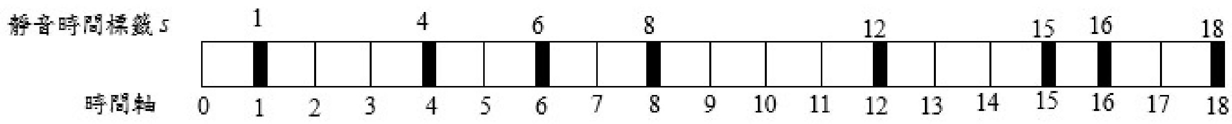
A 音檔剪輯

問題描述

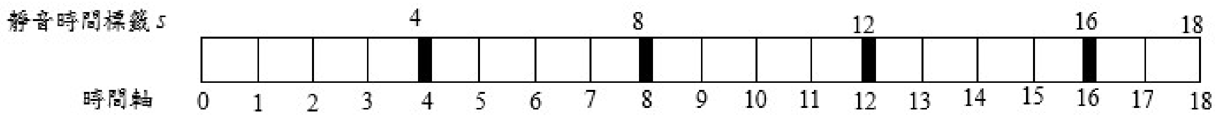
傑克是語音辨識公司的一名資料工程師，他必須把一個音檔在某些時間點切開，以便將音檔剪成某些區間，希望你能夠幫助他找到好的剪輯方式。

給定一個原始音檔，起始時間點為 0，已知音檔中有若干靜音時間標籤(silence time label)，這些點是可以將音檔切開的點。傑克的目標是：對於給定的長度限制 t，要在某些靜音時間標籤把檔案切開，使得每一段的長度都不超過 t，而且剪輯出來的區間數量越少越好。

以下圖(a)為例，粗黑線為靜音時間標籤，分別位於 1、4、6、8、12、15、16、18 等八個時間點。假設 $t = 5$。若傑克按照全部靜音時間標籤的位置將音檔分段，將會剪出 8 個區間。下圖(b)是一個剪出最少片段的方法所示，即剪出了 (0, 4), (4, 8), (8, 12), (12, 16), (16, 18) 等五個區間。



圖(a)



圖(b)

輸入格式

每筆測資共兩行。第一行有兩個正整數 t ($1 \leq t \leq 3000$) 與 n ($1 \leq n \leq 10^4$)，代表資料科學家理想之音檔長度以及原始音檔中的靜音時間標籤個數，兩數字以一空白區隔。接下來的一行包含 n 個正整數，代表音檔之靜音時間標籤；此 n 個數字從左至右由小而大排序，第一個數字不超過 t，且相鄰兩數字差距在 t 以內。最後一個靜音標籤是音訊檔的結尾，範圍不超過 10^8。

輸出格式

一正整數，表示最少的區間數量。

輸入範例一	輸出範例一
5 8 1 4 6 8 12 15 16 18	5

輸入範例二	輸出範例二
8 8 2 4 6 8 12 15 16 18	3

輸入範例三	輸出範例三
12 11 3 4 6 8 12 15 16 18 20 23 25	3

評分說明

本題無子任務，所有測試資料皆需答對可得 100 分。

B 完全平方二項係數

問題描述

小明想報名參加 BOB (Best Of Best)程式選拔賽，最近在準備的過程中看了許多數學書，其中看到一題跟二項係數有關的題目。對於兩正整數$m \geq k$, 二項係數的定義如下：

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

小明從書裡發現：當$k = 2$時，有些二項係數恰好就是一完全平方數！例如：$\binom{2}{2} = 1$, $\binom{9}{2} = 6^2$。小明想要知道更多的m, n值，使得 $\binom{m}{2} = n^2$，小明先試找了一些小的可能解，但當數字變大時，小明很快就發現了一些困難，為此在網路上找了一些資訊可以用來幫助算出可能的 m, n 解。小明驚訝地發現，要找到所求的 m 與 n，可透過求解二元二次方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$來達成；即方程式 $m(m\text{-}1)/2 = n^2$ 可轉化為 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的形式 (提示：將 $m(m\text{-}1) = 2n^2$ 等號兩邊同乘以 4 後配方)。

小明把焦點轉向求解前述的二元二次方程式，他稍加觀察，發現有無限多組正整數解，且任兩組正整數解是可以比較順序的；對於解 (a,b) 和 (c,d)，若 $a < c$且 $b < d$，則 $(a,b) < (c,d)$。另外，小明還知道，若(x_i, y_i)為第i小的一組正整數解（$i = 1, 2, \ldots$），則 $x_i + y_i\sqrt{2} = \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)^i$，其中$(x_1, y_1)$為最小的一組解。給定一正整數 l，請運用上述資訊撰寫一程式幫助小明算出 (x_l, y_l) 所對應的 (m, n)。

輸入格式

每一測試檔的第一行有一個正整數 N ($1 \leq N < 10$)，代表測試資料的筆數。接下來有 N 行輸入，每一行有一個整數 l ($1 \leq l < 2^{64}$) 代表預計求得第 l 組滿足$x^2 - 2y^2 = 1$的解所對應的(m, n)。注意，若使用 C/C++，在此次比賽的環境下可使用 `unsigned long long` 型別記錄一 64 位元的無號整數，若以 `scanf` 及 `printf` 輸入與輸出一 `unsigned long long` 型別的變數 x，請寫 `scanf("%llu", &x)` 及 `printf("%llu", x)`。若使用 Java，可使用 `BigInteger` class。

輸出格式

對每一測資在一行輸出兩個以空白隔開的正整數，代表 (x_l, y_l) 所對應的 m 與 n，因數字可能很大，對每一正整數輸出該數字除以 $10^9 + 7$ 後的餘數即可。注意，在模 $10^9 + 7$ 的運算下，除以 2 的運算為乘以 2 的乘法反元素 $5 \times 10^8 + 4$。

輸入範例一	輸出範例一
2 1 2	2 1 9 6

輸入範例二	輸出範例二
1 5	1682 1189

輸入範例三	輸出範例三
1 1000	742926233 137058873

評分說明

本題共有三組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	17	$l < 10$。
2	26	$l < 2\times10^4$。
3	57	無額外限制。

C 尋寶之旅

問題描述

尋寶之旅的遊戲有一個地圖，地圖上有 n 個站，以 0 到 $n-1$ 編號，此外有 $n-1$ 條道路，這些道路都是單向的，遊戲固定從 0 號站出發，且已知從 0 號站出發可以直接或間接到達任何其他站。每一個站都有一顆寶石，寶石有分為多種顏色，第 i 站存放的寶石顏色為 $c(i)$。

出發之前，你可以選定一種顏色的寶石收集箱，路途中遇到與你的收集箱相同顏色的寶石就可以收集(包含起點)，請你計算最多可以收集到多少顆同色寶石。

輸入格式

每筆測資的第一行有是一個正整數 n，$1 \le n \le 2 \times 10^5$，代表地圖上有 n 個站。第二行是 n 個非負整數，依序代表每一站的寶石顏色號碼 $c(0), c(1), \ldots, c(n-1)$；寶石的顏色號碼不超過 10^9。接著有 $n-1$ 行，每行兩個以空白間隔的整數 s 與 t，表示有一條 s 到 t 的道路。

輸出格式

輸出爲一整數，代表最多可能收集到的寶石數量。

輸入範例一	輸出範例一
6 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 0 3 1 4 1 5	3

輸入範例二	輸出範例二
10 5 3 3 1 4 0 3 4 5 0 0 1 5 2 7 3 5 4 0 5 4 6 1 7 0 8 4 9	2

評分說明

本題共有四組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	9	$n \le 1000$，寶石顏色編號皆為 0。
2	7	寶石顏色編號不超過 10。
3	47	寶石顏色編號不超過 10^4。
4	37	無額外限制。

D 獵人與斯芬克斯

問題描述

從前從前，一個獵人在森林裡迷路了，斯芬克斯突然出現在他的面前，斯芬克斯對獵人說:「旅人啊，我將考驗你的智慧，倘若你能在這片森林中找到最接近且不超過我食量 K 的獵物總重，我就不吃你，並指引你回家的路。」

森林為一個矩形區域，並以一單位長寬的方格劃分為 $M \times N$ 個格子區域，可以視為一個 $M \times N$ 的二維矩陣。每一個矩陣元素就是一塊方格區域所能獲得的獵物重量。考慮獵物多寡和打獵時的消耗，所以每個格子所能獲得的獵物重量**可能為正的也可能為負的或者是 0**。

斯芬克斯要求獵人只能在森林中選定一個**矩形區域**進行打獵，並且獲得該矩形區域中所有方格的獵物重量之總和。請你幫忙獵人計算出要如何選取區域才能夠得到**不超過 K 又最接近 K** 重量的獵物。獵人也可以所有區域都不選，這時候得到的獵物重量就是 0。

輸入格式

每筆測資的第一行有一個正整數 K ($1 \le K \le 10^9$)，代表斯芬克斯食量；第二行有兩個正整數 M 與 N，代表森林被劃分為 $M \times N$ 個格子區域，其中 $M \le 50$ 且 $M \times N \le 300{,}000$。接下來，由上而下，從左至右，有 M 行輸入，每一行有 N 個整數，每一個整數的絕對值不超過 3,000，代表一個方格區域打獵所能獲得的獵物重量，同行整數間以空格隔開。

輸出格式

輸出爲一整數，代表選取一個矩形區域所能取得最接近 K 而不超過 K 的獵物淨重。

輸入範例一	**輸出範例一**
13 1 5 1 3 4 8 2	12

輸入範例二	**輸出範例二**
6 2 3 -1 -1 1 2 2 2	6

輸入範例三	**輸出範例三**
3 2 3 -1 -5 -1 -2 -2 -2	0

評分說明

本題共有三組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

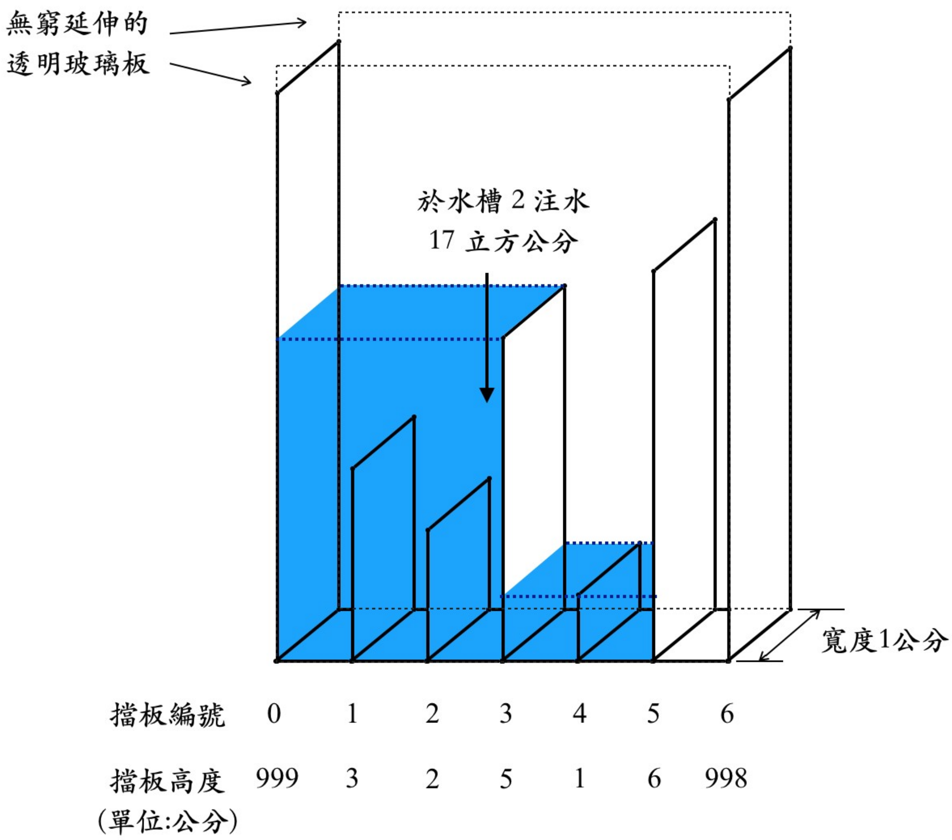
子任務	分數	額外輸入限制
1	20	$M \times N \leq 10^4$，且每一個方格可獲得的獵物重量都不是負值。
2	23	$M \times N \leq 10^4$。
3	57	無其他限制

E 水槽

問題描述

我們用一排 n 個擋板建造水槽。擋板的寬度為一公分，厚度不計，高度為正整數且均不相同，水槽前後是兩片長寬均為無限大的玻璃板 (見下圖例)。相鄰擋板的距離都是一公分，故相鄰二擋板之間會形成底面積一平方公分的水槽。

為方便說明，擋板由左而右依序由 0 到 $n-1$ 編號，第 i 及 $i+1$ 擋板中間的水槽稱為水槽 i。現在將總量為 w 立方公分的水緩緩注入水槽 i。注意水量可能溢出到別的水槽，但是由於所有擋板高度都不同，所以每當溢出時，只會先從一個方向溢出。請計算將總量為 w 立方公分的水緩緩注入水槽 i 後，所有水槽的水深。本題最左的擋板與最右的擋板是所有擋板中最高的兩個，並且保證欲注入的水不會溢出到左右邊界之外；另外，所有水槽的最後水深一定都是整數。以下圖為例，於水槽 2 注入 17 立方公分的水後，各水槽的水深依序為 5, 5, 5, 1, 1, 0。



輸入格式

每筆測資的第一行有三個正整數 $n\,(3 \le n \le 10^5)$、$i\ \ (0 \le i \le n-2)$ 和 $w\,(1 \le w \le 10^{12})$，分別代表擋板數、注水水槽編號，及水量 (單位：立方公分)。第二行有 n 個以空白間隔的正整數，代表由左到右擋板的高度 (單位：公分)，每個擋板高度為正整數且不超過 10^9)。請注意注水量可能超過一個 32-bit 整數的範圍。

輸出格式

輸出爲一行，共 $n-1$ 個整數，依序代表各個水槽水深 (單位：公分)，數字之間以一個空白間隔。

輸入範例一	輸出範例一
10 3 31 11 2 3 4 5 6 7 8 9 10	6 6 6 6 6 1 0 0 0

輸入範例二	輸出範例二
8 3 27 9 7 5 3 4 6 8 10	0 6 6 6 6 3 0

評分說明

本題共有三組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	9	$n \le 50$，除了最左邊的擋板之外，其餘擋板高度是從左到右遞增。
2	38	$n \le 1000$。
3	53	無額外限制。

F 翻轉與框架區間

問題描述

一個包含 n 個基因的序列可以用 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 所組成的排列 $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ 來表示。為了預測基因序列 S 上可能有意義的片段，一位生物學家遭遇了下列問題。令 $S(a, b)$ 代表在基因序列 S 上位置落在基因 a 和基因 b 之間的所有整數所構成的集合 (含 a 和 b)。例如，令 $S = (2, 7, 6, 4, 14, 13, 5, 8, 1, 9, 11, 10, 12, 3)$，則 $S(6, 8) = S(8, 6) = \{6, 4, 14, 13, 5, 8\}$。令 $I(a, b)$ 代表數線上 a 和 b 這兩個整數間所有整數所構成的集合 (含 a 和 b)。例如，$I(6, 8) = I(8, 6) = \{6, 7, 8\}$。在基因序列 S 上如果兩個整數 a 和 b, $1 \le a \ne b \le n$, 滿足 $S(a, b) = I(a, b)$ 則稱 (a, b) 構成一個「框架區間」 (framed interval)。舉例來說，考慮基因序列 $S = (2, 7, 6, 4, 14, 13, 5, 8, 1, 9, 11, 10, 12, 3)$，以 $(a, b) = (9, 12)$ 為例，因為 $S(9, 12) = \{9, 11, 10, 12\} = \{9, 10, 11, 12\} = I(9, 12)$，所以 $(9, 12)$ 是一個框架區間。相同的 $(6, 7)$ 和 $(13, 14)$ 也是框架區間。

在生物演化過程中，基因序列會發生重組。基因重組的方式有很多，其中一種常見的方式是將一段子序列間的基因「翻轉」 (reversal)。例如，在基因序列 $S = (2, \underline{7, 6, 4, 14, 13}, 5, 8, 1, 9, 11, 10, 12, 3)$ 上，將子序列 $(s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = (7, 6, 4, 14, 13)$ 翻轉後會得到 $(2, \underline{13, 14, 4, 6, 7}, 5, 8, 1, 9, 11, 10, 12, 3)$。基因翻轉之後，可能會產生新的框架區間。例如，在上面這個例子中 S 在翻轉 $(7, 6, 4, 14, 13)$ 後會產生新的框架區間 $(4, 8)$。另一個例子是將子序列 $(s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}) = (5, 8, 1, 9, 11, 10, 12)$ 翻轉後會產生新的框架區間 $(9, 14)$。

這位生物學家想知道給定一個基因序列 S，有多少不是框架區間的數對 (a, b) , $1 \le a < b \le n$, 可以藉由一次翻轉變成新的框架區間？例如，在基因序列 $S = (2, 1, 5, 4, 3)$ 上，$(1, 2)$、$(3, 4)$、$(3, 5)$ 和 $(4, 5)$ 是框架區間。將子序列 $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (2, 1, 5, 4)$ 翻轉後得到 $(4, 5, 1, 2, 3)$，會產生新的框架區間 $(1, 3)$ 和 $(2, 3)$。另一個方式是將子序列 $(s_2, s_3, s_4, s_5) = (1, 5, 4, 3)$ 翻轉後得到 $(2, 3, 4, 5, 1)$，會產生新的框架區間 $(2, 3)$、$(2, 4)$ 和 $(2, 5)$。所有可以藉由一次翻轉變成新的框架區間的數對 (a, b) , $1 \le a < b \le n$, 有 $(1, 3)$、$(2, 3)$、$(2, 4)$ 和 $(2, 5)$，共四個。

輸入格式

每筆測資的第一行有一整數 n，$1 \le n \le 600$，第二行有 n 個整數 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (數字之間以一個空白隔開)，代表基因序列 $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$，任兩個數字都不相同且 $1 \le s_1, \ldots, s_n \le n$。

輸出格式

輸出爲一整數，代表有多少不是框架區間的數對 (a, b) , $1 \le a < b \le n$, 可以藉由一次翻轉變成新的框架區間。

輸入範例一	輸出範例一
4 3 2 1 4	3

輸入範例二	輸出範例二
5 2 1 5 4 3	4

評分說明

本題共有三組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	5	$1 \le n \le 3$。
2	30	$1 \le n \le 50$。
3	65	無額外限制。

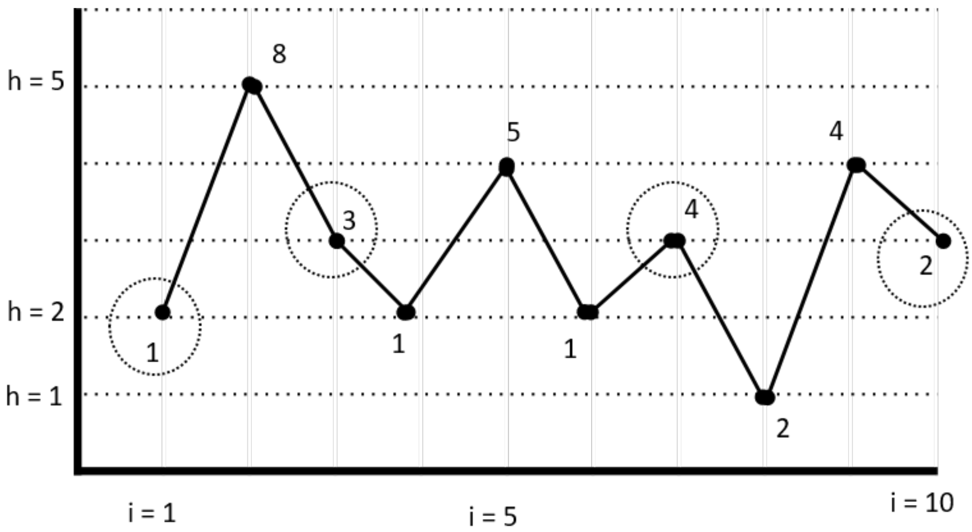
G 隔離採礦

問題描述

外星採礦隊在烏邦圖星球已經探勘到某種礦物的礦脈，這條礦脈是一個筆直的直線，且一共有 n 個可以挖礦井的地點，這些地點就稱為可開採點。所有的可開採點由 1 到 n 依序編號，第 i 個可開採點的高度為 $h(i)$ 而開採價值為 $v(i)$。

現在希望能找出某些可開採點來實際進行鑽井挖礦，因為安全因素，任兩個礦井之間必須有另外一個開採點，其高度超過這兩個礦井。身為外星採礦隊的程式設計師，你的目標是計算出最大的開採價值總和。

下圖是一個 n =10 的例子，圖中各點的高度為 y 軸座標，而開採價值則標註於各點旁邊。如圖所示，各點的高度依序是 $h = (2, 5, 3, 2, 4, 2, 3, 1, 4, 3)$，而開採價值則依序是 $v = (1, 8, 3, 1, 5, 1, 4, 2, 4, 2)$，也就是說 $h(1)=2, h(2)=5, \ldots, h(10)=3$，而 $v(1)=1, v(2)=8, \ldots, v(10)=2$。在此例中，最佳的開採方式是圖中被圓圈所圈起來的四個點，所能獲得的最大開採價值總和為 1+3+4+2=10。你可以看到，任兩個實際開採點之間都有一個高度更高的點。



輸入格式

每筆測資的第一行是一個正整數 n，$1 \leq n \leq 10^6$，代表可開採點的數量。第二行是 n 個非負整數，依序代表每一點的高度 $h(1), h(2), \ldots, h(n)$；第三行是 n 個正整數，依序代表每一點的開採價值 $v(1), v(2), \ldots, v(n)$。每一行相鄰數字間以一空白間隔。每一點的高度不會超過 10^9，價值不會超過 10^5。

輸出格式

輸出爲一整數，代表最大的開採價值總和。每筆測資的答案不超過 2×10^9。

輸入範例一	輸出範例一
10 2 5 3 2 4 2 3 1 4 3 1 8 3 1 5 1 4 2 4 2	10

輸入範例二	輸出範例二
5 3 3 3 3 3 5 3 2 3 4	5

輸入範例三	輸出範例三
8 4 3 1 7 2 5 6 3 1 1 1 1 1 1 1 1	3

評分說明

本題共有四組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

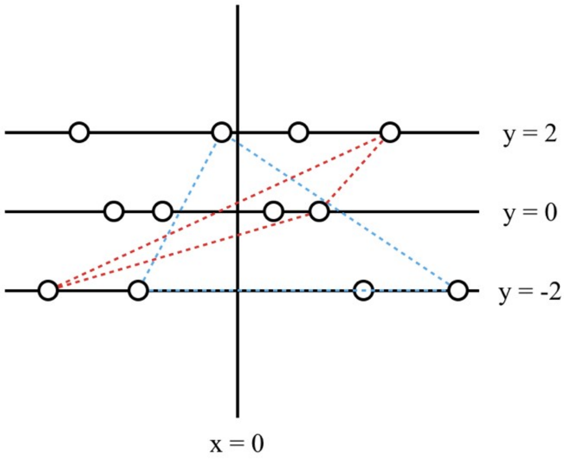
子任務	分數	額外輸入限制
1	7	$n \le 500$。
2	14	$n \le 2\times10^5$ 且各點高度皆相異。
3	23	$n \le 2\times10^5$。
4	56	無額外限制。

H 保全公司

問題描述

踢噢唉保全公司打算安排 n 位保全在某個城市進行巡邏工作，城市內有 $6n$ 個巡哨點，每一位保全會在公司的安排下，在某三個不同的巡哨點形成的「三角形區域」進行巡邏 (允許三角形的面積為 0)。每個巡哨點都設有一間單人休息室，每位保全可使用他被安排到的三個巡哨點休息室。為了避免有兩位以上的保全在同一時間想要使用同一間休息室，公司在排班時僅會將一個巡哨點分配給一位保全。巡哨點的位置可用二維平面上的座標來表示。請留意兩個不同的巡哨點可設置於相同座標，即一個座標點上可能有若干間休息室可供安排。另外，每位保全僅能使用自己被安排到的三間休息室，即使巡邏範圍內有其他間休息室，他也不能使用；故對任二位保全甲與乙，保全甲被安排到的巡哨點可坐落在保全乙的巡邏區域內。

下圖為 $n = 2$ 的例子，紅色所圍區域為保全甲的巡邏區域，而藍色所圍區域為保全乙的巡邏區域。



由於保全公司和市政府收取的費用正比於所有巡邏區域的面積總和，當某些區域被多位保全的巡邏區域所覆蓋，則重複巡邏的面積可以累加，進而公司可重複收取該重複區域的費用。因此，公司想找到一個分配巡哨點給各保全的方式，使得巡邏區域的面積總和被最大化。這邊需要留意三個巡哨點所圍的面積有可能為 0。已知：巡哨點所坐落的位置分散於三個母區域 ($y = 2, y = 0, y = -2$)，而且每個母區域又可以再細分成東西兩個子區域 ($x > 0$ 和 $x < 0$)，每個子區域各自有 n 個巡哨點。

輸入格式

每筆測資的第一行有一個正整數 n ($1 \le n \le 10^4$)，代表保全的數量。接下來有 $6n$ 行輸入，每一行有兩個整數 x ($-10^8 \le x \le 10^8$ 且 $x \neq 0$) 和 y ($y = 2$, $y = 0$ 或 $y = -2$)，代表一個巡哨點的 x 軸座標和 y 軸座標。同一行的兩整數間以一空白分隔。

輸出格式

輸出為一整數，代表所有可能安排的 n 個巡邏區域組合中，最大可能的面積總和。

輸入範例一	輸出範例一
1 10 2 -10 2 1 0 -1 0 10 -2 -5 -2	40

評分說明

本題共有三組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	12	所有 $y = 0$ 的座標點，它們的 x 座標皆為 1 或 -1 (如**範例 1**) 且 $n \leq 500$。
2	43	$n \leq 500$。
3	45	無額外限制。