镜州商贸学院（新圩）

《多变量微积分》

期末复习题

第五章

空间解析几何、场论、

多变量函数的极限与连续

补充：求曲面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程。

交线 $\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ 分别消去 x, y, z，得交线在 yOz，xOz，xOy 面上的投影曲线方程

上面方程组消去 x 得 $y^2+z^2=z-2y$，即 $y^2+z^2+2y-z=0$，

消去 y 得 $\frac{1}{4}(z-x)^2+z^2=x$，即 $x^2+5z^2-4x-2xz=0$，

消去 z 得 $y^2+(x+2y)^2=x$，即 $x^2+5y^2-x+4xy=0$，

故交线在 xOy，xOz，yOz 面上的投影曲像方程分别为

$\begin{cases} x^2+5y^2-x+4xy=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+5z^2-4x-2xz=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$

把所有已知条件列出来，一通乱算
算出什么是什么

补充：求直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$ 绕直线 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 旋转一周所得的曲面方程。

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 L 上的任一点，定直线 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 平行于 z 轴，故

当 P_0 转到点 $P(x, y, z)$ 时，有

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 & ① \\ z = z_0 \end{cases}$$

又点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在 L 上，则 $\begin{cases} x_0 = 2z_0+5 \\ y_0 = 3z_0+4 \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} (x_0-2)^2 = (2z_0+3)^2 = (2z+3)^2, \\ (y_0-3)^2 = (3z_0+1)^2 = (3z+1)^2, \end{cases}$$

代入①式，得 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2z+3)^2 + (3z+1)^2$，

所求曲面方程为 $x^2+y^2-13z^2-4x-6y-18z+3=0$

梯度：设 $u=f(x,y,z)$ 可偏导，则 $\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ 。

旋度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ ，则 $\mathbf{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$ 。

散度：设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ ，则 $\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 。

非重点

通量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，Σ 为有侧曲面，称 $\Phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdzdy=\iint_{\Sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}dS$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 指向指定侧的流过有侧曲面 Σ 的通量（或流量），其中 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 的单位法向量。

环流量：设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导， L 为有向闭曲线，称 $\oint_{L}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{L}\vec{a}\cdot d\vec{s}$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 沿有向闭曲线 L 的环流量。

向量场 $\vec{F}(x,y,z)=\{xy,yz,zx\}$ 在点 $(1,2,3)$ 处的散度 $\mathrm{div}\vec{F}=$ __6__ 。

补充：设 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{div}[\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)]$ 。

因为 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$

$$\mathrm{grad}\, f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}$$

$$=\{0,0,0\}$$

$$\mathrm{div}[\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f)]=0$$

判断多元函数极限是否存在的方法：

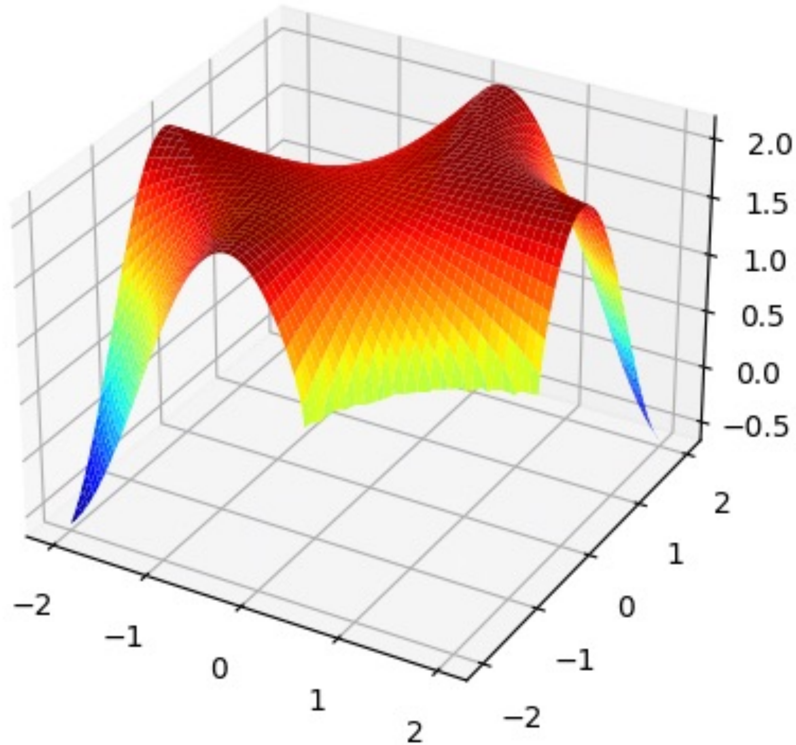
正经做法：一元函数在一点处极限存在的充分必要条件是其左、右极限都存在且相等，但多元函数在一点处极限存在，要求 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 存在，即函数 (x,y) 沿所有可能的路径趋于点 (x_0,y_0) 时，函数值趋于同一个值，若函数 $f(x,y)$ 沿两个不同方向趋于点 (x_0,y_0) 时，函数值趋于两个不同值，则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 不存在。

瞎猜法：当分子次数高于分母次数时，极限一般存在，而且很有可能是 0 。当分子次数低于或等于分母次数时，极限一般不存在。该方法一般在不会做题时使用，且不保证答案正确。

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{xy+1}-1}$ 的值为________。

令 $t=xy$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+1}-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{e^{\frac{1}{2}\ln(1+t)}-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\frac{1}{2}\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\frac{1}{2}t}=2$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−2
−1
0
1
2
2
1
0
−1
−2

补充：设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在。

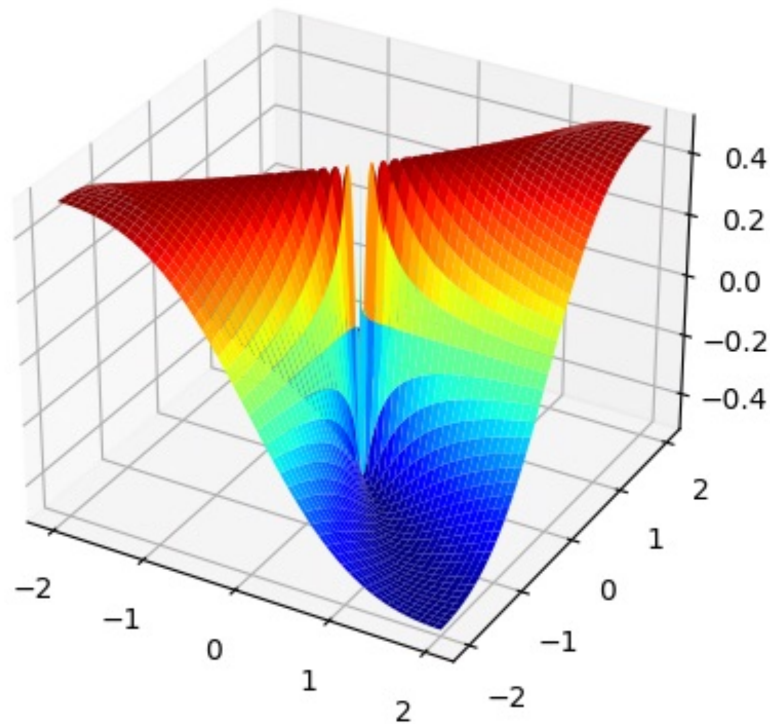
在沿 $y=x$ 的方向上

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

在沿 $y=-x$ 的方向上

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=-x}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2}$$

所以极限不存在



0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−2
−1
0
1
2
2
1
0
−1
−2

第六章

多变量函数的微分

偏导数： $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 f_x' 是 f 对 x 求偏导的意思。$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 f_{xy}'' 是 f 先对 x 求偏导再对 y 求偏导的意思。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家看题吧。

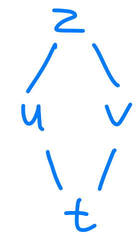
全微： 设 $z = f(x,y)\big((x,y) \in D\big)$，$(x_0, y_0) \in D$ 若 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，称 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可全微，简称可微，记 $A\Delta x + B\Delta y = dz$，习惯上记 $dz = Adx + Bdy$。

设 $z = f(x,y)$ 可微，则其全微分为 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$。

隐函数求导： 设 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$，$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，则在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域内由 $F(x,y,z) = 0$ 能唯一确定连续可偏导的函数 $z = f(x,y)$，满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$。

必考

补充：设 $z=e^{u+v^2}$ ，且 $\begin{cases}u=\ln t\\ v=\sin t\end{cases}$ ，求 $\dfrac{dz}{dt}$ 。



$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{dz}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}$$

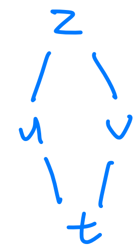
$$=e^{u+v^2}\cdot\frac{1}{t}+e^{u+v^2}\cdot(2v)\cdot\cos t$$

$$=e^{\ln t+\sin^2 t}\cdot\frac{1}{t}+2e^{\ln t+\sin^2 t}\sin t\cos t$$

$$=e^{\ln t+\sin^2 t}\left(\frac{1}{t}+\sin 2t\right)$$

必考

补充：设 $f(u,v)$ 二阶连续可偏导，且 $z=f(t,\sin t)$ ，求 $\frac{d^2z}{dt^2}$ 。



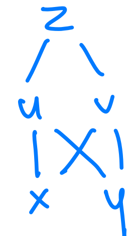
$$\frac{dz}{dt} = f_1' + f_2' \cos t$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_{11}'' + f_{12}'' \cos t + f_{21}'' \cos t + f_{22}'' \cos^2 t - f_2' \sin t$$

$$= f_{11}'' + 2f_{12}'' \cos t + f_{22}'' \cos^2 t - f_2' \sin t$$

必考

补充：设 $z=e^{u+v}$ ，且 $\begin{cases} u=xy \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 。



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=e^{u+v}\cdot y+e^{u+v}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=e^{xy+\frac{y}{x}}y-e^{xy+\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=e^{u+v}\cdot x+e^{u+v}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{xy+\frac{y}{x}}\cdot x+e^{xy+\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

必考

设函数 $z=f(x^2+y^2,ye^x)$ ，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(2x)+f_2'\cdot ye^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_{11}''\cdot(2y)+2xf_{12}''e^x+f_{21}''ye^x\cdot(2y)+f_{22}''ye^xe^x+f_2'e^x$$

$$=4xyf_{11}''+2xe^xf_{12}''+2y^2e^xf_{21}''+ye^{2x}f_{22}''+e^xf_2'$$

D 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微的充要条件为______。

A、 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域存在

B、 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域连续

C、 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时， $\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y$ 是无穷小量

D、 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时， $\frac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$是无穷小量

由方程 $xyz+x^2+y^2+z^2=4$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $dz=$_____ 。

$F(x,y,z)=xyz+x^2+y^2+z^2-4$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{yz+2x}{xy+2z}$ $\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{xz+2y}{xy+2z}$ $\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1$

$dz=-dx-dy$

二元函数求无条件极值的步骤：

(1) 求 $z=f(x,y)$ 的定义域 D （开区域）；

(2) 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 求出 $z=f(x,y)$ 的驻点；

(3) 利用判别法判断驻点是否为极值点：

令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ ，则：

当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数的极值点，其中：

当 $A>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值点；

当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；

当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是函数的极值点。

当 $AC-B^2=0$ 时，无法判断 (x_0,y_0) 是否为函数极值点

二元函数求条件极值：

所谓二元函数的条件极值，即二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般有如下三种方法：

拉格朗日乘数法：

令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ，由 $\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 求出 (x,y) 的值，并确定最优解；

转化为一元函数的极值：

由 $\varphi(x,y)=0$ 求出 $y=y(x)$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x,y(x)]$ ，再求一元函数 $z=f[x,y(x)]$ 的极值；

参数方程法：

由 $\varphi(x,y)=0$ ，得 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(y) \end{cases}$ ，代入 $z=f(x,y)$ ，得 $z=f[x(t),y(t)]$ ，再求一元函数的极值。

C 设 $z=f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，由 $f_x(x,y)=0$ 和 $f_y(x,y)=0$ 求得驻点 $M_1(0,0)$、$M_2(1,1)$、$M_3(-1,-1)$，则______。

A、 $f(M_1)$ 是极小值

B、 $f(M_1)$ 是极大值

C、 $f(M_2)$ 与 $f(M_3)$ 都是极小值

D、 $f(M_2)$ 与 $f(M_3)$ 都是极大值

$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x-2y$

$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2x-2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-2$

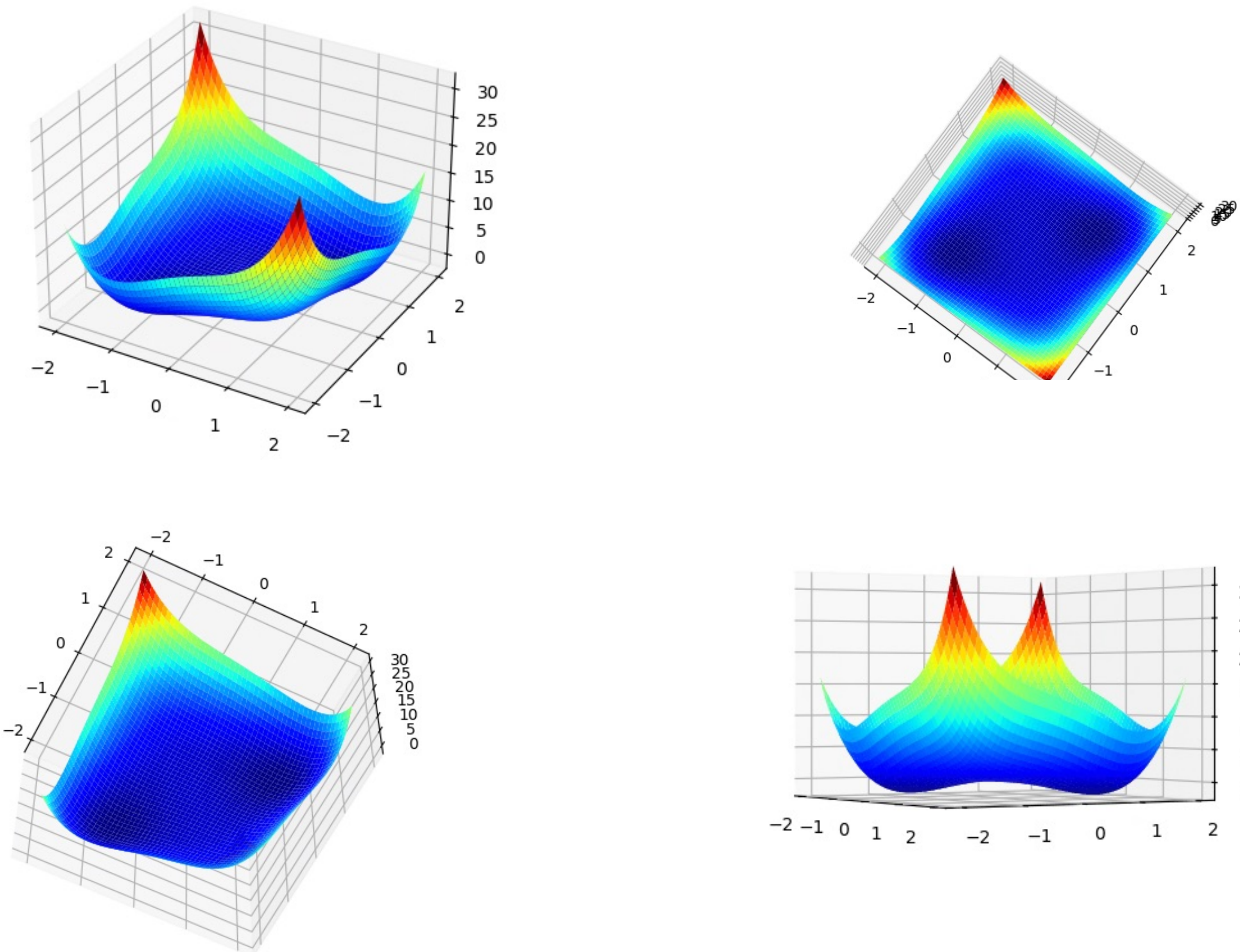
M_1: $A=-2$, $B=-2$, $C=-2$, $AC-B^2=0$

M_2: $A=10$, $B=-2$, $C=10$, $AC-B^2>0$

$A>0$, M_2为极小值点

M_3: $A=10$, $B=-2$, $C=10$, $AC-B^2>0$

$A>0$, M_3为极小值点


30
25
20
15
10
5
0
−2 −1 0 1 2
−2 −1 0 1 2

补充：周长为 $2a$ 的矩形绕它的一边旋转可得到一个圆柱体，当矩形边长各为多少时，可使圆柱体的体积最大？

设矩形边长为 x, y. 当其绕 y边旋转，得到圆柱体积为

$f(x,y)=\pi x^2 y$，约束条件为 $\varphi(x,y)=x+y-a=0$

法1：$F(x,y,\lambda)=\pi x^2 y+\lambda(x+y-a)$

令 $\begin{cases} F'_x=2\pi y+\lambda=0 \\ F'_y=\pi x^2+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x+y-a=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{a}{3} \\ y=\frac{2}{3}a \end{cases}$

法2：将 $y=a-x$ 带入 $f(x,y)$ 得

$f(x)=\pi x^2(a-x)=\pi a x^2-\pi a x^3$

令 $f'(x)=2\pi a x-3\pi x^2=0$

解得 $x_1=0$（舍去） $x_2=\frac{2}{3}a$

当矩形边长为 $\frac{a}{3}$, $\frac{2}{3}a$ 时，绕长为 $\frac{2}{3}a$ 的边旋转，得到的圆柱体积最大

已知旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线为椭圆，求该椭圆到原点的最长与最短距离。

点 (x,y,z) 到原点距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其与 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 同时取到最大、最小值。为简化计算，求 $f(x,y,z)$ 的最大最小值

约束条件 $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$，$\psi(x,y,z)=x+y+z-1=0$

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$

$$
\text{令}\begin{cases}
F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0\\
F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0\\
F'_z=2z-\lambda+\mu=0\\
F'_\lambda=x^2+y^2-z=0\\
F'_\mu=x+y+z-1=0
\end{cases}
$$

这道题太难算，解不出来就算了，写到这儿可以了

最终答案：

在 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right)$ 时，d 最短为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$

在 $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$ 时，d 最长为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$

空间曲面的切平面与法线：

设 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 为空间曲面， $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ ，则曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$ ，过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲面 Σ 的切平面为 $F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$ ，法线为 $\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$ 。

空间曲线的切线与法平面 1：

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ ，取参数 $t=t_0$ ，对应的曲线上的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$ ，其中 $x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$ 。曲线 L 在 M_0 处的切向量为 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$ ；曲线 L 在 M_0 处的切线为 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$ ；曲线 L 在 M_0 处的法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$ 。

空间曲线的切线与法平面 2：

设 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ ，则切线方向的方向向量为 $\vec{T}=\left(\left\{F_x',F_y',F_z'\right\}\times\left\{G_x',G_y',G_z'\right\}\right)\big|_{M_0}$ 。

设曲线 L 的方程为 $x=t, y=t^2, z=t^3$ ，则 L 在对应于 $t=1$ 点处的法平面方程为_______。

$\frac{dx}{dt}=1$ ， $\frac{dy}{dt}=2t$ ， $\frac{dz}{dt}=3t^2$ ，

$t=1$ 处，切向量为 $\vec{s}=(1,2,3)$ ，点坐标为 $(1,1,1)$

法平面方程为 $1(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$

即 $x+2y+3z-6=0$

补充：求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程。

对曲面 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0$，

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial F}{\partial y}=2y$，$\frac{\partial F}{\partial z}=2z$，

曲面在点 $(1,-2,1)$ 处的一个法向量为 $\vec{n}_1=(2,-4,2)$

同理曲面 $x+y+z=0$ 在该点处的一个法向量为 $\vec{n}_2=(1,1,1)$

曲线 L 的切向量 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-4&2\\1&1&1\end{vmatrix}=(-6,0,6)=6(-1,0,1)$

该处切线方程为 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$

该处法平面方程为 $-1(x-1)+0(y+2)+1(z-1)=0$

即 $x-z=0$

第七章

多变量函数的积分

二重积分：当你理解不了时，想象一张质量不均匀的铁片的重量，或者一个顶面不平的柱体的体积。当你在一个方向上做不出来时，就换一个方向做做试试。这个知识点必考，但是文字不好描述，大家还是看题吧。

二重积分直角坐标转换为极坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ，区域 D 表示为 $D = \{(r,\theta) | \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$ ，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 。注意 f 外面有个 r 。

三重积分：当你理解不了时，想象一块质量不均匀的石头的重量。不要管什么先一后二还是先二后一，也不要管什么切片法和什么铅直投影法，算就完了。

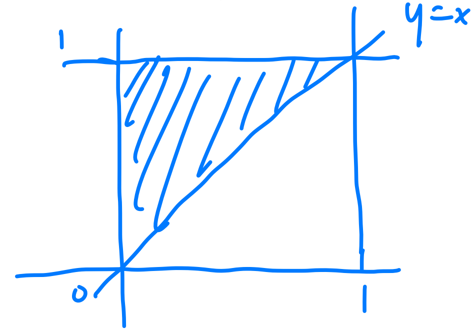
三重积分直角坐标转换为柱面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ ，其中 $\Omega =$
$\{(r,\theta,z) | \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \varphi_1(r,\theta) \le z \le \varphi_2(r,\theta)\}$ ，则
$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dv = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr \int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$ 。

三重积分直角坐标转换为球面坐标：

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ ，其中 $\alpha \le \theta \le \beta, \theta_1 \le \varphi \le \theta_2, r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta)$ ，则
$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz =$
$\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, dr$ 。

二重积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$ 的值为________。



原式 $=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$

$=\int_0^1 ye^{y^2}dy$

$=\frac{1}{2}(e-1)$

先積分 $\int e^{y^2}dy$

Problem:

$$\int e^{y^2}\,dy$$

Apply linearity:

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{2e^{y^2}}{\sqrt{\pi}}\,dy$$

Now solving:

$$\int \frac{2e^{y^2}}{\sqrt{\pi}}\,dy$$

This is a special integral (imaginary error function):

$$= \operatorname{erfi}(y)$$

Plug in solved integrals:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{2e^{y^2}}{\sqrt{\pi}}\,dy$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erfi}(y)}{2}$$

The problem is solved:

$$\int e^{y^2}\,dy$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erfi}(y)}{2} + C$$

所以 $\int_x^1 e^{y^2}dy =$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(ix)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}$$

再積分 $\int \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(ix)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}\,dx$

Problem:

$$\int\left(\frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(ix)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}\right)dx$$

Apply linearity:

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,i}{2}\int \operatorname{erf}(ix)\,dx - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}\int 1\,dx$$

Now solving:

$$\int \operatorname{erf}(ix)\,dx$$

Substitute $u = ix \longrightarrow du = i\,dx$ (steps):

$$= -i\int \operatorname{erf}(u)\,du$$

其中:

Problem:

$$\int \operatorname{erf}(x)\,dx$$

Integrate by parts: $\int fg' = fg - \int f'g$

$f = \operatorname{erf}(x),\ g' = 1$

$\downarrow$ steps $\quad \downarrow$ steps

$f' = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}},\ g = x$:

$$= x\operatorname{erf}(x) - \int \frac{2xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx$$

Now solving:

$$\int \frac{2xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx$$

Substitute $u = -x^2 \longrightarrow \frac{du}{dx} = -2x$ (steps) $\longrightarrow dx = -\frac{1}{2x}\,du$:

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^u\,du$$

Now solving:

$$\int e^u\,du$$

Apply exponential rule:

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln(a)} \text{ with } a = e:$$
$$= e^u$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^u\,du$$
$$= -\frac{e^u}{\sqrt{\pi}}$$

Undo substitution $u = -x^2$:

$$= -\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Plug in solved integrals:

$$x\operatorname{erf}(x) - \int \frac{2xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx$$
$$= x\operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

The problem is solved:

$$\int \operatorname{erf}(x)\,dx$$
$$= x\operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + C$$

带回得:

Plug in solved integrals:

$$-i\int \operatorname{erf}(u)\,du$$
$$= -iu\operatorname{erf}(u) - \frac{ie^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Undo substitution $u = ix$:

$$= x\operatorname{erf}(ix) - \frac{ie^{x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Now solving:

$$\int 1\,dx$$

Apply constant rule:

$$= x$$

Plug in solved integrals:

$$\frac{\sqrt{\pi}\,i}{2}\int \operatorname{erf}(ix)\,dx - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}\int 1\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,ix\operatorname{erf}(ix)}{2} + \frac{e^{x^2}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)\,x}{2}$$

The problem is solved:

$$\int\left(\frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(ix)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}\right)dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,ix\operatorname{erf}(ix)}{2} + \frac{e^{x^2}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)\,x}{2} + C$$

Rewrite/simplify:

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,ix\cdot(\operatorname{erf}(ix) - \operatorname{erf}(i)) + e^{x^2}}{2} + C$$

所以, $\int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(ix)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,i\operatorname{erf}(i)}{2}\,dx = \frac{e-1}{2}$

最终, $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy = \frac{e-1}{2}$

正常人做不出来

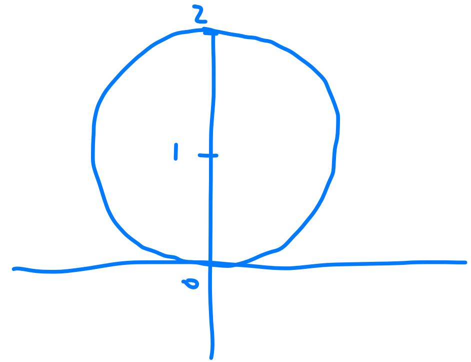
看看得了

A

设函数 $f(u)$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$ 上连续，则

$\int_D f(xy)dxdy=$ ______ 。

$x^2+(y-1)^2\le 1$



A、 $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta) r dr$

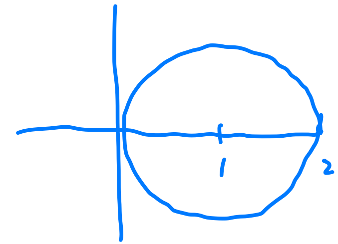
B、 $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta) dr$

C、 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} f(r^2\sin\theta\cos\theta) dr$

D、 $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta) r dr$

补充：计算 $I=\iint_D(x^2+xy+y^2)d\sigma$ ，其中 $D: x^2+y^2\le 2x$ 。

$(x-1)^2+y^2\le 1$



因为 D 关于 x 轴对称，所以 $\iint_D xy\,d\sigma=0$

$$I=\iint_D(x^2+y^2)\,d\sigma$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)\,r\,dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\,dr$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$=8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

当 $n=2k$ 时，$I_n=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

当 $n=2k+1$ 时，$I_n=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$

B

已知空间立体 Ω 由曲面 Σ 围成， Ω 内点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)$ ，则 Ω 的质量为______。

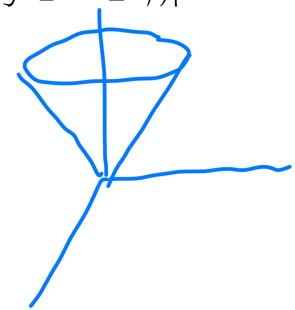
A、 $\iiint_\Omega dV$

B、 $\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dV$

C、 $\iint_\Sigma \rho(x,y,z)dS$

D、 $\iint_\Sigma \rho(x,y,z)dxdy$

补充： 计算 $\iiint_\Omega (z^2+2xy)dv$ ，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 所围成的几何体。



因为 Ω 关于 xOz 面和 yOz 面对称，

$\iiint_\Omega 2xy\,dv = 0$

原式 $= \iiint_\Omega z^2\,dv = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 z^2 r\,dr$

$= \frac{32}{5}\pi$

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：当你理解不了时，想象一条不均匀的铁链的质量。

第一类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)(a \leq x \leq b)$ ，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$ 。

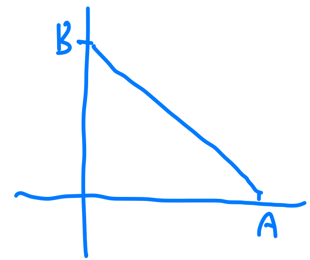
第一类曲线积分的计算方法 2：

设 $L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ ，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ 。

设 L 为连接 $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 的直线段，则积分 $\int_L (x+y)ds =$ ______ 。

$y=-x+1$

原式 $= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1+(-1)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}$



第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：当你理解不了时，想象一个变力沿曲线做功。

第二类曲线积分的计算方法 1：

设 $L: y=\varphi(x)$ ，其中起点对应 $x=a$ ，终点对应 $x=b$ ，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx$$ 。

第二类曲线积分的计算方法 2：

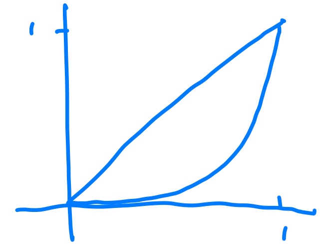
设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ ，其中起点对应 $t=\alpha$ ，终点对应 $t=\beta$ ，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$ 。

第二类曲线积分的计算方法 3（格林公式）：

设 D 为 xOy 平面上连通的有限闭区域， L 为闭区域 D 的正向边界，函数 $P(x,y)$ ，$Q(x,y)$ 在 D 上连续可偏导，则 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ 。

柯西-黎曼条件（第二类曲线积分与路径无关的条件之一）：区域 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 。



补充： 求 $\int_L (y+1)dx + (2x-1)dy$ ，其中

（1） L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x$ 到点 $A(1,1)$ ；

（2） L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 。

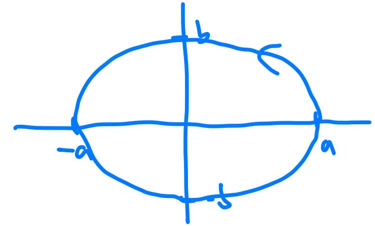
(1) 原式 $= \int_0^1 [(x+1) + (2x-1)]\,dx$

$= \int_0^1 3x\,dx = \frac{3}{2}$

(2) 原式 $= \int_0^1 [(x^2+1) + 2(2x-1)x]\,dx$

$= \int_0^1 (5x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{5}{3}$

设 L 为正向椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ ，则曲线积分 $\oint_L (x+e^x\cos y)dx+(x-e^x\sin y)dy=$ ____ 。



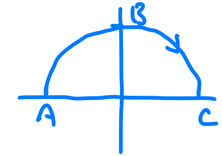
$D:\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$

原式 $=\iint_D[(1-e^x\sin y)-(-e^x\sin y)]d\sigma$

$=\iint_D 1\,d\sigma=\pi ab$

大

补充：$\int_L (x^2+y^2)dx - xdy$，其中 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 从点 $A(-a,0)$ 经 $B(0,a)$ 到 $C(a,0)$ 的弧段。



法1：$L:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$，起点 $t=\pi$，终点 $t=0$

原式 $=\int_\pi^0 [a^2(-a\sin t) - a\cos t\cdot a\cos t]dt$

$=\int_0^\pi (a^3\sin t + a^2\cos^2 t)dt$

$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt + 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

$=2a^3+\frac{\pi}{2}a^2$

法2：L_0：$y=0$，起点 $x=a$，终点 $x=-a$

$\oint_{L+L_0}(x^2+y^2)dx - x\,dy$

$=-\iint_D(-1-2y)\,dx\,dy = \iint_D(1+2y)\,dx\,dy$

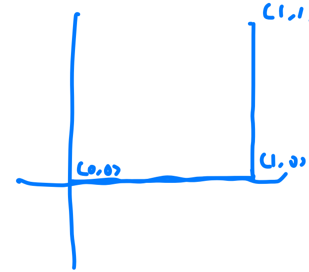
$=\frac{\pi}{2}a^2+2\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^2\sin\theta\,dr = \frac{\pi}{2}a^2+\frac{4}{3}a^3$

$\int_{L_0}(x^2+y^2)dx - x\,dy$

$=\int_a^{-a}x^2dx = -\frac{2}{3}a^3$

原式 $=\oint_{L+L_0} - \int_{L_0} = 2a^3+\frac{\pi}{2}a^2$

大大



已知曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+yx^2dy$ ，

（1） 证明：在全平面内，积分 I 与路径无关；

（2） 计算积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy$ 。

(1) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$. 所以积分与路径无关

(2) 因为积分与路径无关，所以

原式 $=\int_{(0,0)}^{(1,0)} xy^2dx+yx^2dy+\int_{(1,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy$

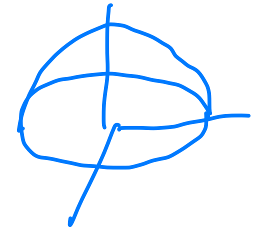
$=0+\int_{(1,0)}^{(1,1)} y\,dy=\frac{1}{2}$

第一类曲面积分（对面积的曲面积分）：当你理解不了时，想象一张不均匀的铁皮的质量。

第一类曲面积分的计算方法：

设 $\Sigma: z = \varphi(x, y)$ ，其中 $(x, y) \in D$ ，则 $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$ ，于是

$\iint_\Sigma f(x, y, z) dS = \iint_D f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$ 。



设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，则曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=$ _____ 。

因为 Σ 关于 xOz 面, yOz 面对称，所以 $\iint_{\Sigma}(x+y)\,dS=0$

记 D 为 Σ 在 xOy 面上的投影

原式 $=\iint_{\Sigma} z\,dS=\iint_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$

$=\iint_{D} 1\,dxdy=\pi$

第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）：当你理解不了时，想象单位时间内透过一张渔网的水流量。

第二类曲面积分的计算方法 1：

设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$ ，其中 $(x,y)\in D_{xy}$ ，则 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\underset{dxdy}{\cancel{dydz}} = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy$ ，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为锐角，则二重积分前带“$+$”，若 Σ 上一点法向量与 z 轴夹角为钝角，则二重积分前带“$-$”。另外两向类推。

第二类曲面积分的计算方法 2（高斯公式）：

设 Ω 为几何体，Σ 为 Ω 的外侧曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导，则 $\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$ 。

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy$ ，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $0 \le z \le 1$ 部分的下侧。

补面 Σ_0 : $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=1 \end{cases}$ 的上侧，记由 Σ 和 Σ_0 围成的圆锥为 Ω

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0} xdydz + ydzdx + (z^2-2z)dxdy = \iiint_{\Omega} (1+1+2z-2)dV$$
$$= 2\iiint_{\Omega} z\,dV = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_0} xdydz + ydzdx + (z^2-2z)dxdy = \iint_{\Sigma_0} (z^2-2z)dxdy = -\pi$$

原式 $= \iint_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0} = \frac{3}{2}\pi$

第八章

无穷级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B$

若 $k \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ；但是， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛。

p 级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的级数称为 p 级数。当 $p \leq 1$ 时，p 级数发散；当 $p > 1$ 时，p 级数收敛。

几何级数：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n\,(a \neq 0)$ 称为几何级数。当 $|q| \geq 1$ 时，几何级数发散；当 $|q| < 1$ 时，几何极数收敛，具其和为 $S = \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$ 。

莱布尼茨审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，若 $\{u_n\}_{n-1}^{\infty}$ 单调减少且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和不超过 u_1 。

幂级数的收敛半径：对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ ，则当 $\rho = 0$ 时， $R = +\infty$ ；当 $\rho = +\infty$ 时， $R = 0$ ；当 $0 < \rho < +\infty$ ， $R = \frac{1}{\rho}$ 。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，反之不对。

正项级数审敛法：

比较审敛法基本形式：若 $a_n \le b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $a_n \ge b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比较审敛法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_n}{b_n} = l(0<l<\infty)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性相同。

比较审敛法推论：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

比值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

根值审敛法：设 $\lim\limits_{n\to=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ ，则当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

下列极数发散的是______。

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 交错级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，收敛

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$，收敛

C、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n^{4}}$ 看成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}x^n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{(n+1)^4}=1$，$R=1$，$3>1$，发散

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^{n}}{3^{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{1}{3^n}$：$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$，收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$：交错级数 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$，收敛

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n - u_{n-1}|$ 均收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛。

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n - u_{n-1}|$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$ 收敛，

即 $\lim_{n\to\infty}(u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} \cdots + u_2 - u_1) = \lim_{n\to\infty}(u_n - u_1)$ 为常数，即 $\{u_n\}$ 极限存在

即 $\exists M$ 使对 $\forall n$ 都有 $M \geq u_n$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n^2}{v_n} = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} M v_n^2$ 收敛

又因为 $u_n v_n^2 \leq M v_n^2$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛

麦克劳林级数：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,(-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,(-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \,(-\infty < x < +\infty)$$

重要

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,(-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,(-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \,(-1 < x \le 1)$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \,(-1 \le x < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \,(-1 < x < 1)$$

将函数 $f(x)=\frac{1}{3+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并指出收敛域。

$$f(x)=\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$$

$$-1<\frac{x-1}{4}<1,\quad -3<x<5$$

补充：将 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数。

$f(0)=0$， $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(-1<x<1)$

则 $f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leq x\leq 1)$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数________。

因为 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，所以 $R = \frac{1}{\rho} = 1$

显然，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在 $x=\pm1$ 时发散，故此幂级数的收敛域是 $(-1,1)$

幂级数的和函数是

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},\quad -1 < x < 1$$

非重点

补充：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得级数的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，求导得

$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$，$S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

则 $S(x)$ 满足微分方程 $S''(x)-S(x)=0$，则 $S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

由 $S(0)=1$，$S'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，故 $S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

非重點

周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数：

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 可以展开成 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ，其中

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2\ldots)$ ， $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2\ldots)$ ，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时， $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$ ；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时， $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ 。

设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数，其在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数为 $s(x)$ ，则 $s(5\pi)=$ __$\frac{1}{2}$__ 。

非重點

将函数 $f(x)=|x|(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成以 2π 为周期的傅立叶级数。

显然函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上满足狄利克雷充分条件，

将函数进行周期延拓

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=\frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5\cdots\\ 0, & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

因为 $f(x)$ 为偶函数，显然 $b_n=0$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),\quad x\in R$$