赛博题本

奇峰

之前

目录

第一部分
真题

问题 1　2009T5　$\diamondsuit$

若 f'' 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$, 则函数在区间 $(1,2)$ 内 ______.

(A) 有极值点，无零点.

(B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点.

(D) 无极值点，无零点.

问题 2　2009T7　$\diamondsuit$

设 A,B 均为二阶矩阵，A^*,B^* 是其伴随矩阵，若有 $|A|=2,|B|=3$, 则 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵是 ______.

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

问题 3　2009T9　$\diamondsuit$

曲线 $\begin{cases} x=\displaystyle\int_0^{1-t} e^{u^2}\,\mathrm{d}u \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ______.

问题 4　2009T16　$\diamondsuit$

计算不定积分 $\displaystyle\int \ln\Big(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\Big)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

问题 5 2009T7 ◇

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

问题 6 2009T19 ◇

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

问题 7 2009T20 ◇

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线；当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点法线过原点；当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$, 求函数 $y(x)$ 表达式。

问题 8 2009T22 ◇

设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}, \xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$,

- □ 求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量；
- □ 对任意上述的 ξ_2,ξ_3, 证明 $\xi_i, i=1,2,3$ 线性无关。

问题 9 2009T23 ◇

设有二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

- □ 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；
- □ 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值。

第二部分

答案

答案 1 ■

对曲率圆两边关于 x 求导数，得 $2x+2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{y}\Rightarrow y'(1)=-1;$

再求一次，有 $2+2(y')^2+2yy''=0\Rightarrow y''=-2$, 而其不变号，故 $y'(x)<0$, 因此 $(1,2)$ 中无极值点；

还能知道 $y'(x)<-1(x\in(1,2))$, 因此 $y(2)$ 必 <0, 此时由零点定理，$(1,2)$ 内至少有一零点。因此是 B.

答案 2 ■

$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = |A||B|\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & |A||B|B^{-1} \\ |A||B|A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{bmatrix}$, 也即是 B.

答案 3 ■

该曲线在 $(0,0)$ 点处的切线方程为 $y-0=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x-0)$.

显然当 $(x,y)=(0,0)$ 时有 $t=1$.

此时有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-e^{(1-t)^2},\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t\ln(2-t^2)+\dfrac{2t^3}{t^2-2}$, 故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\dfrac{-2}{-1}=2.$

故切线方程 $y=2x$.

答案 4 ■

令 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$, 则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1} \\
&= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t \quad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{其中} \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int \frac{1+t+1-t}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\ln(t-1) - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{2(t+1)} + C
\end{aligned}$$

$$\xRightarrow{x=1/(t^2-1)} \text{原式} = x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x+x^2} + C$$

* 当利用因式分解处理含有有理分式的被积函数时，注意被积函数的因子是否能凑出是常数的线性组合；若可以，则在分子中凑因子化简。

答案 5 ■

令 $x+y=u, x-y=v, xy=w$, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} + y\frac{\partial z}{\partial w} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} + x\frac{\partial z}{\partial w} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} + (x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial w} + (x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial w} \\
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}z + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} + y\frac{\partial z}{\partial w}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} + x\frac{\partial z}{\partial w}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

答案 6 ■

利用极坐标正常求解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} \rho^2\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)^3\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta)^3\mathrm{d}(\cos\theta + \sin\theta)
\end{aligned}$$

利用平移变换求解

圆心不在原点时，考虑做平移变换将其移动至原点。

令 $u=x-1, v=y-1$, 则题设变为

$\iint\limits_D (u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中 $D=\{(u,v)|u^2+v^2\le 2, v\ge u\}$, 易得原式 $=-\frac{8}{3}$.

答案 7 ■

对 $0 \le x < \pi$, 注意到题设方程的特征方程 $r^2+1=0$ 的根为一对共轭复数 $0\pm i$, 结合题设方程知其通解形如 $C_1\cos x+C_2\sin x+x(ax+b)$, 其中 a,b 为待定系数。代回原方程，得其通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x$.
对 $-\pi<x<0$, 题设方程满足 $y=\dfrac{x}{-y'}$, 解得 $x^2+y^2=C$.
由于是光滑曲线，$y_-(0)=y_+(0), y'_-(0)=y'_+(0)$,
此外 $y(x)$ 过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$, 因此解得 $C=\pi^2, C_1=\pi, C_2=1$.
故待求方程为 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

答案 8 ■

(I) 利用 A, A^2 和 ξ_1 的增广矩阵，求得

$$\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}\\ k_1\end{bmatrix}, \xi_3=\begin{bmatrix}-k_2-\frac{1}{2}\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意实数。

(II) 对任意 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 都有

$$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1 & \frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2} & -k_2-\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2} & k_2\\ -2 & k_1 & k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2} & k_2\\ -2 & k_1 & k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

故其一定线性无关。

答案 9 ■

(I) 该二次型有矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & 1\\ 1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$.

解得 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2))=0$,
因此有特征值 $\lambda_1=a, \lambda_2=a+1, \lambda_3=a-2$.

(II) 由 f 的规范形知其正惯性指数为 2, 负惯性指数为 0, 因此三特征值有两个为正，一个为零，再由其大小知道 $a-2=0$, 即 $a=2$.