离散数学下

关系 Relations

关系及其性质

1. 定义：
   - 二元关系：集合A与B的二元关系R是$A \times B$（笛卡尔积）的一个子集；（满足某规律的有序对的全体）；
   - n元关系：集合$A_1, A_2 \ldots, A_n$的n元关系是其笛卡尔积$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$的一个子集；
   - 关系本质上是n元组的集合；
   - 记号表示：
     - 从A集合到B集合的关系R写作$R : A \times B$者$R : A, B$；
     - aRb表示$(a, b) \in R$，读作a相关于b；
   - 补关系（Complementary Relations）：

$$\not R :\equiv \{(a, b) | (a, b) \notin R\} = (A \times B) - R$$

   - 逆关系（Inverse Relations）：

$$R^{-1} :\equiv \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

2. 函数（functions）：
   $f:A \to B$是$A \times B$的关系的一种特殊情况；
3. 单一集合的关系：
   集合A与A的二元关系R是$A^2=A\times A$的一个子集，称为集合A的关系；
   - 同等关系（Identity Relations）：$I_A=\{(a,a)|a\in A\}$
   - 关系计数：
     - 有着n个元素的集合A的关系个数：2^{n^2}；
     - 从A到A的函数个数：n^n（增长更快）；
4. **关系的性质（重要）：**
   - 自反（Reflexivity）：$\forall a\in A, aRa$
     - 反自反（Irreflexivity）：R是反自反当且仅当$\not R$是自反的；
     - 反自反与“不自反”是不必要不充分的关系；
   - 对称（Symmetry）：$R=R^{-1}$
     - 反对称（Antisymmetry）：$\forall a\neq b, (a,b)\in R\to(b,a)\notin R$
       - 性质：$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$
     - 非对称（Asymmetry）：$(a,b)\in R\to(b,a)\notin R$
     - 非对称的关系都是反自反的；
   - 传递（Transitivity）：
     - $\forall a,b,c,(a,b)\in R\land(b,c)\in R\to(a,c)\in R$
     - 例：$R=\{(3,4)\}$是传递的；
     - 非传递（Intransitivity）：不传递时即为非传递；
   - 自反关系计数：
     - 集合A中有n个元素，有$2^{n(n-1)}$个自反关系
5. 联结关系（Combining Relations）：
   - 交并补差
   - 组合关系（Composition）：$S\circ R$，读作R和S的组合；
   - 关系的幂（Power of Relations）：$R^1=R, R^{n+1}=R^n\circ R$
     - 定理：定义在集合A上的关系R是传递的当且仅当$\forall n, R^n\subseteq R$

n元关系

1. 关系数据库（Relational Databases）：即为n元关系R
   - 主键（primary key）：当R中的某一个域有这样的一个n元组能决定这个元组，即元组间在这个域上的值是不相等的，即称其为主键；
   - 组合键（Composite Key）：主键的笛卡尔积；
   - 数据库的内模式（intension）与外模式（extension）；
   - 操作符：
     - 选择操作符：s_c，选择满足某条件的关系中的元组；

    - 投射操作符：$P_{\{i_k\}}$
    - 联结操作符：$J(R_1, R_2)$
2. 数据挖掘关联规则

关系表示

1. 0-1矩阵表示：（矩阵运算支持关系运算）
    - $S \circ R = M_R \odot M_S$，其余略
    - 用矩阵M_R表示$R : A \times B$，其中$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, b_j) \in R$
        - 自反：要求主对角线全为1；
        - 反自反：要求主对角线全为0；
        - 对称：要求矩阵是对称矩阵；
        - 反对称：值为1的元素的对称位置的元素值必须是0；
        - 传递：矩阵做布尔幂运算后与原矩阵一致；
2. 有向图表示：
    - 自反：所有点都有自接环；
    - 反自反：所有点都没有自接环；
    - 对称：两点之间若有边，那一定是双向的；
    - 反对称：两点之间若有边，那一定是单项的；
    - 注意：若只有两两成对的点之间有联通，点对之间无联通，此时仍是传递；
3. 总结：

关系特征、关系图、关系矩阵

关系特征	关系图特征	关系矩阵特征
自反	每一结点处有一环	对角线元素均为1
反自反	每一结点处有无环	对角线元素均为0
对称	两结点间有相反的两边同时出现	矩阵为对称矩阵
反对称	两结点间没有相反的边成对出现	当分量$C_{ij}=1(i\neq j)$时$C_{ji}=0$
传递	如果结点v_1,v_2间有边，v_2,v_3间有边，则v_1,v_3间必有边。	$R^n \subseteq R$

闭包关系 Closures of Relations

1. 定义：关系R的P闭包就是包含R且具有P中一切性质的关系中的最小的那一个；（对“最小”的理解：关系矩阵中的1的个数最少）
2. 分类：
   - 自反闭包（reflexive closure）：称$R\cup I_A$是R的自反闭包，记为$r(R)$；
     - 定理：$r(R)$是包含R，具有自反性的最小关系；
     - 推论：R是自反闭包当且仅当R是自反的
   - 对称闭包（symmetric closure）：称$R\cup R^{-1}$是R的对称闭包，记为$s(R)$；
     - 定理：R是A上的二元关系，则$R\cup R^{-1}$是对称的且包含R的最小关系；
     - 推论：当且仅当R是对称闭包时，R具有对称性；
   - 传递闭包：记为$t(R)$或R^*，求法见下：
     - 图中的路径（二元关系）：从a到b的长度为n的路径是n个序偶的序列$(a,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_{n-1},b)$
       - 空序列表示长度为0的从a到a的路径；
       - 从a到a的长度$\geq$ 1的路径称为环（circuit/cycle）

    - 若R^n存在从a到a的长度为n的路径，记为$(a,b) \in R^n$
  - 定理一：R的传递闭包为$R^\infty = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup ... = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$；
  - 定理二：对于集合$A, A = |n|$，R为A的一个关系，则$R^\infty = \cup_{i=1}^{n} R^i$，求解的时间复杂度为$O(n^4)$；
  - 求传递闭包的算法：**Warshall 算法（重要）：**
    - 定义：
      - 内部节点（interior vertices）：从a到b的路径上经过的中间点（不含a, b）；
      - W_k：矩阵中为1的点W_{ij}^k表示从第i个点（v_i）到第j个点（v_j）所经过的点都是集合$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$中的点；W_0即原始的关系矩阵，所有的边都没有内部节点；$W_n = R^*$；
  - 求法：（从递推过程来看，本算法是找能进入v_k的点与v_k出去能到达的点，再把这些点组合成内部节点为v_k的路径并添加进矩阵里；从整体过程来看就是逐个点延路径拓展并取并集）
    - a. 照抄上一个矩阵（W_{k-1}）的1；
    - b. 找W_{k-1}的第k列找到值为1的元素的行数，与W_{k-1}的第k行找到值为1的元素的列数逐一组合得到W_k中新的坐标为1的点并填入；
  - 时间复杂度：$O(n^3)$；
- 反自反性质不能进行闭包运算；

等价关系 Equivalence Relations

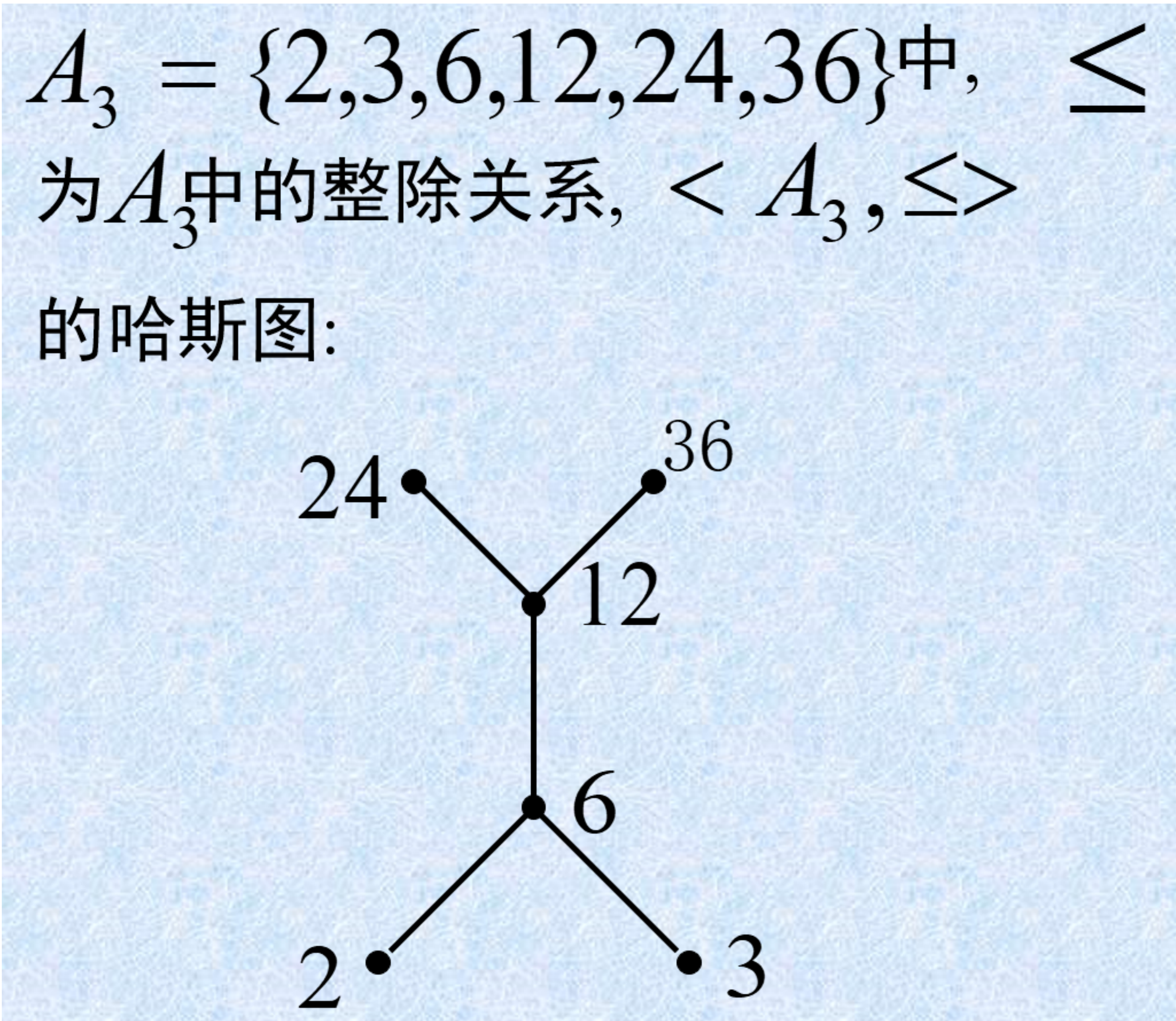
1. 定义：A上的二元关系R，如果R自反、对称、传递，则R为等价关系，其中$(a,b) \in R$，称为a与b等价；
2. 集合的划分（partition）：（切蛋糕）
   - 定义：把集合A划分为若干子集A_i满足一下条件时，集合$P_r(A) = \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$称为$A$的划分；
     - $i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$；
     - A中的任意元素都能有有对应的一个子集；
     - 所有子集的并为集合A；
   - 定理1：集合的每个划分内的元素都等价，即若$aRb \Leftrightarrow a, b$属于同一个划分块（block），则R为P决定的一个定义在A上的等价关系；
   - 引理1：$a \in A, b \in A$，R为A的等价关系，则$aRb \Leftrightarrow R(a) = R(b)$
   - 定理2：R是定义在A上的等价关系，P是所有不同的关系集合$R(A)$的集合，则P是A的一个划分，R是由P决定的等价关系；
3. 等价类（euqivalence classes）：
   - 定义：R为等价关系，a的等价类定义为$R(a)$或$[a]_R :\equiv \{b | aRb\}$，即等价于$a$的所有元素的集合，其中每个元素都被叫做$[a]_R$的代表元；关系$R$可以看做是一个函数$f$；

- 划分P包含的所有R的等价类$\{[a_1],[a_2],[a_3],...,[a_n]\}$组成的集合称为商集（quotient set）（或 the partition of A induced by R 或 A modulo R），记为A/R（用有向图表示，每个等价类记为一个连通点集）；
- 找等价类的方法：找不属于A的某一等价类的元素b计算$R(b)$，重复直至A中所有元素都有自己属于的等价类；
- 商集的元素个数称为R的秩；

4. 等价关系的运算：
   - 若R_1,R_2是A上的等价关系，则$R_1 \cap R_2$也是等价关系，称为两个分划的积，使划分更细；
   - 若R_1,R_2是A上的等价关系，则$R_1 \cup R_2$是相容关系（自反、对称），不一定等价；
   - 若R_1,R_2是A上的等价关系，则$(R_1 \cup R_2)^*$也是A上的等价关系，称为两个分划的和，使分划更粗；
   - 平凡分划：集合A的最粗或最细的分划
   - 等价关系多用关系图判断，用集合的划分研究；

偏序关系 Partial Orderings

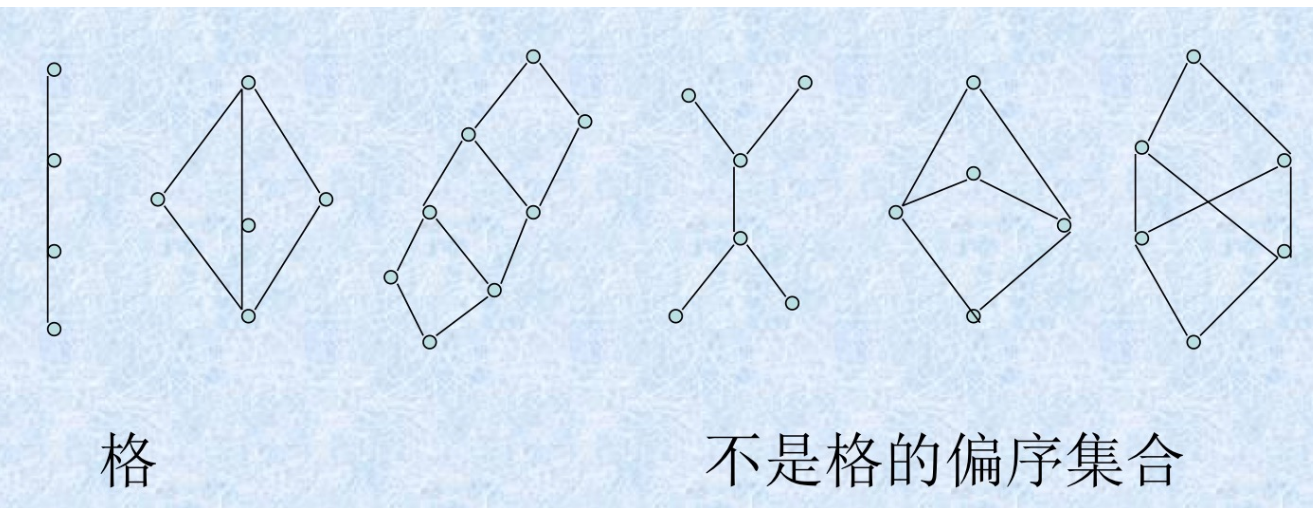
1. 偏序关系定义：当集合A上的关系R为自反、反对称、传递时，R称为偏序关系；应用：证明关系为偏序关系
2. 偏序关系集合（partially ordered set）、偏序集（poset）：集合A和关系R合称为偏序关系集合或偏序集，记为(A,R)；例：$(Z^+,|)$是偏序集；
   - 偏序集的对偶：偏序集(S,R)的对偶为(S,R^{-1})
3. 线序关系（linear order）：对于偏序关系$(A,\preceq)$
   - 可比（comparable）：$a \preceq b$或$b \preceq a$（此处的可比为抽象意义的可比，即关系上的可比，比如若$a \geq b$，则$a \preceq b$）；
   - 不可比（incomparable）：$a \preceq b, b \preceq a$都不满足；
   - 定义：如果偏序集A中每一对元素都可比，则A称为全序集合（totally ordered set）或线序集合（linearly ordered set）或链（chain），其偏序关系称为全序关系（total order）或线序关系（linear order）；例：$(Z^+,|)$不是链，如5能整除15和20，但是15和20间不能整除，不可比；
4. 良序关系（well-ordered）：若偏序集$(A,\preceq)$是全序关系且任何A的非空子集都有一个最小元素，则称$(A,\preceq)$为良序关系集合，A为良序关系；
5. 乘积偏序（product partial order）：若$(A,\preceq)$和$(B,\preceq)$为偏序集，则$(A \times B,\preceq)$为偏序集；其偏序关系$\preceq$定义为当$a \preceq a', b \preceq b'$时，$(a,b) \preceq (a',b')$，称为乘积偏序；
6. 字典序（词典顺序，Lexicographic order）：若$(A,\preceq)$和$(B,\preceq)$为偏序集，则$(A \times B,\prec)$为偏序集；其偏序关系$\prec$定义为当$a \prec a'$或$a = a', b \preceq b'$时，$(a,b) \prec (a',b')$；
   - 可拓展至笛卡尔积$A_1 \times A_2 ... \times A_n$
   - 例：help$\prec$helping；

7. 哈斯图（Hasse Diagrams，偏序关系的表达方式）（重要）：当有限集A上的一个偏序集的有向图进行以下操作：
   - 删去所有自环；
   - 删去可通过传递性推出的边；
   - 所有边的指向都向上；
   此时该图称为哈斯图；
   

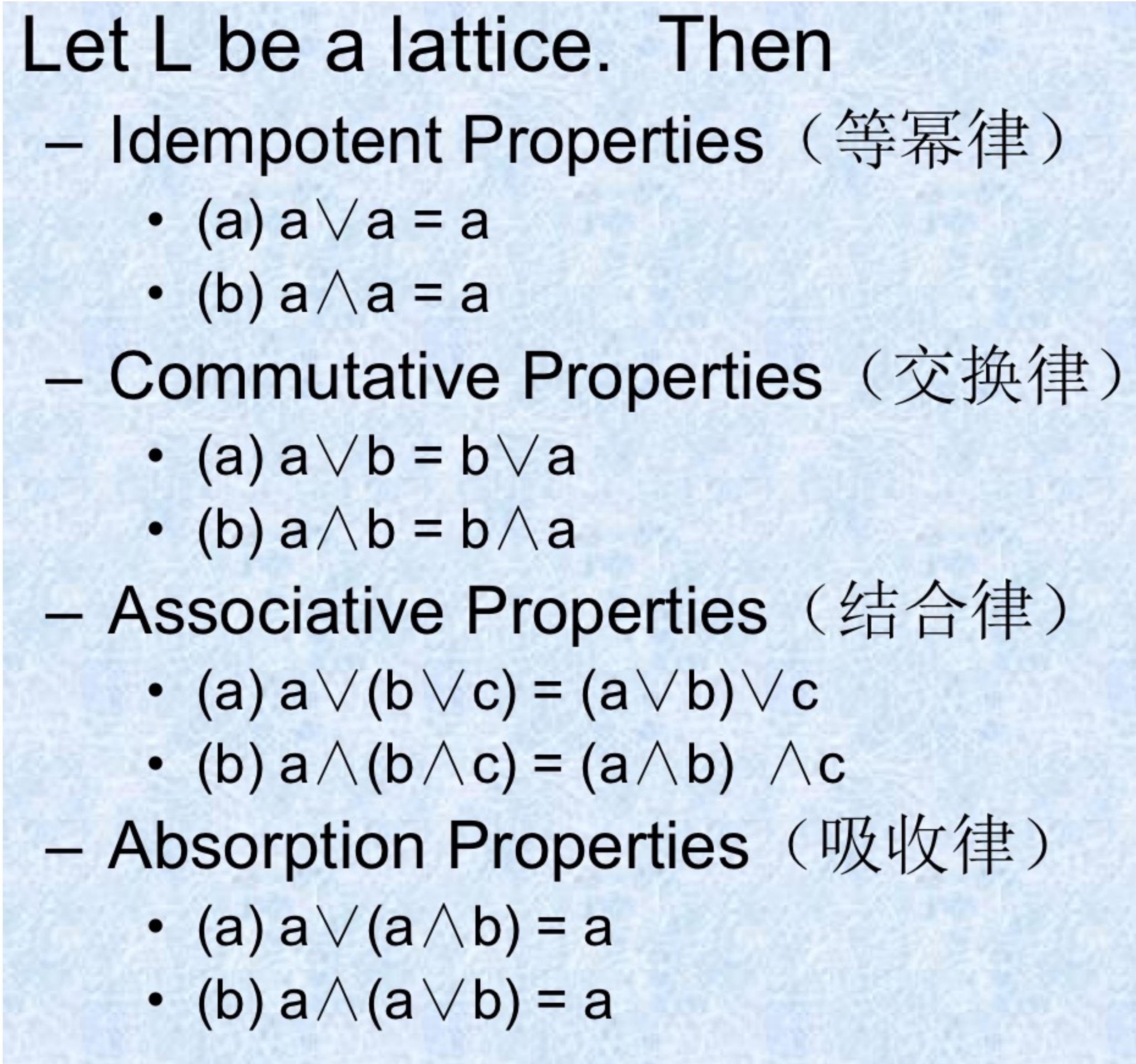
8. 覆盖关系（covering relation）：对于偏序关系$(S,\preceq)$，若$x,y\in S, x\prec y$且找不到元素z使得$x\prec z\prec y$，则称y覆盖（cover）x，(x,y)称为$(S,\preceq)$的覆盖关系（covering relation）；理解：即偏序关系对应的哈斯图的每条边；
9. 极值元素（Extremal elements）：
   - 极大元（Maximal element）：若元素$a\in A$，在A中找不到一个元素c使得$a\prec c$，则称a为偏序集中的极大元；
   - 极小元（Minimal element）：若元素$a\in A$，在A中找不到一个元素c使得$c\prec a$，则称a为偏序集中的极小元；
     - 定理1：对于有限非空偏序集$(A,\preceq)$，A中至少有一个极大元和一个极小元；

- 最大元（greatest element）：若$a \in A$有$\forall x \in A, x \preceq a$，则$a$为$A$的最大元，记为$/$，称为单位元（unit element）；
- 最小元（least element）：若$a \in A$有$\forall x \in A, a \preceq x$，则$a$为$A$的最小元，记为$0$，称为零元（zero element）；
- 没有极大元/极小元的情况：集合为无限集；

10. 拓扑排序（利用哈斯图）：对于偏序集$(A, \preceq)$
    - 排序算法：
        - 找到A的极小元；
        - 取出该极小元并对剩下的元素进行拓扑排序；
        - 重复前两步，直至集合为空；
11. 最小上界（LUB）、最大下界（GLB）**（重要）**：B为A的子集
    - 上界（upper bound）：$\forall b \in B$，有$a \in A$使得$b \preceq a$，则a称为上界；
    - 下界（lower bound）：$\forall b \in B$，有$a \in A$使得$a \preceq b$，则a称为下界；
    - 最小上界（least upper bound）：上界中最小的那个上界；应用：证明：
    - 最大下界（greatest lower bound）：下界中最大的那个下界；应用：证明：
    - 注意不可比的情况；
    - 定理：对于偏序集$(A, \preceq)$，若A是非空有限集，则A最少有一个极大元与极小元，最多一个最大元与最小元；A的子集B最多有一个LUB与GLB；
12. 格（Lattices，特殊的一种偏序集）：格是一个任意有着两个元素的子集都有一个LUB和GLB的偏序集；
    - 表示：$a \vee b$表示$\{a, b\}$的LUB，称为a, b的并（join）；$a \wedge b$表示$\{a, b\}$的GLB，称为a, b的交（meet）；

    - 例：$L = P(S)$（$P(S)$为S的幂集，即S的所有子集的集合），其偏序关系为$\subseteq$，则L为格；
    - 格的笛卡尔积能构建新的格；
13. 子格（Sublattices）：设格$(L, \preceq)$，若L的非空子集S的任意有着两个元素的子集都有一个LUB和GLB，则S称为L的子格；
    - 性质：
        - $a \vee b$为a, b的最小上界，$a \wedge b$为其最大下界；

    - L为格，$\forall a,b\in L$，有$a\vee b=b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\leq b$
    - 运算律：
      

    - 特殊类型的格：若格L有最大元/与最小元0，则称其为有界（bounded）格；
      - 若$L=\{a_1,a_2,...,a_n\}$为有限格，则其有界，最大元为$a_1\vee a_2...\vee a_n$，最小元为$a_1\wedge a_2...\wedge a_n$；
14. 分配格（distributive lattice）：若$\forall a,b,c\in L$，a,b,c满足分配律，则称格L可分配，反之称为不可分配；
15. 补元（complement）：对于有界格L，$a\in L$，定义a的补元为a'使得$a\wedge a'=0,a\vee a'=/$
    - 对于有界可分配格L若存在元素的补元，则其唯一；
16. 有补格（complemented）：若格L有界且每个L中的元素都有补元，则称L为有补格；

群论 Semigroup and Group

数学结构 mathematical structures

1. 数学结构：数据对象+对应的运算，例：[sets,$\cup$, $\cap$, $-$]
2. 封闭（closure）：数据对象进行操作后仍属于同一类数据，例：[5$\times$5矩阵，+，*，T]；
3. 二元运算（Binary Operation）：结合两个数据对象的操作；
   - 一元运算（Unary Operation）：只用一个数据对象的操作；
4. 二元运算律：
   - 交换律（Commutative）：$x\square y=y\square x$则$\square$是可交换的；
   - 结合律（Associative）：$(x\square y)\square z=x\square(y\square z)$；
   - 分配率（Distributive）：$x\square(y\nabla z)=(x\square y)\nabla(x\square z)$
   - 德摩根定律（De Morgan's Laws）：$(x\square y)^*=x^*\nabla y^*$，$(x\nabla y)^*=x^*\square y^*$
   - 单位元（Identity for an operation）：$x\square e=e\square x=x$；具有唯一性；
   - 逆元（Inverse）：$x\square y=y\square x=e$；
     - 若$\square$满足结合律，x有一个逆元y，则y唯一；

二元运算 Binary Operations Revisited

1. 定义：集合A上的二元运算是所有定义的函数$f:A\times A\rightarrow A$；
   - 记号：$a*b$表示序偶(a,b)的映射的元素；
   - A在操作$*$下封闭（closed），即$a*b\in A$；
   - 若A为有限集，我们能用运算表（table）来定义一个二元运算；
   - n个元素能定义n^{n^2}个二元运算；
     - 例题：定义集合A上的关系$a\leq b\Leftrightarrow a=a*b$，证明$(A,\leq)$是偏序集，且$\forall a,b\in A,GLB(a,b)=a*b$
       - 偏序集的证明：即证明$\leq$是自反、反对称且传递的
       - GLB的证明：即先证明$a*b$是(a,b)的下界，再证明任意$c\in A$都有$c\leq a*b$；
2. 性质：
   - 交换律：该二元运算的运算表以对角线对称的；
   - 结合律；
   - 等幂律（idempotent）：$a*a=a$

半群 Semigroups

1. 广群：对于代数系统$(S,*)$，若S非空且$*$对S封闭，则称$(S,*)$为广群；
2. 半群（semigroup）：
   - 定义：对于代数系统$(S,*)$，若S非空、$*$对S封闭且可结合，则称$(S,*)$或S为半群；

  - 可交换（commutative）半群：若$*$是可交换的运算符，则$(S,*)$称为可交换半群；
- 自由半群：$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$为非空集合，A^*为A中元素的所有有限序列的集合，元素$\alpha,\beta\in A^*$，运算符$\cdot$为连接操作；若$\cdot$可交换，则$(A^*,\cdot)$称为由A生成的自由半群（free semigroup generated by A）；

3. 单位元、幺元（identity）：元素$e\in(S,*)$若满足$\forall a\in(S,*),e*a=a*e=a$，则称$e$为单位元；
   - 单位元是唯一的；
4. 独异点、含幺半群（monoid）：含有单位元的半群$(S,*)$称为独异点；
   - 例：$(P(S),\cup)$和$(P(S),\cap)$都是独异点，前者的单位元为$\emptyset$，后者的单位元为全集；$S^S(f:S\rightarrow S)$也为独异点；
5. 复合（composition）：R是从集合A到B的关系，S是从B到C上的关系。R和S的复合关系是序偶$(a,c),a\in A,c\in C$记为$S\circ R$
6. 子半群（subsemigroup）：半群$(S,*)$，集合$T\subseteq S$，若T对运算$*$封闭，则$(T,*)$称为$(S,*)$的子半群；子半群本身也是半群；
7. 子独异点（submonoid）：独异点$(S,*)$且单位元为e，非空子集$T\subseteq S$，若T对运算$*$封闭且$e\in T$，则$(T,*)$称为$(S,*)$的子独异点；子独异点本身也是独异点；
8. a的幂：设独异点$(S,*)$，则递归定义a的幂为

$$\begin{cases}a^1=a,a^n=a^{n-1}*a\quad n\geq2\\a^0=e\end{cases}$$

   ，且若m,n为非负整数，则有$a^m*a^n=a^{m+n}$
9. 同构映射（isomorphism）：$(S,*),(T,*')$为两个半群，函数$f:S\rightarrow T$。若f是从S到T的一一对应关系（单射+满射），且$\forall a,b\in S,f(a*b)=f(a)*'f(b)$，则称$f$为同构映射；
   - f^{-1}为从T到S的同构映射；
   - 同构半群：若f是从$(S,*)$到$(T,*')$的同构映射，则$(S,*),(T,*')$是同构的（isomorphic），记为$S\simeq T$
   - 证明同构：
     - 定义函数$f:S\rightarrow T$
     - 证明f是单射；
     - 证明f是满射；
     - 证明$f(a*b)=f(a)*'f(b)$
   - 例：T为所有偶数的集合，证明$(Z,+)$和$(T,+)$是同构的；
   - 同构映射共享运算表；
   - $(S,*)(T*')$为独异点，对应的单位元为e,e'，且$f:S\rightarrow T$为同构映射，则$f(e)=e'$；
10. 同态映射（homomorphism）：$(S,*),(T,*')$为两个半群，若所有定义的函数$f:S\rightarrow T$都有$\forall a,b\in S,f(a*b)=f(a)*'f(b)$,则称$f$为从$S$到$T$的同态映射；
    - 若f为满射，则称T为S的一个同态像（homomorphic image）；

- 定理：
  - $(S,*)(T*')$为独异点，对应的单位元为e,e'，且$f:S \to T$为同态映射且为满射，则$f(e)=e'$；
  - 子半群通过同态映射后仍是对应集合的子半群；
  - 如果f是从可交换的半群$(S,*)$到半群$(T,*')$的一个满射的同态映射，则$(T,*')$也是可交换的；

乘积半群与商半群 Products and Quotients of Semigroups

1. 乘积半群（product semigroup）：若$(S,*),(T,*')$为半群，则$(S \times T,*'')$为半群，$*''$定义为$(s_1,t_1)*''(s_2,t_2)=(s_1*s_2,t_1*'t_2)$；
   - 若$(S,*),(T,*')$为独异点，则$(S \times T,*'')$也为独异点，单位元为(e_S,e_T)；
2. 同余关系（congrunece relation）：若R为半群$(S,*)$上的等价关系，$aRa',bRb' \to (a*b)R(a'*b')$，则$R$称为同余关系；
3. 商半群（quotient semigroup）：R为半群$(S,*)$上的同余关系，$\odot$是从$S/R \times S/R$到S/R的关系，$a,b \in S$，则$\odot([a],[b])=[a]\odot[b]=[a*b]$，$(S/R,\odot)$为半群，其中$S/R$称为商半群或factor semigroup；

群 Groups

乘积群与商群 Products and Quotients of Groups