一非零} \\ r+1 \text{ 阶全为零} \end{cases} \\ \text{初等变换法 (行列均可)} - A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵 } B, \text{ 非零行数即为秩} \\ \text{非零特征根的个数是秩} \end{array} \right.$$

性质

- 对 $A_{m \times n}$, 有 $r(A) = r(A^\top A) = r(AA^\top) = r(A^\top) = r(kA)$.

◦ 证明 $r(A^\top A) = r(A)$

利用同解方程组。

$$\begin{aligned} A^\top AX = O &\Rightarrow X^\top A^\top AX = O \\ &\Rightarrow (AX)^\top AX = O \\ &\Rightarrow |AX| = 0 \\ &\Rightarrow AX = O \end{aligned}$$

$$AX = O \Rightarrow A^\top AX = O$$

因此 A 与 $A^\top A$ 同解, 故其秩相等。

- $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$.
- $r(AB) \leq r(A); r(AB) \leq r(B)$. 对前者, B 可逆时等号成立。
- $r(A : B) \leq r(A) + r(B)$;

$$r\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right) \leq r(A) + r(B)$$

- 对矩阵 $A_{m \times \mathbf{n}}, B_{\mathbf{n} \times s}, AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq \mathbf{n}$.

此即所谓“前看列, 后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时, 都应考虑这一句。

◦ 证明

$$AB = O \Rightarrow B \text{ 的列向量 } \beta_i \text{ 是 } AX = O \text{ 的一组解, 此时 } r(\beta_i) = r(B) \leq n - r(A) \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n.$$



- 对 A_n , 其伴随矩阵的秩 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 (n \geq 2) \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$
- $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$
- 若 P, Q 可逆, 则有 $r(PA) = r(AQ) = \overbrace{r(PAQ)}^{\text{矩阵等价}} = r(A)$
若 $B = PAQ$ 或 $r(B) = r(A)$, 称 A, B 等价。
- 对 $A_{m \times n}$, 若其行满秩, 则 $r(A) = m, A \sim (E_m, O)$.
- 对 $A_{m \times n}, r(A) = n \Rightarrow r(AB);$
 $r(A) = m, r(BA) = r(B)$.
 - 证明前者成立
 $r(B) \leq r(AB) \leq r(A^{-1}AB) = r(B)$, 故 $r(AB) = r(B)$.

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2 = A \Rightarrow r(A) + r(A - E) = n$.
- $A^2 = E \Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n$.
 - 证明后者成立

$$\begin{aligned} (A - E)(A + E) = 0 &\Rightarrow n \geq r(A - E) + r(A + E) = r(A - E) + r(-(\mathbf{A} - \mathbf{E})) \geq r(2E) = n \\ &\Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n \end{aligned}$$

事实上, 对于 A 的一元二次式, 若其可因式分解, 则分解后的因式都满秩。

九. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$
- $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1}$
- $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX = C \Rightarrow A(X_i) = (C_i)$, 其中 X_i, C_i 是对应矩阵的列向量, 解得到的 n 个非齐次方程组即可。
- $XA = C \Rightarrow A^T X^T = C^T$, 然后同上。



十. 计算 n 阶矩阵高次幂

- 归纳运算。

- $r(A) = 1$ 时, 有 $A^n = \text{tr}(A)^{n-1}A$.

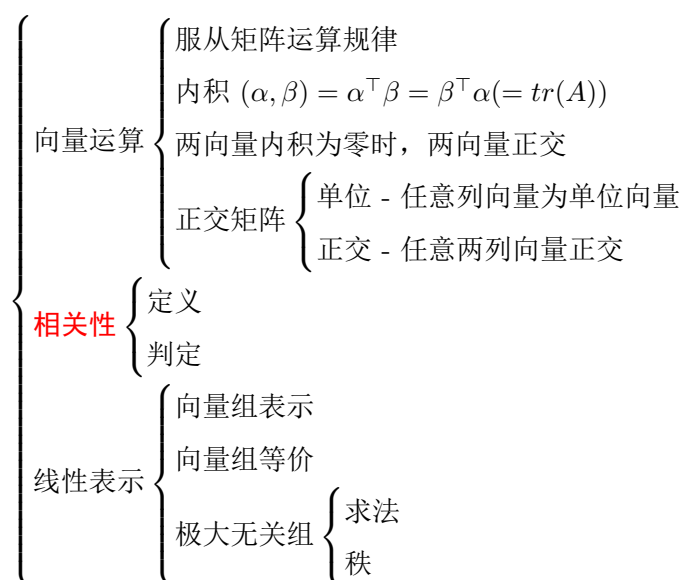
- $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} & ac & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n \geq 3} = O$.

- 相似性

若 $P^{-1}AP = B$, 则有 $P^{-1}A^nP = B^n$, 其中 P 不变,

第三章

向量



十一. 相关性

定义法

定义法常用于证明相关/无关性。

令 $\sum k_i \alpha_i = \vec{0}$, 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出 $\forall i, k_i = 0$, 则 α_i 线性无关。

秩

$$\begin{cases} r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \mathbf{S} \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性无关} \\ r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) < S \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性相关} \end{cases}$$

性质



$$\bullet \alpha_i \text{ 线性无关} \Leftrightarrow (\alpha_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 仅有零解。}$$

• 满足以下任意一条则线性相关。

- 内含零向量;
- 内含等比例向量;
- 内含可表示向量。

• 向量个数大于维数必相关 (利用秩证明)。

• 全部无关, 一部无关; 一部相关, 全部相关。

• 原本相关, 缩短相关, 原本无关, 加长无关。(改变的是维数)

• 以少表多, 多必相关。

对于一组能组成方阵的 (α_i) , 若其方阵 P 满足 $AP = PB$, 则这组向量无关。此处运用了相似的性质。

十二. 线性表示

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一个向量, } \beta = \sum_{i=1}^s k_i \alpha_i \Leftrightarrow (\alpha_i) X = \beta \\ \text{一组向量, } \beta_i = \sum_{j=1}^s x_{ij} \alpha_j; i = 1, 2, \dots, t \\ \text{两组互相表示, 即} \\ \text{向量组等价} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, \beta_i = \sum_j x_{ij} \alpha_j \\ \forall j, \alpha_j = \sum_i x_{ij} \beta_i \end{cases} \end{array} \right.$$

判定

- β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta)$, 注意此时不一定满秩;
- $\forall i, \beta_i$ 均可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 表出 $\forall i, \Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta_i)$;
- 向量组 (I), (II) 等价 $\Rightarrow r(I) = r(II) = r(I, II)$

十三. 秩与极大线性无关组

定义

对 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中有部分向量 $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}$, 其

- 线性无关;



- 任意剩余向量都可由这组向量表示,

则称 $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}$ 为极大线性无关组。

性质

- 无关组不唯一, 但是其个数唯一;
- 只有 $\vec{0}$ 的向量组无极大无关组;
- 向量组的秩为极大无关组向量个数;
- 向量组与其极大无关组等价; 极大无关组之间也等价。

求解 - 列写行消

$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \xrightarrow{\text{行变换}} B_{\text{阶梯}}$, 从每个台阶中选一列组成极大无关组。

第四章

线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{齐次方程组 } AX = 0 \\ \text{非齐次方程组 } AX = b \\ \text{同解与公共解} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{表示形式} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵} \\ \text{向量} \end{array} \right. \\ \text{有解的判定} \\ \text{解的性质} \left\{ \begin{array}{l} \text{通解} \\ \text{基解} \\ \text{组合} \end{array} \right. \\ \text{求解方法} \\ \text{有解判定} \\ \text{解的性质} \\ \text{解的结构 - 齐通 + 非齐特} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{通解 - 解集相同} \\ \text{公共解 - 解集有交集} \end{array} \right.$$

十四. 解的判定

$$\text{对于齐次方程 } AX = 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{只有零解} \Rightarrow r(A) = n \\ \text{有非零解} \Rightarrow r(A) < n \end{array} \right.$$

其基础解系

- 为 $AX = 0$ 的解;
- 线性无关;
- 数量为 $n - r(A)$ 个。

$$\text{对于非齐次方程 } AX = b, \left\{ \begin{array}{l} \text{无解} \Rightarrow r(A) \neq r(\bar{A}) \\ \text{有解} \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = n \Rightarrow \text{解唯一} \\ < n \Rightarrow \text{解不唯一 (无穷)} \end{array} \right.$$



十五. 求通解

对于具体的数字矩阵, 通过行变换或高斯消元做。

对抽象矩阵,

- 通解为齐通 + 非齐特;
- 齐解任意组合仍然为齐解;
- 若 ξ_1, \dots, ξ_t 均为 $AX = b$ 的解, 则 $\sum k_i \xi_i$ 为 $\begin{cases} \text{齐解, } \sum k = 0 \\ \text{非齐解, } \sum k = 1 \end{cases}$

例题 三阶行列式 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 则

I. $r(A) = 2$;

II. 若有 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $AX = b$ 的通解。

方法 I. $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow$ 可列消 $\alpha_3 \Rightarrow r(A) \leq 2$.

有三个互异特征值 \Rightarrow 可相似对角化 $\Rightarrow r(A) \geq 2$ 因为至多一个特征值为零。

故 $r(A) = 2$.

II. 由于 $r(A) = 2$, X 的基解有一个向量。

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ 一非齐解为 $(1, 2, -1)^\top$.

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow A(1, 1, 1)^\top = \beta$, 故一非齐解为 $(1, 1, 1)^\top$.

故通解为 $(1, 1, 1)^\top + k(1, 2, -1)^\top$, 其中 $k \in \mathbb{R}$.

例题 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 求满足 $AB = E_3$ 的所有矩阵 B .

方法 不妨令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则有 $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 此时对 $A\beta_i = \xi_i$ 求解。

注意到可以通过对 $(A \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3)$ 做初等行变换一起完成高斯消元。解出 β_i , 则 (β_i) 即为所求 B .

注意, 若待求式为 $XA = B$, 则转置为 $A^\top X^\top = B^\top$.

十六. 方程组的同解与公共解

公共解

即两方程解集交集非空。具体而言,

- 方程组已知 - 联立;



- 知一方程组与另一通解 - 用通解表示公共解，代回方程求解；
- 知两组通解 - 待定系数设通解，使通解相等求系数。

同解

即两方程解集相同。

当 $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 时, $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解。

例题 设有方程组 (I): $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ 与方程组 (II) 的通解为 $k_1(0, 1, 1, 0)^\top + k_2(-1, 2, 2, 1)^\top$,

I. 求 (I) 基础解系;

II. 求 (I), (II) 是否有非零公共解; 若有则将其列出。

方法 I. 由高斯消元法, 其基础解系为 $(0, 0, 1, 0)^\top, (-1, 1, 0, 1)^\top$.

II. 不妨设公共解为 $k_1(0, 1, 1, 0)^\top + k_2(-1, 2, 2, 1)^\top$, 即 $(-k_2, k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, k_2)^\top, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;

将其代入 (I), 有 $k_1 = -k_2$, 此时原公共解为 $k(1, -1, -1, -1)^\top, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

例题 设有 2×4 矩阵 A, B , 且 (I) $AX = 0$ 通解为 $k_1(1, 2, 2, -1)^\top + k_2(0, -1, -3, 2)^\top$, (II) $BX = 0$ 通解为 $\mu_1(2, -1, a+2, 1)^\top + \mu_2(-1, 2, 4, a+8)^\top$, 其中 $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, 若 (I), (II) 有非零公共解, 求 a 及所有非零公共解。

方法 设公共解为 $X = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$, 即方程 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)(k_1, k_2, l_1, l_2)^\top = 0$ 有非零解, 因而 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ 不满秩。

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) &\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -a-15 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -a-15 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{不满秩因而 } a \neq -15} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -a-15 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(a+8)(a+22)}{(a+15)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因此 $a = -8$ 或者 $a = -22$.

$a = -8$ 时, $X = k_1(1, 1, -2, 1)^\top; k_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$a = -22$ 时, $X = k_2(-1, 1, 8, -5)^\top; k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

例题 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad (II) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases} ;$$

同解, 求 a, b, c .



解法 显然 $r(B) \leq 2 < 3$; (I) 有非零二阶子式, 即 $r(A) \geq 2$; 又由于 (I), (II) 同解, 可以知道 $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 2$.

因此,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & c-b-1 \\ 0 & 0 & c-b^2-1 \end{pmatrix}$$

且其秩为 2, 因此 $a-2 = c-b-1 = c-b^2-1 = 0$, 即 $a=2$, $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例题 设有 $A_{m \times n}, B_{m \times n}$, 则 $AX=0, BX=0$ 同解的充要条件为 _____.

- A) A, B 向量组等价;
- B) A, B 行向量组等价;
- C) A, B 列向量组等价;
- D) $A^T x = 0, B^T x = 0$ 同解。

方法 A) 仅有 $r(A) = r(B) = r(A, B), r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 未知;

B) 有 $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 符合定义, 因而正确;

C) 仅有 $r(A) = r(B)$;

D) 仅有 $r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$;

第五章

矩阵的特征值与特征向量

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求 } \lambda_A \text{ 与 } \alpha_A \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象} \\ \text{具体} \\ \text{性质} \end{array} \right. \\ \text{相似} \left\{ \begin{array}{l} A \sim B \\ A \sim \Lambda (\text{判定与求解}) \\ \text{求 } A^n, A, \text{ 相似矩阵 } B \end{array} \right. \\ \text{对角化} \left\{ \begin{array}{l} \text{方阵 } A_n (\text{重根}) \\ \text{对称矩阵 } A (\text{结论}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

十七. 矩阵的特征值与特征向量

可能的情况

对抽象矩阵 A ,

- 凑 $A\alpha = \lambda\alpha$;
- $A + kE$ 不可逆 (求 λ_A);

对具体矩阵 A ,

- $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_A; \forall \lambda_0, (\lambda_0 E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha$;
- $A = B + kE, r(B) = 1$;

列表法

可以列表表示对 A 做变换时, 特征值特征向量的变化。

注意, 可以手动将待求矩阵拆为便于运算的形式, 如 $A = B + kE$ 等。

秩为一的矩阵

对秩为一的矩阵, $r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^\top$;

- $\lambda_1 = \text{tr}(A) = \alpha^\top \beta = \beta^\top \alpha, \lambda_2 = \dots, \lambda_n = 0$;
- ○ 若 $\text{tr}(A) \neq 0$, 对 $\lambda_1 = \text{tr}(A), A = \alpha\beta^\top \Rightarrow A\alpha = \alpha\beta^\top \alpha = \text{tr}(A)\alpha$, 故 $\lambda_1 = \text{tr}(A)$ 对应的无关特征向量为 α .



A	λ	α
A^k	λ^k	α
$A^m + kE$	$\lambda^m + kE$	α
A^{-1}	$1/\lambda$	α
A^*	$ A /\lambda$	α
A^\top	λ	无法断定
$P^{-1}AP$	λ	$P^{-1}\alpha$

对其余的特征值 $\lambda_i = 0$, 即解 $AX = 0 \Rightarrow \alpha\beta^\top X = 0$, 发现其与 $\beta^\top X = 0$ 同解。由于这里有 $n-1$ 个无关特征向量, 加上 λ_1 的一个后共计 n 个无关特征向量, 注意到矩阵 A 可以相似对角化。

- 若 $\text{tr}(A) = 0$, 则所有特征值都为 0. 此时仍求解 $AX = 0$, 仍能解得 $n-1$ 个无关特征向量; 因为不够 n 个, 矩阵 A 无法相似对角化。

故 A 能否相似对角化取决于其迹是否为零。

例题 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}A^*P$, 求 $B + 2E$ 特征值特征向量。

方法 通过表格法, 发现 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_A}$, 特征向量仍为 α_A ; 而 $P^{-1}A^*P$ 特征值仍为 $\frac{|A|}{\lambda_A}$, 特征向量为 $P^{-1}\alpha_A$. 只需求解 A 特征向量、特征值、行列式并按上述式计算即可。

例题 设 $A_{3 \times 3} = \alpha\beta^\top + \beta\alpha^\top$, α, β 为单位列向量, $\alpha^\top\beta = \frac{1}{3}$, 则

- 0 是 A 的特征值;
- $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 都是 A 的特征向量;
- A 可以相似对角化。

证明 I. $r(A) = r(\alpha\beta^\top + \beta\alpha^\top) \leq r(\alpha\beta^\top) + r(\beta\alpha^\top) = 2$, 因而 A 不满秩, 故其必有 $\lambda_i = 0$.

II. 由于

$$\begin{aligned} A(\alpha + \beta) &= \alpha\beta^\top\alpha + \alpha\beta^\top\beta + \beta\alpha^\top\alpha + \beta\alpha^\top\beta \\ &= [\text{tr}(A) + |\alpha|](\alpha + \beta) = \frac{4}{3}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

因而为特征向量; $\alpha - \beta$ 同理。

III. 可以算出其有特征值 $\lambda = 0, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$ 互异, 故可以相似对角化。

十八. 相似性的判定

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$, 或者 $AP = PB$, 则称 A, B 相似。

性质

对相似的 A, B ,



- $|A| = |B|; \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B);$
 $r(A) = r(B); \lambda_A = \lambda_B;$
- $P^{-1}A^nP = B^n; P^{-1}(A + kE)P = B + kE;$
- 若 $A \sim C, C \sim B$, 则 $A \sim B$.

例题 对相似的 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, 求 a, b, c .

方法 由相似性质, $\operatorname{tr}(A) = 12 = \operatorname{tr}(B) = 2b + c;$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 13 - a) = 0$ 有解 $\lambda = b, b, c$.

分别假设 $b = 2, c = 2$, 得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

例题 设 $A_{3 \times 3}$ 的互异的特征值为 $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3\}$; 对应的特征向量为 $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$. 令 $\beta = \sum \alpha_i$,

- 证明 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;
- 若 $A^3\beta = A\beta$, 求 $r(A - E)$ 与 $|A + 2E|$.

方法 I. 由于特征值互异, 其对应的特征向量线性无关。设有

$$k_1\beta_1 + k_2A\beta_2 + k_3A^2\beta_3 = \sum (k_1 + k_2\lambda_i + k_3\lambda_i^2)\alpha_i = 0;$$

由于 α_i 无关, 知 $\forall i, k_1 + k_2\lambda_i + k_3\lambda_i^2 = 0$, 而 λ 互异, 故对 $Ak = 0, |A| \neq 0$, 故该方程只有零解, 故原向量组无关。

II. 当第一问中构造了一组无关向量时, 一般在第二问用到其列矩阵, 应用

- 相似;
- 矩阵乘法;

联系已知矩阵以构建方便计算待求结论的新矩阵。

令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$, 则

$$\begin{aligned} AP &= (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = PB \end{aligned}$$

故 A, B 相似, 有 $r(A - E) = r(B - E) = 2, |A + 2E| = |B + 2E| = 6$.

例题 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$, 相似,

- 求 x, y ;



II. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

方法 I. 由题, $|A| = 4(x-2) = |B| = -2y$, $tr(A) = x-4 = tr(B) = y+1$, 故解得 $x=3, y=-2$.

II. 可以知道 $\lambda_A = \lambda_B = 2, -1, -2$. 故 A, B 都相似于 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

此时可以求 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda, P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$; P_1, P_2 各列是对应矩阵的特征向量;
发现 $B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = \Lambda$, 因此 $P = P_1P_2^{-1}$.

十九. 相似对角化的判定与运算

定义

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$, 则称方阵 A 可以相似对角化。

求解

- 可逆 P 阵

A 的 n 个线性无关的特征向量 α_A 构成;

若特征向量的数目不够, 则其不可相似对角化。

- 对角矩阵 Λ

其由 n 个特征值对应, 特征值与特征向量的位置是对应的。

判定

- 充分条件

实对称矩阵 \Rightarrow 可相似对角化;

有 n 个互异特征值的矩阵 \Rightarrow 可相似对角化;

- 充要条件

可相似对角化 \Leftrightarrow 有 n 个无关特征向量

$\Leftrightarrow k$ 重特征值对应 k 个无关特征向量

$\Leftrightarrow k = n - r(\lambda_0 E - A)$

$\Leftrightarrow r(\lambda_0 E - A) = n - k$

例题 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 其对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 则 $P^{-1}A^*P = \underline{\hspace{2cm}}$.

方法 由于三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 其对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 对 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$, 其列分别对应的特征值为 $1, -2, 3$. 注意, 此处 $-\alpha_2$ 的系数 -1 不影响特征值的正负性。

对 A^* , 其特征值为 $\frac{|A|}{\lambda} = -6, -2, 3$, 因此 $P^{-1}A^*P$ 对应的特征值的次序改变, 为 $-6, 3, -2$, 因而有

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$



例题 设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 为非零向量且不是 A 的特征值,

I. 证明 P 为可逆矩阵;

II. 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$ 并判断其是否与对角矩阵相似。

方法 I. 假设 A 不是可逆矩阵, 则其不满秩, 因而 α 与 $A\alpha$ 成比例。此时有 $A\alpha = k\alpha$, 也即 α 为 A 的特征值, 与题设矛盾, 因而 A 是可逆矩阵。

II. 由于

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\alpha, A\alpha) = P^{-1}(A\alpha, A^2\alpha) \\ &= P^{-1}(A\alpha, -A\alpha + 6\alpha) \\ &= P^{-1}(\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_B = P^{-1}PB = B, \end{aligned}$$

而 $\lambda_B = 2, -3$ 互异, 因而可以相似对角化, 故 A 也可以相似对角化。

例题 设 A, B, C 为三阶矩阵, 有 $AB = -B, CA^T = 2C$,

$$\text{其中 } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix},$$

I. 求矩阵 A ;

II. 求当 a 为何值时有 $A^{100}\xi = \xi$.

方法 I. 不妨设 $B = (\beta_i), C^T = (\gamma_i)$, 注意到有 $(CA^T)^T = 2C^T \Rightarrow AC^T = 2C^T$.

由于 $A\beta_1 = -\beta_1, A\beta_2 = -\beta_2, A\gamma_1 = 2\gamma_1$, 知 $\lambda_A = -1, -1, 2, \alpha_A = \beta_1, \beta_2, \gamma_1$.

$$\text{因此, } A = P^{-1}\Lambda P, P = (\beta_1, \beta_2, \gamma_1), \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{可以解得 } A = P\Lambda P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & -15 & -9 \\ -6 & 22 & 18 \\ 3 & -15 & -17 \end{pmatrix}$$

II. 由于 β_1, β_2 为 A 的无关特征向量, 必有 $A^{100}(k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = (-1)^{100}(k_1\beta_1 + k_2\beta_2)$, 而 $A^{100}\xi = \xi$, 可以知道 ξ 可被 β_1, β_2 线性表出, 因此 $\xi = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$ 必有解, 即

$$(\beta_1, \beta_2, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

有解, 因此 $a = -3$.

二十. 实对称矩阵

对角化



- 可逆矩阵 P

必定存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 P 由特征向量组成;

- 正交矩阵 Q

必定存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda$, 其中 Q 经过了施密特正交单位化。

施密特正交化时, 对无关的一组 α_i , 有

- $\beta_1 = \alpha_1$;
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$
- $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$

求原矩阵

- 对 P 有 $A = P \Lambda P^{-1}$;
- 对 $Q = (\gamma_i)$ 有 $A = Q \Lambda Q^T$;

特别地, 若 $r(A) = 1, A = \text{tr}(A) \gamma_1 \gamma_1^T$.

例题 已知 A 为三阶实对称矩阵, 各行元素和均为 3, 且 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, (0, -1, 1)^T$ 是 $AX = 0$ 的解。

- 求 A 特征值与特征向量;
- 求正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;
- 求 A 以及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$.

方法 I. 求特征向量时, 若未明示求无关特征向量, 则需给出全部特征向量。

由各行和均为 3 知 $A(1, 1, 1)^T = (3, 3, 3)^T = 3(1, 1, 1)^T$, 故 A 有特征值 3, 其对应无关特征向量为 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$;

由题设, α_1, α_2 是 $\lambda = 0$ 对应的无关特征向量。

因此, $\lambda = 0$ 对应的特征向量为 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda = 3$ 对应的特征向量为 $k_3 \alpha_3, k_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

II. 可以知道 $\lambda_A = 0, 0, 3$, 对应的无关特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

因为 α_3 与另外二者正交, 对 α_1, α_2 做施密特正交化。故有

- $\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$;
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)^T$;

对全体做单位化, 故有 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \beta_1; \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_2; \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \beta_3$;

此时, 有 $Q = (\gamma_i)$ 使得 $Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.



III. 显然 $A = Q\Lambda Q^\top$. 而 $r(A) = 1, \lambda = 0, 0, 3$,

$$\text{故有 } A = \text{tr}(A)\alpha_1\alpha_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \frac{3}{2}E)^6 = Q^\top(\Lambda - \frac{3}{2})Q$$

$$\begin{aligned} (A - \frac{3}{2}E)^6 &= Q^\top(\Lambda - \frac{3}{2})^6Q \\ &= Q^\top \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^6 Q \\ &= (\frac{3}{2})^6 Q^\top Q = (\frac{3}{2})^6 E. \end{aligned}$$

例题 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 有正交矩阵 Q 使得 $Q^\top A Q = \Lambda$, 若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^\top$, 求 a, Q .

方法 由于存在特征值 λ_1 使得 $A\lambda_1 = \lambda_2(1, 2, 1)^\top$, 可以解得 $a = -1, \lambda_1 = 2$.

代入 $a = -1$, 求 $|\lambda E - A| = 0$, 解得 $\lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$. 通过 $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$ 求 α_2 , 显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交. 因此由正交性,

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2i - 2j + 2k$$

$$\text{此时 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \end{pmatrix}.$$

第六章

二次型

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{二次型与性质} \left\{ \begin{array}{l} X^T A T \\ \text{二次型与标准形} \\ p+q=n \end{array} \right. \\ \text{二次型化为标准形} \left\{ \begin{array}{l} \text{配方法} \\ \text{正交变换} \end{array} \right. \\ \text{合同关系 } P^T A P = B (P \text{可逆}) \\ \text{正定判定} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义 } X^T A X > 0 \\ \text{充要条件} \\ \text{必要条件} \left\{ \begin{array}{l} a_{ii} > 0 \\ |A| > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

二十一. 二次型化为标准形

可逆变换

若存在可逆 C 使得对 $X = CY, f = X^T A X = (CY)^T A C Y = Y^T C^T A C Y$.

若有 $C^T A C = \Lambda$, 则将 f 标准化了。

正交变换

存在正交矩阵 Q 使得 $X = QY$, 则 $f = X^T A X = Y^T \Lambda Y = \sum \lambda_i y_i^2$,

配方法

利用完全平方式凑平方和, 进行变换。

例题 设有可逆矩阵 P 使得 $P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 P .

方法 要将 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ 变为 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$,

只需令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P Y$ 即可。此时的 P 即为所求。



例题 设实二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $X = QY$ 可化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2, a \geq b$,

I. 求 a, b 的值;

II. 求 Q .

方法 I. 可以发现, 对 f 的矩阵 A, g 的矩阵 B , 有 $Q_1^T A Q_1 = \Lambda = Q_2^T B Q_2$,

因此必有 $Q_2 Q_1^T A Q_1 Q_2^T = Q^T A Q = B$, 而 Q 是实对称矩阵, 因此 A, B 相似;

其中, Q 是第二问中的待求正交矩阵。

由于 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B), |A| = |B|, a \geq b$, 解得 $a = 4, b = 1$.

II. 对 A 的两个特征值 $5, 0$, 对应的无关特征向量为 $(1, 2)^T, (2, -1)^T$,

对其单位化后得到 $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

对 B 的两个特征值 $5, 0$, 对应的无关特征向量为 $(2, 1)^T, (1, -2)^T$,

对其单位化后得到 $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

前面已经指出, $Q = Q_1 Q_2^T$.

例题 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$,

I. 写出 f 对应的矩阵;

II. 求正交变换 $x = Qy$ 对应的矩阵;

III. 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

方法 I. 显然 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

II. 由于 $A = \beta\beta^T, \beta = (1, 2, 3)^T$, 有 $r(A) = 1, \lambda_A = 14, 0, 0$;

其中, $\lambda = 14$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$; $\lambda = 0$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_2 = (2, -1, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, -1)^T$.

对 $P = (\alpha_i)$ 做施密特正交单位化, 得到

$$\circ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 3);$$

$$\circ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2, 1, 0);$$

$$\circ \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(3, 6, -5);$$

此时有 $Q = (\gamma_i)$ 使得 $X = QY$ 时有 $f(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2$.

III. 配方, 发现 $f = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2$, 因此 $f = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

显然该方程的所有解为 $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

例题 设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_1x_2$ 经正交变换 $x = QY$ 化为 $3y_1^2 + by_2^2$, 若 $B = Q_2^{-1}A^*Q$, 其中

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$



- I. 求 a, b 及正交矩阵 Q ;
 II. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}BP = \Lambda$, 并写出该 Λ .

方法 I. 题设两个二次型中, 前者的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, 后者的矩阵为 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. 可以知道, $|A| = |B|$ 且 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, 因此 $a = 1, b = -1$, 因此二者有特征值 $3, -1$.

对 $A, \lambda = 3$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1)^\top$, $\lambda = -1$ 对应的无关特征向量为 $\alpha_2 = (-1, 1)^\top$.

对 (α_1, α_2) 做施密特正交单位化, 得到 $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

故存在上述 Q 使得 $X = QY$ 时有 $f = 3y_1^2 - y_2^2$.

II. 由上问知 $\exists P_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$ 使得 $P_1^{-1}AP = \Lambda_1$. 故 $P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{\lambda_1} & \\ & \frac{|A|}{\lambda_2} \end{pmatrix}$.

$A^* = P_1\Lambda_1P_1^{-1}, B = Q_2^{-1}A^*Q_2$, 故有 $B = Q_2^{-1}A^*Q_2 = Q_2^{-1}P_1\Lambda_1P_1^{-1}Q_2$, 即 $P_1^{-1}Q_2\Lambda_1Q_2^{-1}P_1 = (Q_2^{-1}P_1)^{-1}\Lambda_1(Q_2^{-1}P_1) = \Lambda_1$. 此时 $P = Q_2^{-1}P_1$.

因此上述 P 可使得 $P^{-1}BP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$.

例题 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数,

- I. 求 $f = 0$ 的解;
 II. 求 f 的规范型.

方法 I. 令 $f = 0$, 由 f 的半正定性, 有

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 时, 方程仅有零解;

当 $a = 2$ 时, 方程的解为 $k(-2, -1, 1)^\top, k \in \mathbb{R}$.

II. 当 $a \neq 2$ 时, A 可逆, 因此令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + ax_3 \end{cases}$$

此时有 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$;

当 $a = 2$ 时, A 不可逆。注意到 $f = 2(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2$,

故令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{3}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 则有 $f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$;



$$\text{令 } \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}y_1 \\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{则有 } f = z_1^2 + z_2^2.$$

例题 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_1x_3$, 利用可逆线性变换 $X = PZ$ 使得 f 化为标准形, 并求二次型的正负惯性指数。

$$\text{方法 令 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \text{ 则有 } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1 Y.$$

此时有 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_1y_2 + y_2y_3$.

此时又有 $f = 2(y_1 + \frac{7}{4}y_3)^2 - 2(y_2 - \frac{y_3}{4})^2 - 6y_3^2$,

$$\text{故令 } \begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{7}{4}y_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{y_3}{4} \\ z_3 = 6y_3 \end{cases}, \text{ 则有 } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = P_1 Y.$$

此时有 $f = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 6z_3^2$.

因此正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

二十二. 合同判定

定义

若存在可逆矩阵使得 $P^T A P = B$, 则称 A, B 合同。

二次型变化的矩阵是合同的, 因为

$$\begin{aligned} f \xrightarrow{X=PY} X^T A X &\Rightarrow (PY)^T A (PY) \\ &= X^T (P^T A P) Y \triangleq Y^T B Y \end{aligned}$$

判定

- 惯性指数相同 \Leftrightarrow 合同;
- 特征值正负个数相同 \Leftrightarrow 合同;

相似 \Rightarrow 特征值相等 \Rightarrow 合同, 故相似必合同。

例题 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵可逆矩阵, 则在

- A) $PA = B$;
- B) $P^{-1}ABP = BA$;
- C) $P^{-1}AP = B$;



$$D) P^T A^2 P = B^2.$$

中, 正确的是 _____.

方法 A) 由于 $PA = B$, 有 $r(A) = r(B)$, 而 $r(A) = r(B) = n$, 故 P 必定存在。

B) 当 $P = A$ 时显然成立。

C) 可以知道 A, B 分别与一对角矩阵相似, 但两对角矩阵不一定相同。

D) 由于 A, B 可逆, 其必定满秩, 所有特征值都不为零, 故 A^2, B^2 特征值均大于零, 故二者正惯性指数均为 n , 负惯性指数均为 0 , 因而合同。

二十三. 正定判定

定义

若对任意非零 X 都有 $f = X^T A X > 0$, 则称 $f(x)$ 为正定二次型。

判定

二次型 A 正定与以下任意一点等价。

- A 的所有顺序主子式大于零。

$$\text{三阶方阵的顺序主子式形如} \begin{vmatrix} | & | & | \\ | & \cdot & \cdot & | \\ | & \cdot & \cdot & | \\ | & \cdot & \cdot & \cdot & | \end{vmatrix}$$

- 所有特征值大于零;
- 正惯性指数为 n ;
- A 与 E 合同, 即 $\exists P, A = P^T P$.

例题 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, $r(A) = m$, 则在命题

- A) AA^T 与单位矩阵等价;
- B) AA^T 与对角矩阵相似;
- C) AA^T 与单位矩阵合同;
- D) AA^T 是正定矩阵;

中, 正确的是 _____.

方法

$$\begin{aligned} r(AA^T) = r(A) = m &\Leftrightarrow |AA^T| \neq 0 \Leftrightarrow AA^T \text{可逆} \\ &\Leftrightarrow AA^T \text{与 } E_m \text{等价} \Leftrightarrow AA^T \text{行/列向量无关} \\ &\Leftrightarrow (AA^T)X = 0 \text{仅有零解} \Leftrightarrow (AA^T)X = b \text{仅有唯一解} \\ &\Leftrightarrow AA^T \text{任意特征值不为零} \end{aligned}$$

由于 $(AA^T)^T = AA^T$, 其必能相似对角化, 因而正定, 与 E 合同。



二十四. 两点总结

矩阵的三大关系

• 等价

- 对 $m \times n$ 的 $A, B, A \xrightarrow{\text{变换}} B$ 成立;
- $PAQ = B$ 或 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A, B$ 等价;

• 相似

- 对 $A_n, B_n, P^{-1}AP = B$ 成立;
- $\lambda_A = \lambda_B$ 且 A, B 均可相似对角化 \Leftarrow 相似;

• 合同

- 对 $A_n, B_n, P^TAP = B$ 成立;
- 惯性指数相同 \Leftrightarrow 合同。

例题 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 t 为何值时,

- A 是正定矩阵;
- A, B 等价;
- A, C 相似;
- A, D 合同。

方法 I. 由于 A 的一、二阶顺序主子式大于零, 只需让其三阶主子式也即行列式大于零, 此时 $t > 0$;
 II. 可以知道 $r(B) = 2$, 因此 $r(A) = 2$ 时二者等价, 此时 $t = 0$.
 III. 显然 C 的特征值为 $1, 3, 5$, 且其显然可以相似对角化, 因此只需令 A 特征值也为 $1, 3, 5$ 时就有二者相似, 此时 $t = 5$;
 IV. 由于 $f = X^TDX$ 的正负惯性指数分别为 $2, 1$, 因此只需让 $f = X^TAX$ 正负惯性指数与其相同即可, 此时 $t < 0$.

变换

仅可用行变换的有

- 求逆矩阵 $(A : E) \rightarrow (E : A^{-1})$;
- 极大无关组;
- 求解线性方程组 (齐次/非齐次);
- 求特征向量;



仅可用列变换的有求逆矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$;

行列均可的有

- 求行列式 $|A|$;
- 求秩 $r(A)$;
- 初等矩阵的理解

在不知道初等矩阵放在左边还是右边时，按行或按列理解都可以。

不能应用行列变换的有

- 求特征值;
- 化简矩阵等式。