



# 线性代数提高笔记

奇峰

之前

# 目录

<b>第一章 行列式</b>	<b>3</b>
II. 求行列式的值 . . . . .	3
III. 代数余子式 . . . . .	3
IV. 抽象矩阵行列式 . . . . .	4
V. 求行列式方程的根 . . . . .	6
<b>第二章 矩阵</b>	<b>8</b>
VI. 求解与伴随矩阵相关的问题 . . . . .	8
VII. 可逆矩阵的应用 . . . . .	9
VIII. 初等变换与初等矩阵之间的关系 . . . . .	10
IX. 求矩阵的秩 . . . . .	11
X. 求解矩阵方程 . . . . .	12
XI. 计算 $n$ 阶矩阵高次幂 . . . . .	12
<b>第三章 向量</b>	<b>14</b>
XII. 相关性 . . . . .	14
XIII. 线性表示 . . . . .	15
XIV. 秩与极大线性无关组 . . . . .	15
<b>第四章 线性方程组</b>	<b>17</b>
XV. 解的判定 . . . . .	17
XVI. 求通解 . . . . .	18

# 概述

## 题型

线性代数的题目一般有三个选择题、一个填空题和一个 12 分大题。其中，选填部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{行列式计算（特殊；抽象）} \\ \text{矩阵 } (A^n, A^{-1}, A^*) \\ \text{初等矩阵（左/右）} \\ \text{秩（性质）} \\ \text{相关性（系数、秩）} \\ \text{等价、相似、合同} \\ \text{惯性系数 } \left\{ \begin{array}{l} \text{可逆变换} \\ p + q = r \end{array} \right. \end{array} \right.$$

大题部分主要涵盖

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{方程组 } \left\{ \begin{array}{l} \text{相关} \\ \text{解} \\ \text{矩阵方程} \end{array} \right. \\ \text{相似形（二次型）} \end{array} \right.$$

## 一个中心

可以说秩是线性代数的一个中心。其常用于考虑下列问题。

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = 0? \\ \exists A^{-1}? \\ A = (\alpha_i) \text{ 是否相关?} \\ AX = 0 \text{ 的基解?} \\ A \sim B \\ p + q = r \end{array} \right.$$

## 一种方法



初等行变换是非常常用的一种方法，其常用于求

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \\ \text{极大无关组} \\ \text{方程组} \\ \text{求}(\lambda_0 E - A)X = 0 \\ \text{求正交变换} \end{array} \right.$$

# 第一章

## 行列式

定义与性质

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{三大定义} \left\{ \begin{array}{l} \text{几何定义;} \\ \text{逆序定义;} \\ \text{展开定义;} \end{array} \right. \\ \text{计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{数值形;} \\ \text{含参形;} \\ \text{抽象形;} \end{array} \right. \\ \text{证明} |A| = 0 \left\{ \begin{array}{l} |A| = -|A|; \\ r(A) < n; \\ \text{不可逆 (常用于反证);} \\ AX = 0 \text{有非零解;} \\ \exists \lambda_0 = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## I. 求行列式的值

- 用性质消零（展开定义）
- 特殊行列式
  - 三角形
  - 范德蒙德行列式
  - 分块
- 特殊形状的行列式

## II. 代数余子式

代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

注意，



- 其为  $(n-1)$  阶子式;
- 其线性组合  $\sum_i a_i A_{ki}$  相当于将行列式第  $k$  行元素替换为  $(a_i)$ ;
- $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 伴随矩阵  $A^* = (A_{ij})^T \triangleq |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}$

对数值型矩阵  $A$ , 求  $A^*$  时, 可先求  $|A|$  并利用  $(A:E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E:A^{-1})$  求  $A^{-1}$ , 再利用公式  $A^* = |A|A^{-1}$  求伴随矩阵。

### III. 抽象矩阵行列式

性质

- 对已知  $A = (\alpha_i)$  的矩阵, 可以  $\begin{cases} \text{行列式列消} \\ \text{可逆时, } \begin{cases} \text{矩阵乘法} \\ \text{相似} \end{cases} \end{cases}$
- $|kA| = k^n|A|$ , 其中  $k$  可以是行列式;  
 $|A^T| = |A|, |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|;$
- 设  $A$  可逆, 则  $A^*$  可逆, 且有  
 $|A^*| = |A|^{n-1}; (A^*)^* = |A|^{n-2}A;$   
 $|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2};$
- $|A| = \prod \lambda_i; \text{tr}(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i;$
- $P^{-1}AP = B \Rightarrow |A| = |B|;$
- $aA + bE$  不可逆  $\Leftrightarrow |aA + bE| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_0 = \frac{-b}{a};$
- $AA^T = A^T A = E \Rightarrow |A| = \pm 1;$
- 对可逆矩阵  $A, |A + \alpha\beta^T| = |A|(1 + \beta^T A^{-1}\alpha);$   
对  $B = \alpha\beta^T, |\lambda E + \alpha\beta^T| = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^T \alpha);$
- 对  $A_n$ , 若  $A^2 = A, A \neq E$ , 则有  $|A| = 0$ .
  - 反证  
假设  $A$  可逆, 则  $A^2 A^{-1} = AA^{-1} = E \Rightarrow A = E$ , 与题设矛盾, 故  $A$  不可逆, 因此  $|A| = 0$ .
  - 秩  
 $A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O \Rightarrow r(A) + r(A - E) \leq n;$   
 $A \neq E \Rightarrow r(A - E) > 0 \Rightarrow r(A) < n \Rightarrow |A| = 0.$



- 方程组

$A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O; A \neq E \Rightarrow AX = O$  存在非零解, 因此  $r(A) < n$ , 即  $|A| = 0$ .

- 特征值

$A(A - E) = O = O(A - E), A \neq E$ , 因此  $A$  存在一特征值  $\lambda_0 = 0$ , 此时  $|A| = \prod \lambda = 0$ .

其中, 对于第八条,

i. 有分块乘法

$$\begin{pmatrix} E & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha\beta^\top & 0 \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \beta^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 + \beta^\top A^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (ii)$$

显然 (i), (ii) 的两边也相等. 此时对二者右边取得行列式, 得到

$$|A + \alpha\beta^\top| = |A|(1 + \beta^\top A^{-1}\alpha)$$

考虑一个例子  $D = \begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x + a_n \end{pmatrix}$

显然其可以被拆分为  $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

此时可令前者为  $A$ , 后者为  $\alpha\beta^\top$ .

ii.  $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E - (-\alpha\beta^\top)|$ , 此时视  $A = \lambda E$ ,

套用前述方法有  $|\lambda E + \alpha\beta^\top| = |\lambda E|(1 + \beta^\top(\lambda E)^{-1}\alpha) = \lambda^n(1 + \frac{\beta^\top\alpha}{\lambda}) = \lambda^{n-1}(\lambda + \beta^\top\alpha)$ .

注意, 若有  $AB = O, B = (\beta_i)$ , 则考虑

- $r(A) + r(B) \leq n$ ;
- $B$  的列向量为  $AX = O$  的一组解;
- $A\beta_i = O = O\beta_i$ , 此时  $B$  的列向量为  $\lambda_A = 0$  的特征向量。

### 计算抽象行列式

计算抽象的行列式时, 若其有法则, 如  $A^{-1}, A^\top, A^*$ , 则利用其法则, 若其无法则, 则利用  $E = AA^{-1}$  或  $E = AA^\top$ .

对求  $|A + B|$  的情况, 由于无法则, 考虑添加  $E$ , 此时 “一前一后, 前者前, 后者后。” 对于

$$|A + B| = |E_1 A + B E_2|, \quad E_1, E_2 \text{ 都是单位矩阵}$$

有



- $E_1$  在  $A$  前,  $E_2$  在  $B$  后, 此谓一前一后;
- $E_1$  拆时, 考虑同在前面的  $B$ , 即  $B^{-1}B$  或  $BB^{-1}$ , 此谓前者前;
- $E_2$  拆时, 考虑同在后面的  $A$ , 即  $A^{-1}A$  或  $AA^{-1}$ , 此谓后者后;

由行列式值求参数

需要加减 · 消元 · 出公因式。如

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第三列}-1\text{倍加到第一列}} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

此时可以从第一列提出系数  $\lambda-2$ 。

## IV. 求行列式方程的根

考察的方式可能为

- 讨论根的个数 (行列式和最高次方)
- 根与系数的关系

$$\text{对 } f(x) = D = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \text{ 及其根 } x_i \text{ 有 } \begin{cases} \sum x_i = -\frac{a_1}{a_0} \\ \prod(-x_i) = \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

矩阵加边

对行列式  $D_n$ , 显然

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

其中, 为  $*$  的部分可以为任意值, 因此可以按题面设置易于计算的值。另外, 加入的一行具体在哪一行都可以。

也可以通过加边构造行列式, 使得其虽然不等于原式, 但能通过性质辅助计算。如证明

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = \sum a_i \prod (a_i - a_j)$$





可以将其变为

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ x^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \leftarrow \text{增补行}$$

并按照第一列展开，此时  $x^3$  的系数  $A_3$  正好为  $-|D|$ ，而  $x^4$  的系数  $A_4$  为范德蒙德行列式，值为  $\prod (x_i - x_j)$ ，由前述结论， $\sum a_i = -\frac{A_3}{A_4}$ ，整理即得到结论。

# 第二章

## 矩阵

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义与运算} \left\{ \begin{array}{l} AB \neq BA; (kE, A^{-1}, A^*, A^T \Leftrightarrow A) \\ AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ 或 } B = 0; A^2 = 0 \text{ 同理} \\ AB = AC \Rightarrow B = C, \text{ 当且仅当 } A \text{ 可逆时成立} \end{array} \right. \\ \text{特殊矩阵} - E, \Lambda, A^T = A, AA^T = E \\ \text{伴随矩阵 } A^* \\ \text{可逆矩阵} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \\ \text{求法} \\ \text{证明 } A \text{ 可逆} \end{array} \right. \\ \text{初等矩阵 (逆, 变换)} \\ \text{秩 (性质)} \\ \text{应用} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵方程} \\ \text{求 } A^n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## V. 求解与伴随矩阵相关的问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求 } A^* \left\{ \begin{array}{l} \text{定义法} - A^* = (A_{ij})^T \\ \text{公式法} - A^* = |A|A^{-1} \end{array} \right. \\ \text{性质} \left\{ \begin{array}{l} AA^* = A^*A = |A|E (\text{可推广为 } \Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = |\Delta|E) \\ (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (A^*)^* = |A|^{n-2}A \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2} \\ A^{-1, T, *} \text{ 之间可以互换, 如 } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 矩阵行列和的结论

对矩阵  $A$ , 若其每行元素和均为  $k$ , 则有  $A(1, 1, 1)^T = (k, k, k)^T = k(1, 1, 1)^T (\lambda\alpha)$ ;

若为每列元素和均为  $k$ , 有  $(1, 1, 1)A = (k, k, k)$ , 转置后与前者相同。



右乘/左乘  $A^*$ , 可以求伴随矩阵的行/列和。

关于伴随矩阵和转置矩阵的结论

- $\forall(i, j), a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = 1$ ;
- $\forall(i, j), a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = -1$ ;

也可以使用矩阵表达式替代  $A$ .

## VI. 可逆矩阵的应用

$$\text{可逆矩阵的判定} \left\{ \begin{array}{l} AB = BA = kE (\text{此时 } A^{-1} = \frac{1}{k}B) \\ A \text{可逆} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ r(A) = n \\ A \text{的列向量线性无关} \\ AX = 0 \text{仅有零解} \\ AX = b \text{有唯一解} \\ \forall \lambda, \lambda \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{可逆矩阵的计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象} \left\{ \begin{array}{l} \text{凑 } AB = E \\ \text{利用性质} \left\{ \begin{array}{l} (A^{-1})^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{具体} \left\{ \begin{array}{l} \text{低阶 (2-3)} - A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \\ \text{初等变换} - (A : E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E : A^{-1}) \\ \text{分块矩阵} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

分块矩阵求逆

- 主对角分块

- 仅在主对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

方法为“左乘同行，右乘同列”。先写逆矩阵的对角部分，同行同列根据逆矩阵寻找。

$$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$



- 副对角分块

副对角分块取逆时，要交换对角的元素。

- 仅在副对角上非零的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

- 仅“缺一块”的分块

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}DC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$$

### 可交换矩阵的结论

- 线性组合 -  $AB = aA + bB \Rightarrow AB = BA$ ;
- 一元二次形式 -  $A^2 + aAB = E \Rightarrow AB = BA$ ;

证明的思路是，因为可逆矩阵可交换，因此构造互逆矩阵。

其中，对前者，

$$\begin{aligned} AB = aA + bB &\Rightarrow A(B - aE) - bB = O \\ &\Rightarrow A(B - aE) - b(B - \mathbf{aE} + \mathbf{aE}) = O \\ &\Rightarrow (A - bE)(B - aE) = abE \\ &\Rightarrow (B - aE)(A - bE) = abE \end{aligned}$$

展开，可以证明结论。

## VII. 初等变换与初等矩阵之间的关系

初等矩阵左乘做行变换，右乘做列变换。其有三种，为

	符号	行列式	逆
交换	$E_{ij}$	$-1$	$E_{ij}(k)$
倍乘	$E_i(k)$	$k$	$E_i(1/k)$
倍加	$E_{ij}(k)$	$1$	$E_{ij}(-k)$

### 利用性质计算矩阵

有例子

$$\begin{aligned} E_{12}A = B &\Rightarrow \begin{cases} -|A| = |B| \\ A^{-1}E_{12} = B^{-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow -|A|A^{-1}E_{12} = |B|B^{-1} \\ &\Rightarrow -A^*E_{12} = B^* \end{aligned}$$



## VIII. 求矩阵的秩

### 秩的求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \begin{cases} r \text{ 阶至少一非零} \\ r+1 \text{ 阶全为零} \end{cases} \\ \text{初等变换法 (行列均可)} - A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯矩阵 } B, \text{ 非零行数即为秩} \\ \text{非零特征根的个数是秩} \end{array} \right.$$

### 性质

- 对  $A_{m \times n}$ , 有  $r(A) = r(A^T A) = r(AA^T) = r(A^T) = r(kA)$ .

◦ 证明  $r(A^T A) = r(A)$

利用同解方程组。

$$\begin{aligned} A^T A X = O &\Rightarrow X^T A^T A X = O \\ &\Rightarrow (AX)^T AX = O \\ &\Rightarrow |AX| = 0 \\ &\Rightarrow AX = O \end{aligned}$$

$$AX = O \Rightarrow A^T A X = O$$

因此  $A$  与  $A^T A$  同解, 故其秩相等。

- $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ .
- $r(AB) \leq r(A); r(AB) \leq r(B)$ . 对前者,  $B$  可逆时等号成立。
- $r(A : B) \leq r(A) + r(B)$ ;

$$r\left(\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right) \leq r(A) + r(B)$$

- 对矩阵  $A_{m \times n}, B_{n \times s}, AB = O$ , 有  $r(A) + r(B) \leq n$ .

此即所谓“前看列, 后看行”。判断有关于行/列和秩的问题时, 都应考虑这一句。

◦ 证明

$$AB = O \Rightarrow B \text{ 的列向量 } \beta_i \text{ 是 } AX = O \text{ 的一组解, 此时 } r(\beta_i) = r(B) \leq n - r(A) \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n.$$

- 对  $A_n$ , 其伴随矩阵的秩  $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 (n \geq 2) \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$

$$r\left(\begin{array}{cc} A & O \\ O & B \end{array}\right) = r(A) + r(B)$$



- 若  $P, Q$  可逆, 则有  $r(PA) = r(AQ) = \overbrace{r(PAQ)}^{\text{矩阵等价}} = r(A)$   
若  $B = PAQ$  或  $r(B) = r(A)$ , 称  $A, B$  等价。
- 对  $A_{m \times n}$ , 若其行满秩, 则  $r(A) = m, A \sim (E_m, O)$ .
- 对  $A_{m \times n}, r(A) = n \Rightarrow r(AB);$   
 $r(A) = m, r(BA) = r(B)$ .
  - 证明前者成立  
 $r(B) \leq r(AB) \leq r(A^{-1}AB) = r(B)$ , 故  $r(AB) = r(B)$ .

关于矩阵可因式分解的一元二次式的结论

- $A^2 = A \Rightarrow r(A) + r(A - E) = n$ .
- $A^2 = E \Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n$ .
  - 证明后者成立

$$\begin{aligned} (A - E)(A + E) = 0 &\Rightarrow n \geq r(A - E) + r(A + E) = r(A - E) + r(-(\mathbf{A} - \mathbf{E})) \geq r(2E) = n \\ &\Rightarrow r(A - E) + r(A + E) = n \end{aligned}$$

事实上, 对于  $A$  的一元二次式, 若其可因式分解, 则分解后的因式都满秩。

## IX. 求解矩阵方程

可逆矩阵

- $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$
- $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1}$
- $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

不可逆矩阵

此时需要将其转化为方程组。

- $AX = C \Rightarrow A(X_i) = (C_i)$ , 其中  $X_i, C_i$  是对应矩阵的列向量, 解得到的  $n$  个非齐次方程组即可。
- $XA = C \Rightarrow A^T X^T = C^T$ , 然后同上。

## X. 计算 $n$ 阶矩阵高次幂

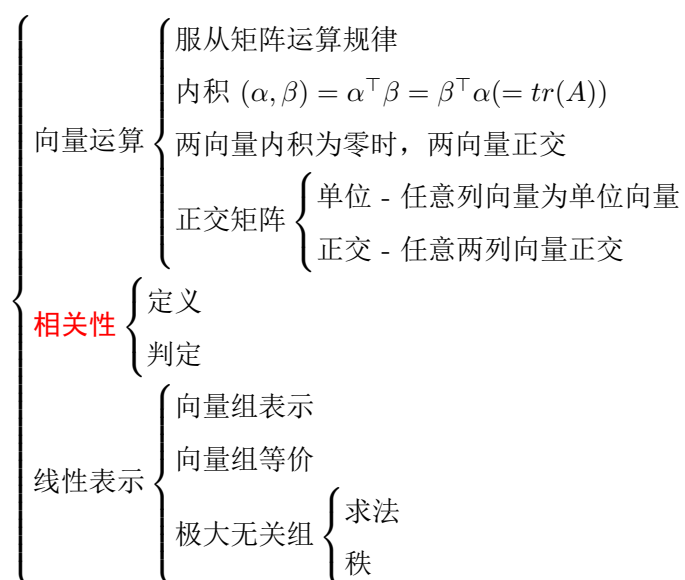
- 归纳运算。



- $r(A) = 1$  时, 有  $A^n = \text{tr}(A)^{n-1}A$ .
- $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} & ac & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, A^{n \geq 3} = O$ .
- 相似性  
若  $P^{-1}AP = B$ , 则有  $P^{-1}A^nP = B^n$ , 其中  $P$  不变,

# 第三章

## 向量



## XI. 相关性

### 定义法

定义法常用于证明相关/无关性。

令  $\sum k_i \alpha_i = \vec{0}$ , 通过

- 乘（使等式变短）
- 重组

得出  $\forall i, k_i = 0$ , 则  $\alpha_i$  线性无关。

### 秩

$$\begin{cases} r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = S \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性无关} \\ r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) < S \Rightarrow (\alpha_i) \text{线性相关} \end{cases}$$

### 性质





- $\alpha_i$  线性无关  $\Leftrightarrow (\alpha_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$  仅有零解。

内含零向量

- 内含等比例向量 中满足任一  $\Leftrightarrow$  线性相关
- 内含可表示向量
- 向量个数大于维数必相关 (利用秩证明)。
- 全部无关, 一部无关; 一部相关, 全部相关。
- 原本相关, 缩短相关, 原本无关, 加长无关。(改变的是维数)
- 以少表多, 多必相关。

对于一组能组成方阵的  $(\alpha_i)$ , 若其方阵  $P$  满足  $AP = PB$ , 则这组向量无关。此处运用了相似的性质。

## XII. 线性表示

$$\begin{cases} \text{一个向量, } \beta = \sum_{i=1}^s k_i \alpha_i \Leftrightarrow (\alpha_i)X = \beta \\ \text{一组向量, } \beta_i = \sum_{j=1}^s x_{ij} \alpha_j; i = 1, 2, \dots, t \\ \text{两组互相表示, 即} \\ \text{向量组等价} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, \beta_i = \sum_j x_{ij} \alpha_j \\ \forall j, \alpha_j = \sum_i x_{ij} \beta_i \end{cases} \end{cases}$$

判定

- $\beta$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出  $\Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta)$ , 注意此时不一定满秩;
- $\forall i, \beta_i$  均可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  表出  $\forall i, \Leftrightarrow r(\alpha_i) = r(\alpha_i, \beta_i)$ ;
- 向量组 (I), (II) 等价  $\Rightarrow r(I) = r(II) = r(I, II)$

## XIII. 秩与极大线性无关组

定义

对  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  中有部分向量  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}$ , 其

- 线性无关;
- 任意剩余向量都可由这组向量表示,



则称  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}$  为极大线性无关组。

### 性质

- 无关组不唯一，但是其个数唯一；
- 只有  $\vec{0}$  的向量组无极大无关组；
- 向量组的秩为极大无关组向量个数；
- 向量组与其极大无关组等价；极大无关组之间也等价。

### 求解 - 列写行消

$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \xrightarrow{\text{行变换}} B_{\text{阶梯}}$ ，从每个台阶中选一列组成极大无关组。

# 第四章

## 线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{齐次方程组 } AX = 0 \\ \text{非齐次方程组 } AX = b \\ \text{同解与公共解} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{表示形式} \left\{ \begin{array}{l} \text{矩阵} \\ \text{向量} \end{array} \right. \\ \text{有解的判定} \\ \text{解的性质} \left\{ \begin{array}{l} \text{通解} \\ \text{基解} \\ \text{组合} \end{array} \right. \\ \text{求解方法} \\ \text{有解判定} \\ \text{解的性质} \\ \text{解的结构 - 齐通 + 非齐特} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{通解 - 解集相同} \\ \text{公共解 - 解集有交集} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### XIV. 解的判定

$$\text{对于齐次方程 } AX = 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{只有零解} \Rightarrow r(A) = n \\ \text{有非零解} \Rightarrow r(A) < n \end{array} \right.$$

其基础解系

- 为  $AX = 0$  的解;
- 线性无关;
- 数量为  $n - r(A)$  个。

$$\text{对于非齐次方程 } AX = b, \left\{ \begin{array}{l} \text{无解} \Rightarrow r(A) \neq r(\bar{A}) \\ \text{有解} \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) \left\{ \begin{array}{l} = n \Rightarrow \text{解唯一} \\ < n \Rightarrow \text{解不唯一 (无穷)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$



## XV. 求通解

对于具体的数字矩阵，通过行变换或高斯消元做。

对抽象矩阵，

- 通解为齐通 + 非齐特；
- 齐解任意组合仍然为齐解；
- 若  $\xi_1, \dots, \xi_t$  均为  $AX = b$  的解，则  $\sum k_i \xi_i$  为  $\begin{cases} \text{齐解, } \sum k = 0 \\ \text{非齐解, } \sum k = 1 \end{cases}$