2 Variation ohne Wiederholung

Beispiel 1:

100 m Endlauf bei den Olympischen Spielen:
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Verteilung der Gold-, Silber-, und Bronzemedaillen (8 Läufer sind am Start)

这是一个经典的**Variation ohne Wiederholung（变位，无放回）**问题，因为：

从 8 个不同的 Läufer（选手）中选出 3 个得奖者

奖牌有顺序（Gold ≠ Silber ≠ Bronze）

同一个人不能拿两块奖牌（无放回）

V(8,3)

Beispiel 7:

Auftragsvergabe

In einer Taxizentrale gehen gleichzeitig Aufträge für drei sofort zu erledigende verschiedene Fahrten ein. Wie viele Möglichkeiten gibt es diese an die 15 gerade freien Taxis zu vergeben?

n=15, r = 3

V(15,3)

2 Variation mit Wiederholung

Beispiel 2:

Würfeln mit 2 Würfeln

Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Zahlenpaare (mit Berücksichtigung der Reihenfolge)

V^w =6 ^ 2 = 36

Beispiel 4:
Toto Tipps
Beim Fußball-Toto muss ein Teilnehmer die Ergebnisse von 13 Bundesliga Spielen voraussagen, wobei er auf unentschieden (0), Heimsieg (1) oder Auswärtssieg tippen kann. Wie viele Tipp-Möglichkeiten gibt es?

n = 3, r = 13

1 Permutation ohne Wiederholung

Beispiel 5:
Kundenbesuche
Ein Außendienstmitarbeiter muss an einem Tag 5 Kunden besuchen. Wie viele Reihenfolgen gibt es für seine Besuche?
n = 5

0 Permutation mit Wiederholung

0 Kombination ohne Wiederholung

🔍 1. What is "Kombination ohne Wiederholung"?

That means:

- You **select** `r` **distinct elements** from a set of `n` **distinct items.**
- **Order does not matter**, and **each item can be selected at most once.**

For example:

- Choosing 3 students from a group of 10 to receive a scholarship
  → $\binom{10}{3}$

4 Kombination mit Wiederholung
Verteilung von identischen Objekten auf unterscheidbare Personen
Stars and Bars 方法（隔板法）

Beispiel 2
Würfeln mit 2 Würfeln
Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Zahlenpaare (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

n = 6, r = 2
数字有6个，从6个数字里面挑选2次，不考虑顺序
第一次：6个数里面挑2次
第二次：6个数里面挑2次

Beispiel 6:
Preisverteilung
In einer Skat-Runde wurden 5 identische Flaschen Champagner gestiftet. Es wird beschlossen, dass in den

nächsten Spielen immer derjenige eine Flasche erhält, der sein Spiel gewinnt, bis alle 5 Flaschen verteilt sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 5 Flaschen auf die drei Spieler zu verteilen?

n = 5, r = 3
n 是 5, 5 瓶酒。
分给三个人。

🔍 1. What is "Kombination ohne Wiederholung"?

That means:

- You **select** `r` **distinct elements** from a set of `n` **distinct items.**
- **Order does not matter**, and **each item can be selected at most once**.

For example:

- Choosing 3 students from a group of 10 to receive a scholarship → $\binom{10}{3}$

BUT:

❌ This doesn’t match our situation, because:

1. The **bottles are identical**, not distinguishable
2. The **players can get more than one bottle**
3. You are **not choosing r distinct elements from a fixed set**, but rather **counting integer solutions** to:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad x_i \geq 0$$

第一次：5 瓶酒里面挑一瓶分给 x1
第二次： (5-1) 瓶酒里面挑一瓶分给 x2
第三次： (5-2) 瓶酒里面挑一瓶分给 x3
x1 + x2 + x3 = 5

Beispiel 3:
Wahl eines Unternehmensvorstandes
Es gibt drei Kandidaten die zur Auswahl stehen. Die Mitglieder des Auswahlgremiums setzen 2 Kreuze (2 verschiedene Kandidaten können je einmal oder 1 Kandidat 2 mal angekreuzt werden). Was ist die Anzahl der Wahlmöglichkeiten beim Wahlvorgang?

choose 2 candidates out of 3 candidates.
You can choose person repeatedly —> Wiederholung
does Series affects results?
Observe:
firstly choose A, then choose B.
firstly choose B, then choose A.
does it matter? Do we care?——no! therefore, series don't matter —> Kombination

Beispiel 8:
Kugeln in Kästen plazieren
Sie haben n unterscheidbare Kästen und r identisch aussehende Kugeln. Auf wie viele Weisen können die Kugeln in den Kästen platziert werden?
Im Beispiel: 2 Kugeln in 3 Kästen platzieren
$n = 3, r = 2$

Stars and Bars

Stars and Bars 方法（中文常称为“星星与隔板法”或“隔板法”）是组合数学中的一种经典技巧，用于求解以下类型的问题：
将 r 个相同物品（球、糖果、苹果等）分配给 n 个可区分的容器（箱子、孩子、盒子等）
→ 每个容器可以接收 0 个或多个 * 也就是求：
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, x_i \in \mathrm{N0}$

🧠 思路解释：

我们用 `*` 表示球（stars），用 `|` 表示箱子之间的分隔线（bars）：

- 总共有 r 个 `*`
- 需要 $n-1$ 个 `|` 来把这些星星分成 n 份（每份代表一个箱子）

✨ 举个例子：将 4 个球放进 3 个箱子

我们有：

- 4 个球 `****`
- 需要 2 个隔板 `||` → 总共要排列的是：`****||`

每一种不同的排列，对应一个分配方式：

例如：

- `**|*|*` → (2,1,1)
- `|***|*` → (0,3,1)
- `*|*|**` → (1,1,2)
- `****||` → (4,0,0)

每一种排列都是一个合法的分配。

✅ 数学公式：

总共有 r 个 `*`，$n-1$ 个 `|`，我们要将它们排列起来：

📘 问题 1：每个箱子至少放一个物品

🔍 数学形式：

求非负整数解：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \quad \text{但要求每个 } x_i \geq 1$$

也就是：**每个容器至少放一个球**

✅ 解法思路：

我们先给每个箱子先分配 1 个球（强制每个至少有一个）：

- 一共分了 n 个球
- 还剩下 $r-n$ 个球要分配（现在可以为 0）

这时变成标准的"每个容器可以为空"的问题，但球数变为 $r-n$

🧮 使用公式：

$$\binom{(r-n)+n-1}{n-1} = \binom{r-1}{n-1}$$

🧠 例子：

将 5 个球分给 3 个箱子，每个箱子至少 1 个？

先给每个箱子 1 个 → 还剩 $5-3=2$ 个球

$$\binom{2+3-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

✅ 结论 1：

> 若要将 r 个相同物品分给 n 个不同容器，每个容器至少一个，解法为：
>
> $$\binom{r-1}{n-1}$$

如何扩展到“每个箱子至少放一个”或“容器也不可区分

🧾 总结表：

问题类型	可否用隔板法	公式	是否易解
可区分容器，球可重复放入，允许空箱	✅ Stars and Bars	$\binom{r+n-1}{n-1}$	✅
可区分容器，每箱至少一个	✅ 先分配1再用Stars and Bars	$\binom{r-1}{n-1}$	✅
容器不可区分，球不可区分	❌（不可用隔板法）	无封闭公式 → 整数分拆	⚠️困难