《高等數學（上）》期末複習題（滿分 100 分）
鏡州商貿學院（新圩）　　　　　　　　　姓名：________________

免責聲明：
本補習為鏡州商貿學院（新圩）部分學生之**自發行為**，與其他任何學校、任何老師或任何同學無關。本課程**不佔學時，不影響平時成績，不附贈二課學分**，不強制同學參加，也**不保證參加同學一定能夠及格**。如果本補習使用之複習題與任何學校之教材或考試題目雷同，那**太正常了**。因為《高等數學》一共就這麼幾個知識點，變來變去也變不出多少花樣。你讓我上哪兒找那麼多新題型去？

注：在本複習題中，帶有**（重點）**標註的題目為該小節中的關鍵概念及重點題目，這些題目在期末考試中往往經常出現，並且稍加學習便很容易掌握，是我們複習的重點。帶有（非重點）標註的題目為非重點題目，這些題目在期末考試中很少出現，或者學習難度很高，不是我們複習的重點。不帶有標註的題目為普通題目，它們在期末考試中出現的可能性和學習難度一般。

1　函數、極限、連續

1.1　函數極限與數列極限的計算

1. **（重點）**默寫常用的麥克勞林公式。

   (a) $e^x =$

   (b) $\sin x =$

   (c) $\cos x =$

   (d) $\ln(1+x) =$

2. **（重點）** 極限的計算方法：

麥克勞林公式： 1. 沒有 0 的直接帶進去算；

2. 有 0 的想辦法把 0 顯現出來；
3. 帶麥克勞林公式化成多項式；
4. 把 0 約掉，得到結果。

麥克勞林公式的用法： 乘除帶一項；加減帶多項，帶到與分子/分母同次為止。

洛必達法則： 若 [略]，則 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

1 **加** 0 **的次方：** 對於 $(1+0)^?$ 形式的極限，要翻成 $e^{?\ln(1+0)}$ 的型式再計算。

3. 下列極限正確的是 $\boxed{1\ 分}$

A. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

B. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$

C. $\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\sec x} = e$

D. $\lim_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4. 計算下列極限。

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$（其中 $m>0, n>0$ 為常數） $\boxed{1\text{ 分}}$

(f)（非重點） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ (放縮法)

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ (定積分的定義或者暴力求解) $\boxed{1\ 分}$

(h)（非重點） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$ (定積分的定義)

(i)（非重點）設 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$。證明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，並求此極限。

(j) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(k) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(m) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(n) **（重點）** $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(o) **（重點）** $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 3x}{x \sin 2x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(p) **（重點）** $\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(q) **（重點）** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(r) **（重點）** $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(s) **（重點）** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(t) **（重點）** $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(u) **（重點）** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(v) **（重點）** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(w) **（重點）** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{4-\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(x)（非重點）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

(y) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(z)（非重點）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$ (拉格朗日中值定理)

() $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x\sin^9 x}$ (洛必達法則) $\boxed{1\text{ 分}}$

1.2 函數的連續性與間斷點

1. **(重點)** 當函數在一點的左右極限存在並且相等，則說函數在這個點有**極限**，這個極限是它的左右極限值。當函數在一點的極限值等於函數值，則說函數在這一點**連續**。否則，則說函數在這一點**間斷**，這一點是函數的**間斷點**。間斷點的分類如下：

   - 左右極限**存在且相等**，為**第一類間斷點**中的**可去間斷點**；
   - 左右極限**存在但不相等**，為**第一類間斷點**中的**跳躍間斷點**；
   - 左右極限**有至少一個不存在**，為**第二類間斷點**。

2. 求 $f(x) = \dfrac{x}{x}$、$g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 當 $x \to 0$ 時的左右極限，並說明它們當 $x \to 0$ 時的極限是否存在。 $\boxed{1\text{ 分}}$

3. 設 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，則 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. 可去間斷點

B. 跳躍間斷點

C. 第二類間斷點

D. 連續點

4. 設 $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$ 的間斷點並分類。 $\boxed{1\text{ 分}}$

5. 設 $f(x)=\begin{cases} x & ,0<x<1 \\ 2 & ,x=1 \\ 2+x & ,1<x<2 \end{cases}$，則 $x=1$ 為函數 $f(x)$ 的____________間斷點。 $\boxed{1\text{ 分}}$

6. **(重點)** 設 $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x\leq 0 \\ x-2 & ,x>0 \end{cases}$，則 $x=0$ 為函數 $f(x)$ 的____________間斷點。 $\boxed{1\text{ 分}}$

1.3 漸近線

1. - **（重點）** 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，或 $f(a-0) = \infty$ 或 $f(a+0) = \infty$，稱 $x = a$ 為 $L : y = f(x)$ 的**鉛直漸近線**；
   - **（重點）** 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，稱 $y = A$ 為 $L : y = f(x)$ 的**水平漸近線**；
   - （非重點）若 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a(a \neq 0)$，$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$，稱 $y = ax + b$ 為 $L : y = f(x)$ 的**斜漸近線**。

2. 曲線 $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ 的鉛直漸近線為 $\boxed{1\text{ 分}}$

3. 曲線 $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$ 的水平漸近線為 $\boxed{1\text{ 分}}$

4. （非重點）求曲線 $y = \dfrac{2}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的全部漸近線。

1.4 無窮小與無窮大

1. 對於 $x \to a$ 時的兩個無窮小 $f(x)$ 和 $g(x)$，

   - 若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**高階無窮小**，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**低階無窮小**；
   - 若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高階無窮小**，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**低階無窮小**；
   - 若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C(C\text{為常數})$，$f(x)$ 與 $g(x)$ 為**同階無窮小**；
   - **（重點）**若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，$f(x)$ 與 $g(x)$ 為**同階無窮小**中的一個特殊情況，**等價無窮小**。

2. 當 $x \to 0$ 時，下列變量中是無窮小量的有 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $\sin \dfrac{1}{x}$

   B. $\dfrac{\sin x}{x}$

   C. $2^{-x} - 1$

   D. $\ln |x|$

3. 函數 $\dfrac{1 + 2x^3}{x^2}$ 為當 $x \to 0$ 時的無窮____________量。 $\boxed{1\text{ 分}}$

4. 無窮多個無窮小量之和 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. 必是無窮小量

B. 必是無窮大量

C. 必是有界量

D. 可能是無窮小，可能是無窮大，也有可能是有界量

5. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$，則下列正確的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \infty$

B. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \infty$

C. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

D. $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = \infty$

6. $\sin x$ 與 x 當 $x \to 0$ 時為____________無窮小。 $\boxed{1\text{ 分}}$

7. $1 - \cos x$ 與 x^2 當 $x \to 0$ 時為____________無窮小。 $\boxed{1\text{ 分}}$

8. 當 $x \to 0$ 時，與 $\ln(1+x^2)$ 為同階無窮小但不為等價無窮小的是 $\boxed{1 \text{ 分}}$

A. $\sin x \tan^2 x$

B. $1 - \cos x$

C. $\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)^2 - 1$

D. $x \sin x$

9. 當 $x \to 0$ 時，$f(x) = x - \sin ax$ 與 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等價無窮小量，則 $\boxed{1 \text{ 分}}$

A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$

C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

10.（非重點）設 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left[1 + \dfrac{f(x)}{x^2}\right]}{\arctan x} = 1$，求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{(1-\cos x)\tan x}$。(等價無窮小代換)

1.5 函數的性質

1. 下列函數在 $(-\infty, +\infty)$ 內無界的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

   B. $y = \arctan x$

   C. $y = \sin x + \cos x$

   D. $y = x \sin x$

2. 求下列函數的定義域。 $\boxed{1\text{ 分}}$
   $y = \ln(x+5)$

2 一元函數微分學

2.1 導數的定義與複合函數求導

1.（非重點）**導數**指的是一個函數在某一瞬間的變化率。比如說位移的導數是速度，速度的導數是加速度。例如函數 $f(x)$ 在 x 時點的變化率 $f'(x)$ 可以寫成 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to x} \dfrac{f(h)-f(x)}{h-x}$。關於導數的四則運算和鏈式法則的內容高中都學過，這裡就不細講了。

2. **（重點）** 默寫常用的求導基本公式。

(a) $(C)' =$

(b) $(x^a)' =$

(c) $\left(\sqrt{x}\right)' =$

(d) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

(e) $(a^x)' = (a > 0, a \neq 1)$

(f) $(e^x)' =$

(g) $(\log_a x)' =$

(h) $(\ln x)' =$

(i) $(\sin x)' =$

(j) $(\cos x)' =$

(k) $(\tan x)' =$

(l) $(\cot x)' =$

(m) $(\sec x)' =$

(n) $(\csc x)' =$

(o) $(\arcsin x)' =$

(p) $(\arccos x)' =$

(q) $(\arctan x)' =$

(r) $(\mathrm{arccot} x)' =$

3.（非重點）設 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+b & ,x>0\\ e^{2x} & ,x\le 0\end{cases}$，若 $f'(0)$ 存在，求 a、b 的值。

4.（非重點）已知函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近連續。通過以下哪一個選項的條件可以推斷出 $f'(1)=-2$？

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x^3)-f(1)}{\sin^2 x}=-2$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=1$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x^3)-f(1)}{\sin x-x}=-12$

5. 設函數 $f(x)=|\sin x|$，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 處 $\boxed{1\ 分}$

A. 不連續

B. 連續，但不可導

C. 可導，但不連續

D. 可導，且導數也連續

6. 求下列函數的導數。

(a) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(b) $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) $s = a\cos^2(2\omega t + \phi)$ $\boxed{1\text{ 分}}$

7. **（重點）** 函數 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一個原函數，則 $f(x) =$____________。 $\boxed{1 \text{ 分}}$

8. **（重點）** 函數 $y = e^{2-3x}$，則 $y^{(n)} =$____________。 $\boxed{1 \text{ 分}}$

9. 設 $y = xe^x$，則 $y^{(n)} =$ $\boxed{1 \text{ 分}}$
   - A. $e^x(x+n)$
   - B. $e^x(x-n)$
   - C. $2e^x(x+n)$
   - D. xe^{nx}

10. 求曲線 $y = \cos x$ 在點 $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ 處的切線和法線方程。 $\boxed{1 \text{ 分}}$

2.2 隱函數求導

1. 像是由方程 $F(x,y)=0$ 確定的 y 是 x 的函數我們叫它隱函數。隱函數的求導主要有兩種方法

   - 一個是把函數左右兩邊對兩邊求導，再通過移項等操作將 y' 移到等號一邊，其他項移到等號另一邊。需要注意，在求導時要將 x 看成 y 的函數，即在求導到關於 y 的多項式時鏈式法則需要一直波及到 x。
   - **（重點）** 另一個方法是帶公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$。其中，$F'_x$ 為 $F(x,y)$ 對 x 的偏導數，F'_y 為 $F(x,y)$ 對 y 的偏導數。在求函數對一個元的偏導數的時候，要將另一個元看作常數。

2. 求下列方程所確定的隱函數 y 的導數 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

   $xy=e^{x+y}$

3. **（重點）** 設 $x+y-xe^y=0$，求 $\mathrm{d}y$。 $\boxed{1\text{ 分}}$

2.3 參數方程確定的函數求導

1. **(重點)** 對於 $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ 這樣的函數，我們稱為參數方程確定的函數。它的導數可以這樣求：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

2. **(重點)** 設 $\begin{cases} x = \sin t + 3 \\ y = t - \cos 2t \end{cases}$，則 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$____________。 1 分

3. 設由方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所確定的函數為 $y = y(x)$，則在 $t = \frac{\pi}{2}$ 處導數為 1 分

   A. -1

   B. 1

   C. 0

   D. $-\frac{1}{2}$

4. 求下列方程所確定的隱函數 y 的二階導數 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 1 分

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

2.4 微分中值定理

1. **零點定理：** 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，$f(a)f(b) < 0$，則一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$。

   （重點）羅爾定理： 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，在 (a,b) 可導，$f(a) = f(b)$，則一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

   拉格朗日中值定理： 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，在 (a,b) 可導，則一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或者寫作 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$。

   柯西中值定理： 若函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，在 (a,b) 可導，$g'(x) \neq 0$，則一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

2. 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，在 (a,b) 可導，$f(a) = f(b) = 0$，並且 $a > 0, b > 0$。嘗試證明：

   (a) 在區間 (a,b) 內存在一點 ξ 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$。(“ξ”讀作“克西”) $\boxed{1\text{ 分}}$

   (b) 在區間 (a,b) 內存在一點 ϵ 使得 $5f(\epsilon) + \epsilon f'(\epsilon) = 0$。(“$\epsilon$”讀作“艾普西隆”) $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) **（重點）** 在區間 (a,b) 內存在一點 ζ 使得 $f(\zeta)+f'(\zeta)=0$。(“ζ” 讀作 “澤塔”) $\boxed{1\text{ 分}}$

(d) **（重點）** 在區間 (a,b) 內存在一點 η 使得 $5f(\eta)+f'(\eta)=0$。(“η” 讀作 “伊塔”) $\boxed{1\text{ 分}}$

(e) **（重點）** 在區間 (a,b) 內存在一點 μ 使得 $2\mu f(\mu)+f'(\mu)=0$。(“μ” 讀作 “謬”) $\boxed{1\text{ 分}}$

2.5 單調性與極值、凹凸性與拐點、函數作圖

1. **(重點)** 一階導大於 0 的是**增區間**，一階導小於 0 的是**減區間**，由增區間往減區間轉變的是**極大值點**，由減區間往增區間轉變的是**極小值點**。二階導大於 0 的是**凹區間**，二階導小於 0 的是**凸區間**，一階導等於 0 二階導大於 0 的是**極小值點**，一階導等於 0 二階導小於 0 的是**極大值點**，凹區間和凸區間交接處是**拐點**。

2. 若 $(x_0, f(x_0))$ 為連續曲線 $y = f(x)$ 上的凹弧與凸弧分界點，則 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $(x_0, f(x_0))$ 必定為曲線的拐點

   B. $(x_0, f(x_0))$ 必定為曲線的駐點

   C. x_0 為 $f(x)$ 的極值點

   D. x_0 必定不是 $f(x)$ 的極值點

3. 下列結論正確的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. 駐點一定是極值點

   B. 可導函數的極值點一定是駐點

   C. 函數的不可導點一定是極值點

   D. 函數的極大值一定大於極小值

4. **（重點）在同一表中** 討論 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的單調性、極值、凹凸性、拐點。 $\boxed{1\ 分}$

3 一元函數積分學

3.1 積分計算

1. **（重點）** 不定積分可以出很難的題。**實在做不出來就算了**。

2. **（重點）** 默寫常用的不定積分基本公式：

   (a) $\int k\mathrm{d}x = (k\text{為常數})$

   (b) $\int x^a\mathrm{d}x = (a \neq 1)$

   (c) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = (x \neq 0)$

   (d) $\int a^x\mathrm{d}x = (a > 0, a \neq 1)$

   (e) $\int e^x\mathrm{d}x =$

(f) $\int \sin x \mathrm{d}x =$

(g) $\int \cos x \mathrm{d}x =$

(h) $\int \tan x \mathrm{d}x =$

(i) $\int \cot x \mathrm{d}x =$

(j) $\int \sec x \mathrm{d}x =$

(k) $\int \csc x \mathrm{d}x =$

(l) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x =$

(m) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x =$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x =$

(p) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x =$

(r) $\displaystyle\int \sec x \tan x \mathrm{d}x =$

(s) $\displaystyle\int \csc x \cot x \mathrm{d}x =$

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\mathrm{d}x =$

(u) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\mathrm{d}x =$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\mathrm{d}x =$

(w) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x =$

3. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}2(x-1) & ,x<1\\ \ln x & ,x\geq 1\end{cases}$，則 $f(x)$ 的一個原函數是 $\boxed{1\ 分}$

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x-1) & ,x\geq 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x+1)-1 & ,x\geq 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x+1)+1 & ,x\geq 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x-1)+1 & ,x\geq 1\end{cases}$

4. 設 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，則 I、J、K 的大小關係為 $\boxed{1\ 分}$

A. $I<J<K$

B. $I<K<J$

C. $J<I<K$

D. $K<J<I$

5. 計算下列積分：

(a) $\int 3^x e^x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(b) **（重點）** $\int (3-2x)^3 \mathrm{d}x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) **（重點）** $\int \cos^2 3x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(d) **（重點）** $\int x\cos(x^2) \mathrm{d}x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(e) **（重點）** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(f) **(重點)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (第二類換元法) $\boxed{1\ 分}$

(g) **(重點)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$ (第二類換元法) $\boxed{1\ 分}$

(h)（非重點）$\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ (第二類換元法)

(i) **（重點）** $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos^2 2x \mathrm{d}x$ (定積分的幾何意義) $\boxed{1\ 分}$

(j) **（重點）** $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} \mathrm{d}x$ (定積分的幾何意義) $\boxed{1\ 分}$

(k) **（重點）** $\int_{-3}^{0} (x+\sqrt{9-x^2}) \mathrm{d}x$ (定積分的幾何意義) $\boxed{1\ 分}$

(l) **（重點）** $\displaystyle\int \arcsin x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(m) **（重點）** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(n) **（重點）** $\displaystyle\int x \ln(x+1) \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(o) **（重點）** $\displaystyle\int x^2 \ln 2x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(p) **（重點）** $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x} \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(q) **(重點)**（非重點） $\int_1^{+\infty}\left(3^{-x}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

6. 下列積分中的反常積分為 $\boxed{1\ 分}$

   A. $\int_0^1 \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x$
   B. $\int_0^1 \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x$
   C. $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
   D. $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$

7. 把有理函數 $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 化為部分分式的和，需要拆項為 $\boxed{1\ 分}$

   A. $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$
   B. $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$
   C. $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$
   D. $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

3.2 定積分應用

1. **(重點)** 直角座標下由 $y = f(x)$、$y = g(x)$、$x = a$、$x = b$ 圍成圖形的面積：

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

（非重點）極座標下由 $r = r_1(\theta)$、$r = r_2(\theta)$，$r_1(\theta) \le r_2(\theta)$，$\alpha \le \theta \le \beta$ 圍成圖形的面積：

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left[r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta) \right] \mathrm{d}x$$

2. 求直線 $y = 2x + 3$ 與拋物線 $y = x^2$ 所圍成圖形的面積。 $\boxed{1\text{ 分}}$

3. （非重點）求 $r = 2a\cos\theta$ 所圍成圖形的面積。

4. 有一個 $y = x^2$ 與 $y = 1$ 及 $x = 0$ 所圍成在第一象限內的圖形。

   (a) 求其繞 x 軸旋轉一週得到的旋轉體的體積。 $\boxed{1\ 分}$

   (b) 求其繞 y 軸旋轉一週得到的旋轉體的體積。 $\boxed{1\ 分}$

   (c)（非重點）求其繞直線 $y = x + 1$ 旋轉一週得到的旋轉體的體積。

5. **（重點）** 本題有兩小問。

   (a) 求曲線 $y = x^2$，直線 $y = 0$ 及 $x = 3$ 所圍成的圖形的面積。 $\boxed{1\ 分}$

   (b) 將上述平面圖形繞 y 軸旋轉一週，求所得立體的體積。 $\boxed{1\ 分}$

4 常微分方程

4.1 微分方程的階數

1. 微分方程 $y'' = 2x^2 + 3$ 的階數為 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   D. 4

2. $xy(y')^2 - yy' - x = 0$ 為____________階的微分方程。 $\boxed{1\text{ 分}}$

3. $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + Q^3\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q = 0$ 為____________階的微分方程。 $\boxed{1\text{ 分}}$

4.2 一階微分方程的種類及解法

1. **（重點）** 一階非齊次線性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式為

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

2. 求解下列微分方程。

   (a) $xy' - y\ln y = 0$ 1 分

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10^{x+y}$ 1 分

(c) **（重點）** $(x^2-1)y' + 2xy - \cos x = 0$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(d) **（重點）** $y' + y\sin x = e^{\cos x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

4.3 可降階的高階微分方程求解

1. 求解下列微分方程。

   (a) $y''' = \sin 2x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

   (b)（非重點）求微分方程 $y'' + 2xy'^2 = 0$ 滿足初始條件 $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{2}$ 的特解。

   (c)（非重點）求微分方程 $yy'' + y'^2 = y'$ 的通解。

(d)（非重點）求微分方程 $y''' = \dfrac{3x^2}{1+x^3}y''$ 滿足初始條件 $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 4$ 的特解。

(e)（非重點）**（重點）** $y'' - y' = x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

4.4 高階常係數線性齊次（非齊次）微分方程

1. 對於二階常係數齊次線性微分方程 $y''+py'+qy=0$，先由其特徵方程 $r^2+pr+q=0$ 求出解 r_1,r_2，若

    1. r_1,r_2 為兩個不相等的實根，微分方程通解為 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；
    2. r_1,r_2 為兩個相等的實根，微分方程通解為 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；
    3. r_1,r_2 為兩個共軛虛根 $\alpha\pm\beta i$，微分方程通解為 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

2. 對於二階常係數非齊次線性微分方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{kx}$ 的特解，首先設 $Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 與 $P(x)$ 次數相同，再

    1. 若 k 非特徵值，則特解為 $y^*=Q(x)e^{kx}$；
    2. 若 k 與一個特徵值相同，則特解為 $y^*=xQ(x)e^{kx}$；
    3. 若 k 與兩個特徵值相同，則特解為 $y^*=x^2Q(x)e^{kx}$。

3. 求解下列微分方程。

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 0$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) $y'' - 4y' + 3' = 0, y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(d) **（重點）** $y'' + 6y' + 9y = (3x+1)e^{3x}$ $\boxed{1\ 分}$

(e) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ $\boxed{1\ 分}$