孟庆鑫 *2018312032*

泛函分析 （作业一）

§ 1.1.1 证明完备空间的闭子集是一个完备空间, 而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.

证明: 设 $\mathscr{X}$ 完备, 闭集 $A \subset \mathscr{X}$. 若 $A = \mathscr{X}$, 则 A 必完备; 下设 $A \neq \mathscr{X}$.
任取 A 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$. 从 $\mathscr{X}$ 里看, $\exists\, x \in \mathscr{X}$ 使得 $x_n \to x$. 必有 $x \in A$, 若否, $x \in \mathscr{X} - A$ 为开集, $\exists\, \varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset \mathscr{X} - A$, 于是 $\exists N$, 使得 $n > N$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$, 这与 $\{x_n\} \in A$ 矛盾. 因此 A 完备.
设度量空间 $(\mathscr{X}, \rho)$, $\mathscr{X} \supset A$ 完备. 若 $A = \mathscr{X}$, 则 A 是闭集; 下设 $A \neq \mathscr{X}$.
记 $C = \mathscr{X} - A$, 要证 C 是开集. 若否, 则 $\exists\, x \in C$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
任取 $\varepsilon_1 > 0$, 取 $x_1 \in B(x, \varepsilon_1) \cap A$, 取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\rho(x, x_1)$, 取 $x_2 \in B(x, \varepsilon_2) \cap A$, $\cdots$, 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\rho(x, x_{n-1})$, 取 $x_n \in B(x, \varepsilon_n) \cap A$, $\cdots$, $\{x_n\}$ 是 A 中的 Cauchy 列, 并且 $x_n \to x$. A 完备, 则 $x \in A$, 矛盾. 因此 A 是闭集. □

§ 1.1.2 （Newton 法）设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的二次连续可微的实值函数, $\hat{x} \in (a, b)$ 使得 $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$, 使得 $\forall x_0 \in U(\hat{x})$, 迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

是收敛的, 并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}.$$

证明: 设 $Tx = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 由中值定理有

$$|Tx - Ty| = |T'\xi|\;|x - y| = \left|\frac{f(\xi) f''(\xi)}{\left(f'(\xi)\right)^2}\right|\,|x - y|\,,\ (\xi\text{介于}x, y\text{之间}) \tag{1}$$

$f \in C^2[a, b] \Longrightarrow f''$ 在 $\hat{x}$ 处连续, $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$, 知 $x \to \hat{x}$, $\dfrac{f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \to 0$.
于是 $\exists\, U(\hat{x})$, 使得

$$\forall\, x \in U(\hat{x}),\ f'(x) \neq 0, \left|\frac{f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| \leqslant \alpha < 1.$$

令 (1) 式的 $x, y \in U(\hat{x})$, 并用 x_n 替换 x, $\hat{x}$ 替换 y, 得到 $|x_{n+1} - \hat{x}| \leqslant \alpha\,|x_n - \hat{x}|$, 即正数序列 $\{|x_n - \hat{x}|\}$ 单调递减并收敛到 0, 即 $x_n \to \hat{x}$. □

§ 1.1.4 设 T 是度量空间上的压缩映射, 求证 T 是连续的.

证明: 设度量空间 $(\mathscr{X},\ \rho)$, $\exists\,\alpha\in(0,1)$ 使 $\forall\,x_1,x_2\in\mathscr{X},\ \rho(Tx_1,Tx_2)\leqslant\alpha\rho(x_1,x_2)$. 任取 $\mathscr{X}$ 的开子集 Y, 记 Y 的原象集 $X=\{x\,|\,\forall\,Tx\in Y\}$, 假设 X 为非开集. 则 $\exists\,x_0\in X,\forall\,\varepsilon>0,B(x_0,\varepsilon)\cap(\mathscr{X}-X)\neq\varnothing$. 取 $y\in B(x_0,\varepsilon)\cap(\mathscr{X}-X)$, 有 $\rho(Tx_0,Ty)\leqslant\alpha\rho(x_0,y)<\varepsilon$, 即 $B(Tx_0,\varepsilon)\cap(\mathscr{X}-Y)\neq\varnothing$, 由 ε 任意性知, Y 为非开集, 矛盾. 即开集 Y 的原象集 X 也是开集, T 连续. $\square$

§ 1.1.5 设 T 是压缩映射, 求证 $T^n\,(n\in\mathbb{N})$ 也是压缩映射, 并说明逆命题不一定成立.

证明: 已知 $T\colon\mathscr{X}\to\mathscr{X},\exists\,\alpha\in(0,1)$ 使 $\forall\,x,y\in\mathscr{X},\ \rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$, 于是 $\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha\rho(T^{n-1}x,T^{n-1}y)\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n\rho(x,y),\forall\,n\in\mathbb{N},\alpha^n\in(0,1)$. 即 T^n 是压缩映射.

考虑映射 $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$Tx=\begin{cases}\alpha x & x\in\mathbb{Q},\\ -\alpha x & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$$

其中 α 是 $(0,1)$ 区间的一个有理数. $T^2x=\alpha^2x$ 是压缩映射, 但 T 不是. $\square$

§ 1.2.2 在一个度量空间 $(\mathscr{X},\ \rho)$ 上, 求证: 基本列是收敛列, 当且仅当其中存在一串收敛子列.

证明: "$\Longrightarrow$": 只需将子列取为基本列自身即可.

"$\Longleftarrow$": 设 $\{x_n\}$ 是基本列, 则 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N_1,\forall\,m,n>N_1,\rho(x_m,x_n)<\frac{1}{2}\varepsilon$,

$\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列, 则 $\exists\,x\in\mathscr{X},\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N_2,\forall\,n_k>N_2,\rho(x_{n_k},x)<\frac{1}{2}\varepsilon$,

取 $N=\max\{N_1,N_2\},\forall\,n,n_k>N,\rho(x_n,x)\leqslant\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon$, 即基本列 $\{x_n\}$ 收敛到 x. $\square$

§ 1.2.3 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体, 在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geqslant1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in F,y=\{\eta_k\}\in F$, 求证 $(F,\ \rho)$ 不完备, 并指出它的完备化空间.

证明: 取 $s=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}\in S$ 满足无穷多项不为 0, 且 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N,\ \forall\,n>N$, $|x_n|<\varepsilon$. 取 $s_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots\}\in F$. 于是 $\forall\,m>n>N,\rho(s_m,s_n)=\sup_{n\leqslant k\leqslant m}|x_k|<\varepsilon$, s_n 是 F 中的 Cauchy 列. 假设 $(F,\ \rho)$ 完备, 按 F 中的距离定义, $s_n\to s$, 但 $s\notin F$, 矛盾. 因此 $(F,\ \rho)$ 不完备.

猜想: 收敛于 0 的实数列全体（记为 $\mathscr{F}=F\cup S$, 并有 $F\cap S=\varnothing$）是 F 的完备

化, $\mathscr{F}$ 上的距离为

$$\varrho(x, y) \triangleq \sup_{k \geqslant 1} |\xi_k - \eta_k| .$$

为此只要证明 F 在 $\mathscr{F}$ 中稠密, 即 $\forall s \in \mathscr{F}, \exists \{s_n\} \subset F, s_n \to s$. 若 $s \in S$, 只需要像上面那样构造 s_n; 若 $s \in F$, 设 $s = \{x_1, x_2, \cdots, x_\lambda, 0, 0, \cdots\}$, 只需要令

$$s_n = \{x_1 + \frac{1}{n}, x_2 + \frac{1}{n}, \cdots, x_\lambda + \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots\}.$$

因此 $(\mathscr{F}, \varrho)$ 是 (F, ρ) 的完备化. $\square$