高等代数笔记

管清文

2020 年 3 月 25 日

目录

性质 (Property) 结果值得一记, 但是没有定理深刻.

注意 (Remark) 涉及到一些结论，更像是非正式的定理.

说明 (Note) 就是注解.

说明 1 线性代数的主线是: 研究线性空间和线性映射.

1 n 阶行列式

命题 2 n 阶上三角形行列式的值，等于它的主对角线上的 n 个元素的乘积.

性质 3 $\det A = \det A'$

性质 4 行列式一行的公因子可以提出去, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (k \in K)$$

性质 5

$$\begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 + c_1 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 两行互换, 行列式反号.

$$\begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array}$$

性质 7 两行成比例, 行列式值为 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 8 把一行的倍数加到另一行上，行列式值不变.

$$\begin{array}{r} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} + \ell a_{i1} & \cdots & a_{kn} + \ell a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (\text{row } i) \\ \\ (\text{row } k) \\ \\ \\ \end{array}$$

命题 9

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = [k + (n-1)\lambda]\,(k-\lambda)^{n-1}$$

定义 10 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 划去 A 的第 i 行第 j 列剩下元素按原来顺序排列构成余子式 M_{ij}, 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

定理 11 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 i 行元素与自己的代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

定理 12 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 j 列元素与自己的代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

定理 13 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, $i \neq k$ 时 $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0$.

定理 14 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, $j \neq \ell$ 时 $a_{1j}A_{1\ell} + a_{2j}A_{2\ell} + \cdots + a_{nj}A_{n\ell} = 0$.

命题 15 n 阶范德蒙行列式 $(n \geq 2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

定理 16 数域 K 上的 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的充要条件是他的系数行列式不等于 0.

推论 17 数域 K 上的 n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解的充要条件是它的系数行列式不等于 0; 它有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于 0.

说明 18 克莱姆法则等到第四章再给.

说明 19 数学上凡是重要的概念, 虽然可能是因为研究某一类内容提出的, 但是它一经提出来就不仅仅是解决这个问题了, 它可能解决高等代数里很多其他特定的问题, 而且还能解决几何学、分析学的好多问题.

定义 20 n 阶行列式 $|A|$ 中任意取定 k 行 k 列 $(1 \le k < n)$, 位于这些行和列的交叉处的 k^2 个元素按原来的排法组成的 k 阶行列式, 称为 $|A|$ 的一个 k **阶子式**. 取定 $|A|$ 的第 $i_1, i_2, \cdots i_k$ 行 $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, 第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列 $(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$, 所得到的 k 阶子式记作

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \tag{1}$$

划去这个 k 阶子式所在的行和列, 剩下的预算按照原来的排法组成的 $(n-k)$ 阶行列式, 称为子式 (1) 的**余子式**, 令

$$\{i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$$

$$\{j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\} - \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$$

其中 $i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-k}, j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_{n-k}$, 则子式 (1) 的余子式为

$$A\begin{pmatrix} i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

它的前面乘以

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$$

则称为子式 (1) 的**代数余子式**.

定理 21 (Laplace **定理**) 在 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ 中, 取定第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行 $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, 则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$, 即

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} A\begin{pmatrix} i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

推论 22

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & d_{r1} & \cdots & d_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} \end{vmatrix}$$

也记成

$$\begin{vmatrix} A_{k\times k} & 0 \\ C & D_{r\times r} \end{vmatrix} = |A| \cdot |D|$$

2 线性空间

2.1 域上的线性空间的定义

定义 23 (**线性空间**) 一个非空集合 V, 如果它有加法运算 (即 $V \times V \to V : (\alpha,\beta) \mapsto \alpha + \beta$), 其元素与域 F 的元素之间有纯量乘法运算 (即 $F \times V \to V : k \times \alpha \mapsto k\alpha$), 并且满足下面的 8 条运算法则 $(\forall \alpha,\beta,\gamma \in V, \forall k,\ell \in F)$,

(1) 加法交换: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
(2) II(加法结合): $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
(3) IV: $\exists 0 \in V$ 使得 $\alpha + 0 = \alpha$, 具有该性质的元素 0 称为 V 的**零元**.
(4) V: $\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V$ 使得 $\alpha + \beta = 0$, 具有该性质的元素 b 称为 a 的**负元**
(5) $g\alpha = \alpha$, 其中 g 是 F 的单位元.
(6) $(k\ell)\alpha = k(\ell\alpha)$
(7) $(k + \ell)\alpha = k\alpha + \ell\alpha$
(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

则称 V 是域 F 上的一个**线性空间**.

性质 24 设 V 是域 K 上的一个线性空间，则它满足以下性质 $(\forall k \in F, \forall \alpha \in V)$:

(1) V 的零元唯一
(2) α 的负元唯一
(3) $0\alpha = 0$
(4) $k0 = 0$
(5) $k\alpha = 0 \Rightarrow k = 0$ 或 $\alpha = 0$
(6) $(-1)\alpha = -\alpha$

2.2 线性子空间

定义 25 (**线性子空间**) 设 V 是域 F 上的一个线性空间, U 是 V 的一个非空子集, 如果 U 对于 V 的加法和纯量乘法, 也构成域 F 上的一个线性空间, 则称 U 是 V 的一个**线性子空间**, 简称**子空间**.

定理 26 (!!!) 设 U 是域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集, 则 U 是 V 的一个子空间的充分必要条件是: U 对于 V 的加法和纯量乘法都封闭, 即

$$\alpha,\beta \in U \Rightarrow \alpha + \beta \in U$$

$$k \in F, \alpha \in U \Rightarrow k\alpha \in U$$

说明 27 $\{0\}, V$ 都是 V 的子空间，称为 V 的**平凡子空间**, $\{0\}$ 称为**零子空间**, 可记作 .

定义 28 对于 V 中的一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和域 F 中的一组元素 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 作纯量乘法和加法得到

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

仍然是 V 中的一个向量, 称这个向量是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个**线性组合**. 像 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 这样按照一定顺序写出的 $\boxed{\text{有限}}$ 多个向量 (允许有相同的向量) 称为 V 的一个**向量组**.

定义 29 (**线性表出**) V 中的一个向量 β 如果能够表示成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合, 那么称 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性表出**.

定义 30 (**由向量组生成的线性子空间**) 设 V 是域 F 上的一个线性空间, 给定 V 的一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$. 考虑 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的所有线性组合构成的集合

$$W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_i \in F, i = 1, \cdots, s\}$$

则 W 是 V 的一个子空间. 把 W 称为向量组**生成** (或**张成**) **的线性子空间**, 记作 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle$ 或者 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

说明 31 对于数域 K 上的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

可以写成

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_\mathrm{n} = \beta$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mathrm{n}$ 是原线性方程组的系数矩阵的列向量组; β 是由常数项组成的列向量.

说明 32

$$\begin{aligned} &\text{数域 } K \text{ 上线性方程组 } x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_\mathrm{n} = \beta \text{ 有解} \\ \Leftrightarrow\ & \beta \text{ 可以由 } \alpha_1, \cdots, \alpha_n \text{ 线性表出} \\ \Leftrightarrow\ & \beta \in \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle \end{aligned}$$

说明 33 于是下一步的任务: 研究线性空间和它的子空间的结构.

2.3 线性相关与线性无关的向量组

定义 34 (**线性相关**) 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, 对于 V 中的一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mathrm{s}$ $(s \geq 0)$ 如果有 K 中不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

被称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mathrm{s}$ **线性相关**; 否则 (也就是 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$), 称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性无关**.

说明 35 (!) K^s 中, 列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ K 上的 n 元齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 有非零解

说明 36 (!) K^s 中, 列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关
$\Leftrightarrow$ K 上的 n 元齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 只有零解

说明 37 K^n 中, 列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ K 上的 n 元齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 有非零解
$\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为列向量组的矩阵 A 的行列式 $= 0$.

说明 38 (!!!!) K^n 中,

列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为列向量组的矩阵 A 的行列式 $\neq 0$.

说明 39 设 V 是数域 K 上的一个线性空间,

(1) α 线性相关 $\Leftrightarrow$ 有 $k \neq 0$ 使得 $k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

(2) 从而, α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

! (3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 如果有一个部分组线性相关, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

(4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 如果线性无关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 任何一个部分组都线性无关.

(5) 含有 0 的任何一个向量组都线性相关.

(6) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余的向量线性表出.

(7) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s \geq 2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 其中每一个向量都不能由其余的向量线性表出.

!!!! (8) 如果向量组线性无关, 那么把每个向量填上 m 个分量 (所填分量的位置对于每个向量都一样) 得到的**延伸组**也线性无关.

! (9) 如果向量组线性相关, 那么把每个向量去掉 m 个分量 (去掉的分量的位置对于每个向量都一样) 得到的**缩短组**也线性相关.

命题 40 (!!) 设 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 则

表出方式唯一 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

命题 41 (!!!) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.

2.4 极大线性无关组, 向量组的秩

定义 42 (**极大线性无关组**) 向量组的一个部分组如果满足以下两个条件

(1) 这个部分组本身是线性无关的

(2) 从这个向量组的其余向量 (如果还有的话) 中任取一个添进去, 得到的新的部分组都线性相关.

那么称这个部分组是向量组的一个**极大线性无关组**.

定义 43 若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中每一个向量都可以由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表出, 则称向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表出. 如果向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 可以互相线性表出, 那么称向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ **等价**, 记作

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$$

注意 44 $\{0\}$ 不能由空集线性表出.

命题 45 (!) 一个向量组和它的任意一个极大线性无关组等价.

推论 46 向量组的任意两个极大线性无关组等价.

引理 47 (!!) 设向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出,

$$r > s \Rightarrow \beta_1, \cdots, \beta_r \text{ 线性相关}.$$

推论 48 设向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出,

$$\beta_1, \cdots, \beta_r \text{ 线性无关} \Rightarrow r \leq s.$$

推论 49 等价的线性无关的向量组的个数相等.

推论 50 向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等.

定义 51 (!!!!!, **向量组的秩**) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的**秩**, 记作

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$$

全由零向量租组成向量组的秩规定为 0.

命题 52 向量组的任意一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.

命题 53 (!!!) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = s$.

命题 54 (!!) 向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出, 则 $\operatorname{rank}(\mathrm{I}) \leq \operatorname{rank}(\mathrm{II})$.

推论 55 (!!) 等价的向量组的秩相等.

2.5 基与维数、坐标

定义 56 (!) 设 V 是数域 K 上的线性空间,

$$V \text{ 的一个有限多重子集 } [[\alpha_1, \cdots, \alpha_s]] \text{ 线性相关} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{向量组 } \alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{ 线性相关}.$$
$$V \text{ 的一个有限多重子集 } [[\alpha_1, \cdots, \alpha_s]] \text{ 线性无关} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{向量组 } \alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{ 线性无关}.$$
$$V \text{ 的一个无限多重子集 } \mathfrak{S} \text{ 线性相关} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{S} \text{ 有一个有限子集是线性相关的}.$$
$$V \text{ 的一个无限多重子集 } \mathfrak{S} \text{ 线性无关} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{S} \text{ 任何一个有限子集都线性无关}.$$
$$\mathfrak{S} = \emptyset \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{S} \text{ 是线性无关的}.$$

定义 57 (!!, **基**) 设 V 是数域 K 上的线性空间, V 的一个多重子集 $\mathfrak{S}$ 如果满足下述两个条件

(1) $\mathfrak{S}$ 是线性无关的

(2) V 中任一向量可以由 $\mathfrak{S}$ 中的 $\boxed{\text{有限多个向量}}$ 线性表出

则称 $\mathfrak{S}$ 是 V 中的 $\boxed{\text{一个}}$ **基**. $\{0\}$ 的一个基 $\boxed{\text{规定}}$ 为 $\emptyset$.

定义 58 (**有序基**) 在 **定义** 57 中, 若 $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$, 则向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中的一个 (**有序**) **基**.

定理 59 (**! 依赖选择公理**) 任何一个数域上的任一线性空间都有一个基.

定义 60 若 V 有一个基是有限子集, 则称 V 是**有限维**的; 若 V 有一个基是无限子集, 则称 V 是**无限维**的.

定理 61 若 V 是有限维的, 则 V 的任意两个基所含向量的个数相等.

推论 62 若 V 是无限维的, 则 V 的任何一个基都是无限子集.

定义 63 (!!!, **维数**) 设 V 是有限维的, 则把 V 的一个基所含向量的个数称为 V 的**维数**, 记作 $\dim_K V$ 或 $\dim V$; 若 V 是无限维的，则把 V 的维数 $\dim = \infty$ (只是暂不区分无限可数和无限不可数).

命题 64 (!) 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关.

定义 65 (**坐标**) 设 $\dim V=n$, 取 V 的一个 (有序) 基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 则 V 中任一向量可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表出, $\alpha=c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n$ 且表出方式唯一.

$$\text{把}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\text{称为 } \alpha \text{ 在 (有序) 基 } \alpha_1,\cdots,\alpha_n \text{ 下的}\textbf{坐标}\ .$$

注意 66 坐标要写成列向量.

例子 67 K^n 中, 向量组

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\epsilon_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

是 K^n 的一个基, 称为**标准基**. K^n 中任一向量 $\alpha=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ 在基 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$ 下的坐标是 $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\alpha$

命题 68 (!!) 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基.

命题 69 (!) 设 $\dim V=n$, 则

V 中的每一个向量可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出 $\implies$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基.

命题 70 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意一个线性无关的向量组都可以扩充成 V 的一个基.

命题 71 (!!) 设 $\dim V=n$, W 是 V 的一个子空间, 则 $\dim W\leq\dim V$; 若 $\dim W=\dim V$, 则 $W=V$.

定义 72 (**极大线性无关集**) 设 V 是数域 K 上的线性空间, V 的一个子集 S 如果满足,

(1) S 是线性无关的

(2) 对于 $\beta\notin S$(如果存在的话), 有 $S\cup\{\beta\}$ 线性相关

那么称 S 是 V 的**极大线性无关集**.

命题 73 S 是 V 的一个基 $\iff$ S 是 V 的一个极大线性无关集.

命题 74 (!!) 在数域 K 中, 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 是 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle$ 的一个基. 从而 $\dim\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$.

命题 75 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle=\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle\iff\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$

2.6 矩阵的秩

定义 76

$$A=\begin{array}{c@{}c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\cdots&\alpha_n\end{array}&\\ \begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \cdots&&\vdots\\ c_{s1}&\cdots&c_{sn}\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_s\end{array}\end{array}$$

对于 A 的列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 称为 A 的**列秩**, $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle$ 称为 A 的**列空间**. 对于 A 的行向量组 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$, $\operatorname{rank}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 称为 A 的**行秩**, $\langle\gamma_1,\cdots,\gamma_n\rangle$ 称为 A 的**行空间**.

定理 77 阶梯型矩阵 J 的行秩 = 列秩 = J 的非零行的个数; 并且 J 的主元所在的列构成列向量的一个极大线性无关组.

定理 78 矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩.

定理 79 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性，从而不改变矩阵的列秩.

定理 80 任一矩阵 A 的行秩等与它的列秩.

定义 81 矩阵 A 的行秩与列秩统称为 A 的秩, 记作 $\operatorname{rank}(A)$

推论 82 设矩阵 A 经过初等行变换化成阶梯型矩阵 J, 则 $\operatorname{rank}(A) = J$ 的非零行个数. 设 J 的主元所在的列是 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列, 则 A 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组.

推论 83 $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}A'$

推论 84 矩阵的初等列变换不改变矩阵的秩.

定理 85 任一非零矩阵 A 的秩等于它的不为零的子式的最高阶数.

推论 86 设 $\operatorname{rank}(A) = r$, 则 A 的不为 0 的 r 阶子式所在的列 (行) 构成 A 的列 (行) 向量组的一个极大线性无关组.

定义 87 (**满秩矩阵**) n 级矩阵 A 的秩如果等于它的级数 n, 则 A 称为**满秩矩阵**.

推论 88 n 级矩阵满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

2.7 线性方程组有解判别定理

定理 89 数域 K 上 n 元线性方程组有解 $\iff$ 增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩 = 系数矩阵 A 的秩.

定理 90 数域 K 上 n 元线性方程组有解时, 如果它的系数矩阵 A 的秩 $= n$, 那么原方程组有唯一解; 如果 A 的秩 $< n$, 那么原方程组有无穷多个解.

推论 91 数域 K 上 n 元其次线性方程组 $Ax = 0$

$$\text{有非零解} \iff \operatorname{rank} A < n$$

2.8 其次线性方程组解集结构

说明 92 数域 K 上 n 元其次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \tag{2}$$

的解集记作 W. 则 $W \subseteq K^n$, 且满足以下性质

(1) $\forall \eta, \delta \in W \implies \eta + \delta \in W$

(2) $\gamma \in W, k \in K \implies k\gamma \in W$

则 W 是 K^n 的一个子空间, 称 W 为 (2) 的**解空间**.

说明 93 目标: 当 (2) 有非零解时, 求 W 的一个基和维数.

定理 94 设 K 上 n 元其次线性方程组 (2) 有非零解时，它的解空间 W 的维数 $\dim W = n - \mathrm{rank}(A)$.

说明 95 把 W 的一个基称为齐次线性方程组 (2) 的一个**基础解系**. 若 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 是 n 元其次线性方程组 (2) 的一个基础解系, 则 (2) 的全部解为

$$k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}\ (k_1, \cdots, k_{n-r} \in K)$$

2.9 非其次线性方程组的解集的结构

说明 96 数域 K 上的 n 元非其次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \tag{3}$$

的解集记作 U, 相应的非其次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

的解集记作 W, 则满足性质

(1) $\gamma, \delta \in U \Rightarrow \gamma - \delta \in W$

(2) $\gamma \in U, \eta \in W \Rightarrow \gamma + \eta \in U$

定理 97 如果数域 K 上的非其次线性方程组有解, 设 $\gamma_0 \in U$, 称为 γ_0 是非其次线性方程组 (2) 的一个**特解**, 则

$$\gamma_0 + W := \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\} = U$$

定义 98 $\gamma_0 + W$ 称为 W 形的**线性流形**, 或子空间 W 的一个**陪集**.

2.10 子空间的运算

定理 99 设 V 是域 F 上的一个线性空间, V_1 与 V_2 都是 V 的子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

定理 100 设 V_1 与 V_2 都是域 F 上的一个线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间, 且是包含 $V_1 \cup V_2$ 的最小的子空间.

命题 101 $\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle + \langle \beta_1, \cdots, \beta_r \rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_r \rangle$

定理 102 (!, **子空间的维数公式**) 设 V_1, V_2 都是 V 的 $\boxed{\text{有限维}}$ 子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 也是有限维的, 并且

$$\mathrm{dim}V_1 + \mathrm{dim}V_2 = \mathrm{dim}(V_1 + V_2) + \mathrm{dim}(V_1 \cap V_2)$$

推论 103 设 V_1, V_2 都是 V 的 $\boxed{\text{有限维}}$ 子空间, 则

$$V_1 \cap V_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{dim}V_1 + \mathrm{dim}V_2 = \mathrm{dim}(V_1 + V_2)$$

定义 104 (**直和**) 设 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 如果 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 表示成 $\alpha_1 + \alpha_2$ $(\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2)$ 的表法唯一, 那么称 $V_1 + V_2$ 是**直和**, 记作 $V_1 \oplus V_2$.

定理 105 设 V_1 与 V_2 都是 V 的子空间, 则下列命题互相等价

(1) V_1+V_2 是直和

(2) V_1+V_2 中零向量表法唯一, 即 $0=\alpha_1+\alpha_2\ (\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$

(3) $V_1\cap V_2=0$

(4) V_1 和 V_2 的一个基分别是多重集合 $\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$, 则合起来 $\mathfrak{S}_1\cup\mathfrak{S}_2$ 是 V_1+V_2 的一个基

定理 106 设 V_1,V_2 都是 V 有限维的子空间, 则

$$V_1+V_2\text{ 是直和}\Leftrightarrow\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

定义 107 (**补空间**) 若 $V=V_1\oplus V_2$, 则称 V_2 是 V_1 的一个**补空间**, 也称 V_1 是 V_2 的一个补空间.

命题 108 设 $\dim V=n$, 则 V 的每一个子空间 U 都在 V 中有一个补空间.

注意 109 U 的补空间不唯一.

定义 110 设 $V_1,\cdots,V_m$ 都是 V 的子空间, 如果 $V_1+\cdots+V_m$ 中每个向量表示成 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m$, 其中 $\alpha_i\in V_i,i=1,\cdots,m$, 表法唯一, 那么称 $V_1+\cdots+V_m$ 是**直和**, 记作 $\bigoplus_{i=1}^n V_i$.

定理 111 设 $V_1,\cdots,V_m$ 都是 V 的子空间, 则下列命题等价:

(1) $V_1+\cdots+V_m$ 是直和

(2) $V_1+\cdots+V_m$ 中 0 的表法唯一

(3) $V_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}V_j)=0,i=1,\cdots,m$

(4) 设 V_i 的一个基为多重集合 $\mathfrak{S}_i$, $i=1,\cdots,m$, 则合起来 $\mathfrak{S}_1\cup\cdots\cup\mathfrak{S}_m$ 是 $V_1+\cdots+V_m$ 的一个基

定理 112 设 $V_1,\cdots,V_m$ 都是 V 的有限维子空间, 则下列命题等价:

(1) $V_1+\cdots+V_m$ 是直和

(2) $\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$

索引