参考答案

习题

9.1 定义 9.4 定义的流和，满足流的三个性质吗？如果满足，请证明，如果不满足，哪一个性质最有可能被违背。

不满足。给定流网络 $G=(V, E)$，设 f_1 和 f_2 为 $V\times V$ 到 R 上的函数。定义如下：对所有 u，$v\in V$

$$(f_1+f_2)(u,v)=f_1(u,v)+f_2(u,v)$$

容量约束性质可能被违背

反对称性质：

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(u,v)&=f_1(u,v)+f_2(u,v)\\&=-f_1(v,u)-f_2(v,u)\\&=-(f_1(v,u)+f_2(v,u))\\&=-(f_1+f_2)(v,u)\end{aligned}$$

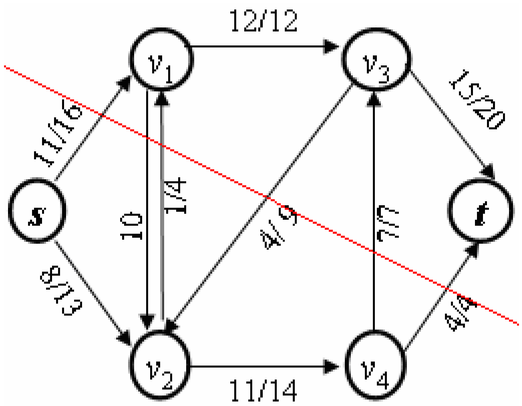
流守恒性质：

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}(f_1+f_2)(u,v)&=\sum_{v\in V}(f_1(u,v)+f_2(u,v))\\&=\sum_{v\in V}f_1(u,v)+\sum_{v\in V}f_2(u,v)\\&=0+0=0\end{aligned}$$

9.2 亚当教授有两个孩子，不幸地是两个孩子互不喜欢，他们不仅拒绝一同上学，而且甚至不愿意走过对方当天走过的街区。两个孩子对他们在拐角处交叉的路径并不会产生问题。幸运地是，教授的房子和学校都是在拐角处，但是他并不确定是否该把他的两个孩子送到同一所学校。教授有镇上的一份地图。试说明如何将决定两个孩子是否可以上同一所学校的问题建模为一个最大流问题。

每个拐角设为一个顶点，如果在顶点 u 和 v 之间有街道，则画边(u,v)和(v,u)，每条边的容量设为 1。教授家设为源点，学校设为汇点。如果存在一条大小为 2 的流，就可以确定两个孩子可以上同一所学校。

9.3 在图 9.2(a)中，通过割 $(\{s,v_2,v_4\},\{v_1,v_3,t\})$ 的流是多少？该割的容量是多少？



流量为 19，容量：31

9.4 证明引理 9.2。

9.5 证明对任意一对顶点 u 和 v、任意的容量函数 c 和流 f，有

$$c_f(u,v)+c_f(v,u)=c(u,v)+c(v,u)$$

$c_f(u,v)+c_f(v,u)=c(u,v)-f(u,v)+c(v,u)-f(v,u)$ （按照定义）

$=c(u,v)+c(v,u)$ （反对称性质）

9.6 给定一个网络 $G=(V,E)$，证明 G 的最大流总可以被至多由 $|E|$ 条增广路径所组成的序列找到。(提示：找出最大流后再确定路径。)

9.7 若一个网络中所有的容量值都不同，则存在一个唯一的最小割，它把源点和汇点分割开。该结论正确吗？如果正确，请证明；否则，请说明理由。

9.8 说明如何有效地在一个给定的剩余网络中，找到一条增广路径。

9.9 设计一个有效的算法，它在一个给定的有向无回路图中寻找具有最大瓶颈容量的增广路径。

9.10 设计一个有效算法以找出一个给定的有向无回路图的层次图(level graph)。

9.11 针对多个源点和多个汇点的问题，扩展流的性质和定义。证明多个源点和多个汇点的流网络的任意流均对应于通过增加一个超级源点和超级汇点所得到的单源点单汇点的流，且流值相同。反之亦然。

9.12 在最大流的应用一节中，我们通过增加具有无限容量的边，把一个多源点多汇点的流网络转换为单源点单汇点的流网络。证明如果初始的多源点多汇点网络的边具有有限的容量，则转换后所得到的网络的任意流均为有限值。

9.13 假定多源点多汇点问题中，每个源点 s_i 产生 p_i 单位的流，即 $f(s_i,V)=p_i$。同时假定每个汇点 t_j 消耗 q_j 单位的流，即 $f(V,t_j)=q_j$，其中 $\sum p_i=\sum p_j$。说明如何把寻找一个流 f 以满足这些附加条件的问题转化为在一个单源点单汇点流网络中寻找最大流的问题。

9.14 有向图 $G=(V,E)$ 的一个路径覆盖是一个顶点不相交路径的集合 p，且 V 的每一个顶

点仅属于 p 的一条路径。路径可以开始和结束于任意顶点，且长度也为任意值，包括 0。G 的一个最短路径覆盖是指包含尽可能少的路径数的路径覆盖。

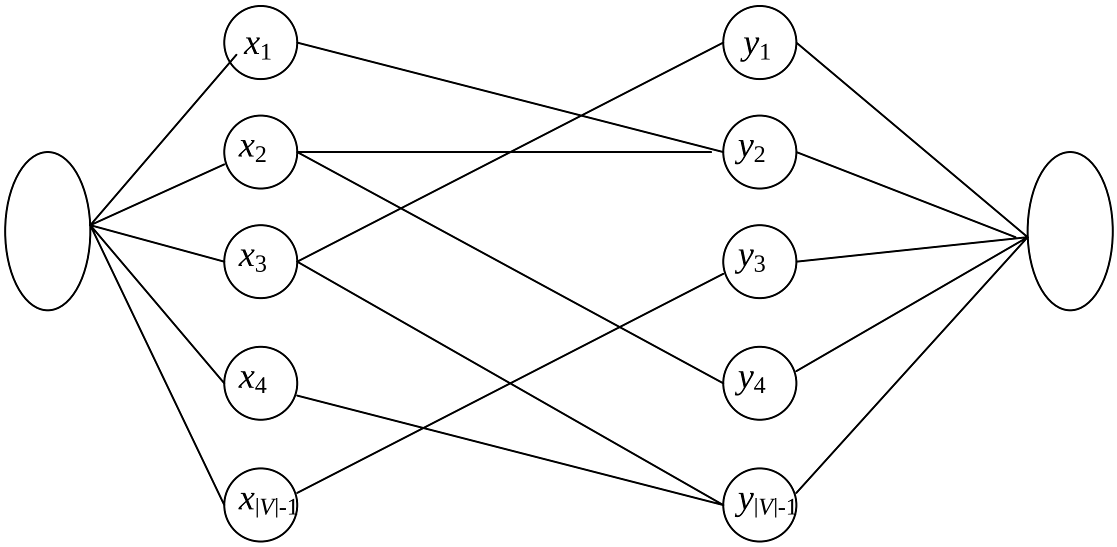
1） 设计一个有效算法以找出有向无回路图 $G=(V,E)$ 的一个最短路径覆盖（提示：假设 $V=\{1,2,\cdots,|V|\}$，构造图 $G'=(V',E')$，其中，

$V'=\{x_0,x_1,\cdots,x_{|V|}\}\cup\{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{|V|}\}$，

$E'=\{(x_0,x_i):i\in V\}\cup\{(y_i,y_0):i\in V\}\cup\{(x_i,y_j):(i,j)\in E\}$

然后运行最大流算法）。

2） 说明所给的算法是否适用于包含回路的有向图。



9.15 证明推论 9.3。

9.16 证明定理 9.10。

9.17 证明定理 9.13 结论的第二部分，G 含有一条增广路径，则 G' 含有一条增广路径。

9.18 史密斯教授评审了 n 篇论文，他将每篇论文的评审结果，分别用 n 个信封将信（评审结果）装好，准备第二天邮寄出去。不幸的是，史密斯调皮的儿子小史密斯当晚就把这 n 封信都拿出了信封，玩过之后，他不知道如何将拿出的信正确地装回信封中了。着急的小史密斯只有求助于你，假设他所提供的 n 封信依次编号为 $1,2,\cdots,n$ 且 n 个信封也依次编号为 $1,2,\cdots,n$。小史密斯唯一能提供的信息是：第 i 封信肯定不是装在信封 j 中。请设计一个有效的算法，帮助小史密斯尽可能多地将信正确地装回信封中。

9.19 在东方，男女相爱讲究的是缘分。只要月下老人做媒，就能千里姻缘一线牵，无论他们身处何地。而在西方，只能借助爱神丘比特之箭，射中的两个男女才能相爱。假定丘比特之箭的射程为 d，给定 n 对男女，已知每个男女的位置 (x,y)，以及男女之间的缘分值，请设计一个算法，使得每对男女射中一次，且每一对被射中的男女之间的缘分值的和最大。注意箭的轨迹只能是一条直线。

9.20 给定一个无向图 $G=(V,E)$，M 是图 G 的一个匹配，如图 9.26 所示。试写出算法

GeneralGraphMatching(G)求该图最大匹配的过程。

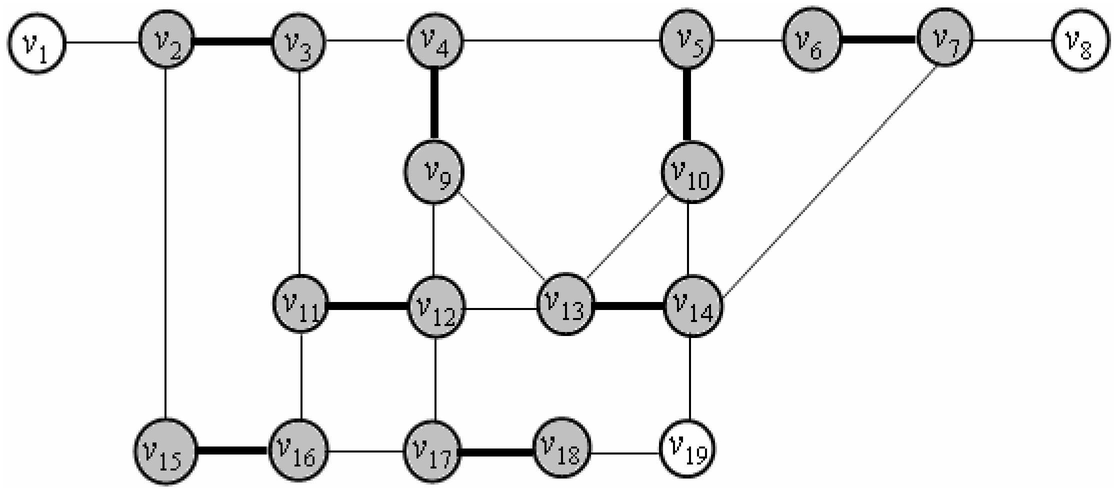


图 9.26

实验题

9.21 编程实现求解最大流问题的最短路径增广算法、Dinic 算法以及 MPM 算法，并用实验分析方法比较三种算法的效率。

9.22 完成 XOJ1089。

9.23 完成 POJ 如下题目：1087，1149，1273，1274，1325，1459，1637，1698，1719，2195，2239，2516，2771，3020，3041。

2.1