

本课程不与学校课程使用同一套教材，
但会按照学校教材安排章节。

本课程不佔学时、不影响平时成绩。
没有二课学分、不强制同学参加。
不收费、也不保证参加同学能够及格。

本课程适用人群：

1. 上课没听的；
2. 上课听了但没听懂的；
3. 没想明白学线代有什么用的。

本课程不适用人群：

1. 听懂了但不会做题的；
2. 想看对数学定理严谨的证明的。

锦州商贸学院 (新场)

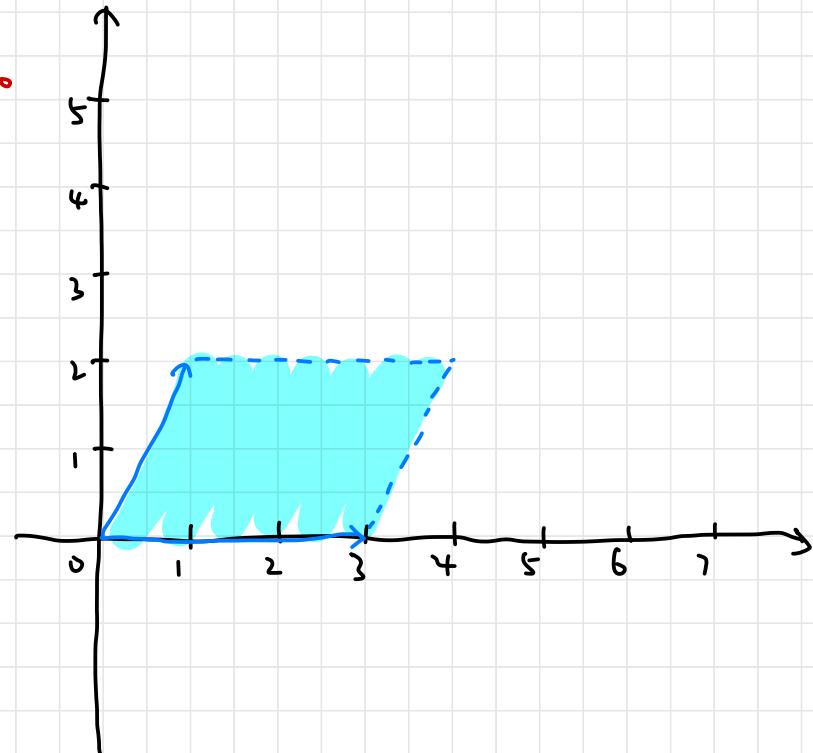
《线性代数》

期末复习题

第一章 行列式

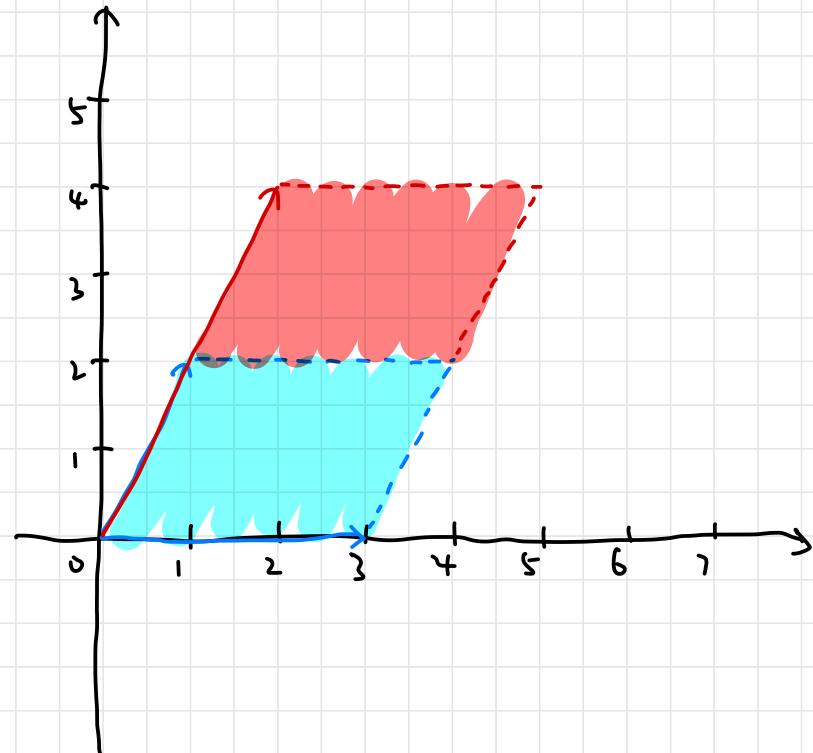
行列式代表着组成它的所有向量为边的立体图形的有向体积。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$



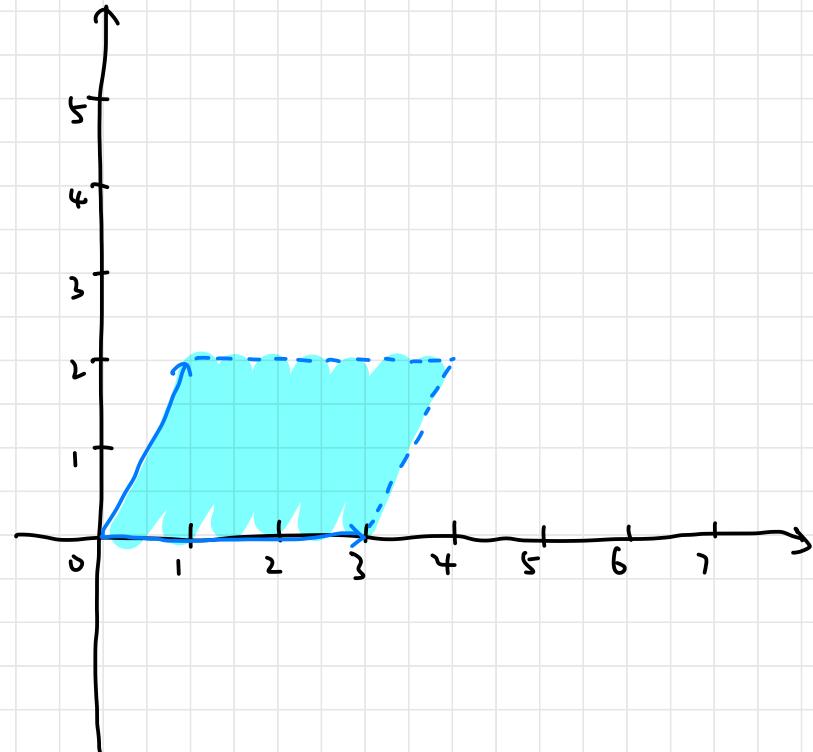
某列有公因数 k，可以把 k 的值提到行列式外。

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times 6 = 12$$



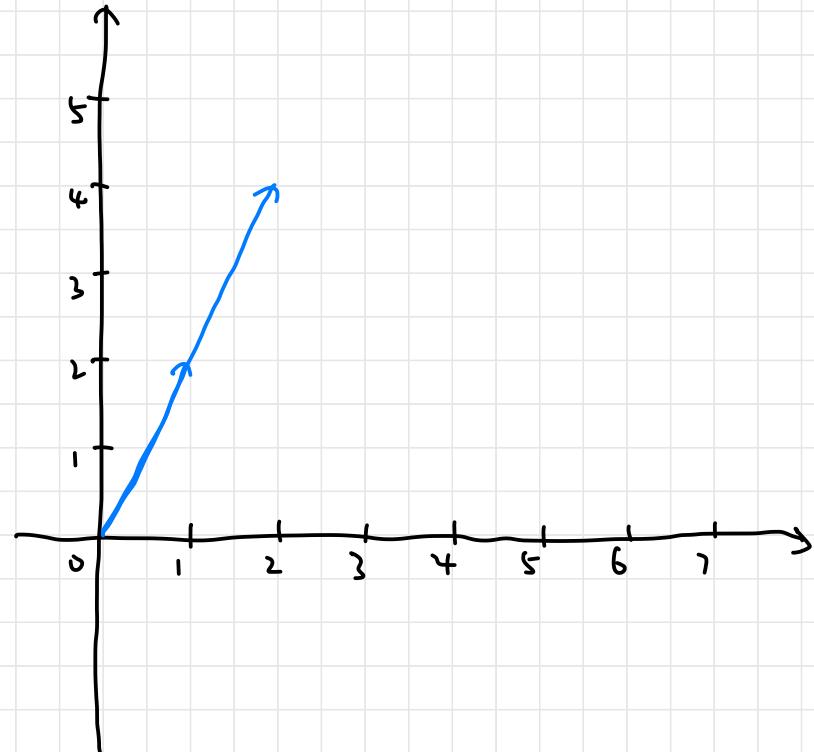
两列互换，行列式变号。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$



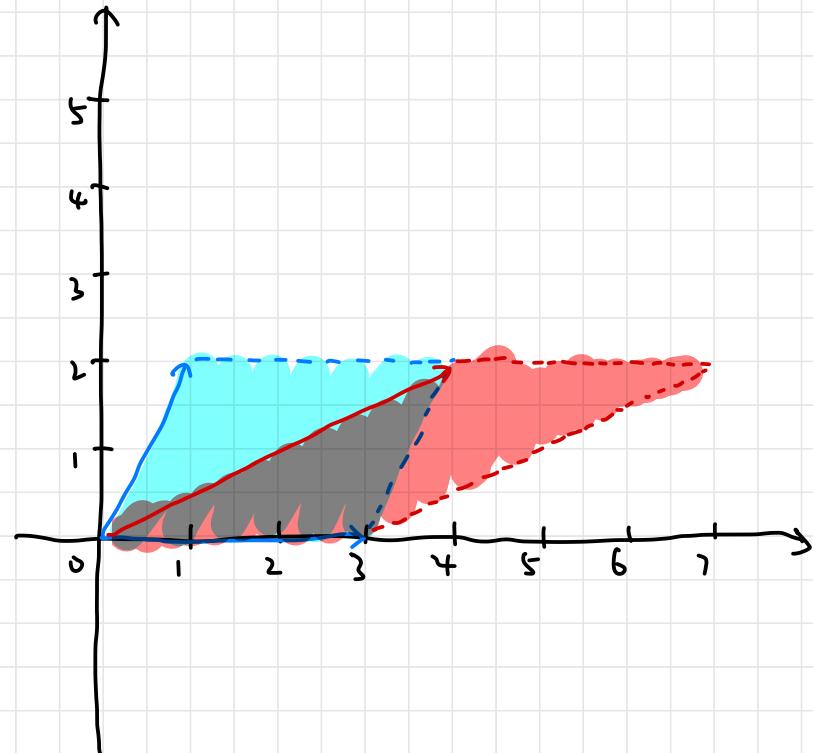
两列相等或成比例，行列式的值为 0。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$



某列的 k 倍加至另一列，行列式值不变。

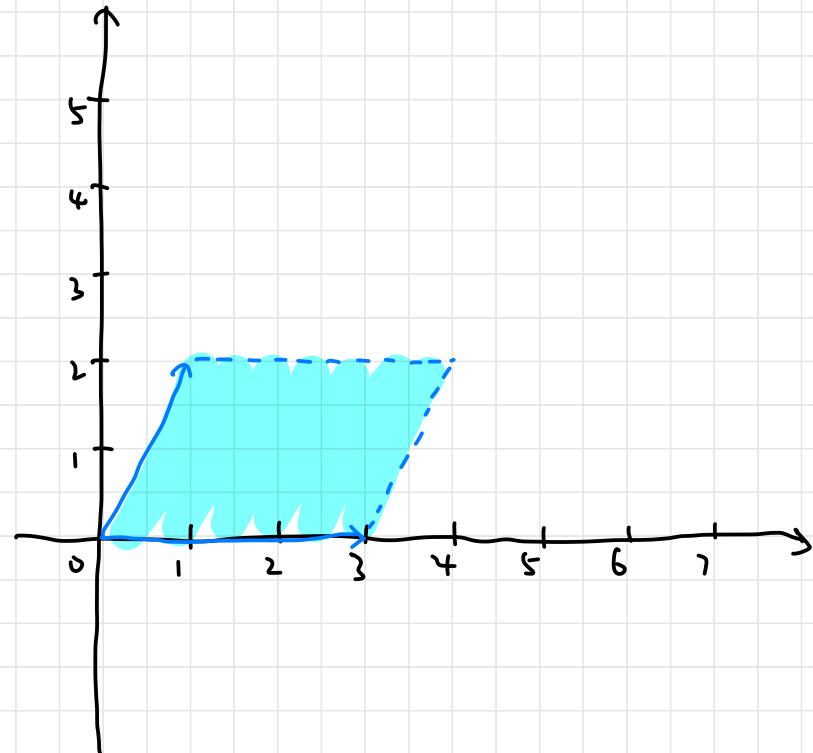
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+3 \\ 0 & 2+0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$



上/下三角行列式(主对角线下/上全是0的行列式)的值等于主对角线的乘积。

实在理解不了就硬背。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 = 6$$



在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} ，将余子式 M_{ij} 再乘以 -1 的 $i+j$ 次幂记作 A_{ij} ， A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (\text{按 } i \text{ 行展开})$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1} \quad (\text{按 } j \text{ 列展开})$$

例题：

【例 1.1】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{vmatrix}$$

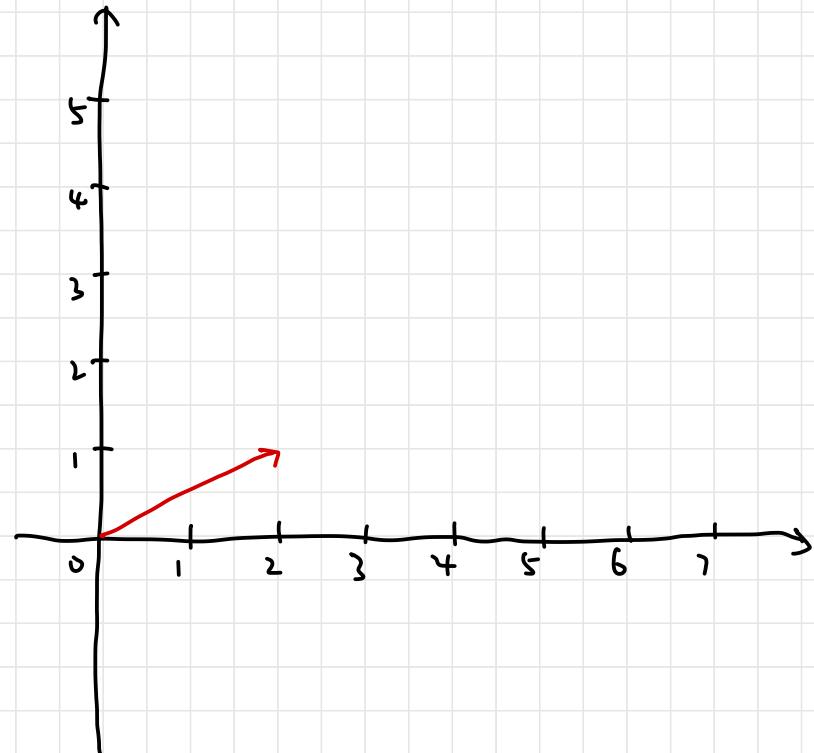
$$= 1 \times 5 \times (-6) \times (-28) = 840$$

第二章

矩阵

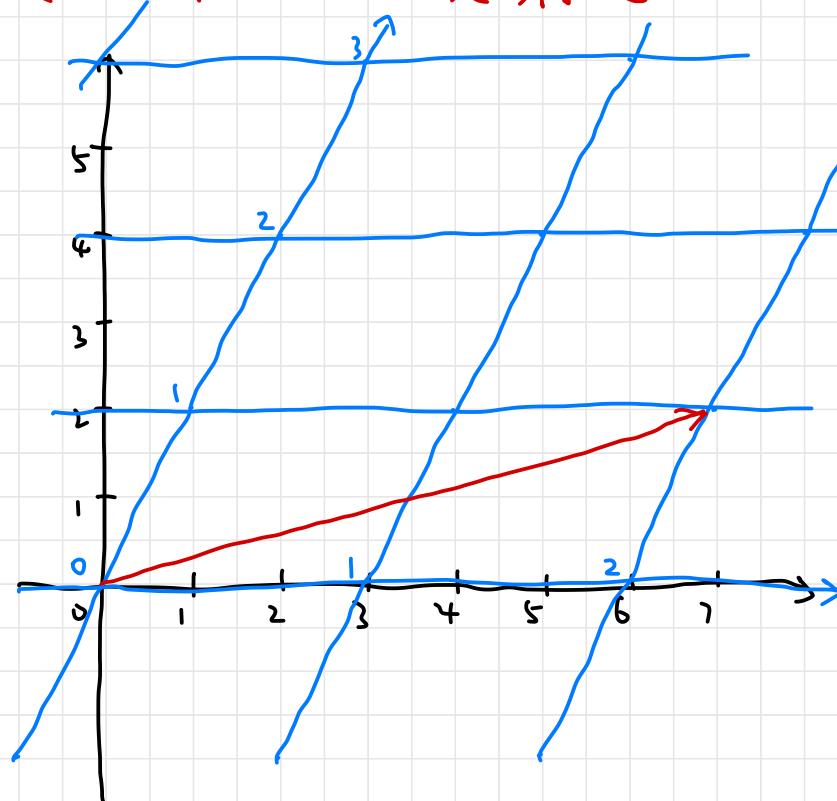
这是一个向量。

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



左乘一个矩阵将向量从一个空间映射到另一个空间。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$



矩阵 A 左乘初等矩阵 P 就是对 A 作了一次与 P 同样的行变换，

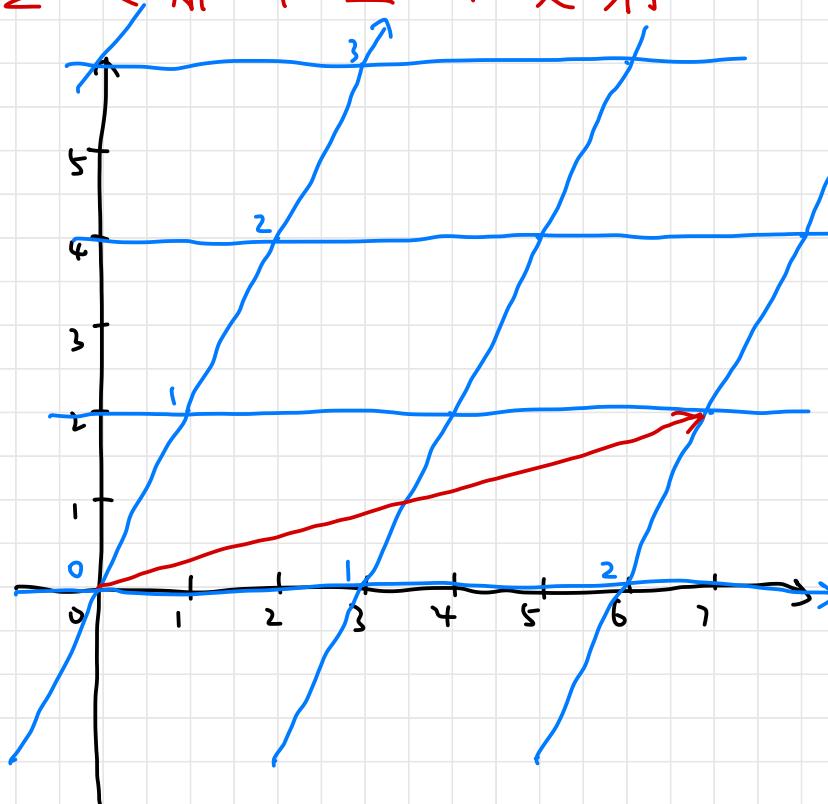
矩阵 A 右乘初等矩阵 P 就是对 A 作了一次与 P 同样的列变换。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

左乘它的逆矩阵将向量从那个空间映射回来。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



伴隨矩陣 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

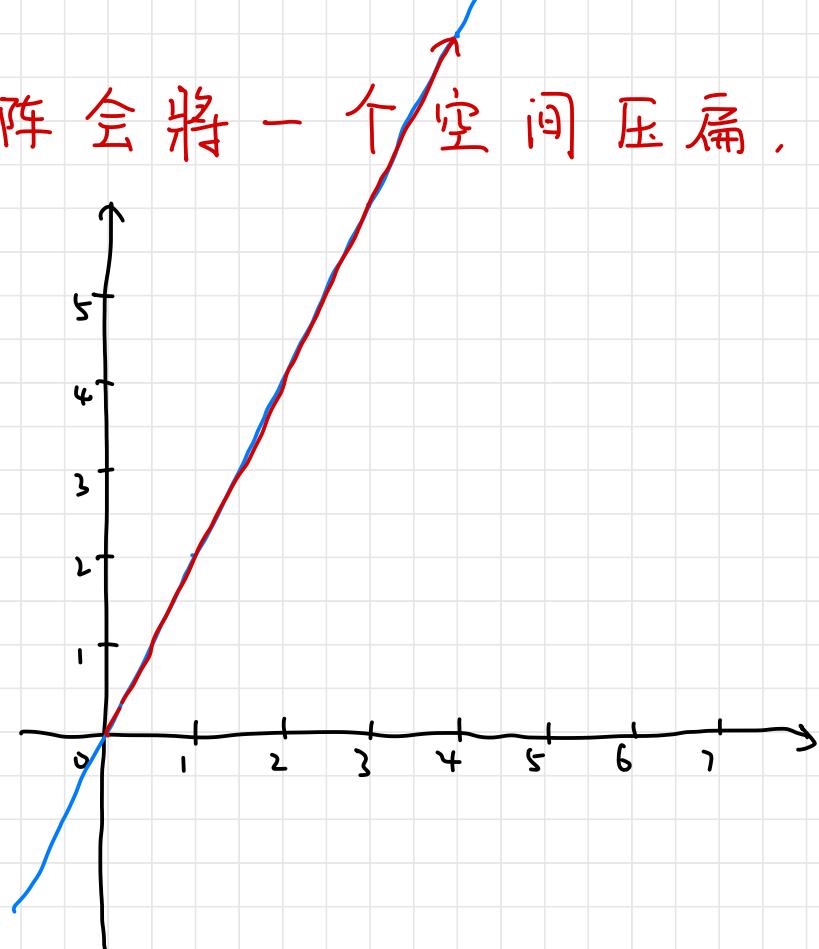
用初等变换求逆矩阵：

$$[A : E] \rightarrow [E : A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

乘以一个不满秩的矩阵会将一个空间压扁，
向量被压扁后无法
还原回原样，
所以说这样的矩阵
不可逆。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$



矩阵的秩：设矩阵 A 中有一个 r 阶非零子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式全等于 0，数 r 称为矩阵 A 的秩。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{|cc|} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right| = 0, \quad r(A) = 1$$

在阶梯形矩阵中，若非零行的第一个非零元素全是1，且其所在列其余元素全为零，就称该矩阵为行最简形矩阵。

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

显然这个矩阵秩为3。

$P^T A P = B$ 矩阵 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$ ，

一个矩阵 A ，把它的第一行变成第一列，
第二行变成第二列，…，最后一行变成最
后一列，从而得到它的转置 A^T 。

$A^T = A$ 对称矩阵

$AA^T = A^TA = E$ 正交矩阵

例題：設 A 為 n 階方陣， A^* 為 A 的伴隨矩陣，則

A. $|A^*| = |A^{-1}|$

$$A^* = |A| A^{-1}$$

B. $|A^*| = |A|$

$$|A^*| = | |A| A^{-1} |$$

C. $|A^*| = |A|^{n+1}$

$$= |A|^n |A^{-1}|$$

D. $|A^*| = |A|^{n-1}$

$$= |A|^{n-1}$$

例題： $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 X 。

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -13 & 1 \\ 16 & -1 \end{bmatrix}$$

第三章

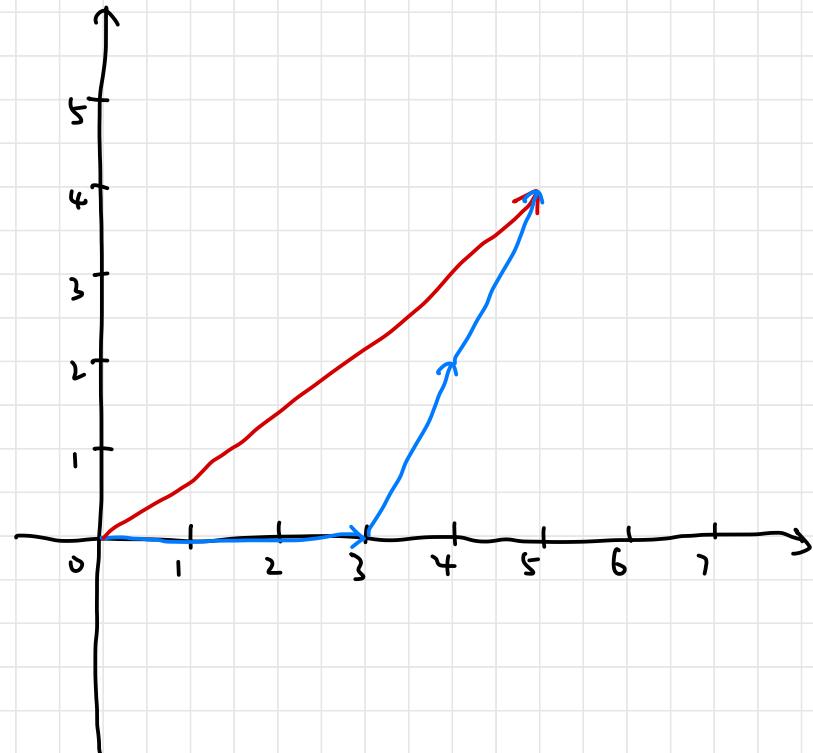
n 维向量

如果 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$, 称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示。

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ 可由 } \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

线性表示。



若存在不全为 0 的 k_1, \dots, k_s 使 $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0$,
 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

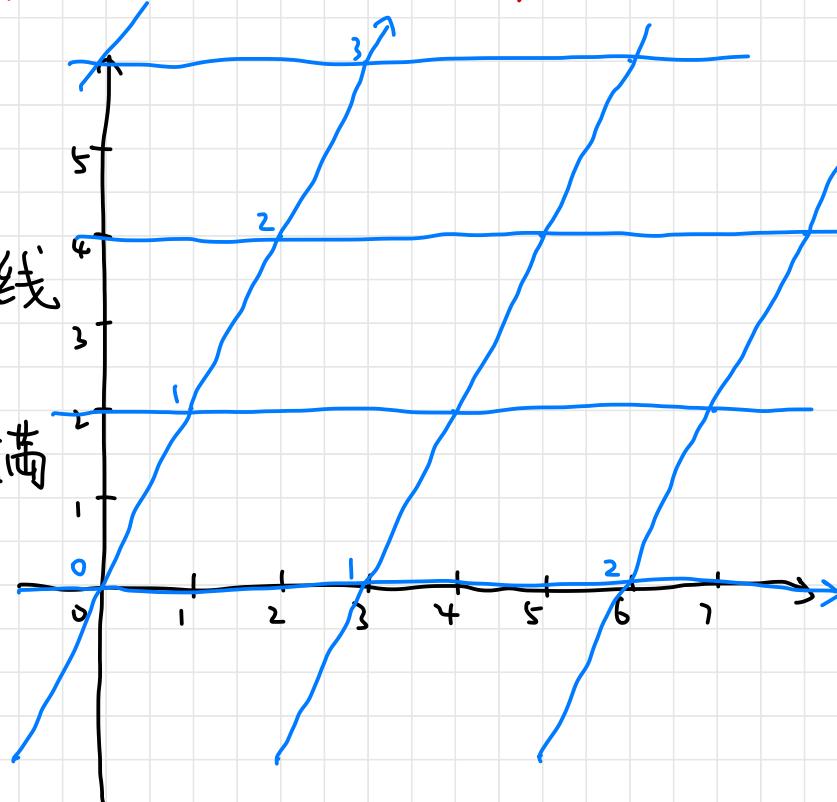
如果 $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 則必有 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$,
 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关。

如果 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 則必有 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$ ，
 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关。

以 $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 为分量线

性表示的向量可以填满
整个二维空间，它们
是线性无关的。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



若存在不全为 0 的 k_1, \dots, k_s 使 $k_1 a_1 + \dots + k_s a_s = 0$ ，
 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

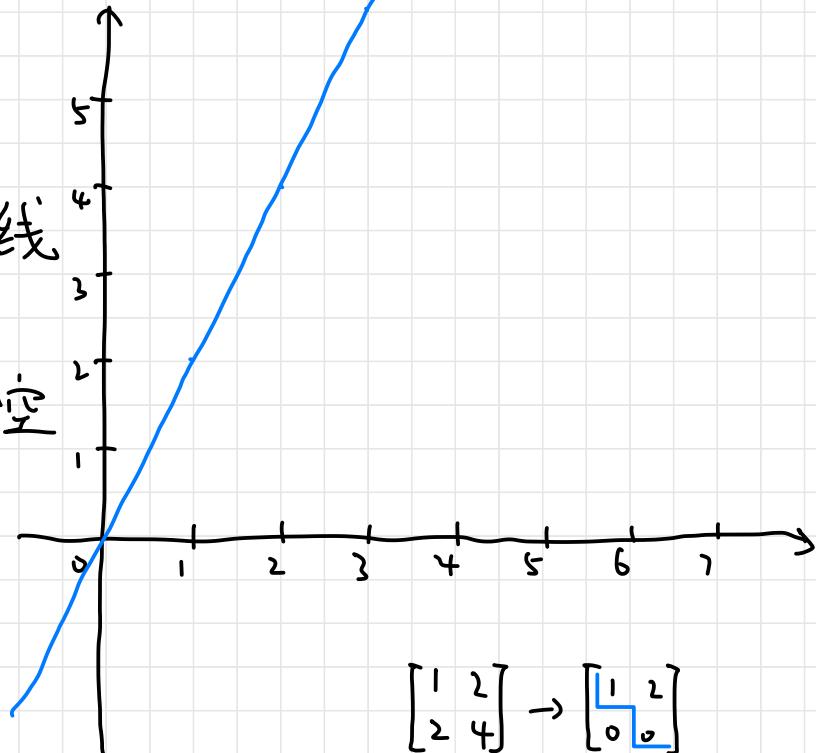
以 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 为分量线

性表示的向量在二维空

间中是扁的。其中几

个向量可以由另几个

线性表示，它们是线性相关的。



例題：

【例 3.6】已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明 $3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, 4\alpha_3 - 5\alpha_1$ 线性无关。

设 $k_1(3\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(4\alpha_3 - 5\alpha_1) = 0$

即 $(3k_1 - 5k_3)\alpha_1 + (2k_1 + k_2)\alpha_2 + (-k_2 + 4k_3)\alpha_3 = 0$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} 3k_1 - 5k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ -k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

故向量组 $3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, 4\alpha_3 - 5\alpha_1$ 线性无关。

例題：

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

(I) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的一个极大线性无关组；

(II) 求 ~~一个可逆矩阵 Q，使得 $AQ = B$~~ 将其他向量用极大无关组中向量表示

(I) $\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ 其中一个极大无关组是 α_1, α_2

(II) $\alpha_3 = 6\alpha_1 - 2\alpha_2$

$\beta_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2$

$\beta_2 = 4\alpha_1 - \alpha_2$

$\beta_3 = 4\alpha_1 - \alpha_2$

第四章

線性方程組

齐次方程组系数矩阵的秩小于未知量个数时，方程组有无穷多解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Ax = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$x = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 任意常数})$$

齐次方程组系数矩阵的秩等于未知量个数时，方程组只有零解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad Ax = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = 0$$

非齐次方程组系数矩阵的秩小于增广矩阵
阵的秩时，方程组无解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

非齐次方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵
阵的秩等于未知量的个数时，方程组有
唯一解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

非齐次方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵
阵的秩等于未知量的个数时，方程组有
唯一解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (k \text{ 任常数})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

例題：

【例 4.8】当 a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ ax_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解? 并在有解时求其所有解.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & a & -3 & 3 \\ 1 & 3 & a+1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -a-2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+2a-3 & a+3 \end{array} \right]$$

当 $a=1$ 时,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

无解

当 $a=-3$ 时

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

方程组通解是

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意数})$$

当 $a \neq 1, a \neq -3$ 时

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+10}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{array} \right]$$

方程组的解为

$$\left(\frac{a+10}{1-a}, \frac{3}{a-1}, \frac{1}{a-1} \right)^T$$

第五章
特征值
与特征向量

Schmidt 正交化方法

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2 - \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3 - \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3 - \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$r_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad r_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad r_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

例題：例如 $\alpha_1 = [0, 1, 2]^T$, $\alpha_2 = [1, 0, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 1, 0]^T$, 將其 Schmidt 正交化。

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

非重点，听不懂就算了

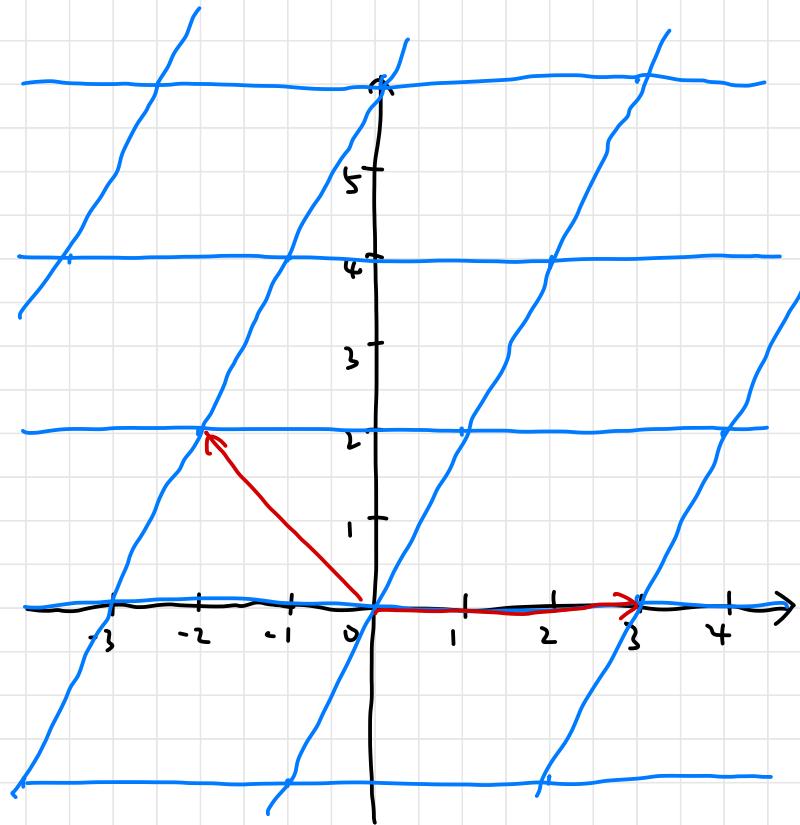
例題：求

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$$

提示：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



非重点，听不懂就算了

例题：求

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100} = A$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 解得 } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.$$

$$\lambda_1 = 3, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以有 } P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{100} = P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3^{100} & 3^{100} - 2^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

第六章

二次型

不考