高等代数笔记

管清文

2020 年 3 月 19 日

目录

性质 (Property) 结果值得一记, 但是没有定理深刻.

注意 (Remark) 涉及到一些结论，更像是非正式的定理.

说明 (Note) 就是注解.

1 线性方程组解法

说明 1 线性代数的主线是: 研究线性空间和线性映射.

命题 2 n 阶上三角形行列式的值，等于它的主对角线上的 n 个元素的乘积.

性质 3 $\det A = \det A'$

性质 4 行列式一行的公因子可以提出去, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (k \in K)$$

性质 5

$$\begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 + c_1 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 两行互换, 行列式反号.

$$\begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array}$$

性质 7 两行成比例, 行列式值为 0.

$$\begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 8 把一行的倍数加到另一行上，行列式值不变.

$$
\begin{array}{c}
(\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k)
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1}+\ell a_{i1} & \cdots & a_{kn}+\ell a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{c}
(\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k)
\end{array}
$$

命题 9

$$
\begin{vmatrix}
k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\
\lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k
\end{vmatrix}
= [k+(n-1)\lambda]\,(k-\lambda)^{n-1}
$$

定义 10 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 划去 A 的第 i 行第 j 列剩下元素按原来顺序排列构成余子式 M_{ij}, 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

定理 11 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 i 行元素与自己的代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

定理 12 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 j 列元素与自己的代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

定理 13 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, $i\neq k$ 时 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0$.

定理 14 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, $j\neq \ell$ 时 $a_{1j}A_{1\ell}+a_{2j}A_{2\ell}+\cdots+a_{nj}A_{n\ell}=0$.

命题 15 n 阶范德蒙行列式 $(n\geq 2)$

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n
\end{vmatrix}
=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)
$$

定理 16 数域 K 上的 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的充要条件是他的系数行列式不等于 0.

推论 17 数域 K 上的 n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解的充要条件是它的系数行列式不等于 0; 它有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于 0.

说明 18 克莱姆法则等到第四章再给.

说明 19 数学上凡是重要的概念, 虽然可能是因为研究某一类内容提出的, 但是它一经提出来就不仅仅是解决这个问题了, 它可能解决高等代数里很多其他特定的问题, 而且还能解决几何学、分析学的好多问题.

定义 20 n 阶行列式 A 中任意取定 k 行 k 列 $(1\leq k<n)$, 位于这些行和列的交叉处的 k^2 个元素按原来的排发组成的 k 阶行列式，称为 $|A|$ 的一个 k **阶子式**. 取定 $|A|$ 的第 $i_1,i_2,\cdots i_k$ 行 $(i_1<i_2<\cdots<i_k)$, 第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列 $(j_1<j_2<\cdots<j_k)$, 所得到的 k 阶子式记作

$$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ j_1,j_2,\cdots,j_k \end{pmatrix} \tag{1}$$

划去这个 k 阶子式所在的行和列, 剩下的预算按照原来的排法组成的 $(n-k)$ 阶行列式, 称为这个子式 (1) 的**余子式**, 令

$$\{i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$$

$$\{j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\} - \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$$

其中 $i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-k}, j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_{n-k}$, 则子式 (1) 的余子式为

$$A\begin{pmatrix} i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

它的前面乘以

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$$

则称为这个子式 (1) 的**代数余子式**.

定理 21 (Laplace 定理) 在 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ 中, 取定第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行 $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, 则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$, 即

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} A\begin{pmatrix} i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

推论 22

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & d_{r1} & \cdots & d_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} \end{vmatrix}$$

也记成

$$\begin{vmatrix} A_{k\times k} & 0 \\ C & D_{r\times r} \end{vmatrix} = |A| \cdot |D|$$