



赛博题本

奇峰

之前

目录

第一部分 错题	1
I. 练习	1
II. 考试	3
第二部分 答案及注意事项	7
I. 练习	7
II. 考试	13

第一部分

错题

I. 练习

问题 1 ◇

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{4n^2 + n\pi} = ()$$

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 不存在

问题 2 660T9 ◇

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin xt}{t} dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

问题 3 660T11 ◇

设 $a > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x)^{x^a} = \underline{\hspace{2cm}}.$

问题 4 660T17 ◇

设 a, b 为常数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b) = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

问题 5 660T21 ◇

已知 $x \rightarrow 0$ 时 $F(x) = \int_0^{x-\sin x} \ln(1+t)dt$ 是 x^n 的同阶无穷小, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}.$

问题 6 660T27 ◇

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, 其中 b 为常数, $f(x)$ 在定义域上处处可导, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$



问题 7 660T28 ◇

设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 可导, 则 a 满足_____, 若 $f'(x)$ 连续, 则 a 满足_____.

问题 8 660T29 ◇

设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且为偶函数, $f'(-2) = -1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(5-2\sin h) - f(5)} =$ _____.

问题 9 660T30 ◇

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0) = 1, f'(0) = 3$, 则数列极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}}} = \text{_____}.$$

问题 10 660T33 ◇

$f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$, 则 $f''(0) =$ _____.

问题 11 660T34 ◇

设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____, $y = y(x)$ 在任意点处的曲率 K 为_____.

问题 12 660T38 ◇

设函数 $y = f(x)$ 为由方程 $\int_b^y (2 + \sin^2 t) dt = 1$ 确认的隐函数, 则 $dy =$ _____.

问题 13 660T40 ◇

设 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x}$, 则 $f^{(3)}(0) =$ _____.

问题 14 660T48 ◇

曲线 $y = \sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线为_____.

问题 15 660T49 ◇

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程为_____.

问题 16 660T51 ◇

设 $\int x f'(x) dx = \arctan x + C$, 则 $f(x) =$ _____.



问题 17 660T52 ◇

$$I = \int \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

问题 18 660T59 ◇

$$I = \int_0^1 \arcsin x \cdot \arccos x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

问题 19 660T60 ◇

$$\int_0^1 \left[\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{(1-x^2)^3} \right] dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

问题 20 660T64 ◇

设 $f(x) = \max\{1, x^2\}$, 则 $\int_1^x f(t) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

问题 21 660T68 ◇

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 dx, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

问题 22 660T70 ◇

摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴围成的图形绕 $y = 2a$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}.$

II. 考试

问题 23 C1T5 ◇

设 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) = ()$

- (A) 不存在且非无穷大
- (B) 0
- (C) $\ln a$
- (D) ∞

问题 24 C1T11 ◇

已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 0$, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}.$



问题 25 C1T12 ◇

设函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 则 $f(x)$ 的可去间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

问题 26 C1T15 ◇

若 $a > 0, b > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

问题 27 C1T16 ◇

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\tan x) \cos x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

问题 28 C1T20 ◇

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

■ 求 $f(x)$ 最小值;

□ 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

问题 29 C1T22 ◇

设函数 $f(x)$ 满足 $a \leq f(x) \leq b, \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

设 $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为且满足 $c = f(c)$.

问题 30 C2T1 ◇

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

问题 31 C2T8 ◇

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

则 ()



- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点
(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续但不可导
(D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导

问题 32 C2T11 ◇

已知 $y = y(x)$ 满足 $y^3 + x^3 - 3xy = 0$ ，且存在斜渐近线，则该斜渐近线为_____。

问题 33 C2T17 ◇

设 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ ，求高阶导数值 $f^{(2020)}(0)$ 与 $f^{(2021)}(0)$ 。

问题 34 C2T20 ◇

设 a 为常数，讨论方程 $x^2 = ae^x$ 的实根个数及其所在范围。

问题 35 C2T21 ◇

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续， $(0, 1)$ 可导， $c \in (0, 1)$ ， $f(0) \neq f(1)$ ，则存在 $\xi \in (0, 1)$ ， $\eta \in (0, 1)$ 使得

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$$

问题 36 C2T22 ◇

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数，且 $g''(x) \neq 0$ ， $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ ，则

■ 在开区间 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$

□ 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

问题 37 C3T2 ◇

下列命题中，正确的命题有_____个。

- 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的某原函数为常数，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒为零；
- 若 $f(x)$ 的某个原函数为零，则其所有的原函数都为常数；
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内不是连续函数，则 $f(x)$ 在这个区间内必定没有原函数；
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数，则 $F(x)$ 在 (a, b) 内必为连续函数。



问题 38 C3T13 ◇

设 $F(x) = \sin \left[\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^3 dt \right) dy \right]$, 则 $F'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

问题 39 C3T21 ◇

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调递增, $0 \leq g(x) \leq 1$, 则

$$\blacksquare \quad 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$\square \quad \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx .$$

第二部分

答案及注意事项

I. 练习

答案 1 求 n 时, 求出一个定值 ■

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{4n^2 + n} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n + \sqrt{4n^2 + n} - 2n)\pi \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)\pi \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \pi \\&= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

答案 2 通过换元法将 x 剔除出积分式 ■

令 $s = xt$, 则有

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin s}{s} ds}{x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot 3x^2}{2x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x^2 - 3 \sin x^3}{2x^2} = 1\end{aligned}$$

答案 3 不要先想象分类讨论的结果再补画靶子 ■



令原极限 $= I$, $t = \frac{1}{x}$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{t+1}{t^2}}{t^a} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1) - 2 \ln t}{t^a} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t+1} - \frac{2}{t}}{a t^{a-1}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t-2}{a(t+1)t^{a+1}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{a(a+1)t^{a+1} + a^2 t^a} \right\} = 1 \end{aligned}$$

答案 4 对根式, 令 $t = -\frac{1}{x^6}, x \rightarrow \infty$, 然后泰勒展开 ■

由于

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-x^6} &= -x^2 \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^6}} \\ &\stackrel{t=-\frac{1}{x^6}}{=} -x^2 \left(1 + \frac{1}{3}t + o(t) \right) = -x^2 \left(1 - \frac{1}{3x^6} + o(x^{-6}) \right) \end{aligned}$$

代回原极限, 发现当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时原极限成立。

答案 5 利用一次洛必达法则后不要忘记分母的次数为 $n-1$ ■

由题,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x-\sin x} \ln(1+t) dt}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x-\sin x)(1-\cos x)}{n x^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 \cdot \frac{1}{2}x^2}{n x^{n-1}} = a \end{aligned}$$

其中 a 是常数, 故 $n-1=5$, 即 $n=6$ 。

答案 6 注意题目要求的是单点还是函数 ■

由 $f(x)$ 在定义域的可导性, 有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因此有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, 故 $b = -1$ 。当 $x \neq 0$ 时,

可以直接得出 $f'(x) = \frac{x - (x-1)\ln(1-x)}{(x-1)x^2}$; $x=0$ 时, 由定义,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} + 1}{x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



故可以知道,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x - (x-1)\ln(1-x)}{(x-1)x^2}, & x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

答案 7 在写作业的时候不要听狗叫 ■

$f(x)$ 在 $R \setminus \{0\}$ 上的可导性显然。而

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

而 $f'(x)_- = 0$, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导时, 显然 $a > 1$ 。

$f'(x)$ 在 $R \setminus \{0\}$ 上的连续性显然, 而 $f'(0) = 0$, 当 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) - f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^{a-2} \cos \frac{1}{x} + ax^{a-1} \sin \frac{1}{x} = 0$$

故此时显然 $a > 2$ 。

答案 8 注意不要漏掉分式上下同乘除的式子 ■

由 $f'(-2) = -1$ 以及 $f(x)$ 的偶性质, 有 $f'(5) = f'(-1) = -f'(1) = -f'(-2) = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(5 - 2 \sin h) - f(5)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin h}{f(5 - 2 \sin h) - f(5)} \cdot \frac{1}{-2} \\ &= \frac{1}{-2f'(5)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

答案 9 对原式取对数运算后, 要将 e 放答案中 ■

利用海因定理, 令 $t = \frac{1}{n}$, 有

$$\begin{aligned} I &= \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - \cos t} \ln f(t) \right) \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \ln f(t)}{t} \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f'(t)}{f(t)} = e^6 \end{aligned}$$

答案 10 计算时要检查是否将乘法和加法混淆 ■

将 $f(x)$ 展开, 其最后一项必定为 $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot x^2 = 36x^2$, 而其他项的次数显然大于 2, 故 $f''(0) = 72$ 。

答案 11 不要将分子和分母搞混 ■

显然

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t^2 + 1}}{\frac{t}{t^2 + 1}} = \frac{1}{t}$$



又, 显然

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{t^2+1}} = -\frac{t^2+1}{t^3}$$

因此有

$$\begin{aligned} K &= \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{t^2+1}{|t|^3}}{(1+\frac{1}{t^2})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

答案 12 注意区分 $\sin^2 t$ 和 $\sin t^2$ 的区别 ■

对方程两侧关于 x 取导数, 有

$$2x + (2 + \sin y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = \frac{-2x}{2 + \sin y^2} dx$$

答案 13 注意记住 $\ln(1+t)$ 和 $\ln(1-t)$ 的泰勒展开式 ■

由于

$$\begin{aligned} f(x) \ln \frac{1-2x}{1+3x} &= \ln(1-2x) - \ln(1+3x) \\ &= -\left(\frac{2x}{1} + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(\frac{3x}{1} - \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{3} + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

可以知道 $f^{(3)}(0) = -\frac{35 \cdot 3 \cdot 2}{3} = -70$.

答案 14 注意必须严格验证每一条渐近线的存在性; 必须考虑正无穷和负无穷处和每一个间断点 ■

由 y 的方程, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$ 而 $x \rightarrow -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的极限不存在, 因此 $x = -\frac{1}{2}$ 是 y 的一条垂直渐近线。而 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, 故其不是 y 的渐近线。显然, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ 均不存在。而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x} \ln(2+\frac{1}{x})}{x} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+t} \ln(2+t)}{t} = 2 \ln 2$$

而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+x} \ln(2+\frac{1}{x}) - 2 \ln 2x \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \frac{\sqrt{4+t} \ln(2+t) - 2 \ln 2}{t} = 1 + \frac{\ln 2}{4}$$

故有 y 的一条斜渐近线 $y = 2 \ln 2x + 1 + \frac{\ln x}{4}$ 。同理, 在 $-\infty$ 方向, 有 y 的一条斜渐近线 $y = -(2 \ln 2x + 1 + \frac{\ln x}{4})$ 。因此存在三条渐近线:

- $x = -\frac{1}{2}$;
- $y = 2 \ln 2x + 1 + \frac{\ln x}{4}$;



• $y = -(2 \ln 2x + 1 + \frac{\ln x}{4}).$

答案 15 真的, 我不知道应该写些什么 ■

显然 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \text{ 则切线斜率为 } 2, \text{ 即法线斜率为 } -\frac{1}{2}.$$

又, $f(0) = 0$, 有法线方程 $y = -\frac{1}{2}x$.

答案 16 注意积分时不要遗漏常数项 C ■

对原等式两头求导, 有

$$\begin{aligned} x f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} \\ &\Rightarrow f(x) + C = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C \end{aligned}$$

答案 17 注意将答案化简为人话 ■

显然

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3+2x} dx \xrightarrow{x=\frac{3}{2}\sin t} \frac{3}{2} \int \frac{3\cos t}{3+3\sin t} \cos t dt \\ &= \frac{3}{2} \int 1 - \sin t dt \\ &= \frac{3}{2}(t + \cos t) + C \\ &= \frac{3}{2} \arcsin \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} \cos(\arcsin \frac{2}{3}x) + C \end{aligned}$$

注意到 $\frac{3}{2} \cos(\arcsin \frac{2}{3}x) = \frac{1}{2} \sqrt{9-4x^2}$, 故原积分为 $\frac{3}{2} \arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \sqrt{9-4x^2} + C$ 其中 C 为任意常数。

答案 18 注意不要漏掉提出去的系数 ■

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \arcsin x (\frac{\pi}{2} - \arcsin x) dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t (\frac{\pi}{2} - t) d \sin t \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d \sin t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d \sin t = -\frac{\pi}{2} + 2 \end{aligned}$$

答案 19 注意计算准确性 ■



有 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx - \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$ ，由几何意义后式中前者显然为 $\frac{\pi}{4}$ ，而

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$$

因此原积分为 $\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$ 。

答案 20 注意定积分的定义和上下限交换的意义（呃呃呃……） ■

分类讨论，有

- $x < -1$ 时，原积分显然为 $\int_{-1}^{-x} f(t)dt = -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$ ；
- $x \in [-1, 1]$ 时，原积分显然为 $1 - x$ ；
- $x > 1$ 时，原积分显然为 $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$ 。

因此，有

$$\int_1^x f(t)dt = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}, & x < -1 \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

答案 21 注意计算准确性 ■

显然 $I = \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx$ ，而 I 存在，因此必有 $b-a=0$ ，即 $a=b$ 。

那么有

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)}dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a}dx \\ &= \ln \frac{x}{2x+a} \Big|_0^{+\infty} = \ln(2+a) - \ln 2 = 1 \end{aligned}$$

因此有 $a=b=2e-2$ 。

答案 22 注意所列式所求体积与待求体积的关系 ■

设将摆线段向下平移 $2a$ 格后与 x 轴围成图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积为 V_1 ； $y=2a, x=2\pi, x=0, y=0$ 围成的长方形绕 x 轴转一周得到的体积为 V_0 ，则显然有 $V=V_0-V_1$ 。



显然 $V_0 = 8\pi^2 a^3$. 而

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{2\pi} (2a - y)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (2 - 1 + \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 (1 - \cos t) dt \\ &= a^3 \pi \left[\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t d \sin t \right] \\ &= a^3 \pi^2 \end{aligned}$$

因此原体积 $V = V_0 - V_1 = 7\pi^2 a^3$.

II. 考试

答案 23 化简, 然后应用 $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$ ■

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a^{\frac{1}{n(n+1)}} (a^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a^{\frac{1}{n(n+1)}} (e^{\frac{\ln a}{n(n+1)}} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 a^{\frac{1}{n(n+1)}} \ln a}{n^2 + n} = \ln a \end{aligned}$$

答案 24 将上面平方开, 通过等价求 a, b ■

由题,

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - a^2)x^2 + (1 - 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b}$$

故有 $1 - a^2 = 0$, $1 - 2ab = 0$ 可以解得 $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, 故 $a + b = \frac{3}{2}$ 。

答案 25 考试前至晚 1 个小时喝咖啡 ■

由于

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp \left(\lim_{t \rightarrow x} \frac{x \ln \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)}{\sin t - \sin x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{t \rightarrow x} \frac{x \left(\frac{\sin t}{\sin x} - 1 \right)}{\sin t - \sin x} \right) \\ &= \exp \left(-\frac{x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

可以知道 $f(x)$ 的间断点有 $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, 且其中只有 0 是可去的, 因为其他点处 $f(x)$ 左右极限均不存在。

答案 26 不要认为令 $a = b = 1$ 的结果一定能代表答案 ■



设原极限为 I ，则对函数 $f(n), n \in (-\infty, +\infty)$ ，有

$$\begin{aligned} I &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) - \ln 2}{n} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\sqrt[n]{a} \ln a + \sqrt[n]{b} \ln b}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}} \right) \\ &= \exp(\ln(ab)^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

答案 27 对原式取对数运算后，要将 e 放回答案中 ■

设原极限为 I ，则有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \exp \left(\frac{\ln(\tan x)}{\cos x - \sin x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \right) = e^{-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

答案 28 利用前问结论推导后问结论 ■

由 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x + \frac{1}{x_n} > 0$ ，有 $x_n > 0$ 。故有

$$\begin{aligned} \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 \leq f(x_n) = \ln x_n + \frac{1}{x_n} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n} \Rightarrow x_n < x_{n+1} \end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增。而

$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 \Rightarrow \ln x_n < 1 \Rightarrow x_n < e$$

故由单调有界原理， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ ，有 $\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$ ；同时 $\ln a + \frac{1}{a} = f(a) \geq 1$ ，故由夹逼定理，有 $\ln a + \frac{1}{a} = f(a) = 1$ ，此时解得 $a = 1$ ，故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

答案 29 构建合适的辅助函数，并对其使用零点定理 ■

由 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ ，有 $f(x) \in [a, b]$ 。

令 $F(x) = x - f(x)$ ，显然 $F(x) \in C[a, b]$ 。又由 $F(a) \cdot F(b) = [a - f(a)][b - f(b)] \leq 0$ ，运用零点定理知，至少存在一点 $c \in [a, b]$ ，使得 $F(c) = 0$ ，即 $f(c) = c$ 。

假设 $\exists d \in [a, b], c \neq d$ 使得 $d = f(d)$ ，则有

$$|c - d| = |f(c) - f(d)| \leq |c - d|$$

这显然是矛盾的，故 c 唯一。



因为 $a \leq f(x) \leq b$, $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}[f(x_n) + x_n]$, 可以由数学归纳法证明 $\forall x_n, a \leq x_n \leq b$, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 必然存在, 假设其为 a 。对 $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$ 两边取极限, 有 $f(a) = a$, 由 c 的唯一性, $a = c$ 。

答案 30 拐点第二充分条件在 $f''(x) = 0$ 时无法使用 ■

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 可以知道 $f''(x) = 0$, 此时不能运用拐点的第二充分条件。而由极限的保序性, 当 x 趋近于 0 的时候, $f''(x) > 0$, 而 $f'(x) =$, 故 $f(0)$ 显然为极小值。

答案 31 不应当着急下结论 ■

显然 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, 而由 $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 故 $f(x)$ 在 R 上连续。

而

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xn} \end{aligned}$$

同时 $1 \leq \frac{1}{xn} \leq \frac{n+1}{n}$, 因此由夹逼定理, $f'_+(0) = 1$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导。

答案 32 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} y + x$ ■

由于存在斜渐近线, 可以知道 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$ 一定存在。而由题给方程, 可以知道

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3y}{x^2} &= 0 (x \neq 0) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3y}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

此时, 显然有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -1$ 。

又,

$$\begin{aligned} y^3 + x^3 - 3xy &= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{3xy} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x+y) &= \frac{3\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2} \end{aligned}$$

故解得 $\lim_{x \rightarrow \infty} x + y = -1$, 因此可以知道, 斜渐近线的方程为 $y = -x - 1$ 。

答案 33 ■

答案 34 ■



答案 35 ■

答案 36 ■

答案 37 注意存在间断点时不定积分的存在性 ■

对于每一项,

- $f(x)$ 的一个原函数 $F(x) = C$, 其中 C 是常数, 那么 $F'(x) \equiv 0$;
- $f(x)$ 的一个原函数 $F(x) = 0$, 那么其全部原函数为 $F(x) = 0 + C = C$;
- 若 $f(x)$ 在区间内有震荡间断点, 则其有可能有原函数;
- 由于 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 可以知道 $F(x)$ 可导, 而可导必连续。

因此, 正确的有 3 项。

答案 38 注意不要将变限积分函数求导公式错误应用 ■

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos \left[\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^3 dt \right) dy \right] \cdot \left[\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^3 dt \right) dy \right]' \\ &= \cos \left[\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^3 dt \right) dy \right] \cdot \sin \left(\int_0^x \sin t^3 dt \right) \end{aligned}$$

注意, 对变限积分函数求导时, 不对里面的函数求导, 只对积分上下限关于 x 求导。

答案 39 构造辅助函数, 通过辅助函数的单调性证明结论 ■

令

$$F(x) = \int_a^{a+\int_a^x g(u)du} f(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt, x \in [a, b]$$

由于 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 有 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且

$$F'(x) = \left[f\left(a + \int_a^x g(u)du\right) - f(x) \right] g(x)$$

又由 $a + \int_a^x g(u)du \leq x$, 而 $f(x)$ 单调递增, $g(x) \leq 0$, 有 $F'(x) \leq 0$, 即 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调不增。又由 $F(a) = 0$, 可以知道 $F(b) \leq 0$, 即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$