本课程不与学校课程使用同一套教材，
但会按照学校教材安排章节。

本课程不佔学时、不影响平时成绩、
没有二课学分、不强制同学参加、
不收费、也不保證参加同学能够及格。

本课程适用人群：

1、上课没听的；

2、上课听了但没听懂的；

3、没想明白学线代有什么用的。

本课程不适用人群：

1、听懂了但不会做题的；

2、想看对数学定理严谨的证明的。

镜州商贸学院（新圩）

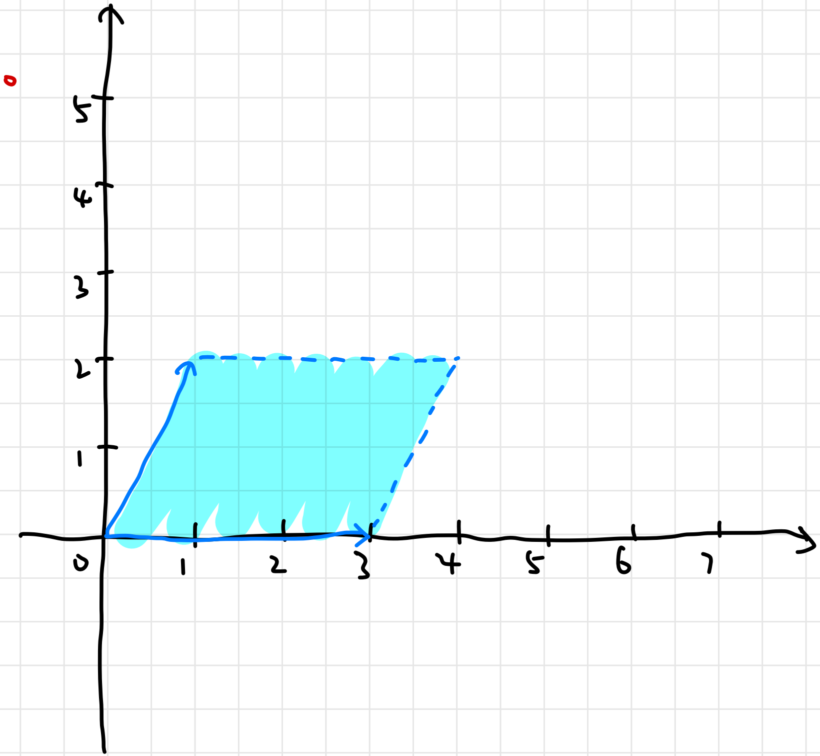
《线性代数》

期末复习题

第一章
行列式

行列式代表着组成它的所有向量为边的立体图形的有向体积。

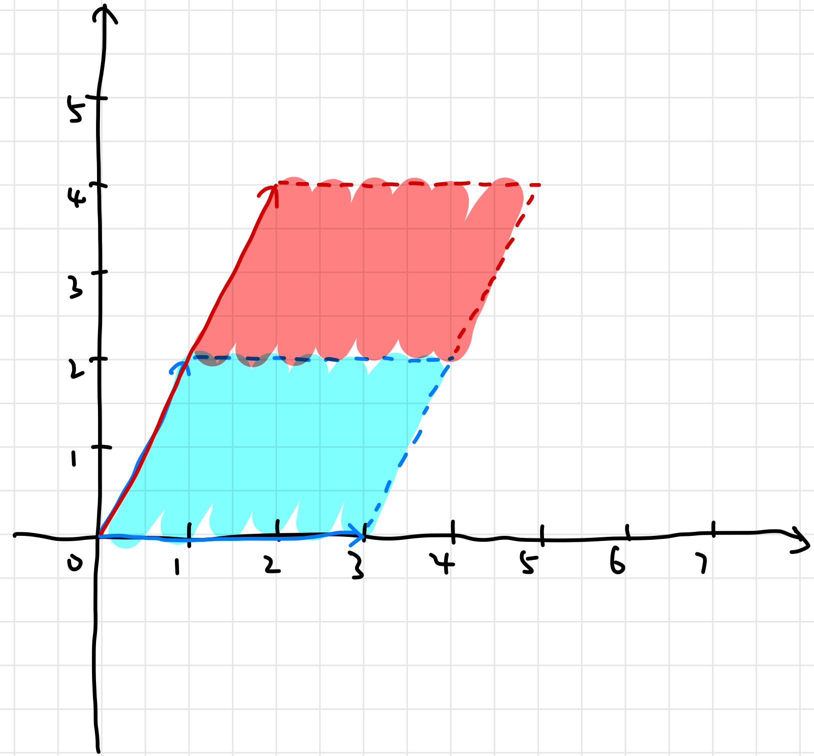
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$



某列有公因数 k，可把 k 的值提到行列式外。

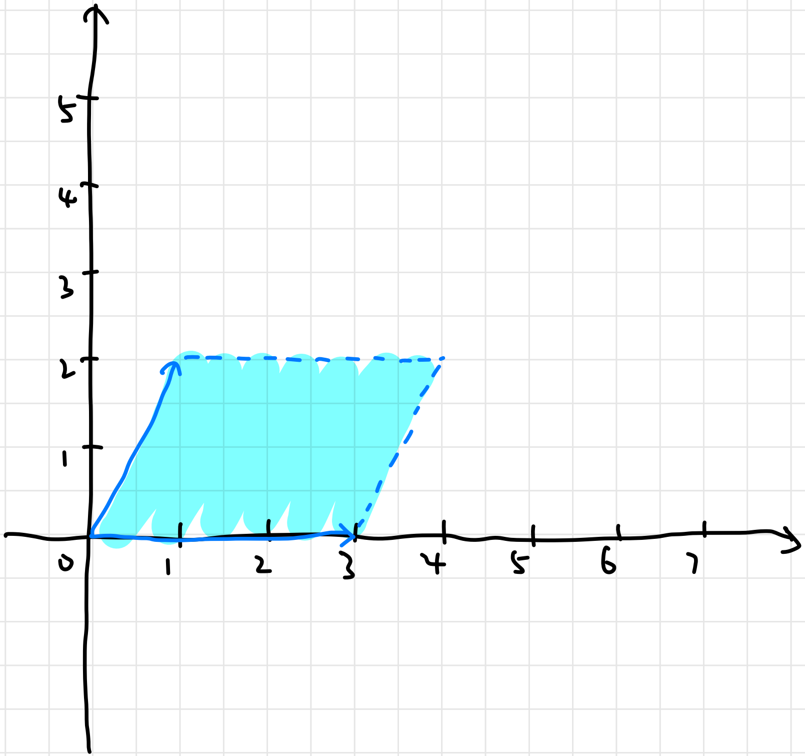
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 6 = 12$$



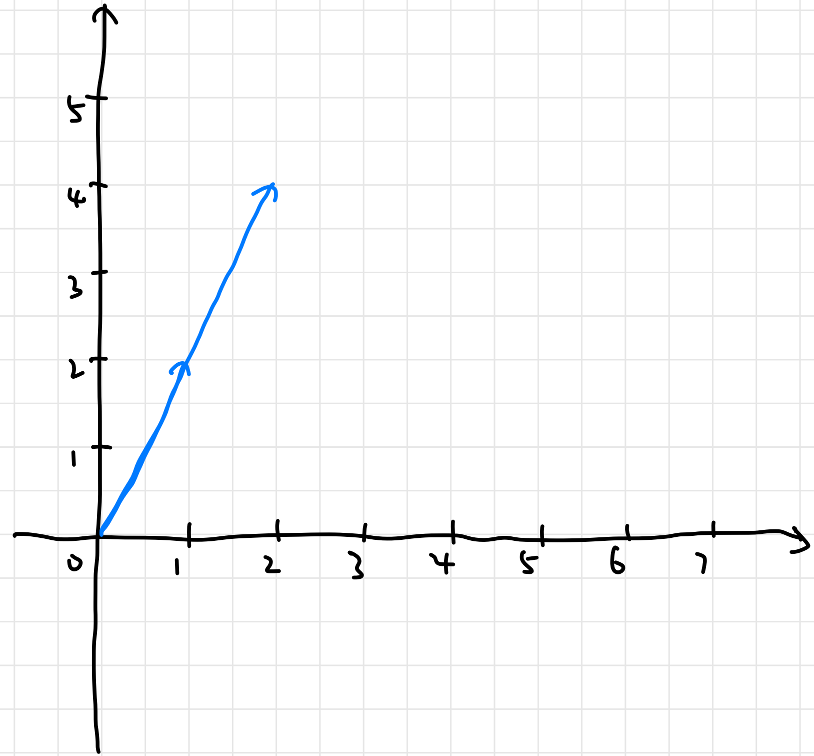
两列互换，行列式变号。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$



两列相等或成比例，行列式的值为0。

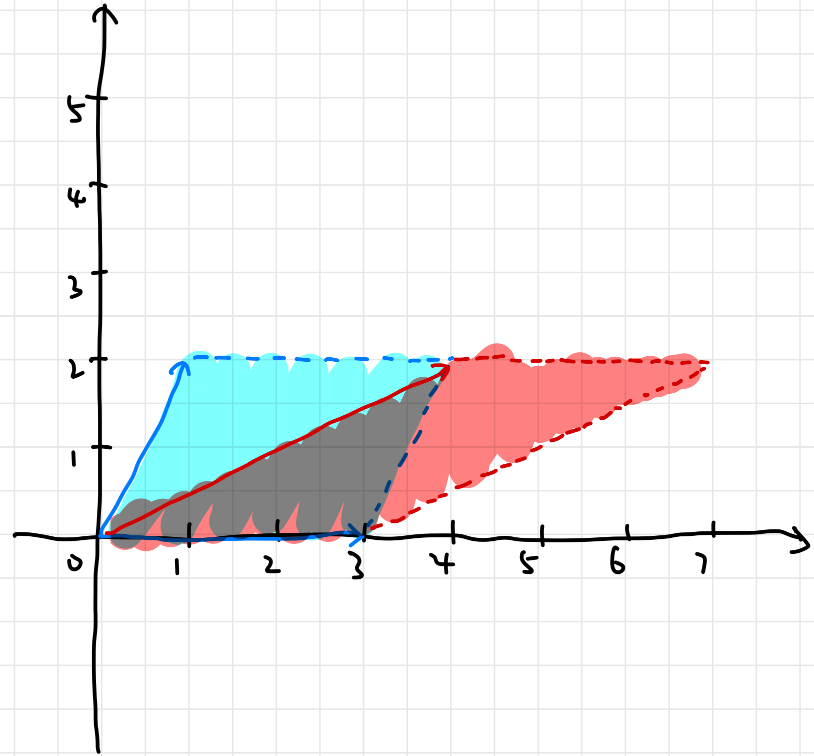
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$



某列的k倍加至另一列，行列式值不变。

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+3 \\ 0 & 2+0 \end{vmatrix}$$

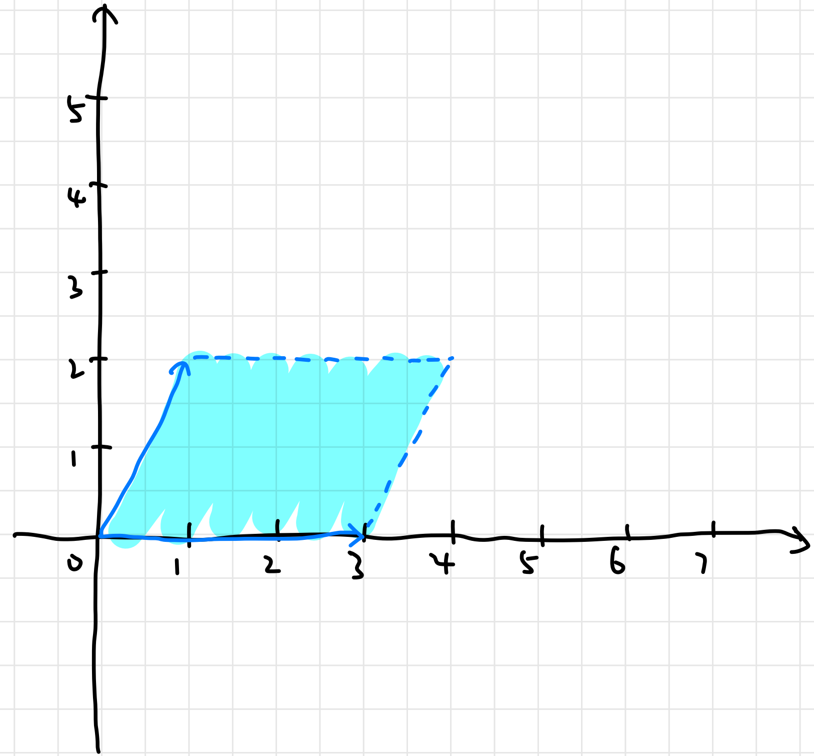
$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$



上/下三角行列式(主对角线下/上全是0的行列式)的值等于主对角线的乘积。

实在理解不了就硬背。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 = 6$$



在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，将余子式 M_{ij} 再乘以 -1 的 $i+j$ 次幂记作 A_{ij}，A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\text{按 } i \text{ 行展开})$$

$$|A| = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \quad (\text{按 } i \text{ 列展开})$$

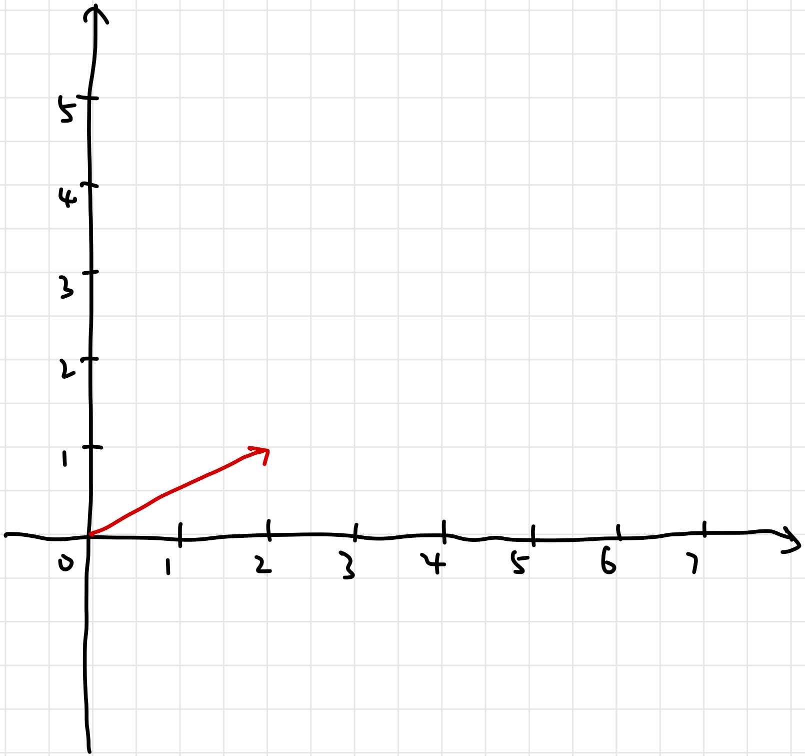
例题：

【例 1.1】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = $ ______.

第二章
矩阵

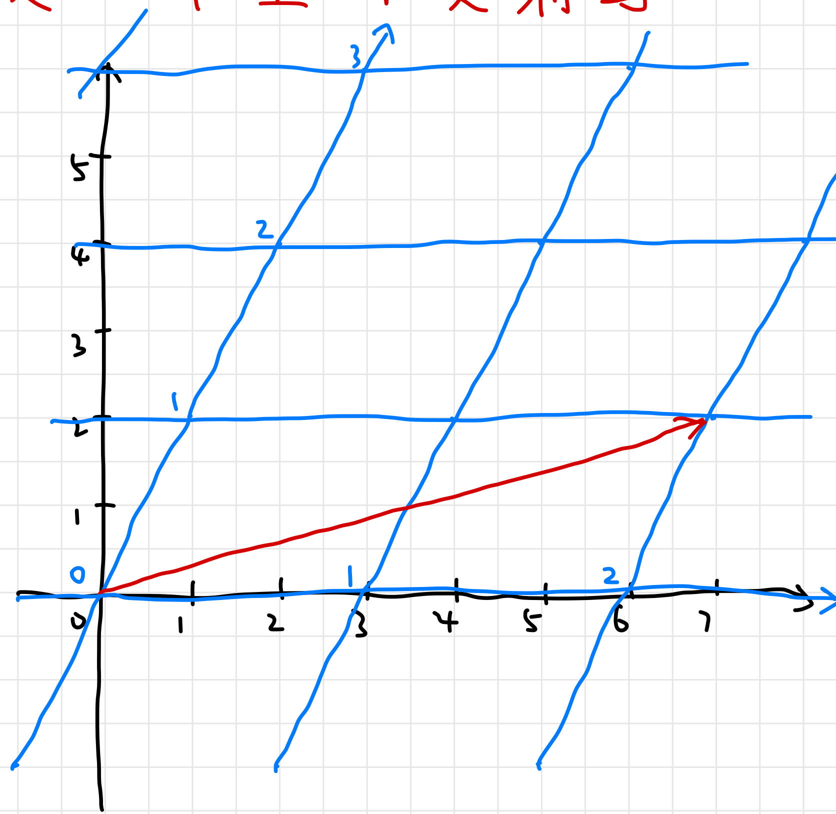
这是一个向量。

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



左乘一个距阵将向量从一个空间映射到另一个空间。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$



矩阵 A 左乘初等矩阵 P 就是对 A 作了一次与 P 同样的行变换，

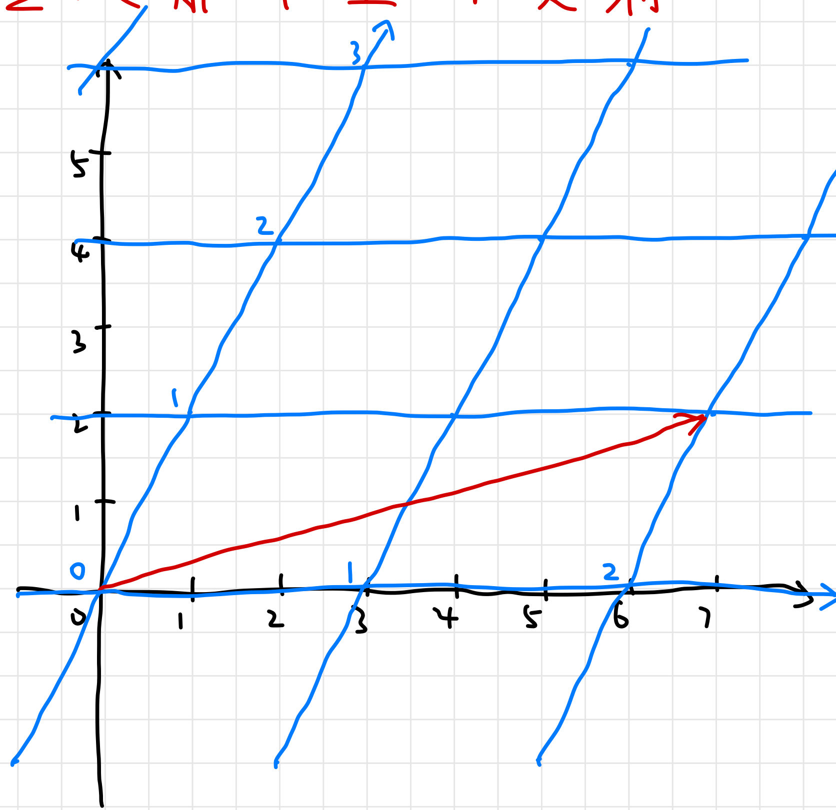
矩阵 A 右乘初等矩阵 P 就是对 A 作了一次与 P 同样的列变换。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

左乘它的逆距阵将向量从那个空间映射回来。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

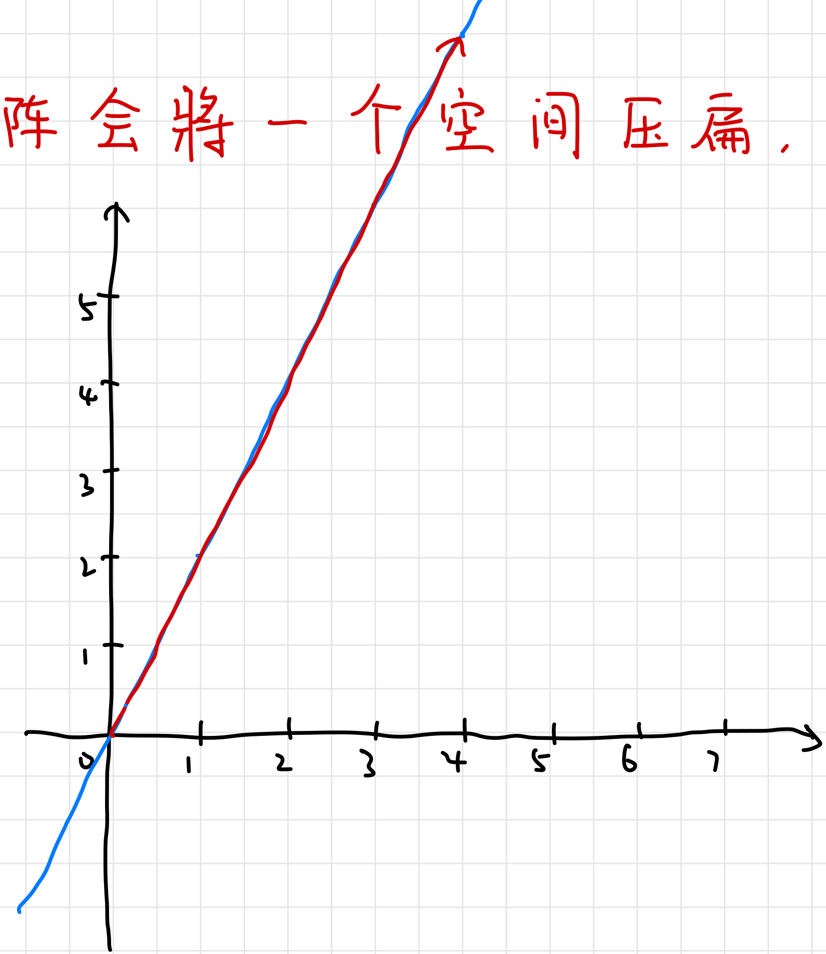
用初等变换求逆矩阵：

$$[A \vdots E] \rightarrow [E \vdots A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

乘以一个不满秩的矩阵会将一个空间压扁，向量被压扁后无法还原回原样，所以说这样的矩阵不可逆。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$



矩阵的秩：设矩阵A中有一个r阶非零子式D，且所有r+1阶子式全等于0，数r称为矩阵A的秩。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|1|=1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0, \quad r(A)=1$$

在阶梯形矩阵中，若非零行的第一个非零元素全是1，且其所在列其余元素全为零，就称该矩阵为行最简形矩阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

显然这个矩阵秩为3。

$P^{-1}AP = B$ 矩阵 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$。

一个矩阵 A，把它的第一行变成第一列，第二行变成第二列，…，最后一行变成最后一列，从而得到它的转置 A^T。

$A^T = A$ 对称矩阵

$AA^T = A^TA = E$ 正交矩阵

例题：设 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则

A. $|A^*| = |A^{-1}|$

B. $|A^*| = |A|$

C. $|A^*| = |A|^{n+1}$

D. $|A^*| = |A|^{n-1}$

例题：$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 X。

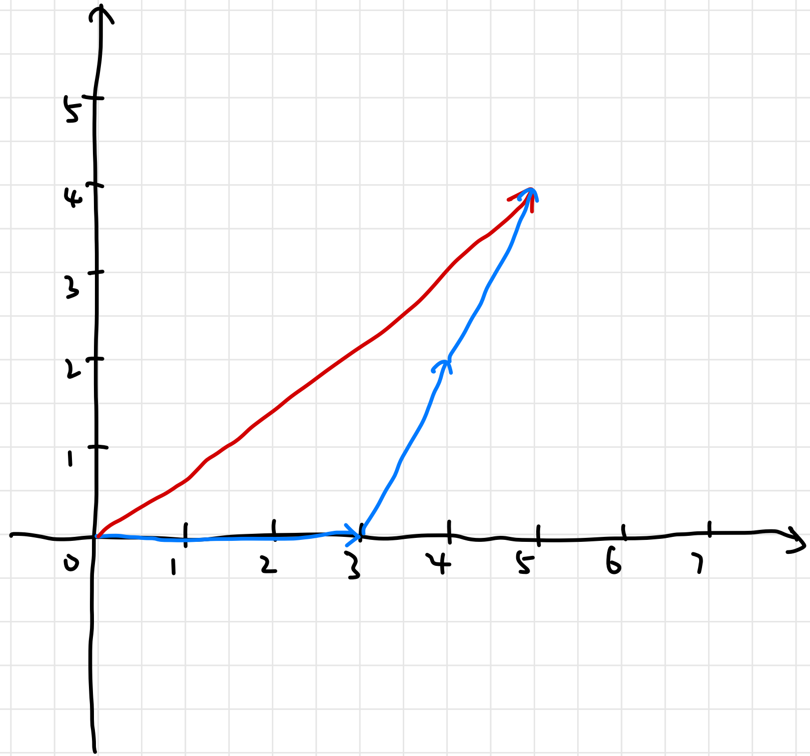
第三章

n 维向量

如果 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。

$$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ 可由 $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 线性表出。



若存在不全为0的$k_1,\cdots,k_s$使$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关。

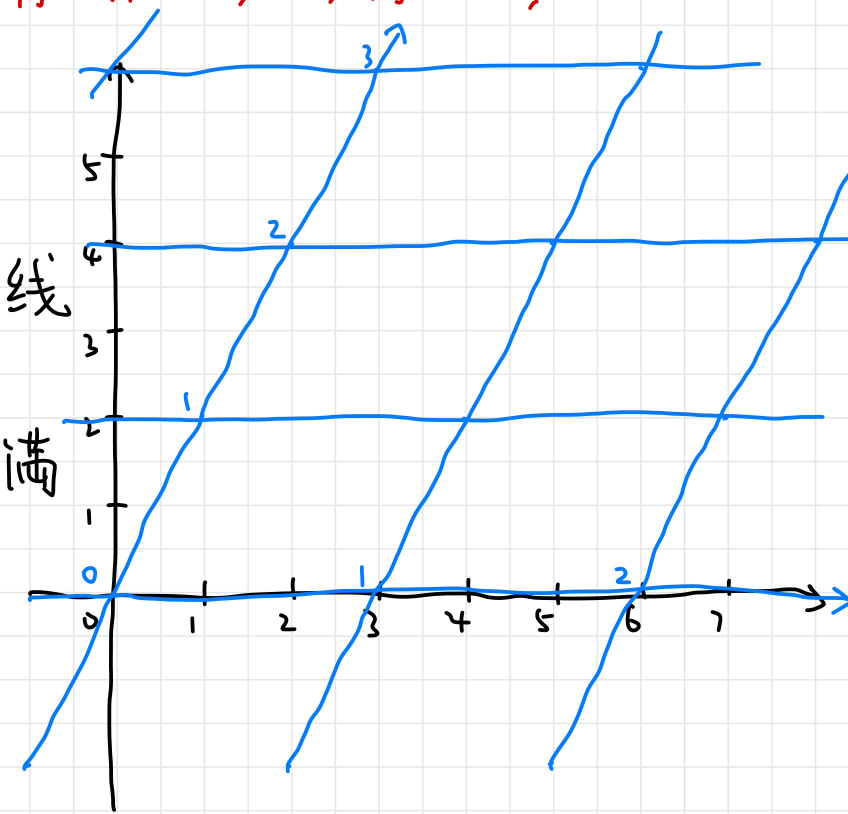
如果$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$则必有$k_1=0,\cdots,k_s=0$，

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关。

如果 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 则必有 $k_1=0,\cdots,k_s=0$，

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

以 $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 为分量线性表出的向量可以填满整个二维空间，它们是线性无关的。

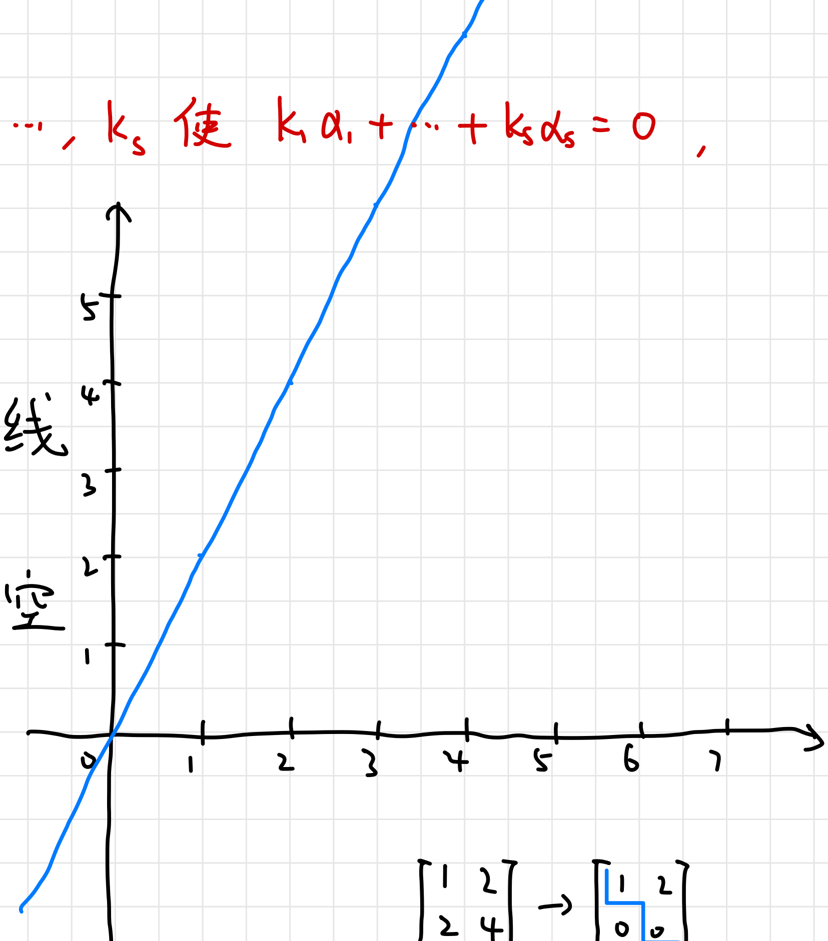


$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

若存在不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_s$ 使 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，

$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关。

以 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ 为分量线性表出的向量在二维空间中是扁的，其中几个向量可以由另几个线性表出，它们是线性相关的。



$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$$

例题：

【例 3.6】 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

例题：

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的一个极大线性无关组；

（Ⅱ）~~求3阶可逆矩阵 Q，使得 $AQ = B$.~~ 将其他向量用极大无关组中向量表示

第四章
线性方程组

齐次方程组系数矩阵的秩小于未知量个数时，方程组有无穷多解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Ax = 0 。$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{（k任意常数）}$$

齐次方程组系数矩阵的秩等于未知量个数时，方程组只有零解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad Ax = 0。$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = 0$$

非齐次方程组系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩时，方程组无解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}。$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

非齐次方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于未知量的个数时，方程组有唯一解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

非齐次方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于未知量的个数时，方程组有唯一解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}。$$

（k 任意常数）

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

例题：

【例 4.8】 当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3=1, \\ ax_2-3x_3=3, \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有解时求其所有解.

第五章
特征值
与特征向量

Schmidt 正交化方法

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$r_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad r_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad r_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

例题：

例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，~~则有~~将其Schmit正交化。

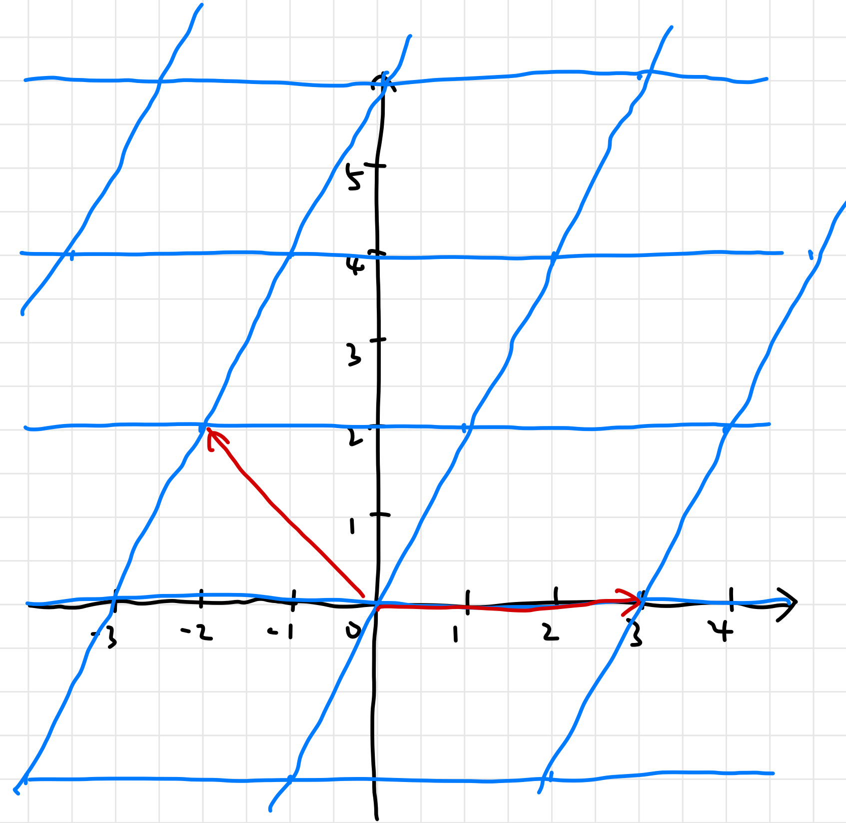
非重点，听不懂就算了

例题：求 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$

提示：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



例题：求 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$

非重点，听不懂就算了

第六章

二次型

不考