镜州商贸学院（新圩）

《多变量微积分》

2023 补考复习题

第五章

空间解析几何、场论、

多变量函数的极限与连续

空间曲面的切平面与法线：

设 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 为空间曲面， $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ ，则曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$ ，过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲面 Σ 的切平面为 $F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$ ，法线为 $\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$ 。

空间曲线的切线与法平面 1：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$ ，取参数 $t=t_0$ ，对应的曲线上的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$ ，其中 $x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$ 。曲线 L 在 M_0 处的切向量为 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$ ；曲线 L 在 M_0 处的切线为 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$ ；曲线 L 在 M_0 处的法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$ 。

空间曲线的切线与法平面 2：

设 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ ，则切线方向的方向向量为 $\vec{T}=\left(\{F_x',F_y',F_z'\}\times\{G_x',G_y',G_z'\}\right)|_{M_0}$ 。

A

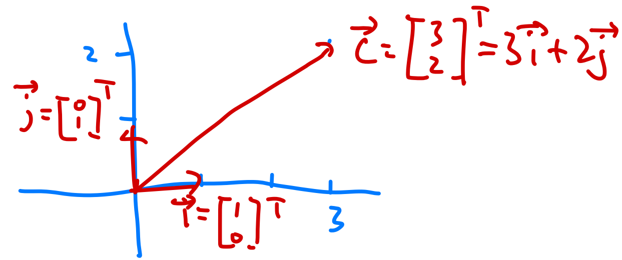
设 $\vec{a}=(1,-1,3)$ ，$\vec{b}=(2,-1,2)$ ，求用 $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ 表示向量 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 为_____。

A、 $3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+5\vec{k}$

B、 $-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+5\vec{k}$

C、 $-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$

D、 $-2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+5\vec{k}$



$\vec{\imath}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^T$ $\vec{\jmath}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}^T$ $\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}^T$ $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}^T$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}^T$ $\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\-2\\5\end{bmatrix}^T$

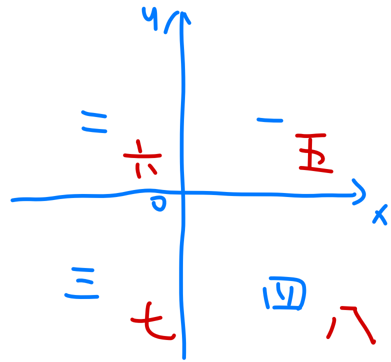
B 点 $(-1,-2,-3)$ 是第______卦限内的点。

A、 一

B、 七

C、 二

D、 八

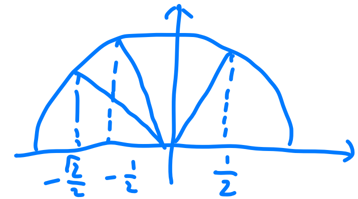


xOy面上面

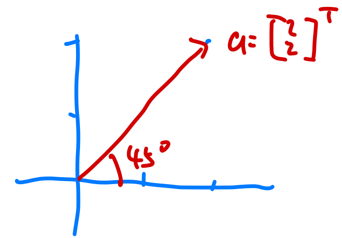
下

设已知两点 $M_1\left(4,\sqrt{2},\overset{1}{\cancel{-3}}\right)$ 和 $M_2(3,0,2)$ ，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, -\sqrt{2}, 1)$



$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

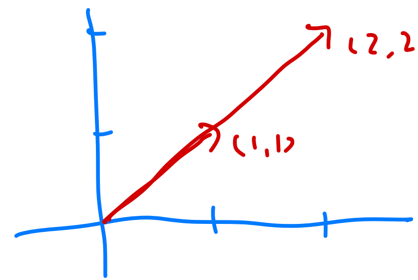


$\cos\alpha = \frac{-1}{2}$, $\cos\beta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$

设向量 $\vec{a}=(2,1,m)$ ，$\vec{b}=(n,-2,3)$ ，且 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ ，则 $m=$ $\underline{-\frac{3}{2}}$ ，$n=$ $\underline{-4}$ 。

$2:m = 1:-2 = n:3$



A 设有向量 $\vec{a} = (1,1,0)$ ，$\vec{b} = (0,0,1)$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ 。

A、 0

B、 1

C、 $\vec{j} - \vec{i}$

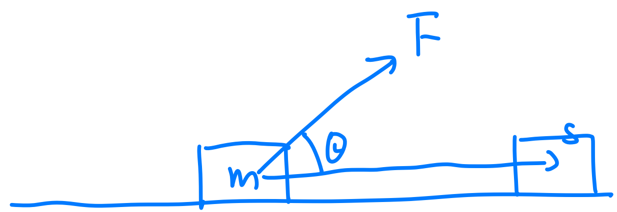
D、 $\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 力 $\vec{a}$ 拉着物体移动 $\vec{b}$ 位移做的功

$W = F s \cos\theta$

$= \vec{F} \cdot \vec{s}$



D 设 $\vec{a}=(-1,1,2)$ ，$\vec{b}=(2,0,1)$ ，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____。

A、 0

B、 $\frac{\pi}{6}$

C、 $\frac{\pi}{4}$

D、 $\frac{\pi}{2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times 2+1\times 0+2\times 1=0$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=0$$

C 直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $3x-y+2z=4$ 的关系是_____。

A、 平行

B、 既不平行也不垂直

C、 垂直

D、 直线在平面上

直线的方向向量 $(3,-1,2)$

平面的法向量 $(3,-1,2)$

有两个向量 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

题在11页

$$\underline{\vec{v}\times\vec{w}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$$

这个向量与 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 垂直，长度为 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 组成的平行四边形的面积，遵循右手定则

曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线方程是______。

$F(x,y,z) = z - e^z + 2xy - 3 = 0$

$F_x = 2y$　　$F_x|_{(1,2,0)} = 4$

$F_y = 2x$　　$F_y|_{(1,2,0)} = 2$

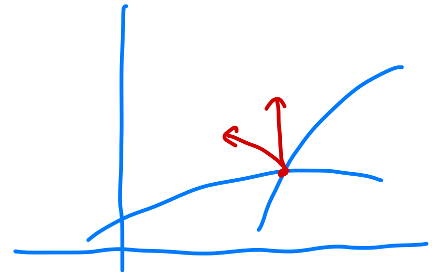
$F_z = 1 - e^z$　　$F_z|_{(1,2,0)} = 0$

曲面在此处的一个法向量为 $\vec{s} = (2,1,0)$

法线方程为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$

求曲线 $y^2 = 2mx, \overset{z^2}{\cancel{x^2}} = m - x$（$m$ 是常数）在点 (x_0, y_0, z_0) 的切线及法平面方程。

补充在9页



$F(x,y,z) = y^2 - 2mx$

$F_x = -2m,\quad F_y = 2y,\quad F_z = 0$

该曲面在该点处的一个法向量 $\vec{n_1} = (-2m, 2y_0, 0)$

同理，曲面 $x^2 = m - x$ 在该点处的一个法向量为 $\vec{n_2} = (1, 0, 2z_0)$

曲线的一个切向量 $\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2m & 2y_0 & 0 \\ 1 & 0 & 2z_0 \end{vmatrix} = (4y_0z_0, 4mz_0, -2y_0)$

该处切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{2y_0z_0} = \dfrac{y-y_0}{2mz_0} = \dfrac{z-z_0}{-y_0}$

该处法平面方程 $2y_0z_0(x-x_0) + 2mz_0(y-y_0) - y_0(z-z_0) = 0$

求过点 (0,2,4) 且与两平面 $\underbrace{x+2z=1}_{1}$ 和 $\underbrace{y-3z=2}_{2}$ 平行的直线的对称式和参数式方程。

平面 1 的一个法向量 $\vec{n}_1=(1,0,2)$

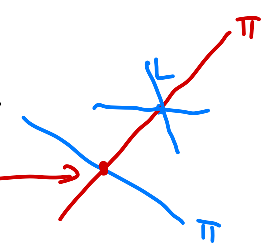
平面 2 的一个法向量 $\vec{n}_2=(0,1,-3)$

所求直线的一个切向向量为 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=(-2,3,1)$

所求直线的对称式方程为：$\dfrac{x-0}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$

参数式方程为：$\begin{cases}x=-2t\\ y=2+3t\\ z=4+t\end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

求直线 $\underbrace{\begin{cases}x+y+3z=0\\ x-y-\cancel{0}\,z=0\end{cases}}_{L}$ 在平面 $\underbrace{4x-y+z=1}_{\pi}$ 上的投影直线的方程。



过 L 的平面束为 π'：$(x+y+3z)+\lambda(x-y-z)=0$

$$\pi' = (1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(3-\lambda)z=0$$

π' 的一个法向量为 $\vec{n_1}=((1+\lambda),(1-\lambda),(3-\lambda))$

π 的一个法向量为 $\vec{n_2}=(4,-1,1)$

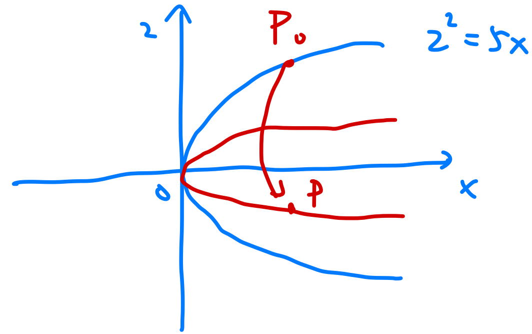
π 与 π' 垂直，即 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=4+4\lambda-1+\lambda+3-\lambda=4\lambda+6=0$，$\lambda=-\frac{3}{2}$

过 L 与 π 垂直的平面方程为 $-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}y+\frac{9}{2}z=0$，即 $x-5y-9z=0$

投影直线为 $\begin{cases}x-5y-9z=0\\ 4x-y+z=1\end{cases}$

将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程是_____。

记为 L



设点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 L 上的任意一点，

当 P_0 绕 x 轴转到 $P(x, y, z)$ 时，有

$$\begin{cases} y^2+z^2 = y_0^2+z_0^2 \\ x = x_0 \end{cases} \quad ①$$

又因为点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在 L 上，所以 $\begin{cases} z_0^2 = 5x_0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ ②

将②代入①经合一通乱算，有

$$y^2+z^2 = y_0^2+z_0^2 = 5x_0 = 5x$$

所以，生成的旋转曲面的方程为 $y^2+z^2 = 5x$

方程 $x^2+y^2=1$ 在平面直角坐标系中表示的曲线是__圆__，在空间直角坐标系中表示的曲面是__圆柱面__。

A 在空间直角坐标系中，方程 $x^2 - 4(y-1)^2 = 0$ 表示_____。

A、 两个平面

$x = \pm 2(y-1)$

B、 双曲柱面

C、 椭圆柱面

D、 圆柱面

B 以点 $(1,3,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程是_____。

A、 $x^2+y^2+z^2=14$

B、 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$

C、 $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=14$

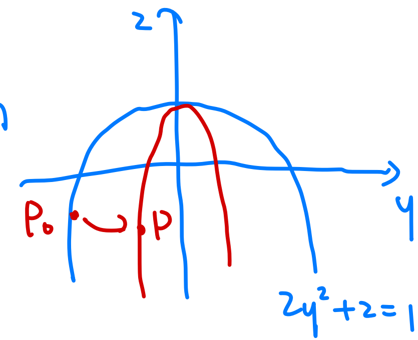
D、 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2+14=0$

已知曲线 $L:\begin{cases}2y^2+z=1\\x=0\end{cases}$ 则曲线 L 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面方程为______。

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 L 上任意一点，当它绕 z 轴转至 $P(x,y,z)$ 时，有

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=x^2+y^2 & ①\\ z_0=z\end{cases}$$

又因为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 L 上，有 $\begin{cases}2y_0^2+z_0=1\\x_0=0\end{cases}$ ②



$y_0^2=\frac{1-z_0}{2}$

将②代入①，有

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2=\frac{1-z_0}{2}=\frac{1-z}{2}$$

整理，得曲面方程为 $2x^2+2y^2=1-z$

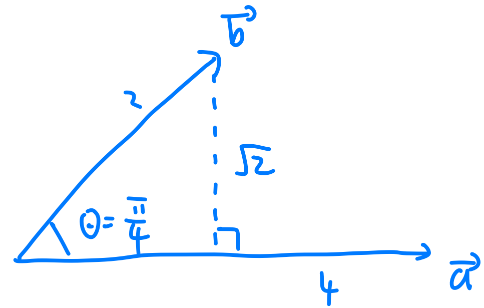
C 已知向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的模分别为 $|\vec{a}| = 4$ ，$|\vec{b}| = 2$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\sqrt{2}$ ，则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ ____。

A、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B、 $2\sqrt{2}$

C、 $4\sqrt{2}$

D、 2



$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$

$4\sqrt{2} = 4 \times 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

（中飞院，2022 级）设已知 $M_1\left(3,\sqrt{2},1\right)$ 和 $M_2(4,0,2)$ ，则$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦 $\cos\alpha =$ _____ （结果用小数表示）。

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1, -\sqrt{2}, 1)$

$|\overrightarrow{M_1M_1}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} = 0.5$

（中飞院，2022 级）设 $\overrightarrow{OA}=(1,0,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,0,6)$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=$ <u>0</u>。

法1：$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&3\\2&0&6\end{vmatrix}=(0,0,0)$

$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{0^2+0^2+0^2}=0$

法2：显然 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 平行

由 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 组成的平行四边形面积当然为0

（中飞院，2022 级）求过点 (1,2,3) 且与两平面 $x-y+z=1$ 和 $2x+y+z=3$ 平行的直线的对称式方程和参数方程。

1

2

平面 1 的一个法向量 $\vec{n_1}=(1,-1,1)$

平面 2 的一个法向量 $\vec{n_2}=(2,1,1)$

与两平面都平行的直线的一个方向向量 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=(-2,1,3)$

所求直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$

参数方式为 $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=3+3t \end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

梯度：设 $u=f(x,y,z)$ 可偏导，则 $\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ 。

旋度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ ，则 $\mathbf{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$ 。

散度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ ，则 $\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 。

通量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，Σ 为有侧曲面，称 $\Phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdzdy=\iint_{\Sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}dS$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 指向指定侧的流过有侧曲面 Σ 的通量（或流量），其中 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 的单位法向量。

环流量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，L 为有向闭曲线，称 $\oint_{L}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{L}\vec{a}\cdot d\vec{s}$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 沿有向闭曲线 L 的环流量。

设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\mathbf{grad}f(1,2,-1)=$ $\{7,7,-12\}$, $\mathbf{grad}f(1,0,1)=$ $\{5,-1,0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=6z-6$$

补充：设 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{div}[\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)]$ 。

因为 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，$f''_{xy}=f''_{yx}$，$f''_{xz}=f''_{zx}$，$f''_{yz}=f''_{zy}$

$$\mathrm{grad}\, f=\{f'_x,\ f'_y,\ f'_z\}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f'_x & f'_y & f'_z\end{vmatrix}=\{f''_{zy}-f''_{yz},\ f''_{xz}-f''_{zx},\ f''_{yx}-f''_{xy}\}$$

$$=\{0,0,0\}$$

$$\mathrm{div}\,[\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f)]=0$$

（中飞院，2022 级）设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-xyz$，则 $\mathbf{grad}f(1,0,1)=$ ______。

$\{2,-1,6\}$

$f'_x = 2x - yz$

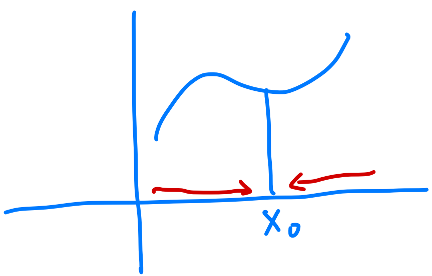
$f'_y = 4y - xz$

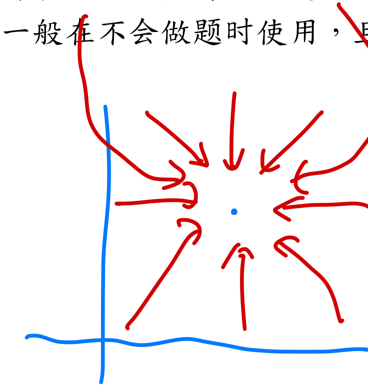
$f'_z = 6z - xy$

判断多元函数极限是否存在的方法：

正经做法：一元函数在一点处极限存在的充分必要条件是其左、右极限都存在且相等，但多元函数在一点处极限存在，要求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，即函数 (x,y) 沿所有可能的路径趋于点 (x_0,y_0) 时，函数值趋于同一个值，若函数 $f(x,y)$ 沿两个不同方向趋于点 (x_0,y_0) 时，函数值趋于两个不同值，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在。

瞎猜法：当分子次数高于分母次数时，极限一般存在，而且很有可能是 0 。当分子次数低于或等于分母次数时，极限一般不存在。该方法一般在不会做题时使用，且不保证答案正确。





极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\pi}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=$ ______ 。

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\pi}} y\,\frac{\sin(xy)}{xy}$$

$$=\pi\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\pi$$

函数 $z=\sqrt{\ln(x+y)}$ 的定义域为_____。

$\{(x,y) \mid x+y \geq 1\}$

$\sqrt{\bigcirc}$ $\quad \bigcirc \geq 0$

$\ln \bigcirc$ $\quad \bigcirc > 0$

函数 $z=\dfrac{\arcsin x}{y}$ 的定义域为______。

$\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ y\ne 0\}$

$\arcsin \bigcirc$ $\quad -1\le \bigcirc \le 1$

$\dfrac{?}{\bigcirc}$ $\quad \bigcirc \ne 0$

B 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=$ ______ 。

A、 等于 0

B、 不存在

C、 等于 $\frac{1}{2}$

D、 存在且不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

沿着 $y=x$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x^4+x^2}=0$

沿着 $y=x^2$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$

补：设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 是否存在

沿着 $y=x$，原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$，沿着 $y=-x$，原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2}$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在

求下列极限：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

原式 $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{t+4}}{t}$

$= 2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\frac{t}{4}+1}}{t}$

$= -2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+\frac{t}{4})^{\frac{1}{2}}-1}{t}$

$(1+0)^2$

$= -2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{t}{4})}-1}{t}$

$= -2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{\frac{t}{8}}-1}{t}$

$= -2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{t}{8}}{t}$

$= -\frac{1}{4}$

麦克劳林公式：

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

等价无穷小 $x\to 0$

$(1+x)^a - 1 \sim ax$

求下列极限：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xye^x}{4-\sqrt{16+xy}} = -8$$

求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \left(\boxed{\frac{\sin xy}{xy}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(1+0)^?$

原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \left(1+\frac{\sin xy - xy}{xy}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin xy - xy}{xy}\right)}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{y^2\frac{\sin xy - xy}{x^3y^3}}$

麦克劳林公式：

$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$= \lim\limits_{t\to 0} e^{4\frac{\sin t - t}{t^3}}$

$= \lim\limits_{t\to 0} e^{4\frac{t-\frac{t^3}{6}-t}{t^3}}$

$= \lim\limits_{t\to 0} e^{-\frac{4}{6}\frac{t^3}{t^3}}$

$= e^{-\frac{2}{3}}$

（中飞院，2022 级）求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3-\sqrt{9-xy}}{xy}$

原式 $= \lim\limits_{t\to 0} \frac{3-\sqrt{9-t}}{t}$

$= 3\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\sqrt{1-\frac{t}{9}}}{t}$

$= -3\lim\limits_{t\to 0} \frac{(1-\frac{t}{9})^{\frac{1}{2}}-1}{t}$

$= -3\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(1-\frac{t}{9})}-1}{t}$

$= -3\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{-\frac{t}{18}}-1}{t}$

$= -3\lim\limits_{t\to 0} \frac{-\frac{t}{18}}{t}$

$= \frac{1}{6}$

第六章

多变量函数的微分

偏导数：$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 f_x' 是 f 对 x 求偏导的意思。$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 f_{xy}'' 是 f 先对 x 求偏导再对 y 求偏导的意思。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家看题吧。

全微：设 $z = f(x, y)\big((x, y) \in D\big)$ ，$(x_0, y_0) \in D$ 若 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ，称 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可全微，简称可微，记 $A\Delta x + B\Delta y = dz$ ，习惯上记 $dz = Adx + Bdy$ 。

设 $z = f(x, y)$ 可微，则其全微分为 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ 。

隐函数求导：设 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ，$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ，则在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域内由 $F(x, y, z) = 0$ 能唯一确定连续可偏导的函数 $z = f(x, y)$ ，满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ 。

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+ay}{(x+y)^2} = -2(x+ay)\frac{1}{(x+y)^3} + a\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{-2x-2ay}{(x+y)^3} + \frac{ax+ay}{(x+y)^3} = \frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x+y)^2} = -2\frac{y}{(x+y)^3} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$

可全微，$f''_{xy} = f''_{yx}$，$a=2$

已知 $\frac{(x+ay)dx+y\,d\cancel{x}y}{(x+y)^2}$ 为某个函数的全微分，则 $a=$ ______ 。

D

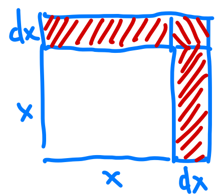
A、 -1

B、 0

C、 1

D、 2

一个正方形的边长为 x，它的面积为 $y=x^2$，当它的边长变长 dx 时，它的面积变大多少 (dy)？

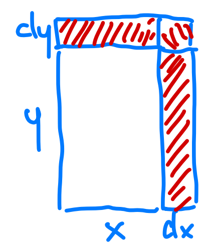


$dx \to 0$

$$dy = 2x\,dx + o(dx)$$

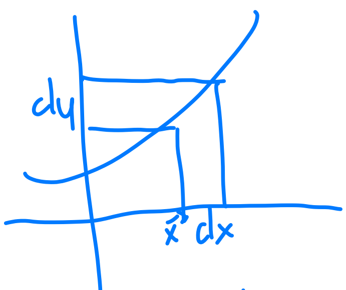
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

一个长方形的边长分别为 x, y，它的面积为 $z=xy$，当它的边长变长 dx 或 dy 时，它的面积变大多少 (dz)？



$$dz = y\,dx + x\,dy + o\left(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$



$$f'(x) = \lim_{dx\to 0}\frac{dy}{dx}$$

B 设 $u=\arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$ ______ 。

A、 $\frac{x}{x^2+y^2}$

B、 $-\frac{y}{x^2+y^2}$

C、 $\frac{y}{x^2+y^2}$

D、 $-\frac{x}{x^2+y^2}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

外 arctan ○

内 $\frac{y}{x}$

对x偏导数
把y看成常数

A 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的_____。

A、 必要而非充分条件

B、 充分而非必要条件

C、 充分必要条件

D、 既非充分又非必要条件

偏导数连续
↓
可微
↙ ↘
连续 偏导数存在

求下列函数的全微分：

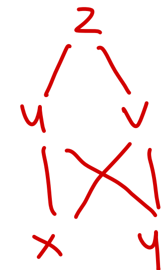
$$z = xy + \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$$

$$dz = \left(y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x - \frac{x}{y^2}\right)dy$$

设 $z = u^2 \ln v$ ，而 $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3$$

$$= 2\frac{x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2)$$

$$= -2\frac{x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$$

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

法1: $2xyz+xy^2\frac{\partial z}{\partial y}=1+\frac{\partial z}{\partial y}$

整理 $(xy^2-1)\frac{\partial z}{\partial y}=1-2xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-2xyz}{xy^2-1}$$

法2: $F(x,y,z)=xy^2z-x-y-z$

$F'_z=xy^2-1$, $F'_y=2xyz-1$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2xyz-1}{xy^2-1}$$

设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\overset{x'}{\dfrac{\partial x}{\partial y}}$，$\overset{z'}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}$。

$$\begin{cases} z' = 2x x' + 2y \\ 2x x' + 4y + 6z z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x x' - z' = -2y & ① \\ 2x x' + 6z z' = -4y & ② \end{cases}$$

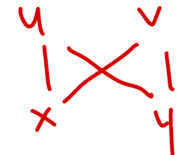
②－①：$(6z+1) z' = -2y$，$z' = -\dfrac{2y}{6z+1}$

将 $z' = -\dfrac{2y}{6z+1}$ 带回 ① 中，$2x x' = -2y - \dfrac{2y}{6z+1}$

得 $x' = -\dfrac{2y(3z+1)}{x(6z+1)}$

设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

u' v'



$$\begin{cases} 1 = e^u u' + u'\sin v + u v'\cos v & ① \\ 0 = e^u u' - u'\cos v + u v'\sin v & ② \end{cases}$$

①左右同乘 $\sin v$，②左右同乘 $\cos v$ 有

$$\begin{cases} \sin v = e^u u'\sin v + u'\sin^2 v + u v'\sin v\cos v & ③ \\ 0 = e^u u'\cos v - u'\cos^2 v + u v'\sin v\cos v & ④ \end{cases}$$

③−④有 $\sin v = e^u u'(\sin v - \cos v) + u'$，得 $u' = \dfrac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$

①左右同乘 $\cos v$，②左右同乘 $\sin v$ 有

$$\begin{cases} \cos v = e^u u'\cos v + u'\sin v\cos v + u v'\cos^2 v & ⑤ \\ 0 = e^u u'\sin v - u'\sin v\cos v + u v'\sin^2 v & ⑥ \end{cases}$$

⑤+⑥有 $\cos v = e^u u'(\cos v + \sin v) + u v'$ 得 $v' = \dfrac{\cos v - e^u u'(\cos v + \sin v)}{u} =$

$$\frac{\cos v}{u} - \frac{e^u(\cos v + \sin v)\sin v}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

$$= \frac{e^u\sin v\cos v - e^u\cos^2 v + \cos v - e^u\cos v\sin v - e^u\sin^2 v + \cos v}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

$$= \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿方向 $\vec{l} = (2,1)$ 的方向导数是______。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,1)} = -3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,1)} = 3$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

方向导数 $= -3 \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$

（中飞院，2022 级）设 $z=u^3\ln v$，而 $u=x^2+y^2$，$v=xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=3u^2\ln v\cdot 2x+\frac{u^3}{v}y$$

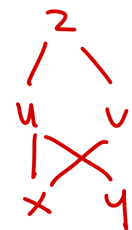
$$=6(x^2+y^2)^2x\ln(xy)+\frac{(x^2+y^2)^3}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\quad\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=3u^2\ln v\cdot 2y+\frac{u^3}{v}x$$

$$=6(x^2+y^2)^2y\ln(xy)+\frac{(x^2+y^2)^3}{y}$$

（中飞院，2022 级）设 $z = u^2 \sin v$，而 $u = xy$，$v = x^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 2u \sin v \cdot y + u^2 \cos v \cdot 2x$$

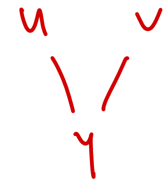
$$= 2xy^2 \sin x^2 + 2x^3y^2 \cos x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= 2u \sin v \cdot x$$

$$= 2x^2 y \sin x^2$$

(中飞院，2022 级)设$\begin{cases} xu - yv = 1 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$，求$\overset{u'}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}$，$\overset{v'}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}$。



$$\begin{cases} xu' - v - yv' = 0 & ① \\ u - yu' + xv' = 0 & ② \end{cases}$$

① 左右同乘 x，② 左右同乘 y 有

$$\begin{cases} x^2u' - xv - xyv' = 0 & ③ \\ yu - y^2u' + xyv' = 0 & ④ \end{cases}$$

③+④ 有 $(x^2-y^2)u' - (xv-yu) = 0$，得 $u' = \dfrac{xv-yu}{x^2-y^2}$

① 左右同乘 y，② 左右同乘 x 有

$$\begin{cases} xyu' - yv - y^2v' = 0 & ⑤ \\ xu - xyu' + x^2v' = 0 & ⑥ \end{cases}$$

⑤+⑥ 有 $(x^2-y^2)v' - (yv-xu) = 0$，得 $v' = \dfrac{yv-xu}{x^2-y^2}$

二元函数求无条件极值的步骤：

(1) 求 $z=f(x,y)$ 的定义域 D（开区域）；

(2) 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 求出 $z=f(x,y)$ 的驻点； 驻点有可能是鞍点

(3) 利用判别法判断驻点是否为极值点：

令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则：

当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数的极值点，其中：

当 $A>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值点；

当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；

当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是函数的极值点；

当 $AC-B^2=0$ 时，无法判断 (x_0,y_0) 是不是函数的极值点。

二元函数求条件极值：

所谓二元函数的条件极值，即二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般有如下三种方法：

拉格朗日乘数法：

令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ，由 $\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0\\F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0\\F'_\lambda=\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 求出 (x,y) 的值，并确定最优解；

转化为一元函数的极值：

由 $\varphi(x,y)=0$ 求出 $y=y(x)$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x,y(x)]$ ，再求一元函数 $z=f[x,y(x)]$ 的极值；

参数方程法：

由 $\varphi(x,y)=0$ ，得 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(y)\end{cases}$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x(t),y(t)]$ ，再求一元函数的极值。

函数 $z = 2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 1$ 的驻点是______。

(1, -1)

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 4$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y - 6$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 得 $x = 1$, $y = -1$

B 设函数 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则点 (0,0) 是函数 z 的_____。

A、　极大值点但非最大值点

B、　极大值点且是最大值点

C、　极小值点但非最小值点

D、　极小值点且是最小值点

$\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

且当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，$\sqrt{x^2+y^2} > 0$

所以显然 (0,0) 是 z 的极大值点且是最大值点

求函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的驻点和极值。

$f(x,y) = 4x - 4y - x^2 - y^2$

$f'_x = 4 - 2x$

$f'_y = -4 - 2y$

令 $\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

点 $(2,-2)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点

$f''_{xx} = -2 \leftarrow A$

$f''_{xy} = 0 \leftarrow B$

$f''_{yy} = -2 \leftarrow C$

因为 $AC - B^2 = 4 > 0$，$A < 0$

所以 $f(2,-2) = 8$ 为函数的极大值

补充：周长为 $2a$ 的矩形绕它的一边旋转可得到一个圆柱体，当矩形边长各为多少时，可使圆柱体的体积最大？

设矩形边长为 x, y. 当其绕 y 边旋转，得到圆柱体积为

$f(x,y)=\pi x^2 y$，约束条件为 $\varphi(x,y)=x+y-a=0$

法1：$F(x,y,\lambda)=\pi x^2 y+\lambda(x+y-a)$

令 $\begin{cases} F'_x=2\pi y+\lambda=0 \\ F'_y=\pi x^2+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x+y-a=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{a}{3} \\ y=\frac{2}{3}a \end{cases}$

法2：将 $y=a-x$ 带入 $f(x,y)$ 得

$f(x)=\pi x^2(a-x)=\pi a x^2-\pi a x^3$

令 $f'(x)=2\pi a x-3\pi x^2=0$

解得 $x_1=0$（舍去） $x_2=\frac{2}{3}a$

当矩形边长为 $\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a$ 时，绕长为 $\frac{2}{3}a$ 的边旋转，得到的圆柱体积最大

第七章

多变量函数的积分

二重积分：当你理解不了时，想象一张质量不均匀的铁片的重量，或者一个顶面不平的柱体的体积。当你在一个方向上做不出来时，就换一个方向做做试试。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家还是看题吧。

二重积分直角坐标转换为极坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，区域 D 表示为 $D = \{(r,\theta) | \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$，则

$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$。注意 f 外面有个 r。

三重积分：当你理解不了时，想象一块质量不均匀的石头的重量。不要管什么先一后二还是先二后一，也不要管什么切片法和什么铅直投影法，算就完了。

三重积分直角坐标转换为柱面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$，其中 $\Omega = \{(r,\theta,z) | \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \varphi_1(r,\theta) \le z \le \varphi_2(r,\theta)\}$，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr \int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$。

三重积分直角坐标转换为球面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，其中 $\alpha \le \theta \le \beta, \theta_1 \le \varphi \le \theta_2, r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta)$，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, dr$。

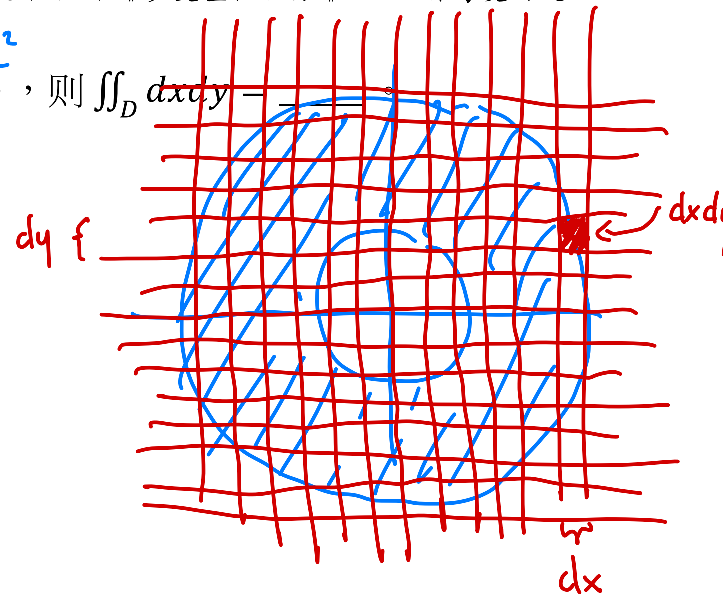
A 设二重积分的积分区域是 $1 \le x^2 + y^2 \le \overset{2^2}{4}$，则 $\iint_D dxdy =$ ____。

A、 3π

B、 4π

C、 π

D、 15π



$\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$

$$\int_0^1 dx \int_0^x xy^2 dy = \_\_\_\_\_。$$

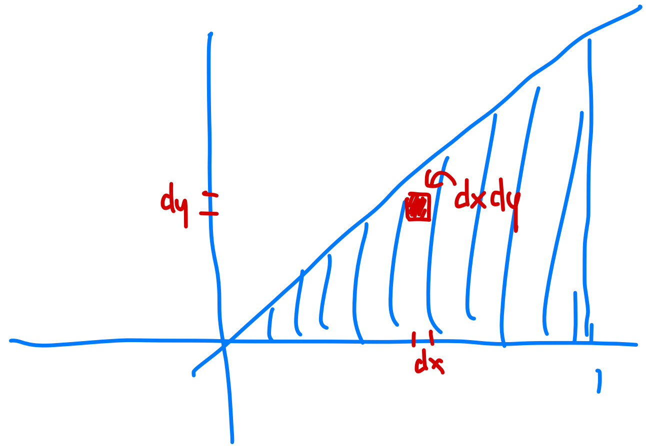
$$= \int_0^1 \int_0^x xy^2 dy \quad dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} x y^3 \Big|_0^x \quad dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 \quad dx$$

$$= \frac{1}{15} x^5 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{15}$$



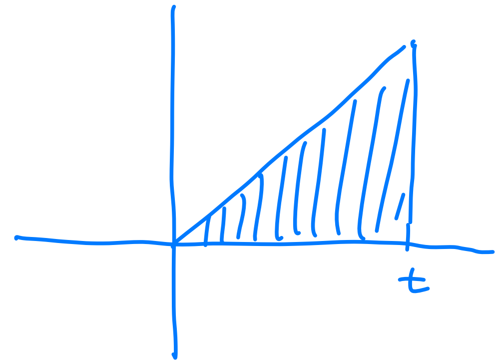
极限 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\int_0^t dx\int_0^x xe^{-y^2}dy}{t^3}=$ ______ 。

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t x\int_0^x e^{-y^2}dy\,dx}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t\int_0^t e^{-y^2}dy}{3t^2}$$

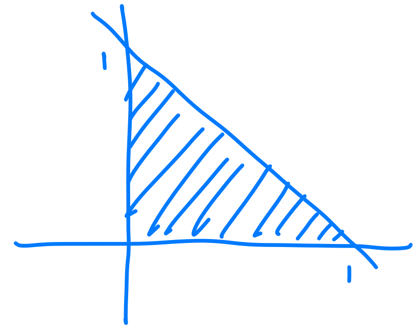
$$=\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t e^{-y^2}dy}{3t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{3}e^{-t^2}=\frac{1}{3}$$



D 设区域 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=1$ 围成的三角形区域，则 $\iint_D xydxdy =$ _____ 。

$y=-x+1$



A、 $\frac{1}{4}$

B、 $\frac{1}{8}$

C、 $\frac{1}{12}$

D、 $\frac{1}{24}$

原式 $= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}xy^2 \Big|_0^{1-x} dx$

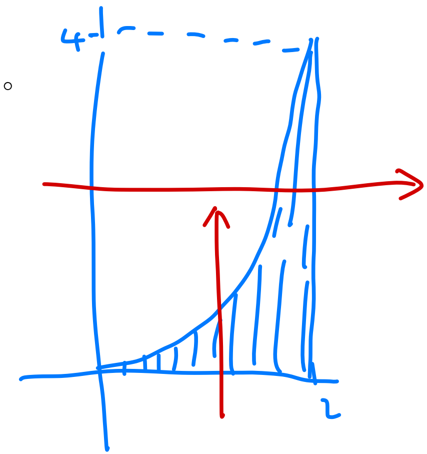
$= \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2 dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x-2x^2+x^3\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{12}-\frac{8}{12}+\frac{3}{12}\right) = \frac{1}{24}$

A 二次积分 $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 的另一种积分次序是______。



A、 $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$

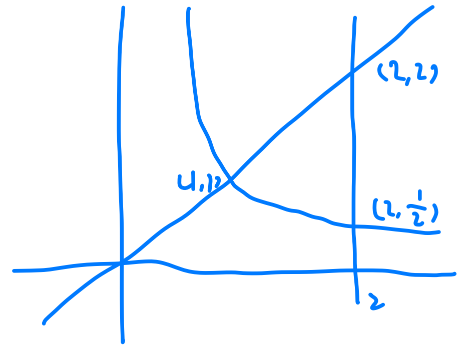
B、 $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

C、 $\int_0^4 dy \int_{x^2}^2 f(x,y)dx$

D、 $\int_0^4 dy \int_2^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

$y=\frac{1}{x}$

计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$ ，其中 D 是由直线 $x=2$ ， $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域。



原式 $=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

$=\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy\ dx$

$=\int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx$

$=\int_1^2 (-x+x^3)\ dx$

$=\int_1^2 (x^3-x)\ dx$

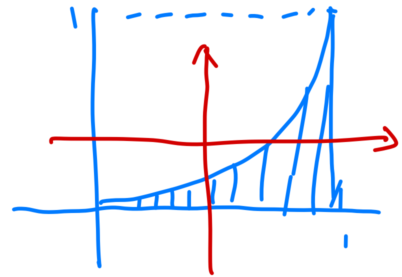
$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$

$=(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$=2+\frac{1}{4}$

交换下列积分顺序：

$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ $= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\, dx$



补：$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y} dx$

原式 $= \int_0^1 dy \int_0^x e^{y^2} dx$

$= \int_0^1 y e^{y^2} dy$

$= \frac{1}{2}(e-1)$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

B 设 D 是圆域 $x^2+y^2\le 4$（2^2），则 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=$ _____ 。

A、 $\frac{8}{3}\pi$

B、 $\frac{16}{3}\pi$

C、 4π

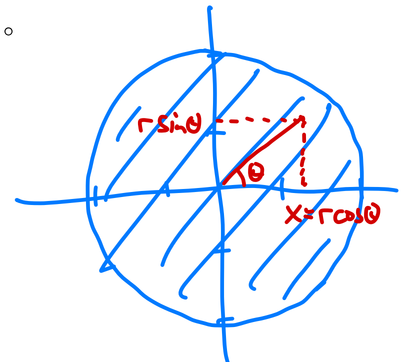
D、 π

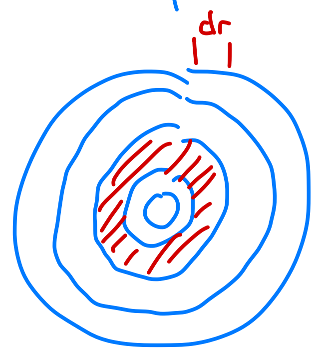
法1：原式 $= \int_0^2 dr\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\cdot r\,d\theta$

$= \int_0^2 2\pi r^2\,dr$

$= \frac{2}{3}\pi r^3\Big|_0^2$

$= \frac{16}{3}\pi$





法2：原式 $= \int_0^2 r\cdot 2\pi r\,dr$

$= \frac{16}{3}\pi$

计算 $\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$ ，其中 D 是介于圆周 $x^2+y^2=a^2$ 所围成的闭区域。

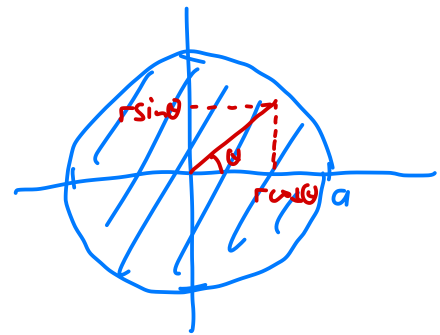
原式 $= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} e^{r^2}\, r\, d\theta$

$= 2\pi \int_0^a r e^{r^2} dr$　　　$dx^2 = 2x\, dx$

$= \pi \int_0^a e^{r^2} dr^2$

$= \pi\, e^{r^2} \Big|_0^a$

$= \pi e^{a^2} - \pi$



计算 $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} d\sigma$ ，其中 D 是介于圆周 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+y^2=b^2$ 之间的环形闭区域（$0<a<b$）。

法1：原式 $= \int_a^b dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, r \, d\theta$

$= \int_a^b r \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \, dr$

$= \int_a^b r \cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta \, dr$

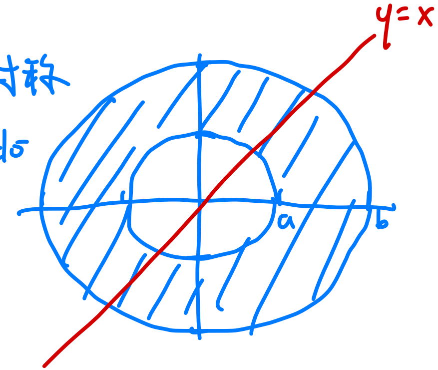
$= \int_a^b r \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \, dr$

$= \pi \int_a^b r \, dr$

$= \pi \left. \frac{1}{2} r^2 \right|_a^b$

$= \frac{\pi}{2}(b^2-a^2)$

法2：显然区域D关于 $y=x$ 对称



所以 $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} d\sigma = \iint_D \frac{x^2}{y^2+x^2} d\sigma$

所以原式 $= \frac{1}{2}\iint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} d\sigma$

$= \frac{1}{2}\iint_D d\sigma$

$= \frac{1}{2}(\pi b^2 - \pi a^2)$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$

当 $n=2k$ 时，$I_n = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

当 $n=2k+1$ 时，$I_n = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$

C

区域 $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\}$，$\Omega_1 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$，则等式成立的是_____。

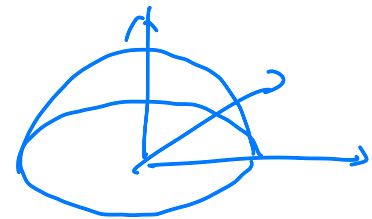
A、 $\iiint_{\Omega} x dv = 4\iiint_{\Omega_1} x dv$

B、 $\iiint_{\Omega} y dv = 4\iiint_{\Omega_1} y dv$

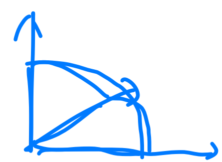
C、 $\iiint_{\Omega} z dv = 4\iiint_{\Omega_1} z dv$

D、 $\iiint_{\Omega} xyz dv = 4\iiint_{\Omega_1} xyz dv$

Ω

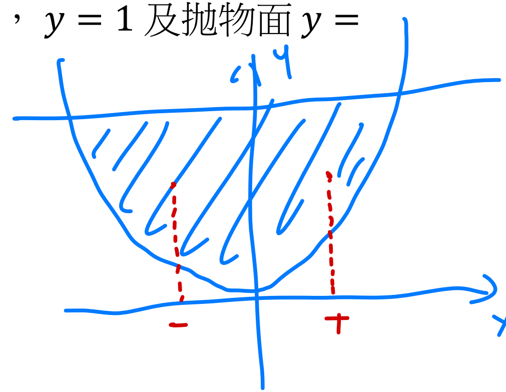


Ω_1



实在想象不出来就算了

计算 $\iiint_\Omega xz\,dxdydz$ ，其中 Ω 是由平面 $z=0$ ，$z=y$ ，$y=1$ 及抛物面 $y=x^2$ 所围成的闭区域。



法1：原式 $=\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xz\,dx=0$

法2：显然 Ω 关于 yOz 面对称

所以原式 $=0$

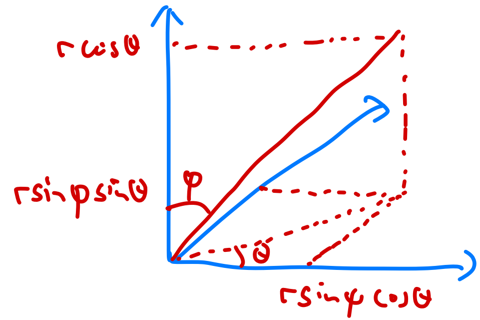
$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的闭区域。

原式 $= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \, d\varphi$

$= 2\int_0^R 2\pi \ r^4 \ dr$

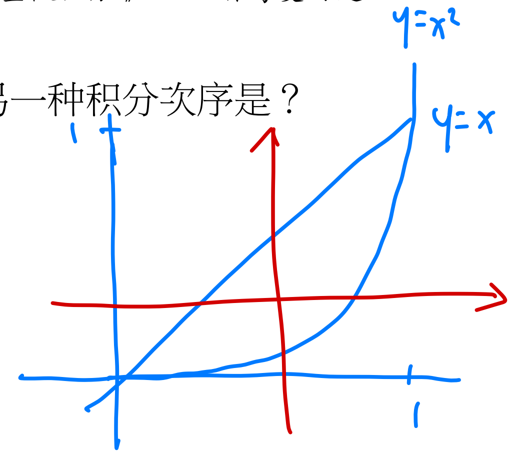
$= 4\pi \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^R$

$= \frac{4}{5}\pi R^5$



（中飞院，2022 级）二重积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 的另一种积分次序是？

$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx$



（中飞院，2022 级）求 $\iint_D \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) d\sigma$ ，其中 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ 。

原式 $= 4\pi$

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：当你理解不了时，想象一条不均匀的铁链的质量。

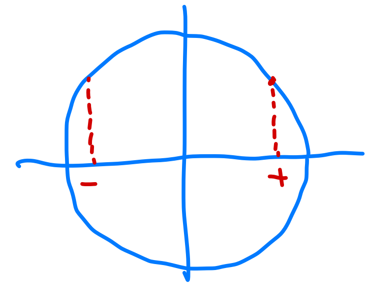
第一类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)(a\leq x\leq b)$，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$。

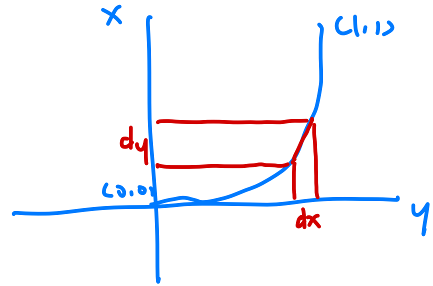
第一类曲线积分的计算方法 2：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leq t\leq\beta)$，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$。

$\oint_L (x+y)ds =$ __0__ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 。



计算 $\int_L y ds$ ，其中 L 为曲线 $x = y^2$ 从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧。



$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$= \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$

$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (dy)^2}$

原式 $= \int_0^1 y\sqrt{1+(2y)^2}\, dy$

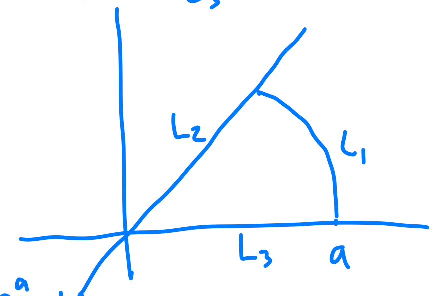
$= \int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}\, dy$

$= \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4y^2}\, d(1+4y^2)$

$= \frac{1}{12}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)$

计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（L_1），直线 $y=x$（L_2）及 x 轴（L_3）在第一象限内所围成的扇形的整个边界。



$$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{x^2+x^2}}\sqrt{1+1^2}\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}dx$$

$$= e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = e^a-1$$

$$\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^a e^{\sqrt{x^2+0^2}}\sqrt{1+0^2}\,dx = \int_0^a e^x dx = e^a-1$$

法1: $L_1:\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le \frac{\pi}{4}.$

$$\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{a^2\cos^2t+a^2\sin^2t}}\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}\,dt$$

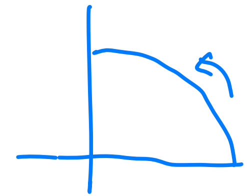
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a\,dt = \frac{\pi}{4}ae^a$$

法2: $\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \frac{1}{8}\cdot e^a\cdot 2\pi a$

$$= \frac{\pi}{4}ae^a$$

原式 $= \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = 2e^a + \frac{\pi}{4}ae^a - 2$

（中飞院，2022 级）计算$\int_L x^2ydx + xy^2dy$ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 的第一象限部分，L 的方向按逆时针方向。



$$L: \begin{cases} x = \cos t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t \sin t \cdot \sin t + \cos t \sin^2 t \cos t)\, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t \, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t)\, dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

当 $n = 2k$ 时，$I_n = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

当 $n = 2k+1$ 时，$I_n = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$

（中飞院，2022 级）计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ ，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：当你理解不了时，想象一个变力沿曲线做功。

第二类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)$，其中起点对应 $x=a$，终点对应 $x=b$，则 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx$。

第二类曲线积分的计算方法 2：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，其中起点对应 $t=\alpha$，终点对应 $t=\beta$，则 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$。

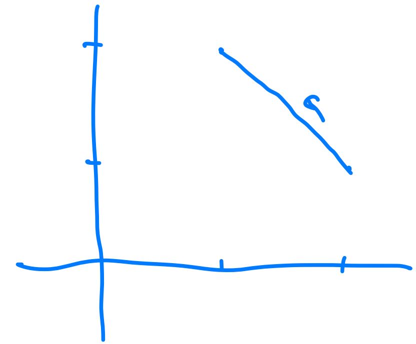
第二类曲线积分的计算方法 3（格林公式）：

设 D 为 xOy 平面上连通的有限闭区域，L 为闭区域 D 的正向边界，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上连续可偏导，则 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$。

柯西-黎曼条件（第二类曲线积分与路径无关的条件之一）：区域 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。

$y=-x+3$

计算 $\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2}$，其中 L 为从点 (2,1) 到点 (1,2) 的直线段。



$$原式 = \int_2^1 \frac{-x+3}{x^2} - \frac{x}{x^2}(-1)\,dx$$

$$= \int_2^1 \frac{3}{x^2}\,dx$$

$$= -3x^{-1}\Big|_2^1 = -\frac{3}{2}$$

想象变力做功

A

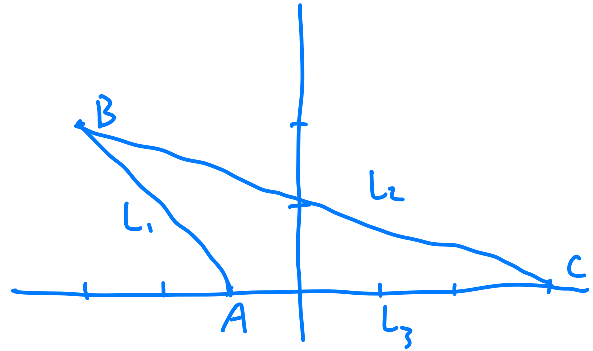
设 L 是以 $A(-1,0)$ ， $B(-3,2)$ ， $C(3,0)$ 为顶点的三角形域的周边界沿 $ABCA$ 方向，则 $\oint_L (3x-y)dx+(x-2y)dy=$ ______ 。

A、 -8

B、 0

C、 8

D、 20



法1: L_1: $y=-x-1$, $-1\to-3$

L_2: $y=-\frac{1}{3}x+1$, $-3\to3$

L_3: $y=0$, $3\to-1$

$\int_{L_1}=\int_{-1}^{-3}[(2x-1)+(3x+2)(-1)]dx=\int_{-1}^{-3}(-x-3)dx=-2$

$\int_{L_2}=\int_{-3}^{3}[(\frac{10}{3}x-1)+(\frac{5}{3}x-2)(-\frac{1}{3})]dx=\int_{-3}^{3}(\frac{25}{9}x-\frac{1}{3})dx=-2$

$\int_{L_3}=\int_{-3}^{-1}[(3x)+(x)\cdot 0]dx=\int_{-3}^{-1}3x\,dx=-4$

原式 $=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}$

$=-8$

法2: 原式 $=-\iint_D (1+1)\,dxdy$

$=-2\times\frac{1}{2}\times4\times2=-8$

C 设曲线 L 是区域 D 的正向边界，则 D 的面积为_____。

A、 $\oint_L xdy - ydx$

B、 $\oint_L xdy + ydx$

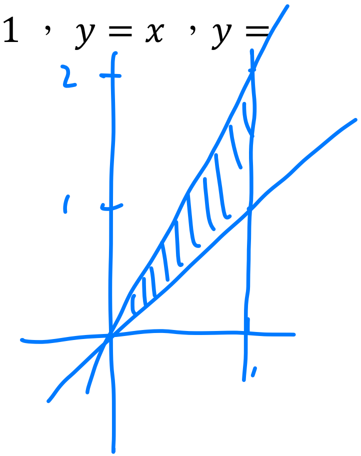
C、 $\frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

D、 $\frac{1}{2}\oint_L xdy + ydx$

C：原式 $= \frac{1}{2}\iint\limits_D 1-(-1)\,d\sigma$

$= \iint\limits_D d\sigma$

计算 $\oint_L (x^2y-2y)dx+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dy$，其中 L 为以直线 $x=1$，$y=x$，$y=2x$ 为边的三角形的正向边界。 D



原式 $=\iint_D (x^2-1)-(x^2-2)\,d\sigma$

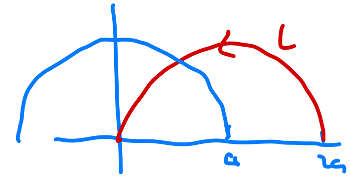
$=\iint_D d\sigma$

$=\int_0^1 dx\int_x^{2x} dy$

$=\frac{1}{2}$

计算 $\int_L (2+3y-y^2\cos x)dx+(5-2y\sin x+7x)dy$ ，其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 沿~~顺~~逆时针方向。

$(x-a)^2+y^2=a^2$



$=2\pi a^2-4a$

法1: $L: \begin{cases} y = a\sin\theta \\ x = a\cos\theta + a \end{cases}$, $0\le\theta\le\pi$

原式 $= \int_0^{\pi} [-(2+3a\sin\theta - a^2\sin^2\theta\cos(a\cos\theta+a))a\sin\theta + (5-2a\sin\theta\sin(a\cos\theta+a)+7(a\cos\theta+a))a\cos\theta]\,d\theta$

法2: 补直线 L_1 是由 $(0,0)$ 指向 $(2a,0)$ 的直线，记围上这块半圆为 D

$\oint_{L+L_1} = \iint_D [(-2y\cos x+7)-(3-2y\cos x)]\,d\sigma = \iint_D 4\,d\sigma = 4\times\frac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi a^2$

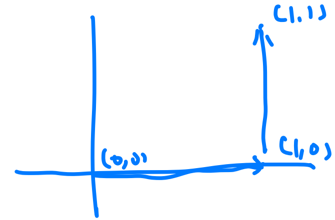
$\int_{L_1} = \int_0^{2a} 2\,dx = 4a$

$\int_L = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = 2\pi a^2 - 4$

（中飞院，2017 级）已知曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+yx^2dy$，

(1) 证明：在全平面内，积分 I 与路径无关；

(2) 计算积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy$。



(1) $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以积分与路径无关

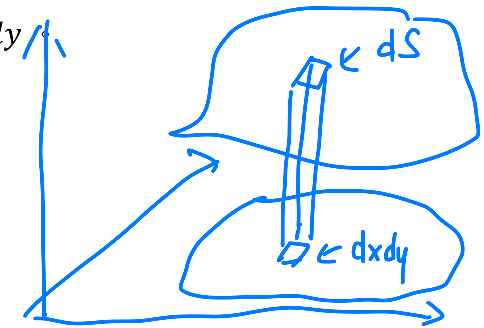
(2) 原式 $=\int_{(0,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}=0+\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}$

第一类曲面积分（对面积的曲面积分）：当你理解不了时，想象一张不均匀的铁皮的质量。

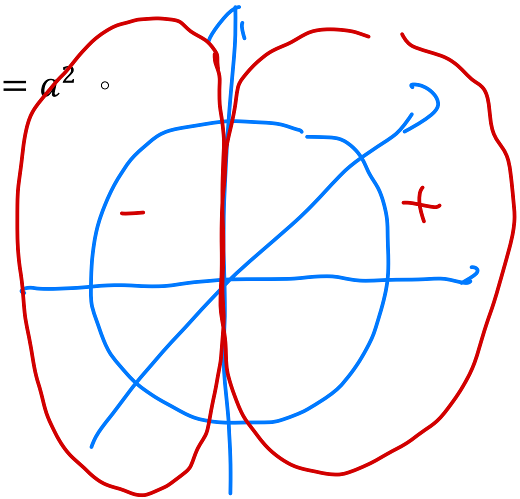
第一类曲面积分的计算方法：

设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D$，则 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$，于是

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$。

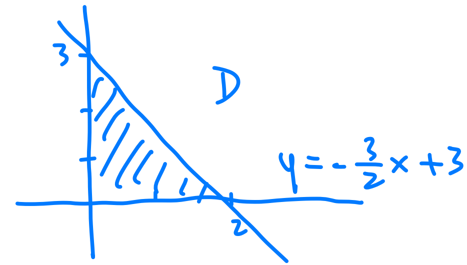


$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS = \underline{\quad 0 \quad}$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+x^2=a^2$ 。



计算 $\iint_{\Sigma}\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS$ ，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分。

$z=4-2x-\frac{4}{3}y$



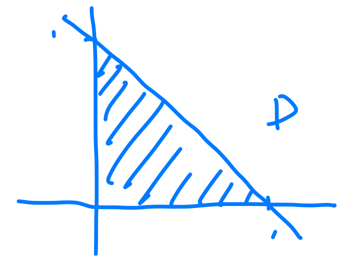
$$原式=\iint_D 4\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint_D \frac{4}{3}\sqrt{61}\,dxdy$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{61}\times\frac{1}{2}\times 2\times 3$$

$$=4\sqrt{61}$$

（中飞院，2022 级）计算$\iint_{\Sigma} 2xdS$，其中Σ为平面$x+y+z=1$在第一卦限中的部分。



$$原式 = \iint_D 2x\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_D 2\sqrt{3}\,x\,dxdy$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x\,dy$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）：当你理解不了时，想象单位时间内透过一张渔网的水流量。

第二类曲面积分的计算方法 1：
设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D_{xy}$，则
$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy$，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为锐角，则二重积分前带“+”，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为钝角，则二重积分前带“−”。另外两向类推。

第二类曲面积分的计算方法 2（高斯公式）：
设 Ω 为几何体，Σ 为 Ω 的外侧曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导，则 $\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$。

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

D: $\{(x,y) \mid x^2+y^2\le R^2\}$

计算 $\iint_\Sigma x^2y^2z\,dxdy$ ，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2 \overset{=}{\cancel{\le}} R^2$ 的下半部分的下侧。

法1: 原式 $= -\iint_D x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\,dxdy$

$= \iint_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^5\sin^2\theta\cos^2\theta\sqrt{R^2-r^2}\,dr$

$= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \ \underline{\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,dr}$

$= \frac{\pi}{4}\times\frac{8}{105}R^7 = \frac{2}{105}\pi R^7$

法2: 补面 Σ_1: $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le R^2, z=0\}$ 上侧

记 Σ 与 Σ_1 包起的体积为 Ω

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint_\Omega x^2y^2\,dxdydz = \int_{-R}^0 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^5\sin^2\theta\cos^2\theta\,dr$

$= \frac{\pi}{4}\int_{-R}^0 dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^5\,dr = \frac{\pi}{24}\int_{-R}^0 (R^2-r^2)^3\,dz$

$= \frac{\pi}{24}\int_{-R}^0(-r^6+3R^2r^4-3R^4r^2+R^6)\,dr = \frac{\pi}{24}\times\frac{16}{35}R^7 = \frac{2}{105}\pi R^7$

$\iint_{\Sigma_1} = 0$

原式 $= \iint_\Sigma = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \frac{2}{105}\pi R^7$

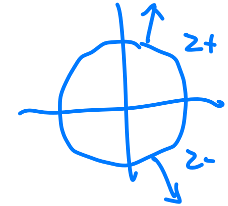
$\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,dr$, $r = R\sin x$, $x = \arcsin\frac{r}{R}$, $dr = R\cos x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5\sin^5 x\cdot R\cos x\cdot R\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^7\sin^5 x\cos^2 x\,dx$

$= R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x(1-\sin^2 x)\,dx = R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x-\sin^7 x)\,dx = R^7(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1-\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1) = \frac{8}{105}R^7$

$\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr$， $r=R\sin x$， $x=\arcsin\frac{r}{R}$， $dr=R\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin x\cos^2 x\,dx = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x-\sin^3 x\,dx = R^2(1-\frac{2}{3}\times 1)=\frac{R^2}{3}$



设 Σ 为球心在原点，半径为 R 的球面的外侧，则 $\oiint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=$ _____ 。

法1：记 Σ_1 为 Σ 在 $z>0$ 的部分，D 为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$

$\iint_{\Sigma_1} z\,dxdy = \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = 2\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \frac{2}{3}\pi R^2$

那么显然 $\oiint_\Sigma z\,dxdy = 2\iint_{\Sigma_1} z\,dxdy = \frac{4}{3}\pi R^2$

$\oiint_\Sigma x\,dydz = \oiint_\Sigma y\,dzdx = \oiint_\Sigma z\,dxdy$

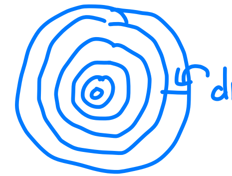
原式 $=3\times\oiint_\Sigma z\,dxdy = 4\pi R^3$

法2：Ω 为 Σ 内的球

原式 $=\iiint_\Omega (1+1+1)\,dxdydz$

$=3\times\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$

计算 $\oiint_{\Sigma} xz^2dydz + (x^2y - x^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy$ ，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧。



记 Ω 为 Σ 内的球

原式 $= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2)\, dV$ 想象一棵洋葱

$= \int_0^a r^2 \times 4\pi r^2\, dr$

$= 4\pi \int_0^a r^4\, dr$

$= \frac{4}{5}\pi a^5$

（中飞院，2022 级）计算 $\oint\!\!\oint_{\Sigma} xdydz + ydzdx$ ，其中 Σ 为球了体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 的整个表面的外侧。

第八章

无穷级数

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ；但是， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛。

p 级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的级数称为 p 级数。当 $p \le 1$ 时，p 级数发散；当 $p > 1$ 时，p 级数收敛。

几何级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n\ (a \ne 0)$ 称为几何级数。当 $|q| \ge 1$ 时，几何级数发散；当 $|q| < 1$ 时，几何极数收敛，具其和为 $S = \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$ 。

莱布尼茨审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，若 $\{u_n\}_{n-1}^{\infty}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和不超过 u_1 。

幂级数的收敛半径：对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ ，则当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$ ；当 $\rho = +\infty$ 时， $R = 0$ ；当 $0 < \rho < +\infty$ ， $R = \frac{1}{\rho}$ 。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，反之不对。

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B$ 。

若 $k \ne 0$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性。

正项级数审敛法：

比较审敛法基本形式：若 $a_n \le b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $a_n \ge b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比较审敛法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to \cancel{+}\infty} \frac{a_n}{b_n} = l(0 < l < \infty)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性相同。

比较审敛法推论：设 $\lim\limits_{n\to \cancel{+}\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\lim\limits_{n\to \cancel{+}\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to \cancel{+}\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

根值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to \cancel{+}\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

积分审敛法：设 $\{a_n\}\downarrow$ ，令 $a_n = f(n)$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同。

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ，则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散；级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$ $\neq 0$ ，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散。

$n! = o(n^n)$

$n! = \omega(2^n)$

$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=$ ______ 。

原式 $=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=3$

等比数列求和公式：$S_n=\frac{a_1\times(1-q^n)}{1-q}$

下列级数中收敛的是_____。

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}$

A: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ P级数 $p=\frac{1}{2}\leq 1$ 发散

比值审敛法 B: $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n(n+1)}}=+\infty$ 发散

C: $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}\searrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ 收敛

D: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=+\infty$ 发散

C 级数 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$ ，则级数______。

A、　发散

B、　条件收敛

C、　绝对收敛

D、　不能确定

原式 $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+\cdots\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}$

B 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 是收敛的，则

A、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛 $u_n=(-1)^n$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必收敛

C、 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $u_n=(-1)^n$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(1) u_n 递减

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

C 下列级数满足莱布尼兹条件的是

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$（$\alpha$ 为非零常数）

u_n 收敛，$|u_n|$ 発散

下列级数中，属于条件收敛的是

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n^n}$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

A: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ u_n 不收敛

B: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}=+\infty$ u_n 不收敛

C: $\{\frac{1}{n^2}\}\searrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ u_n 收敛

$\frac{1}{n^2}$，$p=2>1$，$|u_n|$ 收敛

绝对收敛

D: $\{\frac{1}{3n+1}\}\searrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}=0$ u_n 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n+4}=1$ $|u_n|$ 発散

条件收敛

当 $p \leq 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散；当 $p > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛。

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = \underline{\quad 0 \quad}$ 。

判别下列级数的敛散性：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{1+n^2}=1,$$ 比较审敛法

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以题中级数发散

判别下列级数是否收敛？如果是收敛的，确定是绝对收敛还是条件收敛？

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$ 根值审敛法

绝对收敛

B 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域

A、 $[-1,1]$

B、 $[-1,1)$

C、 $(-1,1)$

D、 $(-1,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$， $R=\frac{1}{1}=1$

对 $x=-1$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，$\{\frac{1}{n}\}\downarrow$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，收敛

对 $x=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$p=1\leq1$，发散

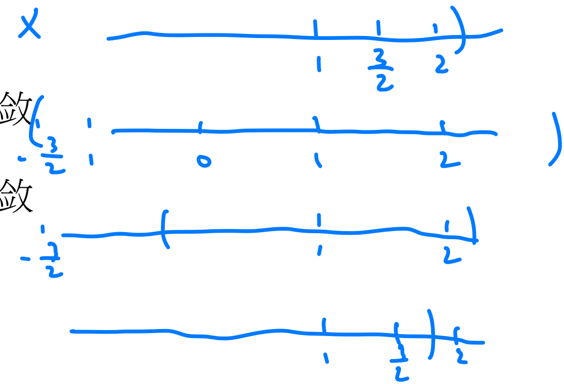
B 对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ ，下列说法正确的是

A、 若级数在 $x=2$ 处收敛，则在 $x=\frac{3}{2}$ 处必发散 X

B、 若级数在 $x=-\frac{3}{2}$ 处收敛，则在 $x=2$ 处也收敛

C、 若级数在 $x=2$ 处收敛，则在 $x=-\frac{3}{2}$ 处也收敛

D、 若级数在$x=2$ 处发散，则在 $x=\frac{3}{2}$ 处也发散

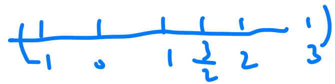


幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$ 的收敛半径 $R=$ __2__ 。

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$R=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则该级数在 $x=\frac{3}{2}$ 处<u>收敛</u>（收敛或发散）。



求下列幂级数的收敛域：

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

对于 $x=3$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$，$P=\frac{1}{2}\le 1$，发散

对于 $x=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\downarrow$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，收敛

收敛域为 $[1,3)$

（中飞院，2022 级）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{6n-1}\right)^{n}$ 判断收敛还是发散。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n}{6n-1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{6n-1}=\frac{5}{6}<1$$

级数发散

（中飞院，2022 级）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$ 的收敛域。

见111页，$R=2$

当 $x=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$p=2>1$ 收敛

当 $x=-2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$，$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$，收敛

级数的收敛域为 $[-2,2]$

一些重要的麦克劳林级数：

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, (-\infty < x < +\infty)$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \, (-\infty < x < +\infty)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \, (-\infty < x < +\infty)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, (-1 < x < 1)$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \, (-1 < x < 1)$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \, (-1 < x \leq 1)$

$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \, (-1 \leq x < 1)$

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \, (-1 < x < 1)$

将函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数。

$$f(x)=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{1}{3^{n+1}}(x+4)^n$$

$$-1<\frac{x+4}{3}<1 \Rightarrow -7<x<-1$$

周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数：

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 可以展开成 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,(n=0,1,2\ldots)$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\,(n=1,2\ldots)$，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$。

（中飞院，2022 级）设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数，其在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(5\pi)=$ $\underline{\frac{1}{2}}$。