高中考试：踩点给分

大学考试：言之有理即可得分 → 不会写就编，编上就有分

第一章：极限

辛亥革命的历史意义：

高中：每条两分，五条共十分

大学：国情 → 主要矛盾 → 主要任务 → 革命性质、道路、路线

太平天国 → 洋务运动 → 戊戌变法 → 辛亥革命 → 新文化运动 → 五四

（新旧民主主义转

中国共产党成立　　九、十分

老师不想挂你，老师想睡觉

不会写就编，编上就有分

不要怕校長查试卷，查了他也看不懂

老师可能没讲，但儘管用，老师看得懂，

只要做出来就能得分

泰勒公式：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

泰勒公式的用法：

1、最好用在 $x \to 0$ 时

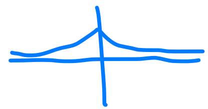
2. 乘除带一项，加减带多项

3、多项带到与分子/分母同次为止

4、实在记不住就全带进去

下列函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界的是 D

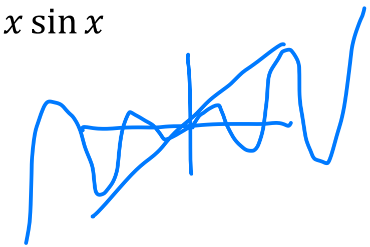
A、 $y=\frac{1}{1+x^2}$



B、 $y=\arctan x$

C、 $y=\sin x+\cos x$

D、 $y=x\sin x$



求下列函数的定义域

$$y = \ln(x + 5)$$

$$x + 5 > 0$$

$$x > -5$$

当左右极限存在并相等时，
极限存在

求 $f(x)=\frac{x}{x}$ ， $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们当 $x\to 0$ 时的极限是否存在。

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \text{不存在}$$

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ， $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ，则下列正确的是

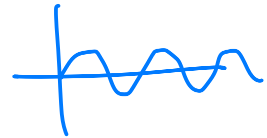
A、 $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \infty$ $f(x) = x$ $g(x) = -x$ ✗

B、 $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \infty$ $f(x) = x$ $g(x) = x$ ✗

C、 $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)+g(x)} = 0$ $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = -\sqrt{x+1}$ ✗

D、 $\lim_{x \to x_0} kf(x) = \infty$ ✓

当 $x \to 0$ 时，下列变量中是无穷小量的有

A、 $\sin\frac{1}{x}$ $x \to 0$ $\frac{1}{x} \to \infty$  ×

B、 $\frac{\sin x}{x}$ 1 ×

C、 $2^{-x}-1$ ✓

D、 $\ln|x|$ $x \to 0$ $\ln x \to -\infty$ ×

函数 $\frac{1+2x^3}{x^2}$ 为当 $x \to 0$ 时的无穷___大___量。

极限计算方法：1. 没有0的直接带进去算

2. 有0的想办法把0显現出来

3. 带泰勒公式化成多项式

4. 把0约掉，得到结果

11页再講

洛必达法则：若1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = g(x) = 0$ (或 ∞);

2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内可导，且 $g'(x) = 0$;

3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 ∞)

则 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$(1+0)^?$ 要翻成 $e^{\ln(1+0)?}$ 的型式再算

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，或 $f(a-0)=\infty$ 或 $f(a+0)=\infty$

称 $x=a$ 为 $L: y=f(x)$ 的铅直渐近线

曲线 $y=\frac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线为

$x=1 \qquad x=-1$

$x=1$： $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \infty$

$x=-1$： $\lim\limits_{x\to -1} y = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}$

铅直渐近线为 $x=1$

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，称 $y=A$ 为 L: $y=f(x)$ 的水平渐近线

曲线 $y=\frac{x+3}{2x-1}$ 的水平渐近线为

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x-1}=\frac{1}{2}$

故水平渐近线为 $y=\frac{1}{2}$

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，

称 $y=ax+b$ 为 L: $y=f(x)$ 的斜渐近线

极限计算方法

第8页

计算下列极限

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$$

$$=\frac{3-2}{9+3+1}=\frac{1}{13}$$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} e^{4\frac{x}{x}}$

$=e^4$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{4-\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{4-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{1}{6}x^2\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{6}x^2\right)}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{x^2}{6x}}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{6x}=\frac{1}{6}$

计算下列极限

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2 + 1}$$

计算下列极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}} \quad \Big/ (5x)^{50} \atop \Big/ (5x)^{50}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x}{5x}-\frac{3}{5x}\right)^{20}\left(\frac{3x}{5x}+\frac{2}{5x}\right)^{30}}{\left(\frac{5x}{5x}+\frac{1}{5x}\right)^{50}}$$

$\to 0$ $\quad$ $\to 0$ $\quad$ $\to 0$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\left(\frac{3}{5}\right)^{30}}{1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{20}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$$

计算下列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

法1: $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)$

$= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$

$= \int_0^1 f(x)\,dx$

法2: 原式 $= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}{1}$

$= \frac{1}{2}$

计算下列极限

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = -1$$

法2：洛必达

计算下列极限

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

原式 $=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{-3x^2}=-1$

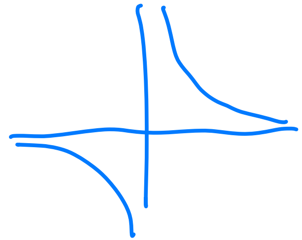
法1：$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)$

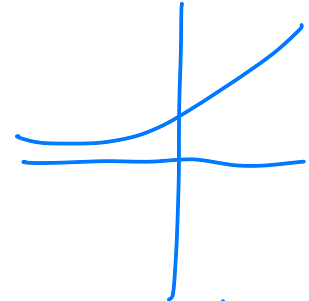
$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(1-x)}(x^2+x+1)}$

负

$=\frac{-3}{3}=-1$

下列极限正确的是



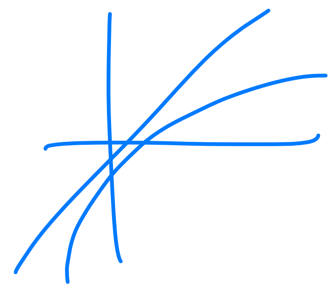


A、 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ $x\to 0^-$ $\frac{1}{x}\to -\infty$ $e^{\frac{1}{x}}\to 0$ ✓

B、 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$ $x\to 0^+$ $\frac{1}{x}\to +\infty$ $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$ ×

C、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\sec x} = e$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 2$ ×

D、 $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1$ ×



$\sin x$ 与 x 当 $x \to 0$ 时为<u>等价</u>无穷小。

对于两个无穷小 $f(x)$、$g(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小

$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小

$g(x)$ 是 $f(x)$ 的低阶无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = C$$

常数

$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小

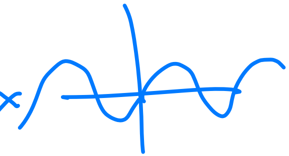
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小中的一个特殊情况

等价无穷小

$1-\cos x$ 与 x^2 当 $x \to 0$ 时为同阶无穷小。

同阶但不等价

sinx 

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

$x\to 0$ $\frac{1}{x}\to\infty$ $=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \cancel{\lim_{x\to\infty}}\frac{1}{x}\sin x = 0$$

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$$（其中 $m>0, n>0$ 为常数）

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}$ ，

当 $n>m$ 时，0

当 $n=m$ 时，1

当 $n<m$ 时，∞

计算下列极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 3x}{x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}}{x \sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(3x)^2}{1}}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

法2：洛必达：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{\cos x}=2$$

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

法2：洛必達

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=-\frac{1}{2}$$

计算下列极限

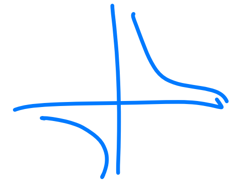
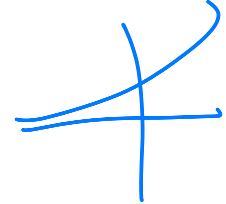
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)\cdot(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\cancel{\frac{1}{2}}}$$

设 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A、 可去间断点

✓ B、 跳跃间断点

C、 第二类间断点

D、 连续点

$x\to 0^-$ ， $\frac{1}{x}\to-\infty$ $e^{\frac{1}{x}}\to 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$x\to 0^+$ ， $\frac{1}{x}\to+\infty$ ， $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} = 1$

$\lim_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$ ， $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点

其中 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 可去间断点 ⎫ 第一类间断点

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\ne\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 跳跃间断点 ⎭

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 有一边不存在 第二类间断点

设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 2, & x=1, \\ 2+x, & 1<x<2, \end{cases}$ 则 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$

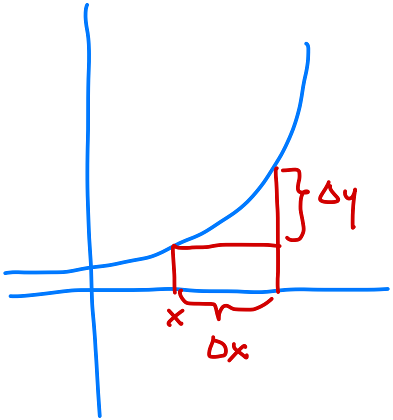
无穷多个无穷小量之和

A、 必是无穷小量 n $\frac{1}{n^2}$

B、 必是无穷大量 n^2 $\frac{1}{n}$

C、 必是有界量 n $\frac{1}{n}$

D、 是无穷小，或是无穷大，或有可能是有界量



第二章：微分

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$　　$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

导数基本公式：

$(C)' = 0$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$(a^x)' = (a > 0, a \neq 1)$ $a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(cos\, x)' = -\sin x$

$(tan\, x)' = \sec^2 x$

$(cot\, x)' = -\csc^2 x$

$(sec\, x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

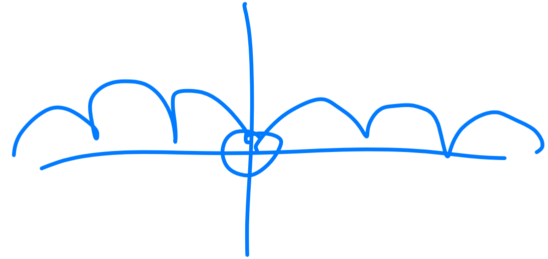
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

法1:



设函数 $f(x)=|\sin x|$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

A、 不连续

B、 连续，但不可导

C、 可导，但不连续

D、 可导，且导数也连续

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

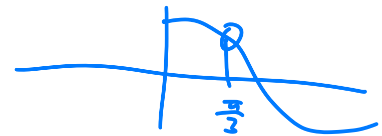
第34页补充题目

法2:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}|\sin x|=0\\&\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}|\sin x|=0\end{aligned}\right\}\text{连续}$$

$$\left.\begin{aligned}&f(0)^+=\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\\&f(0)^-=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1\end{aligned}\right\}\text{不可导}$$

求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线和法线方程。



$y' = -\sin x$ $\qquad k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) = 0$

法 $\quad y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0$

补充题见35页

e 外

arctan ○ 内

$\sqrt{x}$ 更内

求下列函数的导数

$$y=e^{\arctan\sqrt{x}}$$

$$y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

自32页

设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+b, & x>0,\\ e^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 且 $f'(0)$ 存在，求 a, b 值

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln(1+ax)+b]=b$

因为 $f'(0)$ 存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $b=1$

$f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+1, & x>0\\ e^{2x}, & x\le 0,\end{cases}$ $f(0)=1$.

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$a=2$

综上，$a=2$，$b=1$

求下列函数的导数

$$y = \ln \tan \frac{x}{2}$$

ln ( ) 外

tan ( ) 内

$\frac{x}{2}$ 更内

$$y' = 2\cot\frac{x}{2} \cdot \sec^2\frac{x}{2}$$

$$y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \cdot \sec^2\frac{x}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{求 } y = \sin x \text{ 的导数}\\
&y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \left[1 - \frac{1}{2}(\Delta x)^2\right] + \cos x \cdot \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \cos x \cdot \Delta x}{\Delta x} = \cos x
\end{aligned}}$$

$a\,(\quad)^2$ 外

$\cos(\quad)$ 内

$2\omega t+\varphi$ 更内

求下列函数的导数

$$s = a\cos^2(2\omega t + \varphi)$$

$$s' = -4a\cos(2\omega t+\varphi)\cdot\sin(2\omega t+\varphi)\cdot\omega$$

设 $y=xe^x$ 则 $y^{(n)}=$

A、 $e^x(x+n)$

B、 $e^x(x-n)$

C、 $2e^x(x+n)$

D、 xe^{nx}

$y' = e^x + xe^x$

$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$

设由方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 所确定的函数为 $y = y(x)$ ，则在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处导数为

A、 -1

B、 1 ✓

C、 0

D、 $-\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ 1}{a - a\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ 0} = \cancel{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\sqrt{2}}}\ 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} \end{aligned}} = \frac{\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{x'(t)} = \frac{y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

$3y^2 = x^3 + x^2$

曲线 $3y^2 = x^2(x+1)$ 在点 $(2,2)$ 处的切线斜率是 $\frac{4}{3}$，切线方程是 $y-2 = \frac{4}{3}(x-2)$

$6y\,y' = 3x^2 + 2x$

$12y' = 12 + 4$

$y' = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

求下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$xy = e^{x+y}$

$$y + xy' = e^{x+y}(1+y')$$

$$y + xy' = e^{x+y} + e^{x+y}y'$$

$$(x - e^{x+y})y' = e^{x+y} - y$$

$$y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$$

求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{\frac{t^2}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

中值定理反補充題目見下頁

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导且 $f(a)=f(b)=0$，

证明：在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$ 。

设 $g(x)=e^x f(x)$ ， $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$

$g(x)$ 在 $[a,b]$ 連續. (a,b) 可導. $g(a)=g(b)=0$

$\exists\, \xi\in(a,b)$ 使 $g'(\xi)=e^{\xi}[f'(\xi)+f(\xi)]=0$

因為 $e^{\xi}\neq 0$ ，而以 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

法 2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

法 3：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^c(x+x)}{\sin x}\ (-x<c<x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}=2$

计算下列极限

法1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x}=2$

1、罗尔定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(a)=f(b)\Rightarrow\exists\, c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$

2. 拉格朗日中值定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$\Rightarrow\exists\, c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3. 柯西中值定理 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，在 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0\Rightarrow c\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

4. 零点定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(a)f(b)<0\Rightarrow\exists\, c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

在上页的条件下，证明：

1、存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)+cf'(c)=0$

证：设 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g(a)=g(b)=0$

所以 $\exists\, c\in(a,b)$ 使 $g'(c)=f(c)+cf'(c)=0$

2、若 $0<a<b$，试证存在 $c\in(a,b)$，使得 $15f(c)+cf'(c)=0$

证：设 $g(x)=x^{15}f(x)$，$g'(x)=15x^{14}f(x)+x^{15}f'(x)$
$=x^{14}[15f(x)+xf'(x)]$

显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g(a)=g(b)=0$

所以 $\exists\, c\in(a,b)$ 使 $g'(c)=c^{14}[15f(c)+cf'(c)]=0$

又因为 $c^{14}\neq 0$，所以 $15f(c)+cf'(c)=0$

3. 存在 $c\in(a,b)$，使得 $15f(c)+f'(c)=0$

证：设 $g(x)=e^{15x}f(x)$，$g'(x)=15e^{15x}f(x)+e^{15x}f'(x)$
$=e^{15x}[15f(x)+f'(x)]$

显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g(a)=g(b)=0$

所以 $\exists\, c\in(a,b)$ 使得 $g'(c)=e^{15c}[15f(c)+f'(c)]=0$

又因为 $e^{15c}\neq 0$，所以 $15f(c)+f'(c)=0$

若 $(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线 $y=f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点，则

A、 $(x_0, f(x_0))$ 必为曲线的拐点

B、 $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的驻点

C、 x_0 为 $f(x)$ 的极值点

D、 x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点

下面结论正确的是

A、 驻点一定是极值点

B、 可导函数的极值点一定是驻点

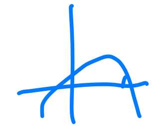
C、 函数的不可导点一定是极值点

D、 函数的极大值一定大于极小值

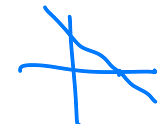
$y=1+3x^2-x^3$

<u>在同一表中</u>讨论函数 $\cancel{y=(x-1)\sqrt[3]{x}}$ 的单调性、极值、凹凸性、拐点

$y'=6x-3x^2=3x(2-x)$ $\quad y'=0,\ x_1=0,\ x_2=2$



$y''=6-6x=6(1-x)$ $\quad y''=0,\ x_3=1$

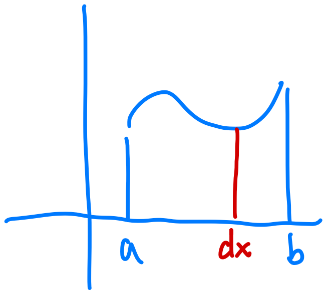


	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	极小值	$+$	$+$	$+$	极大值	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	拐点	$-$	$-$	$-$
y	↘	1	↗	3	↗	5	↘

函数在 $(-\infty,0)$ 内单调减，在 $(0,2)$ 内单调增，在 $(2,+\infty)$ 内单调减

当 $x=0$ 时函数取得极小值 1，当 $x=2$ 时函数取得极大值 5

函数在 $(-\infty,1)$ 上凹，在 $(1,+\infty)$ 上凸，$(1,3)$ 为函数的拐点



第三章：积分

$\int_a^b f(x)\, dx$

$+C$

不定积分基本公式：

$\int k\,dx =$ （ k 为常数） $kx+C$

$\int x^a\,dx =$ $(a \neq 1)$ $\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$

$\int \frac{1}{x}\,dx =$ $(x \neq 0)$ $\ln|x|$

$\int a^x\,dx =$ $(a > 0, a \neq 1)$ $\frac{a^x}{\ln a}+C$

$\int e^x\,dx =$ e^x+C

$\int \sin x\,dx =$ $-\cos x+C$

$\int \cos x\,dx =$ $\sin x+C$

$\int \tan x\,dx =$ $-\ln|\cos x|+C$

$\int \cot x\,dx =$ $\ln|\sin x|+C$

$\int \sec x\,dx =$ $\ln|\sec x+\tan x|+C$

$\int \csc x\,dx =$ $\ln|\csc x-\cot x|+C$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

计算下列不定积分：

$$\int \frac{2(3)^x - 5(2^x)}{3^x} dx$$

$$= \int \left[2 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right] dx$$

$$= 2x - 5 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + C$$

计算下列不定积分：

$$\int (3^{-2x} + e^{x+2})dx$$

$$= \frac{(3^{-2})^x}{\ln 3^{-2}} + e^{x+2} + C$$

计算下列不定积分：

$$\int 3^x e^x dx$$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C$$

第一類換元法

计算下列不定积分：

$$\int (3-2x)^3 dx$$

法1：原式 $= -\frac{1}{2}\int -2(3-2x)^3 dx$

$= -\frac{1}{2}\int (3-2x)^3 d(3-2x)$

$= -\frac{1}{8}\int 4(3-2x)^3 d(3-2x)$

$= -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$

法2：猜

$-\frac{1}{8}[(3-2x)^4]' = \cancel{8}(3-2x)^3$

原式 $= -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

计算下列不定积分：

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\int \cos^2 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1 + \cos 6x}{2} \, d3x$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\left(3x + \frac{1}{2}\sin 6x\right)}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x$$

$$(\cos^3 3x)' = 9\cos^2 3x \cdot$$

$$\cancel{= \frac{1}{9}\cos^3 3x + C}$$

计算下列不定积分：

$$\int x\cos(x^2)\,dx$$

法1：原式 $= \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\,dx^2$

$= \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

法2：猜

$\frac{1}{2}(\sin x^2)' = \cancel{2}x\cos x^2$

原式 $= \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

第二類換元法

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\frac{\cos 2x + 1}{2} = \cos^2 x$$

计算下列不定积分：

$$\int \sqrt{9-x^2}dx$$

$x = 3\sin t$, $t = \arcsin\frac{x}{3}$, $dx = 3\cos t$

$$\int \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot 3\cos t \, dt$$

$$= 9\int \cos^2 t \, dt = \frac{9}{2}\int(\cos 2t + 1)dt = \frac{9}{4}\sin 2t + \frac{9}{2}t + C$$

$$= \frac{9}{4}\sin 2\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$$

$$= \frac{9}{2}\sin\arcsin\frac{x}{3}\cos\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C = \frac{x}{2}\sqrt{3^2-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$$

分步积分法

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

计算：

$$\int \arcsin x\, dx$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx^2$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

计算：

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\int \ln x \, d\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

计算：

$$\int x\ln(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \ln(x+1)\,dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

把有理函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 化为部分分式的和，需要拆项为

A、 $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

B、 $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{D}{x^2+x+1}$

C、 $\frac{Ax+C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

D、 $\frac{C}{x^2+1}$ 和 $\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

计算下列定积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \; d\cos x$$

$$= -\frac{1}{4} \cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

计算下列定积分：

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \qquad x = t^2 \qquad t = \sqrt{x} \qquad dx = 2t\,dt$$

$$= \int_1^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = \int_1^2 \frac{2t+2-2}{1+t}\,dt$$

$$= \int_1^2 2\,dt - 2\int_1^2 \frac{1}{1+t}\,dt = 1 - 2\ln(1+t)\Big|_1^2$$

$$= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2$$

计算下列定积分：

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

$$= -\int_0^1 x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

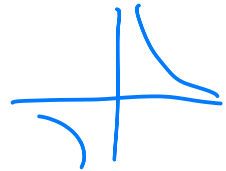
下列积分中的反常积分为

A、$\int_0^1 \frac{1}{2-x}dx$

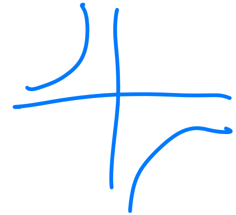
B、$\int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$

C、$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx$

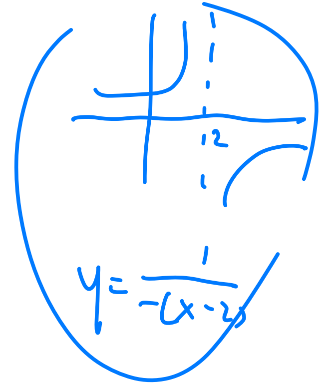
D、$\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}dx$

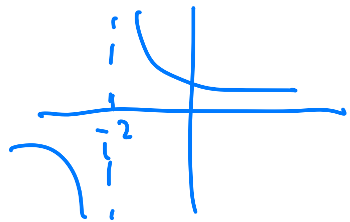


$y=-\frac{1}{x}$



$y=\frac{1}{-x}$





$y=\frac{1}{2+x}$

$$\int_0^{\bigcirc} \cos t^2\, dt \quad 外$$

$$x^2 \quad 内$$

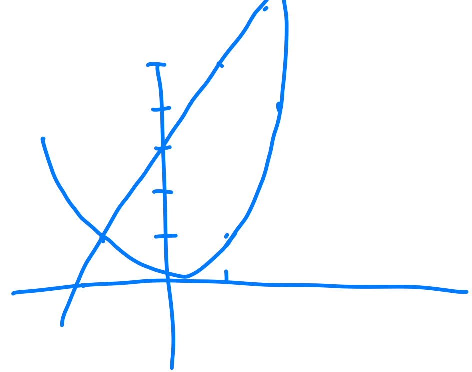
求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\overset{\cos}{\cancel{\cot}}\, t^2\,dt}{x\sin^9 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{x^{10}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x-2x\cdot\cos x^4}{10x^9} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^4}{x^8}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^8}{x^8} = \frac{1}{10}$$

求直线 $y=2x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积。



$x^2-2x-3=0$, $x_1=3$, $x_2=-1$

$\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx$

$=(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{3}$

$=(9+9-9)-(1-3+\frac{1}{3})$

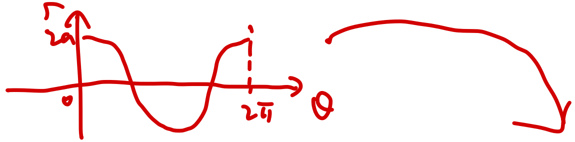
$=9-1+3-\frac{1}{3}=10+\frac{2}{3}$

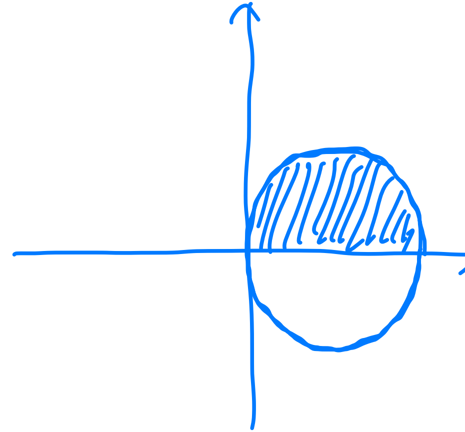
直角坐標下由 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 圍成

$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

極坐標下, 由 $r=r_1(\theta)$, $r=r_2(\theta)$, $r_1\theta\le r_2\theta$, $\alpha\le\theta\le\beta$ 圍成

$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\,d\theta$



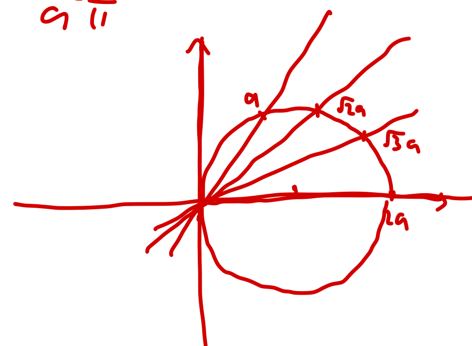


求 $r = 2a\cos\theta$ 所围成图形的面积。

法1: $2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2 d\theta$

$= \cancel{4a\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a}$

$4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta = 4a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = a^2\pi$



法2: $S = \pi R^2 = a^2\pi$

将 $y=x^2$ 与 $y=1$ 及 $x=0$ 所围成在第一象限内的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周，求其旋转体的体积。

法1：绕y $\int_0^1 2\pi(1-x^2)\,x\,dx$

$= 2\pi\int_0^1 (x-x^3)\,dx$

$= 2\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{2}$

绕x：$\int_0^1 2\pi\sqrt{y}\,y\,dy$

$= 2\pi\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,dy$

$= 2\pi\,\frac{2}{5}\cdot y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1$

$= \frac{4}{5}\pi$

法2：见第71页

第四章：微分方程

微分方程 $y'' = 2x^2 + 3$ 的阶数为

A、1

B、2

C、3

D、4

法2：绕y： $2\pi \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x \, dy$

$= 2\pi \int_0^1 x(1-x^2) \, dx$

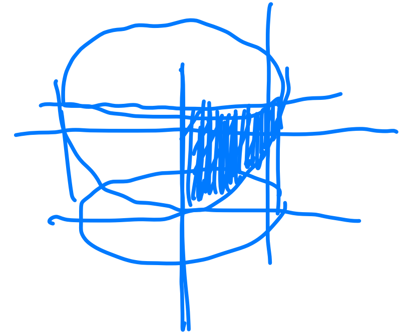
$= \frac{\pi}{2}$

绕x： $2\pi \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y \, dy$

$= \pi \int_0^1 1 - x^4 \, dx$

$= \pi \left(x - \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^1$

$= \frac{4}{5}\pi$



$xy(y')^2 - yy' - x = 0$ 为___一___阶的微分方程。

自78页

一阶非齐次线性微分方程的通解公式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad y = \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right] e^{-\int P(x)dx}$$

二阶常系数齐次线性微分方程的解法：

$y'' + py' + qy = 0$ 特征方程：$r^2 + pr + q = 0$ 解 r_1, r_2

1、r_1, r_2 为两个不相等的实根： $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

2、r_1, r_2 为两个相等的实根， $y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

3. r_1, r_2 为两个共轭复根 $\alpha \pm \beta i$ $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

下接73页

$L\frac{d^2Q}{dt^2}+Q^3\frac{dQ}{dt}+Q=0$ 为__二__阶的微分方程。

上接72页

二阶常系数非齐次线性微分方程的特解： $P(x)\,e^{kx}$

$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

若 k 非特征值： $y^* = Q(x)\,e^{kx}$

若 k 与一个特征值相同： $y^* = xQ(x)\,e^{kx}$

若 k 与两个特征值相同： $y^* = x^2Q(x)\,e^{kx}$

自78页

求微分方程通解，

方程有几阶，通解就有几个 C

求解下列微分方程

$xy' - y\ln y = 0$

$x\frac{dy}{dx} - y\ln y = 0$

$x\frac{dy}{dx} = y\ln y$

$y>0$

$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x}$

$\ln|\ln y| = \ln|x| + c$

$\ln y = Cx$

求解下列微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 10^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$$

$$10^{-y} dy = 10^x dy$$

$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

$$10^x + 10^{-y} + C = 0$$

求解下列微分方程

$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$

$$y' + \underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{\cos x}{x^2-1}}_{Q(x)}$$

$$y = \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right] e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$= \left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}\, e^{\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx}\,dx + c\right] e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx}$$

$$= \left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}\, e^{\ln(x^2-1)}\,dx + c\right] e^{-\ln(x^2-1)}$$

$$= \left[\int \cos x\,dx + c\right] \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}(\sin x + c)$$

求解下列微分方程

$y''' = \sin 2x$

$y'' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$

$y' = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$

$y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

見72.73頁

求解下列微分方程

$y'' - y' = x$

$y = c_1 e^x + c_2 + x(ax+b)$

$r^2 - r = 0$

$(r-1)r = 0$

$r_1 = 0 \quad r_2 = 1$

求解下列微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

$r^2 - 2r + 5 = 0$

$(r-1)^2 = -4$

$r = 1 \pm 2i$

$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

求解下列微分方程

$y'' + 6y' + 9y = 0$

$r^2 + 6r + 9 = 0$

$r_1 = r_2 = -3$

$y = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}$

求解下列微分方程

$y'' - 4y' + 3y = 0, y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$

$r^2 - 4r + 3 = 0$

$r_1 = 1, r_2 = 3$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

$y|_{x=0} = C_1 + C_2 = 6$

$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$

$y'|_{x=0} = C_1 + 3C_2 = 10$

$C_2 = 2 \quad C_1 = 4$

$y = 4e^x + 2e^{3x}$

求解下列微分方程

$$y'' + 3y' + \overset{2}{\cancel{3}}y = 3xe^{-x}$$

$$(r+2)(r+1) = 0$$

$$r_1 = -2 \quad r_2 = -1$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + x(ax+b)e^{-x}$$