线性代数笔记

奇峰

之前

目录

第一章
行列式

不妨用“一排”指代“一行或一列”。

I. 定义

i.几何定义

定义 1.1.1 几何定义

一 n 维方阵为 n 个 n 维向量在 n 维空间内的 n 维空间体积。

注意，$|\vec{a}_i| = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_i$ 线性相关 $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 。

ii.逆序定义

定义 1.1.2 逆序和逆序数

设 i, j 为一对不相等的整数，若 $1 > j$，则称 (i, j) 为一逆序对。$1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中逆序对的数目为逆序数，记为 $\tau(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 。

逆序数为奇（偶）数的排列为奇（偶）排列。

定义 1.1.3 逆序定义

行列式 D 为取自 D 中不同行不同列元素积的代数和，具体而言，为

$$D = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

iii.展开定义

定义 1.1.4 余子式和代数余子式

行列式 D 去掉第 i 行第 j 列而成的 $n-1$ 阶方阵为 D 的余子式 M_{ij} 。

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 是 D 的代数余子式。

定义 1.1.5 展开定义

对 n 阶行列式 D_n ，有

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ i=1,2,\dots,n$$

II. 性质

行列式有性质如下。

- $\det(A)=\det(A^T)$ ；
- 两排对换，行列式变号；
- 一排有公因子 k ，可提到行列式外；
- 若有一排元素皆为两数之和，可据此拆成两个行列式；
- 将一排的 k 倍加到另一排，行列式值不变。

III. 重要行列式

上下三角行列式

上下三角行列式值为主对角线元素积。

副三角行列式

副三角行列式值为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\dots a_{n1}$ ，即副对角线代数积。

拉普拉斯展开

- 若对于分块了的行列式 $M=\begin{vmatrix}A & C\\ D & B\end{vmatrix}$,

  在 C,D 中至少有一个是零矩阵，则有 $|M|=|A|\cdot|B|$ ；
- 若对于分块了的行列式 $M=\begin{vmatrix}C & A\\ B & D\end{vmatrix}$,

  在 C,D 中至少有一个是零矩阵，则有 $|M|=(-1)^{M\times N}|A|\cdot|B|$ 。

范德蒙德行列式

形如

$$V_n(a_i)\triangleq\begin{vmatrix}a_1^0 & \cdots & a_1^{n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n^0 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

的行列式为范德蒙德行列式。

IV. 行列式的降阶性质

对 $i,j=1,2,\ldots,n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

一排代数余子式与一组同长度的元素的点积为将原行列式中那一排替换为那一组元素的结果。

V. 五类特殊的行列式

主对角平行线型

对形如 $\begin{vmatrix} \blacksquare & \square & 0 & 0 \\ \square & \blacksquare & \square & 0 \\ 0 & \square & \blacksquare & \square \\ 0 & 0 & \square & \blacksquare \end{vmatrix}_n$ 的行列式：

- 向下消零成三角；
- 按首排展开递推。

主对角爪型

对形如 $\begin{vmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix}_n$ 的行列式，

通过斜爪消平爪，即将第 $i>1$ 排的 k_i 倍加到第一排以让第一排只有 $a_{11}\neq 0$ 。有时只能按行列中的一个消除。

黑白行列式

对形如 $A=\begin{vmatrix} \blacksquare & \square & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square & \square \\ \square & \square & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \square & \blacksquare \end{vmatrix}_n$ 的行列式，有 $\mathbf{A}=[\blacksquare+(\mathbf{n}-\mathbf{1})\square][\blacksquare-\square]^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}$.

θ 型

对形如 $\begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 & \theta \\ \square & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \square & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square & \blacksquare \end{vmatrix}_n$ 的行列式，

从 θ 所在列 (按行倒也可以) 展开。

反 ∠ 型

对形如 $D_n = \begin{vmatrix} \blacksquare & \square & & & \\ & \blacksquare & \square & & \\ & & \blacksquare & \square & \\ & & & \blacksquare & \square \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & \theta \end{vmatrix}_n$ 的行列式，其中 $\theta \neq 0$ ，

D_{n-1} 为 D_n 去掉首行首列；算法为按首列 (行也行) 展开递推。

VI. 克拉默法则

对 n 元一次非齐次方程组 $DX = Y$ ，若 D_i 为将 D 的第 i 列替换为 Y 的结果，则 $x_i = \dfrac{D_i}{D}$.

第二章
矩阵

I. 矩阵定义及特殊矩阵

i.矩阵

由 $m \times n$ 个元素组成的 m 行 n 列数表 $(a_{ij})_{m\times n}$ 称为一个 $m \times n$ 阶矩阵。

若矩阵 A, B 的行列数相等，则称其为同型矩阵。若对任意 $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $a_{ij} = b_{ij}$ ，则称矩阵 A, B 相等，记为 $A = B$.

ii.特殊矩阵

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，此时一部分特殊矩阵如下。

- **零阵** O　对任意 i, j 有 $a_{ij} = 0$;
- **单位矩阵** E_n　主对角元素 $a_{ii} = 1$ ，其余元素等于零;
- **对称矩阵**　$\forall i, j$ 有 $a_{ij} = a_{ji}$;
- **反对称矩阵**　$\forall i, j$ 有 $a_{ij} = -a_{ji}$;
- **转置矩阵** $A^\top$　$A^\top = (a_{ji})_{n\times m}$;
- **正交矩阵**　对方阵 $A, AA^\top = A^\top A = E$;

其中，转置矩阵有如下性质。

- $(A^\top)^\top = A$;
- $|A^\top| = |A|$;
- $(kA)^\top = kA^\top$;
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$;
- $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A^\top & 0 \\ 0 & B^\top \end{pmatrix}$;

iii.伴随矩阵

对方阵 A , 有

$$A^* \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \triangleq (A_{ij})^\top$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

对于二阶矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

伴随矩阵有一重要性质，即

$$AA^* = A^*A = \det(A)E$$

其还有推论

$$\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta = \det(\Delta)E$$

其中 Δ 是含有矩阵的运算式整体。

由上述结论，伴随矩阵还有如下的运算结论。

- $|A^*| = |A|^{n-1}$;
- $(kA)^* = k^{n-1}A^*$;
- $(A^*)^* = \mathbf{\det(A)^{n-2}A}$;
- $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix}$

II. 矩阵运算

对矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}, D = (d_{ij})_{n\times s}$, 有

- $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$;
- $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}$;
- $AD = (c_{ij})_{m\times s}$, 其中 $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}d_{tj}$;

对于两向量 $\vec{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^\top, \vec{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^\top$, 有如下表格。

$\alpha^\top\beta$	$\beta^\top\alpha$	相等的数
$\alpha\beta^\top$	$\beta\alpha^\top$	互为转置矩阵，秩 $=1$
上为下的迹		

其中，矩阵 A 的迹是 $tr(A) \triangleq \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

注意，对矩阵 A, B, 有

- $A \neq B \nRightarrow |A| \neq |B|$;
- $A \neq O, B \neq O \nRightarrow AB \neq O$;
- 一般地，$AB \neq BA$ ，此时 $(AB)^k \neq A^k B^k$;
- $AB = AC \Rightarrow B = C$ 仅当 A^{-1} 存在。

III. 逆矩阵

对方阵 A, B , 若有 $AB = BA = E$ ，则 A, B 都是可逆矩阵，且有 $A^{-1} = B, B^{-1} = A$.

定理 2.3.1 可逆的充要条件

A 是可逆矩阵 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

$AB = BA = kE$ 时 A, B 也有可逆性。因此，

$$AA^* = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

求解逆矩阵时，

- 若 A 抽象未知，则由定义求解，即凑出 $AB = kE$, 其中 A 也可以是一个矩阵的运算式;
- 若已知 A ，则有
  - $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$;
  - $(A : E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E : A^{-1})$.

可逆矩阵还有以下性质。

- $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$;

- $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

显然，对正交矩阵 A 有 $A^{-1} = A^{\top}$.

IV. 初等变换与初等矩阵

初等矩阵是将 E 经一次初等变换所得到的矩阵。

初等变换有三种，即

- 倍乘;
- 倍加;
- 交换，

因此初等矩阵也有三种，即

- E_{ij} - 将 E 的 i, j 两排交换;
- $E_i(k)$ - 将 E 的第 i 排乘 k ;
- $E_{ij}(k)$ - 将 E 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行，同时也是将 E 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列。

初等矩阵有如下的性质。

- 对于一 $m \times n$ 矩阵 A ，对 A 进行一次初等 $\begin{array}{c}\text{行}\\\text{列}\end{array}$ 变换相当于 $\begin{array}{c}\text{左}\\\text{右}\end{array}$ 乘对应的初等矩阵;
- 有重要结论

	行列式	逆
E_{ij}	-1	$E_{ij}(k)$
$E_i(k)$	k	$E_i(1/k)$
$E_{ij}(k)$	1	$E_{ij}(-k)$

V. 矩阵的秩

定义 2.5.1 r 阶子式

对一矩阵 $A_{m\times n}$ ，从其中任取 r 行和 r 列，按照原顺序构成的行列式是其 r 阶子式。

定义 2.5.2 矩阵的秩

对一矩阵 A ，若其有至少一个 r 阶子式不为零，而全部 $r+1$ 阶子式均为零，则称 r 为矩阵 A 的秩，记为 $r(A) = r$.

注意，

- $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$;
- $r(A_n)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
- $r(A)<k \Leftrightarrow$ 所有 r 阶子式全为零.

矩阵的秩有如下性质。

- $r(A_{m\times n}) \leq min\{m,n\}$;
- $r(kA)=r(A)$;
- $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$;
- $r(A:B) \geq r(A)$;
- 若 $AB=0$, $r(A)+r(B) \leq n$;
- 对 n 阶方阵 A ，有

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

求解秩时，将矩阵 A 通过初等行变换变为阶梯矩阵 B ，其非零行数即为秩，以矩阵表示方程组，则秩也等于约束变量的方程数。

设 P,Q 为可逆矩阵，若有 $PAQ=B$, 则称 A 与 B 相似。

有性质 $r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$. 因此，A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

VI. 求解 A^n 的三种情况

其一，当 $r(A)=1$ 时，必定能将 A 表示为一列向量 α 乘一行向量 $\beta^\top$ ，且

$$\begin{aligned} A^n &= \alpha\beta^\top \cdot \alpha\beta^\top \cdots \alpha\beta^\top \\ &= \alpha(\beta^\top \cdot \alpha)(\beta^\top \cdots \alpha)\beta^\top \\ &= \alpha \cdot tr(A)^{n-1} \cdot \beta^\top \\ &= tr(A)^{n-1}A \end{aligned}$$

其二，若

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},A^i=O(i>2)$$

其三，对两相似矩阵 $A\sim B$ ，有 $B^n=P^{-1}A^nP$ ，即相似矩阵的 n 次方仍相似。

对第二种类型，可以引申得到对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&\cdots&1\\&0&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

每对其乘一个 A , 其结果中的 1 斜列就向右上平移一列，直到成为零阵。

第三章
线性方程组

I. 齐次线性方程组

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的方程组是齐次线性方程组，其还有

- 向量表示形式 $\vec{\alpha}_1x_1+\cdots\vec{\alpha}_nx_n=0$；
- 矩阵表示形式 $AX=0$, 其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}, X=(x_1,\cdots,x_n)^\top$.

解的性质

齐次线性方程组的解有如下性质。

- 方程组 $AX=0$ 必定有解，其为 $\begin{cases} \text{只有唯一零解,} & r(A)=n(|A|\neq 0) \\ \text{有无穷个解,} & r(A)<n(|A|=0) \end{cases}$
- 若 ξ_1,ξ_2 均为 $AX=0$ 的解，则其线性组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 也是其解.

高斯消元法

求解齐次线性方程组适用高斯消元法。高斯消元法将系数矩阵 A 经行变换化为最简阶梯矩阵 B, 其中 B 满足

- 每行首项非零元素为 1;
- 其所在列其余元素均为 0.

此时只需求解 $BX=0$, 并令每行首项非零元对应变量为固定变量，剩余变量为自由变量，并用自由变量表达固定变量。

基础解系和解的结构

设 $\xi_i, i=1,2,\ldots,n-r$ 是方程组 $AX=0$ 的解，其中 $n-r$ 为自由变量的个数，若有

- ξ_i 线性无关；
- $AX=0$ 的任意解均可由 ξ_i 线性表出，

则这组向量 ξ_i 是 $AX=0$ 的基础解系。同时，称 $\sum_{i=1}^{n-r}k_i\xi_i$ 称为方程组的通解，其中 k_i 为任意常数。

II. 非齐次线性方程组

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

的方程组是非齐次线性方程组，其中 $b_i, i=1,2,\ldots$ 不全为零。其还有

- 向量表示形式 $\vec{\alpha}_1x_1+\cdots\vec{\alpha}_nx_n=\vec{\beta}$；
- 矩阵表示形式 $AX=\vec{b}$, 其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}, X=(x_1,\cdots,x_n)^\top, \vec{b}=(b_1,\cdots,b_n)^\top$.

解的性质

将矩阵 $\bar{A}\triangleq(A:b)$ 称为增广矩阵，非齐次线性方程组的解有如下性质。

- 方程组 $AX=b$ 的解有三种情况，即

$$\begin{cases} \text{有解}, r(A)=r(\bar{A}) \begin{cases} \text{唯一解}, r(A)=n \\ \text{无穷解}, r(A)<n \end{cases} \\ \text{无解}, r(A)\neq r(\bar{A}) \end{cases}$$

- 设 ξ 为 $AX=0$ 的解，η 为 $AX=b$ 的解，则 $k\xi+\eta$ 也为 $AX=b$ 的解;
- 若 ξ_1,ξ_2 均为 $AX=b$ 的解，则有

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2 \begin{cases} \text{为}\overset{\text{齐次方程组}}{AX=0}\text{的解}, & k_1+k_2=0 \\ \text{为 }\overset{\text{非齐次方程组}}{AX=b}\text{ 的解}, & k_1+k_2=1 \end{cases}$$

第四章
向量

I. 定义与性质

i.定义

形如 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top$ 的称为 n 维列向量，形如 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的称为 n 维行向量。

ii.模

$|\alpha|\triangleq\sqrt{a_1^2+\cdots a_n^2}$ 是向量 α 的模。

注意，

- 对 n 维向量 α , 有 $\forall a_1\equiv 0\Leftrightarrow\alpha=\vec{0}\Leftrightarrow|\alpha|=0$;
- 若一向量 α 的模为 1, 则称其为单位向量。非单位向量可以通过单位化变为单位向量，具体而言，只需将原向量的每一个分量除以其模。

iii.内积

对 n 维向量 α,β ，称 $(\alpha,\beta)\triangleq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为 α,β 的内积。

注意，若 $A=\alpha\beta^\top\Leftrightarrow r(A)=1$, 必有 $(\alpha,\beta)=\alpha^\top\beta=\beta^\top\alpha=tr(A)$.

iv.正交性

若有 $(\alpha,\beta)=0$, 则称 α 和 β 两向量正交。

正交矩阵

对矩阵 A , 若 $AA^\top=A^\top A=E$ 则其为正交矩阵。

对正交矩阵，

- 每一内部向量都为单位向量；
- 任意两内部向量正交。

v.性质

对向量 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^\top,\beta=(b_1,\cdots,b_n)^\top$,

- $\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1,\cdots,a_n\pm b_n)^\top$;
- $k\alpha=(ka_1,\cdots,ka_n)^\top$;
- 向量乘法没有交换律，没有消去律;
- $\forall\alpha,(\vec{0},\alpha)=0,$;
- $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^\top\beta=\beta^\top\alpha=tr(A)$;
- $(\sum k_i\alpha_i,\beta)=\sum k_i(\alpha_i,\beta)$.

II. 向量组的线性相关与线性无关

i.定义

对一组列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 对于 $\sum k_i\alpha_i=0$, 若存在不全为零的一组 k_i 使其成立，则称 α_i 线性相关，否则称其线性无关。

ii.性质

- 以下五点等价;
  - 一组列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关;
  - $\sum k_i\alpha_i=\vec{0}$, 当且仅当 $\forall k_i\equiv 0$;
  - $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)(k_1,\cdots,k_s)^\top=0$, 当且仅当 $\forall k_i\equiv 0$;
  - 方程组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)(x_1,\cdots,x_s)^\top=0$ 只有零解;
  - $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$ (向量个数) ;
- 以下三种向量组组线性相关;
  - 向量组中含有零向量;
  - 向量组中含有成比例的向量;
  - 向量组中含有向量能被同组向量线性表出;
- 向量组中向量个数大于维数时，向量组也可线性表出。

  事实上，若设 $A_{m\times n}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 若 $n>m$ 则有 $r(A)\leq min(m,n)=m<n\Rightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<n$, 故其线性相关;

- 整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关；
  部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关；
  整体与部分是指个数。
- 原本无关 $\Rightarrow$ 延长必无关；
  原本相关 $\Rightarrow$ 缩短必相关；
  延长与缩短的是维数。

iii.向量组线性无关性的证明

向量组已知

- 若向量组可构成方阵，只需证 $|\alpha_i| \neq 0$;
- 若不能构成方阵，则需证明 $r(\alpha_i) = s$.

向量组抽象未知

考虑使用定义，即令

$$\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i = 0$$

并证明 $\forall k_i, k_i = 0$.

具体而言，可以

- 重组法，即套定义，代入已知的无关向量组，并重组系数证明等式成立时系数必全为零；
- 等式乘，即将向量组组成的矩阵转化为多个矩阵的积，并证明其满秩。

III. 线性表示

i.定义

设有向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$, 若存在一组 k_i 使得

$$\beta = \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i$$

则称 β 可由 α_i 线性表出。

ii.性质

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow \forall \alpha_i$ 不可由剩余向量线性表出；

- 以下五点等价；
  - β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出；
  - $\beta=\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i$ 中任意 k_i 均存在；
  - $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)(k_1,\cdots,k_s)^\top=\beta$ 中任意 k_i 均存在；
  - $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)(x_1,\cdots,x_s)^\top=\beta$ 必有解；
  - $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)$.
- 以少表多，多必相关。

  具体而言，若 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且 $s<t$ ，则 β_i 必线性相关。

IV. 向量组等价

矩阵等价

设有矩阵 $A_{m\times n},B_{m\times n}$ ，若 A 可经有限次变换得到 B ，则称矩阵 A,B 等价。

注意，

- 存在可逆 P,Q 使得 $PAQ=B\Leftrightarrow A,B$ 等价；
- A,B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$ ；

向量组等价

设有向量组 $(\mathrm{I}):\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $(\mathrm{II}):\beta_1,\cdots,\beta_t$. 若

- (I) 可由 (II) 表示，

  即对任意 α_i ，其可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表出，

  即对矩阵 $(\beta_1,\cdots,\beta_t|\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$, 每一列均有解；
- (II) 可由 (I) 表示，

  即对任意 β_j ，其可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，

  即对矩阵 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s|\beta_1,\cdots,\beta_t)$, 每一列均有解；

则称向量组 (I), (II) 等价，此时，有充要条件

$$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$$

此时还有向量组 (I), (II) 等价 $\Rightarrow$ 矩阵 (I), (II) 等价。

V. 极大无关组

定义

对 (I) : $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中的一组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$, 若其满足

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 线性无关；
- (I) 中任意剩余向量与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 组成的向量组线性相关；

则称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 为向量组 (I) 的极大无关组。

性质

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 为 (I) 的极大无关组，则

- (I) 中剩余向量可由该组向量线性表出；
- $r(\mathrm{I}) = t$.

求极大无关组

已知向量组 (I) : $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 时求其极大无关组的方法如下。

i. 将 (I) 以列向量的形式构成一矩阵 A ;
ii. 通过初等行变换将 A 转化为阶梯矩阵 B ;
iii. 每一阶取一列，构成极大无关组。

第五章
特征值与特征向量

I. 定义与性质

定义 5.1.1 特征值与特征向量

对 n 阶方阵 A , 若其满足 $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$, 则称 λ 为 A 的特征值，$\vec{\alpha}$ 为对应 λ 的特征向量。

性质

注意，对 n 阶方阵 A ，有如下性质。

- 其有 n 个特征值 (包括重数);
- 特征向量 $\alpha\neq\vec{0}$;
- 任意特征值 λ 对应无数个特征向量;
  若 λ 为单根，其对应的特征向量都线性相关；
  若其为 k 重根，其最多有 k 个相互无关的特征向量；
- 不同特征值对应的特征向量必定线性无关；

II. 特征值与特征向量的求解

未知矩阵

当 A 未知的时候，可以凑定义，即强行构造 $A\alpha=\lambda\alpha$.

已知矩阵

当 A 元素已知时，可以使用公式法。

具体而言，

- 通过特征多项式 $|\lambda E-A|=0$ 解出所有 n 个 λ ;
  - 加减・消零・得公因式
- 对解得的每一个 λ_0 , 求解 $(\lambda_0E-A)X=0$ 以得到
  - 基解 - 其对应的 k 个相互无关的特征向量，此处尽量将特征向量整数化；

- 通解 - 其对应的全部特征向量，此处 $k_i \neq 0$ ；

求特征向量时，若未明示求无关的特征向量，则需要求出特征值对应的全部特征向量。

秩为 1 的矩阵

特别地，对 $A_n : r(A) = 1$ ，有 $A = \alpha\beta^\top = \beta\alpha^\top$ ，此时其特征值必定为 $\lambda_1 = tr(A), \lambda_i = 0 (i \neq 1)$. 事实上，假设 $n = 3$ ，则有

- 多项式 - $|\lambda E - A| = \sum(\lambda - \lambda_i)$;
- 行列式拆分 -
  $|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + S_2\lambda - |A| = 0,\ S_2$ 是某些二阶子式，故有
  - $\sum \lambda = tr(A)$;
  - $\prod \lambda = |A|$;

  又因 $r(A) = 1 \Rightarrow S_2 = 0, |A| = 0$, 故 $\lambda_1 = tr(A), \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

表格法

给定矩阵 A 及其特征值、特征向量 $A\alpha = \lambda\alpha$ ，推断其他矩阵的特征值和特征向量时，适用表格法。此时注意，λ_A 与 A 具有相同形式。

如，若求 A^2 的特征值，有

$$A^2\alpha = AA\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$$

因此，有表格

A	λ	α
A^k	λ^k	α
$A^m + kE$	$\lambda^m + kE$	α
A^{-1}	$1/\lambda$	α
A^*	$\|A\|/\lambda$	α
$A^\top$	λ	无法断定
$P^{-1}AP$	λ	$\mathbf{P^{-1}}\alpha$

III. 矩阵相似

定义 5.3.1 矩阵相似

对方阵 A_n, B_n ，若有可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$ ，称 A, B 相似。

若矩阵 A, B 相似，以下几个性质成立。

- $|A| = |B|$;

- $r(A)=r(B)$；
- $\lambda_A=\lambda_B$；
  事实上，$|\lambda E-B|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$.
- $tr(A)=tr(B)$；
- $A+kE\sim B+kE$；
- $P^{-1}A^nP=B^n$, 注意此时 P 没有变化；
- $A\sim B, B\sim C\Rightarrow A\sim C$.

IV. 相似对角化

定义 5.4.1 对角化

若存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ ，则称 A 可相似对角化。

考虑三阶方阵 $A_{3\times3}$ ，由 $P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow AP=P\Lambda$, 若设

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\Lambda=\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}$$

则有

$$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(k\alpha_1,k\alpha_2,k\alpha_3)$$

由此，k_i 为 A 的特征值，α_i 为其对应的特征向量。

推广至 n 阶，

- $\Lambda \xlongequal{\text{必定存在}} \begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$；
- $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, α_i 有 n 个，是线性无关的特征向量；
  没有 n 个线性无关的特征向量时不能相似对角化。

相似对角化的判定

$$\left.\begin{array}{r}A\text{ 是对称矩阵}\\A\text{ 有 }n\text{ 个互异特征值}\end{array}\right\}\Rightarrow A\sim\Lambda$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \text{可逆矩阵 } P \text{ 存在}\\&\Leftrightarrow A \text{ 有 } n \text{ 个无关特征向量}\\&\Leftrightarrow \text{对 } k \text{ 重根 } \lambda_0,\ \mathbf{r(\lambda_0E-A)=n-k}\end{aligned}$$

V. 相似对角化的求解

i.普通方阵

i. 化简矩阵 A (抽象，含参) 的具体元素，注意此时不适用初等变换；

ii. 求解特征值、特征向量；

iii. 令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ ，此时有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

此处可以通过 Λ 反推 A 进行验证。

ii.对称矩阵

对称矩阵的性质

对称矩阵 $A^\top=A$ 有如下的性质。

- 不同特征值对应的特征向量必定正交；
  - 事实上，若设 $\lambda_1\neq\lambda_2, A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i, i=1,2,$ 则有

$$\begin{aligned}A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1 &\Rightarrow \alpha_1^\top A^\top=\alpha_1^\top A=\lambda_1\alpha_1^\top\\ &\Rightarrow \alpha_1^\top A\alpha_2=\lambda_2\alpha_1^\top\alpha_2=\lambda_1\alpha_1^\top\alpha_2\\ &\Rightarrow (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_1^\top\alpha_2=0\\ &\because \lambda_1\neq\lambda_2,\quad \therefore \alpha_1^\top\alpha_2=0.\end{aligned}$$

- 必定存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ ；
- k 重特征值 λ_0 必定对应 k 个线性无关的特征向量；

施密特正交法

对一组线性无关向量 $\alpha_i, i=1,2,3,$ 通过施密特正交法将其化为一组正交向量 β_i 的方法如下。

- 令 $\beta_1=\alpha_1$ ；
- 令 $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$ ；
- 令 $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$ ；

β_i 应当尽量整数化。此时得到的 β_i 两两正交。

当知道一组正交的 α_1, α_2 时，则

$$\begin{aligned}\alpha_3 &\triangleq \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \alpha_1 \\ \leftarrow \alpha_2 \end{matrix} \\ &= c_i\vec{i} + c_j\vec{j} + c_k\vec{k}\end{aligned}$$

此时有 $\alpha_3 = (c_1, c_2, c_3)$ 与 α_1, α_2 两两正交。

对称矩阵的相似对角化

对对称矩阵 A ,

- 必定存在可逆 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其求解方法同普通方阵；
- 必定存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = Q^\top AQ = \Lambda$;
    - 化简矩阵 A ;
    - 通过 $|\lambda E - A| = 0, (\lambda_0 E - A)X = 0$ 得到特征值与特征向量；
    - 处理得到的特征值和特征向量；
        - 若特征值都互异，将特征向量单位化;
          $\forall \alpha_i, \gamma_i = \dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$
        - 对 k 重根 λ_0 及其对应的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$,
            - 若其全部正交，将全部单位化；
            - 若其不正交，先对 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 做施密特正交化，再将**全部**向量单位化为 γ_i .
    - 令 $Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, 其中 γ_i 必定单位且正交，
      则必有 $Q^{-1}AQ = Q^\top AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

第六章
二次型

I. 定义

二次型

形如

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j \\ &\triangleq X^\top AX, \quad X=(x_1,\cdots,x_n)^\top, \\ A=A^\top &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

的二次齐次函数是二次型。

对称矩阵 A 称为二次型的矩阵。

二次型 f 的秩 $r(f)=r(A)$.

标准型

只含有平方项的二次型 $X^\top AX=\sum d_ix_i^2$ 是标准型。二次型总能化为标准型。

标准型的矩阵是对角矩阵 Λ .

规范型

系数为 $0,\pm1$ 的标准型是规范型。

惯性指数

(二次型对应的) 标准型中正 (负) 系数的个数为其正 (负) 惯性指数。

II. 矩阵合同

i. 定义

对 n 阶方阵 A,B, 若存在可逆矩阵 P 使得 $P^\top AP=B$, 则称 A,B 合同。

ii.可逆变换

设 $f=X^\top AX$, 令可逆矩阵 $C:X=CY$, 代回，有 $f=Y^\top C^\top ACY$.

因此，二次型的可逆变换即为合同变换。

iii.判定

矩阵合同的判定方式如下。

$$\begin{aligned}\lambda_A=\lambda_B\Leftrightarrow A\sim B\Rightarrow A,B\text{合同}&\\ &\Leftrightarrow X^\top AX,X^\top BX\text{的惯性指数相同}\\ &\Leftrightarrow \lambda_A,\lambda_B\text{正负数的个数相同}\end{aligned}$$

iv.二次型化为标准型

正交变换

由正交变换将二次型化为标准型，即寻找正交矩阵 $Q:X=QY$ 以将对称矩阵转化为对角矩阵。

事实上，第五章对称矩阵相似对角化和第六章正交变换很相似，但有些许不同。

- 第五章：已知对称矩阵；

  第六章：已知二次型 $\Rightarrow$ 对应的对称矩阵；
- 第五章：
  - 求解特征值、特征向量；
  - 施密特正交单位化；

  第六章：同上
- 第五章：令 $Q=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 时有 $Q^{-1}AQ=Q^\top AQ=\Lambda$;

  第六章：令 $Q=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ **有 $X=QY$ 时**, 二次型 $f=\sum\lambda_i y_i^2$, 此时特征值的正负个数为正负惯性指数。

配方法

由配方法将二次型化为标准型，即通过配平方将多项式变形至只有平方项。

具体而言，常用的公式有

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\\(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\\(a+b)(a-b)=a^2-b^2\end{cases}$$