Sommersemester 2015
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
Probeklausur
Lösungshinweise

Hinweise zu den Lösungshinweisen: Die Lösungshinweise sind keine vollständigen Lösungen, sondern sollen nur die wichtigsten Argumente angeben. Wenn in einem Lösungshinweis z.B. steht, dass man ab einem Punkt wie in einem bestimmten Beweis in der Vorlesung vorgeht, dann muss das in der Klausurlösung ausgeführt werden.

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Zu jeder natürlichen Zahl k gibt es eine natürliche Zahl n_k, so dass für alle $n \geq n_k$ gilt: Für jede Abbildung $f : E(K_n) \to \{1, 2, 3\}$ gibt es eine Menge $X \subseteq V(K_n)$ mit $|X| \geq k$, so dass $f(e) = f(e')$ für alle Kanten e und e' in $E(K_n[X])$ gilt. (6 Punkte)

   Lösungsidee: Die Aussage gilt. Man setze $n_k = R(k, R(k, k))$, wobei $R(a, b)$ die Ramseyzahl sei.

2. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit Farblisten C_v (für alle Knoten $v \in V(G)$) mit jeweils genau $\Delta(G)$ Elementen. Für je zwei Knoten $v, w \in V(G)$ gelte $C_v \cap C_w \neq \emptyset$. Außerdem gebe es zwei Knoten x und y, die nicht benachbart sind, aber einen gemeinsamen Nachbarn haben, und für die $G - \{x, y\}$ zusammenhängend sei. Zeigen Sie, dass es dann eine zulässige Listenfärbung $c : V(G) \to \bigcup_{v \in V(G)} C_v$ gibt. (5 Punkte)

   Lösungsidee: Der Beweis geht ganz analog zum Beweis des Sates von Brooks. Sei z der gemeinsame Nachbar von x und y. Man färbt x und y mit derselben Farbe, betrachtet einen Spannbaum für $G - \{x, y\}$, in dem man, solange das geht, ein von z verschiedenes Blatt mit einer in dessen Nachbarschaft noch nicht verwendeten Farbe färbt. Danach entfernt man das Blatt jeweils aus dem Baum. Dazu brauch man nur $\Delta(G)$ Farben, da ja immer noch der Nachbar des Blattes im Baum ungefärbt ist. Zuletzt färbt man z, dessen Nachbarn alle schon gefärbt sind, aber so, dass zwei davon (x und y) dieselbe Farbe haben.

3. Sei G ein einfacher ungerichteter planarer Graph, in dem jeder induzierte Subgraph einen Knoten vom Grad ≤ 4 enthält. Zeigen Sie, ohne den Vierfarbensatz zu benutzen, dass dann $\chi(G) \leq 4$ gilt. (5 Punkte)

   Lösungsidee: Induktion in $n = |V(G)|$. Der Fall $n \leq 4$ ist trivial. Man nehme einen Knoten v mit Grad ≤ 4. $G - v$ ist nach Induktion 4-färbbar. Wenn der Grad von v sogar kleiner als 4 ist, ist die Erweiterung der Färbung auf G trivial. Sonst führt man den Induktionsschritt wie beim Beweis der Fünffarbensatzes.

4. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit maximalem Knotengrad $\Delta(G)$. Die Menge $X := \{v \in V(G) \mid |\delta(v)| = \Delta(G)\}$ sei unabhängig, d.h. keine zwei Elemente von X seien in G durch eine Kante verbunden. Zeigen Sie, dass es dann eine Kantenfärbung von G mit $\Delta(G)$ Farben gibt. (8 Punkte)
   Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis des Satzes von Vizing auf geeignete Weise.

Lösungsidee: Man wähle einen Knoten v mit Grad $\Delta(G)$. $G - v$ hat eine Kantenfärbung mit höchstens $\Delta(G)$ Farben. Da alle Nachbarn von v kleineren Grad als $\Delta(G)$ haben, fehlt an ihnen eine Farbe an den inzidenten Kanten. So eine wählt man aus, und der Rest ist wie im Beweis des Satzes von Vizing.

5. Es seien $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ zwei verschiedene Matroide, und es sei $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Außerdem sei r_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ die Rangfunktion von $(E, \mathcal{F}_i)$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann in jedem Fall?

   (a) Für alle $X \subseteq E$ und $x, y \in E$ gilt: Wenn $r_3(X \cup \{x\}) = r_3(X \cup \{y\}) = r_3(X)$ gilt, so gilt auch $r_3(X \cup \{x, y\}) = r_3(X)$.

   (b) Es gilt $r_3(E) < \max\{r_1(E), r_2(E)\}$.

   (c) Es gibt ein $X \subseteq E$, für das $r_3(X) < \max\{r_1(X), r_2(X)\}$ gilt.

   (d) Für jedes $X \in \mathcal{F}_3$ und $x \in E \setminus X$ gibt es $y, z \in X$, so dass $X \cup \{x\} \setminus \{y, z\} \in \mathcal{F}_3$.

   Wenn eine Aussage stimmt, beweisen Sie sie kurz. Wenn sie falsch ist, widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel. (2+2+2+2 Punkte)

   Lösungsidee:

   (a) Falsch. Die Menge der Matchings in biparititen Graphen kann als Schnitt von zwei Matroiden geschrieben werden. Wenn X dann nur aus einer Kante e besteht und x und y zu e adjazente Kanten sind, so dass e, x und y einen Weg der Länge drei bilden, hat man ein Gegenbeispiel.

   (b) Falsch. Betrachte $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ und $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}\}$.

   (c) Wahr. Wäre dies nicht der Fall, dann müsste für alle $X \subseteq E$ $r_1(X) = r_2(X)$ gelten, was hieße, dass $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ identisch sind.

   (d) Wahr. Ein Element $x \in E \setminus X$ kann mit X nur höchstens zwei Kreise schließen (weil $(E, \mathcal{F}_3)$ Schnitt von zwei Matroiden ist), daher reicht die Herausnahme von höchstens zwei Elementen, um die Kreise wieder zu zerstören.

6. Es sei E eine endliche Menge, und es seien $S_1, \ldots, S_r \subseteq E$ und $k_1 \ldots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Außerdem sei $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid |S_i \cap F| \leq k_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, r\}\}$

   (a) Zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem, aber nicht notwendigerweise ein Matroid ist.

   (b) Betrachten Sie für dieses Unabhängigkeitssystem und eine gegebene Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{N}$ das Maximierungsproblem $(E, \mathcal{F}, c)$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

      (i) Der Best-In-Greedy-Algorithmus liefert stets eine Lösung, deren Wert höchstens um den Faktor r vom Wert einer Optimallösung abweicht.

      (ii) Der Best-In-Greedy-Algorithmus liefert stets eine Lösung, deren Wert höchstens um den Faktor $\max\{k_1, \ldots, k_r\}$ vom Wert einer Optimallösung abweicht. (2+6 Punkte)

   Lösungsidee:

   (a) (M1) und (M2) sind leicht überprüft (in der Klausur müssen Sie das aber explizit tun). (M3): $E = \{1, 2, 3\}$, $r = 2$, $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2, 3\}$ und $k_1 = k_2 = 1$ ist ein Gegenbeispiel dafür, dass das immer Matroide sind (denn $X = \{1, 3\}$ und $Y = \{2\}$ sind unäbhängig, aber kein Element kann von X zu Y hinzugefügt werden, so dass es unabhängig bleibt).

   (b) Aussage (i) gilt, weil die Hinzunahme eines Elements nur maximal r Kreise schließen kann. Daher ist der Rangquotient, und somit auch die Approximationsgüte des Best-In-Greedy-Algorithmus höchstens r. Dass (ii) nicht gilt, sieht man schon am Beispiel aus (a).

7. Betrachten Sie folgendes Problem: Zu einem gegebenen einfachen ungerichteten zusammenhängenden Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{N}$ soll eine gewichtsmaximale Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ gefunden werden, so dass $(V(G), E(G) \setminus F)$ zusammenhängend ist und $(V(G), F)$ kreisfrei. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen Algorithmus gibt, dessen Laufzeit polynomiell in der Eingabegröße ist. (6 Punkte)

   Lösungsidee: Hier ist natürlich der (gewichtete) Schnitt zweier Matroide gefragt. Bei der Kreisfreiheit ist das klar, und der andere Matroid ist der duale Matroid des graphischen Matroids.