高等数学笔记

奇峰

之前

目录

第一章

函数 极限 连续

I. 函数的性态

i. 有界性的判定

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x)$ 有界；
- 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则其在 $[a, b]$ 有界；
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续，且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 均存在，则其在 (a, b) 有界；
- $f'(x)$ 在有限区间 有界 $\Rightarrow f(x)$ 在该区间有界。

ii. 导函数、原函数的奇偶性与周期性

导函数的奇偶性与周期性

- 可导奇函数的导函数为偶函数；
- 可导偶函数的导函数为奇函数；
- 可导周期函数的导函数为周期函数；

原函数的奇偶性与周期性

- 连续奇函数的原函数均为偶函数；
- 连续偶函数的原函数仅有一个为奇函数，即 $C = 0$ 时；
- 周期函数的原函数为周期函数 $\Rightarrow \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$

II. 极限的概念

讨论数列最值，将其拆分为前 N 个与后无穷个，前者求最值，后者利用极限定义可知其接近极限值。

讨论同时包含 $\sin(x_n),\cos(x_n)$ 的抽象数列时，可以考虑令 $x_n=\begin{cases}\pi/2, & 2i+1\\ -\pi/2, & 2i\end{cases}$，利用 $\sin,\cos$ 奇偶性的不同。

III. 重点 - 函数极限的计算

i. 0/0 形

洛必达法则

若 $f(x),g(x)$

- $\lim f(x)=\lim g(x)=0/\infty$;

  可以推广为 $\dfrac{\blacksquare}{\infty}$;
- $f(x),g(x)$ 在 x_0 某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

  此处注意，$\begin{cases}n\text{阶可导} & \Rightarrow \text{洛}n-1\text{次}+\text{导数定义}\\ n\text{阶连续导数} & \Rightarrow \text{洛}n\text{次}\end{cases}$
- $\dfrac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)}=A(\text{或}\infty)$,

则 $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=A(\text{或}\infty)$.

等价代换

当 $x\to 0$ 时，有

- $\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x$;
- $e^x-1-x\sim x-\ln(1+x)\sim 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$;
- $x-\sin x\sim\arcsin x-x\sim\dfrac{x^3}{6}$;
- $\tan x-x\sim x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{3}$;
- $\tan x-\sin x\sim\arcsin x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{2}$;

对于以上等价无穷小，有

i. 可变量代换，如 $\sin\square\sim\square,\ \tan\square\sim\square,\cdots$

ii. $x\to 0$ 时，$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a,\ \log_a(1+x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln a}\sim\dfrac{x}{\ln a}$;

iii. 若 $x \to a$ ，可以令 $t = x - a \to 0$.

iv. 不能在复合函数的自变量处做等价代换，如 $x \to 0 \nRightarrow f(x) \sim f(\sin x)$.

泰勒公式

- $e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$;
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$, 其中 $C_\alpha^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}$

  如，$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$;
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$;
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + o(x^n)$;

泰勒公式求极限时，

- 分子阶数不小于分母阶数；
- 加减不抵消，“齐头并进”；
- 可推广为 $\square \to 0$.

ii. ∞/∞ 形

主要方法有

- 洛必达；
- 抓大头，即每个因式保留高阶无穷大；

  $x \to 0 \Rightarrow \ln^\alpha(x) \ll x^\beta \ll a^x \ll x^x$, 其中 $\alpha, \beta > 0, a > 1$.

iii. $\infty-\infty$ 形

主要方法有

- 通分（有分式时）；
- 有理化（有根号时）；
- 倒代换，即令 $t=\dfrac{1}{x}$.

iv. 0^0 与 ∞^0 形

若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0(\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\exp\left(\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)\right)$.

v. 1^∞ 形

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+u(x)]^{v(x)}=\exp\left(\lim\limits_{x\to x_0}v(x)u(x)\right)$.
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\exp\left(\lim\limits_{x\to x_0}v(x)[u(x)-1]\right)$.

事实上，有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{\prod a_i}$$

IV. 已知极限反求参数

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且 $g\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq\mathbf{0}$ 且 $g\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

例

$\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow b=0.$

- 证明

  $b=0$ 时原式显然成立。
  $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0(t\neq 0)\Rightarrow b\neq 0$ 时原式不成立。
  因此，b 只能为零。

V. 无穷小阶的比较

例

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f\prime\prime(0)\neq 0$, 则存在一组唯一的 $\lambda_i, i=1,2,3$ 使得 $h\to 0$ 时，有 $\sum\lambda_i f(ih)-f(0)$ 是 h^2 的高阶无穷小。

- 一般证明

  $\sum\lambda_i f(ih)-f(0)$ 是 h^2 的高阶无穷小 $\Rightarrow \sum\lambda_i f(ih)-f(0)=0$;

  对上式两边求导，有 $\sum\lambda_i i f'(ih)=0$;

  对上式两边求导，有 $\sum\lambda_i^2 i f''(ih)=0$;

  因此，有 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 由于系数矩阵满秩，其有唯一解，因而得证。

- 泰勒法

  将 $f(h), f(2h), f(3h)$ 展开至二阶，代入 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sum\lambda_i f(ih)-f(0)}{h^2}$, 然后和前述做法一致。

VI. 重点 - 数列极限的计算

i. 夹逼定理

左边缩，右边放，两边极限相等。

放缩时，有不等式

- $0<x<\pi/2$, 则 $\sin x<x<\tan x; \sin x<x<\pi/2\sin x; 2/\pi x<\sin x<x$;

  利用 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的性质证明。

- $x>0, x>\sin x; x<0, x<\sin x$;

- $e^x>1+x, x\neq 0$;

- $\dfrac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x, x>-1, x\neq 0.$

ii. 单调有界定理

对数列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 求极限，方法如下。

- 适当放缩以证明有界性；

- 做差、做商或求导证明单调性；

- 若其单调，由单调有界知 $\lim x_n$ 存在；
- 令 $\lim x_n = a$, 对原式两端取极限，有 $a = f(a)$, 因此可以解得 a;
- 若其不单调，则设 $\lim x_n = a$, 再利用夹逼定理证明前者确实成立。

iii. 定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{d\to 0}\sum_{i=i}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

其中，$\xi_i \in \left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)\right]$.

附录

补充结论

一类无穷阶可导的抽象函数

若 $f(x)$ 满足

- $f(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x + \Delta$;
- $f'(x) = f(x) + \Delta$;
- $f''(x) = f'(x) + \Delta$,

其中 Δ 无穷阶可导，则 $f(x)$ 无穷阶可导。