近世代数 (抽象代数) 笔记

管清文

2020 年 3 月 27 日

目录

性质 (Property) 结果值得一记, 但是没有定理深刻.

注意 (Remark) 涉及到一些结论，更像是非正式的定理.

说明 (Note) 就是注解.

说明

- 关于一一映射的说法都被改成了双射 (Bijection), 因为在英文资料中, one-to-one 表示的是单射 (Injection), 容易引起歧义.
- 所有的当且仅当的命题 (定理、$\cdots$) 都被写成以下形式:

  命题 5 假定 blablabla，那么
  $$p \Leftrightarrow q$$

0.1 Highlights

0.2 基本概念

说明 1 近世代数 (或抽象代数) 的主要内容就是研究所谓**代数系统**，即带有运算的集合。

说明 2 规定 $-\infty < n, -\infty + n = -\infty, \forall n \in N$ 规定 $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

0.2.1 映射

定义 3 (映射)
$$\phi : A \to D$$
$$a \mapsto d = \phi(a) = \overline{a}$$
其中 A 称为**定义域 (Domain)**, D 称为**陪域 (Codomain)**, $\{\phi(a) \mid a \in A\}$ 称为**值域 (Image)**, 记作 $f(A)$ 或者 $\operatorname{Im} f$.

定义 4 对于映射 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$
$$f = g \overset{\text{def}}{\iff} A = B \ \& \ C = D \ \& \ f(a) = g(a) \ \forall a \in A$$

定义 5 (满射) 映射 $\phi : A \to B$ 被称为**满射**, 如果 $B = \operatorname{Im} \phi$, 换句话说
$$\forall b \in B \implies b \in \operatorname{Im} \phi \ (\text{即 } \exists a \in A \text{ 使得 } \phi(a) = b).$$
它对应 ϕ^{-1} 都有象.

定义 6 (单射) 映射 $\phi : A \to \bar{A}$ 被称为**单射**, 如果 A 中不同元素的在 ϕ 下的象不同, 换句话说
$$\text{设 } a_1, a_2 \in A, \ \phi(a_1) = \phi(a_2) \implies a_1 = a_2$$
它对应 ϕ^{-1} 象唯一

定义 7 (变换) 从 A 到 A 的映射 $\tau : A \to A, a \mapsto \tau(a)$ 叫 A **变换**, 我们也用 a^τ 表示 $\tau(a)$. 如果 τ 是满射 (单射、双射), 则称为**满变换** (**单变换**、**双射变换**).

定义 8 (映射的乘法) 设 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, 令
$$(g \circ f)(a) \triangleq g(f(a)), \forall a \in A$$
则称 $g \circ f$ 是 g 与 f 的**乘积**.

说明 9 映射的乘法满足结合律, 即 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

定义 10 若 f: $A \to A$, $a \mapsto a$, 则 f 是 A 上的**恒等变换**, 记作 1_A.

命题 11 设 f: $A \to B$, 则 $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

定义 12 (可逆映射) 设 f: $A \Rightarrow B$, 如果存在 g: $B \to A$ 使得 $g \circ f = 1_A$, 且 $f \circ g = 1_B$, 那么称 f 是可逆映射, 把 g 称为 f 的逆映射.

说明 13 若 f 可逆, 则 f 的逆映射唯一, 把 f 的逆映射记作 f^{-1}. f^{-1} 也是可逆映射, 并且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

定理 14 f: $A \to B$ 是可逆映射 $\iff$ f 是双射.

0.2.2 等价关系与集合划分

定义 15 (集合的划分) 如果集合 A 是他的一些非空子集的并集, 其中每两个不相等的子集的交是空集 (称为**不相交**), 那么把这些子集组成的集合称为 A 的一个**划分**.

定义 16 (二元关系[Relation]) $S \times S$ 的一个子集 W 称为 S 上的一个二元关系. 若 $(a, b) \in W$, 则称 a 和 b 有 W 关系, 记作 $a \sim_W b$. 若 $(a, b) \notin W$, 则称 a 和 b 没有 W 关系.

说明 17 整除是一个二元关系.

定义 18 (等价关系) 如果 $\sim$ 是 A 的元素间的关系，满足
(1) 自反性, $\forall a \in A, a \sim a$.
(2) 对称性, $\forall a, b \in A$, 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$.
(3) 传递性, $\forall a, b, c \in A$, 若 $a \sim b$, $b \sim c$, 则 $a \sim c$.
则称 $\sim$ 为**等价关系**.

定义 19 设 是 S 上的一个等价关系, 任给 $a \in S$, 令

$$\bar{a} \triangleq \{x \in S \mid x \sim a\}$$

则把 $\bar{a}$ 称为 a 的**等价类**.

说明 20 $x \in \bar{a} \iff x \sim a$

说明 21 (代表) 由于 $a \sim a$, 因此 $a \in \bar{a}$, 把 a 称为 $\bar{a}$ 的一个**代表**.

性质 22 $\bar{a} = \bar{b} \iff a \sim b$

性质 23 $\bar{a} \neq \bar{b} \implies \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

定理 24 如果集合 S 上有一个等价关系 $\sim$, 那么所有等价类组成的集合是 S 的一个划分.

定理 25 如果集合 S 中有一个划分, 那么可以在 S 上建立一个等价关系, 使得这个划分是由所有等价类组成的.

定义 26 (商集) 集合 S 的一个划分也称为 S 的一个**商集**, 是 S 的所有等价类组成的集合.

定义 27 ($\mathbb{Z}_p$[模 n 的剩余类]) $\{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$, $[i] = \{kn + i \mid k \in \mathbb{Z}\}$

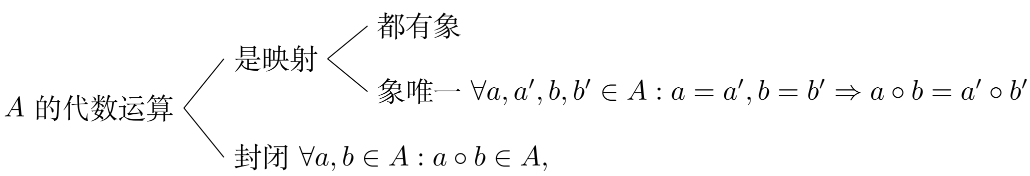
0.2.3 代数运算

定义 28 (代数运算)

$$A \times B \to D$$
$$(a,b) \mapsto d = \phi(a,b) = \circ(a,b) = a \circ b$$

定义 29 (A 的代数运算, 二元运算) 假如 $\circ$ 是一个 $A \times A \to A$ 的代数运算 (即 $A = B = D$), 我们说集合 A 对于代数运算 $\circ$ 来说是闭的, 也说, $\circ$ 是 A **的代数运算**或**二元运算**.

说明 30 (A 的代数运算判别)



0.2.4 运算律

定义 31 (结合率) 我们说，一个集合 A 的代数运算 $\circ$ 满足结合律，假如对于 A 的任何三个元素 a, b, c 来说都有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

定理 32 若 A 的代数运算 $\circ$ 满足结合律，则对于 A 的任意 $n(n \geq 2)$ 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 来说，对于任意的加括号的方法 π, $\pi(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n)$ 都相等，我们用 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ 来表示.

定义 33 (交换律) 如果 A 上的代数运算 $\circ$ 满足 $\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a$, 则称 $\circ$ 满足**交换律**. 对于 $a, b \in A$, 如果 $a \circ b = b \circ a$, 则称 a, b **可交换**.

定理 34 若 A 上的代数运算 $\circ$ 满足结合律与交换律，则 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ 可以任意交换顺序.

定义 35 (分配率) $\odot$ 和 $\oplus$ 都是 A 上的代数运算,

(1) 若 $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c), \forall a, b, c$, 则称 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足左分配率.

(2) 若 $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c), \forall a, b, c$, 则称 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足右分配率.

定理 36 若 A 上的二元运算 $\oplus$ 满足结合律, $\odot$ 和 $\oplus$ 满足左分配率，则

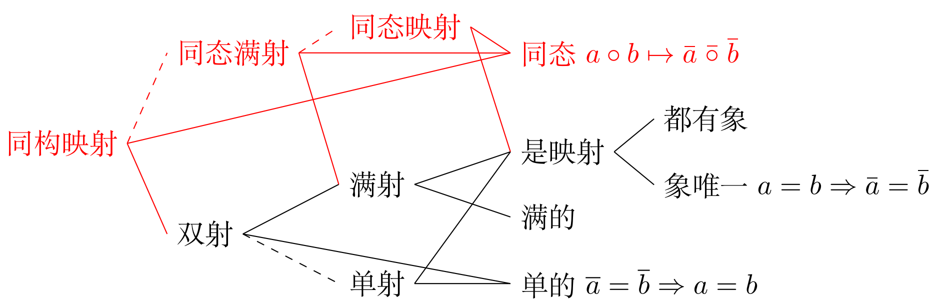
$$a \odot (b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n) = (a \odot b_1) \oplus (a \odot b_2) \oplus \cdots \oplus (a \odot b_n)$$

定理 37 若 A 上的二元运算 $\oplus$ 满足结合律, $\odot$ 和 $\oplus$ 满足右分配率，则

$$(a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) \odot b = (a_1 \odot b) \oplus (a_2 \odot b) \oplus \cdots \oplus (a_n \odot b)$$

0.2.5 同态

说明 38 (映射判别)



定义 39 (同态映射) 对于 $\phi : A \to \bar{A}$, A 上有二元运算 $\circ$, $\bar{A}$ 上有二元运算 $\bar{\circ}$. 称 ϕ 是 A 到 $\bar{A}$ 的**同态映射**, 如果 $\forall a, b \in A$, $\bar{a} := \phi(a), \bar{b} := \phi(b)$ 有 $a \circ b \mapsto \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$.

定义 40 (同态满射、同态) 如果 A 到 $\bar{A}$ $\boxed{\text{存在}}$ 一个同态映射 ϕ, 且它是满射, 则称 A 与 $\bar{A}$ (关于 $\circ$ 与 $\bar{\circ}$) **同态**. 称这个映射是一个**同态满射**.

定义 41 (同构映射、同构) 如果 A 到 $\bar{A}$ $\boxed{\text{存在}}$ 一个同态映射 ϕ, 且它是双射, 则称 A 与 $\bar{A}$ (关于 $\circ$ 与 $\bar{\circ}$) **同构**, 记为 $A \cong \bar{A}$. 称这个映射是一个 (关于 $\circ$ 与 $\bar{\circ}$ 的) **同构映射** (简称同构).

命题 42 同构关系是一个等价关系.

定理 43 假定对于代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\circ}$ 来说, A 与 $\bar{A}$ 同态, 那么
(1) 若 $\circ$ 满足结合律, $\bar{\circ}$ 也满足结合律;
(2) 若 $\circ$ 满足交换律, $\bar{\circ}$ 也满足交换律.

定理 44 $\odot$ 和 $\oplus$ 是 A 的两个代数运算, $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 是 $\bar{A}$ 的两个代数运算, 有 ϕ 既是 A 与 $\bar{A}$ 的关于 $\odot$ 和 $\bar{\odot}$ 的同态满射, ϕ 也是 A 与 $\bar{A}$ 的关于 $\oplus$ 和 $\bar{\oplus}$ 的同态满射, 则
(1) 若 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第一分配率, 则 $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 也满足第一分配率.
(2) 若 $\odot$ 和 $\oplus$ 满足第二分配率, 则 $\bar{\odot}$ 和 $\bar{\oplus}$ 也满足第二分配率.

第一章　群

1.1　群论

1.1.1　群的定义和性质

注意 45 群是一个代数系统 (定义代数运算的集合), 它只有一个代数运算, 被称为乘法. 便利起见 (a, b) 的象写成 ab

定义 46 (群[Group]的第一定义) 在集合 $G \neq \emptyset$ 上规定一个叫做乘法的 $\boxed{\text{代数运算}}$ 这个代数系统被称为群, 如果

I 乘法封闭, $\forall a, b \in G, ab \in G$

II 乘法结合, $\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$

III $\forall a, b \in G$, $ax = b, ya = b$ 在 G 中都有解.

定理 47 (左单位元) 对于群 G 中至少有一个元 e, 叫做 G 的一个**左单位元**, 使得 $\forall a \in G$ 都有 $ea = a$.

定理 48 (左逆元) 对于群 G 中的任何一个元素 a, 在 G 中存在一个元 a^{-1}, 叫做 a 的**左逆元**, 能让 $a^{-1}a = e$.

定义 49 (群[Group]的第二定义) 在集合 $G \neq \emptyset$ 上规定乘法. 这个代数系统被称为**群**, 如果

I 乘法封闭

II 乘法结合

IV 左单位元: $\exists e \in G$ 使 $ea = a$ 对 $\forall a \in G$ 都成立.

V 左逆元: $\forall a \in G, \exists\, a^{-1}$ 使 $a^{-1}a = e$.

定义 50 (群的阶) 如果 $|G|$ 有限, 称其为**有限群**, 称他的**阶**是 G 的元素个数. 如果 G 中有无穷多个元素, 称其为**无限群**, 称他的**阶**无限.

定义 51 (交换群、Abel 群) 群中交换律不一定成立, 如果乘法满足交换律 ($\forall a, b \in G, ab = ba$), 则称之为**交换群** (**Abel 群**).

定理 52 (单位元) 在一个群 G 里存在且只存在一个元 e, 使得 $ea = ae = a$ 对于 $\forall a \in G$ 成立. 这个元素被称为群 G 的**单位元**.

定理 53 (逆元) 对于群 G 的任意一个元素 a 来说, 有且只有一个元素 a^{-1}, 使 $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. 这个元素被称为 a 的**逆元**, 或者简称**逆**.

说明 54 证明 a^{-1} 是 a 的逆的方法: $a^{-1}a = e$ 或者 $aa^{-1} = e$ (不用都说明).

性质 55 (乘积的逆等于逆的乘积) $\forall a, b \in G, \left(ab^{-1}\right)^{-1} = ba^{-1}$

定义 56 规定 $\forall n \in \mathbb{Z}^{+} : a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n\text{个}}, a^0 = e, a^{-n} = (a^{-1})^n$

命题 57 $\forall n, m \in \mathbb{Z} : a^n a^m = a^{n+m}, \left(a^n\right)^m = a^{mn} \quad \left(\Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a\right)$

定义 58 (元素的阶) 在一个群 G 中，使得 $a^n = e$ 的最小正整数, 叫做 a 的**阶**. 若这样的 n 不存在, 称 a 是无穷阶的，或者叫 a 的阶是无穷.

定理 59 (III'[消去律]) 群的乘法满足: $ax = ax' \Rightarrow x = x', ya = y'a \Rightarrow y = y'$

推论 60 在群里, $ax = b$ 和 $ya = b$ 都有唯一解.

定理 61 (有限群的另一定义) 一个带有乘法的 $\boxed{\text{有限集合}}$ $G \neq \emptyset$, 若满足 I、II、III', 则 G 是一个**群**.

1.1.2　群的同态

定理 62 G 与 $\bar{G}$ 关于他们的乘法同态, 则 G 是群 $\Rightarrow \bar{G}$ 也是群.

定理 63 假定 G 和 $\bar{G}$ 是两个群, 在 G 到 $\bar{G}$ 的一个同态满射之下, G 的单位元 e 的象是 $\bar{G}$ 的单位元, G 的元 a 的逆元 a^{-1} 的象是 a 的象的逆元 $(\overline{a^{-1}} = \bar{a}^{-1})$.

定理 64 G 与 $\bar{G}$ 关于他们的乘法同构, 则 G 是群 $\Leftrightarrow \bar{G}$ 是群.

1.1.3　变换群

定义 65 (变换的乘法) $\tau_1\tau_2 : a \mapsto (a^{\tau_1})^{\tau_2}$

定理 66 (变换乘法结合) $(\tau_1\tau_2)\tau_3 = \tau_1(\tau_2\tau_3)$

定理 67 G 是集合 A 的若干变换构成的集合, 如果 G 基于变换的乘法做成一个群, 则 G 中的变换一定是双射变换.

定义 68 (变换群) 如果一个集合 A 的若干 $\boxed{\text{双射变换}}$ 对于变换的乘法能够做成一个群，则称这个群为 A 的一个**变换群**.

定理 69 一个集合 A 上的所有双射变换做成一个变换群 G.

定理 70 任何一个群都与一个变换群同构.

定理 71 一个变换群的单位元一定是恒等变换.

1.1.4　置换群

定义 72 (置换) $\boxed{\text{有限集合}}$ 上的 $\boxed{\text{双射变换}}$ 叫做**置换**, 一般用 π 表示.

定义 73 (置换群) 有限集合上的若干置换做成的群叫**置换群**.

定义 74 (对称群) 一个 n 元集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的所有置换 (有 $n!$ 个) 做成的群叫做 n 次**对称群**, 用 S_n 来表示.

定理 75

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1} & \cdots & j_n \\ j_1^{(1)} & \cdots & j_k^{(1)} & j_{k+1} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ \pi_2 &= \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1} & \cdots & j_n \\ j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1}^{(2)} & \cdots & j_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k & j_{k+1} & \cdots & j_n \\ j_1^{(1)} & \cdots & j_k^{(1)} & j_{k+1}^{(2)} & \cdots & j_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

定义 76 (k-循环置换) 如果 S_n 中的置换满足 a_{i_1} 的象是 a_{i_2}, a_{i_2} 的象是 a_{i_3}, $\cdots$, $a_{i_{k-1}}$ 的象是 a_{i_k}, a_{i_k} 的象是 a_{i_1}，其他元素，如果还有的话，象是不变的, 则称之为 **k-循环置换**. 用 $(i_1\, i_2\, i_3 \cdots i_{k-1}\, i_k)$ 或 $(i_2\, i_3 \cdots i_{k-1}\, i_k\, i_1)$ 或 $\cdots$ 或 $(i_k\, i_1\, i_2\, i_3 \cdots i_{k-1})$ 来表示.

命题 77 $(i_1\, i_2\, \cdots i_k)^{-1} = (i_k\, \cdots\, i_2\, i_1)$.

命题 78 k-循环置换的阶是 k.

命题 79 任何一个置换都可以写成若干没有共同数字的循环置换的乘积.

命题 80 两个没有共同数字的循环置换可以交换.

命题 81 任何一个有限群都与一个置换群同构.

1.1.5 循环群

定义 82 (循环群) 若一个群 G 的每一个元都是 G 的某一固定元 a 的乘方, 我们就称 G 是一个**循环群**, a 是 G 的一个**生成元**, 并记 $G = (a)$, 且说 G 是由元 a 生成的。

定义 83 ($\mathbb{Z}_n$[模 n 的剩余类加群]) G 包含所有模 n 的剩余类，$G = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$, 定义乘法 (叫做加法) $[a] + [b] = [a + b]$，可以证明 $(G, +)$ 做成一个群, 叫做**模 n 的剩余类加群**.

定理 84 假定 G 是由 a 生成的循环群, 则 G 的构造可以完全由 a 的阶来决定:

- 如果 a 的阶无限, 则 $G \cong \mathbb{Z}$.
- 如果 a 的阶为 n, 则 $G \cong \mathbb{Z}_n$.

说明 85 于是 $|(a)| = n$, 其中 n 为 a 的阶.

命题 86 一个循环群一定是交换群.

命题 87 a 生成一个阶是 n 的循环群 G, 则 a^r 也生成 G，如果 $\gcd(r, d) = 1$.

命题 88 G 是循环群, 且 G 与 $\bar{G}$ 同态，则 $\bar{G}$ 也是循环群.

命题 89 G 是无限阶循环群, $\bar{G}$ 是任何循环群, 则 G 与 $\bar{G}$ 同态.

1.1.6 子群

定义 90 (子群) 如果一个群 G 的一个子集 H 关于群 G 的乘法也能做成一个群，则称 H 为 G 的一个**子群**.

定理 91 一个群 G 的一个非空子集 H 做成 G 的子群，当且仅当

(i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

(ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

推论 92 若 H 是 G 的子群, 则, H 的单位元就是 G 的单位元, a 在 H 中的逆就是 a 的 G 中的逆.

定理 93 一个群 G 的一个非空子集 H 做成 G 的子群，当且仅当 (iii) $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

定理 94 一个群 G 的一个非空 $\boxed{\text{有限}}$ 子集 H 做成 G 的子群，当且仅当 (i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

说明 95 (验证非空集合是群的方法) (1) I, II, III (2) I、II、IV, V (3) 有限集: I, II, III' (4) 子群: (i), (ii) (5) 子群: (iii) (6) 有限子群: (i)

定义 96 (生成子群) 对于群 G 的非空子集 S, 包含 S 的最小子群, 被称为由 S 生成的子群, 记为 (S).

定理 97 $S = \{a\}$ 时, $(S) = (a)$.

命题 98 循环群的子群也是循环群.

命题 99 H 是群 G 的一个非空子集, 且 H 的每个元素的阶都有限, 则 H 做成子群的充要条件是 (i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

1.1.7 子群的陪集

定义 100 群 G, 子群 H, 规定 G 上的关系 $\sim$: $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

定理 101 上面规定的关系 $\sim$ 是等价关系.

定义 102 (右陪集) 由上述等价关系确定集合的分类叫做 H 的**右陪集**.

定理 103 包含元 a 的右陪集 $= Ha = \{ha \mid h \in H\}$

定义 104 群 G, 子群 H, 规定 G 上的关系 $\sim'$: $a \sim' b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$. 可以证明 $\sim'$ 是等价关系.

定义 105 (左陪集) 由上述等价关系 $\sim'$: $a \sim' b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$, 确定集合的分类叫做 H 的**左陪集**, 包含元 a 的左陪集可以用 $aH = \{ah \mid h \in H\}$ 表示.

定理 106 一个子群的右陪集与左陪集个数相等: 个数或者都是无穷大, 或者都有限且相等.

定义 107 (指数) 一个群 G 的一个子群 H 的右陪集 (或左陪集) 的个数叫做 H 在 G 里的指数.

定理 108 右陪集所含元素的个数等于子群 H 所含元素的个数.

定理 109 H 是一个有限群 G 的子群, 那么 H 的阶 n 和他在 G 中的指数 j 都能整除 G 的阶 N, 并且 $N = nj$

定理 110 (元素的阶整除群的阶) 一个有限群 G 的任何一个元 a 的阶能够整除 G 的阶 $|G|$.

命题 111 阶是素数的群一定是循环群.

命题 112 阶是 p^m 的群 (p 是素数) 一定包含一个阶是 p 的子群.

命题 113 若我们把同构的群看做一样的，一共只存在两个阶是 4 的群，它们都是交换群.

1.1.8 不变子群、商群

定义 114 (不变子群) 群 G 的子群 N 叫做 G 的**不变子群**, 如果 $\forall a \in G$, 有 $Na = aN$. 一个不变子群 N 的一个左 (或右) 陪集叫做 N 的一个**陪集**.

定义 115 $S_1, S_2 \subseteq$ 群 G, 规定子集的乘法 $S_1S_2 = \{s_1s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$. 显然这个乘法满足结合律.

定理 116 已知一个群 G 有一个子群 N, N 是不变子群的充要条件是 $aNa^{-1} = N, \forall a \in G$.

定理 117 已知一个群 G 有一个子群 N, N 是不变子群的充要条件是 $a \in G, n \in N \Rightarrow ana^{-1} \in N$.

定理 118 如果 N 刚好包含 G 的所有具有以下性质的元 n,

$$na = an, \forall a \in G$$

则 N 是 G 的不变子群. 我们称这个不变子群是 G 的**中心**.

定理 119 N 是群 G 的不变子群, 在其陪集 $\{aN, bN, cN, \cdots\}$ 上定义的乘法 $(xN, yN) \mapsto (xy)N$, 则这个乘法是此陪集的二元运算，且此陪集对于上面规定的乘法来说构成一个群.

定义 120 (商群) 一个群 G 的一个不变子群 N 的所有陪集关于陪集的乘法做成的群叫做 G 的**商群**，用 G/N 表示.

定理 121 对于有限群, $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$.

命题 122 H 是 G 的子群, N 是 G 的不变子群, 则 HN 是 G 的子群.

1.1.9 同态与不变子群

定理 123 一个群 G 与它的商群 G/N 同态.

定义 124 (核) ϕ 是群 G 到群 $\bar{G}$ 的一个同态满射, $\bar{G}$ 的单位元 $\bar{e}$ 在 ϕ 之下的所有原象做成的 G 的子集叫做 ϕ 的**核**.

定理 125 G 和 $\bar{G}$ 是两个群, 且 G 与 $\bar{G}$ 同态, 则这个同态满射的核 N 是 G 的一个不变子群, 且 $G/N \cong \bar{G}$.

注意 126 一个群只和 "相当于" 它的商群同态

定义 127 ϕ 是 $A \to \bar{A}$ 的满射, 取 $S \subseteq A$, 定义 S 的象是 S 中所有元素的象做成的集合. 取 $\bar{S} \subseteq \bar{A}$, 定义 $\bar{S}$ 的原象是 $\bar{S}$ 中所有元素的原象做成的集合.

定理 128 G 和 $\bar{G}$ 是两个群, 且 G 与 $\bar{G}$ 同态, 则在这个同态满射之下:
(1) G 的一个子群 H 的象 $\bar{H}$ 也是 $\bar{G}$ 的一个子群.
(2) G 的一个不变子群 N 的象 $\bar{N}$ 也是 $\bar{G}$ 的一个不变子群.
(1') $\bar{G}$ 的一个子群 $\bar{H}$ 的原象 H 也是 G 的一个子群.
(2') $\bar{G}$ 的一个不变子群 $\bar{N}$ 的原象 N 也是 G 的一个不变子群.

注意 129 这也体现了同态的性质, 前面有的后面也有!

命题 130 假定群 G 与群 $\bar{G}$ 同态, $\bar{N}$ 是 $\bar{G}$ 的不变子群, N 是 $\bar{N}$ 的逆象, 则 $G/N \sim \bar{G}/\bar{N}$.

命题 131 假定群 G 与 $\bar{G}$ 是两个有限循环群, 他们的阶各是 m 和 n, 则 G 与 $\bar{G}$ 同态 $\Leftrightarrow n \mid m$

命题 132 假定群 G 是一个循环群, N 是 G 的一个子群, 则 G/N 也是循环群.

1.2 特殊的群

1.2.1 加群

定义 133 (加群) 一个交换群叫做一个的**加群**, 如果我们把这个群的代数运算称为加法, 并且用符号 $+$ 表示.

定义 134 (Σ) n 个元的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 用符号 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n$ 来表示.

定义 135 n 个 a 的和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$ 我们用 na 表示.

定义 136 (零元) 加群唯一的单位元用 $\mathfrak{o}$ 来表示, 并且把它叫做**零元**.

定义 137 (负元) 元 a 的唯一的逆元我们用 $-a$ 来表示, 并且把它叫做 a 的**负元**. $a + (-b)$ 我们简写成 $a - b$.

定理 138 加群满足以下运算规则
(1) $\mathfrak{o} + a = a + \mathfrak{o} = a$
(2) $-a + a = a - a = \mathfrak{o}$
(3) $-(-a) = a$
(4: 移项) $a + c = b \Leftrightarrow c = b - a$
(4) $-(a+b) = -a - b, -(a-b) = -a + b$
(5) $ma + na = (m+n)a, m(na) = (mn)a, n(a+b) = na + nb, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$

说明 139 非空子集 S 做成子群的充要条件变成了
- (i) $a, b \in S \Rightarrow a + b \in S$ (ii) $a \in S \Rightarrow -a \in S$
- 或者 (iii) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$.

第二章　环

2.1　环与域

2.1.1　环的定义

定义 140 (环) 一个集合 R 叫做一个环, 如果

(1) R 是一个加群: R 关于一个叫做加法的代数运算做成一个交换群.

(2) R 对于另一个叫做乘法的代数运算是封闭的.

(3) R 关于乘法结合

(4) 分配率: $a(b+c)=bc+ac,(a+b)c=ac+bc$

定理 141 环还满足以下运算规则

(7) $(a-b)c=ac-bc, c(a-b)=ca-cb$

(8) $\mathfrak{o}a=a\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$

(9) $(-a)b=a(-b)=-(ab)$

(10) $(-a)(-b)=ab$

(11) $a(b_1+b_2+\cdots+b_n)=ab_1+ab_2+\cdots+ab_n,(b_1+b_2+\cdots+b_n)a=b_1a+b_2a+\cdots+b_na$

(12) $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\right)=\sum\limits_{a=1}^{m}\sum\limits_{b=1}^{n}a_ib_j$

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)=a_1b_1+a_1b_2+&\cdots+a_1b_n\\ +a_2b_1+a_2b_2+&\cdots+a_2b_n\\ &+\cdots\\ +a_mb_1+a_mb_2+&\cdots+a_mb_n\end{aligned}$$

(13) $(na)b=a(nb)=n(ab), n\in\mathbb{Z}^+$

(14) 规定 $a^n=\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}, n\in\mathbb{Z}^+$, 则 $a^ma^n=a^{m+n},(a^m)^n=a^{mn}$

2.1.2　子环、环的同态

定义 142 (子环) 一个环 R 的非空子集 S 如果对于 R 的代数运算来说也是环 (整环、除环、域), 则称 S 是 R 的一个**子环** (**子整环、子除环、子域**).

定理 143 若 S 是环 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子环 $\iff a,b\in S\Rightarrow a-b\in S, ab\in S$.

命题 144 环 R 的可以同每个元交换的元做成一个 j 交换子环 $N=\{n\mid an=na,\forall a\in R\}$, 这个子环称为 R 的中心.

定理 145 若 R 是环, R 到 $\bar{R}$ 有一个满射使得对于两个运算都同态, 则 $\bar{R}$ 也是一个环.

说明 146 (环的同态、环的同构) 我们说两个环 R 和 $\bar{R}$ **同态** (**同构**), 如果存在一个 R 到 $\bar{R}$ 的满射 (双射), 使得 R 与 $\bar{R}$ 对于两个环的一对加法以及一对乘法来说都同态.

注意 147 总结下来, 如果 A 与 $\bar{A}$ 同态，那么前面有什么后面就也有什么:

- 前面有结合，后面就也有结合
- 前面有交换，后面就也有交换
- 前面有分配，后面就也有分配
- 前面是群，后面就也是群
- 前面是环，后面就也是环

定理 148 若 R 和 $\bar{R}$ 都是环, 且 R 与 $\bar{R}$ 同态, 则

- R 的零元的象是 $\bar{R}$ 的零元.
- R 的元 a 的负元的象是 a 的象的负元 ($\overline{-a} = -\bar{a}$)
- R 是交换环 $\Rightarrow$ $\bar{R}$ 也是交换环

! R 有单位元 $\imath \Rightarrow \bar{R}$ 也有单位元 $\bar{\imath}$, 且 $\bar{\imath}$ 是 $\imath$ 的象.

- R 无零因子 $\not\Rightarrow$ $\bar{R}$ 无零因子
- R 有零因子 $\not\Rightarrow$ $\bar{R}$ 有零因子
- R 是整环 (除环、域) $\not\Rightarrow$ $\bar{R}$ 是整环 (除环、域)

命题 149 若 R 和 $\bar{R}$ 都是环, 且 R 与 $\bar{R}$ 同态, 则

- R 无零因子 $\not\Rightarrow$ $\bar{R}$ 无零因子
- R 有零因子 $\not\Rightarrow$ $\bar{R}$ 有零因子
- R 是整环 (除环、域) $\not\Rightarrow$ $\bar{R}$ 是整环 (除环、域)

命题 150 R 与 $\bar{R}$ 都是环, 且 $R \cong \bar{R}$, 则

- R 无零因子 $\Leftrightarrow$ $\bar{R}$ 无零因子.
- R 有非零元 $\Leftrightarrow$ $\bar{R}$ 有非零元.
- R 非零元有逆 $\Leftrightarrow$ $\bar{R}$ 非零元有逆

定理 151 R 与 $\bar{R}$ 都是环, 且 $R \cong \bar{R}$, 则

- R 是整环 $\Leftrightarrow$ $\bar{R}$ 是整环.
- R 是除环 $\Leftrightarrow$ $\bar{R}$ 是除环.
- R 是域 $\Leftrightarrow$ $\bar{R}$ 是域.

引理 152 集合 A 和 $\bar{A}$ 之间有一个双射 ϕ, 并且 A 有加法和乘法, 于是我们可以在 $\bar{A}$ 中规定加法和乘法，使得 A 与 $\bar{A}$ 关于一对加法和一对乘法来说都同构.

定理 153 假定 S 是环 R 的一个子环, S 在 R 中的补集 (R - S) 与另一个环 $\bar{S}$ 没有公共元，并且 $S \cong \bar{S}$, 那么存在一个与 R 同构的环 $\bar{R}$，且 $\bar{S}$ 是 $\bar{R}$ 的子环.

说明 154 (!)

$$\left.\begin{array}{c} \text{环 R} \overset{\text{子环}}{\text{——}} \text{环 } S \\ \updownarrow \cong_{\phi} \\ ? \underset{\text{子环}}{\text{——}} \text{环 } \bar{S} \\ \\ (R-S)\cap \bar{S}=\emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ 环 } ? = \bar{R}: \begin{cases} \bar{R}=(R-S)\cup\bar{S} \\ \forall \bar{x},\bar{y}\in\bar{R}: \begin{array}{l} \bar{x}+\bar{y}=\psi(x+y), \bar{x}\bar{y}=\psi(xy), \\ x=\psi^{-1}(\bar{x}), y=\psi^{-1}(\bar{y}) \end{array} \\ R\cong\bar{R}, \psi: x\mapsto \begin{cases} x & x\in R-S \\ \phi(x) & x\in S \end{cases} \end{cases}$$

命题 155 一个除环的中心是一个域.

2.1.3　理想

定义 156 (! 理想) 环 R 的一个非空子集 I 叫做一个**理想子环** (简称**理想**), 如果

1. $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$
2. $a \in I, r \in R \Rightarrow ra, ar \in I$.

命题 157 一个环至少有两个理想 (1) $I = \{o\}$, 叫做 R 的**零理想**. (2) I = R, 叫做 R 的**单位理想**.

定理 158 一个除环 R 只有两个理想，就是零理想和单位理想.

说明 159 因此，理想这个概念对于除环或者域来说没有多大用处.

说明 160 一个环除了以上两个理想之外，可能有其他理想.

命题 161 给定一个环 R，a 是 R 中的任意一个元素，考虑最小的理想 I 使得 $a \in I$. 作集合 $I = \{(x_1ay_1 + x_2ay_2 + \cdots) + sa + at + na \mid x_i, y_i, s, t \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 I 是包含 a 的最小理想.

定义 162 (主理想) 上面的这样的 I 叫做元 a 生成的**主理想**, 用符号 (a) 来表示.

说明 163 一个主理想 (a) 的元的形式并不是永远像上面那样复杂.

1. 当 R 满足交换律时, 可以写成 $ra + na, r \in R, n \in \mathbb{Z}$.
2. 当 R 有单位元时, 可以写成 $\sum x_iay_i, x_i, y_i \in R$.
3. 当 R 既满足交换律又有单位元时, 可以写成 $ra, r \in R$.

命题 164 给定一个环 R，$a_1, a_2, \cdots, a_m \in R$，考虑最小的理想 I 使得 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in I$. 做集合 $I = \{s_1 + s_2 + \cdots + s_m \mid s_i \in (a_i)\}$, 则 I 是包含 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 的最小理想.

定义 165 上面的这样的 I 叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 生成的理想, 用符号 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 来表示.

说明 166 两个元素生成的理想, 可能是主理想，也可能不是.

命题 167

- 群 G 的两个子群的交集还是 G 的子群.
- 两个不变子群的交集还是不变子群.
- 两个子环的交集还是子环.
- 两个子整环的交集还是子整环.
- 两个子除环的交集还是子除环.
- 两个子域的交集还是子域.
- 两个理想的交集还是一个理想.

2.1.4　剩余类环、同态与理想

说明 168 给定一个环 R 和 R 的一个理想 I, 则我们就加法来说, R 做成一个群, I 做成 R 的一个不变子群, 从而 I 的陪集 $[a], [b], [c], \cdots$ 做成 R 的一个分类, 叫做**模 I 的剩余类**. 同时这个分类描述 R 的元素之间的等价关系, 用符号 $a \equiv b \bmod I$ 表示 (读作 a 同余 b 模 I), 即 $a \equiv b \bmod I \Leftrightarrow a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$. 且类 $[a]$ 所包含的元素可以写成 $\{a + u \mid u \in I\}$

定理 169 假定 R 是一个环, I 是它的一个理想, $\bar{R}$ 是所有模 I 的剩余类做成的集合, 如果在 $\bar{I}$ 上规定加法和乘法 $[a] + [b] = [a + b], [a][b] = [ab]$. 那么 $\bar{I}$ 本身也是一个环, 并且 R 与 $\bar{R}$ 同态.

定义 170 (模 I 的剩余类环) 上面的 $\bar{R}$ 叫做环 R 的**模 I 的剩余类环**, 用符号 R/I 来表示.

定理 171 (!) 假定 R 与 $\bar{R}$ 是两个环, 并且 R 与 $\bar{R}$ 同态, 那么这个同态满射的核 I 是 R 的一个理想, 并且 $R/I \cong \bar{R}$

定理 172 在环 R 到环 $\bar{R}$ 的同态满射下:
(1) R 的一个子环的象 $\bar{S}$ 是 $\bar{R}$ 的一个子环.
(2) R 的一个理想 I 的象 $\bar{I}$ 是 $\bar{R}$ 的一个理想.
(3) $\bar{R}$ 的一个子环 $\bar{S}$ 的原象 S 是 R 的一个子环.
(4) $\bar{R}$ 的一个理想 $\bar{I}$ 的原象 I 是 R 的一个理想.

说明 173 环-群, 子环-子群, 理想-不变子群

命题 174 ϕ 是环 R 到环 $\bar{R}$ 的一个同态满射: ϕ 是 R 与 $\bar{R}$ 之间的同构映射 $\Leftrightarrow$ ϕ 的核是零理想.

2.1.5 最大理想

定义 175 (最大理想) 如果一个环 R 的理想 $I(\neq R)$, 除了 R 和 I 以外, 无其他包含 I 的理想, 称 I 为 R 的**最大理想**.

引理 176 假定 $I(\neq R)$ 是环 R 的一个理想: 剩余类环 R/I 除了零理想和单位理想外不再有其他理想 $\Leftrightarrow$ I 是最大理想.

引理 177 若有单位元 $(\neq 0)$ 的交换环 R 除了零理想和单位理想以外没有其他理想, 那么 R 一定是一个域.

定理 178 (!) R 是有单位元的交换环, $I(\neq R)$ 是 R 的理想: R/I 是域 $\Leftrightarrow$ I 是 R 的最大理想.

命题 179 $\mathbb{Z}_n$ 是域 $\Leftrightarrow$ n 是素数.

2.1.6 商域

定理 180 若 R 是无零因子的交换环, 则存在一个包含 R 的域 Q, 使得 Q 刚好是由所有元 $\dfrac{a}{b}$ $(a, b \in R, b \neq 0)$ 所做成的，这里 $\dfrac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a$.

定义 181 (商域) 一个域 Q 叫做环 R 的一个**商域**, 如果 $Q \supseteq R$, 并且 Q 刚好是由所有元 $\dfrac{a}{b}$ $(a, b \in R, b \neq 0)$ 所做成的.

定理 182 假定 R 是一个有两个以上的元的环, F 是一个包含 R 的域，则 F 包含 R 的一个商域.

说明 183 一般来讲, 一个环很可能有两个以上的商域. 不过，同构的环的商域也同构，所以抽象的来讲，一个环最多只有一个商域.

2.2 特殊的环

2.2.1 交换环

定义 184 (交换环) 一个环 R 叫做**交换环**，如果 $ab = ba, \forall a, b \in R$.

命题 185 在一个交换环中 $(ab)^n = a^n b^n$.

2.2.2　无零因子环

说明 186 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或者 $b = 0$ 在环里不一定成立.

定义 187 (零因子) 在一个环 R 中, 若 $a \neq 0, b \neq 0$ 但 $ab = 0$, 则称 a 是 R 的**左零因子**, b 是 R 的**右零因子**. 左零因子和右零因子统称为**零因子**.

注意 188 左零因子不一定是右零因子. 但是如果有左零因子, 就一定有右零因子. 如果 R 是交换环, 则左零因子一定是右零因子.

定理 189 (!) 在一个没有零因子的环里, 左右消去律都成立.

1. $a \neq 0, ab = ac \implies b = c$
2. $d \neq 0, bd = cd \implies b = c$

反过来, 在一个环里如果 $\boxed{\text{有一个}}$ 消去律成立，那么这个环没有零因子.

推论 190 在一个环 R 中如果有一个消去律成立，那么另一个消去律也成立.

命题 191 对于模 p 的剩余类环 $\mathbb{Z}_p$, p 是素数 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_p$ 做成一个域.

命题 192 在一个环 R 里, 对于加法的阶, 可能有的元素是无限的，有的元素是有限的.

定理 193 在一个无零因子环中, 所有非零元素 R 对于加法的阶都相同: 要么都无限大, 要么都有限且相等.

定义 194 (无零因子环的特征) 在一个无零因子环 R 中, 所有非零元关于加法的阶，叫做 R 的**特征**.

定理 195 如果无零因子环 R 的特征是一个有限整数 n, 则 n 一定是素数.

推论 196 整环、除环以及域的特征或者是无限大，或者是一个素数.

2.2.3　整环

说明 197 (!! 整环的判别)

- 整环
  - 环
    - 加群
      - 加法成群: I II IV V
      - 加法交换
    - 乘法: I II
    - 两个分配律
  - 乘法交换
  - 有 1
  - 无零因子

定义 198 (单位元) 对于环 R, 如果 $ea = ae = a$ $(\forall a \in R)$, 则称 e 是环 R 的单位元. 一般，一个环未必有单位元.

命题 199 一个环如果有单位元, 则唯一. 用 1 来表示.

定义 200 (逆元) 若 $ba = 1$, 则称 b 为 a 的**左逆元**. 若 $ba = ab = 1$, 则称 b 为 a 的**逆元**.

命题 201 如果 a 有逆元, 则唯一.

命题 202 如果 a 有逆元, 则规定 $a^{-m}=(a^{-1})^m, a^0=1$. 则 $a^m a^n=a^{m+n}, (a^m)^n=a^{mn}, \forall m,n\in\mathbb{Z}$.

命题 203 (模 n 的剩余类环) $R=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$, 加法: $[a]+[b]=[a+b]$, 乘法: $[a][b]=[ab]$ 做成一个交换环, 被称为**模 n 的剩余类环**, 零元 $0=[0]$, 单位元 $1=[1]$.

定义 204 (整环) 一个环 R 叫做一个**整环**, 如果

1. 乘法适合交换律: $ab=ba$.
2. R 有单位元 1: $1a=a1=a$.
3. R 没有零因子: $ab=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$

命题 205 对于有单位元的环来说, 加法适合交换律是环定义里其他条件的结果.

定理 206 若 S 是整环 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子整环的充要条件是 $(1)a,b\in S \implies a-b\in S, ab\in S$; (2) $1\in S$.

定义 207 (! 整除) 对于整环 I，若 $a\in I$, 存在 $b,c\in I$ 使 $a=bc$, 则称 b 能**整除** a, 记作 $b\mid a$, 称 b 为 a 的**因子**. 若 b 不是 a 的因子，则记作 $b\nmid a$.

定义 208 (因式) 如果 $b\mid a$, 则 b 称为 a 的一个**因式**, a 称为 b 的一个**倍式**.

命题 209 整除关系是一个二元关系, 满足

(1) 反身性, $a\mid a$
(2) ~~对称性~~
(3) 传递性, $a\mid b, b\mid c \implies a\mid c$

定义 210 (相伴) 如果 $a\mid b$ 且 b |a, 则称 a 与 b **相伴**, 记作 $a\sim b$.

定义 211 (相伴等价定义) 元 b 叫做元 a 的**相伴元**，如果存在一个单位 ϵ 使得 $b=\epsilon a$.

2.2.4 除环、域

命题 212 对于元素个数 ≥ 2 的环, $1\neq 0$, 且 0 没有逆元.

定义 213 (除环) 一个环 R 叫做一个**除环**, 如果

1. R 至少含有一个不等于零的元.
2. R 有单位元.
3. R 的任何一个非零元都有逆.

定义 214 (域) 一个交换除环叫做一个**域**.

性质 215 除环没有零因子.

性质 216 除环 R 的所有非零元对于乘法来说做成一个群 R^*, 我们把 R^* 叫做**除环 R 的乘群**.

说明 217 对于一个环 R 来说, 从 R^* 是对于乘法做成一个群, 也能推出 R 是除环.

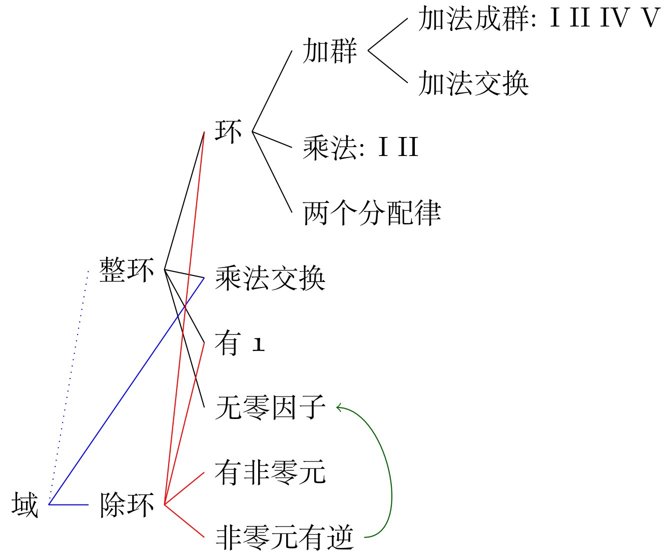
说明 218 在除环 R 中, 方程 $ax=b, ya=b(a\neq 0)$ 都有唯一解, 分别是 $a^{-1}b$ 和 ba^{-1}, 他们未必相等. 在一个域里 $a^{-1}b=ba^{-1}$, 用符号 $\dfrac{b}{a}$ 表示.

性质 219 域满足以下计算法则

1. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$.
2. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.
3. $\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$.

命题 220 存在不是域的除环, 例如**四元数除环**.

说明 221 ! 环、整环、域之间的关系:



命题 222 一个至少有两个元且没有零因子的有限环，是一个除环.

定理 223 若 S 是除环 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子除环的充要条件是 (1) S 有非零元; (2) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$; (3) $\forall a, b \in S, b \neq 0 \Rightarrow ab^{-1} \in S$.

定理 224 若 S 是域 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子域的充要条件是 (1) S 有非零元; (2) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$; (3) $\forall a, b \in S, b \neq 0 \Rightarrow ab^{-1} \in S$.

2.2.5　一元多项式环 $R[x]$

说明 225 假定 R_0 是一个有单位元的交换环, R 是 R_0 的子环, 并且包含 R_0 的单位元. 取 $\alpha \in R_0$, 则 $\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$ $(a_i \in R)$ 有意义, 且 $\in R_0$.

定义 226 (多项式) 一个可以写成 $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n (a_i \in R,\ n \in \mathbb{Z}^+)$ 形式的 R_0 的元叫做 R 上的关于 α 的一个**多项式**, a_i 叫做多项式的**系数**. 我们把所有 R 上的 x 的多项式放在一起, 做成一个集合，用 $R[\alpha]$ 来表示.

说明 227 (环上的多项式构成一个环) 在 $R[x]$ 上定义

$$\text{加法: } \sum_i a_i\alpha^i + \sum_i b_i\alpha^i = \sum_i (a_i + b_i)\alpha^i$$

$$\text{乘法: } \left(\sum_{i=0}^{m} a_i\alpha^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\alpha^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \alpha^{i+j} = \sum_{i=s}^{mn}\left(\sum_{i+j=s} a_i b_j\right)\alpha^s$$

都为初等代数里的计算方法, 则 $R[\alpha]$ 构成一个交换环.

定义 228 (未定元) R_0 里得一个元 x 叫做 R 上的一个**未定元**, 如果在 R 里找不到不都等于零的元 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 使得 $a_0 + a_1x + a_2x^2 \cdots + a_nx^n = 0$

命题 229 (!) R 上的一个未定元 x 的多项式 $f(x)$(简称**一元多项式**) 的表法唯一，即如果不计入系数是零的项, 只能用一种方式写成 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ $(a_i \in R)$

定义 230 (多项式的次数) 令 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \cdots + a_nx^n = 0, a_n \neq \mathbf{0}$ 是环 R 上的一个一元多项式, 那么非负整数 n 叫做这个多项式的**次数**, 记作 $\deg f(x)$. 0 次多项式等同于 R 中的非零元, 多项式 0(称为**零多项式**) 的次数规定为 $-\infty$.

说明 231 数域 K 上的一元多项式 $K[x]$ 对于加法和数量乘法成为数域 K 上的一个无限维线性空间, $\Omega = \{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ 是 $K[x]$ 的一个基.

命题 232 对于给定的 R_0 来说, R_0 未必含有 R 上的未定元.

定理 233 给了一个有单位元的交换环 R, 一定有一个环 R_0, R 上的未定元 $x \in R_0$ 存在，因此也就有 R 上的多项式环 $R[x]$ 存在.

说明 234 对于一个有单位元的交换环 R_0, 和它的一个子环 R, 其中 R 包含 R_0 的单位元. 我们从 R_0 里任意取出 n 个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来, 那么我们可以做 R 上的 x_1 的多项式环 $R[x_1]$, 然后做 $R[x_1]$ 上的 x_2 的多项式环 $R[x_1][x_2]$. 这样下去, 可以得到 $R[x_1][x_2]\cdots[x_n]$. 这个环包括所有可以写成 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ $(a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in R$, 但只有有限个 $a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \neq 0)$ 形式的元.

定义 235 一个有上述形式的元叫做 R 上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个多项式，$a_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 叫做多项式的系数. 环 $R[x_1][x_2]\cdots[x_n]$ 叫做 R 上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式环. 这个环我们也用符号 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 来表示.

命题 236 假定 R 是一个整环, 那么 R 上的一元多项式环也是一个整环.

2.2.6 数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$

说明 237 数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$ 是一个欧式环、主理想环、唯一分解环、整环.

性质 238 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则

$$\deg\Big(f(x) + g(x)\Big) \leq \max\Big(\deg f(x), \deg g(x)\Big)$$
$$\deg\Big(f(x)g(x)\Big) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

推论 239 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则

$$f(x) \neq 0, g(x) \neq 0 \implies f(x)g(x) \neq 0$$

推论 240 (消去律) 设 $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$, 则

$$f(x)g(x) = f(x)h(x) \ \ \& \ \ f(x) \neq 0 \implies g(x) = h(x)$$

说明 241 任给 $A \in M_n(K)$, 矩阵 A 的多项式组成的集合 $K[A]$. 容易验证非空集合 $K[A]$ 对于矩阵的减法和乘法封闭, 从而 $K[A]$ 是环 $M_n(K)$ 的一个子环. 且 $K[A]$ 是有单位元的交换环.

说明 242 KI 是 $K[A]$ 的一个子环.

定理 243 (一元多项式环的通用性质) 设 K 是一个数域, R 是一个有单位元 $1'$ 的交换环. 且 K 到 R 的一个子环 R_1(含有 $1'$) 有一个同构映射 τ. 任给 $t \in R$, 令

$$\sigma_t : K[X] \to R$$
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \tau(a_i) t^i \triangleq f(t)$$

则 σ_t 是 $K[x]$ 到 R 的一个映射, 且 $\sigma_t(x) = t$, 且 σ_t 保持加法、乘法运算, 即

$$f(x) + g(x) = h(x), f(x)g(x) = p(x) \implies f(t) + g(t) = h(t), f(t)g(t) = p(t)$$

称 σ_t 是 x 用 t 带入.

说明 244 定理回答了为什么多项式环的未定元可以带入特定的值.

$$\left.\begin{array}{ccc} K[x] & \overset{\text{子环}}{\text{———}} & \text{数域 } K \\ \sigma\big\downarrow & & \tau\big\downarrow\cong \\ \text{含幺交换环 } R & \underset{\text{子环}}{\text{——}} & \text{含幺子环 } R_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \forall t\in R, \exists \sigma_t : K[X]\to R \\ \quad f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \tau(a_i)t^i \triangleq f_\tau(t) \\ \text{满足} \\ \quad \sigma_t(x)=t \\ \quad f(x)+g(x)=h(x) \Rightarrow f_\tau(t)+g_\tau(t)=h_\tau(t) \\ \quad f(x)g(x)=p(x) \Rightarrow f_\tau(t)g_\tau(t)=p_\tau(t) \end{cases}$$

命题 245 在 $K[x]$ 中, 如果 $g(x) \mid f(x)$, 其中 $f(x)\neq 0$, 则 $\deg g(x) \leq \deg f(x)$.

命题 246 若 $f(x), g(x) \in K[x]$, 那么

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) = cg(x)\ (c \in K^*)$$

定理 247 (带余除法) 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则 $\boxed{\text{唯一}}$ 的存在 $K[x]$ 中一对多项式 $h(x), r(x)$, 使得 $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$. 我们把 $h(x)$ 叫做**商式**, $r(x)$ 叫做**余式**.

说明 248 因为证明用到逆元, 所以要是至少是除环 (我还没确定够不够), 普通环肯定不行.

推论 249 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则

$$g(x) \mid f(x) \iff g(x) \text{ 除 } f(x) \text{ 的余式是 } 0.$$

2.3　具体的环

2.3.1　整数环

定义 250 (整数环) 整数关于普通加法和乘法构成的环.

命题 251 整数环是一个整环.

2.3.2　$M_n[K]$

说明 252 数域 K 上的所有 n 级矩阵 $M_n[K]$, 对于矩阵的加法和乘法构成一个环.

2.4　线性空间

第三章　XXX

3.1　整环里的因子分解

3.1.1　素元、唯一分解

定义 253 (单位) 整环 I 的元 ϵ 叫做 I 的一个**单位**, 如果 ϵ 有逆. (整环里面随便一个可逆的元都叫做一个单位)

定理 254 ϵ_1 和 ϵ_2 是单位 $\Rightarrow \epsilon_1\epsilon_2$ 是单位; ϵ 是单位 $\Rightarrow \epsilon^{-1}$ 也是单位.

命题 255 a 和 b 不是单位 $\Rightarrow ab$ 不是单位.

说明 256 相伴元对应的关系是一个等价关系.

定义 257 (平凡因子、真因子) $\forall a \in$ 整环 I, 所有的单位以及 a 的相伴元, 叫做 a 的**平凡因子**. 其余的 a 的因子, 如果还有的话, 叫做 a 的**真因子**.

定义 258 (素元) 一个整环 I 的一个元 p 叫做一个**素元**, 如果 p (1) 既不是零元, (2) 也不是单位, 并且 (3) p 只有平凡因子.

定理 259 p 是素元, ϵ 是单位 $\Rightarrow \epsilon p$ 也是素元.

定理 260 (!!) 若 I 是整环, $a \in I$, $a \neq \mathfrak{o}$, 则 a 有真因子 $\Leftrightarrow \exists b, c$ 都不是单位使得 $a = bc$, .

推论 261 $a \neq 0$, a 有真因子 b $(a = bc) \Rightarrow c$ 也是 a 的真因子.

说明 262 a 有真因子 $\Rightarrow \exists\, b, c$ 为 a 的真因子使得 $a = bc$

定义 263 (唯一分解) 我们说, $a \in$ 整环 I, 在 I 里有**唯一分解**, 假如以下条件都能被满足

(i) 能分解: $a = p_1p_2\cdots p_r$ (p_i 是 I 的素元).

(ii) 若同时 $a = q_1q_2\cdots q_s$ (q_i 是 I 的素元), 则 $r = s$, 且我们可以把 q_i 的次序调换, 使得 $q_i = \epsilon_i p_i$ (ϵ 是 I 的单位)。

说明 264 若 a 在环 I 中有唯一分解, 则 $a \neq \mathfrak{o}$ 且 a 不是单位.

说明 265 一个整环的 $\neq \mathfrak{o}$ 也不是单位的元, 不一定都有唯一分解.

命题 266 $\mathfrak{o}$ 不是任何元的真因子.

命题 267 定义 I 为所有可以写成 $\dfrac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ 形式的有理数, 则 I 是整环, 其单位是所有等于 $2^n, n \in \mathbb{Z}$ 的数.

3.1.2　唯一分解环

定义 268 (唯一分解环) 一个整环 I 叫做一个**唯一分解环**, 如果 I 的每一个既 $\neq 0$ 也不是单位的元，都有唯一分解.

定理 269 一个唯一分解环有以下性质,
(iii) 素元 $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$.

定理 270 如果一个整环 I 满足:
(i) $\forall\, a \in I$, $a \neq 0$, a 不是单位, 都可以写成 $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ (p_i 是素元).
(iii) 素元 $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$.
则整环 I 是一个唯一分解环.

定义 271 (公因子) 元 c 叫做元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**公因子**, 如果 c 能同时整除 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个公因子 d 叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**最大公因子**, 如果 d 能被 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的每个公因子整除.

定理 272 若 I 是一个唯一分解环, $a, b \in I$, 则 a, b 在 I 里一定有最大公因子. 若 d, d' 都是 a, b 的最大公因子, 则它们只差一个单位因子: $d' = \epsilon d$ (ϵ 是单位).

推论 273 一个唯一分解环 I 的 n 个元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在 I 里一定有最大公因子, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的两个最大公因子只能差一个单位因子.

定义 274 (互素) 我们说, 一个唯一分解环的元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素，如果他们的最大公因子是单位.

命题 275 假定在一个唯一分解环里 $a_1 = db_1, a_2 = db_2, \cdots a_n = db_n (d \neq 0)$, 我们有

$$d \text{ 是 } a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ 的最大公因子} \Leftrightarrow b_1, b_2, \cdots, b_n \text{ 互素}.$$

3.1.3　主理想环

定义 276 (主理想环) 一个整环 I 叫做一个**主理想环**, 如果 I 的每一个理想都是一个主理想.

引理 277 假定 I 是一个主理想环, 若存在序列 $a_1, a_2, \cdots$ $(a_i \in I)$ 的每一个元素都是前面一个元素的真因子, 则这个序列一定是一个有限序列.

引理 278 (!!) 假定 I 是一个主理想环, p 是 I 的一个素元, 则 p 生成的理想 (p) 一定是 I 的最大理想.

定理 279 一个主理想环 I 一定是一个唯一分解环.

命题 280 假定 I 是一个主理想环, 并且 $(a, b) = (d)$, 那么 d 是 a 和 b 的一个最大公因子, 因此 a 和 b 的任何一个最大公因子 d' 都可以写成 $d' = sa + tb$ $(s, t \in I)$ 的形式.

命题 281 一个主理想环的非零最大理想都是由一个素元所生成的.

命题 282 两个主理想环 I 和 I_0, I_0 是 I 的子环, a 和 b 是 I_0 的两个元，d 是这两个元在 I_0 里得一个最大公因子，则 d 也是这两个元在 I 里的最大公因子.

3.1.4　欧氏环

定义 283 (欧氏环) 一个整环 I 叫做一个**欧氏环**, 如果

- 有一个从 I 的非零元所做成的集合到 ≥ 0 的整数集合的映射 ϕ 存在.
- 给定一个 I 的非零元 a, 则 I 的任何元 b 都可以写成 $b = aq + r$ $(q, r \in I)$ 的形式，这里或者 $r = 0$, 或者 $\phi(r) < \phi(a)$.

定理 284 任何欧氏环 I 一定是是主理想环, 从而一定是一个唯一分解环.

说明 285 整数环是一个欧式环, 从而是一个主理想环，因而是一个唯一分解环.

引理 286 假定 $I[x]$ 是整环 I 上的一个一元多项式环, $I[x]$ 的元 $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的最高系数 a_n 是 I 的一个单位. 那么 $I[x]$ 的任意多项式 $f(x)$ 都可以写成 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ $(q(x), r(x) \in I[x])$ 的形式, 这里或者 $r(x) = 0$ 或者 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数 n.

定理 287 (!) 一个域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 是一个欧式环. ($\Rightarrow F[x]$ 是主理想环 $\Rightarrow F[x]$ 是唯一分解环).

3.1.5　多项式环的因式分解

定义 288 一个素多项式 (多项式环的素元) 叫做**不可约多项式**, 一个有真因子的多项式叫做**可约多项式**.

命题 289 I 的单位是 $I[x]$ 仅有的单位.

定义 290 (本原多项式) $I[x]$ 的一个元 $f(x)$ 叫做一个**本原多项式**, 如果 $f(x)$ 的系数的最大公因子是单位.

命题 291 一个本原多项式 $\neq$ o.

命题 292 若本原多项式 $f(x)$ 可约, 则 $f(x) = g(x)h(x)$, 这里 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数都 > 0, 因而都 $< f(x)$ 的次数.

引理 293 假定 $f(x) = g(x)h(x)$, 那么 $f(x)$ 是本原多项式 $\Leftrightarrow g(x)$ 和 $h(x)$ 都是本原多项式.

引理 294 对于一个唯一分解环 I, 他的商域 Q 做成的一元多项式环 $Q[x]$, $Q[x]$ 中的每个不等于零的多项式 $f(x)$ 都可以写成 $f(x) = \dfrac{b}{a} f_0(x)$ 的样子. 这里 $a, b \in I$, $f_0(x)$ 是 $I[x]$ 上的本原多项式. 若 $g_0(x)$ 也有 $f_0(x)$ 的性质 (即 $f(x)$ 可以写成 $\dfrac{b'}{a'} g_0(x)$ 的形式)，则 $g_0(x) = \epsilon f_0(x)$ (ϵ 是 I 的单位) .

引理 295 $I[x]$ 的一个本原多项式 $f_0(x)$ 在 $I[x]$ 里可约 $\Leftrightarrow f_0(x)$ 在 $Q[x]$ 里可约.

引理 296 $I[x]$ 中的一个次数 > 0 的本原多项式 $f_0(x)$ 在 $I[x]$ 中有唯一分解.

定理 297 一个唯一分解环 I 上的多项式环 $I[x]$ 也是唯一分解环.

定理 298 若 I 是唯一分解环, 那么 $I[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 也是, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 I 上的未定元.

3.1.6　因式分解与多项式的根

定义 299 a ($\in$ 整环 I) 叫做 $I[x]$ 的多项式的**根**, 如果 $f(a) =$ o.

定理 300 a ($\in$ 整环 I) 是 $f(x)$ 的一个根 $\Leftrightarrow (x - a) \mid f(x)$.

定理 301 给定整环 I 的 k 个不同的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 那么 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 都是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) \mid f(x)$.

推论 302 $I[x]$ 中的 n 次多项式 $f(x)$, 在 I 中最多有 n 个根.

定义 303 (重根) a ($\in I$) 叫做 $f(x)$ 的一个**重根**, 如果 $(x - a)^k \mid f(x)$, k 是 ≥ 2 的整数.

定义 304 (导数) 对于 $I[x]$ 中的多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 定义它的**导数** $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1$

说明 305 这只是一个形式上的定义，不能从极限的角度来理解.

命题 306 导数适合以下计算规则

(i) $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$.
(ii) $[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$
(iii) $[f(x)^t]' = tf(x)^{t-1}f'(x)$, $t(\in\mathbb{Z})\geq 2$

定理 307 假定 a 是 $f(x)$ 的一个根, 我们有

$$a \text{ 是一个重根} \Leftrightarrow (x-a)\mid f'(x)$$

推论 308 假定 $I[x]$ 是一个唯一分解环, $a\in I[x], f(x)\in I[x]$, 我们有

$$a \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个重根} \Leftrightarrow (x-a) \text{ 能够整除 } f(x) \text{ 和 } f'(x) \text{ 的最大公共因子.}$$

定义 309 如果 $(x-a)^k\mid f(x)$, 但是 $(x-a)^{k+1}\nmid f(x)$, $k\in\mathbb{Z}^+$, 则称 a 是 $f(x)$ 的 k 重根.

定理 310 a 是 $f(x)$ 的 k 重根 $\Rightarrow (x-a)^{k-1}\mid f'(x)$.

定理 311 假定整环 I 的特征是无穷的, 我们有

$$a \text{ 是 } f(x) \text{ 的 } k \text{ 重根} \Rightarrow a \text{ 是 } f'(x) \text{ 的 } k-1 \text{ 重根.}$$

3.2 扩域

定义 312 (扩域) 一个域 E 叫做一个域 F 的**扩域 (扩张)**, 如果 F 是 E 的子域.

定理 313 令 E 是一个域.

- 若 E 的特征是 ∞, 则 E 含有一个与有理数同构的子域;
- 若 E 的特征是素数 p, 则 E 含有一个域 $\mathbb{Z}/(p)$ 同构的子域, 其中 $\mathbb{Z}$ 是整数环.

定义 314 (素域) 一个域叫做一个**素域**, 假如他不包含真子域.

说明 315 一个素域或者与有理数域 $\mathbb{Q}$ 同构, 或者与 $\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}/(p)$ 同构.

说明 316 令域 E 是与 F 的扩域. 我们从 E 中取一个子集 S. 我们用 $F(S)$ 表示包含 F 和 S 中的所有元素的 E 的最小子域, 把它叫做添加几个 S 于 F 所得的扩域.

说明 317 $F(S)$ 刚好包含 E 的一切可以写成 $\dfrac{f_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}{f_2(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}$ 形式的元, 其中 α_i 是 S 中的任意有限个元素, f_1 和 f_2 $(f_2\neq 0)$ 是这些 α 的多项式.

说明 318 若 S 是一个有限子集, $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, 那么我们也把 $F(S)$ 记作 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

定理 319 令 E 是 F 的一个扩域, S_1,S_2 是 E 的两个子集, 那么 $F(S_1)(S_2)=F(S_1\cup S_2)=F(S_2)(S_1)$.

说明 320 于是我们可以把添加有限集归结为陆续添加单个元素: $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=F(\alpha_1)(\alpha_2)\cdots(\alpha_n)$.

定义 321 (单扩域) 添加一个元素 α 于域 F 所得的扩域 $F(\alpha)$ 叫做域 F 的**单扩域** (**单扩张**).

3.2.1 单扩域

定义 322 (代数元、超越元) 假定 E 是 F 的扩域, $\alpha\in E$. α 叫做域 F 上的一个**代数元**, 若 $\exists a_0,a_1,\cdots,a_n$ 不都等于零，使得 $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$. 如果这样的 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 不存在, α 叫做 F 上的一个**超越元**.

定义 323 (单代数扩域、单超越扩域) 若 α 是 F 上的一个代数元, $F(\alpha)$ 叫做 F 的一个**单代数扩域**; 若 α 是 F 上的一个超越元, $F(\alpha)$ 就叫做 F 的一个**单超越扩域**.

定理 324 若 α 是 F 上的一个超越元, 那么 $F(\alpha)\cong F[x]$ 的商域, 其中 $F[x]$ 是 F 上的一个未定元 x 的多项式环.

定理 325 若 α 是 F 上的一个代数元, 那么 $F(\alpha) \cong F[x]/(p(x))$, 其中 $p(x)$ 是 $F[x]$ 的一个 $\boxed{\text{唯一}}$ 确定的、最高系数为 1 的不可约多项式, 并且 $p(\alpha) = 0$.

定理 326 令 α 是域 F 上的一个代数元, 并且 $F(\alpha) \cong F[x]/(p(x))$, 那么 $F(\alpha)$ 的每一个元都可以唯一的表达成 $\sum_{i=0}^{n-1} c_i\alpha_i$ $(c_i \in F)$ 的形式, 这里 n 是 $p(x)$ 的系数. 要把两个多项式 $f(\alpha)$ 和 $g(\alpha)$ 相加，只需把相应的系数相加; $f(\alpha)$ 与 $g(\alpha)$ 的乘积等于 $r(\alpha)$, 这里 $r(x)$ 是用 $p(x)$ 除 $f(x)g(x)$ 所得的余式.

定义 327 (极小多项式) $F[x]$ 中满足条件 $p(\alpha) = 0$ 的次数最低的多项式 $p(x) = x_n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ $(c_i \in F)$, 叫做元 α 的在 F 上的**极小多项式**, n 叫做 α 的在 F 上的**次数**.

说明 328 F 的单超越扩域是存在的, 且它们相互同构.

定理 329 对于任一给定的域 F 以及 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 的给定不可约多项式 $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$, 总存在 F 的单代数扩域 $F(\alpha)$, 其中 α 在 F 上的极小多项式是 $p(x)$.

定理 330 令 $F(\alpha)$ 和 $F(\beta)$ 是域 F 的两个单代数扩域, 并且 α 和 β 在 F 上有相同的极小多项式 $p(x)$. 那么 $F(\alpha) \cong F(\beta)$.

定理 331 在同构的意义下，存在且仅存在域 F 的一个单扩域 $F(\alpha)$，其中 α 的极小多项式是 $F[x]$ 的给定的，最高次数为 1 的不可约多项式.

3.2.2 代数扩域

定理 332 (代数扩域) 若域 F 的扩域 E 的每一个元都是 F 上的一个代数元, 那么 E 叫做 F 的一个**代数扩域** (**代数扩张**).

定义 333 若是域 F 的一个扩域 E 作为 F 上的向量空间有维数 n, 那么 n 叫做**扩域 E 在 F 上的次数**, 记作 $(E : F)$. 这时 E 叫做 F 的一个**有限扩域**, 否则 E 叫做域 F 的一个**无限扩域**.

定理 334 令 I 是域 F 的有限扩域, 而 E 是 I 的有限扩域. 那么 E 也是 F 的有限扩域, 并且 $(E : F) = (E : I)(I : F)$.

说明 335 已经听不懂了!!! 感觉需要补高等代数中的向量空间的知识...