

镜州商贸学院（新圩）

《单变量微积分》

期末复习题

第一章

单变量函数的 极限与连续

泰勒公式：

$$e^x =$$

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

$$\ln(1+x) =$$

下列函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界的是

A、 $y = \frac{1}{1+x^2}$

B、 $y = \arctan x$

C、 $y = \sin x + \cos x$

D、 $y = x \sin x$

求下列函数的定义域

$$y = \ln(x + 5)$$

求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限，并说明它们当 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则下列正确的是

A、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \infty$

B、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = \infty$

C、 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

D、 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = \infty$

当 $x \rightarrow 0$ 时，下列变量中是无穷小量的有

A、 $\sin \frac{1}{x}$

B、 $\frac{\sin x}{x}$

C、 $2^{-x} - 1$

D、 $\ln|x|$

函数 $\frac{1+2x^3}{x^2}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷_____量。

曲线 $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线为

曲线 $y = \frac{x+3}{2x-1}$ 的水平渐近线为

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2 + 1}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(5x + 1)^{50}}$$

计算下列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{|x - 1|}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

下列极限正确的是

A、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

B、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$

C、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\sec x} = e$

D、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\sin x$ 与 x 当 $x \rightarrow 0$ 时为_____无穷小。

$1 - \cos x$ 与 x^2 当 $x \rightarrow 0$ 时为_____无穷小。

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^n}{(\sin x)^m} \quad (\text{其中 } m > 0, n > 0 \text{ 为常数})$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x}{x \sin 2x}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{e^x + 1}}$ ，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的

- A、 可去间断点
- B、 跳跃间断点
- C、 第二类间断点
- D、 连续点

设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 2 + x, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 则 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的_____间断点。

无穷多个无穷小量之和

- A、 必是无穷小量
- B、 必是无穷大量
- C、 必是有界量
- D、 是无穷小，或是无穷大，或有可能是有界量

第二章

单变量函数的微分

导数基本公式：

$$(C)' =$$

$$(\log_a x)' =$$

$$(\sec x)' =$$

$$(x^a)' =$$

$$(\ln x)' =$$

$$(\csc x)' =$$

$$(\sqrt{x})' =$$

$$(\sin x)' =$$

$$(\arcsin x)' =$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$(\cos x)' =$$

$$(\arccos x)' =$$

$$(\tan x)' =$$

$$(\arctan x)' =$$

$$(a^x)' = (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\cot x)' =$$

$$(\operatorname{arccot} x)' =$$

$$(e^x)' =$$

设函数 $f(x) = |\sin x|$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

- A、 不连续
- B、 连续, 但不可导
- C、 可导, 但不连续
- D、 可导, 且导数也连续

求曲线 $y = \cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线和法线方程。

求下列函数的导数

$$y = e^{\arctan \sqrt{x}}$$

求下列函数的导数

$$y = \ln \tan \frac{x}{2}$$

求下列函数的导数

$$s = a \cos^2(2\omega t + \varphi)$$

设 $y = xe^x$ 则 $y^{(n)} =$

A、 $e^x(x + n)$

B、 $e^x(x - n)$

C、 $2e^x(x + n)$

D、 xe^{nx}

设由方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 所确定的函数为 $y = y(x)$ ，则在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处导数为

A、 -1

B、 1

C、 0

D、 $-\frac{1}{2}$

曲线 $3y^2 = x^2(x + 1)$ 在点 (2,2) 处的切线斜率是_____，切线方程是

求下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$$xy = e^{x+y}$$

求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 可导且 $f(a) = f(b) = 0$ ，

证明：在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ 。

计算下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

若 $(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线 $y = f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点, 则

- A、 $(x_0, f(x_0))$ 必为曲线的拐点
- B、 $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的驻点
- C、 x_0 为 $f(x)$ 的极值点
- D、 x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点

下面结论正确的是

- A、 驻点一定是极值点
- B、 可导函数的极值点一定是驻点
- C、 函数的不可导点一定是极值点
- D、 函数的极大值一定大于极小值

在同一表中讨论函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的单调性、极值、凹凸性、拐点

第三章

单变量函数的积分

不定积分基本公式：

$$\int k dx = (k \text{ 为常数})$$

$$\int x^a dx = (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = (x \neq 0)$$

$$\int a^x dx = (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx =$$

$$\int \sin x dx =$$

$$\int \cos x dx =$$

$$\int \tan x dx =$$

$$\int \cot x dx =$$

$$\int \sec x dx =$$

$$\int \csc x dx =$$

$$\int \sec^2 x \, dx =$$

$$\int \sec x \tan x \, dx =$$

$$\int \csc^2 x \, dx =$$

$$\int \csc x \cot x \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx =$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx =$$

计算下列不定积分：

$$\int \frac{2(3)^x - 5(2^x)}{3^x} dx$$

计算下列不定积分：

$$\int (3^{-2x} + e^{x+2}) dx$$

计算下列不定积分：

$$\int 3^x e^x dx$$

计算下列不定积分：

$$\int (3 - 2x)^3 dx$$

计算下列不定积分：

$$\int \cos^2 3x \, dx$$

计算下列不定积分：

$$\int x \cos(x^2) dx$$

计算下列不定积分：

$$\int \sqrt{9-x^2} dx$$

计算：

$$\int \arcsin x \, dx$$

计算：

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

计算：

$$\int x \ln(x+1) dx$$

把有理函数 $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 化为部分分式的和，需要拆项为

A、 $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

B、 $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

C、 $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

D、 $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

计算下列定积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \, dx$$

计算下列定积分：

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

计算下列定积分：

$$\int_0^1 x e^{-x} dx$$

下列积分中的反常积分为

A、 $\int_0^1 \frac{1}{2-x} dx$

B、 $\int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$

C、 $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$

D、 $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2} dx$

求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x \sin^9 x}$$

求直线 $y = 2x + 3$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积。

求 $r = 2a \cos \theta$ 所围成图形的面积。

将 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 及 $x = 0$ 所围成在第一象限内的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周，求其旋转体的体积。

第四章

常微分方程

微分方程 $y'' = 2x^2 + 3$ 的阶数为

A、1

B、2

C、3

D、4

$xy(y')^2 - yy' - x = 0$ 为_____阶的微分方程。

$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + Q^3 \frac{dQ}{dt} + Q = 0$ 为_____阶的微分方程。

求解下列微分方程

$$xy' - y \ln y = 0$$

求解下列微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 10^{x+y}$$

求解下列微分方程

$$(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$$

求解下列微分方程

$$y''' = \sin 2x$$

求解下列微分方程

$$y'' - y' = x$$

求解下列微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

求解下列微分方程

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

求解下列微分方程

$$y'' - 4y' + 3y = 0, y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$$

求解下列微分方程

$$y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$$