

《高等数学》试题库

一、选择题

(一) 函数

1、下列集合中 () 是空集。

$a.\{0,1,2\}\cap\{0,3,4\}$ $b.\{1,2,3\}\cap\{5,6,7\}$ $c.\{(x,y)|y=x\text{且}y=2x\}$ $d.\{x||x|<1\text{且}x\geq 0\}$

2、下列各组函数中是相同的函数有 ()。

$a.f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$ $b.f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$

$c.f(x)=1, g(x)=\sin^2 x + \cos^2 x$ $d.f(x)=\frac{x^3}{x}, g(x)=x^2$

3、函数 $f(x)=\frac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是 ()。

$a.(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$ $b.(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$

$c.(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$ $d.(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

4、设函数
$$\begin{cases} x+2 & -\infty < x < 0 \\ 2^x & 0 \leq x < 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$
 则下列等式中, 不成立的是 ()。

$a.f(0)=f(1)$ $b.f(0)=f(-1)$ $c.f(-2)=f(2)$ $d.f(-1)=f(3)$

5、下列函数中, () 是奇函数。

$a.\frac{|x|}{x}$ $b.x^2 \sin x$ $c.\frac{a^x-1}{a^x+1}$ $d.\frac{10^x-10^{-x}}{2}$

6、下列函数中, 有界的是 ()。

$a.y = \arctg x$ $b.y = \tg x$ $c.y = \frac{1}{x}$ $d.y = 2^x$

7、若 $f(x-1)=x(x-1)$, 则 $f(x)=$ ()。

$a.x(x+1)$ $b.(x-1)(x-2)$ $c.x(x-1)$ $d.$ 不存在

8、函数 $y=|\sin x|$ 的周期是 ()。

$a.4\pi$ $b.2\pi$ $c.\pi$ $d.\frac{\pi}{2}$

9、下列函数不是复合函数的有 ()。

$a.y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $b.y=\sqrt{-(1-x)^2}$ $c.y=\lg \sin x$ $d.y=e^{\sqrt{1+\sin x}}$

10、下列函数是初等函数的有 ()。

$$a. y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad b. y = \begin{cases} 1 + x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$c. y = \sqrt{-2 - \cos x} \quad d. y = \left(\frac{\sin(e^x - 1)}{\lg(1 + x^2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

11、区间 $[a, +\infty)$, 表示不等式 ()。

- (A) $a < x < +\infty$ (B) $a \leq x < +\infty$ (C) $a < x$ (D) $a \geq x$

12、若 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 则 $\varphi(t^3 + 1) = ()$ 。

- (A) $t^3 + 1$ (B) $t^6 + 1$ (C) $t^6 + 2$ (D) $t^9 + 3t^6 + 3t^3 + 2$

13、函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是 ()。

- (A) 偶函数 (B) 奇函数 (C) 非奇非偶函数 (D) 既是奇函数又是偶函数

14、函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 ()。

- (A) $y = 0$ (B) $x = 0$ (C) $y = x$ (D) $y = -x$

15、函数 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数是 ()。

- (A) $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{x-2}$ (B) $y = \log_x 2$
(C) $y = \log_2 \frac{1}{x}$ (D) $y = 1 + \lg(x+2)$

16、函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 是周期函数, 它的最小正周期是 ()。

- (A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

17、设 $f(x) = x + 1$, 则 $f(f(x) + 1) = ()$ 。

- A. x B. $x + 1$ C. $x + 2$ D. $x + 3$

18、下列函数中, () 不是基本初等函数。

- A. $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ B. $y = \ln x^2$ C. $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ D. $y = \sqrt[3]{x^5}$

19、若函数 $f(e^x) = x + 1$, 则 $f(x) = ()$

- A. $e^x + 1$ B. $x + 1$ C. $\ln(x + 1)$ D. $\ln x + 1$

20、若函数 $f(x + 1) = x^2$, 则 $f(x) = ()$

- A. x^2 B. $(x + 1)^2$ C. $(x - 1)^2$ D. $x^2 - 1$

21、若函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x + 1$, 则函数 $f(g(x))$ 的定义域是 ()

- A. $x > 0$ B. $x \geq 0$ C. $x \geq 1$ D. $x > -1$

22、若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$ 则函数 $f(\ln x + 1)$ 的定义域是 ()

- A. (0, 1) B. (-1, 0) C. (e^{-1} , 1) D. (e^{-1} , e)
- 23、函数 $f(x)=|x-1|$ 是()
 A. 偶函数 B. 有界函数 C. 单调函数 D. 连续函数
- 24、下列函数中为奇函数的是()
 A. $y=\cos(1-x)$ B. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ C. e^x D. $\sin x^2$
- 25、若函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数, 则下列函数中() 是偶函数。
 A. $f(|x|)$ B. $|f(x)|$ C. $[f(x)]^2$ D. $f(x)-f(-x)$
- 26、函数 $y=\frac{x\sin x}{1+x^2}$ 是()
 A. 偶函数 B. 奇函数 C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数
- 27、下列函数中() 是偶函数。
 A. $y=x^2\sin x+1$ B. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ C. $y=f(x)+f(-x)$ D. $y=f(x)-f(-x)$
- 28、下列各对函数中,() 中的两个函数相等。
 A. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$ B. $f(x)=\frac{x\ln x-x}{x^2}, g(x)=\frac{\ln x-1}{x}$
 C. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$ D. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

(二) 极限与连续

- 1、下列数列发散的是()。
 a、0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, b、 $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots\dots$
 c、 $f(n)=\begin{cases} \frac{2^n+1}{2^n} & n\text{为奇数} \\ \frac{2^n-1}{2^n} & n\text{为偶数} \end{cases}$ d、 $f(n)=\begin{cases} \frac{n}{n+1} & n\text{为奇数} \\ \frac{n}{1-n} & n\text{为偶数} \end{cases}$
- 2、当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\arctg x$ 的极限()。
 a、 $=\frac{\pi}{2}$ b、 $=-\frac{\pi}{2}$ c、 $=\infty$ d、不存在, 但有界
- 3、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ ()。
 a、 $=-1$ b、 $=1$ c、 $=0$ d、不存在
- 4、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中是无穷小量的有()。
 a、 $\sin \frac{1}{x}$ b、 $\frac{\sin x}{x}$ c、 $2^{-x}-1$ d、 $\ln|x|$
- 5、下列变量在给定的变化过程中是无穷大量的有()。
 a、 $\lg x(x \rightarrow 0^+)$ b、 $\lg x(x \rightarrow 1)$ c、 $\frac{x^2}{x^3+1}(x \rightarrow +\infty)$ d、 $e^{\frac{1}{x}}(x \rightarrow 0^-)$
- 6、如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)=\infty$, 则必有()。

a、 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$

b、 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$

c、 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

d、 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = \infty$ (k 为非零常数)

7、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} =$ ()。

a、1 b、2 c、0 d、 $\frac{1}{2}$

8、下列等式中成立的是 ()。

a、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e$

b、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} = e$

c、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e$

d、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = e$

9、当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 $x \sin x$ 相比较 ()。

a、是低阶无穷小量 b、是同阶无穷小量
c、是等阶无穷小量 d、是高阶无穷小量

10、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 是 $f(x)$ 在该点处连续的 ()。

a、充要条件 b、充分条件 c、必要条件 d、无关的条件

11、若数列 $\{x_n\}$ 有极限 a , 则在 a 的 ε 邻域之外, 数列中的点 ()。

(A) 必不存在 (B) 至多只有有限多个
(C) 必定有无穷多个 (D) 可以有有限个, 也可以有无限多个

12、设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则必有 ()。

(A) $a = 0, b = 0$ (B) $a = 2, b = -1$ (C) $a = -1, b = 2$ (D) a 为任意常数, $b = 1$

13、数列 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots$ ()。

(A) 以 0 为极限 (B) 以 1 为极限 (C) 以 $\frac{n-2}{n}$ 为极限 (D) 不存在极限

14、数列 $\{y_n\}$ 有界是数列收敛的 ()。

(A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

15、当 $x \rightarrow 0$ 时, () 是与 $\sin x$ 等价的无穷小量。

(A) $\tan 2x$ (B) \sqrt{x} (C) $\frac{1}{2} \ln(1+2x)$ (D) $x(x+2)$

16、若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 极限存在, 则 ()。

(A) $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在且等于极限值

(B) $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在, 但不一定等于极限值

- (C) $f(x)$ 在 x_0 的函数值可以不存在 (D) 如果 $f(x_0)$ 存在则必等于极限值

17、如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在, 则 () .

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在但不一定有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不一定存在
 (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定不存在

18、无穷小量是 () .

- (A) 比 0 稍大一点的一个数 (B) 一个很小很小的数
 (C) 以 0 为极限的一个变量 (D) 0 数

19、无穷大量与有界量的关系是 () .

- (A) 无穷大量可能是有界量 (B) 无穷大量一定不是有界量
 (C) 有界量可能是无穷大量 (D) 不是有界量就一定是无穷大量

20、指出下列函数中当 $x \rightarrow 0^+$ 时 () 为无穷大量.

- (A) $2^{-x} - 1$ (B) $\frac{\sin x}{1 + \sec x}$ (C) e^{-x} (D) $e^{\frac{1}{x}}$

21、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中 () 是无穷小量。

- A. $\frac{\sin x}{x}$ B. $1 - e^x$ C. $\frac{x}{x^2 - x}$ D. $\frac{\ln(1+x)}{x}$

22、下列变量中 () 是无穷小量。

- A. $e^{\frac{1}{x}}$ ($x \rightarrow 0$) B. $\sin \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow 0$) C. $\frac{x-3}{x^2-9}$ ($x \rightarrow 3$) D. $\ln x$ ($x \rightarrow 1$)

23、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2x} =$ ()

- A. 1 B. 0 C. 1/2 D. 2

24、下列极限计算正确的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

25、下列极限计算正确的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ C. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = \frac{12}{5}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

26、设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 B. $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 但有极限
 C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限 D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但无极限

27、若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 () .

(A) 当 $g(x)$ 为任意函数时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

(B) 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

(C) 当 $g(x)$ 为有界时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

(D) 仅当 $g(x)$ 为常数时, 才能使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

28、设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 则 ().

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 一定都不存在

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 一定都存在

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 中恰有一个存在, 而另一个不存在

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 有可能都存在

29、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}) = ()$.

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \infty$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \frac{1}{2}$

(D) 极限不存在

30、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为 ().

(A) 1 (B) ∞ (C) 不存在 (D) 0

31、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = ()$.

(A) ∞ (B) 不存在 (C) 1 (D) 0

32、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(1-x)}{(x+1)^2(x+2)} = ()$.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{2}{3}$

33、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{2x} = ()$.

(A) e^{-2} (B) ∞ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

34、无穷多个无穷小量之和 ().

- (A) 必是无穷小量 (B) 必是无穷大量
(C) 必是有界量 (D) 是无穷小,或是无穷大,或有可能是有界量

35、两个无穷小量 α 与 β 之积 $\alpha\beta$ 仍是无穷小量,且与 α 或 β 相比 ().

- (A) 是高阶无穷小 (B) 是同阶无穷小
(C) 可能是高阶无穷小,也可能是同阶无穷小 (D) 与阶数较高的那个同阶

36、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处连续, 则 $a =$ ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 1/3 (D) 3

37、点 $x=1$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$ 的 ().

- (A) 连续点 (B) 第一类非可去间断点
(C) 可去间断点 (D) 第二类间断点

38、方程 $x^4 - x - 1 = 0$ 至少有一个根的区间是 ().

- (A) $(0, 1/2)$ (B) $(1/2, 1)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(1, 2)$

39、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ().

- (A) 可去间断点 (B) 无穷间断点 (C) 连续点 (D) 跳跃间断点

40、 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$, 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 那么 $k =$ ().

- (A) 0 (B) 2 (C) 1/2 (D) 1

41、下列极限计算正确的是 ().

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

42、若 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} = -\frac{1}{16}$, 则 $f(x) =$ ().

- (A) $x+1$ (B) $x+5$ (C) $\sqrt{x+13}$ (D) $\sqrt{x+6}$

43、方程 $x^4 - x - 1 = 0$ 至少有一个实根的区间是 ().

- (A) $(0, 1/2)$ (B) $(1/2, 1)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(1, 2)$

44、函数 $f(x) = \sqrt{25 - x^2} + \frac{x-10}{\ln x}$ 的连续区间是 ().

- (A) $(0, 5)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 5)$ (D) $(0, 1) \cup (1, 5)$

(三) 导数与微分

1、设函数 $f(x)$ 可导且下列极限均存在，则不成立的是 ()。

a、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

b、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

c、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = f'(a)$

d、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0)$

2、设 $f(x)$ 可导且下列极限均存在，则 () 成立。

A、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{2} f'(x_0)$

B、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

C、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

D、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = f'(a)$

3、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()。

① 导数 $f'(0) = -1$

② 间断

③ 导数 $f'(0) = 1$

④ 连续但不可导

4、设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ ，则 $f'(0) = ()$ 。

a、3 b、-3 c、6 d、-6

5、设 $f(x) = x \ln x$ ，且 $f'(x_0) = 2$ ，则 $f(x_0) = ()$ 。

a、 $\frac{2}{e}$ b、 $\frac{e}{2}$ c、e d、1

6、设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处 ()。

a、连续但不可导 b、连续且 $f'(1)=1$ c、连续且 $f'(1)=0$ d、不连续

7、设函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 () 不成立。

a、可导 b、连续 c、可微 d、连续，不可异

8、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是在该点处可导的 ()。

a、必要但不充分条件

b、充分但不必要条件

c、充要条件

d、无关条件

9、下列结论正确的是 ()。

- a、初等函数的导数一定是初等函数 b、初等函数的导数未必是初等函数
c、初等函数在其有定义的区间内是可导的 d、初等函数在其有定义的区间内是可微的

10、下列函数中 () 的导数不等于 $\frac{1}{2}\sin 2x$ 。

- a、 $\frac{1}{2}\sin^2 x$ b、 $\frac{1}{4}\cos 2x$ c、 $-\frac{1}{2}\cos^2 x$ d、 $1-\frac{1}{4}\cos 2x$

11、已知 $y = \cos x$ ，则 $y^{(8)} = ()$ 。

- a、 $\sin x$ b、 $\cos x$ c、 $-\sin x$ d、 $-\cos x$

12、设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则 $y' = ()$ 。

- ① $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ ② $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
③ $\frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ ④ $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

13、已知 $y = e^{f(x)}$ ，则 $y'' = ()$ 。

- a、 $e^{f(x)} f''(x)$ b、 $e^{f(x)}$
c、 $e^{f(x)} [f'(x) + f''(x)]$ d、 $e^{f(x)} \{[f'(x)]^2 + f''(x)\}$

14、已知 $y = \frac{1}{4}x^4$ ，则 $y'' = ()$ 。

- A. x^3 B. $3x^2$ C. $6x$ D. 6

15、设 $y = f(x)$ 是可微函数，则 $df(\cos 2x) = ()$ 。

- A. $2f'(\cos 2x)dx$ B. $f'(\cos 2x)\sin 2xd2x$ C. $2f'(\cos 2x)\sin 2xdx$
D. $-f'(\cos 2x)\sin 2xd2x$

16、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 () 是错误的。

- A. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义 B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，但 $A \neq f(x_0)$
C. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 D. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微

17、下列等式中，() 是正确的。

- A. $\frac{1}{\sqrt{2x}}dx = d(\sqrt{2x})$ B. $\ln x dx = d\left(\frac{1}{x}\right)$
C. $-\frac{1}{x}dx = d\left(\frac{1}{x^2}\right)$ D. $\sin x dx = d(\cos x)$

18、设 $y = F(x)$ 是可微函数，则 $dF(\cos x) = ()$

- A. $F'(\cos x)dx$ B. $F'(\cos x)\sin x dx$ C. $-F'(\cos x)\sin x dx$ D. $\sin x dx$

19、下列等式成立的是 ()。

$$A. \frac{1}{\sqrt{x}} dx = d\sqrt{x}$$

$$B. \frac{1}{x} dx = -d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$C. \sin x dx = d(\cos x)$$

$$D. a^x dx = \frac{1}{\ln a} d a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$20. d(\sin 2x) = (\quad)$$

$$A. \cos 2x dx$$

$$B. -\cos 2x dx$$

$$C. 2\cos 2x dx$$

$$D. -2\cos 2x dx$$

$$21. f(x) = \ln|x|, df(x) = (\quad)$$

$$A. \frac{1}{|x|} dx$$

$$B. \frac{1}{|x|}$$

$$C. \frac{1}{x}$$

$$D. \frac{1}{x} dx$$

$$22. \text{若 } f(x) = 2^x, \text{ 则}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 - \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = (\quad)$$

$$A. 0$$

$$B. 1$$

$$C. -\ln 2$$

$$D. 1/\ln 2$$

$$23. \text{曲线 } y = e^{2x} \text{ 在 } x=2 \text{ 处切线的斜率是 } (\quad)$$

$$A. e^4$$

$$B. e^2$$

$$C. 2e^2$$

$$D. 2$$

$$24. \text{曲线 } y = \sqrt{x} + 1 \text{ 在 } x=1 \text{ 处的切线方程是 } (\quad)$$

$$A. y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$B. y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

$$C. y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

$$D. y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$25. \text{曲线 } y = x^2 - 2x \text{ 上切线平行于 } x \text{ 轴的点是 } (\quad).$$

$$A. (0, 0)$$

$$B. (1, -1)$$

$$C. (-1, -1)$$

$$D. (1, 1)$$

(四) 中值定理与导数的应用

1. 下列函数在给定区间上不满足拉格朗日定理的有 ()。

$$a. y = |x| \quad [-1, 2]$$

$$b. y = 4x^3 - 5x^2 + x - 1 \quad [0, 1]$$

$$c. y = \ln(1 + x^2) \quad [0, 3]$$

$$d. y = \frac{2x}{1 + x^2} \quad [-1, 1]$$

2. 函数 $y = x^3 + x + 2$ 在其定义域内 ()。

a. 单调减少

b. 单调增加

c. 图形下凹

d. 图形上凹

3. 下列函数在指定区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加的是 ()。

$$A. \sin x$$

$$B. e^x$$

$$C. x^2$$

$$D. 3 - x$$

4. 下列结论中正确的有 ()。

a. 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则有 $f'(x_0) = 0$;

b. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则点 x_0 必是函数 $f(x)$ 的极值点;

c. 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 且 $f'(x_0)$ 存在, 则必有 $f'(x_0) = 0$;

d. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的极大值一定大于极小值。

5. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续但不可导, 则该点一定 ()。

a、是极值点 b、不是极值点 c、不是拐点 d、不是驻点

6、如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒有 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 则函数的曲线为 ()。

a、上凹上升 b、上凹下降 c、下凹上升 d、下凹下降

7、如果函数 $y = 2 + x - x^2$ 的极大值点是 $x = \frac{1}{2}$, 则函数 $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ 的极大值是 ()。

a、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b、 $\frac{9}{4}$ c、 $\frac{81}{16}$ d、 $\frac{3}{2}$

8、当 $x < x_0$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f''(x) < 0$, 则下列结论正确的是 ()。

a、点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点

b、点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点

c、点 $(x_0, f(x_0))$ 必是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

d、点 x_0 不一定是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

9、当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则点 x_0 一定是函数 $f(x)$ 的 ()。

a、极大值点 b、极小值点 c、驻点 d、以上都不对

10、函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 的单调增加区间是

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

11、函数 $f(x) = x^3 + x$ 在 ()

A. $(-\infty, +\infty)$ 单调减少 B. $(-\infty, +\infty)$ 单调增加
C. $(-\infty, -1)$ 单调减少, $(-1, +\infty)$ 单调增加 D. $(-\infty, 0)$ 单调减少, $(0, +\infty)$ 单调增加

12、函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $[0, 2]$ 上 ()

A. 单调增加 B. 单调减少 C. 不增不减 D. 有增有减

13、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值, 则 ()

A. $f'(x_0) = 0$ B. $f'(x_0)$ 不存在 C. $f(x)$ 在点 x_0 处连续 D. $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

14、函数 $y = |x+1| + 2$ 的最小值点是 ()。

A. 0 B. 1 C. -1 D. 2

15、函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 的驻点为 ()。

A. $x=0$ B. $x=2$ C. $x=0, y=0$ D. $x=1, e-2$

16、若 $f'(x) = 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的 ()

A. 极大值点 B. 最大值点 C. 极小值点 D. 驻点

17、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{2h} =$

A. $f'(x_0)$ B. $2f'(x_0)$ C. $-f'(x_0)$ D. $-2f'(x_0)$

18、若 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, 则 $f'(x) =$ ()

A. $\frac{1}{x}$ B. $-\frac{1}{x}$ C. $\frac{1}{x^2}$ D. $-\frac{1}{x^2}$

19、函数 $y = \frac{x^3}{3} - x$ 单调增加区间是 ()

A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$

20、函数 $y = \frac{1}{x}$ 单调下降区间是 ()

A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$

21、 $y = x^2 - 4x + 1$ 在区间 $(1, 2)$ 上是 ()；

(A) 单调增加的 (B) 单调减少的 (C) 先增后减 (D) 先减后增

22、曲线 $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的垂直渐近线是 ()；

(A) $y = \pm 1$ (B) $y = 0$ (C) $x = \pm 1$ (D) $x = 0$

23、设五次方程 $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ 有五个不同的实根，则方程

$5a_0x^4 + 4a_1x^3 + 3a_2x^2 + 2a_3x + a_4 = 0$ 最多有()实根.

A、 5 个 B、 4 个 C、 3 个 D、 2 个

24、设 $f(x)$ 的导数在 $x=2$ 连续，又 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x-2} = -1$ ，则

A、 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B、 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C、 $(2, f(2))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D、 $x=2$ 不是 $f(x)$ 的极值点， $(2, f(2))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

25、点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点，则().

A、 $a \neq 0, b=0, c=1$ B、 a 为任意实数， $b=0, c=1$

C、 $a=0, b=1, c=0$ D、 $a=-1, b=2, c=1$

26、设 p 为大于 1 的实数，则函数 $f(x) = x^p = (1-x)^p$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 ().

A、 1 B、 2 C、 $\frac{1}{2^{p-1}}$ D、 $\frac{1}{2^p}$

27、下列需求函数中，需求弹性为常数的有 ().

a、 $Q = aP$ b、 $Q = aP + b$ c、 $Q = \frac{a}{P^2} + 1$ d、 $Q = ae^{-bP}$

28、设总成本函数为 $C(Q)$ ，总收益函数为 $R(Q)$ ，边际成本函数为 MC ，边际收益函数为

MR ，假设当产量为 Q_0 时，可以取得最大利润，则在 $Q = Q_0$ 处，必有 ().

a、 $MR < MC$ b、 $MR = MC$ c、 $MR > MC$ d、以上都不对

29、设某商品的需求函数为 $q(p) = 10e^{-\frac{p}{2}}$ ，则当 $p = 6$ 时，需求弹性为 ()。

- A. $-5e^{-3}$ B. -3 C. 3 D. $-\frac{1}{2}$

30、已知需求函数 $q(p) = 2e^{-0.4p}$ ，当 $p = 10$ 时，需求弹性为 ()

- A. $2e^{-4}$ B. -4 C. 4 D. $2e^4$

(五) 不定积分

1、 $\int x d(e^{-x}) = ()$ 。

- A. $xe^{-x} + c$ B. $xe^{-x} + e^{-x} + c$ C. $-xe^{-x} + c$ D. $xe^{-x} - e^{-x} + c$

2、下列等式成立的是 ()。

- A. $\ln x dx = d \frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x} dx = -d \frac{1}{x^2}$ C. $\cos x dx = d \sin x$ D. $\frac{1}{x^2} dx = d \frac{1}{x}$

3、若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数，则 ()。

- (A) $\int f(x) dx = g(x) + C$ (B) $\int g(x) dx = f(x) + C$
(C) $\int g'(x) dx = g(x) + C$ (D) $\int f'(x) dx = g(x) + C$

4、如果 $\int df(x) = \int dg(x)$ ，则一定有 ()。

- (A) $f(x) = g(x)$ (B) $f'(x) = g'(x)$
(C) $df(x) = dg(x)$ (D) $d \int f(x) = d \int g(x)$

5、若 $\int f(x) dx = x^2 e^{2x} + c$ ，则 $f(x) = ()$ 。

- (A) $2xe^{2x}$ (B) $2x^2 e^{2x}$
(C) xe^{2x} (D) $2xe^{2x}(1+x)$

6、若 $\int f(x) dx = F(x) + C$ ，则 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = ()$ 。

- (A) $F(e^x) + c$ (B) $-F(e^{-x}) + c$
(C) $F(e^{-x}) + c$ (D) $F(e^x) + c$

7、设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x) dx = ()$ 。

- (A) $e^{-x}(1-x) + c$ (B) $e^{-x}(x+1) + c$

(C) $e^{-x}(x-1)+c$ (D) $-e^{-x}(x+1)+c$

8、设 $f(x)=e^{-x}$ ，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = (\quad)$ 。

(A) $-\frac{1}{x}+c$ (B) $-\ln x+c$

(C) $\frac{1}{x}+c$ (D) $\ln x+c$

9、若 $\int f(x)dx = x^2 + c$ ，则 $\int xf(1-x^2)dx = (\quad)$ 。

(A) $2(1-x^2)^2+c$ (B) $-2(1-x^2)^2+c$

(C) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+c$ (D) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+c$

10、 $\int \sin 2x dx = (\quad)$ 。

(A) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (B) $\sin^2 x+c$

(C) $-\cos^2 x+c$ (D) $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

11、 $\int \frac{dx}{1+\cos x} = (\quad)$ 。

(A) $\operatorname{tg} x - \sec x + c$ (B) $-\operatorname{ctg} x + \csc x + c$

(C) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$ (D) $\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

12、已知 $f'(e^x) = 1+x$ ，则 $f(x) = (\quad)$ 。

(A) $1+\ln x+C$ (B) $x+\frac{1}{2}x^2+C$

(C) $\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$ (D) $x\ln x + C$

13、函数 $f(x) = \sin|x|$ 的一个原函数是 (\quad) 。

(A) $-\cos|x|$ (B) $-\cos x$

(C) $F(x) = \begin{cases} -\cos x & x \geq 0 \\ \cos x - 2 & x < 0 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} -\cos x + C & x \geq 0 \\ \cos x + C & x < 0 \end{cases}$

14、幂函数的原函数一定是 (\quad) 。

A. 幂函数 B. 指数函数 C. 对数函数 D. 幂函数或对数函数

15、已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，则 $\int \frac{1}{x} f(\ln x)dx = (\quad)$

A. $F(\ln x) + c$ B. $F(\ln x)$ C. $\frac{1}{x}F(\ln x) + c$ D. $F(\frac{1}{x}) + c$

16、下列积分值为零的是 (\quad)

$$A. \int_{-\pi}^{+\pi} x \sin x dx \quad B. \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \quad C. \int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx \quad D. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + x) dx$$

17、下列等式正确的是 ()。

$$A. \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad B. \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) + C$$

$$C. \frac{d}{dx} \int_a^b f(x) = f(x) \quad D. \int f'(x) dx = f(x)$$

18、下列等式成立的是 ()。

$$A. \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad B. \int f'(x) dx = f(x)$$

$$C. d \int f(x) dx = f(x) \quad D. \int df(x) dx = f(x)$$

19、若 $\int f(x) dx = \sin 2x + c$, 则 $f(x) =$

$$A. 2\cos 2x \quad B. 2\sin 2x \quad C. -2\cos 2x \quad D. -2\sin 2x$$

20、若 $\int f(x) dx = e^{-2x} + c$, 则 $f'(x) =$ ()

$$A. -2e^{-2x} \quad B. 2e^{-2x} \quad C. -4e^{-2x} \quad D. 4e^{-2x}$$

21、若 $\int f(x) dx = F(x) + c$, 则 $\int xf(1-x^2) dx =$ ()

$$A. F(1-x^2) + c \quad B. \frac{1}{2}F(1-x^2) + c \quad C. -\frac{1}{2}F(1-x^2) + c \quad D. -F(1-x^2) + c$$

22、若 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x + c$, 则 $f(x) =$ ()

$$A. x \quad B. e^x \quad C. e^{-x} \quad D. \ln x$$

(六) 定积分

1、下列积分正确的是 ()。

$$a. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$$

$$b. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$c. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 2 \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| = 2 \ln \sqrt{2} - 2 \ln 2$$

$$d. \int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2$$

2、下列 () 是广义积分。

$$a. \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad b. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \quad c. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad d. \int_{-1}^1 e^{-x} dx$$

3、图 6—14 阴影部分的面积总和可按 () 的方法求出。

$$a. \int_a^b f(x) dx$$

b、 $\left| \int_a^b f(x)dx \right|$

c、 $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)|dx$

d、 $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4、 若 $\int_0^1 (x+k)dx = 2$ ， 则 $k =$ ()

a、 0 b、 1 c、 -1 d、 $\frac{3}{2}$

5、 当 () 时， 广义积分 $\int_{-\infty}^0 e^{-kx} dx$ 收敛。

a、 $k > 0$ b、 $k \geq 0$ c、 $k < 0$ d、 $k \leq 0$

6、 下列无穷积分收敛的是 ()。

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

7、 定积分定义 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 说明 ()。

(A) $[a, b]$ 必须 n 等分， ξ_i 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 端点

(B) $[a, b]$ 可任意分法， ξ_i 必须是 $[x_{i-1}, x_i]$ 端点

(C) $[a, b]$ 可任意分法， $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ ， ξ_i 可在 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任取

(D) $[a, b]$ 必须等分， $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ ， ξ_i 可在 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任取

8、 积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ 其中 ()。

(A) ξ 是 $[a, b]$ 内任一点 (B) ξ 是 $[a, b]$ 内必定存在的某一点

(C) ξ 是 $[a, b]$ 内惟一的某点 (D) ξ 是 $[a, b]$ 内中点

9、 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 存在的 ()。

(A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要

10、 若设 $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t-x)dt$ ， 则必有 ()。

(A) $f(x) = -\sin x$ (B) $f(x) = -1 + \cos x$

(C) $f(x) = \sin x$ (D) $f(x) = 1 - \sin x$

11、函数 $F(x) = \int_0^x \frac{3t}{t^2 - t + 1} dt$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 () .

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 0

12、设 $f''(u)$ 连续, 已知 $n \int_0^1 x f''(2x) dx = \int_0^2 t f''(t) dt$, 则 n 应是 () .

- (A) 2 (B) 1 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

13、设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $\Delta F(x) =$ () .

- (A) $\int_0^x [f(t + \Delta t) - f(t)] dt$ (B) $f(x) \Delta x$
(C) $\int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$ (D) $\int_0^x f(x) d(t + \Delta t) - \int_0^x f(t) dt$

14、由连续函数 $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b(a < b)$ 围成的平面图形的面积为 () .

- A. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ B. $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$
C. $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$ D. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

15、 $\int_{-\pi}^{+\pi} (e^{\cos x} \sin x + x^2) dx =$ ()

- A. $\frac{\pi^3}{3}$ B. $\frac{2\pi^3}{3}$ C. $2e^{-1} + \frac{2\pi^3}{3}$ D. $e \cdot e^{-1} + \frac{2\pi^3}{3}$

16、 $\int_0^2 |x-1| dx =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -2

17、下列无穷积分中 () 收敛。

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ C. $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$

18、无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$ ()

- A. ∞ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. -1

19、 $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{-x} (\arctan t)^2 dt \right] =$ () .

- (A) $2 \arctan \frac{1}{1+t^2}$ (B) $-(\arctan x)^2$ (C) $(\arctan x)^2$ (D) $-(\arctan t)^2$

(七) 多元函数的微积分:

(1) 设 $f(x, y) = \ln xy$, $g(x, y) = \ln x + \ln y$, 则 $f(x, y)$ () $g(x, y)$.

- ① $>$ ② $<$ ③ $=$ ④ \neq

(2) 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的偏导数存在, 则 $f'_x(x_0, y_0) =$ () .

- ① $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$
② $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

(3) 设 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, 则().

① (x_0, y_0) 为极值点 ② (x_0, y_0) 为驻点

③ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有定义 ④ (x_0, y_0) 为连续点

(4) 在空间中, 下列方程()为球面, ()为抛物面, ()为柱面.

$$\textcircled{1} x^2 - 4y + z = 25 \qquad \textcircled{2} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\textcircled{3} y = x^2 \qquad \textcircled{4} x^2 + y^2 = 1$$

$$\textcircled{5} z = y^2 \qquad \textcircled{6} x^2 + y^2 + 2y = 2x - z^2$$

(5) 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处偏导数存在, 则 $f(x, y)$ 在该点().

① 极限存在

② 连续

③ 可微

④ 以上结论均不成立

(6) 设 D 由 x 轴、 $y = \ln x$ 、 $x = e$ 围成, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = ()$.

$$\textcircled{1} \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \qquad \textcircled{2} \int_0^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx \qquad \textcircled{4} \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$

(7) 当 $a = ()$ 时, 有 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$.

$$\textcircled{1} 1 \qquad \textcircled{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \qquad \textcircled{3} \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \qquad \textcircled{4} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

二、填空:

(一) 函数:

1、设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 3 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的定义域是_____, $f(0) =$ _____ ,

$f(1) =$ _____.

2、 $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ 的定义域是_____, 值域是_____.

3、函数 $f(x) = \ln(x+5) - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域是_____.

4、若 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$ ，则 $f(x) =$ _____.

5、设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$ ，则 $f(x) =$ _____.

6、若 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ，则 $f(f(x)) =$ _____， $f(f(f(x))) =$ _____.

7、若函数 $f(x+1) = x^2 + 2x - 5$ ，则 $f(x) =$ _____.

8、设函数 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ，则 $f(\frac{1}{x}) =$ _____.

9、函数 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 是_____函数。

10、函数 $y = \frac{1}{x^2+1}$ 的定义域是区间_____；

11、函数 $y = 3^x - 1$ 的反函数是_____；

(二) 极限与连续:

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n-1} =$ _____.

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}} =$ _____.

3、已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 + bn + 5}{3n + 2} = 2$ ，则 $a =$ _____， $b =$ _____.

4、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{kx} = e^{-3}$ ，则 $k =$ _____.

5、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}} =$ _____.

6、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} =$ _____.

7、 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax+b)^{1/x} (a > 0, b > 0, x > 0) =$ _____.

8、如果 $x \rightarrow 0$ 时，要无穷小量 $(1 - \cos x)$ 与 $a \sin^2 \frac{x}{2}$ 等价， a 应等于_____.

9、设 $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \geq 0 \\ (a+b)x^2+x & x < 0 \end{cases}$ ， $a+b \neq 0$ ，则处处连续的充分必要条件是 $b =$ _____.

10、 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____; 若无间断点, 则 $a =$ _____.

11、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & x \neq -1 \\ A & x = -1 \end{cases}$, 当 $A =$ _____ 时, 函数 $f(x)$ 连续.

12、设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{1+x}$ 有有限极限值 L , 则 $a =$ _____, $L =$ _____.

13、已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

14、函数 $f(x) = \frac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点是 _____;

15、若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{5}{x})^{-kx} = e^{-10}$, 则 $k =$ _____

16、当 $x \rightarrow$ _____ 时, $y = \ln(1+x^2)$ 为无穷大

17、如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的左右极限存在, 但 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续, 则称间断点 $x = a$ 为第 _____ 类间断点

(三) 导数与微分

1、若函数 $y = \ln \sqrt{3}$, 则 $y' =$ _____.

2、若 $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $y'(0) =$ _____.

3、曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(4, 2)$ 处的切线方程是 _____.

4、设 $f(x)$ 是可导函数且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$ _____;

5、曲线 $y = x + \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程是 _____;

6、设由方程 $e^y - e^x + xy = 0$ 可确定 y 是 x 的隐函数, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____

7、函数 $y = \tan x$ 在 $x = 0$ 处的导数为 _____;

(四) 中值定理 导数的应用

- 1、函数 $y = 3(x-1)^2$ 的单调增加区间是_____.
- 2、函数 $y = 3(x-1)^2$ 的驻点是_____.
- 3、设某产品的需求量 q 为价格 p 的函数，且 $q = 1000e^{-0.5p}$ ，则需求对价格的弹性为_____.
- 4、过点 (1,3) 且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程是 $y =$ _____.
- 5、函数 $y = e^{-x^2}$ 的拐点为_____.
- 6、函数 $y = e^{-x^2}$ 的单调递增区间为_____，最大值为_____.
- 7、函数 $y = xe^{-x}$ 的驻点是_____，拐点是_____.
- 8、设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，则该函数在 x_0 处的导数 $f'(x_0) =$ _____.

(五) 不定积分

- 1、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x} ，则 $f(x) =$ _____.
- 2、若 $f'(x)$ 存在且连续，则 $[\int df(x)]' =$ _____.
- 3、若 $\int f(x)dx = F(x) + c$ ，则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$ _____.
- 4、若 $f(x)$ 连续，则 $(\int f(x)dx)' =$ _____.
- 5、设 $f(x) = \cos x$ ，则 $f[\int_0^x f(t)dt] =$ _____;
- 6、 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx =$ _____.
- 7、 $\int \csc x (\csc x - \cot x) dx =$ _____.
- 8、 $\int f(x)dx = 3e^{\frac{x}{3}} + C$ ，则 $f(x) =$ _____.
- 9、 $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx =$ _____.
- 10、 $\int e^{\cos x} \sin x dx =$ _____.

11、 $\int \arctan \frac{1}{x} dx =$ _____.

12、 $\int (tg^2 x - tg x) dx =$ _____.

13、 $\int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx =$ _____.

14、 $\int \frac{1}{10-6x+x^2} dx =$ _____.

15、若 $\int xf(x)dx = \sin e^{x^2} + C$, 则 $f(x) =$ _____

16、 $\int \frac{1+x \ln x - x}{x^2} dx =$ _____

(六) 定积分及应用

1、已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(0) = 2$, 且设 $F(x) = \int_{\sin x}^{x^2} f(t)dt$, 则 $F'(0) =$ _____.

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - x - 1}{3x}, & x < 0 \\ \int_0^x \sin t^2 dt \cdot x^{-3}, & x > 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

3、已知 $f(2x) = xe^x$, 则 $\int_{-1}^1 |f(x)| dx =$ _____.

4、 $\int_{-a}^{+a} x[f(x) + f(-x)] dx =$ _____.

5、 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$, 其中 k 为常数, 当 $k \leq 1$ 时, 这积分_____, 当 $k > 1$ 时, 这积分_____, 当这积分收敛时, 其值为_____.

6、设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t)dt$ 则具体的 $f(x) =$ _____.

7、设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^3} f(t)dt = x$, 则 $f(8) =$ _____.

8、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx =$ _____.

$$9、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$10、\int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^3} \sin^5 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$11、\int_{\frac{3}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12、\text{设 } f(2)=4, \int_0^2 f(x)dx=1, \text{ 则 } \int_0^2 xf'(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

二、求极限

(一) 利用极限的四则运算法则求下列函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 4) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 5} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \quad (6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2 + 2x} \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1+x^2}} \quad (9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 4} \quad (11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x + 1}{x^2 + 7x} \quad (12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+2x^3}}{1+x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6}{3x^2+x+3} \quad (14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} \quad (15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{10}-2)(3x+1)^{20}}{(2x+3)^{30}}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^{10}(2x-3)^{20}}{(1-3x)^{30}} \quad (17) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (18) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \quad (20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$$

$$(21) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad (23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{1+x^2} \quad (24) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{2n^2 + n - 5}$$

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 + x} \quad (26) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4} \quad (27) \quad \lim_{t \rightarrow -2} \frac{e^t + 1}{t}$$

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 2x}{2 \cos(\pi - x)} \quad (29) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$(30) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right)$$

(二) 利用第一重要极限公式求下列极限

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin x}{x + \sin x}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x \sin x} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1}$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x \sin x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cotg 2x$$

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} \quad (17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{2}{x^2} \quad (18) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

(三) 利用第二重要极限公式求下列极限

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{\frac{1}{x}} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2} \right)^{\frac{2}{x}-1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{x+1}$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot x} \quad (14) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} \quad (15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^x$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x+3} \right)^{\frac{2}{x}} \quad (17) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+2) - \ln n)$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{1+x} \right)^x \quad (19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x \quad (20) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-3x}$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x} \quad (22) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (23) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$$

(四) 利用罗必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 5} \quad (8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} \quad (9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad (11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 9^x)^{1/x} \quad (14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad (15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \quad (17) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x} \quad (18) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (20) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (21) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x^3} \quad (23) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\ln(1+x)}$$

$$(25) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (26) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

三、求导数或微分

(一) 利用导数的基本运算公式和运算法则求导数

$$(1) y = x^4 - x + 1 \quad (2) y = \left(\frac{1}{x} + 2x\right)(x^3 - 2x^2)$$

$$(3) y = \frac{x-1}{x+1} \quad (4) y = x \ln x + \sin x - \cos x$$

$$(5) y = 3x^2 - 2x + 5 \quad (6) y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 1$$

$$(7) y = x^3 + x^{-3} + 3^3 \quad (8) y = (x-1)(x-2)$$

$$(9) y = x^2 \ln x \quad (10) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$(11) y = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (12) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$(13) y = x \cos x + \sin x \quad (14) y = x \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

$$(15) y = x^a + a^x + a^a (a \text{ 为常数}) \quad (16) y = 2^x \ln x$$

$$(17) y = 2x^3 \sin x \quad (18) y = 3 \tan x - 4$$

$$(19) y = (3+2x)(2-3x) \quad (20) y = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$(21) y = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2}{x} \quad (22) y = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}$$

(二) 求复合函数的导数

$$(1) y = \sin x^2 \quad (2) y = \ln \cos x$$

$$(3) y = \sqrt{1-x^2} \quad (4) y = \ln \operatorname{tg} x^2$$

$$(5) y = \ln(a^2 - x^2) \quad (6) y = \arcsin \frac{1}{x}$$

$$(7) y = \ln(1-x^2) \quad (8) y = \sin \ln x$$

$$(9) y = \cos(3x-5) \quad (10) y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

$$(11) y = e^{2x+1} \quad (12) y = (2x+5)^{10}$$

$$(13) y = \operatorname{arctg} x^2 \quad (14) y = \arcsin \frac{x}{3}$$

$$(15) y = x^2 \sin x^2 \quad (16) y = e^{-x} \cos x$$

$$(17) y = \sin x^2 + \sin^2 x \quad (18) y = \ln \operatorname{tg} 3x$$

$$(19) y = (\ln 2x)^3$$

$$(20) y = \sqrt{4-x^2}$$

$$(21) y = \cos \sqrt{x} + \ln \frac{1}{2x-1}$$

$$(22) y = 2^{\frac{1}{x}}$$

$$(23) y = \cos^3 x - \sin 3x$$

$$(24) y = 2^{\sin \frac{1}{x}} + x\sqrt{x}$$

$$(25) y = \sqrt{3-2x^2}$$

$$(26) y = e^{2x^3}$$

$$(27) y = \arcsin \sqrt{x}$$

$$(28) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$(29) y = \ln \cos e^{-x^2}$$

$$(30) y = \arctan \frac{1}{x}$$

$$(31) y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x$$

$$(32) y = \sin^n x \cos nx$$

$$(33) y = x^2 \sqrt{2 - \ln^2 x}$$

(三) 求由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数

$$(1) y^2 = 2x^2 + 1$$

$$(2) y = x \ln y$$

$$(3) y = 1 + xe^y$$

$$(4) \cos(xy) = x$$

$$(5) \sqrt{x} + \sqrt{y} - a = 0$$

$$(6) x^2 + y^2 - xy = 1$$

$$(7) y = x + \ln y$$

$$(8) x + \arctgy = y$$

$$(9) x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$$

$$(10) xy^2 - 3y + 18x = 6$$

$$(11) \sin(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = 1$$

$$(12) xy = e^{x+y}$$

$$(13) x^2 + xy = \arctan(xy)$$

$$(14) x^3 + y^3 - a = 0 \quad (a \text{ 为常数})$$

(四) 利用取对数求导法求下列函数的导数

$$(1) y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$$

$$(2) y = (x+1)(x-2)^2(x+3)^3$$

$$(3) y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$(4) y = \frac{x^2}{1-x} \cdot \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$$

$$(5) y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(五) 求下列函数的二阶导数

(1) $y = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$

(2) $y = x^2 \ln x$

(3) $y = e^{\sqrt{x}}$

(4) $y = \sin \frac{1}{x}$

(5) $y = \ln(x^2 - 1)$

(6) $y = e^{-x} \cos x$

(7) $y = e^x \sin x$

(8) $y = \cos e^x + \sin e^x$

(9) $f(x) = xe^{x^2}$

(10) $y = x\sqrt{1+x^2}$

(11) $y = \arctan x$

(12) $y = \sin^2(1+2x)$

(13) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(14) $y = (1+x^2) \arctan x$

(六) 求下列函数的微分

(1) $y = 6x^5$

(2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

(3) $y = \ln x^2$

(4) $y = \frac{\sin x}{1-x^2}$

(5) $y = \arccos \sqrt{x}$

(6) $y = e^{-x} \cos x$

(7) $y = tg^2 x$

(8) $y = \arctg e^x$

(9) $y = \arctg x^2$

(10) $y = (x-1)^2(x-2)^3$

(11) $y = (\sqrt{x} + 1)(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)$

(12) $y = \sqrt{x + e^x \sin x}$

(13) $f(x) = 2^x \cos x + \ln \frac{1-x}{1+x}$

(14) $\cos(x+y) + e^y = 1$

(15) $y = e^{\sin(3x+1)}$

(16) $y = e^{\cos \sqrt{2x}}$

(17) $\cos(x^2 + y) = x$

(18) $y = 2^{\sin \sqrt{x}}$

(19) $y = x^2 e^{2x}$

(20) $y = e^x \sin^2 x$

(21) $y = \ln \sqrt{1-x^2}$

(22) $y = 1 + xe^y$

(23) $y^2 = x + \arccos y$

四、求不定积分

(一) 利用基本积分公式和积分的运算法则求不定积分

(1) $\int (2^x + x^4 + \sec^2 x) dx$

(2) $\int \left(\sin x - \frac{3}{1+x^2} \right) dx$

$$(3) \int (2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) x^2 dx$$

$$(4) \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$(5) \int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

$$(6) \int \frac{(1-x)^3}{x^2} dx$$

$$(7) \int \lg^2 x dx$$

$$(8) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$$

$$(9) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$(10) \int \frac{1}{\sin^2 x \bullet \cos^2 x} dx$$

$$(11) \int \sec x (\sec x - \operatorname{tg} x) dx$$

$$(12) \int \csc x (\csc x + \operatorname{ctg} x) dx$$

$$(13) \int 2^x \bullet e^x dx$$

$$(14) \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx$$

$$(15) \int \frac{e^{2t}-1}{e^t-1} dt$$

$$(16) \int x \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$$

$$(17) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$(18) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx$$

$$(19) \int \frac{3x^2+1}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$(20) \int e^x \left(2^x - \frac{e^{-x}}{1+x^2} \right) dx$$

$$(21) \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$$

$$(22) \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$$

$$(23) \int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx$$

$$(24) \int \frac{x+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{x} dx$$

$$(25) \int \frac{(x^3-3)(x+1)}{x^2} dx$$

$$(26) \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$$

$$(27) \int \frac{3x^4+3x^2-1}{x^2+1} dx$$

$$(28) \int e^x \left(2^x + \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$(29) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$(30) \int (10^x + x^{10}) dx$$

(二) 利用第一类换元积分法求不定积分

$$(1) \int \sin(2x-5) dx$$

$$(2) \int e^{-3x} dx$$

$$(3) \int (x-3)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{(2t-5)^2} dt$$

$$(5) \int x\sqrt{x^2-2}dx$$

$$(7) \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$(9) \int \frac{3x^2}{(2+x^3)^2} dx$$

$$(11) \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(13) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(15) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(17) \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$(19) \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$(21) \int \sec 5x dx$$

$$(23) \int a^{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$(25) \int (\sin 3x)^2 \cdot \cos 3x dx$$

$$(27) \int (2x+1)\sqrt{x^2+x-2} dx$$

$$(29) \int 5x^4(2+x^5)^2 dx$$

$$(31) \int \left(\frac{1+\ln x}{x} + \sin 2x\right) dx$$

$$(33) \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx$$

$$(35) \int \frac{x - (\arctan x)^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$$

$$(37) \int \frac{x^2}{4+x^3} dx$$

$$(6) \int \sqrt{3x-7} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$(10) \int \frac{2x}{4+x^4} dx$$

$$(12) \int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$(14) \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

$$(16) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$(18) \int \csc x dx$$

$$(20) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$(22) \int \frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2 \cdot (1+x^2)} dx$$

$$(24) \int \frac{\sin x}{(1+2\cos x)^2} dx$$

$$(26) \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{\sec x} dx$$

$$(28) \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx$$

$$(30) \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx$$

$$(32) \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$(34) \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$$

$$(36) \int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} dx$$

$$(38) \int \frac{2+3\ln x}{x} dx$$

$$(39) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$(40) \int \cos^5 x \sin x dx$$

$$(41) \int \tan(2x-5) dx$$

$$(42) \int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$(43) \int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx$$

(三) 利用第二类换元积分法求不定积分

$$(1) \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(4) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$

$$(7) \int \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx$$

$$(8) \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$$

$$(10) \int \frac{1}{1+\sqrt{x-2}} dx$$

$$(11) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(12) \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$$

$$(13) \int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(14) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$(15) \int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} dx$$

$$(16) \int \sqrt{4-x^2} dx$$

$$(17) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

(四) 利用分部积分法求不定积分

$$(1) \int x \bullet \cos x dx$$

$$(2) \int \ln x dx$$

$$(3) \int x^2 \arctg x dx$$

$$(4) \int x^2 \ln x dx$$

$$(5) \int \arcsin x dx$$

$$(6) \int x \bullet e^{-x} dx$$

$$(7) \int x^2 e^x dx$$

$$(8) \int \ln(x-1) dx$$

$$(9) \int x^{-1} \bullet \ln(\ln x) dx$$

$$(10) \int (x^2 + 1) e^x dx$$

$$(11) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$(12) \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$(13) \int x e^{2x} dx$$

$$(14) \int x \ln x dx$$

$$(15) \int x \sin x dx$$

$$(16) \int x^2 \cos x dx$$

$$(17) \int \arctan x dx$$

$$(18) \int e^x \sin x dx$$

难题:

$$(1) \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x (\ln x + 2)}}.$$

$$(3) \int e^{2x} \sin^2 x dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{2e^{2x} + 2e^x + 1}}$$

$$(5) \int x^n \ln^n x dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{1 + \sin x};$$

$$(7) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$$

$$(8) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$(10) \int \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

$$(11) \int \frac{dx}{1 + (2x-3)^2}$$

$$(12) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$(13) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$$

$$(14) \int \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx$$

$$(15) \int x^2 e^{3x} dx$$

$$(16) \int (\ln x)^2 dx$$

$$(17) \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(18) \int \frac{1}{\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$(19) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(20) \int \frac{x^2}{1-x^4} dx$$

五、求定积分

(一) 求下列定积分

$$(1) \int_1^2 (2x^2 - 3x + 1) dx$$

$$(2) \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx$$

$$(3) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$(4) \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$$

$$(5) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(6) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$(7) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(8) \int_1^2 x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$(9) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$(10) \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}$$

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$$

$$(12) \int_1^e \frac{1+5 \ln x}{x} dx$$

$$(13) \int_{-2}^3 |x^2 - 2x - 3| dx$$

$$(14) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x - 1} dx$$

$$(15) \int_0^1 \sqrt{x} (1 + 2\sqrt{x})^2 dx$$

$$(16) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

(二) 求下列定积分

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$(2) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} t g x dx$$

$$(4) \int_1^e \frac{2+\ln x}{x} dx$$

$$(5) \int_1^5 \frac{\sqrt{u-1}}{u} du$$

$$(6) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \bullet \cos x dx$$

$$(8) \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(9) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$(10) \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \bullet \sin \frac{1}{x} dx$$

$$(11) \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(12) \int_0^{\pi} \sqrt{\sin \theta - \sin^3 \theta} d\theta$$

$$(13) \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

$$(14) \int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx$$

(三) 求下列定积分

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$$

$$(2) \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$$

$$(3) \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}} 2x \cdot \arctg x dx$$

$$(7) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$(8) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

$$(9) \int_1^e x \cdot \ln x dx$$

$$(10) \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx$$

$$(11) \int_0^2 x \cdot \ln(x+1) dx$$

$$(12) \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$$

$$(13) \int_0^1 x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$(14) \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$(15) \int_0^1 x \cdot e^{2x} dx$$

$$(16) \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$$

(四) 求广义积分

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$(2) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(4) \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(6) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$(8) \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(9) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x}$$

$$(10) \int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

六、定积分的应用

(一) 利用定积分求曲线所围成区域的面积

(1) 求曲线 $y = 2^x$, 直线 $x=0, x=3$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积;

(2) 求曲线 $y = \sin x, y = \cos x$ 和直线 $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ 所围成的图形的面积;

(3) 求由曲线 $y = x^2$, 直线 $y = x, y = 2x$ 所围成的图形的面积;

- (4) 求由曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形面积;
- (5) 求由曲线 $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$ 所围成的图形面积。
- (6) 求由曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = -x + 2, x = 0$ 围成的平面图形面积。
- (7) 求由曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成的平面图形面积。
- (8) 设平面图形由 $y = e^x, y = e, x = 0$ 围成, 求此平面图形的面积.
- (9) 求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 所围成的图形的面积。

(二) 利用定积分求旋转体的体积

- (1) 求由连续曲线 $y = \cos x$ 和直线 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 和 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积;
- (2) 求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积;
- (3) 求由曲线 $y = x^3, x = 2, y = 0$, 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积;
- (4) 求由曲线 $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4, y = 0$, 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积;
- (5) 求由曲线 $y = x^2, y^2 = 8x$, 分别绕 x 轴、 y 轴旋转所得旋转体的体积。

七、计算题

(一) 求下列各数的近似值

- (1) $\sqrt[3]{1.02}$ (2) $\sqrt[5]{0.95}$ (3) $\ln 1.03$ (4) $\sin 29^\circ$
- (5) $\cos 60^\circ 20'$ (6) $\sqrt[3]{8.02}$ (7) $\operatorname{tg} 31^\circ$

(二) 求下列函数的增减区间

- (1) $y = x^3 - 12x$ (2) $y = x - e^x - 1$
- (3) $y = \arctg x - x$ (4) $y = \frac{x^2}{1+x}$
- (5) $y = x^4 - 2x^2 + 2$ (6) $y = x^3 + x$
- (7) $y = x - \ln(1+x^2)$ (8) $y = (1+x^2)e^{-x^2}$
- (9) $y = x\sqrt{6-x}$ (10) $y = \ln(1+x^2)$
- (11) $y = 2 - 3x^2 + x^3$

(三) 求下列函数的极值

(1) $y = x^4 - 2x^2$

(2) $y = x^2 e^{-x}$

(3) $y = x - \ln(1+x)$

(4) $y = x + \sqrt{1-x}$

(5) $y = x^2 \ln x$

(6) $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

(7) $y = (x^2 - 1)^3 + 1$

(8) $y = x + \frac{1}{x}$

(9) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

(10) $y = 2x^{\frac{2}{3}}(x-1)$

(11) $y = \frac{2}{3}x - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

(12) $y = x^3 - 3x^2 + 7$

(13) $y = (x-3)^2(x-2)$

(14) $y = \sqrt{2+x-x^2}$

(15) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

(16) $y = \arctan x - x$

(17) $y = 2x^2 - \ln x$

(18) $y = x^4 - 10x^2 + 8$

(四) 求下列函数的凹向与拐点

(1) $y = x^4 - 2x^3 + 1$

(2) $y = x^2 - x^3$

(3) $y = \ln(1+x^2)$

(4) $y = xe^{-x}$

(5) $y = 3x^5 - 5x^3$

(6) $y = (x-2)^{\frac{5}{3}}$

(7) $y = \sqrt{1+x^2}$

(8) $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

(9) $y = x^3 - 2x^2 + x + 5$

(10) $y = x + \frac{x}{x-1}$

(五) 求下列函数的最值

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ 在区间 $[-1, 1]$

(2) $y = x^2 e^{-x}$ 在区间 $[-1, 3]$

(3) $y = \frac{x^2}{1+x} \quad [-\frac{1}{2}, 1]$

(4) $y = x^3 - x^2 - x + 1$, $[-1, 2]$

$$(5) \quad y = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$$

$$(6) \quad y = x + 2\sqrt{x}, \quad [0, 4]$$

八、多元函数的微积分:

(一) 求下列函数的偏导数:

$$(1) \quad z = x^3 y - xy^3 \quad (2) \quad z = \sqrt{\ln(xy)}$$

$$(3) \quad z = \arcsin(xy) + \cos^2(xy) \quad (4) \quad z = (1 + xy)^y$$

$$(5) \quad z = \arctan \frac{y}{x} \quad (6) \quad z = y^x$$

$$(7) \quad z = \frac{y}{x}$$

(二) 求下列函数的全微分:

$$(1) \quad z = xy + \frac{x}{y} \quad (2) \quad z = e^{x-2y}$$

$$(3) \quad z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4) \quad u = x^{yz}$$

$$(5) \quad z = x^2 \ln(xy) \quad (6) \quad z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

$$(7) \quad z = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (8) \quad z = \frac{y}{x}$$

(三) 求下列函数的偏导数和微分:

$$(1) \quad \text{设 } z = u^2 \ln v \text{ 而 } u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$(2) \quad \text{设 } z = e^{x-2y}, \text{ 而 } x = \sin t, \quad y = t^3, \text{ 求 } dz.$$

$$(3) \quad \text{设 } z = \arctan(xy), \text{ 而 } y = e^x, \text{ 求 } \frac{dz}{dx}.$$

$$(4) \quad \text{设 } u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}, \text{ 而 } y = a \sin x, z = \cos x, \text{ 求 } \frac{du}{dx}.$$

$$(四) \quad \text{设下列方程所确定的函数为 } y = f(x), \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$(1) \quad xy - \ln y = 0 \quad (2) \quad \sin y + e^x - xy^2 = 0$$

$$(3) \quad xy + \ln x + \ln y = 0$$

(五) 对下列隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}$ 及 dz .

$$(1) x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$$

$$(2) e^z - xyz = 0 \quad (3) \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$$

(六) 1、设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$2、\text{设 } e^x - xyz = 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

十二、计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \quad \text{其中 } D \text{ 是矩形区域: } |x| \leq 1, |y| \leq 1;$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma, \quad \text{其中 } D \text{ 由直线 } y=2, y=x \text{ 与 } y=2x \text{ 所围成};$$

$$(3) \iint_D xy^2 d\sigma, \quad \text{其中 } D \text{ 由抛物线 } y=x^2 \text{ 和直线 } y=x \text{ 所围成};$$

$$(4) \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y-1}}^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$(5) \int_1^5 dy \int_y^5 \frac{dx}{y \ln x}$$

$$(6) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$(7) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$$

$$(8) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$$

$$(9) \iint_D y dx dy, \quad \text{其中 } D \text{ 是由直线 } y=x, y=x-1, y=0 \text{ 及 } y=1 \text{ 及所围成的平面}$$

区域。

九、判断与证明

(一) 求下列函数的间断点, 并指出间断点的类型. 若是可去间断点, 则补充定义, 使其在该点连续.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\ln(2x-1)}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x}, & x \leq -1 \\ 2+x, & -1 < x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 2 \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(5) y = \frac{1}{(x-2)^2} \quad (6) y = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$$

$$(7) y = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases} \quad (8) y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$(9) f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases} \quad (10) f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$(11) f(x) = \frac{x}{\tan x}$$

(二) 利用连续函数的定义, 证明下列函数在 $x = 0$ 点的连续性.

$$(1) f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2} \quad (2) f(x) = \frac{x+1}{2x^2-1}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x}, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(三) 判断下列函数在给定的区间上是否满足罗尔定理的条件。如满足, 求出定理中的 ξ ; 如不满足, 说明原因。

$$(1) f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad [-2, 0]$$

$$(2) f(x) = \ln \sin x \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - x - 3 \quad \left[-1, \frac{3}{2} \right]$$

(四) 验证下列函数在给定的区间上是否满足拉格朗日定理的条件。如满足, 求出定理中的 ξ ; 如不满足, 说明原因。

$$(1) f(x) = \ln x \quad [-2, 0]$$

$$(2) f(x) = \arctg x \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$(3) f(x) = \ln x \quad [1, 2]$$

(五) 证明:

(1) 证明方程 $x^4 - 3x^2 + 7x - 10 = 0$ 在 1 与 2 之间至少有一个实根;

(2) 证明方程 $x \bullet 2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根。

(3) 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 在 (1, 2) 内至少存在一个实根;

(4) 方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

(5) 证明方程 $x^3 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

(6) 证明方程 $x^5 + 10x + 3 = 0$ 有且只有一个实根.

(六) 证明不等式:

$$(1) x > \ln(1+x) \quad (x > 0)$$

$$(2) \text{当 } x > 1 \text{ 时, 有 } e^x > ex$$

$$(3) \text{当 } x > 0 \text{ 时, } e^x > 1+x$$

$$(4) \text{当 } x > 0 \text{ 时, } \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$$

(七) 证明等式:

$$(1) \quad 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad (x \geq 1).$$

(八) 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1) e^x - 1 \sim x; \quad (2) \arcsin x \sim x.$$

九: 应用题

1. 设某产品的价格与销售量的关系为 $p = 10 - \frac{Q}{5}$.

(1) 求当需求量为 20 及 30 时的总收益 R 、平均收益 \bar{R} 及边际收益 R' .

(2) 当 Q 为多少时, 总收益最大?

2. 设某商品的需求量 Q 对价格 P 的函数为 $Q = 50000e^{-2P}$.

(1) 求需求弹性;

(2) 当商品的价格 $P=10$ 元时, 再增加 1%, 求商品需求量的变化情况.

3. 某食品加工厂生产某类食品的成本 C (元) 是日产量 x (公斤) 的函数

$$C(x) = 1600 + 4.5x + 0.01x^2$$

问该产品每天生产多少公斤时, 才能使平均成本达到最小值?

4. 某化肥厂生产某类化肥, 其总成本函数为

$$C(x) = 1000 + 60x - 0.3x^2 + 0.001x^3 \quad (\text{元})$$

销售该产品的需求函数为 $x = 800 - \frac{20}{3}p$ (吨), 问销售量为多少时, 可获最大利润, 此时的价格为多少?

5. 某商店每年销售某种商品 a 件, 每次购进的手续费为 b 元, 而每年库存费为 c 元, 在该商品均匀销售的情况下 (此时商品的平均库存数为批量的一半), 问商店分几批购进此种商品, 方能使手续费及库存费之和最少?

6. 生产某种产品的固定成本为 1 万元, 每生产一个该产品所需费用为 20 元, 若该产品出售的单价为 30 元, 试求:

(1) 生产 x 件该种产品的总成本和平均成本;

(2) 售出 x 件该种产品的总收入;

(3) 若生产的产品都能够售出, 则生产 x 件该种产品的利润是多少?

7. 某厂生产某种商品 q 千件的边际成本为 $C'(q) = q + 36$ (万元/千件), 其固定成本是 9800 (万元). 求 (1) 产量为多少时能使平均成本最低? (2) 最低平均成本是多少?

8. 已知某产品的边际成本为 $C'(q) = 4q$ (万元/百台), 边际收入为 $R'(q) = 60 - 12q$ (万元/百台). 如果该产品的固定成本为 10 万元, 求: (1) 产量为多少时总利润 $L(q)$ 最大? (2) 从最大利润产量的基础上再增产 200 台, 总利润会发生什么变化?

9. 生产某种产品 q 吨时的边际成本函数为 $C'(q) = 2 + q$ (万元/吨), 收入函数为 $R(q) = 12q - \frac{q^2}{2}$ (万元), 如果最大利润为 15 万元, 求成本函数.

10. 某商品总成本函数为 $C(q) = 100 + 4q^2$, q 为产量, 求产量为多少时, 平均成本最小?

11. 某厂生产某种商品 q 件时的总成本函数为 $C(q) = 20 + 4q + 0.01q^2$ (元), 单位销售价格为 $p = 14 - 0.01q$ (元/件), 问产量为多少时可使利润达到最大? 最大利润是多少.

12. 要做一个底为长方形的带盖的箱子, 其体积为 72cm^3 , 底长与宽的比为 $2:1$, 问各边长多少时, 才能使表面积为最小?

13. 要做一个容积为 250π 立方米的无盖圆柱体蓄水池, 已知池底单位造价为

池壁单位造价的两倍，问蓄水池的尺寸应怎样设计，才能使总造价最低？

14、要做一底面为长方形的带盖的箱子，其体积为 72 立方厘米，两底边之比为 2:1，问边长为多少时用料最省？

十、解答题：

(一) 求函数的定义域：

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4, 4]$ ，求 $f(x^2)$ 的定义域；

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 3a]$ ($a > 0$)，求 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域；

(3) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$ ，求 $f(\lg x)$ 的定义域；

(4) 若 $f(1-x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$ ，求 $f(x)$ 的定义域

(5) 求下列二元函数的定义域并作出图形：

$$\begin{array}{ll} (1) \quad z = \ln(y^2 - 2x + 1) & (2) \quad z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} \\ (3) \quad z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} & (4) \quad z = \sqrt{x-\sqrt{y}} \end{array}$$

(二) 关于极限：

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 2 \\ 2x + k, & x < 2 \end{cases}$ ，问当 k 取何值时，函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 2$ 时的极限存在。

2、求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在。

3、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2 - 2}{x - 1} - ax + b) = -5$ ，求常数 a, b 的值。

4、若常数 k 使 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + kx + k + 3}{x^2 + x - 2}$ 存在，试求出常数 k 与极限值。

5、当 $x \rightarrow 0$ 时，指出关于 x 的同阶无穷小量、高阶的无穷小量、等价的无穷小量。

$$\sqrt{1+x} - 1, \quad \sin^2 x, \quad \cos x - 1, \quad \frac{1}{2}(e^{2x} - 1), \quad \sin x^2.$$

6、已知 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \ln(bx + 1), & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ ，问当 a, b 为何值时， $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续。

7、求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间，并求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 。

8、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & x < 0 \\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, 试求 a , 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

(三) 导数和微分

1、讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性和可导性:

(1) $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (2) $y = |\cos x|$

(3) $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

2、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$, 为使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

3、求曲线 $y = x^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程.

4、求曲线 $y = \sin x + x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

5、求曲线 $y^2 - \ln x + (x-e) \cot \frac{\pi y}{2} = 0$ 在点 $(e, 1)$ 处的切线方程.

6、设 $x^3 + y^3 + e^{-x} = 0$, 求 $y''(0)$.

7、设曲线 $f(x) = x^3 + ax$ 与 $g(x) = bx^2 + c$ 都经过点 $(-1, 0)$, 且在 $(-1, 0)$ 有公共切线, 求常数 a, b, c .

8、设 $y = a^x + x^a + x^x + a^a$ (a 为常数), 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

(四) 微分中值定理

1、设 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 0$, 试确定常数 a, b 的值.

2、 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 的极限存在吗? 可否应用罗必达法则.

3、设 $f(x) = \begin{cases} (\tan x)^{\ln(1-x)}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$

处右连续.