《高等数学（上)》期末复习题（满分 100 分）
镜州商贸学院（新圩）　　　　姓名：陳清

> **免责声明：**
> 本补习为镜州商贸学院（新圩）部分学生之**自发行为**，与其他任何学校、任何老师或任何同学无关。本课程**不占学时，不影响平时成绩，不附赠二课学分**，不强制同学参加，也**不保证参加同学一定能够及格**。如果本补习使用之复习题与任何学校之教材或考试题目雷同，那**太正常了**。因为《高等数学》一共就这么几个知识点，变来变去也变不出多少花样。你让我上哪儿找那么多新题型去？

注：在本复习题中，带有**（重点）**标注的题目为该小节中的关键概念及重点题目，这些题目在期末考试中往往经常出现，并且稍加学习便很容易掌握，是我们复习的重点。带有（非重点）标注的题目为非重点题目，这些题目在期末考试中很少出现，或者学习难度很高，不是我们复习的重点。不带有标注的题目为普通题目，它们在期末考试中出现的可能性和学习难度一般。

1　函数、极限、连续

1.1　函数极限与数列极限的计算

1. **（重点）**默写常用的麦克劳林公式。

(a) $e^x =$

$$\boxed{1+x+\frac{x^2}{2}}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

(b) $\sin x =$

$$\boxed{x-\frac{x^3}{6}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

(c) $\cos x =$

$$\boxed{1-\frac{x^2}{2}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

(d) $\ln(1+x) =$

$$\boxed{x-\frac{x^2}{2}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$$

例1：你　本金　$1
銀行　年利率　100%
你存錢，一年能拿多少？

一年一取　$1+1=2$
半年一取　$(1+\frac{1}{2})^2=2.25$
一季一取　$(1+\frac{1}{4})^4=2.44\cdots$
一月一取　$(1+\frac{1}{12})^{12}=2.61\cdots$
一天一取　$(1+\frac{1}{365})^{365}=2.71\cdots$
⋮
住在銀行　$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ ← 自然常数

例2：$\lim_{馅\to 0}$ 包子 = 馒頭
$\lim_{馅\to \infty}$ 包子 = 丸子

2.（**重点**）极限的计算方法：

麦克劳林公式： 1. 没有 0 的直接带进去算；

2. 有 0 的想办法把 0 显现出来；

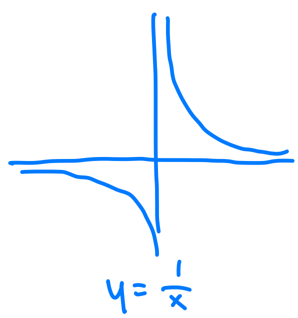
3. 带麦克劳林公式化成多项式；

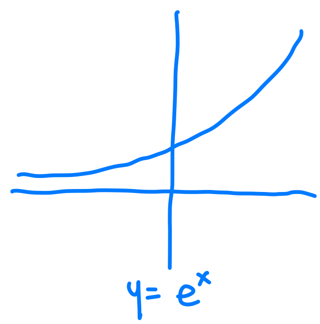
4. 把 0 约掉，得到结果。

麦克劳林公式的用法： 乘除带一项；加减带多项，带到与分子/分母同次为止。

洛必达法则： 若 [略]，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

1 **加** 0 **的次方：** 对于 $(1+0)^?$ 形式的极限，要翻成 $e^{?\ln(1+0)}$ 的型式再计算。





A

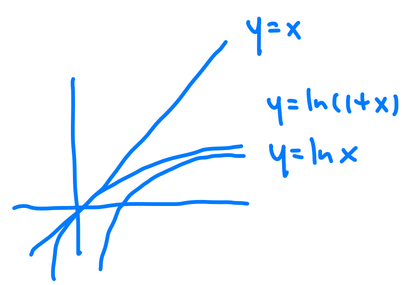
3. 下列极限正确的是 1 分

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$ ✓ $x\to 0^-$, $\frac{1}{x}\to-\infty$, $e^{\frac{1}{x}}=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=0$ × $x\to 0^+$, $\frac{1}{x}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\sec x}=e$ ×

D. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ×



C. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ 没有0

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+1)^{1}=2$

D. 单看 $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x}}}\to 0$

$=e^{0}=1$

4. 计算下列极限。

(a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$ 没有0 $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\dfrac{(\sqrt{3})^2-2}{(\sqrt{3})^4+(\sqrt{3})^2+1}$

$=\dfrac{3-2}{9+3+1}=\dfrac{1}{13}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{(x-1)\to 0^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}$

$=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{t}{|t|}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{-t}=-1$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ $\boxed{1\text{ 分}}$

法1：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{(1-x)(x^2+x+1)}-\dfrac{3}{(1-x)(x^2+x-1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(1-x)}(x^2+x+1)}$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

$=-1$

法2：洛必达

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{-3x^2}$

$=-1$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

分子分母同除以 x^{50}

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(5+\frac{1}{x})^{50}}$

$=(\frac{2}{5})^{20}(\frac{3}{5})^{30}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$（其中 $m>0,n>0$ 为常数） $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}$

若 $n>m$， $=0$

若 $n=m$， $=1$

若 $n<m$， $=\infty$

(f)（非重点）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$（放缩法）

放大：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

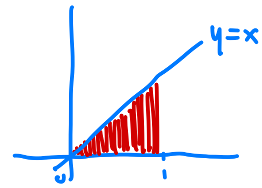
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$

缩小：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

$1\le$ 原式 ≤ 1

所以 原式 $=1$



(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$（定积分的定义或者暴力求解） 1 分

法1：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}{1}=\frac{1}{2}$

法2：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\right)$

$=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+\cdots+f(\tfrac{n}{n})\right]=\int_0^1 f(x)\,dx$

(h)（非重点）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$（定积分的定义）

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

单调有界

(i)（非重点）设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

對於 $a_k>0$，有 $a_{k+1}=\ln(1+a_k)>0$

又因為 $a_1>0$

由數學歸納法可得 $a_n>0$ 有界

當 $n>0$ 時，$a_{n+1}-a_n=\ln(1+a_n)-a_n<0$

所以 a_n 遞減 单调

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+a_n)$

$A=\ln(1+A)$

解得 $A=0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$x\to 0$, $\frac{1}{x}\to\infty$, $\sin\frac{1}{x}$

有界 × 無窮小，原式 $= 0$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x = 0$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

(n) **(重点)** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

期末原題

看老師對你多好

坑都不敢往深裡挖

原式 $= 0$

(o) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 3x}{x\sin 2x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x\cdot x\cdot\sin 2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)^2}{1^2\ x\cdot 2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{2x^2}$

$= \dfrac{9}{2}$

(p) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{1-(1-\frac{1}{2}x^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$

$= 2$

(q) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$= -\dfrac{1}{2}$

(r) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x\cdot x\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-(1-\frac{1}{2}x^2))}{1\quad x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}$

$= \dfrac{1}{2}$

(s)（重点）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}$ 　$\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{4}{x})}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{4}{x})}{\frac{1}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{4}$

(t)（重点）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 　$\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

(u)（重点）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ 　$\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to 0} e^{(x+1)\ln(1+\frac{2}{2x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{2x+2}{2x+1}}$

$= e^{2}$

(v)（重点）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{3n}$ 　$\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n})^{3n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} e^{3n\ln(1-\frac{2}{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} e^{-3n\cdot\frac{2}{n}} = e^{-6}$

(w)（重点）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{4-\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$ 　$\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{4-(1-\frac{1}{2}x^2)}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{3+\frac{1}{2}x^2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[(1+\frac{1}{6}x^2)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{6}x^2)}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{6}x^2}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{x}{6}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1+\frac{x}{6}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{6}$

$=\frac{1}{6}$

(x)（非重点）$\lim\limits_{x\to \cancel{0}\ +\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

~~原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$~~

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2[\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})]}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2})]}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}$

(y) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ 1 分

法1：泰勒公式

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}$

$=2$

法2：洛必達

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$

$=2$

法3：拉格朗日中值定理

$f(x)$ $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导

$\exists\, c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

即 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^c(x-(-x))}{\sin x}$，$c$ 在 $-x, x$ 中间

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin x}=2$

(z)（非重点）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$（拉格朗日中值定理）

法1：泰勒公式

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x-\frac{1}{6}x^3)-\cos x}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3)^2+\frac{1}{24}(x-\frac{1}{6}x^3)^4-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)}{x^4}$

$=?$

法2. 拉格朗日中值定理

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin c(\sin x-x)}{x^4}$，$c$ 在 $x, \sin x$ 中间

$=-\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin c}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sin x}{x}=1$（放缩）

所以 $1\le\dfrac{\sin c}{x}\le1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin c}{x}=1$

原式 $=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{1}{6}x^3-x}{x^3}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{6}$

() $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\boxed{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}}{x\sin^9 x}$（洛必达法则） 1 分

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{x^{10}}$

$\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt$ 外 内

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\cos x^4\cdot2x}{10x^9}$

$=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^4}{x^8}$

$=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(1-\frac{1}{2}x^8)}{x^8}$

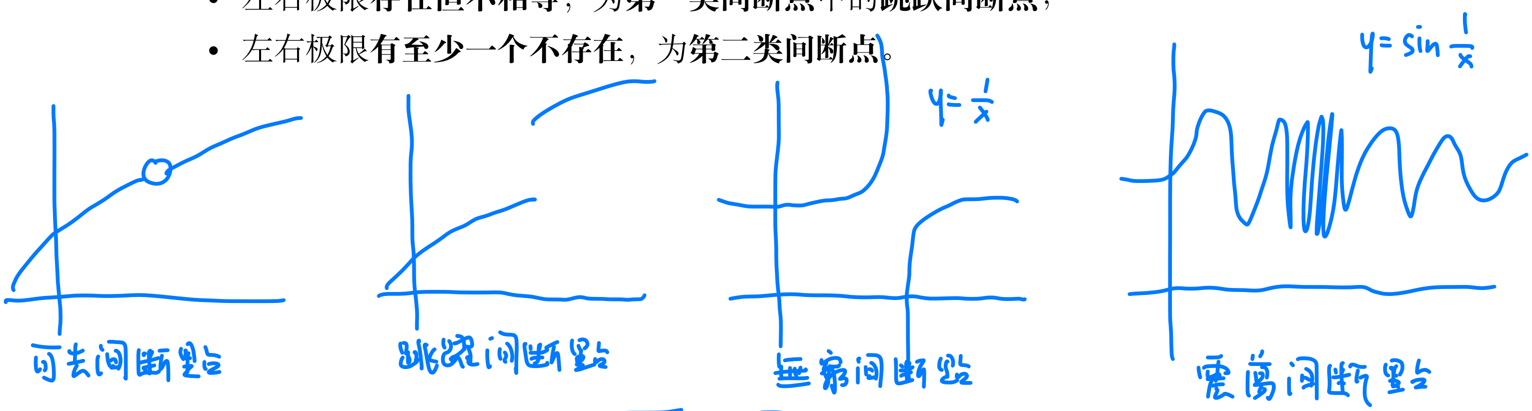
$=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^8}{x^8}=\dfrac{1}{10}$

下一頁附加題

1.2 函数的连续性与间断点

1. **（重点）** 当函数在一点的左右极限存在并且相等，则说函数在这个点有**极限**，这个极限是它的左右极限值。当函数在一点的极限值等于函数值，则说函数在这一点**连续**。否则，则说函数在这一点**间断**，这一点是函数的**间断点**。间断点的分类如下：

- 左右极限**存在且相等**，为**第一类间断点**中的**可去间断点**；
- 左右极限**存在但不相等**，为**第一类间断点**中的**跳跃间断点**；
- 左右极限**有至少一个不存在**，为**第二类间断点**。



第一类间断点　　　　第二类间断点

2. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$、$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左右极限，并说明它们当 $x\to 0$ 时的极限是否存在。 $\boxed{1\ 分}$

$f(x)$：左极限 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=1$
右极限，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$
左右极限相等，极限存在

$g(x)$：左极限 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$
右极限 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$
左右极限不相等，极限不存在

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)\,dt}{\int_0^x t f(x-t)\,dt}$

令 $x-t=u$，$t=x-u$，$dt=-du$

$\int_0^x f(x-t)\,dt=-\int_x^0 f(u)\,du=\int_0^x f(u)\,du$

$\int_0^x t f(x-t)\,dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)\,du=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x u f(u)\,du$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x f(u)\,du}{x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x u f(u)\,du}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du+\cancel{xf(x)}-\cancel{xf(x)}}$

$=1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du}$ 不能接着用洛必达

$=1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\int_0^x f(u)\,du-0}f(x)$

$=1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{f(x)}=1+1=2$

B

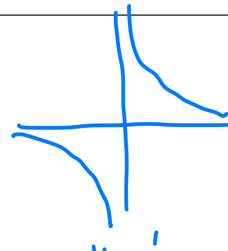
3. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 1 分

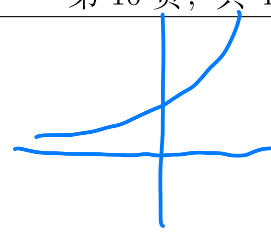
A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 第二类间断点

D. 连续点





$x\to0^-$，$\frac{1}{x}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to0$，$f(x)\to-1$

$x\to0^+$，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，$f(x)\to1$

左右极限不相等 跳躍間斷點

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并分类。 1 分

$x=0$: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

$=\dfrac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

$=\dfrac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

無窮間斷點

$x=1$: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

$=e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=e$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

$=e\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=-e$

跳躍間斷點

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x & ,0<x<1\\ 2 & ,x=1\\ 2+x & ,1<x<2\end{cases}$，则 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的 跳跃 间断点。 1 分

yuè

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=3$

注意一下跳躍俩字怎麼写 别写错了

6. **（重点）** 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & ,x\le0\\ x-2 & ,x>0\end{cases}$，则 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的 跳跃 间断点。 1 分

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-2$

1.3 渐近线

1.
- **（重点）** 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，或 $f(a-0)=\infty$ 或 $f(a+0)=\infty$，称 $x=a$ 为 $L: y=f(x)$ 的**铅直渐近线**；
- **（重点）** 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，称 $y=A$ 为 $L: y=f(x)$ 的**水平渐近线**；
- （非重点）若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，称 $y=ax+b$ 为 $L: y=f(x)$ 的**斜渐近线**。

2. 曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线为 $\boxed{1\text{ 分}}$

疑似：$x=1$，$x=-1$

$x=1$：$\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\infty$，$x=1$ 是铅直渐近线

$x=-1$：$\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac12$，$x=-1$ 不是铅直渐近线

3. 曲线 $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 的水平渐近线为 $\boxed{1\text{ 分}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac3x}{2-\frac1x}=\dfrac12$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac12$

$y=\frac12$ 是水平渐近线

斜渐近线：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac2x+\ln(1+e^x)-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)\right)=0$

$y=x$ 是斜渐近线

4. （非重点）求曲线 $y=\dfrac{2}{x}+\ln(1+e^x)$ 的全部渐近线。

铅直渐近线

疑似 $x=0$

$\lim\limits_{x\to0} y=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac2x+\ln(1+e^x)\right)=\infty$

$x=0$ 是铅直渐近线

水平渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac2x+\ln(1+e^x)\right)=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac2x+\ln(1+e^x)\right)=0$

$y=0$ 是水平渐近线

1.4 无穷小与无穷大

1. 对于 $x \to a$ 时的两个无穷小 $f(x)$ 和 $g(x)$，

- 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**高阶无穷小**，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**低阶无穷小**；
- 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小**，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**低阶无穷小**；
- 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C(C\text{为常数})$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为**同阶无穷小**；
- **（重点）** 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为**同阶无穷小**中的一个特殊情况，**等价无穷小**。

C 2. 当 $x \to 0$ 时，下列变量中是无穷小量的有 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $\sin\dfrac{1}{x}$ × $x\to 0$, $\frac{1}{x}\to\infty$. $\sin\frac{1}{x}$

B. $\dfrac{\sin x}{x}$ × $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

C. $2^{-x}-1$ ✓ $x\to 0$, $2^{-x}\to 1$, $2^{-x}-1\to 0$

D. $\ln|x|$ × $x\to 0$, $\ln|x|\to -\infty$

3. 函数 $\dfrac{1+2x^3}{x^2}$ 为当 $x \to 0$ 时的无穷__大__量。 $\boxed{1\text{ 分}}$

$2x^3 \to 0$

$x^2 \to 0$

D

4. 无穷多个无穷小量之和 1 分

A. 必是无穷小量

B. 必是无穷大量

C. 必是有界量

D. 可能是无穷小，可能是无穷大，也有可能是有界量

D

5. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$，则下列正确的是 1 分

A. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \infty$

B. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \infty$

C. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

D. $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = \infty$

6. $\sin x$ 与 x 当 $x \to 0$ 时为__同阶__无穷小。 1 分

等価

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

7. $1 - \cos x$ 与 x^2 当 $x \to 0$ 时为__同阶__无穷小。 1 分

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

B 8. 当 $x \to 0$ 时，与 $\ln(1+x^2)$ 为同阶无穷小但不为等价无穷小的是 1 分

A. $\sin x \tan^2 x$ 高阶

B. $1-\cos x$ 同阶

C. $(1+\frac{1}{2}x^2)^2-1$ 同阶等价.

D. $x\sin x$ 同阶等價

A. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan^2 x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{\ln(1+x^2)\cdot\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$

C. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{1}{2}x^2)^2-1}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\ln(1+\frac{1}{2}x^2)}-1}{\ln(1+x^2)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2} = 1$

D. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$

A 9. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则 1 分

A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$

C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x-(ax-\frac{1}{6}(ax)^3)}{x^2(-bx)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\boxed{(1-a)}x+\frac{1}{6}a^3x^3}{-bx^3} = 1$

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

$\frac{1}{6}a^3=-b \Rightarrow b=-\frac{1}{6}$

$x\to 0$, $\arctan x \sim x$

10.（非重点）设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right]}{\arctan x} = 1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{(1-\cos x)\tan x}$。（等价无穷小代换）

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\frac{f(x)}{x^2}]}{\arctan x} = 1$,

所以題鬼 $\frac{f(x)}{x}$ 为無窮小，

同時 $f(x)$ 為無窮小

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\frac{f(x)}{x^2}]}{\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = 1$

原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\frac{x^3}{(1-\cos x)\tan x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos x}{(1-\cos x)\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{[1-(1-\frac{1}{2}x^2)]x}$

$= 2$

1.5 函数的性质

D

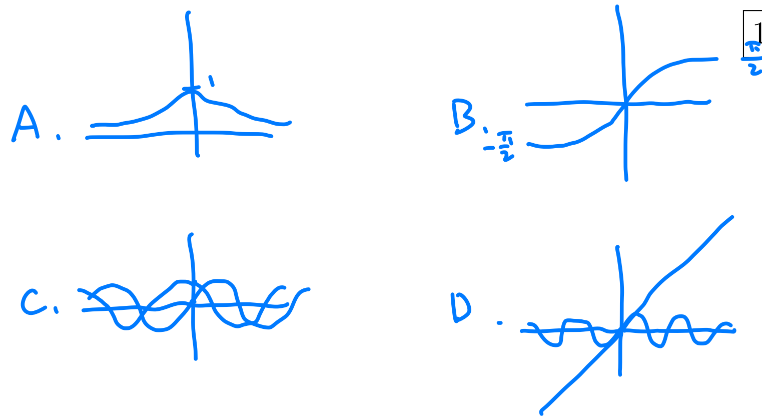
1. 下列函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

   B. $y = \arctan x$

   C. $y = \sin x + \cos x$

   D. $y = x \sin x$



2. 求下列函数的定义域。 $\boxed{1\text{ 分}}$
   $y = \ln(x+5)$

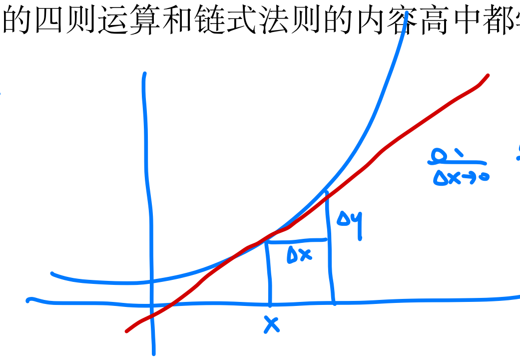
   $x > -5$

2 一元函数微分学

2.1 导数的定义与复合函数求导

1. （非重点）**导数**指的是一个函数在某一瞬间的变化率。比如说位移的导数是速度，速度的导数是加速度。例如函数 $f(x)$ 在 x 时点的变化率 $f'(x)$ 可以写成 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to x} \dfrac{f(h) - f(x)}{h - x}$。关于导数的四则运算和链式法则的内容高中都学过，这里就不细讲了。

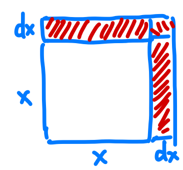
例1:



$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

2. **（重点）**默写常用的求导基本公式。
   (a) $(C)' =$ 0
   (b) $(x^a)' =$ $a x^{a-1}$
   (c) $(\sqrt{x})' =$ $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   (d) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$ $(x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
   (e) $(a^x)' = (a > 0, a \neq 1)$ $a^x \ln a$
   (f) $(e^x)' =$ e^x
   (g) $(\log_a x)' =$ $\frac{1}{x \ln a}$
   (h) $(\ln x)' =$ $\frac{1}{x}$

例2:



正方形 邊長 x

面積 $y = x^2$

邊長變長 dx

面積變大 dy 為多少?

$dy = 2x\,dx + (dx)^2 \leftarrow o(dx)$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

(i) $(\sin x)' =$ $\cos x$

(j) $(\cos x)' =$ $-\sin x$

(k) $(\tan x)' =$ $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(l) $(\cot x)' =$ $-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(m) $(\sec x)' =$ $\sec x \tan x$

(n) $(\csc x)' =$ $-\csc x \cot x$

(o) $(\arcsin x)' =$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(p) $(\arccos x)' =$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(q) $(\arctan x)' =$ $\frac{1}{1+x^2}$

(r) $(\text{arccot} x)' =$ $-\frac{1}{1+x^2}$

3.（非重点）设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+b & ,x>0\\ e^{2x} & ,x\le 0\end{cases}$，则 $f'(0)$ 存在，求 a、b 的值。

导数存在 → $\boxed{\text{左右导数}}$存在且$\boxed{\text{相等}}$

↓

函数连续 → $\boxed{\text{左右极限}}$存在且$\boxed{\text{等于函数值}}$

$\lim_{x\to0^+}\ln(1+ax)+b=f(0)=1$, $\Rightarrow b=1$

$f'(0)_-=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax)+1-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=a$

$f'(0)_+=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$

$\Rightarrow a=2$

D

4.（非重点）已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近连续。通过以下哪一个选项的条件可以推断出 $f'(1)=-2$？

A. $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$ ×

B. $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x^3)-f(1)}{\sin^2x}=-2$ ×

C. $\lim_{x\to0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=1$ ×

D. $\lim_{x\to0}\frac{f(1-x^3)-f(1)}{\sin x-x}=-12$ ✓

A. $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\cdot\frac{1}{2}=-2$, $\Rightarrow f'(1)=-4$

B. $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x^3)-f(1)}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\sin^2x}=f'(1)\cdot$无穷小$=-2$

$\Rightarrow f'(1)=$无穷大

C. $\lim_{x\to0}\frac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{\cos x-1}\cdot(-\frac{1}{2})=1$ $\cancel{\Rightarrow}$ $f'(1)=-2$

因为 $x\to0$ 时 $\cos x-1\le0$，只能 $\Rightarrow f'(1)_-=-2$

D. $\lim_{x\to0}\frac{f(1-x^3)-f(1)}{x-\frac{1}{6}x^3-x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-x^3)-f(1)}{-x^3}\cdot 6=-12$

$\Rightarrow f'(1)=-2$

B

5. 设函数 $f(x)=|\sin x|$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 1 分

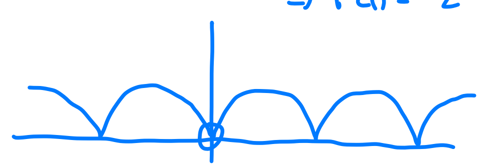
A. 不连续

B. 连续，但不可导

C. 可导，但不连续

D. 可导，且导数也连续

法1:



法2: $f(0)=|\sin 0|=|0|=0$

$f(0)_-=\lim_{x\to0^-}|\sin x|=\lim_{x\to0^-}-\sin x=0$

$f(0)_+=\lim_{x\to0^+}|\sin x|=\lim_{x\to0^+}\sin x=0$

连续

$f'(0)_-=\lim_{x\to0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$

$f'(0)_+=\lim_{x\to0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

不可导

6. 求下列函数的导数。

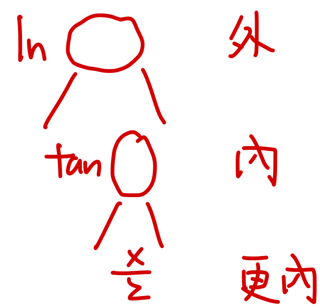
(a) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$$y' = e^{\arctan\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$$y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

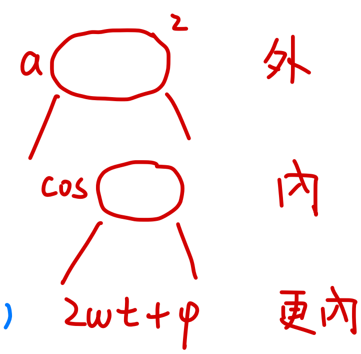
$$= \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \cdot \sec^2\frac{x}{2}$$



(c) $s = a\cos^2(2\omega t + \phi)$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$$s' = -2a\cos(2wt+\varphi)\cdot\sin(2wt+\varphi) \cdot 2w$$

$$= -4aw\cos(2wt+\varphi)\cdot\sin(2wt+\varphi)$$



去年期末考题 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)\,dt$

$$f(x^2)\cdot 2x = 2x f(x^2)$$

7. **（重点）** 函数 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x) =$______。 1 分

$$\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

8. **（重点）** 函数 $y = e^{2-3x}$，则 $y^{(n)}$ $= (-3)^n e^{2-3x}$。 1 分

$y' = e^{2-3x}(-3)$

$y'' = e^{2-3x}(-3)^2$

$y''' = e^{2-3x}(-3)^3$

A 9. 设 $y = xe^x$，则 $y^{(n)} =$ 1 分

A. $e^x(x+n)$

B. $e^x(x-n)$

C. $2e^x(x+n)$

D. xe^{nx}

$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

$y''' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$

10. 求曲线 $y = \cos x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{2})$ 处的切线和法线方程。 1 分

$y' = -\sin x$. $y'|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

切线：$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$，整理 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi) = 0$

法线：$y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})$，整理 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0$

2.2 隐函数求导

1. 像是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 y 是 x 的函数我们叫它隐函数。隐函数的求导主要有两种方法

   - 一个是把函数左右两边对两边求导，再通过移项等操作将 y' 移到等号一边，其他项移到等号另一边。需要注意，在求导时要将 x 看成 y 的函数，即在求导到关于 y 的多项式时链式法则需要一直波及到 x。
   - **（重点）** 另一个方法是带公式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$。其中，$F'_x$ 为 $F(x,y)$ 对 x 的偏导数，F'_y 为 $F(x,y)$ 对 y 的偏导数。在求函数对一个元的偏导数的时候，要将另一个元看作常数。

曲线 $3y^2=x^2(x+1)$ 在点 $(2,2)$ 处的切线斜率是？切线方程是？

法1：$6yy'=3x^2+2x \Rightarrow y'=\frac{3x^2+2x}{6y}$，$y'|_{(2,2)}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

法2：$F(x,y)=3y^2-x^3-x^2$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F_y}=-\frac{-3x^2-2x}{6y}$，$\frac{dy}{dx}|_{(2,2)}=\frac{4}{3}$

斜率：$\frac{4}{3}$

切线方程：$y-2=\frac{4}{3}(x-2)$

2. 求下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 1 分

   $xy=e^{x+y}$

法1：$y+xy'=e^{x+y}(1+y')$

$y+xy'=e^{x+y}+y'e^{x+y}$

$(x-e^{x+y})y'=e^{x+y}-y$

$y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$

法2：$F(x,y)=xy-e^{x+y}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F_y}=-\frac{y-e^{x+y}}{x-e^{x+y}}$

3. **（重点）** 设 $x+y-xe^y=0$，求 $\mathrm{d}y$。 1 分

法1：$1+y'-e^y-xe^yy'=0$

$(1-xe^y)y'=e^y-1$

$y'=\frac{e^y-1}{1-xe^y}$

$dy=\frac{e^y-1}{1-xe^y}\,dx$

法2：$F(x,y)=x+y-xe^y$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{1-e^y}{1-xe^y}$

$dy=-\frac{1-e^y}{1-xe^y}\,dx$

2.3 ~~复合函数~~求导 参数方程确定的函数

1. **（重点）** 对于 $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ 这样的函数，我们称为~~复合函数~~。它的导数可以这样求：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

2. **（重点）** 设 $\begin{cases} x = \sin t + 3 \\ y = t - \cos 2t \end{cases}$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$ ________。 1 分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1+2\sin 2t}{\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{4\cos 2t\cos t + (1+2\sin 2t)\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t}$$

$$= \frac{\sin t + 4\cos 2t\cos t + 2\sin 2t\sin t}{\cos^3 t}$$

B 3. 设由方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数为 $y = y(x)$，则在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处导数为 1 分

90°

A. -1

B. 1

C. 0

D. $-\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

4. 求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 1 分

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

2.4 微分中值定理

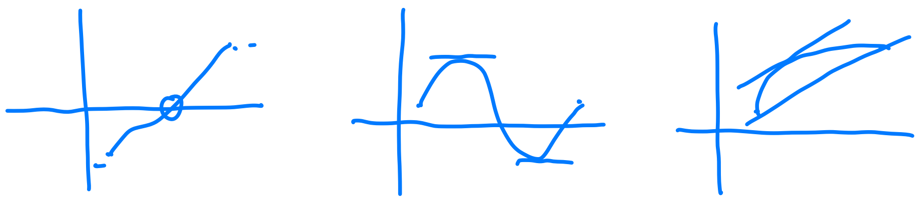
1. **零点定理：** 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(a)f(b)<0$，则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$。

   （重点）罗尔定理： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)$，则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

   二次

   拉格朗日中值定理： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或者写作 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

   柯西中值定理： 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$g'(x)\neq 0$，则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。



2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)=0$，并且 $a>0,b>0$. 尝试证明：

   (a) 在区间 (a,b) 内存在一点 ξ 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。（“ξ” 读作 “克西”） [1 分]

   设 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

   题然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g(a)=g(b)=0$

   $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $g'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

   (b) 在区间 (a,b) 内存在一点 ϵ 使得 $5f(\epsilon)+\epsilon f'(\epsilon)=0$。（“$\epsilon$” 读作 “艾普西隆”） [1 分]

   设 $g(x)=x^5f(x)$，$g'(x)=5x^4f(x)+x^5f'(x)=x^4[5f(x)+xf'(x)]$

   题然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g(a)=g(b)=0$

   $\exists\,\varepsilon\in(a,b)$，使 $g'(\varepsilon)=\varepsilon^4[5f(\varepsilon)+\varepsilon f'(\varepsilon)]=0$

   又因为 $\varepsilon^4\neq 0$，所以 $5f(\varepsilon)+\varepsilon f'(\varepsilon)=0$

(c)（**重点**）在区间 (a,b) 内存在一点 ζ 使得 $f(\zeta)+f'(\zeta)=0$。(“ζ” 读作 “泽塔”) $\boxed{1\text{ 分}}$

设 $g(x)=e^x f(x)$， $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$

显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导， $g(a)=g(b)=0$

$\exists\, \zeta\in(a,b)$，使 $g'(\zeta)=e^{\zeta}[f(\zeta)+f'(\zeta)]=0$

又因为 $e^{\zeta}\neq 0$，所以 $f(\zeta)+f'(\zeta)=0$

(d)（**重点**）在区间 (a,b) 内存在一点 η 使得 $5f(\eta)+f'(\eta)=0$。(“η” 读作 “伊塔”) $\boxed{1\text{ 分}}$

设 $g(x)=e^{5x}f(x)$， $g'(x)=5e^{5x}f(x)+e^{5x}f'(x)=e^{5x}[5f(x)+f'(x)]$

显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导， $g(a)=g(b)=0$

$\exists\, \eta\in(a,b)$，使 $g'(\eta)=e^{5\eta}[5f(\eta)+f'(\eta)]=0$

又因为 $e^{5\eta}\neq 0$，所以 $5f(\eta)+f'(\eta)=0$

(e)（**重点**）在区间 (a,b) 内存在一点 μ 使得 $2\mu f(\mu)+f'(\mu)=0$。(“μ” 读作 “谬”) $\boxed{1\text{ 分}}$

设 $g(x)=e^{x^2}f(x)$， $g'(x)=2xe^{x^2}f(x)+e^{x^2}f'(x)=e^{x^2}[2xf(x)+f'(x)]$

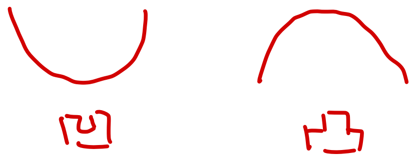
显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导， $g(a)=g(b)=0$

$\exists\, \mu\in(a,b)$，使 $g'(\mu)=e^{\mu^2}[2\mu f(\mu)+f'(\mu)]=0$

又因为 $e^{\mu^2}\neq 0$，所以 $2\mu f(\mu)+f'(\mu)=0$

2.5 单调性与极值、凹凸性与拐点、函数作图

1. **(重点)** 一阶导大于 0 的是**增区间**，一阶导小于 0 的是**减区间**，由增区间往减区间转变变的是**极大值点**，由减区间往增区间转变变的是**极小值点**。二阶导大于 0 的是**凹区间**，二阶导小于 0 的是**凸区间**，一阶导等于 0 二阶导大于 0 的是**极小值点**，一阶导等于 0 二阶导小于 0 的是**极大值点**，凹区间和凸区间交接处是**拐点**。



A

2. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线 $y = f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点，则 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的拐点

   B. $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的驻点

   C. x_0 为 $f(x)$ 的极值点

   D. x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点

B

3. 下列结论正确的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. 驻点一定是极值点

   B. 可导函数的极值点一定是驻点

   C. 函数的不可导点一定是极值点

   D. 函数的极大值一定大于极小值

4.（**重点**）**<u>在同一表中</u>** 讨论 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的单调性、极值、凹凸性、拐点。 $\boxed{1\text{ 分}}$

$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$，令 $y' = 0$，得 $x_1 = 0$，$x_2 = 2$

$y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$，令 $y'' = 0$，得 $x_3 = 1$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y		1		3		5	

函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调减，在 $(0, 2)$ 内单调增，在 $(2, +\infty)$ 内单调减

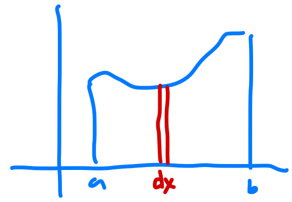
當 $x = 0$ 時，函数取得极小值 1，當 $x = 2$ 時，函数取得极大值 5

函数在 $(-\infty, 1)$ 内凹，在 $(1, +\infty)$ 内凸，

點 $(1, 3)$ 為函数的拐点

3 一元函数积分学

3.1 积分计算



$\int_a^b f(x)\,dx$

1. **（重点）**不定积分可以出很难的题。**实在做不出来就算了**。

   $+C$

2. **（重点）**默写常用的不定积分基本公式：

   (a) $\displaystyle\int k\mathrm{d}x =$ (k为常数)

   $kx + C$

   (b) $\displaystyle\int x^a\mathrm{d}x =$ $(a \neq 1)$

   $\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x =$ $(x \neq 0)$

   $\ln|x| + C$

   (d) $\displaystyle\int a^x\mathrm{d}x =$ $(a > 0, a \neq 1)$

   $\frac{a^x}{\ln a} + C$

   (e) $\displaystyle\int e^x\mathrm{d}x =$

   $e^x + C$

(f) $\int \sin x \mathrm{d}x =$

$-\cos x + C$

(g) $\int \cos x \mathrm{d}x =$

$\sin x + C$

(h) $\int \tan x \mathrm{d}x =$

$-\ln|\cos x| + C$

(i) $\int \cot x \mathrm{d}x =$

$\ln|\sin x| + C$

(j) $\int \sec x \mathrm{d}x =$

$\ln|\sec x + \tan x| + C$

(k) $\int \csc x \mathrm{d}x =$

$\ln|\csc x - \cot x| + C$

(l) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x =$

$\tan x + C$

(m) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x =$

$-\cot x + C$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$

$\arcsin x + C$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x =$

$\arcsin \frac{x}{a} + C$

(p) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$

$\arctan x + C$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$

(r) $\displaystyle\int \sec x \tan x \mathrm{d}x =$

$\sec x + C$

(s) $\displaystyle\int \csc x \cot x \mathrm{d}x =$

$-\csc x + C$

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x =$

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(u) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x =$

$$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x =$

$$\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

(w) $\displaystyle\int \sqrt{\cancel{x^2-a^2}}\mathrm{d}x =$

a^2-x^2

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

D

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1) & ,x<1\\ \ln x & ,x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x-1) & ,x\geq 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x+1)-1 & ,x\geq 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x+1)+1 & ,x\geq 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x-1)+1 & ,x\geq 1\end{cases}$

$\int 2(x-1)\,dx = (x-1)^2+C_1$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x$

$= x\ln x - x + C_2$

$= x(\ln x - 1) + C_2$

A. $F(1)_- = 0$ $\quad F(1)_+ = -1$

D. $F(1)_- = 0$ $\quad F(1)_+ = 0$

B

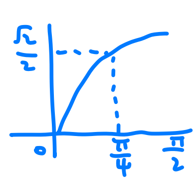
4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$，$\overset{K}{\cancel{I}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，则 I、J、K 的大小关系为 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $I<J<K$

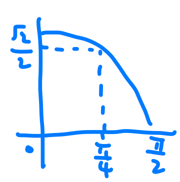
B. $I<K<J$

C. $J<I<K$

D. $K<J<I$



sin x



cos x

$\dfrac{\cos x}{\sin x}$

cot x

5. 计算下列积分：

(a) $\int 3^x e^x \mathrm{d}x$ 　　1 分

$$原式 = \int (3e)^x \, dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1} + C$$

(b) **(重点)** $\int (3-2x)^3 \mathrm{d}x$ 　　1 分

法1：猜

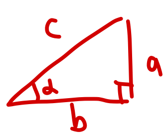
$$[(3-2x)^4]' = -8(3-2x)^3$$

$$原式 = -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$$

法2：
$$原式 = -\frac{1}{2}\int \boxed{-2}(3-2x)^3 \, dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^3 \, d(3-2x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(3-2x)^4 + C = -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$$

(c) **(重点)** $\int \cos^2 3x \mathrm{d}x$ 　　1 分

放错位置了



$a^2 + b^2 = c^2$ 　　$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ 　　$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ 　　$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$原式 = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 6x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 6x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

(d) **(重点)** $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x$ 　　1 分

法1：猜

$$(\sin x^2)' = 2x\cos x^2$$

$$原式 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

法2：
$$原式 = \frac{1}{2}\int \boxed{2x}\cos x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 \, dx^2 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

(e) **(重点)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \mathrm{d}x$ 　　1 分

法1：猜

$$(\cos^4 x)' = -4\sin x\cos^3 x$$

$$\int \sin x\cos^3 x \, dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

$$\int \sin x \cos^3 x \, dx = -\int \boxed{-\sin x}\cos^3 x \, dx = -\int \cos^3 x \, d\cos x = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

$$原式 = -\frac{1}{4}\cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\cdot 0^4 + \frac{1}{4}\cdot 1^4 = \frac{1}{4}$$

(f) **(重点)** $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (第二类换元法) $\boxed{1\text{ 分}}$

令 $\sqrt{x}=u$，$x=u^2$，$dx=2u\,du$

原式 $=2\int_1^2 \frac{u}{1+u}\,du$

$=2\int_1^2 \frac{u+1}{1+u}\,du - 2\int \frac{1}{1+u}\,du$

$=2u\Big|_1^2 - 2\ln|1+u|\Big|_1^2$

$=4-2-2\ln 3+2\ln 2$

$=2-2\ln 3+2\ln 2$

(g) **(重点)** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$ (第二类换元法) $\boxed{1\text{ 分}}$

令 $\sqrt{x}=u$，$x=u^2$，$dx=2u\,du$

原式 $=\int \frac{u}{u-1}\,2u\,du$

$=2\int \frac{u^2}{u-1}\,du$

$=2\int \frac{u^2-1+1}{u-1}\,du$

$=2\int \frac{u^2-1}{u-1}\,du + 2\int \frac{1}{u-1}\,du$

$\int \frac{u^2-1}{u-1}\,du$

$=\int \frac{\cancel{(u-1)}(u+1)}{\cancel{u-1}}\,du$

$=\int (u+1)\,du$

$=\frac{1}{2}u^2+u$

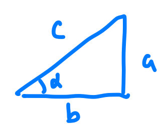
$\int \frac{1}{u-1}\,du$

$=\ln|u-1|$

原式 $=u^2+2u+2\ln|u-1|$

带回，原式 $=x+2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}-1|$ $+C$

(h) (非重点) $\int \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ (第二类换元法)　法1：公式



法2：令 $x=3\sin t$，$dx=3\cos t$，$t=\arcsin\frac{x}{3}$

原式 $=\int \sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt$

$=9\int \cos^2 t\,dt$

$=\frac{9}{2}\int(\cos 2t+1)\,dt$

$=\frac{9}{4}\sin 2t+\frac{9}{2}t$

$=\frac{9}{2}\sin t\cos t+\frac{9}{2}t$

带回，原式 $=\frac{9}{2}\sin\arcsin\frac{x}{3}\cos\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$

$=\frac{3x}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$

$=\frac{x}{3}\sqrt{3^2-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$

定積分的幾何意義

(i) **（重点）** $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos^2 2x \mathrm{d}x$ (定积分的几何意义) $\boxed{1\text{ 分}}$

$\cos^2 2x$ 為偶函数

x^3 為奇函数

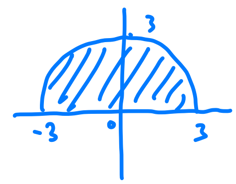
$x^3 \cos^2 2x$ 為奇函数，関於原點對稱

積分区间関於原點對稱

原式 $= 0$

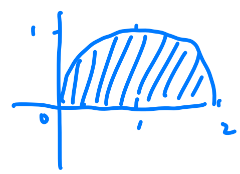
(j) **（重点）** $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ (定积分的几何意义) $\boxed{1\text{ 分}}$

$y = \sqrt{9-x^2}$, $\quad x^2+y^2 = 3^2 \ (y \geqslant 0)$



原式 $= \frac{1}{2}\pi 3^2 = \frac{9}{2}\pi$

去年期末考题：$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\, dx$



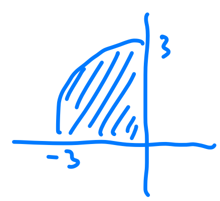
$x^2 - 2x + y^2 = 0$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

原式 $= \frac{1}{2}\pi 1^2 = \frac{\pi}{2}$

(k) **（重点）** $\int_{-3}^{0} (x+\sqrt{9-x^2})\mathrm{d}x$ (定积分的几何意义) $\boxed{1\text{ 分}}$

原式 $= \int_{-3}^{0} x \, dx + \int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\, dx$



$\int_{-3}^{0} x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-3}^{0} = -\frac{9}{2}$

$\int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi 3^2 = \frac{9}{4}\pi$

原式 $= \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}$

$(uv)' = u'v + uv'$

 分部积分 $\int u'v = uv - \int uv'$

(l) (重点) $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 　1 分

原式 $= x\arcsin x - \int x \, d\arcsin x$

$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx^2 = -\frac{1}{2}\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx^2$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$

$= -\sqrt{1-x^2}$

(m) (重点) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ 　1 分

原式 $= 2\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$

$= 2\int \ln x \, d\sqrt{x}$

$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x} \, d\ln x$

$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{x}\sqrt{x} dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

$\int \frac{1}{x}\sqrt{x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$= 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$

(n) (重点) $\int x \underline{\ln(x+1)} \mathrm{d}x$ 　1 分

原式 $= \frac{1}{2}\int 2x \ln(x+1) dx$

$= \frac{1}{2}\int \ln(1+x) dx^2$

$= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln(1+x)$

$= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}\boxed{\ln(x+1)} + C$

$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \frac{x^2-1+1}{1+x} dx$

$= \int \frac{x^2-1}{1+x} dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \boxed{\ln|1+x|}$

$\int \frac{x^2-1}{1+x} dx = \int \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{1+x}} dx = \frac{1}{2}(x-1)^2$

$\int \frac{1}{1+x} dx = \boxed{\ln|1+x|}$

(o) (重点) $\int x^2 \ln 2x \mathrm{d}x$ 　1 分

原式 $= \frac{1}{3}\int 3x^2 \ln 2x \, dx$

$= \frac{1}{3}\int \ln 2x \, dx^3$

$= \frac{1}{3}x^3\ln 2x - \frac{1}{3}\int x^3 d\ln 2x$

$= \frac{1}{3}x^3\ln 2x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{2}{2x} dx$

$= \frac{1}{3}x^3\ln 2x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$

$= \frac{1}{3}x^3\ln 2x - \frac{1}{9}x^3 + C$

(p) (重点) $\int_0^1 xe^{-x} \mathrm{d}x$ 　1 分

原式 $= -\int_0^1 -xe^{-x} dx$

$= -\int_0^1 xe^{-x} d(-x)$

$= -\int_0^1 x \, de^{-x}$

$= -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

$-xe^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1}$

$\int_0^1 e^{-x} dx = -\int_0^1 -e^{-x} dx$

$= -\int_0^1 e^{-x} d(-x) = -e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} + 1$

补充一题在下页

(q) **(重点)**（非重点） $\int_1^{+\infty}\left(3^{-x}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$ 1 分

$\int\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x + x^{-4}\right]dx$

$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{3}x^{-3} + C$

$= -\frac{1}{\ln 3\cdot 3^x} - \frac{1}{3x^3} + C$

$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln 3\cdot 3^x} - \frac{1}{3x^3}\right] = 0$

$\left[-\frac{1}{\ln 3\cdot 3^x} - \frac{1}{3x^3}\right]\Big|_{x=1} = -\frac{1}{3\ln 3} - \frac{1}{3}$

原式 $= \frac{\ln 3+1}{3\ln 3}$

D 6. 下列积分中的反常积分为 1 分

A. $\int_0^1 \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x$

B. $\int_0^1 \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

D. $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$

求 $\int e^x \sin x\, dx$

$\boxed{\text{原式}} = \int \sin x\, de^x$

$= e^x\sin x - \int e^x\, d\sin x$

$= e^x\sin x - \int e^x\cos x\, dx$

$= e^x\sin x - \int \cos x\, de^x$

$= e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x\, d\cos x$

$= e^x\sin x - e^x\cos x - \boxed{\int e^x\sin x\, dx}$

2原式 $= e^x\sin x - e^x\cos x$

原式 $= \frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2} + C$

C 7. 把有理函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 化为部分分式的和，需要拆项为 1 分

A. $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

B. $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

C. $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

D. $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

3.2 定积分应用

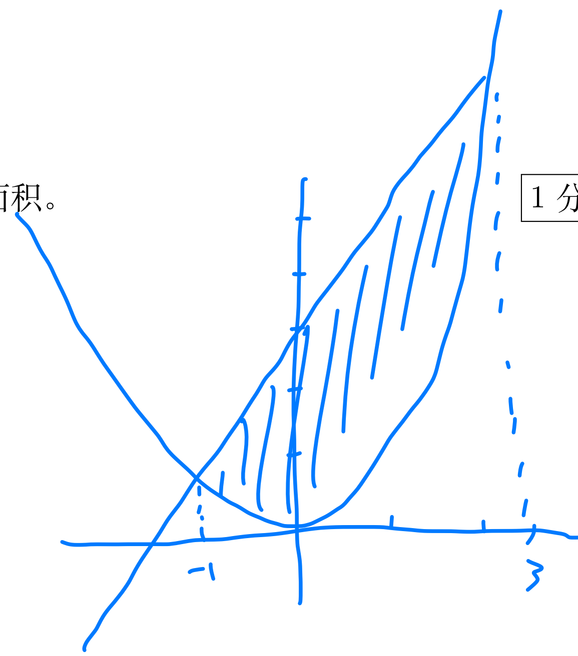
1. **（重点）** 直角坐标下由 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$x=a$、$x=b$ 围成图形的面积：

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

（非重点）极坐标下由 $r=r_1(\theta)$、$r=r_2(\theta)$，$r_1(\theta)\le r_2(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$ 围成图形的面积：

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]\mathrm{d}x$$

2. 求直线 $y=2x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积。 $\boxed{1\text{ 分}}$

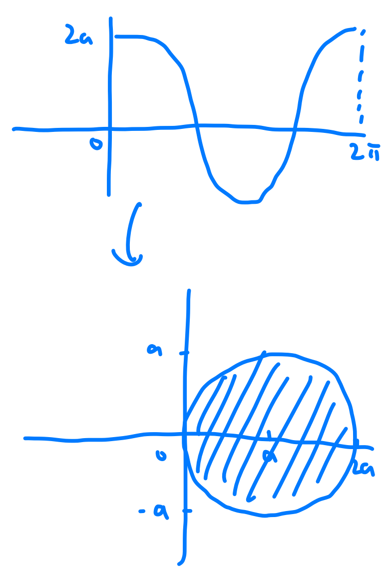


$S=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx$

$=(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{3}$

$=10+\frac{2}{3}$

3. （非重点）求 $r=2a\cos\theta$ 所围成图形的面积。



法1：$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2\,d\theta$

$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

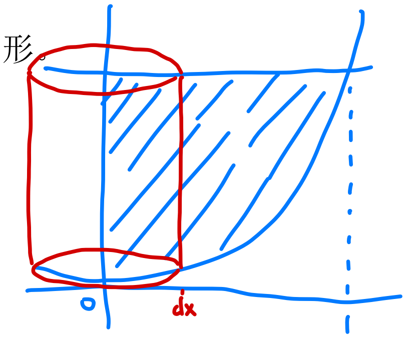
$=a^2\pi$

法2：注意到图形是半径为a的圆

$S=\pi a^2$

4. 有一个 $y = x^2$ 与 $y = \cancel{2}$ 1 及 $\cancel{x}$ x $= 0$ 所围成在第一象限内的图形。

(a) 求其绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积。 法1: 【1 分】



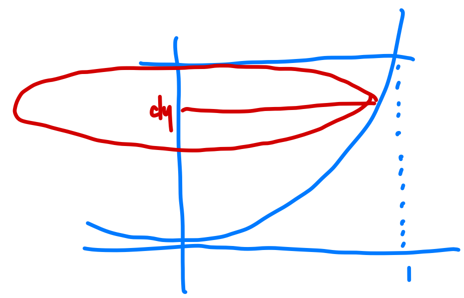
法1: $V = \int_0^1 2\pi y\sqrt{y}\,dy = \frac{4}{5}\pi$

法2: $V = \int_0^1 \pi(1^2 - (x^2)^2)\,dx = \frac{4}{5}\pi$

法3: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^1 2\pi y\,dx\,dy$

$= 2\pi \int_0^1 \int_{x^2}^1 y\,dy\,dx$

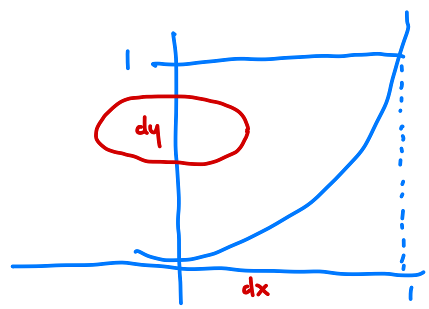
$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^4)\,dx = \frac{4}{5}\pi$



(b) 求其绕 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积。 【1 分】

法1: $V = \int_0^1 2\pi x(1-x^2)\,dx = \frac{\pi}{2}$

法2: $V = \int_0^1 \pi(\sqrt{y})^2\,dy = \frac{\pi}{2}$



法3: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^1 2\pi x\,dx\,dy$

$= 2\pi \int_0^1 \int_{x^2}^1 x\,dy\,dx$

$= 2\pi \int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \frac{\pi}{2}$

$x-y+1$

(c)（非重点）求其绕直线 $y = x + 1$ 旋转一周得到的旋转体的体积。

L: $Ax + By + C = 0$

P: (x_0, y_0)

P到L距离: $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

法1: 做不出来

法2: 做不出来

法3: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^1 2\pi \frac{x-y+1}{\sqrt{2}}\,dx\,dy$

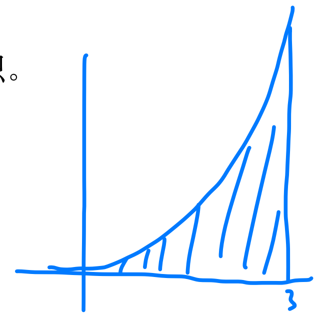
$= \sqrt{2}\pi \int_0^1 \int_{x^2}^1 (x-y+1)\,dy\,dx$

$= \sqrt{2}\pi \int_0^1 \left[(x+1)(1-x^2) - \frac{1}{2}(1-x^4)\right]dx$

$= \sqrt{2}\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{31\pi}{30\sqrt{2}}$

5. **（重点）** 本题有两小问。

(a) 求曲线 $y = x^2$，直线 $y = 0$ 及 $x = 3$ 所围成的图形的面积。 $\boxed{1\text{ 分}}$

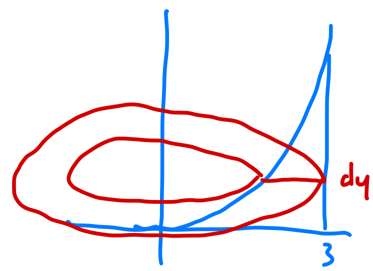


$$S = \int_0^3 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^3$$

$$= 9$$

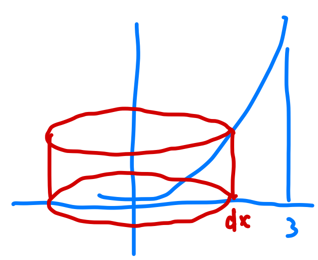
(b) 将上述平面图形绕 y 轴旋转一周，求所得立体的体积。 $\boxed{1\text{ 分}}$



法1： $V = \int_0^9 \pi[3^2 - (\sqrt{y})^2]\,dy = \frac{81}{2}\pi$

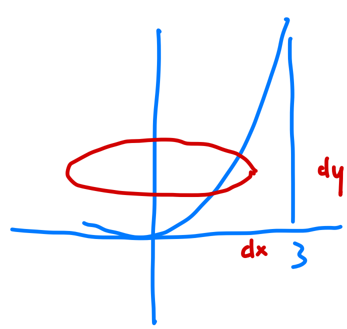
法2： $V = \int_0^3 2\pi x \cdot x^2\,dx = \frac{81}{2}\pi$

法3： $V = \int_0^3 \int_0^{x^2} 2\pi x \; dx\,dy$

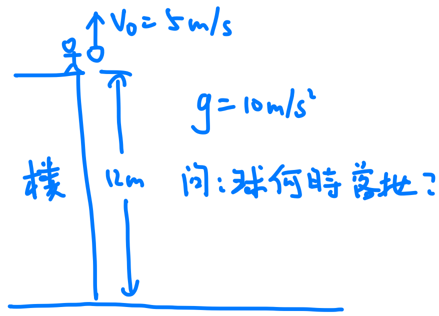


$$= 2\pi \int_0^3 \int_0^{x^2} x\,dy \; dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 x^3\,dx = \frac{81}{2}\pi$$



4 常微分方程



4.1 微分方程的阶数

B

1. 微分方程 $y'' = 2x^2 + 3$ 的阶数为 [1 分]

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   D. 4

$x = x(t)$, $x'' = -10$, $x'(0) = 5$, $x(0) = 12$

$x = -\frac{1}{2}\cdot 10t^2 + C_1t + C_2$

$C_1 = 5$, $C_2 = 12$

2. $xy(y')^2 - yy' - x = 0$ 为___一___阶的微分方程。 [1 分]

3. $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + Q^3\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q = 0$ 为___二___阶的微分方程。 [1 分]

4.2 一阶微分方程的种类及解法

1. **(重点)** 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式为

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

能套公式套公式

套不了公式自求多福

2. 求解下列微分方程。

(a) $xy' - y\ln y = 0$ 1 分

$x\frac{dy}{dx} - y\ln y = 0$

$x\frac{dy}{dx} = y\ln y$

$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x}$

两边积分得

$\ln|\ln y| = \ln|x| + C_1$

$\ln y = Cx$

(b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10^{x+y}$ 1 分

$\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$

$10^{-y}\,dy = 10^x\,dx$

两边积分得

$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1$

$10^x + 10^{-y} + C = 0$

(c) $y''' = \sin 2x$ 1 分

$y'' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$

$y' = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$

$y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$

套公式：$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$

(d)（**重点**）$(x^2-1)y' + 2xy - \cos x = 0$ 1 分

$$y' + \underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{\cos x}{x^2-1}}_{Q(x)}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$$

$$= e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int \frac{\cos x}{x^2-1} e^{\int \frac{2x}{x^2-1}dx} dx + C\right]$$

$$= e^{-\ln(x^2-1)}\left[\int \frac{\cos x}{\cancel{x^2-1}} \cancel{e^{\ln(x^2-1)}}_{\cancel{(x^2-1)}} dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{x^2-1}(\sin x + C)$$

(e)（**重点**）$y' + y\underbrace{\sin x}_{P(x)} = \underbrace{e^{\cos x}}_{Q(x)}$ 1 分

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$$

$$= e^{-\int \sin x\, dx}\left[\int e^{\cos x} e^{\int \sin x\, dx} dx + C\right]$$

$$= e^{\cos x}\left[\int \cancel{e^{\cos x} e^{-\cos x}} dx + C\right]$$

$$= e^{\cos x}(1 + C)$$

4.3 可降阶的高阶微分方程求解

自求多福

1. 求解下列微分方程。

(a)（非重点）求微分方程 $y''+2xy'^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{2}$ 的特解。

令 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}$，

$\frac{dp}{dx}+2xp^2=0$

$-\frac{dp}{p^2}=2x\,dx$

两边积分得 $\frac{1}{p}=x^2+C_1$，

即 $y'=\frac{1}{x^2+C_1}$

又因为 $y'(0)=-\frac{1}{2}$，$C_1=-2$

即 $y'=\frac{1}{x^2-2}=\frac{1}{x^2-(\sqrt{2})^2}$

$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2$

又因为 $y(0)=1$，$C_2=1$

原方程满足题目条件的特解为

$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+1$

(b)（非重点）求微分方程 $yy''+y'^2=y'$ 的通解。

由题意可得 $d(yy')=dy$

两边积分得 $y\frac{dy}{dx}=y+C_1$

整理 $\frac{y}{y+C_1}dy=dx$

两边积分得 $y-C_1\ln|y+C_1|=x+C_2$

$f(x)$ $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导

$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$

$\exists c\in(0,1)$，使 $f(c)f''(c)+[f'(c)]^2=0$

设 $g(x)=f(x)f'(x)$

$g'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$

(c)（非重点）求微分方程 $y''' = \dfrac{3x^2}{1+x^3}y''$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=4$ 的特解。

令 $y''=p$, $y'''=\dfrac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{3x^2}{1+x^3}p$$

整理可得 $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{3x^2}{1+x^3}dx$

得 $p = C_1(1+x^3)$

因为 $y''(0)=4$, $C_1=4$.

$$y'' = 4+4x^3$$

$$y' = 4x + x^4 + C_2$$

因为 $y'(0)=1$, $C_2=1$

$$y' = 4x + x^4 + 1$$

$$y = 2x^2 + \frac{1}{5}x^5 + x + C_3$$

因为 $y(0)=0$, $C_3=0$

微分方程满足题目條件的特解為

$$y = 2x^2 + \frac{1}{5}x^5 + x$$

(d)（非重点）**（重点）** $y''-y' = \underline{x}$ xe^{0x} **1 分**

法1: $y'=p$, $y''=p'$

$$\underbrace{p'-p}_{P(x)} = \underbrace{x}_{Q(x)}$$

$$y' = p = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]$$

$$= e^x\left[\int xe^{-x}dx + C_1\right]$$

$$= e^x\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx + C_1\right]$$

$$= -x-1+C_1e^x$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + C_1e^x + C_2$$

法2: $r^2-r=0$, $r_1=0$, $r_2=1$

齐次方程通解 $y=C_1+C_2e^x$

特解 $y^* = (ax+b)xe^{0x} = ax^2+bx$

$$y^{*\prime} = 2ax+b$$

$$y^{*\prime\prime} = 2a$$

代入原方程得 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$

原方程的通解為

$$y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$$

4.4 高阶常系数线性齐次（非齐次）微分方程

1. 对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$，先由其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 求出解 r_1, r_2，若

    1. r_1, r_2 为两个不相等的实根，微分方程通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$；
    2. r_1, r_2 为两个相等的实根，微分方程通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$；
    3. r_1, r_2 为两个共轭虚根 $\alpha \pm \beta i$，微分方程通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$。

2. 对于二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = P(x)e^{kx}$ 的特解，首先设 $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 与 $P(x)$ 次数相同，再

    1. 若 k 非特征值，则特解为 $y^* = Q(x)e^{kx}$；
    2. 若 k 与一个特征值相同，则特解为 $y^* = xQ(x)e^{kx}$；
    3. 若 k 与两个特征值相同，则特解为 $y^* = x^2Q(x)e^{kx}$。

记得讲上一页(d)小题法2

3. 求解下列微分方程。

(a) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=0$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$r^2-2r+5=0$

$(r-1)^2=-4$

$r=1\pm 2i$

齐次方程通解： $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

(b) $y''+6y'+9y=0$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$r^2+6r+9=0$，　$r_1=r_2=-3$

齐次方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$

(c) $y''-4y'+3'=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$r^2-4r+3=0$，　$r_1=1$，$r_2=3$

齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

$y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$

因为 $y|_{x=0}=C_1+C_2=6$　　$C_1=4$，$C_2=2$

$y'|_{x=0}=C_1+3C_2=10$

微分方程满足题中条件的通解为

$y=4e^x+2e^{3x}$

(d) **（重点）** $y'' + 6y' + 9y = (3x+1)e^{3x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$r^2 + 6r + 9 = 0$， $r_1 = r_2 = -3$

齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$

特解 $y^* = (ax+b)e^{3x}$

$y^{*\prime} = ae^{3x} + (3ax+3b)e^{3x} = (3ax+3b+a)e^{3x}$

$y^{*\prime\prime} = 3ae^{3x} + (9ax+9b+a)e^{3x} = (9ax+9b+4a)e^{3x}$

代入得 $a = \frac{1}{12}$，$b = 0$

故原方程的通解为

$y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + \frac{1}{12}xe^{3x}$

(e) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

$r^2 + 3r + 2 = 0$， $r_1 = -2$， $r_2 = -1$

齐次方程的通解为 $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$

特解 $y^* = (ax+b)xe^{-x} = (ax^2+bx)e^{-x}$

代入原方程得 $a = \frac{3}{2}$，$b = -3$

故原方程的通解为 $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + (\frac{3}{2}x - 3)xe^{-x}$