《高等数学（上）》期末复习题（满分 100 分）
镜州商贸学院（新圩） 姓名：________________

免责声明：
本补习为镜州商贸学院（新圩）部分学生之**自发行为**，与其他任何学校、任何老师或任何同学无关。本课程**不占学时，不影响平时成绩，不附赠二课学分**，不强制同学参加，也**不保证参加同学一定能够及格**。如果本补习使用之复习题与任何学校之教材或考试题目雷同，那**太正常了**。因为《高等数学》一共就这么几个知识点，变来变去也变不出多少花样。你让我上哪儿找那么多新题型去?

注：在本复习题中，带有**（重点）**标注的题目为该小节中的关键概念及重点题目，这些题目在期末考试中往往经常出现，并且稍加学习便很容易掌握，是我们复习的重点。带有（非重点）标注的题目为非重点题目，这些题目在期末考试中很少出现，或者学习难度很高，不是我们复习的重点。不带有标注的题目为普通题目，它们在期末考试中出现的可能性和学习难度一般。

1 函数、极限、连续

1.1 函数极限与数列极限的计算

1. **（重点）**默写常用的麦克劳林公式。
   (a) $e^x =$

   (b) $\sin x =$

   (c) $\cos x =$

   (d) $\ln(1+x) =$

2. **(重点)** 极限的计算方法:

麦克劳林公式: 1. 没有 0 的直接带进去算;

2. 有 0 的想办法把 0 显现出来;

3. 带麦克劳林公式化成多项式;

4. 把 0 约掉，得到结果。

麦克劳林公式的用法: 乘除带一项; 加减带多项，带到与分子/分母同次为止。

洛必达法则: 若 [略]，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

1 **加** 0 **的次方:** 对于 $(1+0)^{?}$ 形式的极限，要翻成 $e^{?\ln(1+0)}$ 的型式再计算。

3. 下列极限正确的是 $\boxed{1\ 分}$

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\sec x}=e$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

4. 计算下列极限。

(a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$ （其中 $m>0, n>0$ 为常数） $\boxed{1\text{ 分}}$

(f)（非重点）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ (放缩法)

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ (定积分的定义或者暴力求解) 1 分

(h)（非重点）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$ (定积分的定义)

(i)（非重点）设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(n) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(o) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 3x}{x\sin 2x}$ $\boxed{1\ 分}$

(p) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$ $\boxed{1\ 分}$

(q) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ $\boxed{1\ 分}$

(r) **（重点）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$ $\boxed{1\ 分}$

(s) **（重点）** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$ $\boxed{1\ 分}$

(t) **（重点）** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\boxed{1\ 分}$

(u) **（重点）** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ $\boxed{1\ 分}$

(v) **（重点）** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$ $\boxed{1\ 分}$

(w) **（重点）** $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{4-\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$ $\boxed{1\ 分}$

(x)（非重点）$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

(y) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(z)（非重点）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ (拉格朗日中值定理)

() $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 \mathrm{d}t}{x \sin^9 x}$ (洛必达法则) $\boxed{1\text{ 分}}$

1.2 函数的连续性与间断点

1. **（重点）**当函数在一点的左右极限存在并且相等，则说函数在这个点有**极限**，这个极限是它的左右极限值。当函数在一点的极限值等于函数值，则说函数在这一点**连续**。否则，则说函数在这一点**间断**，这一点是函数的**间断点**。间断点的分类如下：

   - 左右极限**存在且相等**，为**第一类间断点**中的**可去间断点**；
   - 左右极限**存在但不相等**，为**第一类间断点**中的**跳跃间断点**；
   - 左右极限**有至少一个不存在**，为**第二类间断点**。

2. 求 $f(x) = \dfrac{x}{x}$、$g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 当 $x \to 0$ 时的左右极限，并说明它们当 $x \to 0$ 时的极限是否存在。 $\boxed{1\ 分}$

3. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 第二类间断点

D. 连续点

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并分类。 $\boxed{1\text{ 分}}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x & ,0<x<1 \\ 2 & ,x=1 \\ 2+x & ,1<x<2 \end{cases}$，则 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的____________间断点。 $\boxed{1\text{ 分}}$

6. **（重点）** 设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x\leq 0 \\ x-2 & ,x>0 \end{cases}$，则 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的____________间断点。 $\boxed{1\text{ 分}}$

1.3 渐近线

1. - **（重点）** 若 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$，或 $f(a-0) = \infty$ 或 $f(a+0) = \infty$，称 $x = a$ 为 $L: y = f(x)$ 的**铅直渐近线**；
   - **（重点）** 若 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$，称 $y = A$ 为 $L: y = f(x)$ 的**水平渐近线**；
   - （非重点）若 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a (a \neq 0)$，$\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$，称 $y = ax + b$ 为 $L: y = f(x)$ 的**斜渐近线**。

2. 曲线 $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线为 $\boxed{1\text{ 分}}$

3. 曲线 $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$ 的水平渐近线为 $\boxed{1\text{ 分}}$

4. （非重点）求曲线 $y = \dfrac{2}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的全部渐近线。

1.4 无穷小与无穷大

1. 对于 $x \to a$ 时的两个无穷小 $f(x)$ 和 $g(x)$,

   - 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**高阶无穷小**，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**低阶无穷小**；
   - 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小**，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**低阶无穷小**；
   - 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C(C\text{为常数})$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为**同阶无穷小**；
   - **（重点）**若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为**同阶无穷小**中的一个特殊情况，**等价无穷小**。

2. 当 $x \to 0$ 时，下列变量中是无穷小量的有 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $\sin\dfrac{1}{x}$

   B. $\dfrac{\sin x}{x}$

   C. $2^{-x}-1$

   D. $\ln|x|$

3. 函数 $\dfrac{1+2x^3}{x^2}$ 为当 $x \to 0$ 时的无穷____________量。 $\boxed{1\text{ 分}}$

4. 无穷多个无穷小量之和 1 分

   A. 必是无穷小量
   B. 必是无穷大量
   C. 必是有界量
   D. 可能是无穷小，可能是无穷大，也有可能是有界量

5. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$，则下列正确的是 1 分

   A. $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\infty$
   B. $\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x)=\infty$
   C. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$
   D. $\lim_{x\to x_0} kf(x)=\infty$

6. $\sin x$ 与 x 当 $x\to 0$ 时为____________无穷小。 1 分

7. $1-\cos x$ 与 x^2 当 $x\to 0$ 时为____________无穷小。 1 分

8. 当 $x \to 0$ 时，与 $\ln(1+x^2)$ 为同阶无穷小但不为等价无穷小的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $\sin x \tan^2 x$

B. $1-\cos x$

C. $\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^2-1$

D. $x\sin x$

9. 当 $x \to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $a=1, b=-\frac{1}{6}$

B. $a=1, b=\frac{1}{6}$

C. $a=-1, b=-\frac{1}{6}$

D. $a=-1, b=\frac{1}{6}$

10.（非重点）设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right]}{\arctan x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{(1-\cos x)\tan x}$。(等价无穷小代换)

1.5 函数的性质

1. 下列函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界的是 $\boxed{1\ 分}$

   A. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

   B. $y = \arctan x$

   C. $y = \sin x + \cos x$

   D. $y = x \sin x$

2. 求下列函数的定义域。 $\boxed{1\ 分}$
   $y = \ln(x+5)$

2　一元函数微分学

2.1　导数的定义与复合函数求导

1.（非重点）**导数**指的是一个函数在某一瞬间的变化率。比如说位移的导数是速度，速度的导数是加速度。例如函数 $f(x)$ 在 x 时点的变化率 $f'(x)$ 可以写成 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{h\to x}\dfrac{f(h)-f(x)}{h-x}$。关于导数的四则运算和链式法则的内容高中都学过，这里就不细讲了。

2. **（重点）**默写常用的求导基本公式。

   (a) $(C)' =$

   (b) $(x^a)' =$

   (c) $\left(\sqrt{x}\right)' =$

   (d) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

   (e) $(a^x)' = (a > 0, a \neq 1)$

   (f) $(e^x)' =$

   (g) $(\log_a x)' =$

   (h) $(\ln x)' =$

(i) $(\sin x)' =$

(j) $(\cos x)' =$

(k) $(\tan x)' =$

(l) $(\cot x)' =$

(m) $(\sec x)' =$

(n) $(\csc x)' =$

(o) $(\arcsin x)' =$

(p) $(\arccos x)' =$

(q) $(\arctan x)' =$

(r) $(\mathrm{arccot} x)' =$

3.（非重点）设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+b & ,x>0\\ e^{2x} & ,x\leq 0\end{cases}$，若 $f'(0)$ 存在，求 a、b 的值。

4.（非重点）已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近连续。通过以下哪一个选项的条件可以推断出 $f'(1)=-2$?

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x^3)-f(1)}{\sin^2 x}=-2$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=1$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x^3)-f(1)}{\sin x-x}=-12$

5. 设函数 $f(x)=|\sin x|$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 1 分

A. 不连续

B. 连续，但不可导

C. 可导，但不连续

D. 可导，且导数也连续

6. 求下列函数的导数。

(a) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$ $\boxed{1\ 分}$

(b) $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$ $\boxed{1\ 分}$

(c) $s = a\cos^2(2\omega t + \phi)$ $\boxed{1\ 分}$

7. **（重点）** 函数 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x) =$____________。 $\boxed{1\text{ 分}}$

8. **（重点）** 函数 $y = e^{2-3x}$，则 $y^{(n)} =$____________。 $\boxed{1\text{ 分}}$

9. 设 $y = xe^x$，则 $y^{(n)} =$ $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $e^x(x+n)$

   B. $e^x(x-n)$

   C. $2e^x(x+n)$

   D. xe^{nx}

10. 求曲线 $y = \cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线和法线方程。 $\boxed{1\text{ 分}}$

2.2 隐函数求导

1. 像是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 y 是 x 的函数我们叫它隐函数。隐函数的求导主要有两种方法

    - 一个是把函数左右两边对两边求导，再通过移项等操作将 y' 移到等号一边，其他项移到等号另一边。需要注意，在求导时要将 x 看成 y 的函数，即在求导到关于 y 的多项式时链式法则需要一直波及到 x。
    - **（重点）** 另一个方法是带公式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$。其中，$F'_x$ 为 $F(x,y)$ 对 x 的偏导数，F'_y 为 $F(x,y)$ 对 y 的偏导数。在求函数对一个元的偏导数的时候，要将另一个元看作常数。

2. 求下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

    $xy=e^{x+y}$

3. **（重点）** 设 $x+y-xe^y=0$，求 $\mathrm{d}y$。 $\boxed{1\text{ 分}}$

2.3 参数方程确定的函数求导

1. **（重点）** 对于 $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ 这样的函数，我们称为参数方程确定的函数。它的导数可以这样求：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

2. **（重点）** 设 $\begin{cases} x = \sin t + 3 \\ y = t - \cos 2t \end{cases}$ ，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$____________。 1 分

3. 设由方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数为 $y = y(x)$，则在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处导数为 1 分

   A. -1

   B. 1

   C. 0

   D. $-\frac{1}{2}$

4. 求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 1 分

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

2.4 微分中值定理

1. **零点定理：** 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(a)f(b) < 0$，则一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$。

   （重点）罗尔定理： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a) = f(b)$，则一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

   拉格朗日中值定理： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，则一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或者写作 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$。

   柯西中值定理： 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$g'(x) \neq 0$，则一定存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a) = f(b) = 0$，并且 $a > 0, b > 0$。尝试证明:

   (a) 在区间 (a,b) 内存在一点 ξ 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$。(“ξ” 读作 “克西”) $\boxed{1\ 分}$

   (b) 在区间 (a,b) 内存在一点 ϵ 使得 $5f(\epsilon) + \epsilon f'(\epsilon) = 0$。(“$\epsilon$” 读作 “艾普西隆”) $\boxed{1\ 分}$

(c) **（重点）** 在区间 (a,b) 内存在一点 ζ 使得 $f(\zeta)+f'(\zeta)=0$。（“ζ” 读作“泽塔”） $\boxed{1\ 分}$

(d) **（重点）** 在区间 (a,b) 内存在一点 η 使得 $5f(\eta)+f'(\eta)=0$。（“η” 读作“伊塔”） $\boxed{1\ 分}$

(e) **（重点）** 在区间 (a,b) 内存在一点 μ 使得 $2\mu f(\mu)+f'(\mu)=0$。（“μ” 读作“谬”） $\boxed{1\ 分}$

2.5 单调性与极值、凹凸性与拐点、函数作图

1. **（重点）**一阶导大于 0 的是**增区间**，一阶导小于 0 的是**减区间**，由增区间往减区间转变的是**极大值点**，由减区间往增区间转变的是**极小值点**。二阶导大于 0 的是**凹区间**，二阶导小于 0 的是**凸区间**，一阶导等于 0 二阶导大于 0 的是**极小值点**，一阶导等于 0 二阶导小于 0 的是**极大值点**，凹区间和凸区间交接处是**拐点**。

2. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线 $y = f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点，则 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的拐点

   B. $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的驻点

   C. x_0 为 $f(x)$ 的极值点

   D. x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点

3. 下列结论正确的是 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. 驻点一定是极值点

   B. 可导函数的极值点一定是驻点

   C. 函数的不可导点一定是极值点

   D. 函数的极大值一定大于极小值

4. **（重点）** **在同一表中** 讨论 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的单调性、极值、凹凸性、拐点。 $\boxed{1\ 分}$

3 一元函数积分学

3.1 积分计算

1. **（重点）**不定积分可以出很难的题。**实在做不出来就算了**。

2. **（重点）**默写常用的不定积分基本公式:

   (a) $\int k\mathrm{d}x =$ (k为常数)

   (b) $\int x^a\mathrm{d}x =$ $(a \neq 1)$

   (c) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x =$ $(x \neq 0)$

   (d) $\int a^x\mathrm{d}x =$ $(a > 0, a \neq 1)$

   (e) $\int e^x\mathrm{d}x =$

(f) $\int \sin x \mathrm{d}x =$

(g) $\int \cos x \mathrm{d}x =$

(h) $\int \tan x \mathrm{d}x =$

(i) $\int \cot x \mathrm{d}x =$

(j) $\int \sec x \mathrm{d}x =$

(k) $\int \csc x \mathrm{d}x =$

(l) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x =$

(m) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x =$

(n) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$

(o) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x =$

(p) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$

(q) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x =$

(r) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x =$

(s) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x =$

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\mathrm{d}x =$

(u) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\mathrm{d}x =$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\mathrm{d}x =$

(w) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x =$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1) & ,x<1\\ \ln x & ,x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x-1) & ,x\geq 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x+1)-1 & ,x\geq 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x+1)+1 & ,x\geq 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,x<1\\ x(\ln x-1)+1 & ,x\geq 1\end{cases}$

4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，则 I、J、K 的大小关系为 $\boxed{1\text{ 分}}$

A. $I<J<K$

B. $I<K<J$

C. $J<I<K$

D. $K<J<I$

5. 计算下列积分：

(a) $\int 3^x e^x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(b) **（重点）** $\int (3-2x)^3 \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(c) **（重点）** $\int \cos^2 3x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(d) **（重点）** $\int x \cos(x^2) \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(e) **（重点）** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(f) **（重点）** $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (第二类换元法) $\boxed{1\ 分}$

(g) **（重点）** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$ (第二类换元法) $\boxed{1\ 分}$

(h)（非重点） $\int \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ (第二类换元法)

(i) **（重点）** $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos^2 2x \mathrm{d}x$ (定积分的几何意义) $\boxed{1 \text{ 分}}$

(j) **（重点）** $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} \mathrm{d}x$ (定积分的几何意义) $\boxed{1 \text{ 分}}$

(k) **（重点）** $\int_{-3}^{0} (x+\sqrt{9-x^2}) \mathrm{d}x$ (定积分的几何意义) $\boxed{1 \text{ 分}}$

(l) **（重点）** $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(m) **（重点）** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(n) **（重点）** $\int x \ln(x+1) \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(o) **（重点）** $\int x^2 \ln 2x \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(p) **（重点）** $\int_0^1 x e^{-x} \mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

(q) **(重点)**（非 重 点） $\int_1^{+\infty}\left(3^{-x}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$ $\boxed{1\ 分}$

6. 下列积分中的反常积分为 $\boxed{1\ 分}$

A. $\int_0^1 \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x$

B. $\int_0^1 \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

D. $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$

7. 把有理函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 化为部分分式的和，需要拆项为 $\boxed{1\ 分}$

A. $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

B. $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

C. $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

D. $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

3.2 定积分应用

1. **(重点)** 直角坐标下由 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$x=a$、$x=b$ 围成图形的面积：

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

（非重点）极坐标下由 $r=r_1(\theta)$、$r=r_2(\theta)$，$r_1(\theta)\le r_2(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$ 围成图形的面积：

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]\mathrm{d}x$$

2. 求直线 $y=2x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积。 $\boxed{1\ 分}$

3. （非重点）求 $r=2a\cos\theta$ 所围成图形的面积。

4. 有一个 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 及 $x = 0$ 所围成在第一象限内的图形。

   (a) 求其绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积。 $\boxed{1\text{ 分}}$

   (b) 求其绕 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积。 $\boxed{1\text{ 分}}$

   (c)（非重点）求其绕直线 $y = x + 1$ 旋转一周得到的旋转体的体积。

5.**（重点）**本题有两小问。

(a) 求曲线 $y = x^2$，直线 $y = 0$ 及 $x = 3$ 所围成的图形的面积。 $\boxed{1\ 分}$

(b) 将上述平面图形绕 y 轴旋转一周，求所得立体的体积。 $\boxed{1\ 分}$

4 常微分方程

4.1 微分方程的阶数

1. 微分方程 $y'' = 2x^2 + 3$ 的阶数为 $\boxed{1\text{ 分}}$

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   D. 4

2. $xy(y')^2 - yy' - x = 0$ 为____________阶的微分方程。 $\boxed{1\text{ 分}}$

3. $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + Q^3\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q = 0$ 为____________阶的微分方程。 $\boxed{1\text{ 分}}$

4.2 一阶微分方程的种类及解法

1. **（重点）** 一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式为

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

2. 求解下列微分方程。

   (a) $xy'-y\ln y=0$ $\boxed{1\text{ 分}}$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(c) **（重点）** $(x^2-1)y' + 2xy - \cos x = 0$ 1 分

(d) **（重点）** $y' + y\sin x = e^{\cos x}$ 1 分

4.3 可降阶的高阶微分方程求解

1. 求解下列微分方程。

   (a) $y''' = \sin 2x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

   (b)（非重点）求微分方程 $y'' + 2xy'^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{2}$ 的特解。

   (c)（非重点）求微分方程 $yy'' + y'^2 = y'$ 的通解。

(d)（非重点）求微分方程 $y''' = \dfrac{3x^2}{1+x^3}y''$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=4$ 的特解。

(e)（非重点）**（重点）** $y''-y'=x$ $\boxed{1\text{ 分}}$

4.4 高阶常系数线性齐次（非齐次）微分方程

1. 对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$，先由其特征方程 $r^2+pr+q=0$ 求出解 r_1, r_2，若

    1. r_1, r_2 为两个不相等的实根，微分方程通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；
    2. r_1, r_2 为两个相等的实根，微分方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；
    3. r_1, r_2 为两个共轭虚根 $\alpha\pm\beta i$，微分方程通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

2. 对于二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{kx}$ 的特解，首先设 $Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 与 $P(x)$ 次数相同，再

    1. 若 k 非特征值，则特解为 $y^*=Q(x)e^{kx}$；
    2. 若 k 与一个特征值相同，则特解为 $y^*=xQ(x)e^{kx}$；
    3. 若 k 与两个特征值相同，则特解为 $y^*=x^2Q(x)e^{kx}$。

3. 求解下列微分方程。

(a) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=0$ $\boxed{1\ 分}$

(b) $y''+6y'+9y=0$ $\boxed{1\ 分}$

(c) $y''-4y'+3=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$ $\boxed{1\ 分}$

(d) **（重点）** $y'' + 6y' + 9y = (3x + 1)e^{3x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$

(e) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ $\boxed{1\text{ 分}}$