近世代数 (抽象代数) 笔记

管清文

2020 年 3 月 3 日

目录

1 基本概念

1.1 代数运算

注意 1 近世代数 (或抽象代数) 的主要内容就是研究所谓**代数系统**，即带有运算的集合。

定义 2 (映射)

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n &\to D \\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) &\mapsto d = \phi(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \overline{(a_1, a_2, \cdots, a_n)} \end{aligned}$$

注意 3 判断一个法则 ϕ 是映射的充要条件: (i) 都有象 (ii) 象唯一.

定义 4 (代数运算)

$$\begin{aligned} A \times B &\to D \\ (a, b) &\mapsto d = \phi(a, b) = \circ(a, b) = a \circ b \end{aligned}$$

注意 5 $A = B$ 时, 对于代数运算 $A \times A \to D$, $a \circ b$ 和 $b \circ a$ 都有意义，但不一定相等.

定义 6 (A 的代数运算, 二元运算) 假如 $\circ$ 是一个 $A \times A \to A$ 的代数运算 (即 $A = B = D$), 我们说集合 A 对于代数运算 $\circ$ 来说是闭的, 也说, $\circ$ 是 A **的代数运算**或**二元运算**.

定义 7 (结合率) 我们说，一个集合 A 的代数运算 $\circ$ 适合结合律，假如对于 A 的任何三个元 a, b, c 来说都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

定义 8 假如对于 A 的 n $(n \geq 2)$ 个固定的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 来说，所有的加括号方式 $\pi(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n)$ 都相等，我们就把这些步骤可以得到的唯一的结果，用 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ 来表示.

定理 9 若 A 的代数运算 $\circ$ 满足结合律，则对于 A 的任意 $n(n \geq 2)$ 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 来说，对于任意的加括号的方法 π, $\pi(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n)$ 都相等，$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ 也就总有意义.

定义 10 A 上的二元运算 $\circ$, $a\circ b=b\circ a$(a 与 b 可交换) $\forall a,b\in A$ 成立，则称 $\circ$ 满足交换律.

定理 11 若 A 上的二元运算 $\circ$ 满足结合律与交换律，则 $a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$ 可以任意交换顺序.

定义 12 $\odot,\oplus$ 都是 A 上的二元运算,

- 若 $b\odot(a_1\oplus a_2)=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2),\forall b,a_1,a_2$, 则称 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第一分配率.
- 若 $(a_1\oplus a_2)\odot b=(a_1\odot b)\oplus(a_2\odot b),\forall b,a_1,a_2$, 则称 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第二分配率.

定理 13 若 A 上的二元运算 $\oplus$ 满足结合律, $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第一分配率，则

$$b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)\oplus\cdots\oplus(b\odot a_n)$$

1.2 同态

定义 14 (满射) 映射 $\phi:A\to\bar{A}$ 被称为**满射**, 如果 $\forall\hat{a}\in\bar{A},\exists a\in A$ s.t. $\bar{a}=\hat{a}$. (ϕ^{-1} 都有象)

定义 15 (单射) 映射 $\phi:A\to\bar{A}$ 被称为**单射**, 如果 $\forall a,b\in A,a\neq b\Rightarrow\bar{a}\neq\bar{b}$. ($\phi^{-1}$ 象唯一)

定义 16 (一一映射) 既是满射又是单射.

注意 17 判断一个法则 ϕ 是一一映射的充要条件: (i) 都有象 (ii) 象唯一 (iii) 满的 (iv) 单的.

定义 18 (变换) 从 A 到 A 的映射 $\phi:A\to A$ 叫 A 上的变换.

- 如果 ϕ 是满的, 则称为**满变换**.
- 如果 ϕ 是单的, 则称为**单变换**.
- 如果 ϕ 是一一的, 则称为**一一变换**.

定义 19 (同态映射) 对于 $\phi:A\to\bar{A}$, A 上有二元运算 $\circ$, $\bar{A}$ 上有二元运算 $\bar{\circ}$. 如果 $\overline{a\circ b}=\bar{a}\bar{\circ}\bar{b}$, 则称 ϕ 是 A 到 $\bar{A}$ 的同态映射.

注意 20 (同态映射判别) 判断一个法则 ϕ 是同态映射的充要条件:

$$\text{(i) 是映射 (都有象、象唯一) (ii) } \overline{a\circ b}=\bar{a}\bar{\circ}\bar{b}$$

定义 21 (同态满射、同态) 如果 A 到 $\bar{A}$ $\boxed{\text{存在}}$ 一个同态映射 ϕ, 且它是满的, 则称 A 与 $\bar{A}$(关于 $\circ$ 与 $\bar{\circ}$ 来说) 同态. 称这个映射是一个**同态满射**.

注意 22 (同态满射判别) (i) 是映射 (都有象、象唯一) (ii) 同态 (iii) 满

定义 23 (同构映射、同构) 如果 A 到 $\bar{A}$ $\boxed{\text{存在}}$ 一个同态映射 ϕ, 且它是既是满的又是单的 (一一的), 则称 A 与 $\bar{A}$(关于 $\circ$ 与 $\bar{\circ}$) **同构**, 记为 $A\cong\bar{A}$. 称这个映射是一个 (关于 $\circ$ 与 $\bar{\circ}$ 的) **同构映射** (简称同构).

注意 24 (同构映射判别) (i) 是映射 (都有象、象唯一) (ii) 同态 (iii) 满 (iv) 单

定理 25 假定对于代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\circ}$ 来说, A 与 $\bar{A}$ 同态, 那么 (i) 若 $\circ$ 满足结合律, $\bar{\circ}$ 也满足结合律; (ii) 若 $\circ$ 满足交换律, $\bar{\circ}$ 也满足交换律.

定理 26 $\odot$ 和 $\oplus$ 是 A 的两个代数运算, $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 是 $\bar{A}$ 的两个代数运算, 有 ϕ 既是 A 与 $\bar{A}$ 的关于 $\odot$ 和 $\bar{\odot}$ 的同态满射，ϕ 也是 A 与 $\bar{A}$ 的关于 $\oplus$ 和 $\bar{\oplus}$ 的同态满射，则 (i) 若 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第一分配率, 则 $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 也满足第一分配率. (ii) 若 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第二分配率, 则 $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 也满足第二分配率.

注意 27 总结下来, 如果 A 与 $\bar{A}$ 同态，则若前者有什么算律 (结合、交换、分配)，后者就也有什么算律 (结合、交换、分配).

定义 28 (自同构) 对于 $\circ$ 和 $\circ$ 来说的一个 A 与 A 之间的 $\boxed{\text{同构映射}}$ 叫做一个对于 $\circ$ 来说的 A 的**自同构**.

定义 29 (关系 (Relation)) $R: A \times A \to D = \{\text{对}, \text{错}\}$, 若 $R(a,b) = \text{对}$, 称 (a,b) 满足关系 R, 记为 aRb.

定义 30 (等价关系) 如果 $\sim$ 是 A 的元素间的关系，满足

1. 自反性, $\forall a \in A, a \sim a$.
2. 对称性, $\forall a, b \in A$, 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$.
3. 传递性, $\forall a, b, c \in A$, 若 $a \sim b$, $b \sim c$, 则 $a \sim c$.

则称呼 $\sim$ 为等价关系.

2 群

3 环

4 域