Stirling数概念[编辑](javascript:;)

Stirling数出现在许多组合枚举问题中。对第一类Stirling数 http://c.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D48/sign=99c1bdff8144ebf869716537d8f9ff27/b2de9c82d158ccbf9e2031c61fd8bc3eb03541aa.jpg ，也可记为 http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D43/sign=30abcdfd0c55b31998f9837642a9af65/5ab5c9ea15ce36d34a5102cc3cf33a87e850b1f1.jpg 。表示将 n 个不同元素构成m个圆排列的数目。同时还分为无符号第一类Stirling数 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D56/sign=e86d359d09b30f24319aec05ca9543e7/d6ca7bcb0a46f21f2dedc0aff0246b600d33ae75.jpg 和带符号第一类Stirling数 http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D54/sign=dd0b1acc3cf33a879a6d001ec75ccdb3/241f95cad1c8a786c125d3f26109c93d70cf503a.jpg 。

第二类Stirling数 http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D51/sign=bd7e0b6dcb11728b342d8c23c9fc647a/1c950a7b02087bf466afd315f4d3572c10dfcf8f.jpg ，同时可记为 http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D44/sign=45ffc73c84025aafd7327fcff9ed5ae9/eaf81a4c510fd9f943c6d495232dd42a2934a47d.jpg *[与第一类的表示有大小写的区别]。*其表示将n个不同的元素分成m个集合的方案数。[2]

第一类Stirling数[编辑](javascript:;)

定义

第一类Stirling数表示表示将 n 个不同元素构成m个圆排列的数目。又根据正负性分为无符号第一类Stirling数 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D56/sign=e86d359d09b30f24319aec05ca9543e7/d6ca7bcb0a46f21f2dedc0aff0246b600d33ae75.jpg 和带符号第一类Stirling数 http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D54/sign=dd0b1acc3cf33a879a6d001ec75ccdb3/241f95cad1c8a786c125d3f26109c93d70cf503a.jpg 。有无符号Stirling数分别表现为其升阶函数和降阶函数的各项系数[类似于*[二项式系数](http://baike.baidu.com/view/1923263.htm" \t "_blank)[3]*]，形式如下：

http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D343/sign=cede7d736a81800a6ae58f0a823433d6/d31b0ef41bd5ad6ec242e01687cb39dbb7fd3c96.jpg

http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D346/sign=1d8330073fdbb6fd215be3223f25aba6/cefc1e178a82b90106c947cf758da9773812efe2.jpg

对于有无符号Stirling数之间的关系有 http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D186/sign=9a93bc381dd5ad6eaef960e2b7ca39a3/b64543a98226cffc569f384ebf014a90f703ea91.jpg 。组合数学中的第一类Stirling数一般指无符号的第一类Stirling数。意思是n个不同元素构成m个圆排列的方案数。

递推式

无符号第一类Stirling数的递推式可以从其定义来推导：

考虑其定义如果要将n+1元素构成m个圆排列，考虑第n+1个元素：

（1）如果n个元素构成了m-1个圆排列，那么第n+1个元素独自构成一个圆排列。方案数 http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D81/sign=ff466144d23f8794d7ff452fd31b7afd/562c11dfa9ec8a130e24d51cf103918fa0ecc014.jpg 。

（2）如果n个元素构成了m个圆排列，将第n+1个元素插入到任意元素的左边。方案数http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D75/sign=a2a4676e0af431adb8d2413c4a36d891/c2cec3fdfc039245c69b63f38194a4c27d1e251b.jpg。综合两种情况得：http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D272/sign=a564a9fcef24b899da3c7e3f5c071d59/6a63f6246b600c330a185d341c4c510fd8f9a1ed.jpg

而有符号的第一类Stirling数可以从其表示的降阶函数归纳证明（简单写如下）：

http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D538/sign=0fc2ef19ab6eddc422e7b4f801dab6a2/aec379310a55b319eaf2438945a98226cefc17c6.jpg

依次把 http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D19/sign=02c128ef91dda144de0968bbb3b7de9a/c2cec3fdfc039245d89e6df38194a4c27d1e2526.jpg 在左右两边的系数提取出来得：

http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D264/sign=9f69732613ce36d3a60484360ef13a24/37d12f2eb9389b508b1e6fae8335e5dde6116e6d.jpg

“pascal”三角形

二项式系数 http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D53/sign=1c53743018178a82ca3c7fa3f703a870/3bf33a87e950352a5829abf45543fbf2b3118b86.jpg 可以构成一个杨辉三角（pascal三角形）。同样第一类Stirling数同样也可以构成一个三角，可以由此分析其性质。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 无符号Stirling数 | 有符号Stirling数 |
| n=0 | 1 | 1 |
| n=1 | 0 1 | 0 1 |
| n=2 | 0 1 1 | 0 -1 1 |
| n=3 | 0 2 3 1 | 0 2 -3 1 |
| n=4 | 0 6 11 6 1 | 0 -6 11 -6 1 |
| n=5 | 0 24 50 35 10 1 | 0 24 -50 35 -10 1 |
| n=6 | 0 120 274 225 85 15 1 | 0 -120 274 -225 85 -15 1 |
| n=7 | 0 720 1764 1624 735 175 21 1 | 0 720 -1764 1624 -735 175 -21 1 |

性质

无符号Stirling数有如下性质：

① http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D77/sign=09ef18017d899e517c8e381343a74595/91529822720e0cf3ebdf85070c46f21fbe09aa26.jpg

② http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D79/sign=d5fac2a153fbb2fb302b5a1b4e4a949b/9c16fdfaaf51f3de389b739892eef01f3a297925.jpg

③ http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D78/sign=29f163dafbfaaf5180e383b78e543aee/43a7d933c895d1434aa12fdf75f082025baf0773.jpg

④ http://c.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D120/sign=584a2fda0f24ab18e416e53505fbe69a/8718367adab44aed245f7418b51c8701a18bfb3d.jpg

⑤ http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D142/sign=d094ab2b30d12f2eca05aa647dc3d5ff/bd3eb13533fa828b0d66571ffb1f4134960a5a81.jpg

⑥ http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D168/sign=42ec8ce6d20735fa95f04abfa6530f9f/a8773912b31bb05111ed9dd5307adab44bede006.jpg

⑦ http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D248/sign=5ce633be8dd4b31cf43c93bfbfd7276f/b3fb43166d224f4a36af5bee0ff790529822d11c.jpg

⑧ http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D108/sign=7cfe724c860a19d8cf0380050bfb82c9/a5c27d1ed21b0ef4ab94b3a3dbc451da80cb3eca.jpg

证明可令升阶函数中的x=1，比较两边系数。

有符号stirling性质类似：

① http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D186/sign=9a93bc381dd5ad6eaef960e2b7ca39a3/b64543a98226cffc569f384ebf014a90f703ea91.jpg

⑧ http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D108/sign=a7b927dfb51bb0518b24b7280e78da77/a1ec08fa513d2697572023a053fbb2fb4216d85f.jpg

，注意 http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D41/sign=044e7d1df103918fd3d13ccb503d9c66/e61190ef76c6a7efa97282dbfbfaaf51f2de66f2.jpg 。证明可令降阶函数中的x=1，比较两边系数。

应用举例

第一类Stirling除了表示可以表示升阶函数和降阶函数的系数之外还可以应用到一些实际问题上。例如很经典的解锁仓库问题。

问题说明如下：有n个仓库，每个仓库有两把钥匙，共2n把钥匙。同时又有n位官员。问如何放置钥匙使得所有官员都能够打开所有仓库？（只考虑钥匙怎么放到仓库中，而不考虑官员拿哪把钥匙。）那如果官员分成m个不同的部，部中的官员数量和管理的仓库数量一致。那么有多少方案使得，同部的所有官员可以打开所有本部管理的仓库，而无法打开其他部管理的仓库？（同样只考虑钥匙的放置。）

答：第一问很经典，就是打开将钥匙放入仓库构成一个环：1号仓库放2号钥匙，2号仓库放3号钥匙……n号仓库放1号钥匙。这种情况相当于钥匙和仓库编号构成一个圆排列方案数是 http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D49/sign=06ff56cf5cafa40f38c6cfd4aa645990/1b4c510fd9f9d72a1556f1e0d22a2834349bbb19.jpg 种。而第一问就对应的n个元素分成m个圆排列，方案数就是第一类无符号Stirling数 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D56/sign=e86d359d09b30f24319aec05ca9543e7/d6ca7bcb0a46f21f2dedc0aff0246b600d33ae75.jpg 。如要要考虑官员的情况，前面的系数再乘上 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D13/sign=9da87c1efb1f4134e437017d241f1637/b21c8701a18b87d61cc94ae2010828381e30fd40.jpg 即可。

母函数

固定m将n看作是项数，母函数表示如下：[4]

http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D202/sign=b59685df96ef76c6d4d2fc2baf17fdf6/960a304e251f95ca8183c548cf177f3e660952dd.jpg

该式子的通项公式求解略微繁琐，这边仅给出其生成函数。更具体的参考维基中的通项定义。[4]

第二类Stirling数[编辑](javascript:;)

定义

第二类Stirling数实际上是集合的一个拆分，表示将n个不同的元素拆分成m个集合的方案数，记为 http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D51/sign=bd7e0b6dcb11728b342d8c23c9fc647a/1c950a7b02087bf466afd315f4d3572c10dfcf8f.jpg 或者 http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D44/sign=45ffc73c84025aafd7327fcff9ed5ae9/eaf81a4c510fd9f943c6d495232dd42a2934a47d.jpg 。和第一类Stirling数不同的是，集合内是不考虑次序的，而圆排列是有序的。常常用于解决组合数学中几类放球模型。描述为：将n个不同的球放入m个无差别的盒子中，要求盒子非空，有几种方案？

递推式

第二类Stirling数的推导和第一类Stirling数类似，可以从定义出发考虑第n+1个元素的情况，假设要把n+1个元素分成m和集合则分析如下：

（1）如果n个元素构成了m-1个集合，那么第n+1个元素单独构成一个集合。方案数 http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D73/sign=80d804f28194a4c20e23e5280ff4794d/a8ec8a13632762d0a1534142a6ec08fa503dc6da.jpg 。

（2）如果n个元素已经构成了m个集合，将第n+1个元素插入到任意一个集合。方案数http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D72/sign=5fdc5cdeb67eca8016053be59323c3c8/71cf3bc79f3df8dc3ccd756ccb11728b4610285f.jpg。综合两种情况得：http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D261/sign=9ff76854af014c081d3b2fa33b79025b/0d338744ebf81a4c27dc0934d12a6059242da665.jpg

“pascal”三角形

|  |  |
| --- | --- |
| n=0 | 1 |
| n=1 | 0 1 |
| n=2 | 0 1 1 |
| n=3 | 0 1 3 1 |
| n=4 | 0 1 7 6 1 |
| n=5 | 0 1 15 25 10 1 |
| n=6 | 0 1 31 90 65 15 1 |
| n=7 | 0 1 63 301 350 140 21 1 |
| n=8 | 0 1 127 966 1701 1050 266 28 1 |
| n=9 | 0 1 255 3025 7770 6951 2646 462 36 1 |

性质

① http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D81/sign=b8b1b6fbaaaf2eddd0f144e88c10d336/d788d43f8794a4c2b3a62fd608f41bd5ac6e3942.jpg

② http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D72/sign=5329baddbf12c8fcb0f3f4cffd03611c/0b7b02087bf40ad1437b0f1e512c11dfa8ecceb4.jpg

③ http://c.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D72/sign=7cebeef55543fbf2c12ca421b17ec736/c8177f3e6709c93dca78c50a993df8dcd0005441.jpg

④ http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D119/sign=30fdb20fd362853596e0d620a9ee76f2/810a19d8bc3eb13598577f46a01ea8d3fc1f44bf.jpg

⑤ http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D137/sign=28a90ed23c292df593c3a8168b305ce2/6609c93d70cf3bc7237a0611d700baa1cc112ad1.jpg

⑥ http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D220/sign=7a4d0dd2b8096b63851959523c328733/30adcbef76094b36dca4d110a5cc7cd98d109d1d.jpg

⑦ http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D192/sign=2a99e613e11190ef05fb96d6fc1a9df7/960a304e251f95ca7e64a448cf177f3e660952be.jpg

⑧ http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D321/sign=33c5c733fa039245a5b5e70db695a4a8/f636afc379310a554312ef0ab14543a98226101d.jpg

⑨ http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D105/sign=e1737f4798510fb37c197397ec32c893/dbb44aed2e738bd4b4a283cfa78b87d6267ff948.jpg ， http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D17/sign=7c422a13a5cc7cd9fe2d30de3b01d1f3/dcc451da81cb39db661056a8d6160924aa18307f.jpg 是[贝尔数](http://baike.baidu.com/view/4084060.htm" \t "_blank)[5]  。

应用举例

第二类Stirling数主要是用于解决组合数学中的几类放球模型。主要是针对于球之前有区别的放球模型：

（1）n个不同的球，放入m个无区别的盒子，不允许盒子为空。

方案数： http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D51/sign=bd7e0b6dcb11728b342d8c23c9fc647a/1c950a7b02087bf466afd315f4d3572c10dfcf8f.jpg 。这个跟第二类Stirling数的定义一致。

（2）n个不同的球，放入m个有区别的盒子，不允许盒子为空。

方案数： http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D79/sign=c15022e3d22a283447a634025ab5f78d/810a19d8bc3eb13592f38545a01ea8d3fd1f4413.jpg 。因盒子有区别，乘上盒子的排列即可。

（3）n个不同的球，放入m个无区别的盒子，允许盒子为空。方案数： http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D69/sign=367e09ea44a7d933bba8e77aaf4b41d2/7acb0a46f21fbe0952aef0ea6d600c338644ad5f.jpg 。枚举非空盒的数目便可。

（4）n个不同的球，放入m个有区别的盒子，允许盒子为空。

①方案数： http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D129/sign=f20dacd6912bd40746c7d7ff42889e9c/f703738da97739124832b79ffe198618367ae23c.jpg 。同样可以枚举非空盒的数目，注意到盒子有区别，乘上一个排列系数。

②既然允许盒子为空，且盒子间有区别，那么对于每个球有m中选择，每个球相互独立。有方案数： http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D20/sign=5591dd7a4ced2e73f8e9812c8501bae4/ac345982b2b7d0a26f1f3663cdef76094a369a7d.jpg 。http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D170/sign=53c1c5df748b4710ca2ff9cbf3cfc3b2/aa64034f78f0f73646a371ff0c55b319eac413ea.jpg

上述式子可以应用于第二类Stirling数通项的求解。

通项公式：

http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D269/sign=bb11567ccd1349547a1eef626f4c92dd/d000baa1cd11728ba2de62dfcefcc3cec2fd2c58.jpg

这个通项公式有多种方法推导。常用的有容斥原理，母函数和等式求解等。

**一、容斥原理**。

容斥原理最为通俗易懂。

①为了区分集合，给集合上个标号顺序，最后答案再除 http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D17/sign=dfe7dd827ef0f736dcfe48060b555306/023b5bb5c9ea15ce42500bf4b0003af33b87b295.jpg 即可。

②既然盒子有区别，那么先不考虑空盒，对于每个元素有m种选择，方法数是： http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D20/sign=bff6726228dda3cc0fe4bf2000e9d23f/1ad5ad6eddc451da750be716b0fd5266d116324a.jpg 。显然包含了空盒的情况，且空盒数量是大于等于0的。为了方便说明，这边设存在空盒数是h的情况是 http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D33/sign=2c5094c30af3d7ca08f63975f31fe972/5fdf8db1cb134954bd513b99504e9258d0094a84.jpg 种。那么便有 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D130/sign=ecaa55f59d504fc2a65fb406d5dce7f0/a9d3fd1f4134970af3cac9d293cad1c8a6865d96.jpg ，以及 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D97/sign=a1aab6c2dff9d72a13641c1ad62afbea/d009b3de9c82d15877598b4c860a19d8bd3e4270.jpg 。

③自然想到计算空盒数大于等于1的情况就能求解。那么先选定一个空盒，剩余的再随便放置，方案数是： http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D119/sign=79189a2152e736d15c138809a2514ffc/d009b3de9c82d1580da98d4c860a19d8bc3e4220.jpg 。那么有h的空盒的情况被计算了几次？因为空盒必须要有一个出现在被选定的位置，那么重复数量是： http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D47/sign=651fd93e3c87e9504617f26b1138cca1/d0c8a786c9177f3eb4162af076cf3bc79f3d5629.jpg 。

④对于更一般情况，计算空盒数不小于k的情况有 http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D116/sign=89764d0f7b1ed21b7dc92ae49b6cddae/0b55b319ebc4b7454d4b6bebc9fc1e178b82156b.jpg ，而产生h空盒的重复次数是 http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D47/sign=e6e6732270c6a7efbd26a921fffa3efa/0e2442a7d933c895d0b44e86d71373f083020000.jpg 。那么就有 http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D250/sign=7d689fc44d36acaf5de091f94cd88d03/dc54564e9258d1090559754fd758ccbf6d814d91.jpg 。

⑤要消除掉这种组合数为系数的项要利用到[容斥原理](http://baike.baidu.com/view/573741.htm)。

http://e.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D222/sign=fd364486d71373f0f13f689d960e4b8b/060828381f30e92494ec40cc4a086e061c95f787.jpg 。那么就有：http://c.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D364/sign=2dc0e4e944a7d933bba8e275994ad194/2f738bd4b31c870183f86c1b217f9e2f0608ff85.jpg

交换一些累加符号顺序得：右边=

http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D417/sign=060559d5912bd40746c7d2fc4c889e9c/4b90f603738da977363341d6b651f8198618e32b.jpg

解得：

http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D269/sign=bb11567ccd1349547a1eef626f4c92dd/d000baa1cd11728ba2de62dfcefcc3cec2fd2c58.jpg

**三、利用等式求解**

这是应用举例中的一个等式：http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D170/sign=53c1c5df748b4710ca2ff9cbf3cfc3b2/aa64034f78f0f73646a371ff0c55b319eac413ea.jpg

显然看到，要消除系数，尝试不同的m值有：

http://b.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D403/sign=6d50888aedf81a4c2232edc9e42b6029/caef76094b36acaf4fbeac027ad98d1000e99cf5.jpg发现排列数发生变化，为了抵消其变化等式两边同时乘上 http://d.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D52/sign=28f2a4418a5494ee83220f1b2cf536a9/72f082025aafa40f90d7eb23ad64034f78f0193e.jpg 得：

http://f.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D571/sign=eebb462930d12f2eca05ae677ec3d5ff/6d81800a19d8bc3e24622134848ba61ea9d345e1.jpg

要消去组合数系数 http://a.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D77/sign=e707abf69d504fc2a65fb202e4dd25af/d1160924ab18972b1c2e2734e0cd7b899e510a33.jpg 利用一正一负累加：

http://h.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D477/sign=3da81f3dd1ca7bcb797bc62889086b3f/9213b07eca806538437182ed91dda144ac3482b0.jpg

交换求和顺序有：

右边

http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D563/sign=542e2e49ef50352ab561250e6041fb1a/4ec2d5628535e5dd89cc842170c6a7efcf1b626f.jpg

同样可以求得通项公式：

http://g.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D270/sign=f992ba0d7f310a55c024d9f387444387/f3d3572c11dfa9ec84b776e964d0f703908fc1b6.jpg

两类Stirling数之间的关系[编辑](javascript:;)

两类Stirling数之间的递推式和实际含义很类似，事实上他们之间存在一个互为转置的转化关系：

http://c.hiphotos.baidu.com/baike/s%3D250/sign=4f2d9dfbe3dde711e3d244f397eecef4/960a304e251f95ca4b87bf48cf177f3e660952d9.jpg

类似于矩阵的对称转置关系。