

## 2017-2018 学年第二学期《微积分 I-2》期中试卷解答

一、(每小题 8 分,共 16 分) 求下列微分方程的通解:

1.  $yy'' + (y')^2 = 0$ ;

解一: 令  $y' = p(y)$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 于是,  $yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$ , 即  $y \frac{dp}{dy} + p = 0$ , 也即  $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$ .

两边积分, 可得  $\ln|p| = -\ln|y| + \ln|C_1|$ , 即  $p = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1'}{y}$ .

分离变量, 得  $ydy = C_1'dx$ , 两边积分后, 得  $\frac{1}{2}y^2 = C_1'x + C_2'$ .

故原方程的通解为  $y^2 = C_1x + C_2$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

解二: 因为  $(yy')' = yy'' + (y')^2 = 0$ , 故  $yy' = C$ .

于是,  $ydy = C_1'dx$ . 两边积分后, 得  $\frac{1}{2}y^2 = C_1'x + C_2'$ .

故原方程的通解为  $y^2 = C_1x + C_2$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

2.  $y'' + 3y' + 2y = 3e^x + 6\sin x$ .

解: 由  $r^2 + 3r + 2 = 0$ , 解得  $r_1 = -1, r_2 = -2$ . 对应的齐次方程的通解是  $Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ .

设  $y'' + 3y' + 2y = 3e^x$  的特解为  $y_1^* = Ae^x$ , 代入方程  $y'' + 3y' + 2y = 3e^x$ , 解得  $A = \frac{1}{2}$ .

故得  $y_1^* = \frac{1}{2}e^x$ .

设  $y'' + 3y' + 2y = 6\sin x$  的特解为  $y_2^* = A\cos x + B\sin x$ , 代入方程  $y'' + 3y' + 2y = 6\sin x$ , 得

$$(A + 3B)\cos x + (B - 3A)\sin x = 6\sin x,$$

$$\text{故 } \begin{cases} A + 3B = 0 \\ B - 3A = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} A = -\frac{9}{5} \\ B = \frac{3}{5} \end{cases}. \text{ 于是, } y_2^* = -\frac{9}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x.$$

故所求微分方程的通解为  $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{2}e^x - \frac{9}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

二、（本题 8 分）设函数  $f(x)$  可微，且满足以下关系式  $\int_0^x [3f(t)-1]dt = f(x)-5$ ，求  $f(x)$ 。

解：对  $\int_0^x [3f(t)-1]dt = f(x)-5$  两边求导，得  $3f(x)-1 = f'(x)$ ，即

$$f'(x) - 3f(x) = -1.$$

解得  $f(x) = e^{\int 3dx} [\int (-1)e^{-\int 3dx} dx + C] = Ce^{3x} + \frac{1}{3}$ 。

由  $\int_0^x [3f(t)-1]dt = f(x)-5$  令  $x=0$ ，得  $f(0)=5$ 。

则  $C = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$ 。故  $f(x) = \frac{14}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}$ 。

三、（本题 8 分）设  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ ， $\vec{b} = (2, -4, 3)$ ， $\vec{c} = (4, -6, 13)$ ，试证明这三个向量在同一平面上，并求  $\vec{b}$  在  $\vec{a}$  上的投影。

解：作向量  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 17\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$ ，因为  $\vec{c} \cdot \vec{n} = 17 \times 4 + 7 \times (-6) + (-2) \times 13 = 0$ ，故

$\vec{c} \perp \vec{n}$ ，因此， $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  在同一平面上。

$\vec{b}$  在  $\vec{a}$  上的投影  $\text{prj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-8}{\sqrt{14}}$ 。

四、（本题 8 分）设  $w = f(x + \varphi(y), xy)$ ，其中函数  $\varphi$  可微，函数  $f$  具有连续的二阶偏导数，求

$\frac{\partial w}{\partial y}$  以及  $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ 。

解：  $\frac{\partial w}{\partial y} = f'_1 \cdot \varphi'(y) + f'_2 \cdot x$ ，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} &= (f_{11} \cdot 1 + f_{12} \cdot y) \cdot \varphi'(y) + f'_2 + x(f_{21} \cdot 1 + f_{22} \cdot y) \\ &= (f_{11} + yf_{12}) \cdot \varphi'(y) + f'_2 + x(f_{21} + yf_{22}). \end{aligned}$$

五、（本题 8 分）求曲线  $\begin{cases} (x+1)^2 - z^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  在  $yo z$  平面上的投影曲线方程。

解：两个式子相减，得  $4x - y^2 - x^2 = 0$ ，即  $x = \frac{1}{4}(y^2 + z^2)$ ，代入第一个方程，得

$$(y^2 + z^2 + 4)^2 - 16z^2 = 16,$$

即  $(y^2 + z^2)^2 + 8y^2 - 8z^2 = 0$ ，因此，所求投影曲线方程为

$$\begin{cases} (y^2 + z^2)^2 + 8y^2 - 8z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

六、（本题 8 分）求直线  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$  在平面  $x + y + z = 0$  上的投影方程。

解：过直线  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$  作一平面，使其垂直于平面  $x + y + z = 0$ 。

设所求平面的方程为  $x + y - z - 1 + \lambda(-x + y - z - 1) = 0$ ，即  $(1 - \lambda)x + (1 + \lambda)y - (1 + \lambda)z - 1 - \lambda = 0$ 。

由  $(1 - \lambda, 1 + \lambda, -1 - \lambda) \perp (1, 1, 1)$ ，得  $1 - \lambda + 1 + \lambda - 1 - \lambda = 0$ ，即  $\lambda = 1$ 。

故所求平面方程为  $y - z - 1 = 0$ 。所求投影方程为  $\begin{cases} y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 。

七、（本题 8 分）设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  确定，证明： $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ 。

证明：方程  $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  两边对  $x$  求导，得  $F'_1(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}) + F'_2 \cdot (-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}) = 0$ ，

解得  $(\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x^2} F'_2 - F'_1$ ，所以， $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zyF'_2 - x^2 y F'_1}{x(xF'_1 + yF'_2)}$ 。

同理， $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zx F'_1 - y^2 x F'_2}{y(xF'_1 + yF'_2)}$ 。

于是， $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zyF'_2 - x^2 y F'_1}{xF'_1 + yF'_2} + \frac{zx F'_1 - xy^2 F'_2}{xF'_1 + yF'_2}$   

$$= \frac{z(xF'_1 + yF'_2) - xy(xF'_1 + yF'_2)}{xF'_1 + yF'_2} = z - xy.$$

八、（本题 12 分）讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 (0,0) 点处的连续性、可偏导性、可微性。

解：  $|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)$ ，因为  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0$ ，故  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ ，

则  $f(x, y)$  在 (0,0) 点处连续。

$$f_x(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 \cos \frac{1}{|x|}}{x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y^2 \cos \frac{1}{|y|}}{y} = 0,$$

则  $f(x, y)$  在 (0,0) 点处可偏导。

$$\begin{aligned} \text{又} \quad & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cos \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \end{aligned}$$

所以，  $f(x, y)$  在 (0,0) 点处可微。

九、(本题 8 分) 设  $\begin{cases} xu + yv = 2 \\ yu - xv = 0 \end{cases}$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

解: 对方程组关于  $x$  求偏导数, 可得  $\begin{cases} u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & (1) \\ y \frac{\partial u}{\partial x} - v - x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & (2) \end{cases}$

(1)\*x-(2)\*y 得  $uy + xv - (x^2 + y^2) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , 因而有  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{uy + xv}{x^2 + y^2}$ 。

将该结果代入(1)式可得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yv - ux}{x^2 + y^2}$ 。

十、(本题 8 分) 设有曲面  $S: \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ , 平面  $\Pi: 2x + 2y + z - 5 = 0$ , (1)在  $S$  上求一点,

使其切平面与  $\Pi$  平行; (2)求曲面  $S$  与  $\Pi$  的最短距离。

解: (1) 在点  $(x, y, z)$  处曲面  $S$  的法线方向为  $(x, 2y, \frac{z}{2})$ 。

由于所求切平面平行于已知平面  $\Pi$ , 即两个法向平行, 因而有  $\frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{z}{2}$ , 即  $x = 2y = z$ 。

由于点  $(x, y, z)$  在曲面上, 因而满足曲面方程, 因此有  $x = z = \pm 1, y = \pm \frac{1}{2}$ ,

即  $S$  上的点  $(1, \frac{1}{2}, 1)$  和点  $(-1, -\frac{1}{2}, -1)$  处的切平面与平面  $\Pi$  平行

(2)曲面  $S$  与  $\Pi$  的最短距离为  $(1, \frac{1}{2}, 1)$  和点  $(-1, -\frac{1}{2}, -1)$  与  $\Pi$  之间距离较小者

$$d = \frac{\left| 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 1 - 5 \right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

十一、(本题 8 分) 抛物面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $x + y + z = 4$  截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。

解: 设椭圆上点  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 要求点  $M$  到原点距离的最大值和最小值, 可以转化为求  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在条件  $z = x^2 + y^2$  和  $x + y + z = 4$  下的最大值和最小值。

引入辅助函数  $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$ 。

$$\text{令} \begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ L_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}, \text{由第一、第二式得 } x = y, \text{ 代入后两式得} \begin{cases} z = 2x^2 \\ z = 4 - 2x \end{cases}.$$

于是,  $\begin{cases} x = y = -2 \text{ 或 } 1 \\ z = 8 \text{ 或 } 2 \end{cases}$ , 即得  $M_1(-2, -2, 8)$  和  $M_2(1, 1, 2)$ 。

因为  $g(M_1) = 72$ ,  $g(M_2) = 6$ , 所以, 点  $M_1$  到原点距离最大, 值为  $6\sqrt{2}$ , 点  $M_2$  到原点距离最小, 值为  $\sqrt{6}$ 。