≪ 测度论与概率论基础 ≫ 笔记-可测空间

QingShan

2021 年 4 月 16 日

本章将简单回忆一下集合的基本运算，并讨论抽象空间中的可测集等最基本的概念。

1 集合及其运算

考虑一个任意非空集合 X，称之为**空间**。X 的子集以大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 等记之，称之为这个空间的**集合**，其中空集记为 $\varnothing$。X 的成员称为**元素**。元素 x 属于集合 A，记作 $x \in A$，元素 x 不属于集合 A，记作 $x \notin A$。空间 X 上定义的实函数

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

称为 A 的**指示函数**。集合

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \notin A\}$$

称之为集合 A 的**余**。如果

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

则说集合 A **被集合** B **包含**，或集合 B **包含**集合 A，或 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A **等于**集合 B，记为 $A = B$。

给定集合 A 和 B，集合

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A)$$

分别称为集合 A 和 B 的**并，交，差，对称差**。如果 $B \subset A$，则 $A - B$ 也称为 A 和 B 的**真差**。集合的并和交的运算满足**交换律**和**结合律**，还满足以下两个**分配律**：

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

两个集合 A 和 B 如果满足 $A \cap B = \varnothing$，则称它们为**不交的**。

对于一族集合 $\{A_t, t \in T\}$，集合

$$\bigcup_{t \in T} A_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \exists t \in T \text{ 使 } x \in A_t\}$$

称为它们的**并**；集合

$$\bigcap_{t \in T} A_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A_t, \forall t \in T\}$$

称为它们的**交**。如果对任意 $s, t \in T$，均有 $A_s \cap A_t = \varnothing$，那么称这族集合 $\{A_t, t \in T\}$ 是**两两不交的**。反应并和交运算之间关系的有下列 De-Morgan 法则：

$$\{\bigcup_{t \in T} A_t\}^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c; \quad \{\bigcap_{t \in T} A_t\}^c = \bigcup_{t \in T} A_t^c.$$

设 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是一个集合序列。如果对每个 $n = 1, 2, \cdots$，有

$$A_n \subset A_{n+1},$$

则称 A_n 为**非降的**，记为 $A_n \uparrow$，并把集合 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 叫做它的**极限**；如果对每个 $n = 1, 2, \cdots$，有

$$A_n \supset A_{n+1},$$

则称 A_n 为**非增的**，记为 $A_n \downarrow$，并把集合 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 叫做它的**极限**。非增或非降的集合序列统称为**单调序列**。因此，**单调集合序列总有极限**。

对于任意给定的一个集合序列 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$，集合序列 $\{\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k, n=1,2,\cdots\}$ 和 $\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k, n=1,2,\cdots\}$ 分别是非降和非增的，因而分别有极限

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ 和 } \limsup_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

我们将 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 分别叫做 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 的**下极限**和**上极限**。并且容易看出

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，我们将认为 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 的**极限存在**，并把

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

称为它的**极限**。

2 集合系

以空间 X 中的一些集合为元素组成的集合称为 X 上的**集合系**。换句话说，集合的集合就是集合系。集合系一般用花体字母 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \cdots$ 来表示。我们讨论集合系的原因是：为了建立测度，必须确定出一些**可测集**，而且这些可测集的全体就组成了一个集合系。下面我们将给出在抽象空间中确定可测集时所必须引进的一些特殊集合系。

π **系**：如果 X 上的非空集合系 $\mathscr{P}$ 对有限交的运算是**封闭的**，即

$$A, B \in \mathscr{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{P},$$

则称 $\mathscr{P}$ 为 π 系。

容易看出，$\mathscr{P}_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 上的 π 系。同时，$\mathbb{R}$ 中的开区间、闭区间、左闭右开区间、左开右闭区间的全体组成的集合系都是 π 系。

半环：满足以下条件的 π 系 $\mathscr{Q}$ 称为半环：对任意的 $A, B \in \mathscr{Q}$ 且 $A \supset B$，存在有限个两两不交的 $\{C_k \in \mathscr{Q}, k=1,\cdots,n\}$，使得

$$A - B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

容易看出，左开右闭区间的全体组成的集合系

$$\mathscr{Q}_{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$$

是 $\mathbb{R}$ 上的半环。

同时也可以看出，$\varnothing$ 也属于半环，因此之后经常首先在半环上定义测度。

环：如果非空集合 $\mathscr{R}$ 对**并**和**差**的运算是**封闭的**，即

$$A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B, A - B \in \mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为环。

域：满足下列条件的 π 系 $\mathscr{A}$ 称为域：

$$X \in \mathscr{A}; A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A},$$

有的文献中，也把域叫做**代数**。

关于 π 系，半环，环，域之间的关系，我们有以下命题。

命题 2.1 　半环必是 π 系；环必是半环；域必是环。

以上的 π 系，半环，环，域都是针对有限运算定义的，但对于建立测度来说，只有有限运算是不够的。因此，还必须引入一些在可列运算下的封闭的集合系。

单调系：如果对集合系 $\mathscr{M}$ 中的任何单调序列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$，则把 $\mathscr{M}$ 叫做单调系。

λ 系：集合系 $\mathscr{L}$ 称为 λ 系，如果它满足下列条件：

$$X \in \mathscr{L};$$

$$A, B \in \mathscr{L} \text{ 且 } A \supset B \Rightarrow A - B \in \mathscr{L};$$

$$A_n \in \mathscr{L} \text{ 且 } A_n \uparrow \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}.$$

σ 域：满足下列三个条件的集合系 $\mathscr{F}$ 称为 σ 域：

$$X \in \mathscr{F};$$

$$A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F};$$

$$A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{F}.$$

关于单调系，λ 系，和 σ 域之间的关系，我们有以下命题。

命题 2.2　λ 系是单调系；σ 域是 λ 系。

总结以上讨论，我们可以得到所定义的七个集合系之间由宽松到严谨的下列顺序：

$$\pi\text{系} \to \text{半环} \to \text{环} \to \text{域} \to \sigma\text{域}$$

$$\text{单调系} \to \lambda\text{系} \to \sigma\text{域}$$

这些集合的核心是 σ 域；它的成员就是我们常说的可测集。换句话说，我们最终要在 σ 域上建立测度。今后，非空集合 X 和它上面的一个 σ 域 $\mathscr{F}$ 放在一起写成的 $(X, \mathscr{F})$ 将称为**可测空间**。

关于什么时候其他的集合系能够成为 σ 域，有如下两个命题。

命题 2.3　一个既是单调系又是域的集合系必是 σ 域。

命题 2.4　一个既是 λ 系又是 π 系的集合系必是 σ 域。

3　σ 域的生成

定义 3.1　称 $\mathscr{S}$ 为由集合系 $\mathscr{E}$ **生成**的环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域），如果下列条件被满足：

（1）$\mathscr{S} \supset \mathscr{E}$;

（2）对任一环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）$\mathscr{R}$ 均有

$$\mathscr{R} \supset \mathscr{E} \Rightarrow \mathscr{R} \supset \mathscr{S}.$$

换句话说，由集合系 $\mathscr{E}$ 生成的环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）就是**包含 $\mathscr{E}$ 的最小的环**（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）。

下面命题证明了存在性。

命题 3.1　由任意集合系 $\mathscr{E}$ 生成的环，单调系，λ 系，σ 域均存在。

把由集合系 $\mathscr{E}$ 生成的环、单调系、λ 系和 σ 域分别记做 $r(\mathscr{E}), m(\mathscr{E}), l(\mathscr{E})$ 和 $\sigma(\mathscr{E})$。本节主要讨论以下三个定理。

定理 3.2　如果 $\mathscr{Q}$ 是半环，则

$$r(\mathscr{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : \{A_k \in \mathscr{Q}, k = 1, \cdots, n\} \text{ 两两不交}\}.$$

定理 3.3　如果 $\mathscr{A}$ 是域，则 $\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A})$.

推论 3.4 如果 $\mathscr{A}$ 是域，$\mathscr{M}$ 是单调系，则

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \Rightarrow \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}.$$

定理 3.5 如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系，则 $\sigma(\mathscr{P}) = l(\mathscr{P})$.

推论 3.6 如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系，$\mathscr{L}$ 是 λ 系，则

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{L} \Rightarrow \sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}.$$

由简单集合系生成的 σ 域的一个重要例子是

$$\mathscr{R}_{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \sigma(\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathscr{P}_{\mathbb{R}}).$$

文献中经常称，$\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ 叫做 $\mathbb{R}$ 上的 **Borel 集合系**，其中的集合称为 $\mathbb{R}$ 中的 **Borel 集**，以 $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$ 记由 $\mathbb{R}$ 中开集组成的集合系，则容易证明 $\mathscr{R}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathscr{O}_{\mathbb{R}})$。由此出发，可以把 Borel 集的概念一般化：对于拓扑空间 X，以 $\mathscr{O}$ 记其开集系，我们把

$$\mathscr{R} \overset{\text{def}}{=} \sigma(\mathscr{O})$$

称为 X 上的 **Borel 集合系**，其中的集合称为 X 中的 **Borel 集**，而 $(X,\mathscr{R})$ 则叫做**拓扑可测空间**。