≪ 测度论与概率论基础 ≫ 笔记-积分

QingShan

2021 年 4 月 19 日

积分是测度论中最重要的概念之一。和实变函数中的 Lebesgue 积分一样，一般测度空间上可测函数的积分也是通过典型方法定义的。因此，Lebesgue 积分的许多重要性质可以拷贝过来。概率空间中的积分就是数学期望。本节可以对初等概率论中没有，也不可能给出证明的一些求期望的公式给出严格的证明。

1 积分的定义

测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上可测函数的积分的定义是用典型方法经过三个步骤来完成的。

1.1 非负简单函数的积分

设 f 是一个非负简单函数而 $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} (a_i \geq 0)$ 是它的一个表达式。称

$$\int_X f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{1}$$

为 f 的**积分**。

其中通过 f 的不同表达式算出来的积分总是相同的。换句话说，非负简单函数积分的定义有**一意性**。下面，我们来讨论非负简单函数积分的性质。

命题 1.1 设 f, g 和 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的非负简单函数，则

(1) $\int_X I_A d\mu = \mu(A),\ \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f d\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) d\mu = a \int_X f d\mu,\ \forall a \geq 0$;

(4) $\int_X (f+g)d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu$;

(5) 如果 $f \geq g$，则 $\int_X fd\mu \geq \int_X gd\mu$;

(6) 如果 $f_n \uparrow$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \geq g$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X gd\mu$.

1.2 非负可测函数的积分

对于测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的非负可测函数 f，称

$$\int_X fd\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\int_X gd\mu : g \text{ 非负简单且 } g \leq f\} \tag{2}$$

为它的积分。非负可测函数积分的性质可归纳如下。

命题 1.2 设 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的非负可测函数。

(1) 如果 f 是非负简单函数，则由 (1) 和 (2) 式确定的 $\int_X fd\mu$ 的值相同;

(2) 如果 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是非负简单函数且 $f_n \uparrow f$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X fd\mu;$$

(3) 由 (2) 式确定的积分值为

$$\int_X fd\mu = \lim_{n\to\infty} [\sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mu(\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}) + n\mu(f \geq n)];$$

(4) $\int_X fd\mu \geq 0$;

(5) $\int_X (af)d\mu = a\int_X fd\mu,\ \forall a \geq 0$;

(6)$\int_X (f+g)d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu$;

(7) 如果 $f \geq g$，则 $\int_X fd\mu \geq \int_X gd\mu$.

性质 (3) 可简单地理解为用非负简单函数列逼近非负可测函数。

1.3 一般可测函数的积分

定义 1.1 测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数 f 如果满足

$$\min\{\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu\} < \infty,$$

则称其**积分存在**或**积分有意义**；如果满足

$$\max\{\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu\} < \infty,$$

则称它是**可积的**。在上述两种情况下，把

$$\int_X f d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

叫做 f 的**积分**或**积分值**。

根据定义，非负可测函数的积分总是存在的；而对于一般的可测函数，只有当它的积分存在时才能定义它的积分。

设 $A \in \mathscr{F}$。只要可测函数 fI_A 的积分存在或可积，我们就分别说 f 在集合 $A \in \mathscr{F}$ 上**积分存在**或**可积**，并且把

$$\int_A f d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f I_A d\mu$$

叫做 f **在集合** $A \in \mathscr{F}$ **上的积分**。可以证明：只要可测函数 f 的积分存在，则它在任何 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分也存在。

积分最重要的例子之一是 L-S 积分。设 g 是对准分布函数 F 而言的 L-S 可测函数。如果 g 对 λ_F 的积分存在，则这个积分称为 g 对 F 的 **L-S 积分**，记作

$$\int_{\mathbb{R}} g dF = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g d\lambda_F;$$

如果 $A \in \mathscr{F}_{\lambda_F}$，则称

$$\int_A g dF = \int_{\mathbb{R}} g I_A dF$$

为 g 在集合 A 上对 F 的 L-S 积分。特别的，如果 L 可测函数 g 对 Lebesgue 测度 λ 的积分存在，则称之为 **L 积分**，记为

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g d\lambda;$$

如果 $A \in \mathscr{F}_\lambda$，则称

$$\int_A g(x) dx \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x) I_A(x) dx$$

为 g 在集合 A 上的 L 积分。

下面两个定理将对积分的性质进行初步的探讨。

定理 1.3 设 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数。

(1) 如果 f 的积分存在，则 $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$;

(2) f 可积当且仅当 $|f|$ 可积；

(3) 如果 f 可积，则 $|f| < \infty$ a.e.。

定理 1.4 设 f,g 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数。

(1) 如果 f 的积分存在，则对任何 $A\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(A)=0$，有

$$\int_A f d\mu = 0;$$

(2) 如果 f,g 的积分存在且 $f\geq g$ a.e.，则 $\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$;

(3) 如果 $f=g$ a.e.，则只要其中任一个的积分存在，另一个的积分也存在而且两个积分值相等。

定理 1.4 表明，对于可测函数而言，随意涂改它在一个零测集上的值，不会影响它的"积分存在"性、"可积"性以及 (积分存在时的) 积分值。利用这一点，我们可以把积分的对象扩充，使得 a.e. 定义的可测函数也可以定义积分。事实上，设 f 是一个 a.e. 定义的可测函数。以 $\tilde{f}$ 记任何一个满足 $\mu(f\neq\tilde{f})=0$ 的可测函数，则当 $\tilde{f}$ 的积分存在时就说 f 的积分存在并且把

$$\int_X f d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X \tilde{f} d\mu$$

称为 f 的积分。不难看出，这样的定义是一意的。

定理 1.4 还有如下推论。

推论 1.5 设 f 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数。如果 $f=0$ a.e.，则 $\int_X f d\mu = 0$；反之，如果 $\int_X f d\mu = 0$ 且 $f\geq 0$ a.e.，则

$$f=0 \text{ a.e.}$$

2 积分的性质

我们将通过一系列的定理来讨论积分的性质。第一个定理说明积分的线性性质。

定理 2.1 设 f,g 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上积分存在的可测函数。

(1) 对任何 $a\in\mathbb{R}, af$ 的积分存在且

$$\int_X (af) d\mu = a\int_X f d\mu;$$

(2) 如果 $\int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ 有意义，则 $f+g$ a.e. 有定义，其积分存在且

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

第二个定理用来说明：如果两个可测函数在任意 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分值都相等，则这两个函数几乎处处相等。

定理 2.2　设 f, g 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上积分存在的可测函数。

(1) 如果 $\int_A f d\mu \geq \int_A g d\mu$ 对每个 $A \in \mathscr{F}$ 成立，则 $f \geq g$ a.e.;

(1) 如果 $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ 对每个 $A \in \mathscr{F}$ 成立，则 $f = g$ a.e.;

可以观察其与定理 1.4 之 (3) 的联系与区别。

第三个定理说明了积分的**绝对连续性**。

定理 2.3　如果 f 可积，则对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对任何满足 $\mu(A) < \delta$ 之 $A \in \mathscr{F}$ 均有

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

接下来三个定理用于讨论可测函数列极限的积分性质，中心问题是极限何时可以穿过积分符号。这三个定理依次称为**单调收敛定理 (Levi 定理)，Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理**。

定理 2.4(Levi 定理)　设 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 f 均为 a.e. 非负的可测函数。如果 $f_n \uparrow f$ a.e.，则

$$\int_X f_n d\mu \uparrow \int_X f d\mu.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

两两不交的集合序列 $\{A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots\}$ 如果满足 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$，则称之为可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 的一个**可列可测分割**。对于一个有限可测分割 $\{A_i, i = 1, \cdots, n\}$，如果令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，则 $\{A_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 就成为可列可测分割。所以可列可测分割是一个比有限可测分割更一般的概念，简称为**可测分割**。由定理 2.4 容易证明以下推论。

推论 2.5　如果 f 的积分存在，则对任一可测分割 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 有

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

定理 2.6(Fatou 引理)　对任何 a.e. 非负可测函数的序列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$，有

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{3}$$

此定理的另一版本为 f_n a.e. 非正时，有

$$\int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n) d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{4}$$

此定理中 (3) 式的证明为设 $g_k = \inf_{n\geq k} f_n$，则 $g_k \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n$，然后由定理 2.4 即可证明。而 (4) 式中 $f_n \leq 0$，只需设 $t_n = -f_n \geq 0$ 即可证明。

Fatou 引理有如下推论。

推论 2.7 设 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是可测函数列。

(1) 若存在可积函数 g 使 $f_n \geq g$ 对每个 $n = 1, 2, \cdots$ 成立, 则 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且 (3) 式成立。

(2) 若存在可积函数 g 使 $f_n \leq g$ 对每个 $n = 1, 2, \cdots$ 成立, 则 $\limsup_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且 (4) 式成立。

此定理的证明只需设 $h_n = f_n - g$ 即可。

定理 2.8(Lebesgue 控制收敛定理) 设 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 f 为可测函数。如果存在非负可积函数 g 使对每个 $n = 1, 2, \cdots$ 有 $|f_n| \leq g$ a.e., 则 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 蕴含

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Lebesgue 控制收敛定理的一个重要推论是下列 Lebesgue 有界收敛定理。

定理 2.9(Lebesgue 有界收敛定理) 设 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 f 是有限测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数。如果存在 $M > 0$ 时 $|f_n| \leq M$ a.e. 对每个 $n = 1, 2, \cdots$ 成立且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

此定理的证明为令 $g \equiv M$。由于 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是有限测度空间，故 g 可积。于是可用定理 2.8 证明。

本节的最后一个定理将讨论积分的变数替换。

定理 2.10 设 g 是由测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 到可测空间 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射。

(1) 对每个 $B \in \mathscr{S}$，令 $\nu(B) = \mu(g^{-1}B)$，则 $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ 也是一个测度空间;

(2) 对 $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ 上的任何可测函数 f，只要等式

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ g d\mu$$

的一端有意义，就一定成立。

3 $L_p(X,\mathscr{F},\mu)$ 空间

设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间而且 $1 \le p < \infty$。以 $L_p(X,\mathscr{F},\mu)$ 记由 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上全体这样的可测函数 f 组成的集合，他们满足

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

引理 3.1 对任何 $a,b \in \mathbb{R}$ 和 $1 \le p < \infty$，下式成立：

$$|a+b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

从引理 3.1 容易推出：当 $1 \le p < \infty$ 时，对任何 $a,b \in \mathbb{R}$，有

$$f,g \in L_p \Rightarrow af + bg \in L_p,$$

故 L_p **对于线性运算是封闭的**。

引理 3.2(Young 不等式) 如果 $1 < p,q < \infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对于任何 $a,b \ge 0$，有

$$a^{1/p}b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q},$$

等号成立时当且仅当 $a=b$。

为简便起见，对任何 $1 \le p < \infty$ 和任何可测函数 f，记

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}.$$

特别的，$\|f\|_1$ 就记为 $\|f\|$，易见

$$f \in L_p \Leftrightarrow \|f\|_p < \infty.$$

利用引理 3.2 可以证明下列 **Holder 不等式**，而由 Holder 不等式又可以推出 **Minkowski 不等式**。

定理 3.3(Holder 不等式) 如果 $1 < p,q < \infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对任何 $f \in L_p, g \in L_q$ 有

$$\|fg\| \le \|f\|_p \|g\|_q,$$

其中等号成立的充要条件为存在不全为 0 的 $\alpha,\beta \ge 0$ 使

$$\alpha|f|^p = \beta|g|^q \text{ a.e.}$$

定理 3.4(Minkowski 不等式) 设 $1 \le p < \infty$。对任何 $f, g \in L_p$ 有

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p,$$

其中等号成立的充要条件为:

(1) 当 $p=1$ 时,$fg \ge 0$ a.e.;

(2) 当 $1<p<\infty$ 时,存在不全为 0 的 $\alpha, \beta \ge 0$ 使 $\alpha f = \beta g$ a.e.

易见,对任何 $1 \le p < \infty$,L_p 上定义的 $\|\cdot\|_p$ 具有性质:

(1) $\|f\|_p \ge 0$; $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e.;

(2) $\|af\|_p = |a|\|f\|_p$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

这两条加上 Minkowski 不等式就得到结论:**如果视 L_p 中 a.e. 相等的函数为同一个 L_p 中的元,则 $\|\cdot\|_p$ 是 L_p 上的范数**。在此观点下,L_p **是一个线性赋范空间**。

以上结论可以推广到 $p=\infty$ 的情况。事实上,把 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上 a.e. 有界的可测函数的全体记为 $L_\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ 或 L_∞,就不难看出,L_∞ 也是线性空间。对每个 $f \in L_\infty$,再令

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \in \mathbb{R}^+ : \mu(|f|>a)=0\} = \inf\{a \in \mathbb{R}^+ : \mu(|f| \le a) \text{ a.e.}\}.$$

容易验证:$\|f\|_\infty$ 是 L_∞ 上的范数。对于 L_∞ 有下列结论。

定理 3.5 如果 $f \in L_1, g \in L_\infty$,则

$$\|fg\| \le \|f\|\|g\|_\infty,$$

如果 $f, g \in L_\infty$,则

$$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

换句话说,Holder 不等式不仅当 $1<p<\infty$ 时成立,而且当 $p=1$ 和 $p=\infty$ 也是对的。显然,定理的第二个不等式也是 Minkowski 不等式对 $p=\infty$ 的推广。

现在考虑 $0<p<1$ 的情形。以 L_p 记测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上满足

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \int_X |f|^p d\mu < \infty$$

的可测函数的全体 (这里需要注意:当 $0<p<1$ 和 $1 \le p \le \infty$ 时,$\|\cdot\|_p$ 的定义是截然不同的!)。因为这时对每个 $a \in \mathbb{R}$ 有

$$\|af\|_p = |a|^p \|f\|_p,$$

所以 $\|\cdot\|_p$ 不再是 L_p 的范数。但是，我们仍然可以证明某种类似于 Minkowski 不等式的东西。

引理 3.6 如果 $0<p<1$，则 $|a+b|^p \le |a|^p+|b|^p,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

定理 3.7 如果 $0<p<1$，对任何 $f,g\in L_p$ 有

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p.$$

其实当 $0<p<1$ 时 $\|\cdot\|_p$ 的定义与之前不同就是为了要 $\|\cdot\|_p$ 满足定理 3.7。

设 $0<p\le\infty$。根据 Minkowski 不等式，通过 $\|\cdot\|_p$ 在 L_p 上可以产生距离：对任何 $f,g\in L_p$，令

$$\rho(f,g)\overset{\text{def}}{=}\|f-g\|_p,$$

下列定理表明，L_p 在这个距离下是完备的。因此，当 $1<p<1$ 时，L_p 是一个**完备的距离空间**；当 $1\le p\le\infty$ 时，L_p 是一个 **Banach 空间**。

定理 3.8 设 $0<p\le\infty$。如果 $\{f_n\}\subset L_p$ 满足

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|_p=0,$$

则存在 $f\in L_p$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0. \tag{5}$$

设 $0<p<\infty$，我们来研究序列 $\{f_n\}\subset L_p$ 的收敛性。如果 (5) 式对某 $f\in L_p$ 成立，则称 $\{f_n\}$(p 阶) **平均收敛到** f，记为 $f_n\xrightarrow{L_p}f$。平均收敛与已知收敛性之间的关系如下。

定理 3.9 设 $0<p<\infty,\{f_n\}\subset L_p$ 和 $f\in L_p$。

(1) 如果 $f_n\xrightarrow{L_p}f$，则 $f_n\xrightarrow{\mu}f$ 和 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$;

(2) 如果 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 或如果 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，则

$$\|f_n\|_p\to\|f\|_p \Leftrightarrow f_n\xrightarrow{L_p}f.$$

L_p 中除了平均收敛之外，还有**弱收敛**的概念。

定义 3.1 如果当 $1<p<\infty$ 时或当 $p=1$ 且 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为 σ 有限测度空间时，对某个 $f\in L_p$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g\,d\mu=\int_X fg\,d\mu,\quad \forall g\in L_q$$

(和前面一样，q 表示 p 的共轭数)，则称 $\{f_n\}$ 在 L_p 中**弱收敛到** f，记为

$$f_n \xrightarrow{(w)L_p} f.$$

现在讨论弱收敛与其他收敛性的关系。由于 $1 < p < \infty$ 和 $p = 1$ 时的情况有所不同，故需分别讨论。为使叙述方便，如果 $\sup\limits_{t \in T} \|f_t\|_p < \infty$，则称**可测函数集** $\{f_t, t \in T\}$ **在** L_p **中有界**。

定理 3.10 设 $1 < p < \infty$。如果 $\{f_n\}$ 是 L_p 中的有界序列而且 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 或者 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 对某个可测函数 f 成立，则

$$f \in L_p \text{ 且 } f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$$

定理 3.11 设 $\{f_n\} \subset L_1$ 和 $f \in L_1$。如果 $\|f_n\| \to \|f\|$ 而且 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 成立，则

(1) $f_n \xrightarrow{L_1} f$;

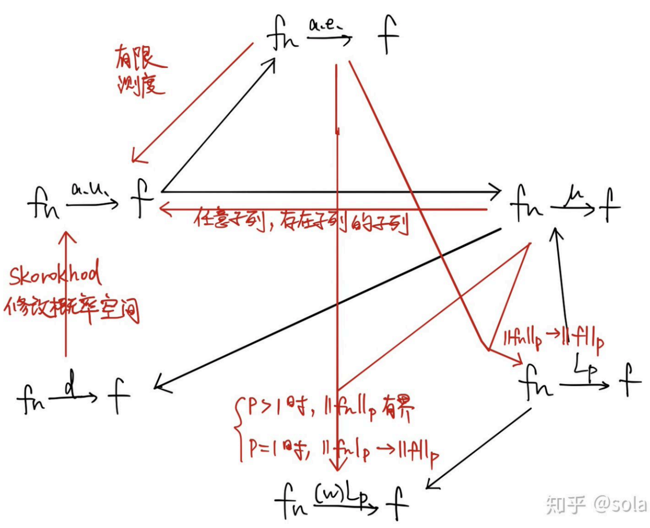
(2) $f_n \xrightarrow{(w)L_1} f$;

(3)$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$, $\forall A \in \mathscr{F}$.

推论 3.12 对任何 $1 \le p < \infty$

$$f_n \xrightarrow{L_p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$$

下面的图总结了至今为止出现的收敛模式 (引用自知乎用户 sola)



黑色表示无条件推出，红色表示有条件推出

4 概率空间的积分

概率论的一个基本概念——数学期望，用测度论的语言来说，就是在特殊的测度空间——概率空间上的积分。

定义 4.1 如果概率空间 $\{X,\mathscr{F},P\}$ 上的可测函数 f 的积分存在，则说它的数学期望存在并把

$$\mathrm{E}f \overset{\text{def}}{=} \int_X f dP$$

叫做它的**数学期望**。如果随机变量 f 是可积的，则说它的数学期望是**有限的**。数学期望常简称为**期望**。

定理 4.1 设 f 是概率空间 $(X,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，其分布函数为 F。则对任何 $(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}})$ 上的可测函数 g，$g\circ f$ 是 $(X,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数，而且只要

$$\mathrm{E}(g\circ f) = \int_{\mathbb{R}} g dF \tag{6}$$

之一端有意义，另一端也有意义并且等式相等。

证明：由定理 2.10 之 (2) 我们知道

$$\mathrm{E}(g\circ f) = \int_X g\circ f dP = \int_{\mathbb{R}} g d\mu$$

其中 $\forall B\in\mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu(B) = P(f^{-1}B)$，对于 $\mathbb{R}$ 上左开右闭的区间而言，$\lambda_F((a,b]) = F(b)-F(a)$。所以

$$\begin{aligned}
\mu((a,b]) &= P(a<f\le b)\\
&= P(f\le b) - P(f\le a) \text{ (测度的可减性)}\\
&= F(b)-F(a)\ (F(x) = P(f\le x))\\
&= \lambda_F((a,b])
\end{aligned} \tag{7}$$

所以在 $\mathbb{R}$ 中的半环 $\{(a,b]\}$ 上，$\mu=\lambda_F$。故我们可以将这两个测度看作半环 $\{(a,b]\}$ 上的某个测度到此半环生成的 σ 域的扩张。注意到 $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1]$，且每个 $(n,n+1]$ 在 μ 下的测度是有限的 (因为概率测度有限)。故测度扩张的唯一性条件满足，$\mu=\lambda_F$ 在 $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ 上成立。(通常要在 σ 域上直接证明两个测度相等是困难的，此时不妨将其看作一个半环的测度扩张，然后利用测度扩张唯一性条件证明）所以

$$\mathrm{E}(g\circ f) = \int_X g\circ f dP = \int_{\mathbb{R}} g d\mu = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} g dF \text{ (证毕)}$$

设 k 是一个正整数。如果 $\mathrm{E}|f|^k < 0$，则称随机变量 f 的 k 阶矩存在并把 $\mathrm{E}f^k$ 和 $\mathrm{E}(f-\mathrm{E}f)^k$ 分别称为它的 k **阶矩和** k **阶中心距**。作为 (6) 式的一个特殊情形，我们得到矩和中心矩的计算公式为

$$\mathrm{E}f^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x);$$

$$\mathrm{E}(f-\mathrm{E}f)^k = \int_{\mathbb{R}} (x-\mathrm{E}f)^k dF(x).$$

特别的，随机变量的期望值可通过

$$\mathrm{E}f = \int_{\mathbb{R}} x dF(x);$$

来计算；而对于随机变量的**方差** $\mathrm{var}f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}(f-\mathrm{E}f)^2$，则有公式

$$\mathrm{var}f = \int_{\mathbb{R}} (x-\mathrm{E}f)^2 dF(x).$$

下面的定理表明：对于概率空间而言，有下列关系

$$L_t \subset L_s, \quad \forall\ 0 < s \le t < \infty.$$

定理 4.2 设 $0 < s < t < \infty$。则对任何 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量 f 有

$$\|f\|_s \le \|f\|_t.$$

如果 $f \in L_t$，则上式的等号成立的充要条件是 f a.s. 为一个常数。

本节的最后进行概率空间中随机变量序列各种收敛性之间关系的讨论。在这些讨论中，一致可积概念起着重要作用。

定义 4.2 设 $\{f_t, t \in T\}$ 是概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量集。

其中，随机变量集 $\{f_t, t \in T\}$ **一致可积**的定义为

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{t\in T} \mathbf{E}[|f_t| I_{|f_t|>\lambda}] = 0.$$

将其用 $\varepsilon - \delta$ 语言表达：

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当}\lambda > N\text{时，对于}\forall t \in T, \mathbf{E}[|f_t| I_{|f_t|>\lambda}] < \varepsilon.$$

直观地说，在 $|f_t|$ 充分大的时候，$\{f_t, t \in T\}$ 中所有随机变量的期望**一致地**充分小。这里的一致性体现在 $\sup\limits_{t\in T}$ 中。显然若随机变量集合**一致有界**，则必定一致可积。

随机变量集 $\{f_t, t\in T\}$ **绝对连续**的定义为

$$\lim_{P(A)\to 0}\sup_{t\in T}\mathbf{E}[|f_t|I_A]=0.$$

将其用 $\varepsilon-\delta$ 语言表达：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\textbf{当}A\in\mathscr{F},P(A)<\delta\textbf{时，对于}\forall t\in T,\mathbf{E}[|f_t|I_A]<\varepsilon.$$

直观地说，在 A 的测度充分小的时候，$\{f_t, t\in T\}$ 上的随机变量在 A 上的积分**一致地**充分小。这里的一致性体现在 $\sup\limits_{t\in T}$ 中。准确地说，这里的“绝对连续”本质上是“一致绝对连续”。由积分的绝对连续性，**任何单个可积的随机变量都是绝对连续的**。（事实上，任何有限个可积随机变量也都绝对连续，取最大的 δ 即可）

定理 4.3 概率空间 $(X,\mathscr{F},P)$ 中的随机变量集 $\{f_t, t\in T\}$ 一致可积当且仅当它既绝对连续，又 L_1 有界。

利用这条性质，我们得到：任何有限个可积随机变量的集合一致可积。随机变量集合若被一个非负可积随机变量控制，则也必一致可积。

关于一致可积性与收敛模式之间的关联有如下定理。

定理 4.4 设 $0<p<\infty$，$\{f_n\}\subset L_p$，而 f 是概率空间 $(X,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量。如果 $f_n\xrightarrow{P}f$，则下列说法等价：

(1) $\{|f_n|^p\}$ 一致可积；

(2) $f\in L_p$，$f_n\xrightarrow{L_p}f$；

(3) $f\in L_p$，$\|f_n\|_p\to\|f\|_p$；

最后，关于随机变量，值得一提的是：若 $f\overset{d}{=}g$，则这两个随机变量有同样的期望、k 阶原点矩或中心矩（事实上任意 Borel 可测函数复合后的期望都相同）。这是因为对于 $f\sim F, g\sim G$，

$$\int_X fdP=\int_{\mathbb{R}}xd\lambda_F=\int_{\mathbb{R}}xd\lambda_G=\int_X gdP$$

进一步地，若 $f_n\overset{d}{=}g_n$，$\forall n\in\mathbb{N}$，那么这两个随机变量列有同样的一致可积性。（一致可积性本质上也依赖于期望而定义）

由此，一些情形下，Skorokhod 定理将会是从 $f_n\xrightarrow{d}f$ 为出发点证明 $\{f_n\}$ 一致可积的有力工具。（特别是已经有了 k 阶原点矩的收敛性条件）