孟庆鑫 2018312032

泛函分析（作业四）

▷ § 2.1.2 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间. 设 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 求证:

(1) $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$; (2) $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$.

证明: (1) $\|A\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}\geqslant\sup\limits_{0<\|x\|\leqslant 1}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}\geqslant\sup\limits_{0<\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\geqslant\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|=\|A\|$;

(2) $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\forall x\colon\|x\|\leqslant 1$, 都有 $(1-\varepsilon)\|Ax\|=\|A((1-\varepsilon)x)\|\leqslant\sup\limits_{\|y\|<1}\|Ay\|$, 由 x,ε 任意性 $\Longrightarrow\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\leqslant\sup\limits_{\|y\|<1}\|Ay\|$. 另一方面, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\geqslant\sup\limits_{\|y\|<1}\|Ay\|$, 即 $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$.

另证: 由于 $B_1\triangleq\{x\mid\|x\|=1\}$ 是闭集, $\|A\bullet\|:B_1\to\mathbb{R}^1$ 是有界连续函数, 必取到上确界, 记 $\|Ax_0\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$. 任取 $\{x_n\}\subset B(\theta,1)$, $x_n\to x_0$, 于是 $\|Ax_n\|\to\|Ax_0\|$, 即 $\|Ax_0\|\leqslant\sup\|Ax_n\|\leqslant\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$, 左右两侧均为 $\|A\|$, 于是 $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$. □

▷ § 2.1.3 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间. 设 $f\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, 求证:

(1) $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)$; (2) $\sup\limits_{\|x\|<\delta}f(x)=\delta\|f\|$ $(\forall\delta>0)$.

证明: (1) $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|=\max\left\{\sup\limits_{\|x\|=1}f(x),-\inf\limits_{\|x\|=1}f(x)\right\}=\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)$, 其中由于 $-\inf\limits_{\|x\|=1}f(x)=\sup\limits_{\|x\|=1}-f(x)=\sup\limits_{\|x\|=1}f(-x)=\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)$;

(2) 由 § 2.1.2 (2) 的证明知 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|<1}|f(x)|$, 再按照 § 2.1.3 (1) 的证明过程可得 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)$, 于是 $\forall\delta>0$, $\|f\|=\sup\limits_{\left\|\frac{x}{\delta}\right\|<1}f\left(\dfrac{x}{\delta}\right)=\dfrac{1}{\delta}\sup\limits_{\|x\|<\delta}f(x)$. □

▷ § 2.1.5 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间. 设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的非零线性有界泛函, 令 $d=\inf\{\|x\|\mid f(x)=1\}$, 求证: $\|f\|=1/d$.

证明: 一方面 $\|f\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}\geqslant\sup\limits_{f(x)=1}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}=\dfrac{1}{\inf\limits_{f(x)=1}\|x\|}=\dfrac{1}{d}$,

另一方面 $\|f\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}=\dfrac{1}{\inf\limits_{x\neq\theta}\left\|\dfrac{x}{f(x)}\right\|}\overset{y=\frac{x}{f(x)}\Longrightarrow f(y)=1}{\leqslant}\dfrac{1}{\inf\limits_{f(y)=1}\|y\|}=\dfrac{1}{d}$. □

▷ § 2.1.7 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间. 设 $T\colon\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是线性的,

令 $N(T)\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid Tx=\theta\}$, 求证:

(1) 若 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 求证: $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间.

(2) 问 $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间能否推出 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$?

(3) 若 f 是线性泛函, 求证: $f\in\mathscr{X}^*\iff N(f)$ 是闭线性子空间.

证明: (1) $\forall x_1,x_2\in N(T)$, $T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2=\theta$, 即 $N(T)$ 是线性空间. 取 $\{x_n\}\subset N(T)$ 且 $x_n\to x_0$, 由于 T 有界, $\|Tx_0-\theta\|\leqslant\|T\|\,\|x_0-x_n\|$, 有 $x_0\in N(T)$, 即 $N(T)$ 是闭集.

(2) 反例: 取 T 为 $C[a,b]$ 上的微分算子. $N(T)$ 是 $[a,b]$ 上的常值函数集, 但 $T\sin nt=n\cos nt$, T 无界.

(3) "$\Longrightarrow$": (1) 问已证. "$\Longleftarrow$": 假设线性泛函 f 无界, 即对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n$, 使得 $|f(x_n)|>n\|x_n\|$. 注意到 $\forall x\notin N(f)$, 令 $y=\dfrac{x}{f(x)}$, 有 $f(y)=1$, 于是取 $y_n=\dfrac{x}{f(x)}-\dfrac{x_n}{f(x_n)}$, 则 $y_n\in N(f)$ 且 $y_n\to y$. 由于 $N(f)$ 是闭集, 则有 $y\in N(f)$, 即 $f(y)=0$, 矛盾. □

▷ § 2.2.5 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间. 设 L,M 是 $\mathscr{H}$ 上的闭线性子空间, 求证:

(1) $L\perp M\iff P_LP_M=0$;

(2) $L=M^\perp\iff P_L+P_M=I$ (恒同算子);

(3) $P_LP_M=P_{L\cap M}\iff P_LP_M=P_MP_L$.

证明: (1) "$\Longrightarrow$": $\forall x,y\in\mathscr{H}$, $P_Lx\in L, P_My\in M$, $L\perp M\Longrightarrow 0=(P_Lx,P_My)=(x,P_LP_My)$, 注意到 x,y 的任意性, 有 $P_LP_M=0$;

"$\Longleftarrow$": $\forall x\in L$, $\forall y\in M$, $x=P_Lx, y=P_My$, $P_LP_M=0\Longrightarrow 0=(x,P_LP_My)=(P_Lx,P_My)=(x,y)$, 注意到 x,y 的任意性, 有 $L\perp M$;

(2) "$\Longrightarrow$": $\forall x\in\mathscr{H}$, x 有唯一正交分解 $x=l+m$, 其中 $l\in M^\perp=L, m\in M$, 由于 $l=P_Lx$, $m=P_Mx$, 即 $x=(P_L+P_M)x$, 注意到 x 的任意性, 有 $P_L+P_M=I$;

"$\Longleftarrow$": $\forall x\in M^\perp$, 由于 $x=(P_L+P_M)x=P_Lx$, 则 $M^\perp\subset L$.

假设 $\exists x'\in L$ 且 $x'\notin M^\perp$, $(P_L+P_M)x'=x'=P_Lx'\Longrightarrow P_Mx'=\theta\Longrightarrow x'\perp M\Longrightarrow x'\in M^\perp$, 矛盾. 于是 $L=M^\perp$;

(3) "$\Longrightarrow$": $P_LP_M=P_{L\cap M}=P_{M\cap L}=P_MP_L$;

"$\Longleftarrow$": 记 $P=P_LP_M$, 则 $P^2=P_LP_MP_LP_M=P_LP_LP_MP_M=P_L^2P_M^2=P_LP_M=P$; $(Px,y)=(P_LP_Mx,y)=(P_MP_Lx,y)=(x,P_LP_My)=(x,Py)$, P 是正交投影算子.

考察 $Px=x$: $x=P_LP_Mx \Longrightarrow x\in L$, $x=P_MP_Lx \Longrightarrow x\in M$, 于是 $x\in L\cap M$; 而 $\forall x\in L\cap M$ 都满足 $Px=x$, 因此 $P=P_{L\cap M}$. □

▷ § 2.3.4 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间, D 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间并且 $A\colon D\to\mathscr{Y}$ 是线性映射. 求证:

(1) 如果 A 连续且 D 是闭的, 则 A 是闭算子;

(2) 如果 A 连续且是闭算子, 那么 $\mathscr{Y}$ 完备蕴含 D 闭;

(3) 如果 A 是单射的闭算子, 则 A^{-1} 也是闭算子;

(4) 如果 $\mathscr{X}$ 完备, A 是单射的闭算子, $R(A)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密并且 A^{-1} 连续, 那么 $R(A)=\mathscr{Y}$.

证明: (1) D 是闭的, 任取 D 的 Cauchy 列 $x_n\to x$, $x\in D$. A 连续 $\Longleftrightarrow$ A 有界, 于是 Ax_n 是 $\mathscr{Y}$ 的 Cauchy 列, 且 $\|Ax_n-Ax\|\leqslant\|A\|\,\|x_n-x\|$, 即 $Ax_n\to Ax$, 则 A 是闭算子;

(2) 任取 D 的 Cauchy 列 x_n, $\exists\,x\in\bar{D}$, $x_n\to x$, A 连续, 于是 Ax_n 是 $\mathscr{Y}$ 的 Cauchy 列, $\mathscr{Y}$ 完备, 则 $\exists\,y\in\mathscr{Y}$ 使得 $Ax_n\to y$. 由 A 是闭算子, $x\in D$, 因此 D 闭;

(3) A 是单射, A^{-1} 存在. A 是闭算子, 即 $x_n\to x$, $Ax_n\to y\Longrightarrow x\in D$, $y=Ax$. 记 $y_n=Ax_n$, 则有 $x_n=A^{-1}y_n$, 于是 $A^{-1}y_n\to x$, $y_n\to y\Longrightarrow x=A^{-1}y$, $y\in D\left(A^{-1}\right)$, 即 A^{-1} 也是闭算子;

(4) $R(A)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密 $\Longleftrightarrow\forall\,y\in\mathscr{Y}$, $\exists\{y_n\}\subset R(A)$ 使 $y_n\to y$, 即 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 当 $m,n\to\infty$ 时, 有 $\|y_m-y_n\|\to 0$, A^{-1} 连续, 于是 $\|A^{-1}y_m-A^{-1}y_n\|\to 0$, $\mathscr{X}$ 完备, 即 $\exists\,x\in D$, 使 $A^{-1}y_n\to x$, 由 (3) 的结论, A^{-1} 也是闭算子, 于是有 $y\in R(A)$, 即 $R(A)=\mathscr{Y}$. □

▷ § 2.3.11 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, $A\in\mathscr{L}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}\right)$ 是满射的. 求证: 如果在 $\mathscr{Y}$ 中 $y_n\to y_0$, 则 $\exists\,C>0$ 与 $x_n\to x_0$, 使得 $Ax_n=y_n$, 且 $\|x_n\|\leqslant C\,\|y_n\|$.

证明: $A\in\mathscr{L}\left(\mathscr{X},\mathscr{Y}\right)$ 是满射, 对 $\forall\,y\in\mathscr{Y}$, 闭线性流形 $\{\,x\in\mathscr{X}\mid Ax=y\,\}\neq\varnothing$, 因此考虑映射 $\widetilde{A}\colon\mathscr{X}/N(A)\to\mathscr{Y}$, $[x]\mapsto Ax$. $\widetilde{A}$ 既是单射又是满射, 且 $\widetilde{A}\in\mathscr{L}\left(\mathscr{X}/N(A),\mathscr{Y}\right)$, 商空间 $\mathscr{X}/N(A)$ 是 B 空间, 由 Banach 逆算子定理, $\exists\,\widetilde{A}^{-1}\in\mathscr{L}\left(\mathscr{Y},\mathscr{X}/N(A)\right)$, 对 $Y_n\to\theta$, 有 $[X_n]=\widetilde{A}^{-1}Y_n$, 且 $\|[X_n]\|=\|\widetilde{A}^{-1}Y_n\|\leqslant\|\widetilde{A}^{-1}\|\,\|Y_n\|$, 由于 $\|[X_n]\|=\inf\limits_{z\in[X_n]}\|z\|$, 选定 $\lambda>1$, $\exists\,X_n\in[X_n]$, 使 $\|X_n\|\leqslant\lambda\,\|[X_n]\|\leqslant\lambda\,\|\widetilde{A}^{-1}\|\,\|Y_n\|$.

任取 $\mathscr{Y}$ 中 $y_n\to y_0$, 选取 $x_0\in\widetilde{A}^{-1}y_0$ 并满足 $\|x_0\|\leqslant\lambda\,\|\widetilde{A}^{-1}y_0\|$,

令 $Y_n = y_n - y_0$, 选取 $X_n \in \widetilde{A}^{-1} Y_n$ 并满足 $\|X_n\| \leqslant \lambda \|\widetilde{A}^{-1} Y_n\|$, 令 $x_n = X_n + x_0$, 这样 x_n 满足 $x_n \to x_0$ 且 $Ax_n = y_n$,

$$\begin{aligned}\|x_n\| = \|X_n + x_0\| &\leqslant \|X_n\| + \|x_0\| \\ &\leqslant \lambda \|\widetilde{A}^{-1}\| \, \|y_n - y_0\| + \lambda \|\widetilde{A}^{-1}\| \, \|y_0\| \\ &\leqslant \lambda \|\widetilde{A}^{-1}\| \, \|y_n\| + 2\lambda \|\widetilde{A}^{-1}\| \, \|y_0\| \\ &\leqslant \lambda (1 + 2\mu) \|\widetilde{A}^{-1}\| \, \|y_n\|, \quad (\exists \mu \colon \|y_0\| \leqslant \mu \|y_n\|, \forall n = 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

只须令 $C = \lambda (1 + 2\mu) \|\widetilde{A}^{-1}\|$ 即可. □

▷ § 2.4.7 给定 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中 n 个线性无关的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,
求证: $\exists f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得 $\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

证明: 设 $\mathscr{X}_i = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n\}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$.
由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关, 有 $d_i = \rho(x_i, \mathscr{X}_i) > 0$.
利用定理 2.4.7, $\exists g_i \in \mathscr{X}^*$, $g_i(x_i) = d_i$, $g_i(\mathscr{X}_i) = 0$, $\|g_i\| = 1$. 令 $f_i = \dfrac{g_i}{d_i}$ 即可. □

▷ § 2.5.9 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 并满足 $(Ax, y) = (x, Ay)$ $(\forall x, y \in \mathscr{H})$,
求证: (1) $A^* = A$;
(2) 若 $R(A)$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密, 则方程 $Ax = y$, 对 $\forall y \in R(A)$ 存在唯一解.

证明: (1) $\forall x, y \in \mathscr{H}$, $(Ax, y) = (x, A^* y) = (x, Ay) \Longrightarrow (x, (A^* - A) y) = 0$, 取 $x = (A^* - A) y$, 并由 y 的任意性, 有 $A^* = A$;
(2) 若 $Ay = \theta$, 则 $\forall x \in \mathscr{H}$, $(Ax, y) = (x, Ay) = (x, \theta) = 0 \Longrightarrow y \in R(A)^{\perp}$, 由于 $R(A)$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密, $R(A)^{\perp} = \{\theta\}$, 因此 $y = \theta$, 因此 A 是单射, $\exists A^{-1}$, $A^{-1} y$ 即为 $Ax = y$ 的唯一解. □

▷ § 2.6.1 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, 求证: $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中可逆 (有有界逆) 算子集是开的.

证明: 记 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中可逆算子集为 M, $\forall A \in M$, $\forall \Lambda \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 满足 $\|\Lambda\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, 由引理 2.6.6, $(I + A^{-1}\Lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 并且 $\|(I + A^{-1}\Lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Lambda\|}$, 即 $I + A^{-1}\Lambda \in M$, 于是 $A(I + A^{-1}\Lambda) \in M$, 即 $A + \Lambda \in M$, 因此 M 是开集. □