孟庆鑫 2018312032

泛函分析 （作业三）

▷ § 1.4.1 在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 对每一点 $z=(x,y)$, 令

$$\|z\|_1 = |x|+|y|; \qquad \|z\|_2 = \sqrt{x^2+y^2};$$
$$\|z\|_3 = \max(|x|,|y|); \qquad \|z\|_4 = \left(x^4+y^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(1) 求证 $\|\bullet\|_i$ $(i=1,2,3,4)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的范数.

(2) 画出 $\left(\mathbb{R}^2, \|\bullet\|_i\right), (i=1,2,3,4)$ 各空间中的单位球面图形.

(3) 在 $\mathbb{R}^2$ 中取定三点 $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, 试在上述四种不同范数下求出 ΔOAB 三边的长度.

(1) 证明: (正定性) $\|z\|_i \geqslant 0$, $\|z\|_i = 0 \Longleftrightarrow z=(0,0)$, $i=1,2,3,4$.

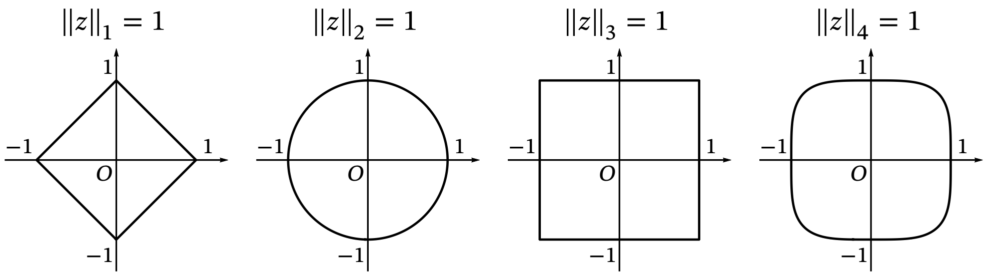
(齐次性) $\|\alpha z\|_i = |\alpha|\,\|z\|_i$, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}^1$, $i=1,2,3,4$.

(三角形不等式) 对 $p\geqslant 1$, 有 Minkowski 不等式

$$\left(|x_1+x_2|^p+|y_1+y_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(|x_1|^p+|y_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(|x_2|^p+|y_2|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$p=1,2,4$ 时分别对应 $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2, \|\bullet\|_4$, $p\to+\infty$ 时对应 $\|\bullet\|_3$.

(2)



.

(3) ΔOAB 三边的长度如下表.

	$\|\bullet\|_1$	$\|\bullet\|_2$	$\|\bullet\|_3$	$\|\bullet\|_4$
OA	1	1	1	1
OB	1	1	1	1
AB	2	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt[4]{2}$

□

▷ § 1.4.4 在 $C[0,1]$ 中, 对每一个 $f\in C[0,1]$, 令

$$\|f\|_1 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 (1+x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

求证: $\|\bullet\|_1$ 和 $\|\bullet\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数.

证明: $\|\bullet\|_1$ 和 $\|\bullet\|_2$ 均满足正定性、齐次性和三角不等式, 因此都是 $C[0,1]$ 上的范数. 由

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 (1+x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 2\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

得 $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \sqrt{2}\,\|f\|_1$. □

▷ § 1.4.6 设 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 是两个 B^* 空间, $x_1 \in \mathscr{X}_1$ 和 $x_2 \in \mathscr{X}_2$ 的序对 (x_1, x_2) 全体构成空间 $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$, 并赋以范数 $\|x\| = \max\left(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\right)$, 其中 $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in \mathscr{X}_1$, $x_2 \in \mathscr{X}_2$, $\|\bullet\|_1$ 和 $\|\bullet\|_2$ 分别是 $\mathscr{X}_1$ 和 $\mathscr{X}_2$ 的范数. 求证: 如果 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 是 B 空间, 那么 $\mathscr{X}$ 也是 B 空间.

证明: $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间. 任取 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列 $\{x^n\}$, 则当 $m, n \to 0$ 时, $\|x^m - x^n\| \to 0 \iff \|x_i^m - x_i^n\|_i \to 0\,(i = 1, 2)$. 由于 $\mathscr{X}_i$ 完备, 即 $\exists\, x_i \in \mathscr{X}_i$, 使得 Cauchy 列 $x_i^n \to x_i$. 于是 $x \triangleq (x_1, x_2) \in \mathscr{X}$, 且有 $\|x^n - x\| = \max_i \|x_i^n - x_i\|_i \to 0$. 因此 $\mathscr{X}$ 完备. □

▶ § 1.5.1 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, E 是以 θ 为内点的真凸子集, P 是由 E 产生的 Minkowski 泛函, 求证:

(1) $x \in \mathring{E} \iff P(x) < 1$; (2) $\overline{\mathring{E}} = \overline{E}$.

证明: (1) "$\Longrightarrow$" : $x \in \mathring{E} \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, 使 $B(x, \varepsilon) \in E$, 取 $\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2\,\|x\|}\right) x \in B(x, \varepsilon)$, 即 $\lambda = \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2\,\|x\|}\right)^{-1} < 1$, 使 $\dfrac{x}{\lambda} \in E \Longrightarrow P(x) < 1$;

"$\Longleftarrow$" : $\forall\, x$ 满足 $P(x) < 1$, $\exists\, \lambda$, 使 $P(x) < \lambda < 1$, $\dfrac{x}{\lambda} \in E$. θ 为 E 的内点, 即 $\exists\, \varepsilon > 0$, 使得 $B(\theta, \varepsilon) \subset E$. 构造映射 $\varphi(z) = (1-\lambda) z + \lambda \dfrac{x}{\lambda}$, 则 $\varphi(z)$ 将开球 $B(\theta, \varepsilon)$ 映射为 $B(x, (1-\lambda)\varepsilon)$, 再由 E 是凸集可知 $B(x, (1-\lambda)\varepsilon) \subset E$, 即 $x \in \mathring{E}$.

(2) $\mathring{E} \subset E \Longrightarrow \overline{\mathring{E}} \subset \overline{E}$. 由于 $\overline{\mathring{E}}$ 是闭集, 只需再证 $E \subset \overline{\mathring{E}}$ 即可.

(反证法) 假设 $\exists\, x \in E$, 但 $x \notin \overline{\mathring{E}}$. $x \notin \overline{\mathring{E}} \Longrightarrow x \in \overline{\mathring{E}}^c$ 为开集 $\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset \overline{\mathring{E}}^c$. 取 $x_0 = \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2\,\|x\|}\right) x \in B(x, \varepsilon)$, $x_0 \notin \overline{\mathring{E}}$. θ 为 E 的内点, 即 $\exists\, \xi > 0$, 使得 $B(\theta, \xi) \subset E$. 构造映射 $\varphi(z) = \dfrac{\varepsilon}{2\,\|x\|} z + \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2\,\|x\|}\right) x$, 则 $\varphi(z)$ 将开球 $B(\theta, \xi)$ 映射为 $B\left(x_0, \dfrac{\varepsilon\xi}{2\,\|x\|}\right)$, 再由 $x \in E$ 且 E 是凸集可知 $B\left(x_0, \dfrac{\varepsilon\xi}{2\,\|x\|}\right) \subset E$, 即 $x_0 \in \mathring{E}$. 这与 $x_0 \notin \overline{\mathring{E}}$ 矛盾. □

▶ § 1.5.4 设 C 是 B 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个有界闭凸集, 映射 $T_i\colon C \to \mathscr{X}\ (i=1,2)$ 适合

(1) $\forall\, x, y \in C \Longrightarrow T_1x + T_2y \in C$;

(2) T_1 是一个压缩映射, T_2 是一个紧映射.

求证: $T_1 + T_2$ 在 C 上至少有一个不动点.

证明: T_1 是压缩映射, 即 $\exists\,\alpha \in (0,1)$, 使得 $\|T_1x_1 - T_1x_2\| \leqslant \alpha\,\|x_1 - x_2\|$ 对 $\forall\, x_1, x_2 \in C$ 都成立. C 是完备度量空间的闭集 $\Longrightarrow C$ 完备. 对 $\forall\, x, y \in C \Longrightarrow T_1x + T_2y \in C$, 考虑将 y 固定, 则映射 $T'x \triangleq T_1x + T_2y$ 满足

$$\|T'x_1 - T'x_2\| = \|T_1x_1 - T_1x_2\| \leqslant \alpha\,\|x_1 - x_2\|,\ \alpha \in (0,1),\ \forall\, x_1, x_2 \in C,$$

由压缩映像原理, $\exists\,!x \in C$, 使得 $T'x = T_1x + T_2y = x$. 于是 $\forall\, y \in C$, 都对应唯一的 $x \in C$, 这隐含一个由方程 $T_1x + T_2y = x$ 确定的映射 $\varphi\colon y \mapsto x$. 取 $\varphi(y_1) = x_1$, $\varphi(y_2) = x_2$,

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\| &= \|T_1x_1 + T_2y_1 - T_1x_2 - T_2y_2\| \\
&\leqslant \|T_1x_1 - T_1x_2\| + \|T_2y_1 - T_2y_2\| \\
&\leqslant \alpha\,\|x_1 - x_2\| + \|T_2y_1 - T_2y_2\| \\
\Longrightarrow \quad \|x_1 - x_2\| &\leqslant \frac{1}{1-\alpha}\,\|T_2y_1 - T_2y_2\|. \qquad (1)
\end{aligned}$$

T_2 是一个紧映射, 则 T_2 连续, 且对有界集 C, $T_2(C)$ 列紧.

对 T_2 连续, 即对 $\forall\, y_1, y_2 \in C$, $\|y_1 - y_2\| \to 0 \Longrightarrow \|T_2y_1 - T_2y_2\| \to 0$, 联合 (1) 式 $\Longrightarrow \|x_1 - x_2\| \to 0$, 这说明映射 $\varphi\colon C \to C$ 连续. (2)

映射 φ 可以写成 $\psi \circ T_2$, 其中 $\psi\colon T_2(C) \to \varphi(C)$ 是由方程 $T_1x + z = x$ 确定的 $z \mapsto x$ 映射, 于是对 $\forall \{x_n\} \subset \varphi(C) \subset C$, 总可以找到对应的 $\{z_n\} \subset T_2(C)$, $T_2(C)$ 列紧, 即 $\exists\, z_{n_k} \to z_0 \in \mathscr{X}$, $\{z_{n_k}\}$ 为 Cauchy 列, 亦即 $k, l \to +\infty \Longrightarrow \|z_{n_k} - z_{n_l}\| \to 0$, 联合 $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}\,\|z_{n_k} - z_{n_l}\| \Longrightarrow \|x_{n_k} - x_{n_l}\| \to 0 \Longrightarrow \{x_{n_k}\}$ 为 Cauchy 列, 由于 C 完备, 故 $\exists\, x_0 \in C$ 使得 $x_{n_k} \to x_0$, 这说明 $\varphi(C)$ 列紧. (3)

(2), (3) 满足 Schauder 不动点定理条件, 于是 $\exists\, x^* \in C$, 使 $\varphi(x^*) = x^*$, 即 $T_1x^* + T_2x^* = x^*$. □

▷ § 1.6.1 （极化恒等式）设 a 是复线性空间 $\mathscr{X}$ 上的共轭双线性函数, q 是由 a 诱导的二次型, 求证: 对 $\forall\, x, y \in \mathscr{X}$ 有

$$a(x,y) = \frac{1}{4}\big\{q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)\big\}.$$

证明: $\lambda\, q(x + \lambda y) = \lambda\, a(x,x) + |\lambda|^2\, a(x,y) + \lambda^2 a(y,x) + \lambda\,|\lambda|^2\, a(y,y)$, 分别代入 $\lambda = \pm 1, \pm i$ 即得结论. □

▷ § 1.6.4 设 M, N 是内积空间中的两个子集, 求证: $M \subset N \Longrightarrow N^\perp \subset M^\perp$.

证明: $\forall x \in N^\perp \Longrightarrow x \perp N \Longrightarrow x \perp M \Longrightarrow x \in M^\perp$. □

▷ § 1.6.5 设 M 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 的子集, 求证: $(M^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span} M}$.

证明: 一方面 $\forall x \in M^\perp \Longrightarrow x \perp M \Longrightarrow x \perp \operatorname{span} M \Longrightarrow x \perp \overline{\operatorname{span} M} \Longrightarrow x \in (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$, 即 $M^\perp \subset (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$, 另一方面 $M \subset \overline{\operatorname{span} M} \Longrightarrow M^\perp \supset (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$, 于是 $M^\perp = (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$, $(M^\perp)^\perp = ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$.

$\forall x \in \overline{\operatorname{span} M} \Longrightarrow x \perp (\overline{\operatorname{span} M})^\perp \Longrightarrow x \in ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$, 即 $\overline{\operatorname{span} M} \subset ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$. 若 $\exists y \in ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$ 且 $y \notin \overline{\operatorname{span} M}$, 由于 $\overline{\operatorname{span} M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间, y 存在唯一正交分解: $y = m + m^\perp$, 其中 $m \in \overline{\operatorname{span} M}$, $m^\perp \in (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$. 由于 $y, m \in ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$, 有 $m^\perp = y - m \in ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$, 于是 $m^\perp \in ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp \cap (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$, $m^\perp = \theta$, 这导致 $y = m \in \overline{\operatorname{span} M}$, 矛盾. 于是 $\overline{\operatorname{span} M} = ((\overline{\operatorname{span} M})^\perp)^\perp$.

综上有 $(M^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span} M}$. □

▷ § 1.6.9 设 $\{e_n\}_1^\infty$, $\{f_n\}_1^\infty$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中的两个正交规范集, 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

求证: $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备.

证明: 不妨设 $\{e_n\}$ 完备, 假设 $\{f_n\}$ 不完备, 即 $\exists f \neq \theta$, 使得 $f \perp \{f_n\}$.

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n) - (f, f_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n - f_n)|^2 \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|^2 \|e_n - f_n\|^2 = \|f\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \|f\|^2,\end{aligned}$$

矛盾. 因此 $\{f_n\}$ 也完备. □