



高等数学笔记

奇峰

之前

目录

第一章 函数、极限、连续	1
I. 函数	1
i. 函数的性质	1
ii. 函数	2
II. 无穷大与无穷小	3
i. 无穷小的判定	3
ii. 无穷小的性质	3
iii. 无穷小的比较	3
iv. 常用的等价无穷小及其替换定理	4
v. 无穷小的阶	5
vi. 极限和无穷小的关系	5
vii. 无穷大	5
viii. 无穷大与无穷小的关系	5
III. 极限	6
i. 极限概念	6
ii. 性质	6
iii. 极限存在定理	7
iv. 重要极限	8
v. 极限的四则运算法则	8
vi. 洛必达法则	8
vii. 海因定理	9
viii. 关于极限的命题	9
IV. 连续与间断	10
i. 连续的概念	10
ii. 连续函数的运算性质	11
iii. 闭区间上函数的性质	11
iv. 函数连续的常见命题	12
v. 间断点及其分类	12
第二章 一元函数的微分学	14
I. 导数	14
i. 导数的概念	14
ii. 函数可导的条件	15
iii. 导数的几何意义	15
iv. 导数的运算	16
II. 微分	17



i.	微分的概念	17
ii.	可微与导数的的关系	18
iii.	微分公式与法则	18
III.	微分中值定理	18
i.	罗尔定理	18
ii.	拉格朗日中值定理	19
IV.	柯西中值定理	20
V.	泰勒中值定理	20
VI.	导数应用	22
i.	函数单调判定定理	22
VII.	极值	22
i.	定义	22
ii.	极值的必要条件	22
iii.	极值的充分条件	23
VIII.	最大值、最小值问题	23
i.	凹向与拐点	23
ii.	渐近线定义及其求法	24
IX.	曲率及曲率半径	25
第三章	一元函数积分学	26
I.	不定积分	26
i.	原函数	26
ii.	不定积分	26
iii.	不定积分法	27
iv.	特殊类型的不定积分	29
II.	定积分	30
i.	定积分概念	30
ii.	定积分的性质	31
iii.	重要定理、公式、关系	32
iv.	定积分求法	32
v.	常用的定积分公式	33
III.	定积分应用	34
i.	平面图形求面积	34
ii.	旋转体求体积	35
iii.	平均值	35

第一章

函数、极限、连续

I. 函数

i. 函数的性质

奇偶性

奇函数导数为偶函数; 偶函数导数为奇函数;

奇函数积分为偶函数; 偶函数积分不一定为奇函数.

且对

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

有

$$\begin{cases} \text{若 } f(t) \text{ 可积,} & \text{则 } F(t) \text{ 连续} \\ \text{若 } f(t) \text{ 连续,} & \text{则 } F(t) \text{ 可导, 且 } F'(t) = f(t) \end{cases}$$

有界性

(上、下) 界均为常数

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \text{ 收敛.}$$

证明 显然前者单调递增. 而

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &\leq 2 < \infty \end{aligned}$$

故其有上界, 因而收敛.

注意, 证明中必须指出作为常数的上界的存在性.

求导与有界的相关性



在一区间上, $f(x)$ 有界与 $f'(x)$ 有界相互无法推出, 但是在一闭区间 $[a, b]$ 上, $f'(x)$ 有界可以推出 $f(x)$ 有界.

证明 只需证明 $\exists M', \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M'$ 成立. 由于

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \\ &< |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ &\leq |f'(\varepsilon)|(b-a) + |f(a)| \end{aligned}$$

因此, 令 $M' = |f'(\varepsilon)|(b-a) + |f(a)|$, 则令前式成立的 M' 显然存在. ■

周期性

- i. 周期函数的导数是周期函数, 且周期一致;
- ii. 周期函数的原函数不一定是周期函数;
- iii. 周期函数之和不一定是周期的, 如 $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = \cos(\pi x)$ 的和显然不是周期函数.

单调性

定义 1.1.1 单调性的等价定义

$\forall x_1 \neq x_2$, 有

$$\begin{cases} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 & \text{则单增} \\ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 & \text{则单减} \end{cases}$$

仅使用单调增加 (减少) 和单调不减 (增) 的概念.

ii. 函数

函数的复合及反问题

仅考察有分段函数参与的复合问题.

初等函数

考研数学中常出现的非初等函数:

- i. 分段函数;
- ii. 绝对值函数;
- iii. 符号函数 $y = \operatorname{sgn}(x)$;
- iv. 最值函数;



v. 取整函数 $[x]$, 即不超过 x 的最大整数;

vi. 极限函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^{2n}}$;

vii. 变限积分函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

其中, 对取整函数, 有一例: 求

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy, \quad D: \{x^2+y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$$

此时, 由于 $x^2+y^2 \leq \sqrt{2}$, 对 D , 可以在 $\rho = \sqrt{2}$ 处分块.

对变限积分函数, 有

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt \right]' = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

II. 无穷大与无穷小

i. 无穷小的判定

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小 (量). 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大 (量).

无穷大 (小) 与极限过程有关.

ii. 无穷小的性质

- i. 无穷小与有界量之积仍为无穷小;
- ii. 有限个无穷小之和仍为无穷小 (但无限个不一定);
- iii. 有限个无穷小之积仍为无穷小 (但无限个不一定).

iii. 无穷小的比较

- i. $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) \sim g(x)$;
- ii. 分子分母上的乘积因式可等价代换;
- iii. 分子分母上的代数和一般不能等价代换.

代数和求等价

- i. 抓大头;
- ii. 充分条件: 若 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$, 且 $f(x) \approx g(x)$, 则 $f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x)$;
- iii. 泰勒展开.



iv. 常用的等价无穷小及其替换定理

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

- $\sin x \sim x$;
- $\tan x \sim x$;
- $\arcsin x \sim x$;
- $\arctan x \sim x$;
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
- $e^x - 1 \sim x$;
- $\ln(1+x) \sim x$;
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

对于以上等价无穷小, 有

- i. 可变量代换。如 $\sin \square \sim \square$, $\tan \square \sim \square, \dots$;
- ii. $x \rightarrow 0$ 时, $a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$, $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a} \sim \frac{x}{\ln a}$;
- iii. 若 $x \rightarrow a$, 可以令 $t = x - a \rightarrow 0$ 。

广义等价

若有 $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $x \rightarrow x_0$, $f(x) \sim g(x)$, 如在 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + \cos x)^2 \sim 4$, $e^x + 1 \sim 2$

定义 1.2.1 广义等价替换定理

若 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

注:

- i. 分子分母上的乘积因式可等价代换;
- ii. 分子分母上的代数和一般不能等价代换;
- iii. 若 $x \rightarrow x_0$, 总可以令 $t = x - x_0 \rightarrow 0$ 。

等价替换三步骤:

- i. 判断形态;
- ii. 化简:
 - (a) 等价代换



(b) 四则运算

(c) 变量代换

(d) 恒等变换

iii. 泰勒展开/洛必达法则。

v. 无穷小的阶

定义 1.2.2 无穷小阶的定义

设 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x), g(x)$ 无穷小, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = k \neq 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小, 也称与 $g^k(x)$ 同阶。

vi. 极限和无穷小的关系

对于极限和无穷小,

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim \alpha(x) = 0$$

常用于已知抽象函数一表达式极限时求该函数另一表达式的极限。

vii. 无穷大

定义 1.2.3 无穷大的定义

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \forall M \geq 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in \bigcup_{\delta}^o(x_0)$, 有 $|f(x)| > M \Leftrightarrow f(x) < -M$ 或 $f(x) > M$ 。

定义 1.2.4 有界和无界的定义

若 $f(x)$ 在 x_0 附近一区间 E 有界, 则 $\exists M \geq 0$, 使得 $\forall x \in E$, 有 $|f(x)| \leq M$, 反之则无界。

无穷大必无界, 反之不一定。例:

i. $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x_2} \sin(\frac{1}{x})$ 无界, 非无穷大;ii. $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x_2} \sin(\frac{1}{x})$ 无界, 非无穷大;iii. 数列 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 无界, 无穷大;iv. 数列 $1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots$ 无界, 无穷大;v. 数列 $1, 0, 2, 0, \dots, n, 0, \dots$ 无界, 非无穷大。

viii. 无穷大与无穷小的关系

在 x 的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。



III. 极限

i. 极限概念

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。

设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 收敛于 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

$f(x)$ 在 x_0 上是否有定义与该极限是否存在没有关系。

ii. 性质

保序性

定理 1.3.1 保序性

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$, 若 $a < b$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, 有 $x_n < y_n$ 。
当 $a \leq b$ 时, 该性质不再成立。

推论 1.3.1 保号性

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 若 $a \leq 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, 有 $x_n \leq 0$ 。

定理 1.3.2

若 $x_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$, 则有 $a \leq b$ 。

定理 1.3.3

设 $\lim_{n \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{n \rightarrow x_0} g(x) = b$, 若 $a < b$, 则 $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{o}{\bigcup}_{\delta}(x_0)$ 有 $f(x) < g(x)$ 。
当 $a \leq b$ 时, 该性质不再成立。

推论 1.3.2

设 $\lim_{n \rightarrow x_0} f(x) = a$, 若 $a \leq 0$, 则 $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{o}{\bigcup}_{\delta}(x_0)$ 有 $f(x) \leq 0$ 。

定理 1.3.4

若在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则 $a \leq b$ 。

唯一性

定理 1.3.5 唯一性

设 $\lim f(x) = A, \lim f(x) = B$, 则 $A = B$ 。

局部有界性

定理 1.3.6

收敛数列必有界。即, 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $|x_n| \leq M$ 。

**定理 1.3.7**

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists M \geq 0, \exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in \bigcup_{\delta}^o(x_0)$ 有 $|f(x)| \leq M$ 。

iii. 极限存在定理**夹逼定理****定理 1.3.8 夹逼定理**

若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足

i. $y_n < x_n < z_n$;

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 其中 a 是常数;

则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

对于 n 项和的极限, 常见的求法有

- i. 直接求和;
- ii. 夹逼定理;
- iii. 定积分定义;
- iv. 数项级数求和。

两个常见的极限

i. $\forall a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。

单调有界原理

- 数列单调递增有上界必收敛;
- 数列单调递减有下界必收敛。

注意,

- i. 常用于证明无通项公式的数列收敛, 如

- 由递推公式给出的数列;
- 不等式;
- 方程的根;

- ii. 必须先证明收敛性, 再求极限。



iv. 重要极限

以下是部分重要的极限。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{t})^t = e$$

对以上极限，可以应用变量代换。

v. 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)$ 存在且等于 A ， $\lim g(x)$ 存在且等于 B ，那么

- i. $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 存在且为 $A \pm B$ ；
- ii. $\lim[f(x) \cdot g(x)]$ 存在且为 AB ；
- iii. 若 $B \neq 0$ ， $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且为 $\frac{A}{B}$ 。

若 $\lim f(x)$ 存在但 $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim f(x) \star g(x)$ 不存在，其中 \star 为任意四则运算符。

广义极限四则运算

- 若 $\lim f(x)$ 存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ ；
- 若 $\lim f(x)$ 存在且不为 0，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ ；
- 若 $\lim f(x)$ 存在且不为 0，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 。

注意，这里不要求也无法直接给出 $\lim g(x)$ 的存在性。

vi. 洛必达法则

定理 1.3.9 $\frac{0}{0}$ 形式的洛必达法则

设

$$i. \lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0;$$

ii. x 变化过程中， $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在；

$$iii. \frac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)} = A(\text{或} \infty),$$

则 $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = A(\text{或} \infty)$ 。

定理 1.3.10 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式的洛必达法则

设

$$i. \lim f(x) = \infty, \lim g(x) = \infty;$$



ii. x 变化过程中, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在;

iii. $\frac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)} = A(\text{或} \infty)$,

则 $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = A(\text{或} \infty)$ 。

注意:

i. 对非以上两种情况的未定型 $(0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0)$, 将其变为以上两种情况。其中, 对于 $\infty - \infty$ 型, 可以采用的方法有

(a) (有分母时) 通分;

(b) (有无理数时) 有理化;

(c) 倒代换。

ii. 优先应用等价代换、四则运算、变量代换以及恒等变换化简后再应用洛必达法则;

iii. 注意要求 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 的存在性;

iv. 洛必达法则是充分非必要的;

v. 已知极限 (连续、可导) 求参数时, 慎用洛必达法则。

vii. 海因定理

定理 1.3.11 海因定理

若函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$ 。

注意: 对数列, 必须先应用海因定理才能使用洛必达法则。

viii. 关于极限的命题

极限命题 1

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 均存在且相等。

常用于

• 分段点处求极限;

• $x \rightarrow x_0$ 而极限式中含 $\frac{1}{x-x_0}$; 此时, 有

$$x \rightarrow x_0^+ \quad \frac{1}{x-x_0} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow x_0^- \quad \frac{1}{x-x_0} \rightarrow -\infty$$

**极限命题 2**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$$

极限命题 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

极限命题 4

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 成立, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 也成立。

极限命题 4 推论

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ 成立, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 也成立。

极限命题 5

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv l \neq 0$, 则

- i. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;

常用于已知极限求参数。

IV. 连续与间断

i. 连续的概念

连续

定义 1.4.1 连续

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义, 若 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在, 且等于 x_0 处函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续。

定义 1.4.2 连续

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义, 若 $x \rightarrow x_0$ 时, 若自变量的变化量 Δx (初值为 x_0) 趋近于 0 时, 相应函数的变化量 Δy 也趋近于 0, 也即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

或者

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续。

事实上, 以上的两个定义完全等价。



左右连续

定义 1.4.3 左、右连续的定义

设函数 $y = f(x)$ ，若 $\lim_{x \rightarrow x_0^{+(-)}} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点处左（右）连续。

左右连续与连续之间的关系

定理 1.4.1

$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续

也即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

常用于讨论分段函数的分界点处的连续性。

ii. 连续函数的运算性质

- 四则运算性质 - 在区间 I 连续的函数和、差、积以及（分母不为 0 时）商在区间 I 仍然连续。
- 复合函数连续性 - 由连续函数经过有限次复合而成的复合函数在其定义区间内仍是连续函数。
- 反函数连续性 - 在区间 I 连续且单调的函数的反函数，在对应的区间内仍然连续且单调。
- 初等函数连续性 - 初等函数在其定义区间内连续。

以上结论是可显然可易证的。

iii. 闭区间上函数的性质

定理 1.4.2 最值定理

若 $f(x) \in C[a, b]$ ，则在 $[a, b]$ 上必然存在最大值 M 和最小值 m 。

定理 1.4.3 介值定理

若 $f(x) \in C[a, b]$ ，且其最大值与最小值分别为 M, m ，则对于任意介于 m 和 M 的 c ，都存在至少一个 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = c$ 。

注意：

- 对连续函数，函数值的平均值还是函数值。
- 常见的平均值：

— 算数平均值

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}$$



– 几何平均值

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f(x_i)}, \quad (f(x_i) \geq 0)$$

– 加权平均值

$$\frac{\sum_{i=1}^n k_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n k_i}, \quad k_i > 0$$

或者

$$\sum_{i=1}^n k_i f(x_i), \quad k_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n k_i = 1$$

定义 1.4.4 零点定理

若 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$ ，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$ ，也即 ξ 为函数的一个零点。

注意：

- i. 可将其应用于证明方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上至少有一根。
- ii. 零点定理的变形 - 若 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(a)f(b) \leq 0$ ，则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = 0$ ，也即 ξ 为函数的一个零点。

iv. 函数连续的常见命题

连续命题 1

$f(x)$ 在区间 I 上连续 $\Rightarrow |f(x)|$ 在区间 I 上连续。

连续命题 2

$f(x), g(x)$ 在区间 I 上连续 $\Rightarrow \max(f, g), \min(f, g)$ 在 I 上连续。

v. 间断点及其分类

定义

定义 1.4.5 间断点

设函数 $f(x)$

- 在 $x = a$ 的一去心邻域内有定义；
- 在 $x = a$ 处不连续，

则称 $x = a$ 为一个间断点。

注意，

- 定义区间的端点；
- 孤立点

一般不是间断点。



间断点的分类

设 $x = a$ 为 $f(x)$ 的一间断点,

i. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 均存在, 则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的一个第一类间断点, 其还能且必须要分为

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 时 - 可去间断点;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 时 - 跳跃间断点;

ii. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 中有至少一个不存在, 则称其为第二类间断点。

可能存在间断点的地方:

- 初等函数的无定义点;
- 分段函数的分段点。

第二章

一元函数的微分学

I. 导数

i. 导数的概念

定义 2.1.1 导数

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的一邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx ，因变量 y 相应地有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ，若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 点处的导数，也称微商，记作

$$f'(x) \text{ 或 } y'|_{x=x_0} \text{ 或 } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

称函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导。若上述极限不存在，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导。

导数定义的等价变形

导数定义可以等价变形为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

前者适合用于求导函数。

注意：

- 定义式中分子和分母的增量必须相对应，如

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \neq f'(x)$$

- 在定义式中，分子中两项应当“一动一静”，否则无法推出可导性。注意，

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

\Leftarrow 反例： $f(x) = |x|$ ， $x_0 = 0$ ；

- 若已知 $f(x)$ 在一点 x_0 可导，则可能可以利用导数定义。

定义 2.1.2 左、右导数

若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv f'_-(x_0)$$



则称 $f(x)$ 在 x_0 处左可导, $f'_-(x_0)$ 称为其左导数; 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \triangleq f'_+(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导, $f'_+(x_0)$ 称为其右导数;

函数在区间上的可导性

- 若对 $\forall x \in (a, b)$ 有 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导;
- 若对 $\forall x \in (a, b)$ 有 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且其在 a 点右可导, 在 b 点左可导, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导。则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导;

ii. 函数可导的条件

定理 2.1.1 函数可导的必要条件

可导必连续。

\Leftarrow 反例:

- $f(x) = |x|, x_0 = 0$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0$ 此时其左右导数均无穷大。

定理 2.1.2 函数可导的充要条件

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在且相等。

其常用于:

- 已知可导性求参数;
- (后者) 分段函数分段点的可导性。

iii. 导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处导数 $f'(x_0)$ 存在, 则在几何上, $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率, 即

- 切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$;
- 法线方程 $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$;

注意:

- 求切法线的步骤:
 - 求切点坐标;
 - 求斜率;



iii. 写方程。

• 可用于处理

- 显函数 $y = f(x)$;
- 隐函数 $F(x, y) = 0$;
- 参数方程、极坐标方程, 极坐标时可以代 r 入 θ 。

iv. 导数的运算

以下是一些基本初等函数的导数公式:

$$\begin{array}{ll}
 (c)' = 0 & (x^a)' = ax^{a-1} \\
 (\sin x)' = \cos x & (\cos x)' = -\sin x \\
 (\tan x)' = \sec^2 x & (\cot x)' = -\csc^2 x \\
 (\sec x)' = \tan x \sec x & (\csc x)' = -\cot x \csc x \\
 (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\
 (a^x)' = a^x \ln a & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}
 \end{array}$$

注意到对于三角函数, 带有“正”字的正弦、正切、正割、反正弦、反正切的导数都不包含负号, 而带有“余”字的余弦、余切、余割、反余弦、反余切的导数都包含负号。

导数的四则运算法则

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x 点可导, 则

- i. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
- ii. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;
- iii. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, 其中要求 $g(x) \neq 0$;

注意, 若 $f(x)$ 可导但是 $g(x)$ 不可导于 $x = x_0$, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也不可导于 $x = x_0$ 。

可以将和、差、积的公式推广至有限多个。对乘法, 有

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^n \left(f_i'(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j(x)\right)$$

行列式函数求导

行列式函数求导可以按行或按列求导。



如对二阶行列式函数, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})' \\ &= a_{11}a_{22}' + a_{11}'a_{22} - a_{12}a_{21}' - a_{12}'a_{21} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

复合函数求导

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 若 $\varphi(x)$ 在 x 处可导, 且 $f(u)$ 在对应的 u 处可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 处可导, 且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

对应地, 有

$$dy = f'(u)du = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

隐函数求导数

设 $y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \quad \frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right)$$

常见初等函数的 n 阶导数公式

- i. $y = e^x \Rightarrow y^{(n)} = e^x$;
- ii. $y = a^x (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$;
- iii. $y = \sin x \Rightarrow y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$;
- iv. $y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$;
- v. $(\frac{1}{x+a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
- vi. $y = \ln(x+a) \Rightarrow y^{(n)} = (\frac{1}{x+a})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+a)^n}$

II. 微分

i. 微分的概念

定义 2.2.1 微分



设函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有增量 Δx 时, 若函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表为 $\Delta y = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 其中 $A(x_0)$ 与 Δx 无关, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微, Δy 中的主要线性部分 (也称线性主部) $A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分, 记为

$$dy|_{x=x_0} \text{ 或 } df(x)|_{x=x_0}$$

ii. 可微与导数的关系

定理 2.2.1 可微与导数的关系

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $dx|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$

一般地, $y = f(x)$ 则有 $dy = f'(x)dx$, 故导数 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 也称微商, 即微分之商。

iii. 微分公式与法则

- $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$;
- $d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$;
- $g(x) \neq 0$ 时, $d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

III. 微分中值定理

i. 罗尔定理

定理 2.3.1 罗尔定理

若函数满足

- 在闭区间 $[a, b]$ 连续;
- 在开区间 (a, b) 可导;
- $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

注意:

- 常用于证明形如 $f(x) = g(x)$ 的方程在一开区间上有根;
- 难点:
 - 构造区间;



– 构造辅助函数，其中 $F(x)$ 一般为 $f(x) - g(x)$ 的原函数，或 $f(x) - g(x)$ 的解。

构造辅助函数的方法

- i. 将等式化为方程；
- ii. 变形，直到能够积分为止；具体而言，可以
 - 同乘同除一因式；
 - 添加能正负相消的两项。
- iii. 取不定积分；
- iv. 整理，直到满足其在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 上可导为止

注意，以上方法在草稿纸上，不注重严谨性。

不难发现，

- $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0 \Rightarrow F(x) = f(x)e^{-g(x)}$;
- $f(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = f(x)e^x$;
- $f(x) - f'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = f(x)e^{-x}$;
- $f(x) + \lambda f'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = f(x)e^{\lambda x}$;

ii. 拉格朗日中值定理

定理 2.3.2 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足

- i. 在 $[a, b]$ 上连续；
- ii. 在 (a, b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a)$;

注意：

- i. 证明：令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ 并且利用罗尔定理；
- ii. 可证方程在开区间 (a, b) 上有根；
- iii. 可证不等式；
- iv. 出现一函数增量 \Rightarrow 利用拉格朗日中值定理；
- v. 联系 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的桥梁；
- vi. 与割线有关。

推论 2.3.1 拉格朗日中值定理推论

- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $f'(x) \equiv 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内为常数；
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $f'(x) \equiv k$ ，则在 (a, b) 上 $f(x) = kx + c$ ，其中 c 为常数。



IV. 柯西中值定理

定理 2.4.1 柯西中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

- i. 在闭区间 $[a, b]$ 上皆连续;
- ii. 在开区间 (a, b) 内皆可导;
- iii. 且 $g'(x) \neq 0$;

则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (a < \xi < b)$ 。

注意:

- i. 证明: 令 $F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x) - f(x)$, 利用罗尔定理可证;
- ii. 可证方程有根;
- iii. 出现两个函数增量 \Rightarrow 使用柯西中值定理证明;
- iv. 若要求两个不同的中值, 则寻求一特殊点 c 将 a, b 分为两子区间, 并分别运用中值定理, 如罗尔定理。

V. 泰勒中值定理

定理 2.5.1 带拉格朗日余项的泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的一邻域 $U_\delta(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数, 则对 $x \in U_\delta$, 有

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

其中, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, ξ 介于 x 与 x_0 , $R_n(x)$ 称为拉格朗日余项。

定理 2.5.2 带皮亚诺余项的泰勒定理

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 n 阶导数, 则

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$, $x \rightarrow x_0$ 称为皮亚诺余项。

以下是一些常用函数的带皮亚诺余项的马克劳林展开式。

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;



- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(2n) ;$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) ;$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) ;$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) ;$
- $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n);$
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3);$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n), \text{ 其中 } C_\alpha^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^n x^i + o(x^n) ;$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + o(x^n);$

注意，对于泰勒公式，

- i. (a) 可证不等式；
 (b) 可证方程有根；
 (c) 可求等价函数；
 (d) 可求极限；
 (e) 可求高阶导数值；
 (f) 可近似计算。
- ii. 在不等式证明、方程有根题目中应用拉格朗日余项，否则应用皮亚诺余项。
- iii. 题目出现高阶（至少 2 阶）导数 \Rightarrow 可能应用泰勒中值定理。
- iv. 一般在导数已知的点展开。

求高阶导数值时，

- i. 求高阶导函数并代入 $x = x_0$ （不推荐）；
- ii. 泰勒公式；
- iii. **奇偶性**。



VI. 导数应用

i. 函数单调判定定理

定理 2.6.1 函数单调判定定理

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, 若恒有 $f'(x) > 0 (< 0)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增 (递减); 若恒有 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则其在 (a, b) 内单调不减 (不减)。

注意,

- 此为充分不必要条件;
- 成立条件: 要求一区间, 而非一点。反例:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- 可证不等式。

VII. 极值

i. 定义

定义 2.7.1 极值

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, $x_0 \in (a, b)$, 则

- 若 x_0 存在一邻域 U , 使得对 U 内任一点 $x \neq x_0$, 都有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值, x_0 为 $f(x)$ 一个极大值点;
- 若 x_0 存在一邻域 U , 使得对 U 内任一点 $x \neq x_0$, 都有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极小值, x_0 为 $f(x)$ 一个极小值点;

函数的极大值和极小值统称极值。极大值点与极小值点统称极值点。

ii. 极值的必要条件

- 若 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 为一个驻点;
- 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 而 $f(x_0)$ 为极值, 则 $f'(x_0) = 0$;
- 极值点 \nleftrightarrow 驻点, 如 $f(x) = |x|, x = 0$;
- 可能的极值点:
 - $f'(x) = 0$ 处;
 - $f'(x)$ 不存在处。



iii. 极值的充分条件

定理 2.7.1 极值第一充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内可导, $f'(x_0)$ 不存在或等于 0, 则

- i. 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点 x 处有 $f'(x) > 0$, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点 x 处有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值, x_0 为极大值点;
- ii. 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点 x 处有 $f'(x) < 0$, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点 x 处有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值, x_0 为极小值点;
- iii. 若 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内任一点与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任一点处导数同号, 则 $f(x_0)$ 不为极值, x_0 不为极值点。

定理 2.7.2 极值第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

- 当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值, x_0 为极大值点;
- 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值, x_0 为极小值点。

VIII. 最大值、最小值问题

极值与最值的区别有

- i. 前者局部, 后者整体;
- ii. 最值可为区间端点, 极值不可以;
- iii. 区间内部最值必为极值。

最值可用于证明不等式。

应用问题的最值求法的步骤如下。

- i. 设出合适的自变量;
- ii. 表示出目标函数;
- iii. 求目标函数的最值。

i. 凹向与拐点

定义 2.8.1 凹凸性

设 $f(x)$ 在区间 I 连续, 若对任意两点 $x_1 \neq x_2$, 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > (<) \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸 (凹) 的。



几何上, 若曲线 $y = f(x)$ 上任意两点割线在曲线下 (上), 则 $y = f(x)$ 是凸 (凹) 的。
若 $f(x)$ 有切线, 而每一点的切线都在曲线之上 (下), 则称 $y = f(x)$ 是凸 (凹) 的。

定理 2.8.1 凹凸判定定理

设函数在 (a, b) 上有二阶导数,

- 若对任意 $x \in (a, b)$ 都有 $f''(x) > 0$, 则称 $f(x)$ 是凹函数;
- 若对任意 $x \in (a, b)$ 都有 $f''(x) < 0$, 则称 $f(x)$ 是凸函数;

定义 2.8.2 拐点

连续曲线上凹凸的分界点是曲线的拐点。

定理 2.8.2 二阶可导点为拐点的必要条件

若 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点, 且 $f''(x_0)$ 存在, 则 $f''(x_0) = 0$ 。

定理 2.8.3 二阶可导点为拐点的充分条件

设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 在 x_0 的一去心邻域内二阶可导,

- i. 若二阶导函数在 $x = x_0$ 两侧异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为一拐点; 若同号, 则不是拐点;
- ii. 若在 x_0 处二阶导数为零, 而三阶导数不为零, 则其为拐点; 若三阶导数也为零, 则不是拐点。

注意, $f'(x)$ 的极值点事实上就是 $f(x)$ 的拐点横坐标。

求拐点的步骤:

- i. 求 x_0 使得 $f''(x_0) = 0$ 或不存在;
- ii. 判断;
- iii. 写拐点。

ii. 渐近线定义及其求法

水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 则称 $y = b$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线。
 $x \rightarrow -\infty$ 时同理。

垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线, 也叫铅直渐近线。

斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (kx + b) = 0$ ($x \rightarrow -\infty$), 则称 $y = kx + b$ 为斜渐近线。
具体而言, 若

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$,

则有斜渐近线 $y = kx + b$ 。 $x \rightarrow -\infty$ 时同理。

注意, 一侧不会同时存在水平渐近线和斜渐近线。



IX. 曲率及曲率半径

曲率为

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径 ρ 为 k 的倒数。

第三章

一元函数积分学

I. 不定积分

i. 原函数

定义 3.1.1 原函数

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $F'(x)$ 在区间 I 上成立, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数。

注意, 原函数存在 \Rightarrow 有无穷多个, 每个原函数之间仅差一个常数。

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数, 但是其不一定是初等函数, 如 $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{1}{\ln x} dx, \int e^{-x^2} dx$ 等, 称其为“积不出来”。

若 $f(x)$ 在区间 I 上存在第一类间断点或第二类中的无穷间断点, 则其在该区间内没有原函数。

注意, 函数在区间内有震荡间断点的, 可能有原函数。

ii. 不定积分

定义 3.1.2 不定积分

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则 $f(x)$ 的所有原函数 $\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$ 为 $f(x)$ 在 I 的不定积分, 记为 $\int f(x) dx$ 。

不定积分基本性质

设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 一原函数, C 为一常数, 则

- $\int F'(x) dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$;
- $[\int f(x) dx]' = f(x)$ 或 $d[\int f(x) dx] = f(x) dx$;
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$;
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$;

基本积分公式

C 为任意常数, 则

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;



- ii. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$;
- iii. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$), 特别地, $\int e^x dx = e^x + C$;
- iv. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- v. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- vi. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$;
- vii. $\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C$;
- viii. $\int \frac{\tan x}{\cos x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$;
- ix. $\int \frac{\cot x}{\sin x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C$;
- x. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$;
- xi. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

iii. 不定积分法

第一换元法 (凑微分)

设 $g(\varphi(x)) = f(x)$, 则计算的原则是

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \\ &= \int g(\varphi(x)) d\varphi(x) \\ &= F(\varphi(x)) + C \end{aligned}$$

常见的凑微分形式如下。

- i. $\int f(ax+b)(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b)$ ($a \neq 0$) ;
- ii. $\int f(ax^n+b)x^{n-1} dx = \frac{1}{na} \int f(ax^n+b) d(ax^n+b)$ ($an \neq 0$) ;
- iii. $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x)$;
- iv. $\int f(\frac{1}{x}) \frac{1}{x^2} dx = - \int f(\frac{1}{x}) d(\frac{1}{x})$;
- v. $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x})$;
- vi. $\int f(a^x) a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) d(a^x)$, 特别地, $\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x)$;
- vii. $\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$;
- viii. $\int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d(\cos x)$;
- ix. $\int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$;
- x. $\int \frac{f(\cot x)}{\sin^2 x} dx = - \int f(\cot x) d(\cot x)$;



- xi. $\int f(\sec x) \sec x \tan x dx = \int f(\sec x) d(\sec x)$;
- xii. $\int f(\csc x) \csc x \cot x dx = - \int f(\csc x) d(\csc x)$;
- xiii. $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$;
- xiv. $\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int f(\arccos x) d(\arccos x)$;
- xv. $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$;
- xvi. $\int \frac{f(\operatorname{arccot} x)}{1+x^2} dx = - \int f(\operatorname{arccot} x) d(\operatorname{arccot} x)$;
- xvii. $\int \frac{f(\arctan \frac{1}{x})}{1+x^2} dx = - \int f(\arctan \frac{1}{x}) d(\arctan \frac{1}{x})$;
- xviii. $\int \frac{f[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int f[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})] d(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))$;
- xix. $\int \frac{f[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \int f[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})] d(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))$;
- xx. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad (f(x) \neq 0)$.

第二换元法

设 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数且单调, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 若

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = G(t) + C$$

则有

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{令 } x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = G(t) + C = G[\varphi^{-1}(x)] + C$$

其中 $t = \varphi^{-1}(x)$ 为 $x = \varphi(t)$ 的反函数。

第二换元法多用于根式的被积函数, 通过换元法去根式, 具体而言, 可以分为两类。

- i. 被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 或由 e^x 构成的代数式的根式, 则令 $\sqrt[n]{g(x)} = t$, 使得 $x = \varphi(t)$ 中不再含有根式, 此时做变量代换 $x = \varphi(t)$ 即可。
- ii. 被积函数含有 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ ($A \neq 0$) 时, 先根据 A 的符号将其整理为 $\sqrt{A[(x-x_0)^2 \pm l^2]}$ 或 $\sqrt{-A[l^2 - (x-x_0)^2]}$, 然后做三角替换。
 - (a) 根式形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时, 做 $x = a \sin t$, 此时 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
 - (b) 根式形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时, 做 $x = a \sec t$, 此时 $t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
 - (c) 根式形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时, 做 $x = a \tan t$, 此时 $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。

分部积分法

对 $\int uv' dx$, 有

$$\int uv' dx = \int u dv = uv - \int v du$$

注意,

- 被积函数为两类函数乘积;
- 凑微分的优先性: 指数 > 三角函数 > 幂函数。

注意, 不定积分结果中一定包含常数 C , 即使在计算过程中积分号下内容相消干净。



iv. 特殊类型的不定积分

有理分式的不定积分

定理 3.1.1

任何实系数多项式在实数域内均可分解为一次因式和二次因式的乘积。

定理 3.1.2

设 $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 是有理真分式，若在实数域内分母 $Q_n(x)$ 可因式分解为

$$Q_n(x) = (x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta$$

则有

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(x-a)^i} + \sum_{i=1}^{\beta} \frac{C_i x + D_i}{(x^2+px+q)^i}$$

其中 A_i, B_i, C_i, D_i 等系数都是实数。

具体而言，其步骤为

- i. 将假分式分为多项式和真分式；
- ii. 将真分式分母整理至最简；
- iii. 裂项，分别积分。

求待定系数时，去分母，并注意

- 多项式相等条件：同次数的系数相等；
- 待定系数的个数为分母次数。

分母次数大于 4 的时候，一般不用裂项法，而是寻求特殊方法。

待定系数时可以代入特殊值。

三角有理函数的不定积分

三角有理函数指由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 进行有限次四则运算得到的函数。

三角有理函数的不定积分一般方法

利用万能代换，即 $\tan \frac{x}{2} = t$ ，此时 $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$ ， $\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ ， $x = 2 \arctan t$ ， $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ 。

注意，应用万能代换时， x 的次数不应当超过一次，形如

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$$

特殊三角有理函数的积分



- 对

$$I = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x} dx$$

可以使用待定系数法，令

$$a \sin x + b \cos x = A(c \sin x + d \cos x) + B(c \sin x + d \cos x)'$$

其中 A, B 是待定系数，将其解出并代入原式，得

$$I = Ax + B \ln |c \sin x + d \cos x| + C$$

- - 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ，令 $\cos x = t$ 并换元；
 - 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ，令 $\sin x = t$ 并换元；
 - 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ ，令 $\tan x = t$ 并换元；
 - 针对上一条，若 R 形如

$$\int \sin^{2m} x + \cos^{2n} x dx$$

其中 $m, n \in N$ ，则应使用二倍角公式降幂。

II. 定积分

i. 定积分概念

定义 3.2.1

将 $[a, b]$ 任意地划分为 n 个小区间 $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ ，细度 $d = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ ， ξ_i 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 任意一点；则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

若上述极限存在。若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上确有定积分，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积。

定理 3.2.1 连续必可积

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积。

定理 3.2.2

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界，且在 $[a, b]$ 中仅有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积。

定理 3.2.3 可积必有界

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，则其在 $[a, b]$ 有界。

定理 3.2.4 定积分值的变量符号无关性

定积分的值与积分变量的符号无关，即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$



利用定积分定义求极限

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

具体而言，其步骤为

- 令 Δx_i 为 $\frac{1}{n}$ 或 $\frac{k}{n}$;
- 取 ξ_i 的位置，如
 - ξ_i 取右端点: $a + \frac{i}{n}(b-a)$;
 - ξ_i 取左端点: $a + \frac{i-1}{n}(b-a)$;
 - ξ_i 取中点: $a + \frac{2i-1}{2n}(b-a)$;
 - ξ_i 取三等分点: $a + \frac{3i-2}{3n}(b-a)$;
 - ξ_i 取三分之二等分点: $a + \frac{3i-1}{3n}(b-a)$ 等等。
- 求 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_1, b = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$
- 将求得的 a, b 用于验证 Δx_i 的取法是否正确，即是否有 $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$ 。

n 项和的求和方式:

- 直接求和;
- 夹逼定理;
- 定积分定义;
- 数项级数。

定积分的几何意义

定积分的几何意义为面积的代数和。

ii. 定积分的性质

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
- $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- $\int_a^b [k_1 f_1(x)] + k_2 [f_2(x)]dx = k_1 \int_a^b f_1(x)dx + k_2 \int_a^b f_2(x)dx$;
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, 即使 $c \notin [a, b]$;
- 设 $a \leq b$, $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;
- 设 $a < b$, $m \leq f(x) \leq M$, 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$;



vii. 设 $a < b$, 则 $|\int_a^b f(x)dx| < \int_a^b |f(x)|dx$;

viii. 定积分中值定理 - 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$;

ix. 称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的广义平均值。

注意,

- 定积分值与被积函数在有限个点上的值无关;
- 定积分中值定理可证方程有根。

iii. 重要定理、公式、关系

定义 3.2.2 变上限函数

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则函数形如 $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$ 称为变上限积分函数。

定理 3.2.5 变上限积分求导定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续。

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$ 。

注意,

- 设

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$$

且 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 可导, $f(x)$ 连续, 则有

$$F'(x) = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

- 若 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个跳跃间断点, 则 $F(x)$ 在 x_0 连续, 但不可导;
- 若 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个可去间断点, 则 $F(x)$ 在 x_0 处可导, 但 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数。

定理 3.2.6 牛顿——莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的任意原函数, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

iv. 定积分求法

利用牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

分部积分法



$$\int_a^b u'v dx = \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

其利用技巧与不定积分的分部积分法完全一致。

换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若变量替换 $x = \varphi(t)$ 满足

- i. $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或者 $[\beta, \alpha]$) 上连续;
- ii. $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 且当 $\alpha < t < \beta$ 时, 有 $a \leq \varphi(t) < b$,

则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

v. 常用的定积分公式

对称区间奇偶函数的积分公式

- i. 设 $f(x)$ 是在区间 $[-a, a], (a > 0)$ 上连续的偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- ii. 设 $f(x)$ 是在区间 $[-a, a], (a > 0)$ 上连续的奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

可用于积分等式的方法:

- i. 含有中值: 积分中值定理;
- ii. 不含中值:
 - 积分区间分割;
 - 换元法

周期函数的积分公式

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是以 T 为周期的周期函数, 则对任意常数 a 、任意自然数 n 都有

- i. $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$;
- ii. $\int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$;

三角函数的积分公式



定理 3.2.7 Wallis 公式 (分部积分推导)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{(n)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(\text{int})(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

注意, 当被积函数中有自然数 n 时, 通过分部积分法构造递推公式, 并用递推公式推出结果。
三角函数的公式还有如下几个。设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 则

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$
- $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

其中, $ii)$ 利用了区间再现公式, 具体而言, 令 $t = a + b - x$ 即可。
难以计算原函数的积分称为变态积分。对变态积分的计算, 可以

- 构造递推公式;
- 积分区间再现。

III. 定积分应用

i. 平面图形求面积

直角坐标系下平面图形求面积

对于由 $x = x_1, x = x_2, y = f_1(x), y = f_2(x) (x_1 < x_2, \forall x \in [x_1, x_2] f_1(x) > f_2(x))$ 围成的图形, 有

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

对于由 $y = y_1, y = y_2, x = f_1(y), x = f_2(y) (y_1 < y_2, \forall y \in [y_1, y_2] f_1(y) > f_2(y))$ 围成的图形, 有

$$S = \int_a^b [f_1(y) - f_2(y)] dy$$

极坐标下的平面图形求面积

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

需要记住的平面曲线:



- 心型线 $r = a(1 + \cos \theta)$;
- 摆线 (旋轮线);
- 星型线;
- 双扭线;
- 阿基米德螺线 $r = a\theta$;
- 对数螺线;
- 三叶玫瑰线 $r = \sin(3\theta), (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$;

ii. 旋转体求体积

绕 x 轴旋转时, 有 $dV_x = \pi y^2 dx$, 则体积为

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

是为薄片法。

绕 y 轴旋转时, 有 $dV_y = 2\pi xy dx$, 则体积为

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

是为柱壳法。

iii. 平均值

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的平均值为

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$