泛函分析 (作业二)

§ 1.3.1 在完备的度量空间中求证: 为了子集 A 是列紧的, 其充分且必要条件是对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 A 的列紧的 ε 网.

证明: "$\Longrightarrow$": 完备度量空间的子集 A 是列紧的 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \subset A$, 使得 N 是 A 的有穷 ε 网. 于是任取 A 中点列 $\{x_n\}$, 则 $N \cup \{x_n\}$ 是 A 的列紧的 ε 网;
"$\Longleftarrow$": 对 $\forall \varepsilon > 0$, 设 N 是 A 的 ε 网, 且 N 列紧. 假设 A 不列紧, 即 $\exists \{x_n\} \subset A$, 不妨设 $\{x_n\}$ 无穷且互异, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x_s, x_t \in \{x_n\}, \rho(x_s, x_t) > \delta$. 由于总可以找到 $n_s, n_t \in N$, 使得 $\rho(x_s, n_s) < \varepsilon$, $\rho(x_t, n_t) < \varepsilon$. 以及 $\delta < \rho(x_s, x_t) \leqslant \rho(x_s, n_s) + \rho(n_s, n_t) + \rho(n_t, x_t)$, 注意到 ε 的任意性, 有 $\rho(n_s, n_t) \geqslant \delta$ 且点列 $\{n_k\}$ 无穷. 这样构造的 $\{n_k\}$ 不存在收敛子列, 这与 N 列紧矛盾. 因此 A 列紧. □

§ 1.3.2 在度量空间中求证: 紧集上的连续函数必是有界的, 并且达到它的上、下确界.

证明: X 为度量空间的紧集 $\Longleftrightarrow$ X 是自列紧集; 设连续函数为 $\varphi: X \to \mathbb{R}$. 对 $\forall \{y_n\} \subset \varphi(X), \exists x_n = \varphi^{-1}(y_n)$, 这样 $\{x_n\} \subset X, \exists x_{n_k} \to x \in X$, 由 φ 连续知, $y_{n_k} \to \varphi(x) \in \varphi(X)$. 由点列 $\{y_n\}$ 的任意性知 $\varphi(X)$ 是自列紧集 $\Longrightarrow \varphi(X)$ 完全有界 $\Longrightarrow \varphi(X)$ 有界.
$\varphi(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭集, 必有上、下确界, 并且上、下确界都在 $\varphi(X)$ 里. □

§ 1.3.5 设 M 是 $C[a,b]$ 中的有界集, 求证: 集合

$$\left\{ F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, f \in M \right\}$$

是列紧集.

证明: 由 Arzela-Acsoli 定理可知, 只需要验证上面集合中 F 的一致有界性 (1) 和等度连续性 (2).
由 M 是 $C[a,b]$ 中的有界集知, $\forall f \in M, \exists \alpha$, $|f| \leqslant \alpha$, 于是

$$|F| = \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \alpha(b-a) \tag{1}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$, 使得当 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \alpha |x_1 - x_2| < \varepsilon \tag{2}$$

$\square$

§ 1.3.8 设 $(\mathscr{X}, \rho)$ 是度量空间, M 是 $\mathscr{X}$ 中的列紧集, 映射 $f\colon \mathscr{X} \to M$ 满足

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \rho(x_1, x_2) \qquad (\forall\, x_1, x_2 \in \mathscr{X},\ x_1 \neq x_2).$$

求证: f 在 $\mathscr{X}$ 中存在唯一的不动点.

证明: 先证 $\exists\, x \in \mathscr{X}$ 使得 $\rho\,(x, f(x)) = 0$. 记 $p(x) = \rho\,(x, f(x))$.
由 § 1.3.2 的证明可知, 只需要找一个自列紧集, 并验证 $p(x)$ 是其上的连续函数, 则 $p(x)$ 达到其下确界. 取 M 的闭包 $\overline{M}$, $M \subset \overline{M} \subset \mathscr{X}$, $p\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$.
由于

$$\begin{aligned} \rho\,(x_1, f(x_1)) &\leqslant \rho\,(x_1, x_2) + \rho\,(x_2, f(x_2)) + \rho\,(f(x_2), f(x_1))\,, \\ \rho\,(x_2, f(x_2)) &\leqslant \rho\,(x_2, x_1) + \rho\,(x_1, f(x_1)) + \rho\,(f(x_1), f(x_2))\,, \end{aligned}$$

$\rho(x_1, x_2) \to 0 \implies |\,p\,(x_1) - p\,(x_2)| \leqslant \rho\,(x_1, x_2) + \rho\,(f(x_1), f(x_2)) \to 0$, 即 $p(x)$ 是 $\overline{M}$ 上的连续函数. 假设 $p(x)$ 的下确界为 $p(x_0) > 0$, 则 $p(f(x_0)) = \rho\,(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho\,(x_0, f(x_0)) = p(x_0)$, 矛盾. 即下确界 $p(x_0) = 0$.
假设存在相异不动点 x_0', 则有 $\rho\,(x_0, x_0') = \rho\,(f(x_0), f(x_0')) < \rho\,(x_0, x_0')$, 矛盾.
因此 f 在 $\mathscr{X}$ 中有唯一的不动点. $\square$