参考答案

2.1

要证明 $f(n)=\Theta(g(n))$ 当且仅当存在正常数 c_1, c_2, n_0，使得当 $n \ge n_0$ 时，

$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$。取 $c_1 = 3/5, c_2 = 1$ 代入不等式，由左不等式可得 n>=21/13,由右不等式可得 n>=0。所以取 $n_0 = 21/13$。所以当 $n \ge n_0, c_1 = 3/5, c_2 = 1$ 时，$f(n)=\Theta(g(n))$

2.2

因为 $f(n) \le \max(f(n), g(n))$，$g(n) \le \max(f(n), g(n))$

所以有 $f(n)+g(n) \le 2\max(f(n), g(n))$

即 $\frac{1}{2}(f(n)+g(n)) \le \max(f(n), g(n))$

又因为 $\max(f(n), g(n)) = f(n)$ 或者 $g(n)$

所以 $\max(f(n), g(n)) \le f(n)+g(n)$

对于 $n \ge n_0$, 取 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1$, 可得

$c_1(f(n)+g(n)) \le \max(f(n), g(n)) \le c_2(f(n)+g(n))$

故所证成立。

2.3

要证 $(n+a)^b = \theta(n^b)$ 当且仅当存在正常数 a_0, c_1, c_2，使得 $c_1 n^b \le (n+a)^b \le c_2 n^b$

先设 $c_1 = (\frac{1}{2})^b$，则由 $c_1(n^b) \le (n+a)^b \Leftrightarrow (\frac{1}{2}n)^b \le (n+a)^b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n \le n+a \Leftrightarrow -\frac{1}{2}n \le a \Leftrightarrow n \ge -2a$

又因为 $n \ge 0$，所以可取 $n_0 = |2a|$，使得对于任何的 a，当 $n \ge n_0$ 时，

有 $(\frac{1}{2}n)^b \le (n+a)^b$

而当 $n_0 = |2a|$ 时，$(n+a)^b \le (n+|a|)^b \le (n+\frac{n}{2})^b \le (\frac{3}{2}n)^b \le (2n)^b = 2^b n^b$

所以 c_2 可取 2^b

所以当 $c_1=(\frac{1}{2})^b, c_2=2^b, n_0=|2a|$ 时，可证 $(n+a)^b=\theta(n^b)$

//根据极限来证也可以。

2.4

要证 $f(n)=\Theta(n^2)$ 当且仅当存在正常数 c_1,c_2,n_0，使得当 $n\ge n_0$ 时，$c_1n^2\le f(n)\le c_2n^2$，取 $c_1=a/2, c_2=2a$，代入左不等式可得：$\frac{a}{2}n^2+bn+c\ge 0,$ 求出 $n\ge\frac{-b+\sqrt{|4ac-b^2|}}{a}$。代入右不等式可得：$an^2-bn-c\ge 0,$ 求出 $n\ge\frac{b+\sqrt{|-4ac-b^2|}}{2a}$。取 $n_0=\max(\frac{-b+\sqrt{|4ac-b^2|}}{a},\frac{b+\sqrt{|-4ac-b^2|}}{2a},0)$。当 $n\ge n_0$ 时，$f(n)=\Theta(n^2)$

2.5

要证明 $f(n)=O(g(n))$ 当且仅当存在正常数 c,n_0，使得当 $n\ge n_0$ 时，有 $f(n)\le cg(n)$，即 $n^2\le cn^3$，求解得 $c\ge 1/n\ge 0$，所以对于所有的 $n\ge 0$，有 $f(n)=O(g(n))$

2.6

$2^{n+1}=O(2^n)$ 成立，因为存在正常数 $c\ge 2$，使得当 $n\ge 0$ 时，有 $2^{n+1}\le c2^n$

$2^{2n}=O(2^n)$ 不成立，因为根据不等式 $2^{2n}\le c2^n$ 计算可得 $c\ge 2^n$，当 n 无穷大时，c 不存在，所以不成立。

2.7

由 $f(n)=O(g(n))$ 可得存在正常数 c,n_0，当 $n\ge n_0$ 时，有 $f(n)\le cg(n)$，可得 $1/cf(n)\le g(n)$，所以存在一个正常数 $c_1=1/c$，当 $n\ge n_0$ 时，$c_1f(n)\le g(n)$，所以 $g(n)=\Omega(f(n))$

2.8

要证明 $n^3=\Omega(n^2)$ 当且仅当存在正常数 c,n_0，使得当 $n\ge n_0$ 时，有 $cn^2\le n^3$，求解得

$c \ge 1/n \ge 0$，所以对于所有的$n \ge 0$，有$n^3 = \Omega(n^2)$

2.9

按照定义证明即可，比较简单，略（充分性，必要性）

2.10

由已知可得存在正常数n_1, n_2, c_1, c_2，使得当$n \ge n_1$时，有$f_1(n) \le c_1 g(n)$。当$n \ge n_2$时，有$f_2(n) \le c_2 g(n)$。所以 $f_1(n) \times f_2(n) \le c_1 g(n) \times c_2 g(n) = c_1 c_2 (g(n) \times g(n))$，所以当$n_0 = \max(n_1, n_2)$，$c = c_1 c_2$时，$f_1(n) \times f_2(n) = O(g(n) \times g(n))$