$\ll$ 测度论与概率论基础 $\gg$ 笔记-可测映射

QingShan

2021 年 4 月 12 日

本章将讨论可测映射的概念。

1 可测映射和可测函数

设 X 和 Y 是任意给定的集合。如果对每个 $x \in X$, 存在唯一的 $f(X) \in Y$ 与之相对应，则称对应关系 f 是**从 X 到 Y 的映射**或**定义在 X 上取值于 Y 的函数**。对任意的 $x \in X, f(x)$ 称为映射 f 在 x 处的**值**。

对任何 $B \subset Y$ 称

$$f^{-1}B \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in B\} = \{x : f(x) \in B\}$$

为**集合 B 在映射 f 下的原像**。对任何 Y 上的集合系 $\mathscr{E}$，称

$$f^{-1}\mathscr{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{-1}B : B \in \mathscr{E}\}$$

为**集合系 $\mathscr{E}$ 在映射 f 下的原像**。关于映射的原像，有以下两个命题。

命题 1.1 集合的原像有下列性质：

$$f^{-1}\varnothing = \varnothing; \quad f^{-1}Y = X;$$

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}B_1 \subset f^{-1}B_2;$$

$$(f^{-1}B)^c = f^{-1}B^c, \quad \forall B \subset Y$$

有对任何集合 T，有

$$f^{-1}\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} f^{-1}A_t, \quad \forall\{A_t \subset Y, t \in T\};$$

$$f^{-1}\bigcap_{t\in T}A_t=\bigcap_{t\in T}f^{-1}A_t,\quad \forall\{A_t\subset Y,t\in T\}.$$

命题 1.2 对 Y 上的任何集合系 $\mathscr{E}$，有

$$\sigma(f^{-1}\mathscr{E})=f^{-1}\sigma(\mathscr{E}).$$

给定可测空间 $(X,\mathscr{F})$ 和 $(Y,\mathscr{S})$ 以及 X 到 Y 的映射 f。如果

$$f^{-1}\mathscr{S}\subset\mathscr{F},$$

就把 f 叫做从 $(X,\mathscr{F})$ 到 $(Y,\mathscr{S})$ 的**可测映射**或**随机元**，而 $\sigma(f)\overset{\text{def}}{=}f^{-1}\mathscr{S}$ 叫做**使映射 f 可测的最小 σ 域**。

关于可测映射，有以下两个重要定理分别给出了可测映射的简单判别法和复合映射的可测性。

定理 1.3 设 $\mathscr{E}$ 是 Y 上的任给集合系。则 f 是 $(X,\mathscr{F})$ 到 $(Y,\sigma(\mathscr{E}))$ 的可测映射当且仅当

$$f^{-1}\mathscr{E}\subset\mathscr{F}.$$

定理 1.4 设 g 是 $(X,\mathscr{F})$ 到 $(Y,\mathscr{S})$ 的可测映射，f 是 $(Y,\mathscr{S})$ 到 $(Z,\mathscr{Z})$ 的可测映射，则 $(f\circ g)(\bullet)\overset{\text{def}}{=}f(g(\bullet))$ 是 $(X,\mathscr{F})$ 到 $(Z,\sigma(\mathscr{Z}))$ 的可测映射。

下面转向测度论中的另一个重要概念——**可测函数**。为此，要引入广义实数集 $\overline{\mathbb{R}}\overset{\text{def}}{=}\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$。今后 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的元素将称为**广义实数**。关于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中元素的**顺序**，除实数按原有顺序外，规定

$$-\infty<a<\infty,\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

对任何的 $a\in\overline{\mathbb{R}}$，记

$$a^+=max(a,0)\text{ 和 }a^-=max(-a,0)$$

并分别把它们叫做 a 的**正部**和**负部**。易见 $a=a^+-a^-,|a|=a^++a^-$。另外，还记

$$\mathscr{R}_{\overline{\mathbb{R}}}\overset{\text{def}}{=}\sigma(\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\{-\infty\},\{\infty\}).$$

命题 1.5　下列等式成立：

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{\overline{\mathbb{R}}} &= \sigma([-\infty, a) : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma([-\infty, a] : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma((a, \infty] : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma([a, \infty] : a \in \mathbb{R}). \qquad (1)\end{aligned}$$

(2)

定义 1.1　从可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{R}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 的可测映射称为 $(X, \mathscr{F})$ 上的**可测函数**。特别的，从 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$ 的可测映射称为 $(X, \mathscr{F})$ 上的**有限值可测函数**或**随机变量**。

由于 $\mathscr{R}_{\overline{\mathbb{R}}}$ 和 $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ 的结构相当复杂，所以可测函数和随机变量按定义验证起来是很困难的。但是有如下定理可以简单判定。

命题 1.6　以下说法等价：

（1）f 是 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数（或随机变量）；

（2）$\{f < a\} \in \mathscr{F}, \forall a \in \mathbb{R}$;

（3）$\{f \leq a\} \in \mathscr{F}, \forall a \in \mathbb{R}$;

（4）$\{f > a\} \in \mathscr{F}, \forall a \in \mathbb{R}$;

（5）$\{f \geq a\} \in \mathscr{F}, \forall a \in \mathbb{R}$;

推论 1.7　如果 f, g 是可测函数，则

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\} \in \mathscr{F}.$$

特别的，$\{f = a\} \in \mathscr{F}, \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$.

下面为四个常见可测函数的例子，均可由以上定理验证。

例 1　设 $\mathscr{F}$ 是由 X 的一切子集组成的 σ 域；$(Y, \mathscr{S})$ 是任意可测空间。那么 X 到 Y 的任何一个映射都是可测的。

例 2　设 $a \in \overline{\mathbb{R}}$. 可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上的常数函数 $f \equiv a$（即 $f(x) = a, \forall x \in X$）是可测函数。

例 3　可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上集合 $A \in \mathscr{F}$ 的指示函数 I_A 是可测函数。

例 4　对任何 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ 和不交的 $A, B \in \mathscr{F}, aI_A + bI_B$ 是可测函数。

2　可测函数的运算

首先，讨论可测函数的四则运算。有如下定理。

定理 2.1 如果 f, g 是可测函数，则

(1) 对任何 $a \in \overline{\mathbb{R}}, af$ 是可测函数；

(2) 如 $f+g$ 有意义，即对每个 $x \in X, f(x)+g(x)$ 均有意义，则它是可测函数；

(3)fg 是可测函数；

(4) 如果 $g(x) \neq 0, \forall x \in X$，则 f/g 是可测函数。

其次，讨论可测函数的极限运算。有如下定理。

定理 2.2 如果 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 是可测函数列，则

$$\inf_n f_n,\ \sup_n f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n \text{ 和 } \limsup_{n\to\infty} f_n$$

仍是可测函数。

第三，讨论可测函数的结构。

有限个两两不交的集合 $\{A_i \subset X, i=1,\cdots,n\}$ 如满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = X$，就把它称为空间 X 的一个**有限分割**。如对每个 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $A_i \in \mathscr{F}$，则 X 的有限分割 $\{A_i, i=1,\cdots,n\}$ 称为可测空间 $(X,\mathscr{F})$ 的**有限可测分割**。对于可测空间 $(X,\mathscr{F})$ 上的函数 $f: X \to \mathbb{R}$，如果存在有限可测分割 $\{A_i \in \mathscr{F}, i=1,\cdots,n\}$ 和实数 $\{a_i, i=1,\cdots,n\}$ 使

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i},$$

则称之为**简单函数**。由定理 2.1 可知，简单函数总是可测的。又易见，简单函数的线性组合还是简单函数。

此外，我们有如下约定：对可测函数 f，如果存在 $M>0$ 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in X$，则称之为有界的；一个可测函数 f 的正部 f^+ 和负部 f^- 定义为

$$f^{\pm}(x) = [f(x)]^{\pm}, \forall x \in X;$$

一串可测函数 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 当 $n \to \infty$ 时点点收敛到可测函数 f，即

$$f_n(x) \to f(x),\ \forall x \in X,$$

则记为 $f_n \to f$;

定理 2.3 下列命题成立：

(1) 对任何非负可测函数 f，存在非负简单函数列 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 使 $f_n \uparrow f$；如果 f 是非负有界可测的，则存在非负简单函数列 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 使 $f_n(x) \uparrow f(x)$ 对 $x \in X$ 一致成立。

(2) 对任何可测函数 f，存在简单函数列 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 使 $f_n \to f$；如果 f 是有界可测的，则存在简单函数列 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 使 $f_n(x) \to f(x)$ 对 $x \in X$ 一致成立。

这个定理说明了任何可测函数都可以被简单函数列逼近。可以想象二维坐标系中的例子，我们总可以在一个函数图像的上方或下方用长条矩形来逼近，就如同计算函数与坐标轴围成区域面积时用矩形逼近一样。这个定理本质上就是使用“以直代曲”的思想!

第四，我们将给出一个关于复合可测函数的定理。

定理 2.4 设 g 是 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射。则 h 是 $(X, g^{-1}\mathscr{S})$ 上的可测函数 (或随机变量) 当且仅当存在 $(Y, \mathscr{S})$ 上的可测函数 (或随机变量)f 使 $h = f \circ g$.

接下来我们介绍一个在测度论和概率论中证明一个命题时经常用到的方法。这个方法常常分解为如下几个容易的步骤来进行:

(1) 证明该命题对最简单的函数——指示函数成立。

(2) 证明该命题对非负简单函数——指示函数的线性组合成立。

(3) 证明该命题对非负可测函数——非降非负简单函数列的极限成立。

(4) 证明命题对一般可测函数——两个非负可测函数，即它的正部和负部之差成立。

按上述步骤证明命题的方法叫做测度论中的**典型方法**。典型方法符合人们的认识过程，是一种具有普遍意义的、行之有效的方法。

运用典型方法可得以下两个关于可测函数命题的定理。

定理 2.5 设 $\mathscr{A}$ 是一个域，$\mathscr{M}$ 是一个由 X 上的非负广义实值函数组成的**单调类**，即它是 X 上具有下列性质的由非负广义实值函数组成的集合:

(1) 对任何 $f, g \in \mathscr{M}$ 和实数 $a, b \geq 0$，有 $af + bg \in \mathscr{M}$;

(2) 对任何 $\{f_n \in \mathscr{M}, n=1,2,\cdots\}$，如果 $f_n \uparrow f$，则 $f \in \mathscr{M}$.

如果对每个 $A \in \mathscr{A}$ 均有 $I_A \in \mathscr{M}$，则一切 $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ 上的非负可测函数均属于 $\mathscr{M}$。

定理 2.6 设 $\mathscr{P}$ 是一个 π 系，$\mathscr{L}$ 是一个由 X 上的非负广义实值函数组成的 λ **类**，即它是 X 上具有下列性质的非负广义实值函数组成的集合:

(1)$1 \in \mathscr{L}$

(1) 对任何 $f, g \in \mathscr{L}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，如果 $af + bg \geq 0$，则 $af + bg \in \mathscr{L}$;

(2) 对任何 $\{f_n \in \mathscr{M}, n=1,2,\cdots\}$，如果 $f_n \uparrow f$，则 $f \in \mathscr{L}$.

如果对每个 $A \in \mathscr{P}$ 均有 $I_A \in \mathscr{L}$，则一切 $(X, \sigma(\mathscr{P}))$ 上的非负可测函数均

属于 $\mathscr{L}$。