镜州商贸学院（新圩）

《多变量微积分》

2023 补考复习题

第五章

空间解析几何、场论、

多变量函数的极限与连续

空间曲面的切平面与法线：

设 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 为空间曲面，$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$，过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲面 Σ 的切平面为 $F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$，法线为 $\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$。

空间曲线的切线与法平面 1：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$，取参数 $t=t_0$，对应的曲线上的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，其中 $x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$。曲线 L 在 M_0 处的切向量为 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$；曲线 L 在 M_0 处的切线为 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$；曲线 L 在 M_0 处的法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。

空间曲线的切线与法平面 2：

设 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，则切线方向的方向向量为 $\vec{T}=\left(\{F_x',F_y',F_z'\}\times\{G_x',G_y',G_z'\}\right)|_{M_0}$。

设 $\vec{a}=(1,-1,3)$ ，$\vec{b}=(2,-1,2)$ ，求用 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 表示向量 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 为______。

A、 $3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$

B、 $-\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$

C、 $-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

D、 $-2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$

点 $(-1,-2,-3)$ 是第______卦限内的点。

A、 一

B、 七

C、 二

D、 八

设已知两点 $M_1\left(4,\sqrt{2},1\right)$ 和 $M_2(3,0,2)$ ，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

设向量 $\vec{a}=(2,1,m)$ ，$\vec{b}=(n,-2,3)$ ，且 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ ，则 $m=$ ______ ，$n=$ ______ 。

设有向量$\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(0,0,1)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______。

A、 0

B、 1

C、 $\vec{j}-\vec{i}$

D、 $\vec{i}-\vec{j}$

设 $\vec{a}=(-1,1,2)$ ，$\vec{b}=(2,0,1)$ ，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____。

A、 0

B、 $\frac{\pi}{6}$

C、 $\frac{\pi}{4}$

D、 $\frac{\pi}{2}$

直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $3x-y+2z=4$ 的关系是______。

A、 平行

B、 既不平行也不垂直

C、 垂直

D、 直线在平面上

曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线方程是______。

求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$（m 是常数）在点 (x_0, y_0, z_0) 的切线及法平面方程。

求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线的对称式和参数式方程。

求直线$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-0 \end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程。

将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程是______。

方程 $x^2 + y^2 = 1$ 在平面直角坐标系中表示的曲线是_____，在空间直角坐标系中表示的曲面是_____。

在空间直角坐标系中，方程 $x^2 - 4(y-1)^2 = 0$ 表示______。

A、　两个平面

B、　双曲柱面

C、　椭圆柱面

D、　圆柱面

以点 $(1,3,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程是_____。

A、 $x^2+y^2+z^2=14$

B、 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$

C、 $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=14$

D、 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2+14=0$

已知曲线 $L:\begin{cases}2y^2+z=1\\x=0\end{cases}$ 则曲线 L 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面方程为

______。

已知向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的模分别为 $|\vec{a}| = 4$ ，$|\vec{b}| = 2$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\sqrt{2}$ ，则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ ______。

A、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B、 $2\sqrt{2}$

C、 $4\sqrt{2}$

D、 2

（中飞院，2022 级）设已知 $M_1\left(3,\sqrt{2},1\right)$ 和 $M_2(4,0,2)$ ，则$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦 $\cos\alpha =$ ______ （结果用小数表示）。

（中飞院，2022 级）设 $\overrightarrow{OA}=(1,0,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,0,6)$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=$ ______。

（中飞院，2022 级）求过点 $(1,2,3)$ 且与两平面 $x-y+z=1$ 和 $2x+y+z=3$ 平行的直线的对称式方程和参数方程。

梯度：设 $u=f(x,y,z)$ 可偏导，则 $\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$。

旋度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则 $\mathbf{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$。

散度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则 $\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$。

通量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，Σ 为有侧曲面，称 $\Phi=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdzdy=\iint_\Sigma \vec{a}\cdot\vec{n}dS$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 指向指定侧的流过有侧曲面 Σ 的通量（或流量），其中 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 的单位法向量。

环流量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，L 为有向闭曲线，称 $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s}$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 沿有向闭曲线 L 的环流量。

设 $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ ，则 $\mathbf{grad}f(1,2,-1) =$ ______ ， $\mathbf{grad}f(1,0,1) =$ ______ 。

补充： 设 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{div}[\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)]$。

（中飞院，2022 级）设 $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$ ，则 $\mathbf{grad}f(1,0,1) =$ ______ 。

判断多元函数极限是否存在的方法：

正经做法：一元函数在一点处极限存在的充分必要条件是其左、右极限都存在且相等，但多元函数在一点处极限存在，要求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，即函数 (x,y) 沿所有可能的路径趋于点 (x_0,y_0) 时，函数值趋于同一个值，若函数 $f(x,y)$ 沿两个不同方向趋于点 (x_0,y_0) 时，函数值趋于两个不同值，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在。

瞎猜法：当分子次数高于分母次数时，极限一般存在，而且很有可能是 0 。当分子次数低于或等于分母次数时，极限一般不存在。该方法一般在不会做题时使用，且不保证答案正确。

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\pi}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=$ ______ 。

函数 $z=\sqrt{\ln(x+y)}$ 的定义域为______。

函数 $z = \frac{\arcsin x}{y}$ 的定义域为______。

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} =$ ______ 。

A、 等于 0

B、 不存在

C、 等于 $\frac{1}{2}$

D、 存在且不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

求下列极限：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

求下列极限：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xye^x}{4-\sqrt{16+xy}}$$

（中飞院，2022 级）求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3-\sqrt{9-xy}}{xy}$

第六章

多变量函数的微分

偏导数：$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 f'_x 是 f 对 x 求偏导的意思。$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 f''_{xy} 是 f 先对 x 求偏导再对 y 求偏导的意思。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家看题吧。

全微：设 $z = f(x,y)\big((x,y) \in D\big)$，$(x_0, y_0) \in D$ 若 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，称 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可全微，简称可微，记 $A\Delta x + B\Delta y = dz$，习惯上记 $dz = Adx + Bdy$。

设 $z = f(x,y)$ 可微，则其全微分为 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$。

隐函数求导：设 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$，$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，则在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域内由 $F(x,y,z) = 0$ 能唯一确定连续可偏导的函数 $z = f(x,y)$，满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$。

已知 $\frac{(x+ay)dx+ydx}{(x+y)^2}$ 为某个函数的全微分，则 $a=$ _____ 。

A、 -1

B、 0

C、 1

D、 2

设 $u=\arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$ ______。

A、 $\frac{x}{x^2+y^2}$

B、 $-\frac{y}{x^2+y^2}$

C、 $\frac{y}{x^2+y^2}$

D、 $-\frac{x}{x^2+y^2}$

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的______。

A、　必要而非充分条件

B、　充分而非必要条件

C、　充分必要条件

D、　既非充分又非必要条件

求下列函数的全微分：

$$z = xy + \frac{x}{y}$$

设$z = u^2 \ln v$，而$u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\frac{\partial x}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$。

函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿方向 $\vec{l} = (2,1)$ 的方向导数是______。

（中飞院，2022 级）设 $z = u^3 \ln v$，而 $u = x^2 + y^2$，$v = xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

（中飞院，2022 级）设$z=u^2\sin v$，而$u=xy$，$v=x^2$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

（中飞院，2022 级）设$\begin{cases} xu - yv = 1 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$。

二元函数求无条件极值的步骤：

(1) 求 $z=f(x,y)$ 的定义域 D（开区域）；

(2) 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 求出 $z=f(x,y)$ 的驻点；

(3) 利用判别法判断驻点是否为极值点：

令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ ，则：

当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数的极值点，其中：

当 $A>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值点；

当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；

当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是函数的极值点；

当 $AC-B^2=0$ 时，无法判断 (x_0,y_0) 是不是函数的极值点。

二元函数求条件极值：

所谓二元函数的条件极值，即二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般有如下三种方法：

拉格朗日乘数法：

令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ，由 $\begin{cases}F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'=0\\F_y'=f_y'+\lambda\varphi_y'=0\\F_\lambda'=\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 求出 (x,y) 的值，并确定最优解；

转化为一元函数的极值：

由 $\varphi(x,y)=0$ 求出 $y=y(x)$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x,y(x)]$ ，再求一元函数 $z=f[x,y(x)]$ 的极值；

参数方程法：

由 $\varphi(x,y)=0$ ，得 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(y)\end{cases}$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x(t),y(t)]$ ，再求一元函数的极值。

函数 $z = 2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 1$ 的驻点是______。

设函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ ，则点 $(0,0)$ 是函数 z 的______。

A、 极大值点但非最大值点

B、 极大值点且是最大值点

C、 极小值点但非最小值点

D、 极小值点且是最小值点

求函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的驻点和极值。

补充： 周长为 $2a$ 的矩形绕它的一边旋转可得到一个圆柱体，当矩形边长各为多少时，可使圆柱体的体积最大？

第七章

多变量函数的积分

二重积分：当你理解不了时，想象一张质量不均匀的铁片的重量，或者一个顶面不平的柱体的体积。当你在一个方向上做不出来时，就换一个方向做做试试。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家还是看题吧。

二重积分直角坐标转换为极坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，区域 D 表示为 $D = \{(r,\theta)|\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$，则

$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$。注意 f 外面有个 r。

三重积分：当你理解不了时，想象一块质量不均匀的石头的重量。不要管什么先一后二还是先二后一，也不要管什么切片法和什么铅直投影法，算就完了。

三重积分直角坐标转换为柱面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ ，其中 $\Omega = \{(r,\theta,z)|\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \varphi_1(r,\theta) \le z \le \varphi_2(r,\theta)\}$ ，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr \int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$ 。

三重积分直角坐标转换为球面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ ，其中 $\alpha \le \theta \le \beta, \theta_1 \le \varphi \le \theta_2, r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta)$ ，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, dr$ 。

设二重积分的积分区域是 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ，则 $\iint_D dxdy =$ _____ 。

A、 3π

B、 4π

C、 π

D、 15π

$\int_0^1 dx \int_0^x xy^2 dy =$ ______ 。

极限 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\int_0^t dx \int_0^x x e^{-y^2} dy}{t^3} =$ ______ 。

设区域 D 是由两坐标轴及直线 $x + y = 1$ 围成的三角形区域，则

$\iint_D xydxdy =$ ______ 。

A、 $\frac{1}{4}$

B、 $\frac{1}{8}$

C、 $\frac{1}{12}$

D、 $\frac{1}{24}$

二次积分 $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 的另一种积分次序是______。

A、 $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$

B、 $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

C、 $\int_0^4 dy \int_{x^2}^2 f(x,y)dx$

D、 $\int_0^4 dy \int_2^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$ ，其中 D 是由直线 $x = 2$ ， $y = x$ 及曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域。

交换下列积分顺序：

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$$

设 D 是圆域 $x^2+y^2\leq 4$ ，则 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=$ ______ 。

A、 $\frac{8}{3}\pi$

B、 $\frac{16}{3}\pi$

C、 4π

D、 π

计算 $\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$ ，其中 D 是介于圆周 $x^2+y^2=a^2$ 所围成的闭区域。

计算 $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} d\sigma$ ，其中 D 是介于圆周 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+y^2=b^2$ 之间的环形闭区域（$0<a<b$）。

区域$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$，$\Omega_1=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$，则等式成立的是_____。

A、 $\iiint_{\Omega} xdv=4\iiint_{\Omega_1} xdv$

B、 $\iiint_{\Omega} ydv=4\iiint_{\Omega_1} ydv$

C、 $\iiint_{\Omega} zdv=4\iiint_{\Omega_1} zdv$

D、 $\iiint_{\Omega} xyzdv=4\iiint_{\Omega_1} xyzdv$

计算 $\iiint_{\Omega} xzdxdydz$ ，其中 Ω 是由平面 $z=0$ ， $z=y$ ， $y=1$ 及抛物面 $y=x^2$ 所围成的闭区域。

$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$ ，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的闭区域。

（中飞院，2022 级）二重积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 的另一种积分次序是？

（中飞院，2022 级）求 $\iint_D \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) d\sigma$ ，其中 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ 。

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：当你理解不了时，想象一条不均匀的铁链的质量。

第一类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)(a \leq x \leq b)$ ，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$ 。

第一类曲线积分的计算方法 2：

设 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}(\alpha \leq t \leq \beta)$ ，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ 。

$\oint_L (x+y)ds =$ ______，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$。

计算 $\int_L yds$ ，其中 L 为曲线 $x = y^2$ 从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧。

计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ ，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

（中飞院，2022 级）计算$\int_L x^2ydx + xy^2dy$，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的第一象限部分，L 的方向按逆时针方向。

（中飞院，2022 级）计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ ，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：当你理解不了时，想象一个变力沿曲线做功。

第二类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)$，其中起点对应 $x=a$，终点对应 $x=b$，则 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx$。

第二类曲线积分的计算方法 2：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，其中起点对应 $t=\alpha$，终点对应 $t=\beta$，则 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$。

第二类曲线积分的计算方法 3（格林公式）：

设 D 为 xOy 平面上连通的有限闭区域，L 为闭区域 D 的正向边界，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上连续可偏导，则 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$。

柯西-黎曼条件（第二类曲线积分与路径无关的条件之一）：区域 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。

计算 $\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2}$，其中 L 为从点 (2,1) 到点 (1,2) 的直线段。

设 L 是以 $A(-1,0)$ ，$B(-3,2)$ ，$C(3,0)$ 为顶点的三角形域的周边界沿 $ABCA$ 方向，则 $\oint_L (3x-y)dx+(x-2y)dy=$ ______ 。

A、 -8

B、 0

C、 8

D、 20

设曲线 L 是区域 D 的正向边界，则 D 的面积为______。

A、 $\oint_L xdy - ydx$

B、 $\oint_L xdy + ydx$

C、 $\frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

D、 $\frac{1}{2}\oint_L xdy + ydx$

计算 $\oint_L (x^2y-2y)dx+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dy$ ，其中 L 为以直线 $x=1$ ， $y=x$ ，$y=2x$ 为边的三角形的正向边界。

计算 $\int_L (2+3y-y^2\cos x)dx+(5-2y\sin x+7x)dy$ ，其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 沿逆时针方向。

（中飞院，2017 级）已知曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+yx^2dy$ ，

(1) 证明：在全平面内，积分 I 与路径无关；

(2) 计算积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy$ 。

第一类曲面积分（对面积的曲面积分）：当你理解不了时，想象一张不均匀的铁皮的质量。

第一类曲面积分的计算方法：

设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D$，则 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$，于是

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_D f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$ 。

$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS =$ ______ ，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+x^2=a^2$ 。

计算 $\iint_{\Sigma}\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS$ ，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分。

（中飞院，2022 级）计算$\iint_{\Sigma} 2x dS$，其中Σ为平面$x+y+z=1$在第一卦限中的部分。

第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）：当你理解不了时，想象单位时间内透过一张渔网的水流量。

第二类曲面积分的计算方法 1：

设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D_{xy}$，则

$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy$，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为锐角，则二重积分前带"+"，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为钝角，则二重积分前带"−"。另外两向类推。

第二类曲面积分的计算方法 2（高斯公式）：

设 Ω 为几何体，Σ 为 Ω 的外侧曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导，则 $\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$。

计算 $\iint_{\Sigma} x^2y^2zdxdy$ ，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧。

设 Σ 为球心在原点，半径为 R 的球面的外侧，则 $\oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy =$ ______ 。

计算 $\oiint_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-x^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$ ，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

（中飞院，2022 级）计算$\oiint_{\Sigma} xdydz+ydzdx$ ，其中Σ为球了体$\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 1$的整个表面的外侧。

第八章

无穷级数

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ；但是， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛。

p 级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的级数称为 p 级数。当 $p \le 1$ 时，p 级数发散；当 $p > 1$ 时，p 级数收敛。

几何级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n\ (a \neq 0)$ 称为几何级数。当 $|q| \ge 1$ 时，几何级数发散；当 $|q| < 1$ 时，几何极数收敛，具其和为 $S = \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$ 。

莱布尼茨审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，若 $\{u_n\}_{n-1}^{\infty}$ 单调减少且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和不超过 u_1 。

幂级数的收敛半径：对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ ，则当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$ ；当 $\rho = +\infty$ 时， $R = 0$ ；当 $0 < \rho < +\infty$ ， $R = \frac{1}{\rho}$ 。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，反之不对。

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B$ 。

若 $k \neq 0$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性。

正项级数审敛法：

比较审敛法基本形式：若 $a_n \leq b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $a_n \geq b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比较审敛法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l(0 < l < \infty)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性相同。

比较审敛法推论：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

根值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

积分审敛法：设 $\{a_n\}\downarrow$ ，令 $a_n = f(n)$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同。

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ，则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定_____；级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$ _____ ，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} =$ ______ 。

下列级数中收敛的是_____。

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}$

级数 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$ ，则级数______ 。

A、 发散

B、 条件收敛

C、 绝对收敛

D、 不能确定

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 是收敛的，则

A、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛

B、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必收敛

C、 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

下列级数满足莱布尼兹条件的是

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ （α 为非零常数）

下列级数中，属于条件收敛的是

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n^n}$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

当 $p \leq 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ______；当 $p > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ______。

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \to \infty} u_n =$ ______ 。

判别下列级数的敛散性：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

判别下列级数是否收敛？如果是收敛的，确定是绝对收敛还是条件收敛？

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域

A、 $[-1,1]$

B、 $[-1,1)$

C、 $(-1,1)$

D、 $(-1,1]$

对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ ，下列说法正确的是

A、 若级数在 $x=2$ 处收敛，则在 $x=\frac{3}{2}$ 处必发散

B、 若级数在 $x=-\frac{3}{2}$ 处收敛，则在 $x=2$ 处也收敛

C、 若级数在 $x=2$ 处收敛，则在 $x=-\frac{3}{2}$ 处也收敛

D、 若级数在$x=2$ 处发散，则在 $x=\frac{3}{2}$ 处也发散

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$ 的收敛半径 $R=$ ______ 。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则该级数在 $x=\frac{3}{2}$ 处______（收敛或发散）。

求下列幂级数的收敛域：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

（中飞院，2022 级）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{6n-1}\right)^{n}$ 判断收敛还是发散。

（中飞院，2022 级）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$ 的收敛域。

一些重要的麦克劳林级数：

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (-\infty < x < +\infty)$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-\infty < x < +\infty)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (-\infty < x < +\infty)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (-1 < x < 1)$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ (-1 < x < 1)$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} (-1 < x \leq 1)$

$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1 \leq x < 1)$

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} (-1 < x < 1)$

将函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数。

周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数：

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 可以展开成 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2\ldots)$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2\ldots)$，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$。

（中飞院，2022 级）设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数，其在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数为 $s(x)$ ，则 $s(5\pi)=$ ______ 。