镜州商贸学院（新圩）

《多变量微积分》

期末复习题

第五章

空间解析几何、场论、

多变量函数的极限与连续

补充：求曲面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程。

补充：求直线 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}$ 绕直线 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 旋转一周所得的曲面方程。

梯度：设 $u=f(x,y,z)$ 可偏导，则 $\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$。

旋度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则 $\mathbf{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$。

散度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则 $\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$。

通量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，Σ 为有侧曲面，称 $\Phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdzdy=\iint_{\Sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}dS$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 指向指定侧的流过有侧曲面 Σ 的通量（或流量），其中 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 的单位法向量。

环流量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，L 为有向闭曲线，称 $\oint_{L}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{L}\vec{a}\cdot d\vec{s}$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 沿有向闭曲线 L 的环流量。

向量场 $\vec{F}(x,y,z)=\{xy,yz,zx\}$ 在点 $(1,2,3)$ 处的散度 $\mathrm{div}\vec{F}=$ ______ 。

补充： 设 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{div}[\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)]$ 。

判断多元函数极限是否存在的方法：

正经做法：一元函数在一点处极限存在的充分必要条件是其左、右极限都存在且相等，但多元函数在一点处极限存在，要求 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ 存在，即函数 (x, y) 沿所有可能的路径趋于点 (x_0, y_0) 时，函数值趋于同一个值，若函数 $f(x, y)$ 沿两个不同方向趋于点 (x_0, y_0) 时，函数值趋于两个不同值，则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ 不存在。

瞎猜法：当分子次数高于分母次数时，极限一般存在，而且很有可能是 0 。当分子次数低于或等于分母次数时，极限一般不存在。该方法一般在不会做题时使用，且不保证答案正确。

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{xy+1}-1}$ 的值为_______。

补充：设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ 是否存在。

第六章

多变量函数的微分

偏导数： $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 f_x' 是 f 对 x 求偏导的意思。$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 f_{xy}'' 是 f 先对 x 求偏导再对 y 求偏导的意思。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家看题吧。

全微： 设 $z=f(x,y)\big((x,y)\in D\big)$，$(x_0,y_0)\in D$ 若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可全微，简称可微，记 $A\Delta x+B\Delta y=dz$，习惯上记 $dz=Adx+Bdy$。

设 $z=f(x,y)$ 可微，则其全微分为 $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$。

隐函数求导： 设 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在点 (x_0,y_0,z_0) 的邻域内由 $F(x,y,z)=0$ 能唯一确定连续可偏导的函数 $z=f(x,y)$，满足 $z_0=f(x_0,y_0)$ 且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$。

补充：设 $z = e^{u+v^2}$，且 $\begin{cases} u = \ln t \\ v = \sin t \end{cases}$，求 $\frac{dz}{dt}$。

补充：设 $f(u,v)$ 二阶连续可偏导，且 $z=f(t,\sin t)$ ，求 $\frac{d^2z}{dt^2}$ 。

补充：设 $z = e^{u+v}$ ，且 $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 。

设函数 $z=f(x^2+y^2,ye^x)$ ，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微的充要条件为______。

A、 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域存在

B、 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域连续

C、 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时， $\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y$ 是无穷小量

D、 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时， $\frac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$是无穷小量

由方程 $xyz+x^2+y^2+z^2=4$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $dz=$ ______ 。

二元函数求无条件极值的步骤：

(1) 求 $z=f(x,y)$ 的定义域 D（开区域）；

(2) 由 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ 求出 $z=f(x,y)$ 的驻点；

(3) 利用判别法判断驻点是否为极值点：

令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ ，则：

当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数的极值点，其中：

当 $A>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值点；

当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；

当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是函数的极值点。

二元函数求条件极值：

所谓二元函数的条件极值，即二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般有如下三种方法：

拉格朗日乘数法：

令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ，由 $\begin{cases}F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'=0\\F_y'=f_y'+\lambda\varphi_y'=0\\F_\lambda'=\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 求出 (x,y) 的值，并确定最优解；

转化为一元函数的极值：

由 $\varphi(x,y)=0$ 求出 $y=y(x)$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x,y(x)]$ ，再求一元函数 $z=f[x,y(x)]$ 的极值；

参数方程法：

由 $\varphi(x,y)=0$ ，得 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(y)\end{cases}$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x(t),y(t)]$ ，再求一元函数的极值。

设 $z=f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ ，由 $f_x(x,y)=0$ 和 $f_y(x,y)=0$ 求得驻点 $M_1(0,0)$ 、 $M_2(1,1)$ 、 $M_3(-1,-1)$ ，则________。

A、 $f(M_1)$ 是极小值

B、 $f(M_1)$ 是极大值

C、 $f(M_2)$ 与 $f(M_3)$ 都是极小值

D、 $f(M_2)$ 与 $f(M_3)$ 都是极大值

补充：周长为 $2a$ 的矩形绕它的一边旋转可得到一个圆柱体，当矩形边长各为多少时，可使圆柱体的体积最大？

已知旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线为椭圆，求该椭圆到原点的最长与最短距离。

空间曲面的切平面与法线：

设 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 为空间曲面， $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ ，则曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$ ，过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲面 Σ 的切平面为 $F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$ ，法线为 $\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$ 。

空间曲线的切线与法平面 1：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ ，取参数 $t=t_0$ ，对应的曲线上的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$ ，其中 $x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$ 。曲线 L 在 M_0 处的切向量为 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$ ；曲线 L 在 M_0 处的切线为 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$ ；曲线 L 在 M_0 处的法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$ 。

空间曲线的切线与法平面 2：

设 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ ，则切线方向的方向向量为 $\vec{T}=\left(\left\{F_x',F_y',F_z'\right\}\times\left\{G_x',G_y',G_z'\right\}\right)\Big|_{M_0}$ 。

设曲线 L 的方程为 $x = t, y = t^2, z = t^3$ ，则 L 在对应于 $t = 1$ 点处的法平面方程为______。

补充： 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程。

第七章

多变量函数的积分

二重积分：当你理解不了时，想象一张质量不均匀的铁片的重量，或者一个顶面不平的柱体的体积。当你在一个方向上做不出来时，就换一个方向做做试试。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家还是看题吧。

二重积分直角坐标转换为极坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ，区域 D 表示为 $D = \{(r,\theta)|\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$ ，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 。注意 f 外面有个 r 。

三重积分：当你理解不了时，想象一块质量不均匀的石头的重量。不要管什么先一后二还是先二后一，也不要管什么切片法和什么铅直投影法，算就完了。

三重积分直角坐标转换为柱面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ ，其中 $\Omega =$
$\{(r,\theta,z)|\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \varphi_1(r,\theta) \le z \le \varphi_2(r,\theta)\}$ ，则
$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr \int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)dz$ 。

三重积分直角坐标转换为球面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ ，其中 $\alpha \le \theta \le \beta, \theta_1 \le \varphi \le \theta_2, r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta)$ ，则
$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz =$
$\int_\alpha^\beta d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\cos\theta\sin\varphi\,, r\sin\theta\sin\varphi\,, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\, dr$ 。

二重积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy$ 的值为_______。

设函数 $f(u)$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2y\}$ 上连续，则 $\int_D f(xy)dxdy=$ ______ 。

A、 $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

B、 $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$

C、 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$

D、 $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

补充：计算 $I=\iint_D(x^2+xy+y^2)d\sigma$ ，其中 $D: x^2+y^2\le 2x$ 。

已知空间立体 Ω 由曲面 Σ 围成， Ω 内点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)$ ，则 Ω 的质量为_______。

A、 $\iiint_\Omega dV$

B、 $\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dV$

C、 $\iint_\Sigma \rho(x,y,z)dS$

D、 $\iint_\Sigma \rho(x,y,z)dxdy$

补充：计算 $\iiint_{\Omega}(z^2+2xy)dv$ ，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 所围成的几何体。

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：当你理解不了时，想象一条不均匀的铁链的质量。

第一类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)(a\le x\le b)$，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$。

第一类曲线积分的计算方法 2：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$。

设 L 为连接 $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 的直线段，则积分 $\int_L (x+y)ds =$ ______ 。

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：当你理解不了时，想象一个变力沿曲线做功。

第二类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)$，其中起点对应 $x=a$，终点对应 $x=b$，则

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx$。

第二类曲线积分的计算方法 2：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，其中起点对应 $t=\alpha$，终点对应 $t=\beta$，则

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$。

第二类曲线积分的计算方法 3（格林公式）：

设 D 为 xOy 平面上连通的有限闭区域，L 为闭区域 D 的正向边界，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上连续可偏导，则 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$。

柯西-黎曼条件（第二类曲线积分与路径无关的条件之一）：区域 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。

补充： 求 $\int_L (y+1)dx+(2x-1)dy$ ，其中

（1） L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x$ 到点 $A(1,1)$ ；

（2） L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 。

设 L 为正向椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ ，则曲线积分

$\oint_L (x+e^x\cos y)dx+(x-e^x\sin y)dy=$ _____ 。

补充： $\int_L (x^2+y^2)dx - xdy$ ，其中 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 从点 $A(-a,0)$ 经 $B(0,a)$ 到 $C(a,0)$ 的弧段。

已知曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+yx^2dy$ ，

(1) 证明：在全平面内，积分 I 与路径无关；

(2) 计算积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy$ 。

第一类曲面积分（对面积的曲面积分）：当你理解不了时，想象一张不均匀的铁皮的质量。

第一类曲面积分的计算方法：

设 $\Sigma: z = \varphi(x,y)$ ，其中 $(x,y) \in D$ ，则 $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$ ，于是

$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_D f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$ 。

设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，则曲面积分

$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=$ _____ 。

第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）：当你理解不了时，想象单位时间内透过一张渔网的水流量。

第二类曲面积分的计算方法 1：

设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D_{xy}$，则

$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy$，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为锐角，则二重积分前带“$+$”，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为钝角，则二重积分前带“$-$”。另外两向类推。

第二类曲面积分的计算方法 2（高斯公式）：

设 Ω 为几何体，Σ 为 Ω 的外侧曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导，则 $\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$。

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy$ ，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $0 \le z \le 1$ 部分的下侧。

第八章

无穷级数

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ；但是， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛。

p 级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的级数称为 p 级数。当 $p \leq 1$ 时，p 级数发散；当 $p > 1$ 时，p 级数收敛。

几何级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n\,(a \neq 0)$ 称为几何级数。当 $|q| \geq 1$ 时，几何级数发散；当 $|q| < 1$ 时，几何极数收敛，具其和为 $S = \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$ 。

莱布尼茨审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，若 $\{u_n\}_{n-1}^{\infty}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和不超过 u_1 。

幂级数的收敛半径：对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ ，则当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$ ；当 $\rho = +\infty$ 时， $R = 0$ ；当 $0 < \rho < +\infty$ ， $R = \frac{1}{\rho}$ 。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，反之不对。

正项级数审敛法：

比较审敛法基本形式：若 $a_n \le b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $a_n \ge b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比较审敛法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_n}{b_n} = l(0 < l < \infty)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性相同。

比较审敛法推论：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

根值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

下列极数发散的是______。

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n^{4}}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^{n}}{3^{n}}$

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty}|u_n - u_{n-1}|$ 均收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛。

麦克劳林级数：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\,(-\infty<x<+\infty)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,(-1<x<1)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\,(-1<x\le 1)$$

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,(-1\le x<1)$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,(-1<x<1)$$

将函数 $f(x)=\frac{1}{3+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并指出收敛域。

补充：将 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数。

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数_______。

补充：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数。

周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数：

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 可以展开成 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ，其中

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2\ldots)$ ， $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2\ldots)$ ，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时， $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$ ；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时， $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ 。

设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数，其在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数为 $s(x)$ ，则 $s(5\pi)=$ _____ 。

将函数 $f(x) = |x|(-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成以 2π 为周期的傅立叶级数。