

近世代数 (抽象代数) 笔记

管清文

2020 年 3 月 21 日

目录

1 Highlights	3
2 基本概念	3
2.1 代数运算	3
2.2 运算律	3
2.3 同态	4
2.4 等价关系与集合分类	5
3 群论	5
3.1 群的定义和性质	5
3.2 群的同态	6
3.3 变换群	6
3.4 置换群	6
3.5 循环群	7
3.6 子群	7
3.7 子群的陪集	8
3.8 不变子群、商群	8
3.9 同态与不变子群	9
4 环与域	9
4.1 加群、环的定义	9
4.2 交换律、单位元、零因子、整环	10
4.3 除环、域	11
4.4 无零因子环的特征	12
4.5 子环、环的同态	13
4.6 多项式环	14
4.7 理想	15
4.8 剩余类环、同态与理想	15
4.9 最大理想	16
4.10 商域	16
5 整环里的因子分解	16
5.1 素元、唯一分解	16
5.2 唯一分解环	17
5.3 主理想环	18
5.4 欧氏环	18

目录	2
5.5 多项式环的因式分解	18
5.6 因式分解与多项式的根	19
6 扩域	20
6.1 单扩域	20
6.2 代数扩域	21

性质 (Property) 结果值得一记, 但是没有定理深刻.

注意 (Remark) 涉及到一些结论, 更像是非正式的定理.

说明 (Note) 就是注解.

说明

- 关于一一映射的说法都被改成了双射 (Bijection), 因为在英文资料中, one-to-one 表示的是单射 (Injection), 容易引起歧义.
- 所有的当且仅当的命题 (定理、...) 都被写成以下形式:

命题 5 假定 blablabla, 那么

$$p \Leftrightarrow q$$

1 Highlights

2 基本概念

2.1 代数运算

说明 1 近世代数 (或抽象代数) 的主要内容就是研究所谓**代数系统**, 即带有运算的集合。

定义 2 (映射)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow D \\ a &\mapsto d = \phi(a) = \bar{a} \end{aligned}$$

定义 3 (代数运算)

$$\begin{aligned} A \times B &\rightarrow D \\ (a, b) &\mapsto d = \phi(a, b) = \circ(a, b) = a \circ b \end{aligned}$$

定义 4 (A 的代数运算, 二元运算) 假如 \circ 是一个 $A \times A \rightarrow A$ 的代数运算 (即 $A = B = D$), 我们说集合 A 对于代数运算 \circ 来说是闭的, 也说, \circ 是 A 的**代数运算**或**二元运算**.

说明 5 (A 的代数运算判别)

$$A \text{ 的代数运算} \begin{cases} \text{是映射} \begin{cases} \text{都有象} \\ \text{象唯一 } \forall a, a', b, b' \in A : a = a', b = b' \Rightarrow a \circ b = a' \circ b' \end{cases} \\ \text{封闭 } \forall a, b \in A : a \circ b \in A, \end{cases}$$

2.2 运算律

定义 6 (结合率) 我们说, 一个集合 A 的代数运算 \circ 满足结合律, 假如对于 A 的任何三个元素 a, b, c 来说都有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

定理 7 若 A 的代数运算 \circ 满足结合律, 则对于 A 的任意 $n (n \geq 2)$ 个元素 a_1, a_2, \dots, a_n 来说, 对于任意的加括号的方法 π , $\pi(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n)$ 都相等, 我们用 $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$ 来表示.

定义 8 (交换律) 如果 A 上的代数运算 \circ 满足 $\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a$, 则称 \circ 满足**交换律**. 对于 $a, b \in A$, 如果 $a \circ b = b \circ a$, 则称 a, b **可交换**.

定理 9 若 A 上的代数运算 \circ 满足结合律与交换律, 则 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ 可以任意交换顺序.

定义 10 (分配率) \odot 和 \oplus 都是 A 上的代数运算,

- (1) 若 $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c), \forall a, b, c$, 则称 \odot 和 \oplus 满足第一分配率.
- (2) 若 $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c), \forall a, b, c$, 则称 \odot 和 \oplus 满足第二分配率.

定理 11 若 A 上的二元运算 \oplus 满足结合律, \odot 和 \oplus 满足第一分配率, 则

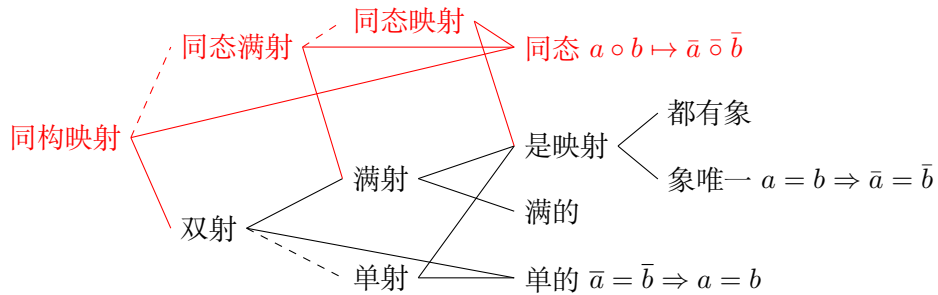
$$a \odot (b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n) = (a \odot b_1) \oplus (a \odot b_2) \oplus \cdots \oplus (a \odot b_n)$$

定理 12 若 A 上的二元运算 \oplus 满足结合律, \odot 和 \oplus 满足第二分配率, 则

$$(a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) \odot b = (a_1 \odot b) \oplus (a_2 \odot b) \oplus \cdots \oplus (a_n \odot b)$$

2.3 同态

说明 13 (映射判别)



定义 14 (变换) 从 A 到 A 的映射 $\tau: A \rightarrow A, a \mapsto \tau(a)$ 叫 A 变换, 我们也用 a^τ 表示 $\tau(a)$. 如果 τ 是满射 (单射、双射), 则称为**满变换** (**单变换**、**双射变换**).

定义 15 (同态映射) 对于 $\phi: A \rightarrow \bar{A}$, A 上有二元运算 \circ , \bar{A} 上有二元运算 $\bar{\circ}$. 称 ϕ 是 A 到 \bar{A} 的**同态映射**, 如果 $\forall a, b \in A, \bar{a} := \phi(a), \bar{b} := \phi(b)$ 有 $a \circ b \mapsto \bar{a} \bar{\circ} \bar{b}$.

定义 16 (同态满射、同态) 如果 A 到 \bar{A} 存在 一个同态映射 ϕ , 且它是满射, 则称 A 与 \bar{A} (关于 \circ 与 $\bar{\circ}$) **同态**. 称这个映射是一个**同态满射**.

定义 17 (同构映射、同构) 如果 A 到 \bar{A} 存在 一个同态映射 ϕ , 且它是双射, 则称 A 与 \bar{A} (关于 \circ 与 $\bar{\circ}$) **同构**, 记为 $A \cong \bar{A}$. 称这个映射是一个 (关于 \circ 与 $\bar{\circ}$ 的) **同构映射** (简称**同构**).

命题 18 同构关系是一个等价关系.

定理 19 假定对于代数运算 \circ 和 $\bar{\circ}$ 来说, A 与 \bar{A} 同态, 那么

- (1) 若 \circ 满足结合律, $\bar{\circ}$ 也满足结合律;
- (2) 若 \circ 满足交换律, $\bar{\circ}$ 也满足交换律.

定理 20 \odot 和 \oplus 是 A 的两个代数运算, $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 是 \bar{A} 的两个代数运算, 有 ϕ 既是 A 与 \bar{A} 的关于 \odot 和 $\bar{\odot}$ 的同态满射, ϕ 也是 A 与 \bar{A} 的关于 \oplus 和 $\bar{\oplus}$ 的同态满射, 则

- (1) 若 \odot 和 \oplus 满足第一分配率, 则 $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 也满足第一分配率.
- (2) 若 \odot 和 \oplus 满足第二分配率, 则 $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 也满足第二分配率.

2.4 等价关系与集合分类

定义 21 (关系[Relation]) $R: A \times A \rightarrow D = \{\text{对}, \text{错}\}$, 若 $R(a, b) = \text{对}$, 称 (a, b) 满足关系 R , 记为 $a R b$.

定义 22 (等价关系) 如果 \sim 是 A 的元素间的关系, 满足

- (1) 自反性, $\forall a \in A, a \sim a$.
- (2) 对称性, $\forall a, b \in A$, 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$.
- (3) 传递性, $\forall a, b, c \in A$, 若 $a \sim b, b \sim c$, 则 $a \sim c$.

则称 \sim 为等价关系.

定义 23 (集合分类、划分) 集合 A 分成若干子集, 满足 (1) 每个元素属于都某子集 (2) 每个元素只属于某子集. 这些类的全体叫做集合 A 的一个分类.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

定理 24 集合上的一个分类, 确定一个集合的元素之间的等价关系.

定理 25 集合上的一个等价关系, 确定一个集合的分类.

定义 26 (\mathbb{Z}_p [模 n 的剩余类]) $\{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$, $[i] = \{kn + i \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3 群论

3.1 群的定义和性质

注意 27 群是一个代数系统 (定义代数运算的集合), 它只有一个代数运算, 被称为乘法. 便利起见 (a, b) 的象写成 ab

定义 28 (群[Group]的第一定义) 在集合 $G \neq \emptyset$ 上规定一个叫做乘法的 代数运算 这个代数系统被称为群, 如果

- I 乘法封闭, $\forall a, b \in G, ab \in G$
- II 乘法结合, $\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$
- III $\forall a, b \in G, ax = b, ya = b$ 在 G 中都有解.

定理 29 (左单位元) 对于群 G 中至少有一个元 e , 叫做 G 的一个左单位元, 使得 $\forall a \in G$ 都有 $ea = a$.

定理 30 (左逆元) 对于群 G 中的任何一个元素 a , 在 G 中存在一个元 a^{-1} , 叫做 a 的左逆元, 能让 $a^{-1}a = e$.

定义 31 (群[Group]的第二定义) 在集合 $G \neq \emptyset$ 上规定乘法. 这个代数系统被称为群, 如果

- I 乘法封闭
- II 乘法结合
- IV 左单位元: $\exists e \in G$ 使 $ea = a$ 对 $\forall a \in G$ 都成立.
- V 左逆元: $\forall a \in G, \exists a^{-1}$ 使 $a^{-1}a = e$.

定义 32 (群的阶) 如果 $|G|$ 有限, 称其为有限群, 称他的阶是 G 的元素个数. 如果 G 中有无穷多个元素, 称其为无限群, 称他的阶无限.

定义 33 (交换群、Abel 群) 群中交换律不一定成立, 如果乘法满足交换律 ($\forall a, b \in G, ab = ba$), 则称之为交换群 (Abel 群).

定理 34 (单位元) 在一个群 G 里存在且只存在一个元 e , 使得 $ea = ae = a$ 对于 $\forall a \in G$ 成立. 这个元素被称为群 G 的单位元.

定理 35 (逆元) 对于群 G 的任意一个元素 a 来说, 有且只有一个元素 a^{-1} , 使 $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. 这个元素被称为 a 的**逆元**, 或者简称**逆**.

说明 36 证明 a^{-1} 是 a 的逆的方法: $a^{-1}a = e$ 或者 $aa^{-1} = e$ (不用都说明).

性质 37 (乘积的逆等于逆的乘积) $\forall a, b \in G, (ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$

定义 38 规定 $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n\uparrow}, a^0 = e, a^{-n} = (a^{-1})^n$

命题 39 $\forall n, m \in \mathbb{Z} : a^n a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{mn} \quad (\Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a)$

定义 40 (元素的阶) 在一个群 G 中, 使得 $a^n = e$ 的最小正整数, 叫做 a 的**阶**. 若这样的 n 不存在, 称 a 是无穷阶的, 或者叫 a 的阶是无穷.

定理 41 (III'[消去律]) 群的乘法满足: $ax = ax' \Rightarrow x = x', ya = y'a \Rightarrow y = y'$

推论 42 在群里, $ax = b$ 和 $ya = b$ 都有唯一解.

定理 43 (有限群的另一定义) 一个带有乘法的 有限集合 $G \neq \emptyset$, 若满足 I、II、III', 则 G 是一个**群**.

3.2 群的同态

定理 44 G 与 \bar{G} 关于他们的乘法同态, 则 G 是群 $\Rightarrow \bar{G}$ 也是群.

定理 45 假定 G 和 \bar{G} 是两个群, 在 G 到 \bar{G} 的一个同态满射之下, G 的单位元 e 的象是 \bar{G} 的单位元, G 的元 a 的逆元 a^{-1} 的象是 a 的象的逆元 $(\overline{a^{-1}} = \bar{a}^{-1})$.

定理 46 G 与 \bar{G} 关于他们的乘法同构, 则 G 是群 $\Leftrightarrow \bar{G}$ 是群.

3.3 变换群

定义 47 (变换的乘法) $\tau_1 \tau_2 : a \mapsto (a^{\tau_1})^{\tau_2}$

定理 48 (变换乘法结合) $(\tau_1 \tau_2) \tau_3 = \tau_1 (\tau_2 \tau_3)$

定理 49 G 是集合 A 的若干变换构成的集合, 如果 G 基于变换的乘法做成一个群, 则 G 中的变换一定是双射变换.

定义 50 (变换群) 如果一个集合 A 的若干 双射变换 对于变换的乘法能够做成一个群, 则称这个群为 A 的一个**变换群**.

定理 51 一个集合 A 上的所有双射变换做成一个变换群 G .

定理 52 任何一个群都与一个变换群同构.

定理 53 一个变换群的单位元一定是恒等变换.

3.4 置换群

定义 54 (置换) 有限集合 上的 双射变换 叫做**置换**, 一般用 π 表示.

定义 55 (置换群) 有限集合上的若干置换做成的群叫**置换群**.

定义 56 (对称群) 一个 n 元集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的所有置换 (有 $n!$ 个) 做成的群叫做 n 次**对称群**, 用 S_n 来表示.

定理 57

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1} & \cdots & j_n \\ j_1^{(1)} & \cdots & j_k^{(1)} & j_{k+1} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ \pi_2 &= \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1} & \cdots & j_n \\ j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1}^{(2)} & \cdots & j_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi_1 \pi_2 = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1} & \cdots & j_n \\ j_1^{(1)} & \cdots & j_k^{(1)} & j_{k+1}^{(2)} & \cdots & j_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

定义 58 (k -循环置换) 如果 S_n 中的置换满足 a_{i_1} 的象是 a_{i_2} , a_{i_2} 的象是 a_{i_3} , \cdots , $a_{i_{k-1}}$ 的象是 a_{i_k} , a_{i_k} 的象是 a_{i_1} , 其他元素, 如果还有的话, 象是不变的, 则称之为 k -循环置换. 用 $(i_1 i_2 i_3 \cdots i_{k-1} i_k)$ 或 $(i_2 i_3 \cdots i_{k-1} i_k i_1)$ 或 \cdots 或 $(i_k i_1 i_2 i_3 \cdots i_{k-1})$ 来表示.

命题 59 $(i_1 i_2 \cdots i_k)^{-1} = (i_k \cdots i_2 i_1)$.

命题 60 k -循环置换的阶是 k .

命题 61 任何一个置换都可以写成若干没有共同数字的循环置换的乘积.

命题 62 两个没有共同数字的循环置换可以交换.

命题 63 任何一个有限群都与一个置换群同构.

3.5 循环群

定义 64 (循环群) 若一个群 G 的每一个元都是 G 的某一固定元 a 的乘方, 我们就称 G 是一个循环群, a 是 G 的一个生成元, 并记 $G = \langle a \rangle$, 且说 G 是由元 a 生成的.

定义 65 (\mathbb{Z}_n [模 n 的剩余类加群]) G 包含所有模 n 的剩余类, $G = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$, 定义乘法 (叫做加法) $[a] + [b] = [a + b]$, 可以证明 $(G, +)$ 做成一个群, 叫做模 n 的剩余类加群.

定理 66 假定 G 是由 a 生成的循环群, 则 G 的构造可以完全由 a 的阶来决定:

- 如果 a 的阶无限, 则 $G \cong \mathbb{Z}$.
- 如果 a 的阶为 n , 则 $G \cong \mathbb{Z}_n$.

说明 67 于是 $|(a)| = n$, 其中 n 为 a 的阶.

命题 68 一个循环群一定是交换群.

命题 69 a 生成一个阶是 n 的循环群 G , 则 a^r 也生成 G , 如果 $\gcd(r, n) = 1$.

命题 70 G 是循环群, 且 G 与 \bar{G} 同态, 则 \bar{G} 也是循环群.

命题 71 G 是无限阶循环群, \bar{G} 是任何循环群, 则 G 与 \bar{G} 不同态.

3.6 子群

定义 72 (子群) 如果一个群 G 的一个子集 H 关于群 G 的乘法也能做成一个群, 则称 H 为 G 的一个子群.

定理 73 一个群 G 的一个非空子集 H 做成 G 的子群, 当且仅当

- (i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$
- (ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

推论 74 若 H 是 G 的子群, 则, H 的单位元就是 G 的单位元, a 在 H 中的逆就是 a 的 G 中的逆.

定理 75 一个群 G 的一个非空子集 H 做成 G 的子群, 当且仅当 (iii) $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

定理 76 一个群 G 的一个非空 有限 子集 H 做成 G 的子群, 当且仅当 (i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

说明 77 (验证非空集合是群的方法) (1) I, II, III (2) I、II、IV、V (3) 有限集: I, II, III' (4) 子群: (i), (ii) (5) 子群: (iii) (6) 有限子群: (i)

定义 78 (生成子群) 对于群 G 的非空子集 S , 包含 S 的最小子群, 被称为由 S 生成的子群, 记为 (S) .

定理 79 $S = \{a\}$ 时, $(S) = (a)$.

命题 80 循环群的子群也是循环群.

命题 81 H 是群 G 的一个非空子集, 且 H 的每个元素的阶都有限, 则 H 做成子群的充要条件是 (i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

3.7 子群的陪集

定义 82 群 G , 子群 H , 规定 G 上的关系 $\sim: a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

定理 83 上面规定的关系 \sim 是等价关系.

定义 84 (右陪集) 由上述等价关系确定集合的分类叫做 H 的右陪集.

定理 85 包含元 a 的右陪集 $= Ha = \{ha \mid h \in H\}$

定义 86 群 G , 子群 H , 规定 G 上的关系 $\sim': a \sim' b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$. 可以证明 \sim' 是等价关系.

定义 87 (左陪集) 由上述等价关系 $\sim': a \sim' b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$, 确定集合的分类叫做 H 的左陪集, 包含元 a 的左陪集可以用 $aH = \{ah \mid h \in H\}$ 表示.

定理 88 一个子群的右陪集与左陪集个数相等: 个数或者都是无穷大, 或者都有限且相等.

定义 89 (指数) 一个群 G 的一个子群 H 的右陪集 (或左陪集) 的个数叫做 H 在 G 里的指数.

定理 90 右陪集所含元素的个数等于子群 H 所含元素的个数.

定理 91 H 是一个有限群 G 的子群, 那么 H 的阶 n 和他在 G 中的指数 j 都能整除 G 的阶 N , 并且 $N = nj$

定理 92 (元素的阶整除群的阶) 一个有限群 G 的任何一个元 a 的阶能够整除 G 的阶 $|G|$.

命题 93 阶是素数的群一定是循环群.

命题 94 阶是 p^m 的群 (p 是素数) 一定包含一个阶是 p 的子群.

命题 95 若我们把同构的群看做一样的, 一共只存在两个阶是 4 的群, 它们都是交换群.

3.8 不变子群、商群

定义 96 (不变子群) 群 G 的子群 N 叫做 G 的不变子群, 如果 $\forall a \in G$, 有 $Na = aN$. 一个不变子群 N 的一个左 (或右) 陪集叫做 N 的一个陪集.

定义 97 $S_1, S_2 \subseteq$ 群 G , 规定子集的乘法 $S_1 S_2 = \{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$. 显然这个乘法满足结合律.

定理 98 已知一个群 G 有一个子群 N , N 是不变子群的充要条件是 $aNa^{-1} = N, \forall a \in G$.

定理 99 已知一个群 G 有一个子群 N , N 是不变子群的充要条件是 $a \in G, n \in N \Rightarrow ana^{-1} \in N$.

定理 100 如果 N 刚好包含 G 的所有具有以下性质的元 n ,

$$na = an, \forall a \in G$$

则 N 是 G 的不变子群. 我们称这个不变子群是 G 的**中心**.

定理 101 N 是群 G 的不变子群, 在其陪集 $\{aN, bN, cN, \dots\}$ 上定义的乘法 $(xN, yN) \mapsto (xy)N$, 则这个乘法是此陪集的二元运算, 且此陪集对于上面规定的乘法来说构成一个群.

定义 102 (商群) 一个群 G 的一个不变子群 N 的所有陪集关于陪集的乘法做成的群叫做 G 的**商群**, 用 G/N 表示.

定理 103 对于有限群, $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$.

命题 104 H 是 G 的子群, N 是 G 的不变子群, 则 HN 是 G 的子群.

3.9 同态与不变子群

定理 105 一个群 G 与它的商群 G/N 同态.

定义 106 (核) ϕ 是群 G 到群 \bar{G} 的一个同态满射, \bar{G} 的单位元 \bar{e} 在 ϕ 之下的所有原象做成的 G 的子集叫做 ϕ 的**核**.

定理 107 G 和 \bar{G} 是两个群, 且 G 与 \bar{G} 同态, 则这个同态满射的核 N 是 G 的一个不变子群, 且 $G/N \cong \bar{G}$.

注意 108 一个群只和“相当于”它的商群同态

定义 109 ϕ 是 $A \rightarrow \bar{A}$ 的满射, 取 $S \subseteq A$, 定义 S 的象是 S 中所有元素的象做成的集合. 取 $\bar{S} \subseteq \bar{A}$, 定义 \bar{S} 的原象是 \bar{S} 中所有元素的原象做成的集合.

定理 110 G 和 \bar{G} 是两个群, 且 G 与 \bar{G} 同态, 则在这个同态满射之下:

- (1) G 的一个子群 H 的象 \bar{H} 也是 \bar{G} 的一个子群.
- (2) G 的一个不变子群 N 的象 \bar{N} 也是 \bar{G} 的一个不变子群.
- (1') \bar{G} 的一个子群 \bar{H} 的原象 H 也是 G 的一个子群.
- (2') \bar{G} 的一个不变子群 \bar{N} 的原象 N 也是 G 的一个不变子群.

注意 111 这也体现了同态的性质, 前面有的后面也有!

命题 112 假定群 G 与群 \bar{G} 同态, \bar{N} 是 \bar{G} 的不变子群, N 是 \bar{N} 的逆象, 则 $G/N \sim \bar{G}/\bar{N}$.

命题 113 假定群 G 与 \bar{G} 是两个有限循环群, 他们的阶各是 m 和 n , 则 G 与 \bar{G} 同态 $\Leftrightarrow n \mid m$

命题 114 假定群 G 是一个循环群, N 是 G 的一个子群, 则 G/N 也是循环群.

4 环与域

4.1 加群、环的定义

定义 115 (加群) 一个交换群叫做一个**加群**, 如果我们把这个群的代数运算称为加法, 并且用符号 $+$ 表示.

定义 116 (Σ) n 个元的和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 用符号 $\sum_{i=1}^n a_i$ 来表示.

定义 117 n 个 a 的和 $\sum_{i=1}^n a$ 我们用 na 表示.

定义 118 (零元) 加群唯一的单位元用 \circ 来表示, 并且把它叫做零元.

定义 119 (负元) 元 a 的唯一的逆元我们用 $-a$ 来表示, 并且把它叫做 a 的负元. $a + (-b)$ 我们简写成 $a - b$.

定理 120 加群满足以下运算规则

- (1) $\circ + a = a + \circ = a$
- (2) $-a + a = a - a = \circ$
- (3) $-(-a) = a$
- (4: 移项) $a + c = b \Leftrightarrow c = b - a$
- (4) $-(a + b) = -a - b, -(a - b) = -a + b$
- (5) $ma + na = (m + n)a, m(na) = (mn)a, n(a + b) = na + nb, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$

说明 121 非空子集 S 做成子群的充要条件变成了

- (i) $a, b \in S \Rightarrow a + b \in S$ (ii) $a \in S \Rightarrow -a \in S$
- 或者 (iii) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$.

定理 122 环还满足以下运算规则

- (7) $(a - b)c = ac - bc, c(a - b) = ca - cb$
- (8) $\circ a = a\circ = \circ$
- (9) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
- (10) $(-a)(-b) = ab$
- (11) $a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n, (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)a = b_1a + b_2a + \cdots + b_na$
- (12) $\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n a_i b_j$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &= a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_n \\ &\quad + a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + a_mb_1 + a_mb_2 + \cdots + a_mb_n \end{aligned}$$

$$(13) (na)b = a(nb) = n(ab), n \in \mathbb{Z}^+$$

$$(14) \text{ 规定 } a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \uparrow}, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ 则 } a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

4.2 交换律、单位元、零因子、整环

定义 123 (交换环) 一个环 R 叫做交换环, 如果 $ab = ba, \forall a, b \in R$.

命题 124 在一个交换环中 $(ab)^n = a^n b^n$.

定义 125 (单位元) 对于环 R , 如果 $ea = ae = a, \forall a \in R$, 则称 e 是环 R 的单位元. 一般, 一个环未必有单位元.

命题 126 一个环如果有单位元, 则唯一. 用 1 来表示.

定义 127 (整数环) 整数关于普通加法和乘法构成的环.

定义 128 (逆元) 若 $ba = 1$, 则称 b 为 a 的左逆元. 若 $ba = ab = 1$, 则称 b 为 a 的逆元.

命题 129 如果 a 有逆元, 则唯一.

命题 130 如果 a 有逆元, 则规定 $a^{-m} = (a^{-1})^m, a^0 = 1$. 则 $a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

命题 131 (模 n 的剩余类环) $R = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$, 加法: $[a] + [b] = [a+b]$, 乘法: $[a][b] = [ab]$ 做成一个交换环, 被称为模 n 的剩余类环, 零元 $0 = [0]$, 单位元 $1 = [1]$.

命题 132 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或者 $b = 0$ 在环里不一定对.

定义 133 (零因子) 在一个环 R 中, 若 $a \neq 0, b \neq 0$ 但 $ab = 0$, 则称 a 是 R 的左零因子, b 是 R 的右零因子.

注意 134 左零因子不一定是右零因子. 但是如果有左零因子, 就一定有右零因子. 如果 R 是交换环, 则左零因子一定是右零因子.

定理 135 在一个没有零因子的环里, 两个消去律都成立.

$$1. a \neq 0, ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$2. a \neq 0, ba = ca \Rightarrow b = c$$

反过来, 在一个环里如果有一个消去律成立, 那么这个环没有零因子.

推论 136 在一个环 R 中如果有一个消去律成立, 那么另一个消去律也成立.

定义 137 (整环) 一个环 R 叫做一个整环, 如果

$$1. \text{乘法适合交换律: } ab = ba.$$

$$2. R \text{ 有单位元 } 1: 1a = a1 = a.$$

$$3. R \text{ 没有零因子: } ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } b = 0$$

说明 138 (! 整环的判别)



命题 139 整数环是一个整环.

命题 140 对于有单位元的环来说, 加法适合交换律是环定义里其他条件的结果.

4.3 除环、域

命题 141 对于元素个数 ≥ 2 的环, $1 \neq 0$, 且 0 没有逆元.

定义 142 (除环) 一个环 R 叫做一个除环, 如果

$$1. R \text{ 至少含有一个不等于零的元.}$$

$$2. R \text{ 有单位元.}$$

$$3. R \text{ 的任何一个非零元都有逆.}$$

定义 143 (域) 一个交换除环叫做一个域.

性质 144 除环没有零因子.

性质 145 除环 R 的所有非零元对于乘法来说做成一个群 R^* , 我们把 R^* 叫做除环 R 的乘群.

说明 146 对于一个环 R 来说, 从 R^* 是对于乘法做成一个群, 也能推出 R 是除环.

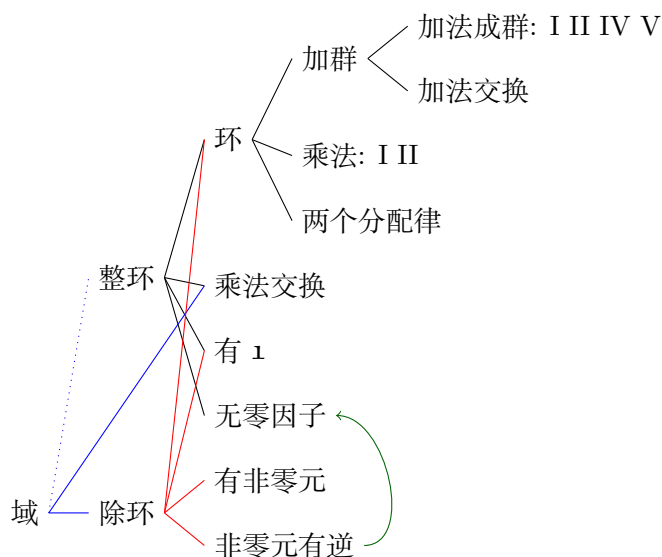
说明 147 在除环 R 中, 方程 $ax = b, ya = b (a \neq 0)$ 都有唯一解, 分别是 $a^{-1}b$ 和 ba^{-1} , 他们未必相等. 在一个域里 $a^{-1}b = ba^{-1}$, 用符号 $\frac{b}{a}$ 表示.

性质 148 域满足以下计算法则

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$

命题 149 存在不是域的除环, 例如四元数除环.

说明 150 ! 环、整环、域之间的关系:



命题 151 一个至少有两个元且没有零因子的有限环, 是一个除环.

4.4 无零因子环的特征

命题 152 对于模 p 的剩余类环 \mathbb{Z}_p , p 是素数 $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_p$ 做成一个域.

命题 153 在一个环 R 里, 对于加法的阶, 可能有的元素是无限的, 有的元素是有限的.

定理 154 在一个无零因子环中, 所有非零元素 R 对于加法的阶都相同: 要么都无限大, 要么都有限且相等.

定义 155 (无零因子环的特征) 在一个无零因子环 R 中, 所有非零元关于加法的阶, 叫做 R 的特征.

定理 156 如果无零因子环 R 的特征是一个有限整数 n , 则 n 一定是素数.

推论 157 整环、除环以及域的特征或者是无限大, 或者是一个素数.

4.5 子环、环的同态

定义 158 (子环) 一个环 R 的非空子集 S 如果对于 R 的代数运算来说也是环 (整环、除环、域), 则称 S 是 R 的一个子环 (子整环、子除环、子域).

定理 159 若 S 是环 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子环的充要条件是 $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S, ab \in S$.

定理 160 若 S 是整环 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子整环的充要条件是 (1) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S, ab \in S$; (2) $1 \in S$.

定理 161 若 S 是除环 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子除环的充要条件是 (1) S 有非零元; (2) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$; (3) $\forall a, b \in S, b \neq 0 \Rightarrow ab^{-1} \in S$.

定理 162 若 S 是域 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子域的充要条件是 (1) S 有非零元; (2) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$; (3) $\forall a, b \in S, b \neq 0 \Rightarrow ab^{-1} \in S$.

命题 163 环 R 的可以同每个元交换的元做成一个 j 交换子环 $N = \{n \mid an = na, \forall a \in R\}$, 这个子环称为 R 的中心.

定理 164 若 R 是环, R 到 \bar{R} 有一个满射使得对于两个运算都同态, 则 \bar{R} 也是一个环.

注意 165 总结下来, 如果 A 与 \bar{A} 同态, 那么前面有什么后面就也有什么:

- 前面有结合, 后面就也有结合
- 前面有交换, 后面就也有交换
- 前面有分配, 后面就也有分配
- 前面是群, 后面就也是群
- 前面是环, 后面就也是环

定理 166 若 R 和 \bar{R} 都是环, 且 R 与 \bar{R} 同态, 则

- R 的零元的象是 \bar{R} 的零元.
- R 的元 a 的负元的象是 a 的象的负元 ($\overline{-a} = -\bar{a}$)
- R 是交换环 $\Rightarrow \bar{R}$ 也是交换环
- R 有单位元 $1 \Rightarrow \bar{R}$ 也有单位元 $\bar{1}$, 且 $\bar{1}$ 是 1 的象.
- R 无零因子 $\nRightarrow \bar{R}$ 无零因子
- R 有零因子 $\nRightarrow \bar{R}$ 有零因子
- R 是整环 (除环、域) $\nRightarrow \bar{R}$ 是整环 (除环、域)

命题 167 若 R 和 \bar{R} 都是环, 且 R 与 \bar{R} 同态, 则

- R 无零因子 $\nRightarrow \bar{R}$ 无零因子
- R 有零因子 $\nRightarrow \bar{R}$ 有零因子
- R 是整环 (除环、域) $\nRightarrow \bar{R}$ 是整环 (除环、域)

命题 168 R 与 \bar{R} 都是环, 且 $R \cong \bar{R}$, 则

- R 无零因子 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 无零因子.
- R 有非零元 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 有非零元.
- R 非零元有逆 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 非零元有逆

定理 169 R 与 \bar{R} 都是环, 且 $R \cong \bar{R}$, 则

- R 是整环 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 是整环.
- R 是除环 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 是除环.
- R 是域 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 是域.

引理 170 集合 A 和 \bar{A} 之间有一个双射 ϕ , 并且 A 有加法和乘法, 于是我们可以在 \bar{A} 中规定加法和乘法, 使得 A 与 \bar{A} 关于一对加法和一对乘法来说都同构.

定理 171 假定 S 是环 R 的一个子环, S 在 R 中的补集 $(R - S)$ 与另一个环 \bar{S} 没有公共元, 并且 $S \cong \bar{S}$, 那么存在一个与 R 同构的环 \bar{R} , 且 \bar{S} 是 \bar{R} 的子环.

说明 172 (!)

$$\left. \begin{array}{l} \text{环 } R \xrightarrow{\text{子环}} \text{环 } S \\ \quad \quad \quad \updownarrow \cong_{\phi} \\ ? \xrightarrow{\text{子环}} \text{环 } \bar{S} \\ (R - S) \cap \bar{S} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{ 环 } ? = \bar{R} : \begin{cases} \bar{R} = (R - S) \cup \bar{S} \\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{R} : \begin{array}{l} \bar{x} + \bar{y} = \psi(x + y), \bar{x}\bar{y} = \psi(xy), \\ x = \psi^{-1}(\bar{x}), y = \psi^{-1}(\bar{y}) \end{array} \\ R \cong \bar{R}, \psi : x \mapsto \begin{cases} x & x \in R - S \\ \phi(x) & x \in S \end{cases} \end{cases}$$

命题 173 一个除环的中心是一个域.

4.6 多项式环

说明 174 假定 R_0 是一个有单位元的交换环, R 是 R_0 的子环, 并且包含 R_0 的单位元. 取 $x \in R_0$, 则 $\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ($a_i \in R$) 有意义, 且 $\in R_0$.

定义 175 (多项式) 一个可以写成 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_i \in R, n \in \mathbb{Z}^+$ 形式的 R_0 的元叫做 R 上的关于 x 的一个**多项式**, a_i 叫做多项式的**系数**. 我们把所有 R 上的 x 的多项式放在一起, 做成一个集合, 用 $R[x]$ 来表示.

说明 176 (环上的多项式构成一个环) 在 $R[x]$ 上定义

$$\begin{aligned} \text{加法: } & \sum a_i x^i + \sum b_i x^i = \sum (a_i + b_i) x^i \\ \text{乘法: } & \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j x^j \right) = \sum_{i=0}^{mn} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k \end{aligned}$$

都为初等代数里的计算方法, 则 $R[x]$ 构成一个交换环.

定义 177 (未定元) R_0 里得一个元 x 叫做 R 上的一个**未定元**, 如果在 R 里找不到不都等于零的元 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$

命题 178 R 上的一个未定元 x 的多项式 (简称**一元多项式**), 如果不计入系数是零的项, 只能用一种方式写成 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ($a_i \in R$)

定义 179 (多项式的次数) 令 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0, a_n \neq 0$ 是环 R 上的一个一元多项式, 那么非负整数 n 叫做这个多项式的**次数**, 多项式 0 没有次数.

命题 180 对于给定的 R_0 来说, R_0 未必含有 R 上的未定元.

定理 181 给了一个有单位元的交换环 R , 一定有一个环 R_0 , R 上的未定元 $x \in R_0$ 存在, 因此也就有 R 上的多项式环 $R[x]$ 存在.

说明 182 对于一个有单位元的交换环 R_0 , 和它的一个子环 R , 其中 R 包含 R_0 的单位元. 我们从 R_0 里任意取出 n 个元 x_1, x_2, \cdots, x_n 来, 那么我们可以做 R 上的 x_1 的多项式环 $R[x_1]$, 然后做 $R[x_1]$ 上的 x_2 的多项式环 $R[x_1][x_2]$. 这样下去, 可以得到 $R[x_1][x_2] \cdots [x_n]$. 这个环包括所有可以写成 $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ ($a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in R$, 但只有有限个 $a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \neq 0$) 形式的元.

定义 183 一个有上述形式的元叫做 R 上的 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个多项式, $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 叫做多项式的系数. 环 $R[x_1][x_2] \cdots [x_n]$ 叫做 R 上的 x_1, x_2, \dots, x_n 的多项式环. 这个环我们也用符号 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 来表示.

命题 184 假定 R 是一个整环, 那么 R 上的一元多项式环也是一个整环.

4.7 理想

定义 185 (! 理想) 环 R 的一个非空子集 I 叫做一个**理想子环** (简称**理想**), 如果

1. $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$
2. $a \in I, r \in R \Rightarrow ra, ar \in I$.

命题 186 一个环至少有两个理想 (1) $I = \{0\}$, 叫做 R 的**零理想**. (2) $I = R$, 叫做 R 的**单位理想**.

定理 187 一个除环 R 只有两个理想, 就是零理想和单位理想.

说明 188 因此, 理想这个概念对于除环或者域来说没有多大用处.

说明 189 一个环除了以上两个理想之外, 可能有其他理想.

命题 190 给定一个环 R , a 是 R 中的任意一个元素, 考虑最小的理想 I 使得 $a \in I$. 作集合 $I = \{(x_1 a y_1 + x_2 a y_2 + \cdots) + sa + at + na \mid x_i, y_i, s, t \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 I 是包含 a 的最小理想.

定义 191 (主理想) 上面的这样的 I 叫做元 a 生成的**主理想**, 用符号 (a) 来表示.

说明 192 一个主理想 (a) 的元的形式并不是永远像上面那样复杂.

1. 当 R 满足交换律时, 可以写成 $ra + na, r \in R, n \in \mathbb{Z}$.
2. 当 R 有单位元时, 可以写成 $\sum x_i a y_i, x_i, y_i \in R$.
3. 当 R 既满足交换律又有单位元时, 可以写成 $ra, r \in R$.

命题 193 给定一个环 R , $a_1, a_2, \dots, a_m \in R$, 考虑最小的理想 I 使得 $a_1, a_2, \dots, a_m \in I$. 做集合 $I = \{s_1 + s_2 + \cdots + s_m \mid s_i \in (a_i)\}$, 则 I 是包含 a_1, a_2, \dots, a_m 的最小理想.

定义 194 上面的这样的 I 叫做 a_1, a_2, \dots, a_m 生成的理想, 用符号 (a_1, a_2, \dots, a_m) 来表示.

说明 195 两个元素生成的理想, 可能是主理想, 也可能不是.

命题 196

- 群 G 的两个子群的交集还是 G 的子群.
- 两个不变子群的交集还是不变子群.
- 两个子环的交集还是子环.
- 两个子整环的交集还是子整环.
- 两个子除环的交集还是子除环.
- 两个子域的交集还是子域.
- 两个理想的交集还是一个理想.

4.8 剩余类环、同态与理想

说明 197 给定一个环 R 和 R 的一个理想 I , 则我们就加法来说, R 做成一个群, I 做成 R 的一个不变子群, 从而 I 的陪集 $[a], [b], [c], \dots$ 做成 R 的一个分类, 叫做**模 I 的剩余类**. 同时这个分类描述 R 的元素之间的等价关系, 用符号 $a \equiv b \pmod{I}$ 表示 (读作 a 同余 b 模 I), 即 $a \equiv b \pmod{I} \Leftrightarrow a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$. 且类 $[a]$ 所包含的元素可以写成 $\{a + u \mid u \in I\}$

定理 198 假定 R 是一个环, I 是它的一个理想, \bar{R} 是所有模 I 的剩余类做成的集合, 如果在 \bar{I} 上规定加法和乘法 $[a] + [b] = [a + b], [a][b] = [ab]$. 那么 \bar{I} 本身也是一个环, 并且 R 与 \bar{R} 同态.

定义 199 (模 I 的剩余类环) 上面的 \bar{R} 叫做环 R 的模 I 的剩余类环, 用符号 R/I 来表示.

定理 200 (!) 假定 R 与 \bar{R} 是两个环, 并且 R 与 \bar{R} 同态, 那么这个同态满射的核 I 是 R 的一个理想, 并且 $R/I \cong \bar{R}$

定理 201 在环 R 到环 \bar{R} 的同态满射下:

- (1) R 的一个子环的象 \bar{S} 是 \bar{R} 的一个子环.
- (2) R 的一个理想 I 的象 \bar{I} 是 \bar{R} 的一个理想.
- (3) \bar{R} 的一个子环 \bar{S} 的原象 S 是 R 的一个子环.
- (4) \bar{R} 的一个理想 \bar{I} 的原象 I 是 R 的一个理想.

说明 202 环-群, 子环-子群, 理想-不变子群

命题 203 ϕ 是环 R 到环 \bar{R} 的一个同态满射: ϕ 是 R 与 \bar{R} 之间的同构映射 $\Leftrightarrow \phi$ 的核是零理想.

4.9 最大理想

定义 204 (最大理想) 如果一个环 R 的理想 $I(I \neq R)$, 除了 R 和 I 以外, 无其他包含 I 的理想, 称 I 为 R 的最大理想.

引理 205 假定 $I(I \neq R)$ 是环 R 的一个理想: 剩余类环 R/I 除了零理想和单位理想外不再有其他理想 $\Leftrightarrow I$ 是最大理想.

引理 206 若有单位元 ($\neq 0$) 的交换环 R 除了零理想和单位理想以外没有其他理想, 那么 R 一定是一个域.

定理 207 (!) R 是有单位元的交换环, $I(I \neq R)$ 是 R 的理想: R/I 是域 $\Leftrightarrow I$ 是 R 的最大理想.

命题 208 \mathbb{Z}_n 是域 $\Leftrightarrow n$ 是素数.

4.10 商域

定理 209 若 R 是无零因子的交换环, 则存在一个包含 R 的域 Q , 使得 Q 刚好是由所有元 $\frac{a}{b} (a, b \in R, b \neq 0)$ 所做成的, 这里 $\frac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a$.

定义 210 (商域) 一个域 Q 叫做环 R 的一个商域, 如果 $Q \supseteq R$, 并且 Q 刚好是由所有元 $\frac{a}{b} (a, b \in R, b \neq 0)$ 所做成的.

定理 211 假定 R 是一个有两个以上的元的环, F 是一个包含 R 的域, 则 F 包含 R 的一个商域.

说明 212 一般来讲, 一个环很可能有两个以上的商域. 不过, 同构的环的商域也同构, 所以抽象的来讲, 一个环最多只有一个商域.

5 整环里的因子分解

5.1 素元、唯一分解

定义 213 (! 整除) 对于整环 I , 若 $a \in I$, 存在 $b, c \in I$ 使 $a = bc$, 则称 b 能整除 a , 记作 $b \mid a$, 称 b 为 a 的因子. 若 b 不是 a 的因子, 则记作 $b \nmid a$.

命题 214 (整除具有传递性) $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

定义 215 (单位) 整环 I 的元 ϵ 叫做 I 的一个**单位**, 如果 ϵ 有逆. (整环里面随便一个可逆的元都叫做一个单位)

定理 216 ϵ_1 和 ϵ_2 是单位 $\Rightarrow \epsilon_1\epsilon_2$ 是单位; ϵ 是单位 $\Rightarrow \epsilon^{-1}$ 也是单位.

命题 217 a 和 b 不是单位 $\Rightarrow ab$ 不是单位.

定义 218 (相伴元) 元 b 叫做元 a 的**相伴元**, 如果存在一个单位 ϵ 使得 $b = \epsilon a$.

说明 219 相伴元对应的关系是一个等价关系.

定义 220 (平凡因子、真因子) $\forall a \in$ 整环 I , 所有的单位以及 a 的相伴元, 叫做 a 的**平凡因子**. 其余的 a 的因子, 如果还有的话, 叫做 a 的**真因子**.

定义 221 (素元) 一个整环 I 的一个元 p 叫做一个**素元**, 如果 p (1) 既不是零元, (2) 也不是单位, 并且 (3) p 只有平凡因子.

定理 222 p 是素元, ϵ 是单位 $\Rightarrow \epsilon p$ 也是素元.

定理 223 (!!) 若 I 是整环, $a \in I, a \neq 0$, 则 a 有真因子 $\Leftrightarrow \exists b, c$ 都不是单位使得 $a = bc$.

推论 224 $a \neq 0, a$ 有真因子 $b (a = bc) \Rightarrow c$ 也是 a 的真因子.

说明 225 a 有真因子 $\Rightarrow \exists b, c$ 为 a 的真因子使得 $a = bc$

定义 226 (唯一分解) 我们说, $a \in$ 整环 I , 在 I 里有**唯一分解**, 假如以下条件都能被满足

- (i) 能分解: $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ (p_i 是 I 的素元).
- (ii) 若同时 $a = q_1 q_2 \cdots q_s$ (q_i 是 I 的素元), 则 $r = s$, 且我们可以把 q_i 的次序调换, 使得 $q_i = \epsilon_i p_i$ (ϵ 是 I 的单位).

说明 227 若 a 在环 I 中有唯一分解, 则 $a \neq 0$ 且 a 不是单位.

说明 228 一个整环的 $\neq 0$ 也不是单位的元, 不一定都有唯一分解.

命题 229 0 不是任何元的真因子.

命题 230 定义 I 为所有可以写成 $\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ 形式的有理数, 则 I 是整环, 其单位是所有等于 $2^n, n \in \mathbb{Z}$ 的数.

5.2 唯一分解环

定义 231 (唯一分解环) 一个整环 I 叫做一个**唯一分解环**, 如果 I 的每一个既 $\neq 0$ 也不是单位的元, 都有唯一分解.

定理 232 一个唯一分解环有以下性质,

- (iii) 素元 $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$.

定理 233 如果一个整环 I 满足:

- (i) $\forall a \in I, a \neq 0, a$ 不是单位, 都可以写成 $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ (p_i 是素元).
- (iii) 素元 $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$.

则整环 I 是一个唯一分解环.

定义 234 (公因子) 元 c 叫做元 a_1, a_2, \cdots, a_n 的**公因子**, 如果 c 能同时整除 a_1, a_2, \cdots, a_n . 元 a_1, a_2, \cdots, a_n 的一个公因子 d 叫做 a_1, a_2, \cdots, a_n 的**最大公因子**, 如果 d 能被 a_1, a_2, \cdots, a_n 的每个公因子整除.

定理 235 若 I 是一个唯一分解环, $a, b \in I$, 则 a, b 在 I 里一定有最大公因子. 若 d, d' 都是 a, b 的最大公因子, 则它们只差一个单位因子: $d' = \epsilon d$ (ϵ 是单位).

推论 236 一个唯一分解环 I 的 n 个元 a_1, a_2, \dots, a_n 在 I 里一定有最大公因子, a_1, a_2, \dots, a_n 的两个最大公因子只能差一个单位因子.

定义 237 (互素) 我们说, 一个唯一分解环的元 a_1, a_2, \dots, a_n 互素, 如果他们的最大公因子是单位.

命题 238 假定在一个唯一分解环里 $a_1 = db_1, a_2 = db_2, \dots, a_n = db_n$ ($d \neq 0$), 我们有

$$d \text{ 是 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 的最大公因子} \Leftrightarrow b_1, b_2, \dots, b_n \text{ 互素}.$$

5.3 主理想环

定义 239 (主理想环) 一个整环 I 叫做一个主理想环, 如果 I 的每一个理想都是一个主理想.

引理 240 假定 I 是一个主理想环, 若存在序列 a_1, a_2, \dots ($a_i \in I$) 的每一个元素都是前面一个元素的真因子, 则这个序列一定是一个有限序列.

引理 241 (!!) 假定 I 是一个主理想环, p 是 I 的一个素元, 则 p 生成的理想 (p) 一定是 I 的最大理想.

定理 242 一个主理想环 I 一定是一个唯一分解环.

命题 243 假定 I 是一个主理想环, 并且 $(a, b) = (d)$, 那么 d 是 a 和 b 的一个最大公因子, 因此 a 和 b 的任何一个最大公因子 d' 都可以写成 $d' = sa + tb$ ($s, t \in I$) 的形式.

命题 244 一个主理想环的非零最大理想都是由一个素元所生成的.

命题 245 两个主理想环 I 和 I_0 , I_0 是 I 的子环, a 和 b 是 I_0 的两个元, d 是这两个元在 I_0 里得一个最大公因子, 则 d 也是这两个元在 I 里的最大公因子.

5.4 欧氏环

定义 246 (欧氏环) 一个整环 I 叫做一个欧氏环, 如果

- 有一个从 I 的非零元所做成的集合到 ≥ 0 的整数集合的映射 ϕ 存在.
- 给定一个 I 的非零元 a , 则 I 的任何元 b 都可以写成 $b = aq + r$ ($q, r \in I$) 的形式, 这里或者 $r = 0$, 或者 $\phi(r) < \phi(a)$.

定理 247 任何欧氏环 I 一定是主理想环, 从而一定是一个唯一分解环.

说明 248 整数环是一个欧氏环, 从而是一个主理想环, 因而是一个唯一分解环.

引理 249 假定 $I[x]$ 是整环 I 上的一个一元多项式环, $I[x]$ 的元 $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 的最高系数 a_n 是 I 的一个单位. 那么 $I[x]$ 的任意多项式 $f(x)$ 都可以写成 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ ($q(x), r(x) \in I[x]$) 的形式, 这里或者 $r(x) = 0$ 或者 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数 n .

定理 250 (!) 一个域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 是一个欧氏环. ($\Rightarrow F[x]$ 是主理想环 $\Rightarrow F[x]$ 是唯一分解环).

5.5 多项式环的因式分解

定义 251 一个素多项式 (多项式环的素元) 叫做不可约多项式, 一个有真因子的多项式叫做可约多项式.

命题 252 I 的单位是 $I[x]$ 仅有的单位.

定义 253 (本原多项式) $I[x]$ 的一个元 $f(x)$ 叫做一个**本原多项式**, 如果 $f(x)$ 的系数的最大公因子是单位.

命题 254 一个本原多项式 $\neq 0$.

命题 255 若本原多项式 $f(x)$ 可约, 则 $f(x) = g(x)h(x)$, 这里 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数都 > 0 , 因而都 $< f(x)$ 的次数.

引理 256 假定 $f(x) = g(x)h(x)$, 那么 $f(x)$ 是本原多项式 $\Leftrightarrow g(x)$ 和 $h(x)$ 都是本原多项式.

引理 257 对于一个唯一分解环 I , 他的商域 Q 做成的一元多项式环 $Q[x]$, $Q[x]$ 中的每个不等于零的多项式 $f(x)$ 都可以写成 $f(x) = \frac{b}{a}f_0(x)$ 的样子. 这里 $a, b \in I$, $f_0(x)$ 是 $I[x]$ 上的本原多项式. 若 $g_0(x)$ 也有 $f_0(x)$ 的性质 (即 $f(x)$ 可以写成 $\frac{b'}{a'}g_0(x)$ 的形式), 则 $g_0(x) = \epsilon f_0(x)$ (ϵ 是 I 的单位).

引理 258 $I[x]$ 的一个本原多项式 $f_0(x)$ 在 $I[x]$ 里可约 $\Leftrightarrow f_0(x)$ 在 $Q[x]$ 里可约.

引理 259 $I[x]$ 中的一个次数 > 0 的本原多项式 $f_0(x)$ 在 $I[x]$ 中有唯一分解.

定理 260 一个唯一分解环 I 上的多项式环 $I[x]$ 也是唯一分解环.

定理 261 若 I 是唯一分解环, 那么 $I[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 也是, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是 I 上的未定元.

5.6 因式分解与多项式的根

定义 262 $a (\in \text{整环 } I)$ 叫做 $I[x]$ 的多项式的**根**, 如果 $f(a) = 0$.

定理 263 $a (\in \text{整环 } I)$ 是 $f(x)$ 的一个根 $\Leftrightarrow (x - a) \mid f(x)$.

定理 264 给定整环 I 的 k 个不同的元素 a_1, a_2, \dots, a_k , 那么 a_1, a_2, \dots, a_k 都是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) \mid f(x)$.

推论 265 $I[x]$ 中的 n 次多项式 $f(x)$, 在 I 中最多有 n 个根.

定义 266 (重根) $a (\in I)$ 叫做 $f(x)$ 的一个**重根**, 如果 $(x - a)^k \mid f(x)$, k 是 ≥ 2 的整数.

定义 267 (导数) 对于 $I[x]$ 中的多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 定义它的**导数** $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$.

说明 268 这只是一个形式上的定义, 不能从极限的角度来理解.

命题 269 导数适合以下计算规则

- (i) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.
- (ii) $[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
- (iii) $[f(x)^t]' = t f(x)^{t-1} f'(x)$, $t (\in \mathbb{Z}) \geq 2$

定理 270 假定 a 是 $f(x)$ 的一个根, 我们有

$$a \text{ 是一个重根} \Leftrightarrow (x - a) \mid f'(x)$$

推论 271 假定 $I[x]$ 是一个唯一分解环, $a \in I[x]$, $f(x) \in I[x]$, 我们有

$$a \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个重根} \Leftrightarrow (x - a) \text{ 能够整除 } f(x) \text{ 和 } f'(x) \text{ 的最大公共因子.}$$

定义 272 如果 $(x - a)^k \mid f(x)$, 但是 $(x - a)^{k+1} \nmid f(x)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, 则称 a 是 $f(x)$ 的 k 重根.

定理 273 a 是 $f(x)$ 的 k 重根 $\Rightarrow (x - a)^{k-1} \mid f'(x)$.

定理 274 假定整环 I 的特征是无穷的, 我们有

$$a \text{ 是 } f(x) \text{ 的 } k \text{ 重根} \Rightarrow a \text{ 是 } f'(x) \text{ 的 } k-1 \text{ 重根.}$$

6 扩域

定义 275 (扩域) 一个域 E 叫做一个域 F 的**扩域 (扩张)**, 如果 F 是 E 的子域.

定理 276 令 E 是一个域.

- 若 E 的特征是 ∞ , 则 E 含有一个与有理数同构的子域;
- 若 E 的特征是素数 p , 则 E 含有一个域 $\mathbb{Z}/(p)$ 同构的子域, 其中 \mathbb{Z} 是整数环.

定义 277 (素域) 一个域叫做一个**素域**, 假如他不包含真子域.

说明 278 一个素域或者与有理数域 \mathbb{Q} 同构, 或者与 $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p)$ 同构.

说明 279 令域 E 是 F 的扩域. 我们从 E 中取一个子集 S . 我们用 $F(S)$ 表示包含 F 和 S 中的所有元素的 E 的最小子域, 把它叫做添加几个 S 于 F 所得的扩域.

说明 280 $F(S)$ 刚好包含 E 的一切可以写成 $\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$ 形式的元, 其中 α_i 是 S 中的任意有限个元素, f_1 和 f_2 ($f_2 \neq 0$) 是这些 α 的多项式.

说明 281 若 S 是一个有限子集, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 那么我们也把 $F(S)$ 记作 $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

定理 282 令 E 是 F 的一个扩域, S_1, S_2 是 E 的两个子集, 那么 $F(S_1)(S_2) = F(S_1 \cup S_2) = F(S_2)(S_1)$.

说明 283 于是我们可以把添加有限集归结为陆续添加单个元素: $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1)(\alpha_2) \cdots (\alpha_n)$.

定义 284 (单扩域) 添加一个元素 α 于域 F 所得的扩域 $F(\alpha)$ 叫做域 F 的**单扩域 (单扩张)**.

6.1 单扩域

定义 285 (代数元、超越元) 假定 E 是 F 的扩域, $\alpha \in E$. α 叫做域 F 上的一个**代数元**, 若 $\exists a_0, a_1, \dots, a_n$ 不都等于零, 使得 $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$. 如果这样的 a_0, a_1, \dots, a_n 不存在, α 叫做 F 上的一个**超越元**.

定义 286 (单代数扩域、单超越扩域) 若 α 是 F 上的一个代数元, $F(\alpha)$ 叫做 F 的一个**单代数扩域**; 若 α 是 F 上的一个超越元, $F(\alpha)$ 就叫做 F 的一个**单超越扩域**.

定理 287 若 α 是 F 上的一个超越元, 那么 $F(\alpha) \cong F[x]$ 的商域, 其中 $F[x]$ 是 F 上的一个未定元 x 的多项式环.

定理 288 若 α 是 F 上的一个代数元, 那么 $F(\alpha) \cong F[x]/(p(x))$, 其中 $p(x)$ 是 $F[x]$ 的一个 唯一 确定的、最高系数为 1 的不可约多项式, 并且 $p(\alpha) = 0$.

定理 289 令 α 是域 F 上的一个代数元, 并且 $F(\alpha) \cong F[x]/(p(x))$, 那么 $F(\alpha)$ 的每一个元都可以唯一的表达成 $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha^i$ ($c_i \in F$) 的形式, 这里 n 是 $p(x)$ 的系数. 要把两个多项式 $f(\alpha)$ 和 $g(\alpha)$ 相加, 只需把相应的系数相加; $f(\alpha)$ 与 $g(\alpha)$ 的乘积等于 $r(\alpha)$, 这里 $r(x)$ 是用 $p(x)$ 除 $f(x)g(x)$ 所得的余式.

定义 290 (极小多项式) $F[x]$ 中满足条件 $p(\alpha) = 0$ 的次数最低的多项式 $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$ ($c_i \in F$), 叫做元 α 的在 F 上的**极小多项式**, n 叫做 α 的在 F 上的**次数**.

说明 291 F 的单超越扩域是存在的, 且它们相互同构.

定理 292 对于任一给定的域 F 以及 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 的给定不可约多项式 $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$, 总存在 F 的单代数扩域 $F(\alpha)$, 其中 α 在 F 上的极小多项式是 $p(x)$.

定理 293 令 $F(\alpha)$ 和 $F(\beta)$ 是域 F 的两个单代数扩域, 并且 α 和 β 在 F 上有相同的极小多项式 $p(x)$. 那么 $F(\alpha) \cong F(\beta)$.

定理 294 在同构的意义下, 存在且仅存在域 F 的一个单扩域 $F(\alpha)$, 其中 α 的极小多项式是 $F[x]$ 的给定的, 最高次数为 1 的不可约多项式.

6.2 代数扩域

定理 295 (代数扩域) 若域 F 的扩域 E 的每一个元都是 F 上的一个代数元, 那么 E 叫做 F 的一个**代数扩域** (代数扩张).

定义 296 若是域 F 的一个扩域 E 作为 F 上的向量空间有维数 n , 那么 n 叫做**扩域 E 在 F 上的次数**, 记作 $(E : F)$. 这时 E 叫做 F 的一个**有限扩域**, 否则 E 叫做域 F 的一个**无限扩域**.

定理 297 令 I 是域 F 的有限扩域, 而 E 是 I 的有限扩域. 那么 E 也是 F 的有限扩域, 并且 $(E : F) = (E : I)(I : F)$.

说明 298 已经听不懂了!!! 感觉需要补高等代数中的向量空间的知识...