单位代码	10445
学　　号	2011021137
分 类 号	C934
研究生类别	全日制

山东师范大学

硕 士 学 位 论 文

论文题目　基于模糊熵的贷款组合决策模型

学科专业名称　管理科学与工程

申请人姓名　李世航

指导老师　宁玉富　教授

论文提交时间　2014 年 5 月 29 日

独 创 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得__________________（注：如没有其他需要特别声明的，本栏可空）或其他教育机构的学位或证书使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 学校 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 学校 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：　　　　　　　　导师签字：

签字日期：20　年　月　日　　　　　签字日期：20　年　月　日

目录

摘 要

在马柯维茨（Markowitz）经典的均值—方差理论中，把收益率假设成为服从正态分布，利用收益率的方差度量投资中的风险，但这个假设经常与现实情况不一样。我国商业银行的贷款收益率具有模糊不确定性，因此，我们把收益率假设成模糊变量，引入模糊熵和信息熵来度量贷款的风险程度。

模糊熵具有描述信息不确定程度的性质。 当我们把收益率考虑成随机变量且服从正态分布时，模糊熵与方差在度量风险方面是等价的；但是当考虑收益率为模糊变量且不服从正态分布时，受到贷款资金在不同收益下风险等级不同的影响，模糊熵在风险衡量方面比方差更加合理。模糊熵改进了方差依靠概率分布且计算复杂的缺陷，在度量贷款风险时更加符合实际情况。

使用模糊熵度量贷款组合的风险时，因为不同的贷款项目之间会有复杂的相关性，所以如果忽视相关性构建贷款组合模型求解会使决策选择集中在一个或者某几个高收益的贷款项目中，与我们组合贷款的思想相违背。因此，为了解决这个小小的瑕疵，在模型中加入了分散风险的约束条件，从而弥补对忽视贷款项目间相关性以及贷款组合的组合数目过少的补偿缺陷。

利用模糊模拟和遗传算法相结合的混合智能算法解决模型求解问题。该算法打破常规，使得求得最优解变为可能，并验证了算法的可行性。

关键词：模糊变量，可信性理论，信息熵，模糊熵

分类号：C934

Abstract

In the classic theory of Markowitz variance, the yield is assumed to be normal distribution. Yield variance is used to measure the investment risk, but this assumption is often different from the reality. In China, the loan yields of commercial bank have fuzzy uncertainty, so fuzzy entropy and information entropy is used to measure the degree of uncertainty while the yields are assumed as fuzzy variable.

Fuzzy entropy is used to describe the uncertainty of the information. While yield is considered as random variable with normal distribution, fuzzy entropy and variance are equivalent in terms of risk measure. But while considering the yield as fuzzy variables and do not obey the normal distribution, fuzzy entropy is more reasonable than the variance, due to the influence of the different income risk level under different proceeds. Fuzzy entropy improves the complexities in calculating and the dependence of probability distribution to variance, and is more practical in loan risk measurement.

Due to a complex correlation between different projects, decisions making will focus on one or a few high-yield loan projects if we ignore the solution of correlation building loan portfolio model. Therefore, in order to remedy the small flaw, the constraint condition of spread risk is added into the model. It could compensate the neglect of the correlation between loan projects and the low number of loan portfolio.

The hybrid intelligent algorithm with the combination of fuzzy simulation and genetic algorithm was used to solve problems. This algorithm breaks the routine, obtains the optimal solution. This paper also verifies the feasibility of the algorithm.

Keywords: Fuzzy variables, Credibility theory, Information entropy, Fuzzy entropy

Classification: C934

第 1 章　绪论

1.1　研究背景

当今世界是一个信息急速增长的时代，人类利用信息去认识世界和改造世界。人们在生活中所接触到的各式各样的信息有的时候是确定的，但更多时候是不确定的。信息自身的属性包括确定性和不确定性，无所谓好或坏，最重要的是我们如何认识信息的不确定性、了解不确定性、掌握其不确定性的规律。运动与静止、确定与不确定都可以很好的展现和反映事物变化发展过程中的精确与近似、准确与大概，清楚与模糊之间的关系。客观事物之间的发展和联系过程中有必然的、清楚的、准确的、有规律的属性叫做确定性。相反，客观事物发展和联系过程中偶然的、模糊的、大概的、无规律的属性叫做不确定性。确定与不确定，就像运动与静止一样，在一定条件下二者是可以相互转化的，两者是辩证统一的关系。生活中具有确定性的事物都是由许许多多不确定性的事物相互作用产生的，例如布朗运动（Brownian motion），人们生活中看到的液体实际是由很多分子组成，液体分子不断地做无规则不确定的运动，不停地随机碰撞悬浮微粒。当悬浮微粒变的足够大时，受到的来自各个方向的液体分子的碰撞作用力相互抵消，从而产生平衡保持相对静止，变的具有确定性；具有确定性的事物经过相互作用也会变的不确定，以生物体的细胞为例，组成生物体的细胞原本具有各自的确定功能，经过大量相对确定性的事物的彼此作用，从而产生了形态各异的生物个体，并且即使同一种类的生物行为也有着千差万别的区别，具有不确定性。这是原本可忽略的不确定性经过大量相对确定性的作用叠加起来的合力所造成的，使得原本可以忽略的不确定性叠加后变的不可忽略，具有了不确定性。

自然界中充满了各式各样的组合，发展趋势由低级到高级。例如我们熟知的原子组成分子，分子再经过组合形成各种物质；DNA组合形成基因，具有相同基因的细胞再组合形成不同的个体；相同的生物组合形成生物的群，生物群经过再组合形成不同生态环境…原本孤立的不相关的事物组合后协同发挥作用，使得整体能够稳定运行。组合不是简简单单的互相叠加，而是合理的、有目的的将事物不同的部分加总起来。当面对不确定性问题时，我们可以利用组合的办法，合理的将某些不确定性因素组合起来，在组合的总体中将不确定性互相抵消，从而减少了系统的不确定性，也提高了总体的稳定性，方便我们更好的解决不确定性问题。

商业银行的盈利模式是建立在贷款业务利息收益的基础上的，盈利的多少高度依赖于各种形式的贷款收益，特别是靠信贷业务为主要手段的贷款利息收入。因此当银行经营信贷业务过程中，如何把握信贷资金成本与贷款收益的配比，努力掌握信贷业务经营风险的可控性，从而使得银行掌握在信贷市场博弈中的主动权，继而保持信贷资金的持续收益和归流，增强和增加银行自身的收益能力和水平，最终达到全面提高竞争力的同时保持优质的可持续发展的目的，其重点环节和重要因素是给出安全合理的贷款组合，即只有合理的分配贷款资金才可以在风险最低的情况下获得最大收益，才能达到贷款业务经营风险的可控性的目标。但由于中国商业银行过分依赖传统的存贷利差净利息收入为主的盈利模式，再加上目前贷款业务迅速发展，传统的经营模式在短时间内难以转变，使得银行市场化改革逐渐深入和推进过程中贷款组合方面的问题日益突出，制定相应的措施，使得银行业在规避风险的同时获得最大的收益显得尤为重要和迫切。

贷款风险贯穿于商业银行的贷款业务之中，因为商业银行的性质和贷款业务的自身属性，例如信贷投放的行业比较单一，像房地产业、通讯业、制造业和基础设施建造业等火爆行业，特别是房地产业，风险暴露期一般为3-5年，使得银行贷款风险面临严重的滞后性和不确定性；缺少不同等级的违约损失估计和违约概率估计，使得信贷客户评级方法在等级结构、信息收集、评级程序等方面变的比较粗犷；缺乏质（抵）押物评估价值的更新机制，当宏观经济乐观时，质（抵）押物会保值，当宏观经济低迷时，质（抵）押物会贬值；不完善的信贷风险管理组织和方法，以上问题都会使银行在进行贷款业务时不可避免的面临各式各样的风险，不同的银行由于效用函数的不同，面对风险时有着自己看法。在面临贷款业务中的风险时银行怎样进行风险规避，如何权衡收益和风险—实现风险极小化同时收益极大化，这一直都是银行希望在贷款业务中关注和解决的问题。

1.2 国内外研究现状

随着当前经济社会的高速发展和贷款业务的日益增多，贷款组合优化问题引起了许多学者的注意，国内外众多学者对如何找寻最优组合做了大量分析探讨，在改进经典组合模型的同时又创新性的建立了多种组合决策模型，主要有以下几个方面：

（1）不确定环境下随机贷款投资组合决策理论

当前我国的商业银行大部分盈利收入仍然依靠存贷款利差，由于银监会等监管机构

实行对资本充足率严格的管理制度来检测银行的风险抵御能力，所以对贷款资本的制约使贷款资源变的稀缺。目前国内外的金融市场日趋复杂，工作的重心不再是盲目的追求贷款利息最大化，而是银行盈利可以持续稳定的增长。我国在经济发展进程中对资金的需求将不断扩大，有效合理的配置贷款资源，有效利用银行资金、寻找贷款风险最小化和收益最大化成为我国商业银行不断探索的新课题。

马柯维茨把证券的收益假设为随机变量，因为随机变量的概率分布和联合分布函数服从正态分布，从而运用概率统计的数学方法，用证券获得的收益方差和证券收益之间的协方差作为衡量投资风险大小的指标，依靠证券之间的相关性运用组合的方法削弱组合的整天风险，从而构建了投资者凭借各自喜好可以衡量组合收益和风险大小的决策规划模型，即均值方差—理论[1]。由于均值—方差模型包含一个规模极大的协方差矩阵，运算量极大，计算极为复杂，使其难以用于现实应用当中。20世纪60年代，夏普[2]针对马柯维茨均值—方差模型运算量大的问题，构建了单一指数模型，该模型大幅度简化了均值—方差模型中的运算量，使其在现实应用中受到广泛好评。由于投资者不排斥证券投资中带来的高收益，仅仅把收益低于自己预期收益当作一种风险。Mao[3]提出了用半方差作为风险度量的指标，从而解决了均值—方差模型中对高收益的惩罚，建立了均值—半方差模型。Samuelsom[4]考虑到证券收益的波动性和概率分布的非对称性，即偏斜程度，建立了均值—方差—偏度模型。吴恒煜等[5]利用了四种不同的copula函数对投资组合模型中的信用风险进行度量；刘艳萍等[6]使用风险价值度量信用风险，使银行取得了资金效用最大化的贷款组合配置决策。Morgan等[7]认为银行贷款实际就是一种投资，贷款组合就是投资组合的一种。银行为了分散风险，应该采用贷款组合的方式，把资金放到不同的的项目中。第一次提出把组合理论应用到贷款决策模型中；Uryasev[8]提出了更加适用于银行实际情况的贷款组合优化模型；Churlzu等[9]完成了CvaR最小化模型数据维度的优化，解决了因维度太大计算复杂的问题；Zhu等[10]建立了条件风险价值情况下组合的鲁棒优化决策模型管理；Ma等[11]建立了实现最小效用最大化的鲁棒组合优化决策模型；Tang等[12]从概率论数学出发，构建了一种把预期收益率做为目标函数，最终实现收益最大化的组合证券投资模型。当证券的回报率在正态分布的前提下，建立了具有确定性等价类的概率准则组合投资模型。

改革开放以后，我国经济慢慢走向市场化，投资贷款等业务日趋流行，我国投资组合理论研究虽然起步相对较晚，但我国学者在坚持不懈的努力研究后仍然取得了许多显著成就。国泰等[13]款组合中的收益率当作银行资产的收益，用贷款收益率的波动值作为

反映贷款风险大小的指标，用Lagrange法，以VaR为约束条件利用二次规划进行求解，构建了基于银行贷款业务预期收益约束下的，承担风险最小的组合决策模型。马永开等[14]以套利定价模型与资本定价模型为基础，改进了Markuwitz模型，并探究了树型算法在不允许卖空的约束条件下的投资组合模型。荣喜民等[15]考虑到Markowitz组合投资模型中对正态分布的假设，把不同资金收益率之间的相互关联加入到模型，从而克服了正态分布的假设的限制，以新的风险测度为基础构建了新的投资组合模型，并提出了有效边界法和最优求解方案，使得计算量大大减少。杨桂元等[16]建立了不允许卖空的投资组合决策模型，提出了有效边界的性质及有效的解决方案。张鹏[17]对Feinstein的均值—平均绝对偏差组合投资模型进行了研究，在其模型中增加了投资比例的上、下限制约束条件，构建了均值—平均上、下限制的绝对偏差投资组合模型，借用旋转算法求得模型的最终解。屠新曙等[18]把临界线决策法和Lagrange乘子法应用到投资组合决策模型，让收益率与自身追溯预测值的差值来替代风险，让指数平滑法来计算资金的预期收益率。杨辉皇[19]改进了史本山等[20]建立的模型，克服了模型复杂的计算，构建了含有β约束的组合投资模型，使模型计算和使用更加方便。张焕明等[21]研究了资金收益周期和波动对收益率的影响，以收益率的标准点为基础确定投资的配比，利用修正评估模型中证券收益率的上、下限区间，凭借矩阵的理想点判定法求得投资模型的最优组合。伍仕刚等[22]利用偏好系数和加权的方法求得多目标组合投资模型中的最优解。郭福华等[23]以Black-Scholes型金融市场为限制条件，构建了连续时间的动态半绝对利差投资组合模型，并与静态均值—方差模型进行了对比分析。陈收等[24]把资本结构因子加入到模型当中，研究了融资约束与投资组合的关联，并把资本结构因子作为参数，用Lagrange函数法对模型进行求解，研究了资本结构和投资组合决策的影响关系。郭福华、彭大衡等[25]用*VaR*当作约束条件，构建了以投资机会约束的均值—*VaR*为约束条件的投资组合模型。李磊等[26]对投资机会约束的均值—*VaR*模型添加了约束条件交易费用，构建了同时具有交易费用和机会约束的均值–*VaR*组合投资模型，并对均值–*VaR*组合投资模型解的最优性和边界的有效性进行了讨论。马树才，刘世宏等[27]研究了大量投资组合决策模型中的参数估计问题，并把参数评估添加到中国证券交易市场进行模拟分析。徐绪松等[28]研究了在风险证券收益率非正态环境下，以分布的过度峰态和分布偏态为整体特征，利用位置参数和尺度参数的确定性构建均值—尺度参数模型，并用此模型说明了资产配置中的相关问题。

组合模型的改进与创新非常重要，但对模型的相关求解也很重要，只有更好、更快的计算出模型的最优决策，使其应用到现实当中，新的模型才具有意义。我国一些学者注意到了这点，并致力于优化和改进模型的求解算法，解决具有大量复杂约束条件的组合模型类问题。程娇翼等[29]认为传统的算法对于特别复杂的非线性规划问题没有办法百分之百确定其最优解，所以加入了惩罚函数的算法和遗传算法，得出了均值 $-VaR$ 的单目标组合投资模型的最优解。林丹和李小明等[30]把最小交易量、最大投资上限、以及交易费用等现实因素增加到投资组合模型当中，编制了一种基于整数编码的遗传算法。陈铁英等[31]把具有融资约束条件的投资组合模型用最小化方差风险函数的凸二次规划问题来表示，该问题的 $K-T$ 条件用线性不等式组表示的旋转算法求得，最终计算得出在预期收益率范围内最小风险的组合决策。王文智和张霞文[32]利用蚂蚁算法，利用计算机 $Java$ 语言编程，求得了投资模型的最优解。徐绪松等[33]对绝对离差模型和均值—方差模型的优缺点进行了对比，第一次提出风险弹性的概念，运用模拟退火的算法对模型进行求解，并对两种模型进行了分析比较。徐泳梅等[34]也是采用模拟退火算法，利用伙惩罚系数构建了惩罚函数，解决了含有大量变量的 $Mrkowitz$ 模型的遗传退火算法问题。朱小梅等[35]把 BP 网络和遗传算法 (GA) 结合在一起，构建了 $GABP$ 优化模型，并把此方法应用到投资组合模型当中进行求解。

（2）模糊投资组合理论

组合投资理论的核心问题是分析在不确定环境下投资收益与风险之间的联系，解决在不同投资环境约束下投资者如何分配资金进行投资的问题。投资的项目，投资者自身的主观认知能力以及对信息的掌控能力都有不确定性的两个因素：随机性和模糊性。较早之前的投资组合模型都是把概率论和线性规划当作工具，把资金的收益率当作随机变量。但是，现实的投资环境中，经济、文化、政治等因素都会对收益产生影响，这种影响并不是单单看成随机问题就能解决的，它是无法精确的刻画和描述，所以我们有必要把收益刻画为模糊变量。近年来，很多学者已经考虑到这个问题，试着把模糊性研究带入到组合投资当中，建立具有模糊性的投资组合模型。

1970年Zadeh[36]首先提出了模糊决策理论，用隶属度0到1区间表示规划目标的满意程度，把多个决策中满意度最小的表示为对决策的满意程度，计算得出满意度最高的决策。Inuiguchi M.和Tanino T[37].，Guo和Tanaka[38][39]把收益率刻画为梯形模糊变量，以证

券收益服从可能性分布为条件构建了可能性分布的投资组合模型。Carlsson和Fuller[40]定义了模糊数变量的可能性均值和可能性方差（crisp possibilistic mean value&crisp possibilistic variance），随后探讨了模糊变量可能性均值和可能性方差的性质。Zhang[41]以模糊数的可能性均值为基础，定义了上、下可能性协方差和可能性方差，构建了可能性均值—方差模型。

Cooper和Charnes[42]建立了机会约束的投资规划模型以及包含随机参数的机会约束投资模型，Liu[43]以机会约束规划为基础，定义了一系列模糊机会约束条件下模型的一般形式。随后Liu[44][][45]在可能性测度（Pos）和必然性测度（Nec）的基础上，给出了可信性测度（Cr）的定义，并给出了可信性理论。Xiaoxia Huang[46]和Yufu Ning[47]以Liu可信性测度为基础，构建了把可信性测度作为风险评估标准的模糊机会约束投资组合模型。随后Huang[48][49]用可信性测度替代组合投资中的方差并重新定义了风险，在此基础上构建了全新的模糊组合投资模型。Jun Li和Jiu ping Xu[50]以模糊均值-方差为基础，把投资的收益当作模糊变量，把投资者风险喜好、专家经验当作模型的约束条件，定义了模糊变量的λ-均值和λ-方差，讨论了其有效组合投资的性质，构建了在混合不确定性环境下的新的模糊投资组合模型，用解决参数规划问题的方法进行求解。Zhongfeng Qin，Xiang Li和Xiaoyu Ji[51]利用遗传算法、数字整合和模糊模拟的方法设计了求解模型的智能混合算法。

我国学者也对模糊变量进行了大量大研究，并取了令人骄傲的研究成果。许若宁与李楚霖[52]把投资收率定义为模糊数，把模糊数每一段左、右区间端点与中心值的偏离程度当作风险大小的度量程度，构建了以模糊信息为基础的组合投资模型，证明了模型解的存在性并且给出了计算最优解的计算公式。张世英和王东[53]以 *Kwakemeak* [54][55]给出的模糊随机变量的概念为基础，通过模糊马尔科夫过程来表示投资资金未来的价值，利用模糊集定义了投资风险程度，并给出了投资行为风险控制和监管问题方面的分析研究。曾建华等[56] 把投资风险和投资收益设成投资者的两个模糊指标，建立了两个模糊目标的隶属函数 $\mu_{\max}$ 和 $\mu_{\min}$，并规定了风险与收益可以被投资者接受的范围，基于模糊规划理论和模糊决策理论构建了决策模型，模型中规定的风险和收益的范围可以根据投资者的喜好进行调整。秦学志和吴冲锋[57] 将投资者的风险偏好看成是有模糊性和随机性的，并把模型中目标函数的效用函数假定为线性可加性，以此为基础构建了模糊随机风险喜好的投资组合模型。梁素红[58]在可能性空间和模糊条件的基础上用在险价值来

衡量风险程度，并定义了其连续惯性和许多其它方面的性质。利用上面的两种风险判定的方法对模糊环境下的投资组合问题进行建模，并提出了求解的过程。陈国华[59]把资金的收益率定义为模糊数，对方差的模型约束条件定型了简化，构建了在模糊线性条件下的投资者模型，利用模糊期望转化问题，由模糊线性规划问题过渡到普通参数线性规划问题。

（3）熵理论在组合理论中的研究与应用

熵(entropy)这个词的历史可以追溯到1865年，当时的德国物理学家克劳休斯·鲁道夫试图对不可逆转的热量损失进行命名时，决定用熵(entropy)这个词来命名，从此熵开始在热力学方面发挥其重要的作用。熵不但是热力学第二定律的核心，更涉足于其它重要领域，它可以用来衡量有序和无序或者稳定和混乱。例如，在经典的物理学中，熵定义了能量的物理运动能力。风诺依曼利用密度矩阵扩展了熵的量子力学理论。在可能性理论中，熵用来度量随机变量的不确定性。熵同样量化了动力系统的指数复杂性。在社会学中，熵表示了结构的自然衰变。Brissaud[60]认为我们可以从三个方面来认识熵：首先是在信息论中，在物理系统外部，熵代表了一个系统中信息的损失程度，在系统内，熵代表了可数的信息。其次，熵可以度量自由度，一个典型的例子就是气体的扩张理论：时间越久，气体分子的自由度程度越高。最后，Brissaud相信熵可以用解释混乱，然而这个观点看起来对我们没有什么用，因为，我们可以用更好的变量对混乱进行定义。在经济中应用熵概念可以被认为是对信息熵和概率熵的补充。熵在投资选择理论和价值评估理论中是一个非常重要的工具。

Philippatos和Wilson[61]是第一个把熵理论应用到投资选择理论中的两个人。在他们的理论中，他们选取了14年中的50个证券交易的价格，把均值—熵法和传统的方法在有效性方面进行了比较分析，他们发现均值—熵证券组合模型与Warkowize的协方差模型和Sharpe的单序列模型惊人的一致。尽管他们的研究有一点点缺陷，但他们对投资组合理论的做出了巨大贡献。随后，许多学者丰富了熵理论在投资组合理论中的应用，他们中的一些人甚至提出了许多不同形式的熵。因为混合熵可以测量证券的风险，所以一些学者把不同形式的混合熵也应用到投资组合理论中。例如，Xu[62]研究了在投资组合问题中混合熵度量资产风险引起的随机性和模糊性。Usta和Kantar[63]对均值—方差模型、偏斜度模型和熵模型的优缺点进行了对比，分析哪一个方法可以更好的应用到投资组合模型当中。Jana[64]在Usta和Kantar的基础上添加了熵目标函数来生成一个最佳资产配置

的优化多样选择模型。Zhang、Liu和Xu[65]构建了一个基于多阶段交易成本的半方差熵模型。Zhou[66]认为在进行投资时，可以用信息熵来度量风险，于是建立了基于信息熵的熵增量偏斜度的投资组合模型。Smimous，Bactor和Jacoby[67]研究了在模糊环境下构建有理数矩阵模型。Huang[68]提出了一个简单的方法去证明均值熵的边界以及对均值熵模型构建提出了创新性意见。Rodder[69]提出了基于最大和最小相关熵理论来确定组合权重构建投资组合模型的思想。熵理论同样应用在期权定价方面。最经典的例子就是Gulko[70-72]的熵定价理论(EPT)，他认为EPT可以提供一些相似的评估结果等价于Sharpe的资本资产定价模型和Black-Scholes的期权定价公式。他还研究了EPT在股票和债券期权定价中的应用。最大熵理论(Maximum Entropy Prinple)在期权定价中扮演着一个非常重要的角色。追随带1996年，Buchen和Kelly[73]用MEP来评估期权定价的一系列分布。他们的研究表明，最大熵分布能够计算出一个已知概率密度函数的精确值，它可以模拟期权价格在不同时期的价格。Neri和Schneider[74]被Buchen和Kelly的方法所吸引，他们提出了一个简单的测试程序，用来对最大熵分布和一些样品进行检测。他们还与Buchen和Kelly的结果进行比对分析，从芝加哥期权交易中心的例子当中得出了与Buchen和Kelly相同的结论。另一个有用的相关理论就是最小交叉熵理论(Minimum Cross-Entroy Prinple)，Kullback和Leibler[75]研究了最小交叉熵，首次提出了基于最小交叉熵约束条件的贷款组合模型。McCauley[76]在研究熵时发现了具有捕获系统复杂性的能力，因此可以用熵来表示股票市场中的无序和不确定性。

信息熵与传统概率统计的方法有很大不同，它的重要性已经开始被国内的大量学者认知，并把熵应用到了经济和金融领域的研究当中。熵代替了传统的用方差度量风险的方法，克服了方差中的缺点，使计算简便准确，更全面的反映信息中的不确定性。姜继娇和杨乃定[77]把管理熵应用到风险预警体系中，提出了包含风险预警识别、量化与对策的新型风险预警模型。张继国和朱永忠[78]整合了所有模糊性信息上度量的定义，第一次对模糊互熵和信息传导指数等新理论做出了分析说明，对含有模糊随机变量的混合信息熵如何进行度量进行了相关解释，最终与Shannon熵和模糊熵是一致的。李华和何东华和李兴斯[79]在以马柯维茨（Marlowitz）证券投资组合模型的基础上，研究了模型中利用方差进行风险度量的方法，指出了该方法的缺陷，把熵的概念应用到组合模型当中，对马柯维茨（Marlowitz）进行了改进，构建了新的投资组合模型。李江涛等[80]考虑到我国证券交易的显示情况，交易过程中包含交易费用、限制约束、限制卖空和最小交易单位等几个约束条件，构建了我国证券市场的投资组合熵模型。在模型的求解方面，利用了

整数规划问题求解的理论，给不同风险水平赋予不同的取值，最终求得不同风险水平情况下最优的配比方案，并对收益的最大值，确定了有效边界。对于我国证券交易市场实际情况更加实用合理。王俊，周煦和叶中行[81]研究了信息论中熵的概念以及如何用熵度量投资组合的风险，首次提出了最大广义熵和最大熵的概念，并与马柯维茨（Marlowitz）投资组合中利用方差进行风险度量的理论进行了对比分，做出了数值模拟，模拟显示了熵投资组合的可行性。张阚，丰雪[82]结合了决策者的喜好和风险行动的风险度量，把收益最大化和熵度量的风险最小化两个约束条件添加到模型当中，利用熵的最大熵原理构建了具有期望效用的熵决策模型。但因为考虑到利用风险行动进行风险度量需要把行动方案排序，最终必须利用马柯维茨模型给出最优解。陈国华，廖小莲[83]以信息熵为基础，运用模糊两阶段算法，构建了多目标线性规划投资组合模型。

1.3 研究内容

本文以可信性理论，熵的相关理论框架下进行分析，用模糊变量表示贷款收益的模糊性，用模糊熵度量贷款收益的风险性，用信息熵衡量信息的确定性，与传统的均值—方差模型相比较分析，构建了基于模糊熵的贷款组合决策模型，并利用混合智能算法，求得模型的最优解。

1.4 研究意义

研究意义

世界是一个复杂而且具有多样性的客观存在。宇宙无限巨大，粒子的无限细小，飞船的速度之快，化学物理学科的精巧，都充满了复杂而且多样性。数学做为一门研究客观世界的空间形式和数量关系的基础学科，无法避免的包含着复杂性和多样性。人们运用确定性和不确定性的方法来研究和描述客观世界，其中后者主要包括了模糊方法、随机方法等。但是，当人们运用模糊数学的方法去解决模糊问题时，这个世界其实并不是与生俱来就是模糊的；当人们运用随机数学的方法去解决随机问题时，这个世界其实并不是天经地义就是随机的。然而实际上，世界既不是模糊的，也不是随机的，仅仅有一部分现象可以用模糊的方法去解释，也有一部分现象可以用随机的方法去解释，或者需要两种方法结合起来一起来解释。众所周知，美国控制论专家、数学家L.A.Zadeh(1965)最早发表了题为“模糊集合”（Fuzzy Sets）的文章，通过隶属度函数突出了模糊集合的

理论，标志着用来解决模糊现象的模糊理论问世。后来我国知名学者Liu&Liu（2002）对其理论进行的相关补充，引进了可信性测度的概念，重新定义了熵的概念。模糊理论、可信性理论不断发展，致力于运筹学、人工智能、管理科学、控制论、统计学等诸多领域的研究，并获得了无法估量的经济效益。由于经济管理领域中充满了模糊现象，所以模糊熵理论在贷款组合中的应用有着极为重要的现实意义。

理论意义

贷款组合理论有广义和侠义之分。广义的贷款组合理论包括组合投资的经典理论以及该理论相关的资本市场理论和替代组合贷款理论。狭义的组合理论指的是马柯维茨[1]（Markowitz）提出的投资组合理论（Portfolio Theory）。银行开展贷款业务时，面临着各种不确定性的风险和收益进行选择，银行要解决的核心问题是如何在不确定性的贷款环境下做出收益和风险最优组合。“理性银行”在给定期望风险的水平下选择优化的贷款组合使其获得的收益最大化，或者在给定期望收益水平下实现风险最小化，这是贷款组合研究的主要内容。

实际的贷款业务开展过程中，通常是控制贷款数额比较大的款项的风险从而实现控制所有贷款风险。但是单笔贷款的最佳，并不是代表着银行贷款总体的最佳。银行同时或几乎同时会面临许许多多的贷款项目申请，如何解决好贷款资金的分配，使得自身在获得最大经济利益的同时面临的风险最小，或着面临的风险最小的同时获得最大的经济利益，只有很好的解决这个问题，银行才可以提高自身竞争力，在面对众多银行的竞争中脱颖而出。

为解决上述问题实现上述目标，关键是能够对贷款过程中所遇到的不确定性做出合理的描述和处理。模糊性和随机性是事物不确定性表现的两种形式。随机性是偶然的一种形式，具有某一概率的事件集合中的各个事件所编现出来的不确定性。而模糊性，由于事物类属划分的不明确从而导致判断上的不确定性，模糊性的渗透比随机性更为广泛，特别是在主客观相互作用的领域和主观认识领域，模糊性的研究比随机性更加迫切、深刻。目前很多经济领域的研究者为了描述随机性，把贷款的收益率看作随机变量，用线性规划和概率论做为基础理论构建拥有随机变量的贷款组合决策模型。但是，贷款的项目都会受到自身所处的政治经济环境等因素的影响，这种影响并不像随机性那样，无法精确的描述和刻画，从而使风险贷款的风险和收益同时具有了模糊性和随机性。所以，对银行贷款业务中的不确定性进行深入的研究，特别是利用模糊理论来研究贷款组合问题，从理论上具有十分重要的意义。国内外大量学者近年来一直专心于研究带有模糊性

的贷款组合问题，寻找新的贷款风险和收益率的度量方式，探究贷款组合模型新的算法和实际应用。

1.5 主要创新点

本文注重模型的构建与实际应用，在考虑到建立新的贷款组合模型的同时将其与银行贷款业务的实际情况紧密结合，分析比较了新建模型与传统模型的优缺点，最主要的创新点有以下几个方面：

（1）本文把银行贷款的收益率假设成模糊变量，利用模糊变量的模糊性表现贷款收益的不确定性。

（2）添加了基于信息熵的风险约束条件。信息熵可以表示信息的不确定性。信息熵的加入弥补了有效解（非劣解）全部集中在一个或几个贷款项目的缺点，解决了贷款资金过于集中的问题，具有分散贷款风险的作用。

（3）以可信性理论与熵理论为基础，用模糊熵代替传统投资组合模型中的方差进行风险度量，分析比较了两者之间的优缺点，构建了基于模糊熵的贷款组合模型，并给出了相关最优解的求解过程。

1.6 文章总体结构

文章总共含有六个章节，每一章的具体内容如下：

第一章绪论，分别讲述了基于银行贷款组合背景下的研究现状和意义，详细介绍了文章所要探究的不确定理论、模糊贷款投资理论、熵理论在国内和国外研究的不同现状，罗列了文章后面几章将要进行的研究工作，以及贷款组合模型技术要求框架图。

第二章可信性理论概述，主要介绍了可信性理论，包括了可信性度量、模糊变量、隶属函数等的相关定义和性质，为以后模型的计算奠定基础。

第三章熵的相关理论概述，主要介绍了信息熵和模糊熵以及模糊熵的风险度量。建立了模型的风险约束条件，即用模糊熵代替方差进行模型风险的度量。

第四章基于模糊熵的贷款组合决策模型，主要介绍了用模糊变量、信息熵、模糊熵构建模型的约束条件，建立了基于模糊熵的贷款组合决策模型，并给出了求解模型的混合智能算法。

第五章基于模糊熵的贷款组合决策模型实证探究，主要介绍了通过C语言编程利用模糊模拟与遗传算法结合的混合智能算法将数据处理和模型求解，根据实例说明模型的可行性。

第六章结论，总结本文的工作，指出本文的重点难点，并对未来工作进行展望。

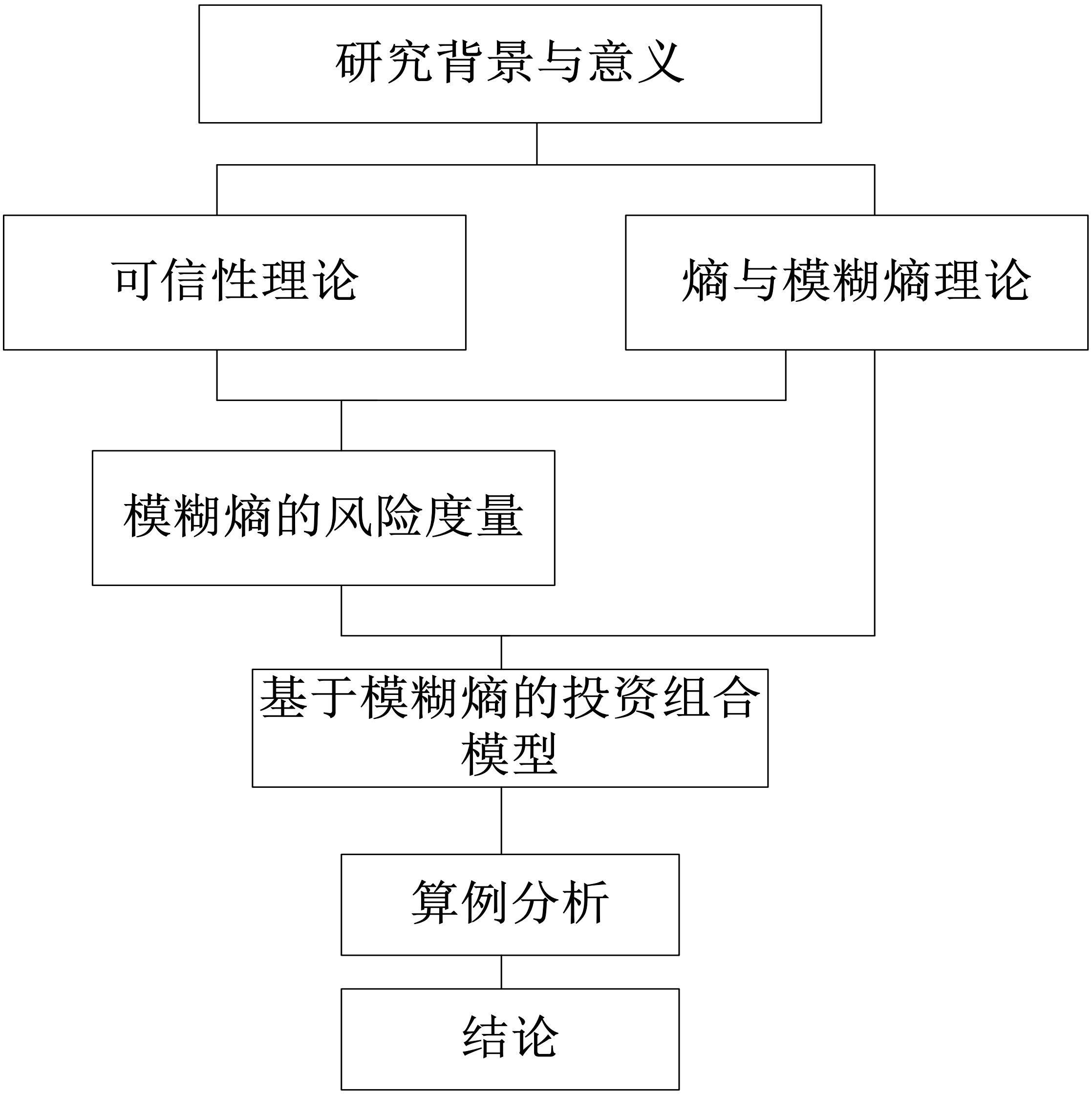

图1.1 技术分析图

Fig.1.1 Technical Analysis Diagram

第 2 章　可信性理论概述

在大家熟知的模糊集合论里，我们把论域U里的一个任意集合A，定义成论域U里的所有元素集合x构成的群落。在这群体里的任意一个元素要么是A集合的，要么不是A集合的。我们可以用很多种方法来表示类似于这样的集合：用特定的方程或不等式描述某些集合；举例集合中包含的元素；论域中的元素用目标函数来定义，用1表示元素隶属于此集合，用0表示不隶属于此集合。但是这种从属关系有的时候不是特别适用。比如，“老年人”、“差了许多”、“几乎可以”、“大约”、“大部分”、“大概不到10”等。典型的隶属关系不能够描述这样的模糊，更不能使这些元素进行分类。为了使问题迎刃而解，我们需要介绍模糊集的定义。

定义2.0（Zadeh[36]）假设U是一个论域。$\tilde{A}$为是U的任意子集，在所有元素$x \in U$，我们有函数：

$$\mu_{\tilde{A}}: \mathrm{U} \longrightarrow [0,1] \qquad (2\text{-}1)$$

指定了任意值$\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$与函数相对应。$\mu_{\tilde{A}}(x)$在元素$x$处的值表示了元素$x$隶属于子集$\tilde{A}$的程度，我们把集合$\tilde{A}$称作模糊子集，而$\mu_{\tilde{A}}(x)$称为$\tilde{A}$的隶属函数。这就是说，$\mu_{\tilde{A}}(x)$的值越大，元素$x$属于$\tilde{A}$的程度也就越高。

到目前为止，模糊集理论的发展已经迈出了一大步，模糊理论以及相关的技术理论在各行各业发挥着无法代替的作用。其中Kaufmann[84]是首先介绍并定义了模糊变量，学者Zadeh[85,86]和Nahmias[87]在其之后也进行了相关探究。Zadeh[86]提出了可能性理论，许多学者例如Dubois和Prade[88,89]对Zadeh的可能性理论进行了更加深入的研究。为了把模糊论发展成为系统的公理理论，近几年Liu[45]引出了一系列完备的探究模糊性的公理体系，我们把它称为可信性理论。

本章的重点在于介绍可信性理论、模糊变量定义和性质、模糊法则、可信性测度、二维向量、三角向量以及梯形向量的期望值算子和模糊模拟。这些性质和法则是把模糊理论谜团解开的重要理论工具。

2.1 可信性测度

设Θ为一个非空集合，p是Θ的一个幂集。p集合的每一个元素叫做一个事件。为了给可信度公理化定义，我们有必要对p集合中的每个A事件分配一个表示A事件将要发生的可信性$Cr\{A\}$，即$Cr\{A\}$表示A事件发生的可信性。我们接受以下四条公里：

公理2.1.1（常态） $Cr\{\xi\}=$

公理2.1.2（单调性） 当$\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$时，$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\}\le\mathrm{Cr}\{\mathrm{B}\}$

公理2.1.3（自对偶性）任意事件A有$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\}+\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}^c\}=1$

公理2.14（极大性） 对于任意事件$\{\mathrm{A}_i\}$有$\mathrm{Cr}\{\cup_i \mathrm{A}_\mathrm{i}\}=\sup_\mathrm{i}\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}_\mathrm{i}\}$且$\sup_\mathrm{i}\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}_\mathrm{i}\}<0.5$

定义2.1.1（Liu and Liu[44]）满足以上四条公理的集函数Cr叫做可信性测度

例子2.1.1 设$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$。在这个例子中有四个事件$\varnothing,\{\theta_1\},\{\theta_2\},\Theta$。设$\mathrm{Cr}\{\varnothing\}=0,\mathrm{Cr}\{\theta_1\}=0.7,\mathrm{Cr}\{\theta_2\}=0.3,\mathrm{Cr}\{\Theta\}=1$，以上就是一个可信性测度，因为满足前面的四条公理。

定理2.1.1 设Θ为一个非空集合，p是Θ的幂集，Cr是可信性测度。对于任意$A\in p$，$\mathrm{Cr}\{\varnothing\}=0$ 且$0\le\mathrm{Cr}\{A\}\le 1$

定理2.1.2 设Θ为一个非空集合，p是Θ的幂集，Cr是可信性测度。对于任意$A,B\in p$，我们有

当$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\}\le 0.5$时，$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\}=\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\}\vee\mathrm{Cr}\{\mathrm{B}\}$ （2-2）

当$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\}\ge 0.5$时，$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\}=\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\}\wedge\mathrm{Cr}\{\mathrm{B}\}$ （2-3）

上述的等式不仅适用于有限的事件，也适用于无限的事件。

定理2.1.3（Liu[45]，可信性次加理论） 可信性是可以次加的，如下，

$$\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\}\le\mathrm{Cr}\{\mathrm{A}\}+\mathrm{Cr}\{\mathrm{B}\} \qquad (2-4)$$

满足于任意事件A和 B

定理2.1.4 设$\{B_i\}$ 是一个可信性递减的事件，即当$i \to \infty$时$Cr\{B_i\} \to 0$。对于任意事件，我们有

$$\lim_{i\to\infty} Cr\{A \cup B_i\} = \lim_{i\to\infty} Cr\{A \backslash B_i\} = Cr\{A\} \tag{2-5}$$

定理2.1.5 （Liu[45]，半连续定律） 对于任意事件$A_1, A_2, \cdots$，我们有

$$\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} = Cr\{\lim_{i\to\infty} A_i\} \tag{2-6}$$

当以下情况有一种满足的时候：

(a) $Cr\{A\} \le 0.5$ and $A_i \uparrow A$;　　(b) $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} < 0.5$ and $A_i \uparrow A$;

(c) $Cr\{A\} \ge 0.5$ and $A_i \downarrow A$;　　(d) $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} > 0.5$ and $A_i \uparrow A$;

定理2.1.6（可信性渐近线理论）对于任意的$A_1, A_2, \cdots$，我们有

$$\text{如果 } A_i \downarrow \varnothing，\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} \le 0.5$$

$$\text{如果 } A_i \uparrow \Theta，\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} \ge 0.5 \tag{2-7}$$

定理2.1.7 设Θ为一个非空集合，如果Cr是可信性测度，则

$$\begin{gathered} \sup_{\theta\in\Theta} Cr\{\theta\} \ge 0.5, \\ Cr\{\theta^*\} + \sup_{\theta\neq\theta^*} Cr\{\theta\} = 1 \text{ 若 } Cr\{\theta^*\} \ge 0.5 \end{gathered} \tag{2-8}$$

我们称（2.8）为可信性扩展条件。

定理2.1.8（Li和Liu[90]可信性扩展理论）设Θ为一个非空集合，$Cr\{\Theta\}$是Θ集合上的一个非负函数且满足（2.8）的扩展条件。则$Cr\{\Theta\}$仅有唯一个扩展条件，如下；

$$Cr\{A\} = \begin{cases} \sup\limits_{\theta\in A} Cr\{\theta\}, & \text{若 } \sup\limits_{\theta\in A} Cr\{\theta\} < 0.5 \\ 1 - \sup\limits_{\theta\in A^c} Cr\{\theta\}, & \text{若 } \sup\limits_{\theta\in A} Cr\{\theta\} \ge 0.5 \end{cases} \tag{2-9}$$

定理2.1.9设Θ为一个非空集合，p是Θ的幂集，Cr是可信性测度。则（Θ，p，Cr）叫做可信性空间。

公理2.1.5（乘积可信度公理）设Θ_k为一个非空集合，Cr_k分别是$k = 1, 2, \cdots, n$的可信性度量，$\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \cdots \times \Theta_n$，对于每个$(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \in \Theta$有，

$$\mathrm{Cr}\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}=\mathrm{Cr}_1\{\theta_1\}\wedge\mathrm{Cr}_2\{\theta_2\}\wedge\cdots\wedge\mathrm{Cr}_n\{\theta_n\} \tag{2-10}$$

定理2.1.10（乘积可信度定理）设Θ_k为一个非空集合，Cr_k分别是$k=1,2,\cdots,n$的可信性度量，$\Theta=\Theta_1\times\Theta_2\times\cdots\times\Theta_n$，则公理2.1.5定义的$\mathrm{Cr}=\mathrm{Cr}_1\wedge\mathrm{Cr}_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{Cr}_n$有关于集合$\Theta$唯一的扩展可信性度量，如下，

$$\mathrm{Cr}\{A\}=\begin{cases}\text{当}\sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A}\min\limits_{1\le k\le n}\mathrm{Cr}\{\theta_k\}<0.5\text{ 时，} & \sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A}\min\limits_{1\le k\le n}\mathrm{Cr}_k\{\theta_k\}\\ \text{当}\sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A}\min\limits_{1\le k\le n}\mathrm{Cr}\{\theta_k\}\ge 0.5\text{ 时，} & 1-\sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A^c}\min\limits_{1\le k\le n}\mathrm{Cr}_k\{\theta_k\}\end{cases}$$

（2-11）

定义2.1.2 设（Θ_k，p_k，Cr_k），k=1, 2,⋯, n 可信性空间，$\Theta=\Theta_1\times\Theta_2\times\cdots\times\Theta_n$，$\mathrm{Cr}=\mathrm{Cr}_1\wedge\mathrm{Cr}_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{Cr}_n$。则$(\Theta,p,Cr)$叫做（$\Theta_k$，$\mathrm{p}_k$，$\mathrm{Cr}_k$），k=1, 2;⋯, r的乘积可信性空间。

定理2.1.11（极限乘积可信性理论）设Θ_k为一个非空集合，Cr_k分别是$p_k,k=1,2,\ldots$元素的的可信性度量，$\Theta=\Theta_1\times\Theta_2\times\cdots$，则

$$\mathrm{Cr}\{A\}=\begin{cases}\text{当}\sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A}\inf\limits_{1\le k<\infty}\mathrm{Cr}\{\theta_k\}<0.5\text{ 时，} & \sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A}\inf\limits_{1\le k<\infty}\mathrm{Cr}_k\{\theta_k\}\\ \text{当}\sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A}\inf\limits_{1\le k<\infty}\mathrm{Cr}\{\theta_k\}\ge 0.5\text{ 时，} & 1-\sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in A^c}\inf\limits_{1\le k<\infty}\mathrm{Cr}_k\{\theta_k\}\end{cases}$$

（2-12）

是元素p的可信性测度。

定义2.1.3 设（Θ_k，p_k，Cr_k），k=1, 2,⋯是一个可信性空间。定义$\Theta=\Theta_1\times\Theta_2\times\cdots$和$\mathrm{Cr}=\mathrm{Cr}_1\wedge\mathrm{Cr}_2\wedge\cdots$。则$(\Theta,p,Cr)$叫做（$\Theta_k$，$\mathrm{p}_k$，$\mathrm{Cr}_k$），k=1, 2,⋯的无限乘积可信性测度。

2.2 模糊变量

定义2.2.1 假设ξ是一个从可信性空间(Θ,p,Cr)到实直线$\Re$上的函数，我们把ξ称为模糊变量。

例2.2.1 设$\{\theta_1,\theta_2\}$取值于可信性空间(Θ,p,Cr)，且$Cr\{\theta_1\}=Cr\{\theta_2\}=0.5$，则函数

$$\xi\{\theta\}=\begin{cases}0, & \theta=\theta_1 \\ 1, & \theta=\theta_2\end{cases} \tag{2-13}$$

是一个模糊变量。

注 因为ξ是从可信性空间(Θ,p,Cr)定义的函数，所以对于包含于实数集$\Re$中的任意集合$\mathbb{C}$，集合

$$\{\xi\in \mathrm{C}\}=\{\theta\in\Theta \mid \xi(\theta)\in \mathrm{C}\} \tag{2-14}$$

总是p中的元素。也就是说，模糊变量ξ是一个可测函数且$\{\xi\in \mathrm{C}\}$是一个事件。例如一个常量b也可以做模糊变量，因为它可以被认为是可信性空间上的常量函数$\xi(\theta)\equiv b$的函数表达式。

定义2.2.2 模糊变量ξ有以下性质

(1)非负性　当$\mathrm{Cr}\{\xi<0\}=0$；

(2)正数　　当$\mathrm{Cr}\{\xi<0\}=0$；

(3)连续性　$Cr\{\xi=x\}$ 是关于x的连续函数

(4)存在一个有限序列$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$使得

$$Cr\{\xi\neq x_1,\xi\neq x_2,\cdots,\xi\neq x_m\}=0 \tag{2-15}$$

(5)离散情况下存在一个可数的序列$\{x_1,x_2,\cdots\}$使得

$$Cr\{\xi\neq x_1,\xi\neq x_2,\cdots\}=0 \tag{2-16}$$

定义2.2.3 设ξ_1和ξ_2是定义在可信性空间(Θ,p,Cr)上的两个模糊变量。当$\theta\in\Theta$且$\xi_1(\theta)=\xi_2(\theta)$时，$\xi_1=\xi_2$。

定义2.2.4 ξ是一个模糊向量，如果ξ满足是从可能性空间(Θ,p,Cr)到n维实数空间的的函数。

定理2.2.1 只有当$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$是模糊变量时，向量$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$才是一个模糊向量。

定义2.2.5 设$f:\Re^n\to\Re$是一个函数，$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$是在可信性空间(Θ,p,Cr)下的模糊向量，对于任意$\theta\in\Theta$，$\xi=f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$是一个被定义的模糊变量，如下

$$\xi(\theta)=f(\xi_1(\theta),\xi_2(\theta),\ldots,\xi_n(\theta)) \tag{2-17}$$

定理2.2.2 设ξ是一个n维的模糊向量，$f:\Re^n\to\Re$，则$f(\xi)$是一个模糊变量。

2.3 隶属函数

定义2.3.1 设ξ是定义在可信性空间(Θ,p,Cr)上的模糊变量，则它的隶属函数来自于可信性测度

$$\mu(\mathrm{x})=(2\mathrm{Cr}\{\xi=\mathrm{x}\})\wedge 1,\quad \mathrm{x}\in\Re \tag{2-18}$$

隶属度函数表示可能性的程度，模糊变量ξ取值规定的数。例如，如果x表示不可能的点，隶属度μ(x)=0，如果x表示最有可能的点，隶属度μ(x)=1。

定理2.3.1（可信性逆转定理）设ξ是一个模糊变量，μ是隶属度函数。对于任何集合B的实数，我们有

$$\mathrm{Cr}\{\xi\in\mathrm{B}\}=\frac{1}{2}\sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{B}}\mu(\mathrm{x})+1\text{-}\sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{B}^c}\mu(\mathrm{x}) \tag{2-19}$$

定理2.3.2（隶属度函数的充分必要条件）$\mu:\Re\to[0,1]$是一个隶属度函数，当且仅当$\mu:\Re\to[0,1]$时。

定理2.3.3 设ξ是一个模糊变量，μ是隶属度函数。我们有

(1) 非负性 对于所有x<0，$\mu(x)=0$；

(2) 正数　 只有当$x\le 0$时，$\mu(x)=0$；

(3) ξ是一个简单的模糊变量，当且仅当μ在有限的点取非零值时；

(4) ξ是一个离散的模糊变量，当且仅当μ在可数集中取非零的值时；

(5) ξ是一个连续的模糊变量，当且仅当μ是一个连续函数。

定义2.3.2 设(a,b)是一个模糊变量，且a与b为实数a< b，则隶属度函数为：

$$\mu_1(x)=\begin{cases}1, & \mathrm{a}\le\mathrm{x}\le\mathrm{b}\\ 0, & \text{其它情况}\end{cases} \tag{2-20}$$

定义2.3.3(三角模糊变量的隶属度函数） 设(a,b,c)是一个模糊变量的三角函数，且$a<b<c$，则隶属度函数为：

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & \mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}\\ \dfrac{x-\mathrm{c}}{b-\mathrm{c}}, & \mathrm{b}\le \mathrm{x}\le \mathrm{c}\\ 0 & \text{，其它情况}\end{cases} \tag{2-21}$$

定义2.3.4(梯形模糊变量的隶属度函数） 设(a,b,c,d)是一个梯形模糊变量，且$a<b<c<d$，则隶属度函数为：

$$\mu_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & \mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}\\ 1, & \mathrm{b}\le \mathrm{x}\le \mathrm{c}\\ \dfrac{x-\mathrm{d}}{\mathrm{c}-\mathrm{d}}, & \mathrm{c}\le \mathrm{x}\le \mathrm{d}\\ 0, & \text{其它情况}\end{cases} \tag{2-22}$$

三种变量的隶属度函数用图表示：

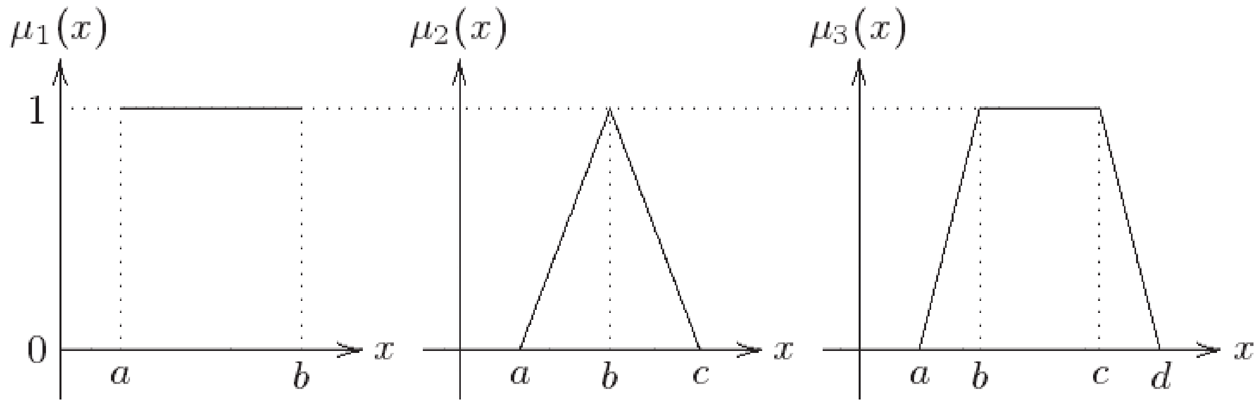

图2.1 隶属度函数μ_1,μ_2,μ_3

2.4 可信性分布

定义2.4.1（Liu[44]） ξ的可信性分布Φ：$\Re\to[0,1]$定义为

$$\Phi(x)=Cr\{\theta\in\Theta \mid \xi(\theta)\le x\} \tag{2-23}$$

定义2.4.2(模糊变量的分布）模糊变量(a,b)的可信性分布函数如下

$$\Phi_1(x)=\begin{cases}0, & \text{x<a}\\ \dfrac{1}{2}, & \text{a} \le \text{x<b}\\ 1, & \text{x} \ge \text{b}\end{cases} \tag{2-24}$$

定义2.4.3(三角模糊变量的分布）三角模糊变量(a,b,c)的可信性分布函数如下

$$\Phi_2(x)=\begin{cases}0, & \text{x} \le \text{a}\\ \dfrac{\text{x-a}}{2(\text{b-a})}, & \text{a} \le \text{x} \le \text{b}\\ \dfrac{\text{x+c-2b}}{2(\text{c-b})}, & \text{b} \le \text{x} \le \text{c}\\ 1, & \text{x} \ge \text{c}\end{cases} \tag{2-25}$$

定义2.4.4(梯形模糊变量的分布）梯形模糊变量(a,b,c,d)的可信性分布函数如下

$$\Phi_3(x)=\begin{cases}0, & \text{x} \le \text{a}\\ \dfrac{x-a}{2(b-a)}, & \text{a} \le \text{x} \le \text{b}\\ \dfrac{1}{2}, & \text{b} \le \text{x} \le \text{c}\\ \dfrac{x+d-2c}{x(d-c)}, & \text{c} \le \text{x} \le \text{d}\\ 1, & \text{x} \ge \text{d}\end{cases} \tag{2-26}$$

三种变量的可信性分布如图所示：

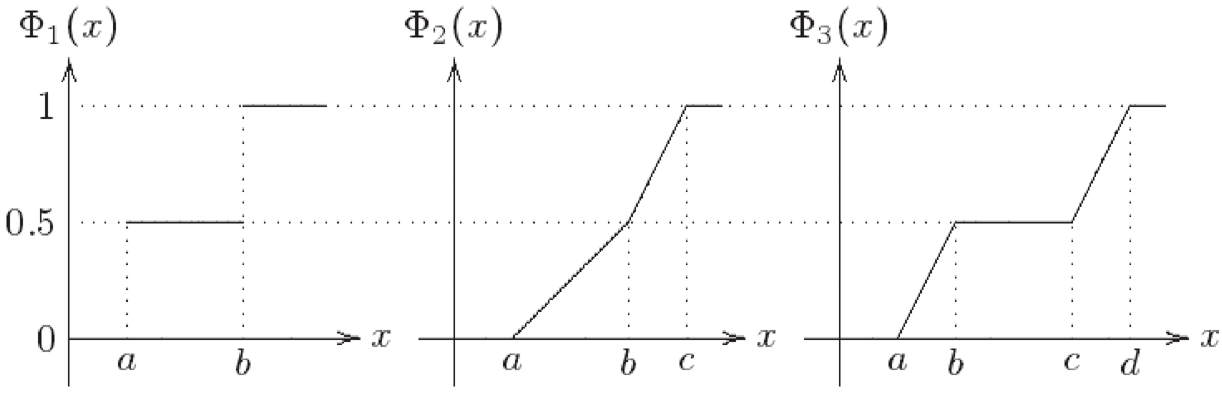

图2. 2 可信性分布Φ_1,Φ_2,Φ_3

定义2.4.5 模糊变量ξ的可信性密度函数是ϕ: $\Re \to [0,\infty)$，则其分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(y)dy, \quad \forall \mathrm{x} \in \Re \tag{2-27}$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)dy=1 \tag{2-28}$$

定义2.4.6 模糊三角变量(a,b,c)的可信性密度函数是：

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(b-a)}, & \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b} \\ \dfrac{1}{2(c-b)}, & \mathrm{b} \le \mathrm{x} \le \mathrm{c} \\ 0, & \text{其它情况}\end{cases} \tag{2-29}$$

定义2.4.7 模糊三角变量(a,b,c,d)的可信性密度函数是：

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(b-a)}, & \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b} \\ \dfrac{1}{2(d-c)}, & \mathrm{c} \le \mathrm{x} \le \mathrm{d} \\ 0, & \text{其它情况}\end{cases} \tag{2-30}$$

定理2.4.9 设ξ为模糊变量，其可信性密度函数ϕ存在，则

$$Cr\{\xi \le x\}=\int_{-\infty}^{x}\phi(y)dy, \qquad Cr\{\xi \ge x\}=\int_{x}^{+\infty}\phi(y)dy \tag{2-31}$$

2.5 独立性

模糊变量的独立性被许多学者从各个角度进行研究，比如Zadeh[91]，Nahmias[92]，Yager[93]，Liu[45]，Liu和Gao[94]，Liu和Liu[95]。大量独立性的等价形式被提出。

定义2.5.1 对于模糊变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，对于$\Re$实数集上的$B_1,B_2,\cdots,B_m$集合，满足以下条件时我们称它们相互独立

$$Cr\{\bigcap_{i=1}^{m}\{\xi_i \in B_i\}\}=\min_{1\le i\le m} Cr\{\xi_i \in B_i\} \tag{2-32}$$

定义2.5.2 对于模糊变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，对于$\Re$实数集上的$B_1,B_2,\cdots,B_m$集合，满足以下条件时我们称它们相互独立

$$Cr\{\bigcup_{i=1}^{m}\{\xi_i \in B_i\}\} = \max_{1\le i\le m} Cr\{\xi_i \in B_i\} \tag{2-33}$$

定义2.5.3 假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是相互独立的模糊变量，$f_i:\Re\to\Re$为实值函数，则$f_1(\xi_1),f_2(\xi_2),\cdots,f_m(\xi_m)$是相互独立的模糊变量。

定理2.5.1(Zadeh扩展原理) 假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是互相独立的模糊变量，则它们的隶属函数是$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$。如果$f_i:\Re\to\Re$为实值函数，那么$\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的隶属函数$\mu$由$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$导出，

$$\mu(x) = \sup_{x=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \max_{1\le i\le n} \mu_i(x_i) \tag{2-34}$$

定理2.5.2 假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是相互独立的模糊变量，它们的隶属函数是$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$。如果$f_i:\Re\to\Re$为实值函数，那么对于任意属于实数集$\Re$的B集合，都有

$$Cr\{f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in B\} = \frac{1}{2}\Big(\sup_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B} \min_{1\le i\le n}\mu_i(x_i) + 1 - \sup_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B^c} \min_{1\le i\le n}\mu_i(x_i)\Big) \tag{2-35}$$

2.6 期望值

随机变量的期望值在可能性理论中扮演着非常重要的角色。对于模糊变量来说，有很多方法可以获得期望值，例如，Dubois和Prade[96]，Heilpern[97]，Campos和Gonzalez[98]，Gonzalez[99]和Yager[100,101]等。下面我们就给出模糊变量期望值的相关理论。

定义2.6.3(Liu and Liu[44]) 假设ξ是一个模糊变量。则ξ的期望值是：

$$E(\xi) = \int_0^\infty Cr\{\xi\ge r\}dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi\le r\}dr \tag{2-36}$$

例如2.6.1 三角模糊变量(a,b,c)的期望值为：

$$E[\xi] = \frac{1}{4}(a+2b+c) \tag{2-37}$$

定理2.6.1 设ξ是可信性空间(Θ,p,Cr)上的模糊变量，若Lebegue积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx$有限，则

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx \tag{2-38}$$

定理2.6.2 假设ξ和η是不相关的模糊变量且有期望值，对于任意实数a和b，我们

有

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta] \tag{2-39}$$

定理2.6.3 假设ξ是一个模糊变量，并且期望有限，且对于任意实数a和b，则

$$E[a\xi + b] = aE[\xi] + b \tag{2-40}$$

2.7 模糊模拟

模糊模拟，经过Liu和Iwamura[102],Liu[103]，Liu和Liu[44]的不断研究，把模糊模拟定义为在模糊系统的模型中进行样本实验的一种技术。大量的数值实验表明，模糊模拟的确很适合处理模糊系统中的问题，在这一小节中，我们将把模糊模拟技术引进到可信性理论中，计算期望值。

例子2.7 假设 $f:\Re^n \to \Re$ 是一个实值函数，ξ是一个模糊向量。则$f(\xi)$也是一个模糊向量。下面给出一个模糊模拟过程来计算$E[f(\xi)]$。我们随机生成一个来自可信性空间(Θ, p, Cr)的θ_k，写下$\nu_k = (2Cr\{\theta_k\}) \wedge 1$然后产生$\xi(\theta_k), k = 1, 2\cdots, N$.相当于，我们随机产生$\xi(\theta_k)$且写下$\nu_k = \mu(\xi\{\theta_k\})$ k=1,2,⋯,N, 这里的μ是ξ的隶属函数。则对于任意数$r \ge 0$，可信性$Cr\{f(\xi) \ge r\}$近似等于：

$$\frac{1}{2}(\max_{1\le k\le N}\{\nu_k | \ \mathrm{f}(\xi(\theta_\mathrm{k})) \ge r\} + \min_{1\le k\le N}\{1-\nu_k | \ \mathrm{f}(\xi(\theta_\mathrm{k})) < r\})$$

对任意的$r < 0$，可信性$Cr\{f(\xi) \le r\}$近似等于：

$$\frac{1}{2}(\max_{1\le k\le N}\{\nu_k | \ \mathrm{f}(\xi(\theta_\mathrm{k})) \le r\} + \min_{1\le k\le N}\{1-\nu_k | \ \mathrm{f}(\xi(\theta_\mathrm{k})) > r\})$$

当N足够大时，则$E[f(\xi)]$可以经过如下模糊模拟被度量：

(期望值的模糊模拟)

步骤 1　设置e=0。

步骤 2　随机生成来自可信性空间(Θ, p, Cr)的θ_k，写下$\nu_k = (2Cr\{\theta_k\}) \wedge 1$然后产生$\xi(\theta_k), k = 1, 2\cdots, N$.相当于，我们随机产生$\xi(\theta_k)$且写下$\nu_k = \mu(\xi\{\theta_k\})$ k=1,2,⋯,N, 这里的μ是ξ的隶属函数。

步骤 3　设置 $a = f(\xi(\theta_1)) \wedge \cdots \wedge f(\xi(\theta_N))$, $\mathrm{b} = f(\xi(\theta_1)) \wedge \cdots \wedge f(\xi(\theta_N))$。

步骤 4　从 $[a,b]$ 中随机生成 r。

步骤 5　如果 $r \geq 0$，那么 $e \leftarrow e + Cr\{f(\xi) \geq r\}$。

步骤 6　如果 $r < 0$，那么 $e \leftarrow e - Cr\{f(\xi) \leq r\}$。

步骤 7　重复步骤4到6共 N 次。

步骤 8　$E[f(\xi)] = a \vee 0 + b \wedge 0 + e \cdot (b-a)/N$。

考虑三角模糊变量 $\xi_i = (i, i+1, i+6)$, $\mathrm{i}=1,2,\cdots,100$。我们有 $E[\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}] = E[\xi_1] + E[\xi_2] + \cdots + E[\xi_{100}] = 5250$。模糊模拟循环10000次后，得到 $E[\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}] = 5352$，其相对误差小于 2%。

设 $\xi_1 = (1,2,3), \xi_2 = (2,3,4), \xi_3 = (3,4,5), \xi_4 = (4,5,6)$ 为三角模糊变量，模糊模拟循环5000次后，得到的 $E[\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2}] = 7.35$。

第 3 章　熵的相关理论与概述

投资组合的英文名是“portfolio”，但我们经常把“portfolio”翻译成为“证券组合”。其实最准确的翻译因该是“资产组合”，因为现实中我们进行投资不只是局限与证券或者股票，还有很多领域涉及到我们进行投资。例如银行的贷信贷业务也是一项投资行为，所以贷款组合也是投资组合中的一种，但两者涉及的领域和考虑的现实因素有所不同。贷款组合被认为是一种在各种各样的贷款风险和贷款收益下如何进行资金最优化分配问题。

在现有的贷款组合模型中，大部分学者假设银行贷款未来回报率来自于一个随机的分布函数，而这个分布函数来又自于对历史贷款数据和贷款项目信息的统计分析 。然而，银行方面无法很好的判定信息具有的确定性与不确定性。所以如何度量信息的有效性与确定性显得格外重要。

“熵“理论就是一个度量信息有效性，反映信息不确定性程度的一个重要工具。物理学中最先出现了熵的概念。概念提出之后，引起了各领域的纷纷研究，使得熵理论的概念得到传播。从物理学到热力学，然后到了现在的经济管理学领域，逐渐成为了各个学科发展的基石，下面我们将介绍”熵“在贷款组合模型中的应用。

3.1　信息熵

3.1.1　熵在不同领域中的应用

信息是用来消除随机不确定性的东西，它自身有着特别属性和特殊性，而且可以进行相关方面的度量。熵态函数表达式一开始在热力学和物理学中的得到广泛应用，但随着研究的不断加深，它的应用和影响早已超过了热力学与物理学的范畴，它在控制论、信息论以及其它应用领域被大家广为熟知，在此我们有了信息熵的定义。

表3.1 熵在不同领域的应用

Tab.3.1 Entropy applied in different fields

科学领域	*熵的表达式*	*概念及定义*
热力学	$S=\int_1^2 \frac{dQ}{T}+S_0$	热力学中熵是平衡态热力学的一个态函数，其中1、2是两个平衡态，积分路径沿着任意可逆过程，T 为热源温度，dQ 是某一过程中吸收的热量
物理学	$S=KIn\Omega$	即玻尔兹曼关系式，K 是波尔兹曼常数，Ω 是系统的微观态数。在宏观条件不变的情况下，当系统处于平衡时，微观态数越多，系统越“混乱”，熵越大；否则，熵越小。从微观意义上说，熵是物质系统无序性和混乱度的量度。
信息论	$H=k\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i$	k 是一个给定的常数。P_i 是试验项目 i 的发生概率，H 是信息熵，表示在该系统下信息度量的确定程度。

3.1.2 信息熵的定义

熵的定义是在离散情况和连续情况下分别定义的。

（1）离散分布情况下的信息熵

设某个离散型的随机变量 X，X 的分布率是 $\{p_i\}$，且 $\mathrm{p_i}=\mathrm{P}\{\mathrm{X}=\mathrm{x_i}\}$，$0\le \mathrm{p_i}\le 1$，$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{p_i}=1$，$(\mathrm{i}=1,2\mathrm{L}\ ,\mathrm{n})$ 则用信息熵来度量事件 X 的确定程度为：

$$\begin{aligned}H(X)&=-\sum_{i=1}^{n}p_i Inp_i=\sum_{i=1}^{n}p_i(-Inp_i)\\&\approx\sum_{i=1}^{n}p_i[-(p_i-1)+\frac{(p_i-1)^2}{2}-\frac{(p_i-1)^3}{3}+\cdots-(-1)^{n-1}\frac{(p_i-1)^n}{n}]\end{aligned} \quad (3\text{-}1)$$

（2）连续分布情况下的信息熵

假设某个连续型随机变量 X，其概率密度函数是 $p(x)$，则该连续随机变量 X 的信息熵为：

$$H(X)=-\int p(x)Inp(x)dx \quad (3\text{-}2)$$

例如，假设事件X_1, X_2中甲赢或乙赢都会获得一元钱。

X_1	甲赢	乙赢	X_2	甲赢	乙赢
P_1	0.5	0.5	P_2	0.99	0.01
H_1	0.693		H_2	0.325	

很明显，在这个实例当中，$E(X_1)=E(X_2)=1$，但两者投资的风险不一样。很明显第一种情形比第二种情形不确定，第二种情形我们可以判断结果如何，而第一种情况我们几乎不能判断。也就是说变量的不确定性越大，计算出的信息越大，风险越大，否则，风险越小。换句话说，一个系统风险越小，信息熵越低；反之，一个系统风险越大，信息熵越高。

3.1.3 信息熵的性质

（1）对称性：熵只与随机变量的总体结构有关，与随机变量的取值无关。

$$H(p_1,p_2,p_3)=H(p_2,p_1,p_3)=H(p_3,p_2,p_1) \tag{3-3}$$

（2）非负性：$H(p_1,p_2,\cdots,p_m)\geq 0$。

（3）确定性：确定的事物是没有信息可言的。当有一个事件发生的概率为1，其信息熵为0。

（4）可加性与强加性：$H(XY)$为两个随机变量的联合熵。

可加性：$H(XY)$等于X的无条件的熵，加上已知X时Y的条件概率的熵，即

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{q}p(x_i)\sum_{j=1}^{q}p(y_j|\mathrm{x}_i)\log\frac{1}{p(y_j|x_i)} \tag{3-4}$$

强加性：对于X与Y是独立分布的情况下：

$$H(XY)=H(X)+H(Y) \tag{3-5}$$

（5）极值性：$H(\mathrm{p}_1,p_2,\cdots,\mathrm{p}_\mathrm{m})\leq H(\frac{1}{q},\frac{1}{q},\cdots,\frac{1}{q})=\log q$ （3-6）

（6）凹凸性：熵函数是一个关于所有变量的凹函数。

3.2 模糊熵

自然界和人类生活中普遍存在着一种不确定现象我们常把它们定义为模糊变量，二十世纪七十年代以后，大量学者开始陆续研究和关注，如何对这种不确定性的变量进行处理和分析。有的学者开始构建自己的理论，如模糊集理、可能性理论、可信性理论等，分别从不同的方面，用数学的相关理论对模糊性进行描述。在这些理论中，用模糊熵度量具有模糊性的信息的不确定程度，则是一个非常新颖的话题。许多学者例如，De Luca和Termini[104]，Kaufmann[105]，Yager[106]，Kosko[107]，Pal和Pal[108]，Bhandari和Pal[109]以及Pal和Bezdek[110]分别从数学、控制论、信息论等理论来定义模糊熵。

为了度量模糊变量的不确定性，Liu[45]建议模糊变量的熵应该具有以下三项基本性质：:

（1）极小值：具有确定性数值的熵值应当最小。

（2）极大值：具有等可能性的模糊变量的熵值应当最大。

（3）普遍性：熵的应用非常广泛，不仅应当存在于无穷或有限的事件而且还在连续和离散的事件。

为了满足这些条件，Li和Liu[111]提供了一种新的方式来定义模糊熵，用模糊熵来描述信息的模糊性，而这种模糊性正是由于模糊变量的不确定性所引起的。

3.2.1 离散型模糊变量的熵

定义3.2.1.1（Liu and Liu[111]） 设ξ是一个离散的模糊变量，取值为$\{x_1, x_2, \cdots\}$，则熵定义为

$$\mathrm{H}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{S}(\mathrm{Cr}\{\xi = x_i\}) \tag{3-7}$$

这里的$S(t) = -tInt - (1-t)In(1-t)$。

注：（1）很容易证明$S(t)$是一个关于$t = 0.5$对称函数，在$[0, 0.5]$单调递增，在$[0.5,1]$

单调递减，当$t=0.5$时得到最大值$S(t)=In2$，如图3.2：

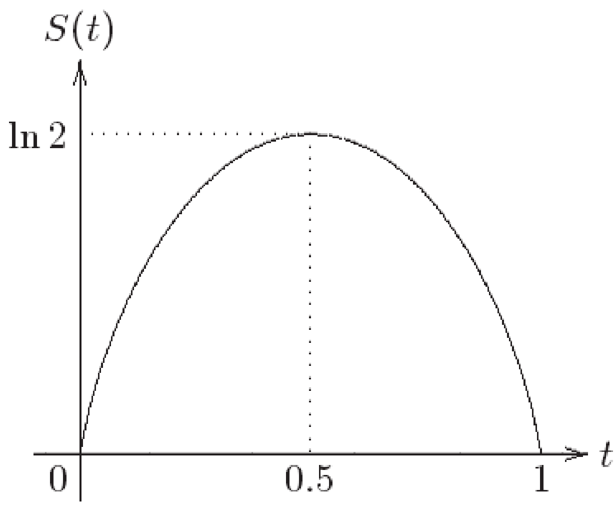

图3.1 函数$S(t)=-tInt-(1-t)In(1-t)$

（2）模糊熵的值只与值的数量和它们的可信性分布有关，与模糊变量实际的值没有关系

定理3.2.1.1 设ξ是取值于$\{x_1,x_2,\cdots\}$的模糊变量，则

$$H[\xi]\geq 0 \tag{3-8}$$

定理3.2.1.2 设ξ是取值于$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的模糊变量，则

$$H[\xi]\leq nIn2 \tag{3-9}$$

3.2.2 连续型模糊变量的熵

定义3.2.2.1（Liu and Liu[111]） 设ξ是一个连续的模糊变量，则熵定义为

$$H(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(Cr\{\xi=x\})dx \tag{3-10}$$

这里的$S(t)=-tInt-(1-t)In(1-t)$。

定理3.2.2.1 设ξ是一个连续模糊变量，则H[ξ]>0

定理3.2.2.2 设ξ是一个取值于$[a,b]$的连续模糊变量，则

$$H[\xi]=(b-a)In2 \tag{3-11}$$

定理3.2.2.3 设ξ是一个三角模糊变量(a,b,c)，则：

$$H(\xi)=(c-a)/2 \tag{3-12}$$

定理3.2.2.4 设ξ是一个梯形模糊变量(a,b,c,d)，则：

$$H(\xi)=(b-a)/2+(c-b)In2+(d-c)/2 \tag{3-13}$$

定义3.2.2.5 设ξ和η是两个连续模糊变量，其隶属度函数为$\mu(x)$和$\nu(x)$，对于$\forall x\in\Re$，当$\mu(x)\le\nu(x)$时，我们有$H[\xi]\le H[\eta]$ （3-14）

定理3.2.2.6设ξ是连续模糊变量,对于任意实数a和b，我们有

$$H[a\xi+b]=|a|H[\xi] \tag{3-15}$$

3.2.3 最大模糊熵原理

定理3.2.3.1设ξ是非负连续模糊变量且有二次矩阵m^2,则

$$H[\xi]\le\frac{\pi m}{\sqrt{6}} \tag{3-16}$$

当ξ是一个指数分布的二次矩阵m^2时，等号成立。

定理3.2.3.2设ξ是非负连续模糊变量且有有限的期望值e和方差σ^2，则

$$H[\xi]\le\frac{\sqrt{6}\pi\sigma}{3} \tag{3-17}$$

当ξ是一个正态分布且期望值e和方差为σ^2时，等号成立。

3.3 模糊熵的风险度量

3.3.1 熵与方差

在经典的马柯维茨均值-方差模型理论中，投资者进行相关投资决策时，需要找到一个最优的投资组合，这个最优的组合能够满足投资者在风险和收益间的平衡，即在一定的风险水平下，尽可能获得最大的利益，或者在一定的收益率水平下，使风险降到最

低。

在一系列的严格的假设条件下（例如用预期收益的概率分布来描述投资项目的收益率），马柯维茨建立了均值-方差模型：

设某个投资项目有n种不同的投资收益，其中，第i种投资的收益序列是r_n，它的预期收益率为E_i，方差是σ_i^2, i=1,2,⋯,N，它在组合中的权重是x_i。则这些项目在投资组合中的权重约束条件必需满足：

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{3-18}$$

投资组合的期望收益E_p和方差σ_p^2分别为：

$$E_p = x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_nE_n = \sum_{i=1}^{n} x_iE_i \tag{3-19}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_j\sigma^2_{ij} \tag{3-20}$$

在（3-20）式中，当$i=j$时，$\sigma_{ij}=\sigma_i^2$为项目的方差；当$i\neq j$时，σ^2_{ij}表示为项目i和j的协方差，所以（3-20）式也可以写成：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_ix_j\sigma^2_{ij} \tag{3-21}$$

（1） 在组合收益为$E_P = E_0$时：

$$\min\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_ix_j\sigma^2_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_iE_i = E_P = E_0 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

（2） 在组合风险$\sigma_p^2 = \sigma_0^2$一定的情况下：

$$\max\ \mathrm{E}_p = \sum_{i=1}^{n} x_iE_i$$

$$s.t.\begin{cases}\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_ix_j\sigma^2{}_{ij}=\sigma_0^2\\ \sum_{i=1}^{N}x_i=1\\ x_i\geq 0,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

模型（1）表示的是：在给定期望收益E_0的情况下，尽可能使投资风险最小。模型（2）表示的是：在可以承受的风险σ_0^2情况下，尽可能使收益最大化。

马柯维茨均值-方差模型把收益率假设成某种我们熟悉的概率分布，用收益法差来度量风险，但在现实中，我们无法准确的用某一种分布函数来描述资金的收益。所以均值-方差模型有着自身的缺陷。这里我们把熵引入模型，熵描述的是收益概率的不确定性，而不是像方差一样，直接描述投资的风险。而且用熵与用方差来描述投资风险有着较大的差别，如表3.3.1所示

表3.1 熵与方差的比较分析

熵	*方差*
熵是对系统整体的度量，而且当知道矩阵约束的条件时，可以推出无偏的概率分布。	方差表示的是随机变量的取值与它的数学期望的偏离程度，是徘徊在随机变量数学期望左右的度量。
熵是对模糊变量概率分布的无偏估计，具有预测未来的作用，这一特性是众多度量方法中特有的。	方差需要依靠历史数据，具有滞后性，无法很好的表示未来的趋势。
用熵度量风险对模糊变量的分布没有要求。	方差度量风险只适合损失的概率分布为对称的时候，当概率分布不是对称的时候，还应该包括高阶矩阵的信息。
熵可以表达风险变量的多阶矩特征，更好的表述风险。	方差只能描述风险变量的二阶矩特征。
熵是单调函数	方差不是单调函数，当实际收益高于期望收益时，会对方差函数进行惩罚。
用熵来表示投资风险不存在复杂的计算，	用方差度量风险，需要计算方差协方差矩

计算方法相对简单。	阵，计算量相当复杂。
熵的表达式只有未知量 p，所以只计算模糊变量 x 的概率分布。	方差的表达式中有模糊变量 x 和 p，可以计算收益和风险，但方差表示正负两种偏差。
信息熵可以对不同的金融系统进行比较。在现有的度量方法中鲜有的	方差度量风险依靠概率分布，无法比较概率不同的金融系统间的数据。

3.3.2 模糊熵与风险度量

不确定性的模糊性存在于很多系统中，商业银行的信贷市场也是这样的一个系统。研究这样的系统，不能仅仅考虑事物的随机性，更要考虑事物的模糊性，事物的模糊性能够更好的描述系统的不确定性，这里我们使用一种新的测度方式，对银行信贷业务进行描述建模，这种具有模糊性的测度我们叫它为模糊熵。它以可信性理论为基础，度量由于变量的模糊性引起的系统不确定性。

设模糊向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 为n种贷款的收益率， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是银行的决策向量，则用模糊熵度量银行贷款的总风险 R：

$$R=\mathrm{x}_1H[\xi_1]+\mathrm{x}_2H[\xi_2]+\cdots+\mathrm{x}_nH[\xi_n]$$

这里的 $S(t)=-tInt-(1-t)In(1-t)$， $H(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}S(Cr\{\xi=x_i\})$ 。

这里用模糊熵对贷款风险进行评价，相对于马柯维茨的均值-方差模型中用方差度量风险，其具有更大的优势。马柯维茨的均值-方差模型中，把收益假设成为随机变量，没有考虑到变量模糊性的存在，在选取历史数据时，忽略了项目周期内的浮动性。例如两个不同的贷款项目，年终收益都是一样的，但是其中一个项目随着时间或者政治的因素在贷款期间，收益会有高低的变化。如果按照马柯维茨的理论，它们的方差是一样的，即它们的风险也是一样的。但是实际情况确是不一样的，随着各种因素而变化收益率的项目具有更大的收益不确定性，风险也就更高。

例如 X ， Y 两个信贷项目，我们设其收益为三角模糊数。 X 项目的收益为模糊数 $(40,60,80)$， Y 项目的模糊收益为 $(50,60,70)$，它们的收益率概率分布一样，但模糊数的宽度不一样。我们把产生这种情况的原因归结为两种项目的最终收益相同但收益波动不同， X 的波动要大于 Y 。我们假设 X 和 Y 的概率分布已知，则 X 和 Y 隶属度如下表

3.3.2所示：

表3.2 X 与 Y 项目的概率分布和隶属度分布表

收益率	*概率分布*	*X 项目隶属度*	*Y 项目隶属度*
0.1	0．3	0.5	0
0.2	0.2	0.75	0.5
0.3	0.2	1	1
0.4	0.3	0.75	0.5

根据马柯维茨的方差理论，这两个项目因为概率分布一样，所以方差也是一样的，即风险程度也是相同的。这种情况下，所有利用概率分布度量风险的方法都会失效。因为模糊熵不用考虑概率分布，所以我们可以用模糊熵进行度量。$H(X) > H(Y)$,表明 X 项目比 Y 项目更加不确定，风险更高，与实际情况相符。

第 4 章　基于模糊熵的投资组合模型

4.1　变量假设

在商业银行信贷业务的市场中，存在着各式各样的不确定性。在研究初期，大量学者只注意到了市场的随机性，忽略了模糊性的存在，他们把投资的收益率设置成随机变量，利用概率论的相关理论去解答投资组合的有关问题。随着研究的不断进行，许多学者发现了用随机变量来表示资金收益率的缺陷，即如果收益率概率分布相同，则无法进行风险的比较分析。Zadeh首先建立了模糊集和模糊数学理论，使得模糊理论登上历史的舞台，模糊不确定性得以被大家认可。随着模糊理论的不断发展，许多学者发现可以把模糊数学引入实际的经济问题当中，他们开始利用模糊变量来描述资金的收益率，从而收益的不确定性可以被量化。

这里我们把商业银行资金的未来收益率设置为模糊向量。用模糊向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 表示贷款资金收益率的组成向量。

4.2　建立模型

4.2.1　预期收益

我们把资金的收益率假设成模糊向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为资金使用的决策向量。则预期收益为：

$$\mathrm{E}[\xi]=[\mathrm{x}_1\xi_1+\mathrm{x}_2\xi_2+\ldots+\mathrm{x}_n\xi_n] \tag{4-1}$$

$$E(\xi)=\int_0^{\infty}Cr\{\xi\geq r\}dr-\int_{-\infty}^{0}Cr\{\xi\leq r\}dr$$

4.2.2　组合风险满意度

同样的资金收益率假设成模糊向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为资金使用的决策向量。我们利用模糊熵进行风险的度量，则：

$$\mathrm{H}[\xi]=\mathrm{x}_1\mathrm{H}[\xi_1]+\mathrm{x}_2\mathrm{H}[\xi_2]+\ldots+\mathrm{x}_n\mathrm{H}[\xi_n] \tag{4-2}$$

4.2.3 风险分散满意度

由 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 决策向量所决定的组合在非共线的情况下，我们得到的有效解（或者称为非劣解）可能会把所有的资金都集中在一个或者几个项目中，或者是两个项目的一个线性组合。这样的话与我们起初设想把资金分散投资从而规避风险的思路背道而驰，所以我们引入信息熵理论，利用信息熵判定贷款资金的不确定性，即

$$\mathrm{V}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iH(\xi_i)}{H(\xi)}In\frac{x_iH(\xi_i)}{H(\xi)} \tag{4-3}$$

V 是一个信息熵函数，我们求得每个资金的风险占整个组合总风险的比例。信息熵表示的系统中信息的确定程度，熵值越大表示某个决策下资金的信息总量越少，不确定性越高；熵值越小表示某个决策下资金的信息总量越多，不确定性越低。我们用资金的风险比例替代其概率分布，这么做的目的是用新的信息熵函数表示风险比例的不确定性，在构建的模型中，代表着风险信息来源的不确定性。贷款组合模型中风险分布来源越确定，我们求得的熵值越小，投资越集中；风险分布来源越不确定，我们求得的熵值越大，投资越分散。即我们应该极大化信息熵函数 V 。

4.2.4 建立基于模糊熵的贷款投资组合模型

我们把公式（1）（2）（3）记为W_1,W_2,W_3，其中W_1表示银行对于组合收益的满意度，W_2表示贷款组合风险满意度，W_3表示贷款风险分布的不确定程度，即组合分散满意度。$W_0=W_2+W_3$，W_0表示组合风险综合满意度。我们根据银行对风险的喜好，分配W_2,W_3在W_0的比例。

我们设$W_0=\lambda W_2+(1-\lambda)W_3$，$\lambda\in[0,1]$，我们把$\lambda$叫做风险比例系数，表示组合风险满意度与组合分散满意度在组合综合风险满意度的比例。现实中，在中央银行宏观调控下，不同时期银行采取的贷款政策也不同，所以我们可以根据实际情况调节λ的取值。λ

越小表示银行更希望用较多的贷款项目来分散风险。λ越大表示银行希望可以用一个或几个风险较低的项目组合贷款，从而达到分散风险的目的。现实生活中，如果银行对贷款人或者贷款项目进行了充分的调查，获得的信息越多越可靠，则λ值一般较大，因为了解的信息充分且掌握的数据可靠，银行可以考虑通过选择较少具有高收益的项目进行贷款，把收益较低且风险高的项目在组合中剔除；当银行无法确切的了解贷款人或贷款项目时，则可以把λ设的较低，因为无法通过数据或者信息做出确定性的判断，只能通过选取较多的项目进行组合贷款，从而达到使风险降到最低的目的。当λ取值1时，银行只能通过把贷款均匀分布在每个贷款项目规避风险。

$$W_1 = E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n] \tag{4-4}$$

$$W_2 = x_1 H[\xi_1] + x_2 H[\xi_2] + \cdots + x_n H[\xi_n] \tag{4-5}$$

$$W_3 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i H(\xi_i)}{H(\xi)} In \frac{x_i H(\xi_i)}{H(\xi)} \tag{4-6}$$

（1）银行如果想在贷款组合综合风险不高于理想中风险S_0的条件下，极大化贷款组合的收益，则可以建立如下的模糊熵模型：

$$\begin{cases} \max\ \mathrm{W}_1 \\ s.t. \\ W_0 = \lambda W_2 + (1-\lambda) W_3 \le S_0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_i \ge 0,\ \mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}\ 且\ \lambda \in [0,1] \end{cases} \tag{4-7}$$

（2）银行如果想在期望收益率s_0一定的情况下，极小化贷款组合综合风险，则可建立如下模糊熵模型：

$$\begin{cases} \min\ W_0 = \lambda W_2 + (1-\lambda) W_3 \\ s.t. \\ W_1 \ge s_0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_i \ge 0,\ \mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}\ 且\ \lambda \in [0,1] \end{cases} \tag{4-8}$$

其中$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$为决策向量，模糊向量$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$是$n$种投资的收益率组成的向量，$\lambda$是风险比例系数。$S_0$表示银行可以接受的最高风险等级，$W_0 = \lambda W_2 + (1-\lambda) W_3 \le S_0$表示在任何收益情况下风险程度都不会大于$S_0$。$s_0$表示银行可

以接受的最低收益，$W_1 \geq s_0$ 表示在任何风险等级中最低收益都不会低于 s_0。

4.3 模型求解

模糊模拟以模糊变量乐观值、可能性和可信性等概念的定义为基础，根据可能性和可信性度量的运算法则，依据隶属度函数、密度函数对模糊变量的可能取值，进行大量的随机抽样调查，最终求得相对应模糊事件可信性或最优值的一门技术。虽然模糊模拟所求得值是估计值并非是准确的值，但凭借模糊模拟技术可以简单的求得所有模糊变量的关键值。所以，当模糊决策模型无法转化为清晰的等价类时，用传统的方法无法进行求解，我们可以依靠模糊模拟的方法获得模糊优化模型的最优解。

遗传算法是由Holland[112]首先提出的,它的基础是生物界适者生存的法则，依靠自然遗传原则和自然选择对群体进行相关搜索并交换群体间的信息，从第一组初始的群进行解的迭代，一步步淘汰掉不好的解，产生更好的解，一直到满足某些约束条件为止。多年的实验表明，遗传算法的搜索不应当仅仅局限于局部极值，该算法的优点是，算法复杂度低、收敛速度较快、计算时间短，能够快简捷的求得复杂的优化问题。所以，我们接下来借鉴姚绍文的方法，把遗传算法与模糊模拟相结合，设计了基于模糊模拟的遗传算法对我们构建的基于模糊熵的贷款组合模型进行求解。

为了让我们描述起来方便，我们用模型的 ξ 表示模糊向量，ξ_i 表示模糊变量，x 表示决策向量，n 表示模糊变量的数量，$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为了求得模型的解，我们必须计算出如下的两类函数的值来：

$$U_1 : x \to Cr\{f(x, \xi) \geq 0\}$$

$$U_2 : x \to \max\{\bar{f} \mid \mathrm{Cr}\{\mathrm{f}(x, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \alpha\}$$

由可信性测度的定义，我们可以求得第一类函数 $\mathrm{Cr}\{\mathrm{f}(x,\xi) \geq 0\}$ 的值：

$$\mathrm{Cr}\{\mathrm{f}(x,\xi) \geq 0\} = \frac{1}{2}(\max_{1 \leq k \leq n}\{\mu(\mu_k) \mid f(x, \mu_k) \geq 0\} + \min_{1 \leq k \leq n}\{1\text{-}\mu(\mu_k\} \mid f(x, \mu_k) < 0\})$$

步骤　0：设置参数 pop_size（种群的规模），p_m（变异的概率），p_c（交叉的概

率）。

步骤　1：产生 pop_size 个初始染色体 $C_1,\cdots,C_{pop\_size}$。在这个过程中为了确保模型的可行解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 符合约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，染色体 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 和 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的转换关系是 $x_i=\dfrac{c_i}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$ 其中，$c_i\in[0,1]$，i=1,2,⋯,n。通过模糊模拟检查染色体的可行性，在这些染色体中，为了求得 $Cr\{x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n\le r\}$，从 Θ 中随机性的生成 θ_k，满足 $Cr(\theta_k)\ge\dfrac{\varepsilon}{2}$，记 $\mathrm{v_k}=(2\mathrm{Cr}\{\theta_k\})\mathrm{L}\ 1$，并生成 $\xi(\theta_k)$，$k=1,2,\mathrm{L}\ ,N$，ε 是充分小的数，N 是充分大的数，则：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cr}\{x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n\le r\}\\
&=\frac{1}{2}(\max_{1\le k\le n}\{\nu_k|\ \mathrm{x}_1\xi_1(\theta_k)+\mathrm{x}_1\xi_1(\theta_k)+\cdots+\mathrm{x}_1\xi_1(\theta_k)\le r\}\\
&+\min_{1\le k\le n}\{1\text{-}\nu_k|\ \mathrm{x}_1\xi_1(\theta_k)+\mathrm{x}_1\xi_1(\theta_k)+\cdots+\mathrm{x}_1\xi_1(\theta_k)>r\})
\end{aligned}
$$

步骤　2：求得全部染色体的目标函数值。其中计算 $E[x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n]=E(f(X,\xi))$ 的模糊模拟算法如下：

Step 1.　置 $\lambda=0,k=1$。

Step 2.　在 Θ 中随机产生 θ_k，满足条件 $Cr\{\theta_k\}\ge\dfrac{\varepsilon}{2}$，记 $\nu_k=(2Cr\{\theta_k\})\cdots1$，并产生 $\xi(\theta_k),k=1,2,\cdots,N$，其中，$\varepsilon$ 是充分小的数，N 是充分大的数。

Step 3.　令 $a=f(X,\xi(\theta_1))\wedge f(X,\xi(\theta_2))\wedge\cdots\wedge f(X,\xi(\theta_N))$

$b=f(X,\xi(\theta_1))\vee f(X,\xi(\theta_2))\vee\cdots\vee f(X,\xi(\theta_N))$。

Step 4.　在 $[a,b]$ 中随机产生 r。

Step5.　若 $r\ge0$，则：

$$\lambda=\lambda+\frac{1}{2}(\max_{1\le x\le N}\{\nu_k|\ f(X,\xi(\theta_k)\}\ge r\}+\min_{1\le x\le N}\{1-\nu_k|\ f(X,\xi(\theta_k)\}<r\}$$

若 $r<0$，则：

$$\lambda=\lambda-\frac{1}{2}(\max_{1\le x\le N}\{\nu_k|\ f(X,\xi(\theta_k)\}\le r\}+\min_{1\le x\le N}\{1-\nu_k|\ f(X,\xi(\theta_k)\}>r\}\text{。}$$

Step 6.　重复Step4和Step5共计 N 次。

Step 7. $E[f(X,\xi)] = a \vee 0 + b \wedge 0 + \lambda(b-a)/N$

步骤 4：经过旋转赌轮，选择染色体。

步骤 5: 让染色体经历交叉与变异。

步骤 6: 重复步骤2—步骤5，一直到满足终止条件。

步骤 7: 把最好的染色体当作最优解，并通过相应转换得到符合模型的最优解。

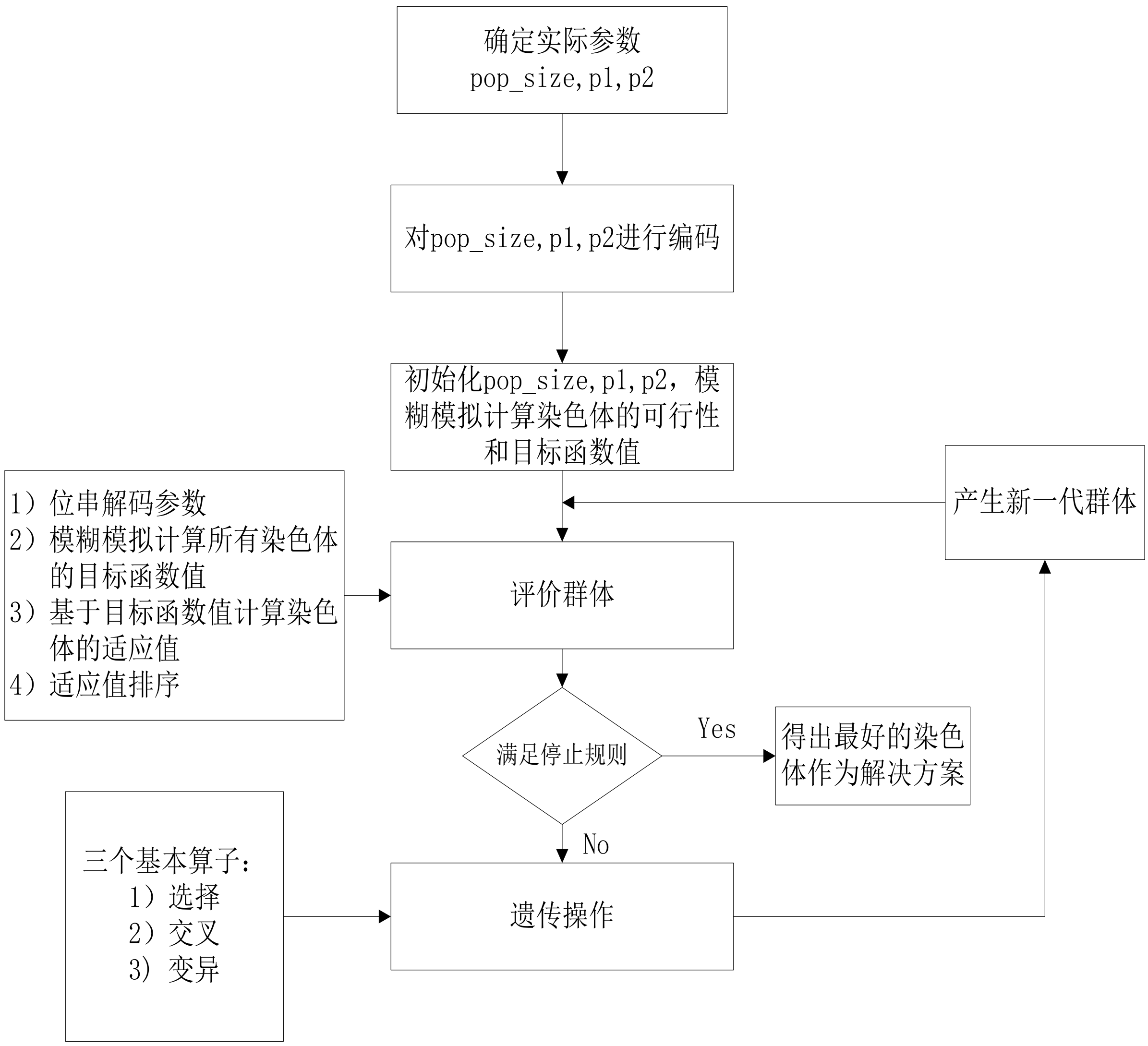

图4.1 混合智能算法流程图

第 5 章　基于模糊熵的贷款组合决策模型算例研究

5.1　模糊模拟

5.1.1　实验环境

（1）硬件配置:处理器是Intel(R) Inter Core(TM)2 Duo CPU T6600 2.00GHz，1G内存，320G硬盘。

（2）软件环境：操作系统是Windows 7专业版，数据库版本SQL Server 2006，利用C语言编程来实现测试算法。

5.1.2　实验算例

变量 N 对模糊模拟的精确度有很大的影响.通常来说，一个较大的值经过长时间的电脑计算，可以获得更准确的值。因为当我们用模糊模拟的方法解决组合模型问题时精确度和计算时间都很重要，所以找到可以获得最优解时 N 的最小值是很重要的。

算法5.1 假设模糊变量 ξ 和可信性函数 ν 。随机产生一个可信性函数 ν_i 的模糊向量 y_i i=1,2,⋯,N，根据熵的定义，我们可以模糊模拟得出 $S(\nu(x))$ 的值。步骤如下：

步骤一 设置 $h=0$ 和 $k=0$ 。

步骤二 随机产生基于可信性函数 ν_i 的模糊向量 y_i i=1,2,⋯,N

步骤三 计算得出最大值和最小值

$$a=\min\{\langle f(x,y) | 1\le i\le N\rangle\} \quad b=\max\{\langle f(x,y) | 1\le i\le N\rangle\}$$

步骤四 计算 $s_k=-\nu_k In\nu_k-(1-\nu_k)\,\mathrm{In}(1-\nu_k)$ 。

步骤五 设 $h\to h+s_k$ 。当时 $k<N$ ， $k=k+1$ 且回到Step4。

步骤六 返回熵的值 $h(b-a)/N$ 。

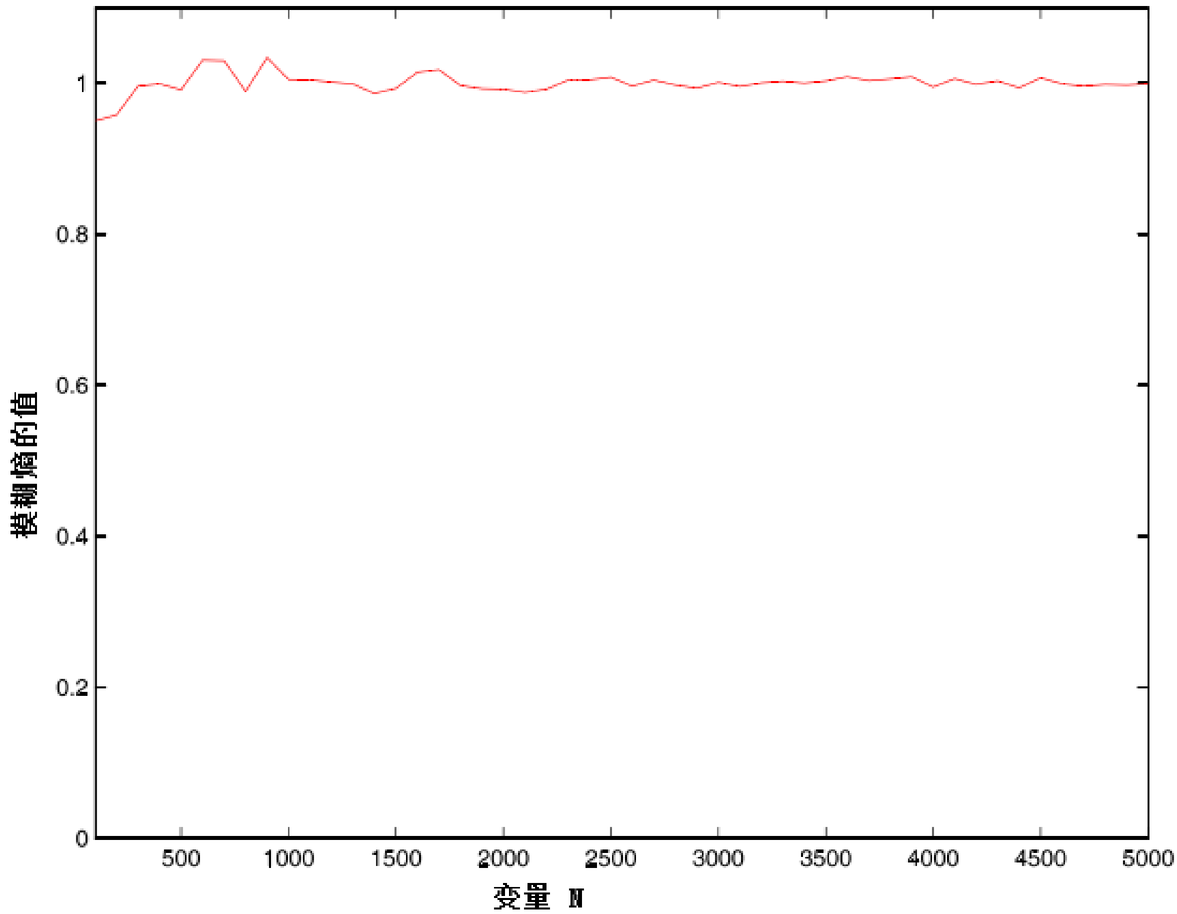

图5.1 模糊熵与变量N的关系

例5.1 设模糊变量 $\xi(1,2,3)$，应用算法5.1，我们设置变量 N 分100步由100变化到5000，研究熵的收敛性，结果如图5.1所示。表明当 $N \geq 2000$ 时，模糊模拟的结果与准确值相一致 $H[\xi]=1$。

例5.2 设置 $N=2000$，应用算法5.1计算20个模糊变量，其中包括等可能性模糊变量、三角模糊变量、梯形模糊变量、指数模糊变量、正态模糊变量。我们用表5.1记录了结果，与精确值进行了比较。平均错误率为0.54%。说明了模糊模拟算法可以获得令人满意的近似熵的值。

表5.1 模糊模拟的熵值

模糊变量	*模糊值*	*精确值*	*相关错误*
(0.0,0.1)	0.6931	0.6931	0.0000
(3.5,7.8)	2.9803	2.9805	0.0001

(-1.0,2.0)	2.0794	2.0794	0.0000
(-50,-10)	27.7233	27.7259	0.0001
(1.5,3.0,4.1)	1.2833	1.300	0.0128
(15,20,25)	4.9387	5.0000	0.0123
(35,50,60)	12.5234	12.5000	0.0019
(-0.3,1.8,2.3)	1.3017	1.3000	0.0128
(10,25,30,45)	1.5867	1.6193	0.0201
(3.1,4.2,4.5,6.0)	1.5002	1.5079	0.0051
(2.4,3.6,3.7,5.6)	4.0464	4.0763	0.0073
(1.0,2.0,3.0,4.0)	1.6843	1.6931	0.0052
N(6.0,1.3)	3.3310	3.3346	0.0011
N(2.5,1.0)	2.5688	2.5651	0.0014
N(1.5,1.0)	2.5464	2.5651	0.0073
N(3.7,2.1)	5.4003	5.3867	0.0025
E(7.6)	9.7563	9.7474	0.0009
E(3.5)	4.4391	4.4889	0.0111
E(1.0)	1.2907	1.2825	0.0063
E(1.3)	1.6476	1.6673	0.0118

例5.3 设置 $N=2000$，应用算法5.1计算50次三角模糊变量 $\xi=(-0.3,1.8,2.3)$ 的熵值。结果记录在表5.2。与精确值对比，相关错误变化幅度从0.00%到0.50%。实验得出，当我们对相同模糊变量进行多次模糊模拟时，模糊模拟得出的熵值可能会不一样。

表5.2 模糊变量 $\xi=(-0.3,1.8,2.3)$ 20次模糊模拟的熵值

	模糊模拟值	*错误*		*模糊模拟值*	*错误*
1	1.2955	0.0035	26	1.2961	0.0030
2	1.3015	0.0011	27	1.2963	0.0029
3	1.2994	0.0005	28	1.3012	0.0009
4	1.2991	0.0007	29	1.2987	0.0010

5	1.2936	0.0050	30	1.3023	0.0017
6	1.2995	0.0004	31	1.3007	0.0006
7	1.2993	0.0005	32	1.2992	0.0006
8	1.3013	0.0010	33	1.3026	0.0020
9	1.3004	0.0003	34	1.3016	0.0013
10	1.2944	0.0043	35	1.3043	0.0033
11	1.2984	0.0012	36	1.2974	0.0020
12	1.2992	0.0006	37	1.3002	0.0001
13	1.3025	0.0019	38	1.3010	0.0008
14	1.3015	0.0011	39	1.2990	0.0008
15	1.3043	0.0033	40	1.3016	0.0012
16	1.3033	0.0025	41	1.3017	0.0013
17	1.2938	0.0048	42	1.2956	0.0041
18	1.2989	0.0008	43	1.3049	0.0038
19	1.3014	0..0011	44	1.3029	0.0022
20	1.3036	0.0028	45	1.3026	0.0020
21	1.3047	0.0036	46	1.3004	0.0003
22	1.3013	0.0010	47	1.2994	0.0005
23	1.2951	0.0038	48	1.3009	0.0007
24	1.3016	0.0012	49	1.3006	0.0005
25	1.2962	0.0030	50	1.3002	0.0001

5.2 混合智能算法

例5.4 在这个例子中我们有银行的四个投资项目$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$，取值如表5.3所示。我们假设银行的期望收益为1.4，则如何进行决策。

表5.3 贷款项目的模糊收益

项目	*模糊收益*
1	（-0.3,1.8,2.3）
2	(-0.4,2.0,2.2)
3	N(1.3,0.8)
4	N(1.5,1.2)

根据模糊熵的贷款组合模型，我们建立模型如下：

$$W_1 = E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4]$$

$$W_2 = x_1 H[\xi_1] + x_2 H[\xi_2] + x_3 H[\xi_3] + x_4 H[\xi_4]$$

$$W_3 = -\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i H(\xi_i)}{H(\xi)} In \frac{x_i H(\xi_i)}{H(\xi)}$$

$$\begin{cases} \min \ W_0 = \lambda W_2 + (1-\lambda) W_3 \\ s.t. \\ W_1 \geq 1.4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \ \text{i=1,2,}\cdots\text{,n 且} \ \ \lambda \in [0,1] \end{cases}$$

我们设 $N = 3000, G = 30, P_c = 0.4, P_m = 0.2$ 且 $pop\_size = 100$，经过4..3节混合智能算法解得：

（1）当 $\lambda = 0$ 时， $X_1 = 0$, X_2=0.2618 X_3=0 X_4=0.7382 $H(\xi) = 6.5673$

（2）当 $\lambda = 1$ 时， $X_1 = 0.1281$, X_2=0.1640 X_3=0.1032 X_4=0.6067 $H(\xi) = 6.2707$

实例表明，λ 值越大我们选择的贷款项目数越多，由于模糊熵概率分布的不确定性，表明信息的不确定程度高，我们只能选择较多的项目来规避风险。相反，λ 值越小，信息不确定程度低，我们可以选择收益较高的项目进行组合贷款。

例5.5 假设有10种贷款方案 $\xi_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \cdots 10$ 如表5.4所示。银行可以接受的最大风险等级为1.65。我们应该在风险等级不超过1.65的同时极大化期望的收益，我们得到如下模型：

$$W_1 = E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_{10}\xi_{10}]$$

$$W_2 = x_1H[\xi_1] + x_2H[\xi_2] + \cdots + x_{10}H[\xi_{10}]$$

$$W_3 = -\sum_{i=1}^{10} \frac{x_iH(\xi_i)}{H(\xi)} In \frac{x_iH(\xi_i)}{H(\xi)}$$

$$\begin{cases} \max\ \mathrm{W}_1 \\ s.t. \\ W_0 = \lambda W_2 + (1-\lambda)W_3 \le 1.65 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 1 \\ x_i \ge 0,\ \mathrm{i=1,2,}\cdots\mathrm{,10}\ 且\ \ \lambda \in [0,1] \end{cases}$$

我们设 $N = 3000, G = 30, P_c = 0.3, P_m = 0.5$且$pop_size = 30$，经过4..3节混合智能算法解得：

（1） 当$\lambda = 0$时， max E[X]=2.06 如表5.5。

（2） 当$\lambda = 1$时， max E[X]=1.95 如表5.6。

表5.4 模糊收益率

项目	*模糊收益*	*项目*	*模糊收益*
1	(-0.2,2.1,2.5)	6	(-0.2,2.5,3.0)
2	(-0.1,1.9,.3.0)	7	(-0.2,3.0,3.5)
3	(-0.4,3.0,4.)	8	(-0.4,2.5,4.0)
4	(-0.5,2.0,2.5)	9	(-0.3,2.8,3.2)
5	(-0.7,3.0,4.0)	10	(-0.3,2.0,2.5)

表5.5 贷款比例

项目	*贷款比例%*	*项目*	*贷款比例%*
1	0.00	6	0.00
2	0.00	7	64.73
3	0.00	8	0.00
4	35.27	9	0.00
5	0.00	10	0.00

表5.6 贷款比例

项目	*贷款比例%*	*项目*	*贷款比例%*
1	14.47	6	11.58
2	0.00	7	47.85
3	0.00	8	0.00
4	26.10	9	0.00
5	0.00	10	0.00

第六章　总结与展望

本文以可信性理论与熵理论为基础，研究了模糊变量、信息熵以及模糊熵在贷款组合决策模型中的应用，建立了基于模糊熵的贷款组合决策模型。文章主要从三个方面进行了研究。

首先介绍了可信性理论，介绍了可信性的定义、模糊变量的定义、模糊变量的性质、可信性分布、密度函数、三角模糊变量和梯形模糊变量的期望等有关的概念。需要指出的是，模糊变量与随机变量是有区别的，模糊变量更擅长于描述事物的模糊度，所以模糊变量与现实中银行贷款的收益率更加贴近。

其次我们介绍了信息熵和模糊熵理论，给出模糊熵和信息熵的独有性质并与方差度量风险进行了对比分析。分析表明，信息熵与模糊熵可以更好的描述贷款中的风险，具有计算简便、适用范围更广的有点。

最后我们建立了基于模糊熵的投资组合决策模型，并给出了求解模型的混合智能算法。在后面我们列举了实例，分析了模型的具体应用。

本文所做工作进一步完善了模糊熵和信息熵的具体应用，使贷款组合模型得到丰富。

本课题研究的后续工作应该从以下方面开展。

首先，可以找到更多模糊变量熵的等价形式，把模型中的模糊熵转化为其等价形式，利用线性规划的方法求解模型，得出的解与模糊模拟得出的解进行比较分析，确定此方法的可行性与准确性。

其次，与其它决策模型做比较，找出模型的优缺点，进一步完善模型。

参考文献

[1].Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance,1952(7):77-91

[2]Sharpe W F. A simplified model for portfolio analysis[J]. Management Science,1963(9):277-293

[3]Mao J C T. Models of capita budgeting, E-V vs E-S[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1970(5):657-675

[4]Samuelson P. The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means variances and higher moments[J]. Review of Economic Studies, 1958(25):65-86

[5]吴恒煜,李冰,严武. 投资组合信用风险的测度和优化—基于Copula理论[J]. The Journal of Portfolio Management, 1993,19(2):39-46

[6]刘艳萍,王婷婷，迟国泰. 基于风险价值约束的贷款组合效用最大化优化模型[J]. 系统管理学报, 2009,2:121-129

[7]Gollinger T L, Morgan J B. Calculation of an Efficient Frontier for a Commercial Loan Portfolio Management, 1993,19(2):39-46

[8]Uryasev S T, Theiler U A, Serraino G.. Risk—return Optimization with Different Risk—aggregation Strategies[J]. Journal of Risk Finance, 2010,11(1):129-146

[9]Churlzu L, Sherali H D, et al. Portfolio Optimization by Minimizing Conditional Value at Risk via Nondifferentiable Optimization[J]. Computational Optimization and Application, 2010,46(3):391-415

[10]Zhu S, Fukushima M, Worst-case Conditional Value-at-Risk with Aplication to Robust Portfolio Management[J]. Operations Research, 2009,67(5):1155-1168

[11]Ma X X, Zhao Q Z, Qu J L. Robust portfolio Optimization with a Generalized Expected Utility Model under Ambiguity[J]. Annals of Finance, 2008,4(4):431-444

[12]唐万生，梁建峰，韩其恒. 组合证券投资的概率准则模型[J]. 系统工程学报，2004, 19(2):193-197

[13]迟国泰，姜大治，唐万生. 基于VaR收益率约束的贷款组合优化决策模型[J]. 中国管理科学, 2002, 10(6):1-7

[14]马永开，唐小我. 不允许卖空的 β 值证券投资决策模型研究[J]. 管理工程学报，

1999(4):1-4

[15]荣喜民，张喜彬，张世英．组合证券投资模型研究[J]．系统工程学报，1998, 13(1):81-88

[16]杨桂元，唐小我．不允许卖空的组合证券投资决策方法研究[J]．运筹于管理，1998, 7(4):19-25

[17]张鹏．均值—平均绝对偏差投资组合模型与优化[J]．统计与决策, 2009, 1:14-15

[18]屠新曙，王键．现代投资组合理论的若干进展[J]．系统工程, 1999, 17(1):1-5

[19]杨慧煌．带有β约束的收益率极大化证券组合优化模型[J]．预测, 1998(4):49-51

[20]史本山，文忠平．β约束条件下的证券组合风险决策[J]．预测, 1996(5):54-56

[21]张焕明，闵向阳．证券投资组合模型研究[J]．运筹于管理, 1999, 8(4), 12:48-51

[22]伍仕刚，孟宪丽，胡子昂．投资组合模型[J]．数学的实践与认识, 1999, 29(1):15-18

[23]郭福华，邓飞其．动态半绝对离差投资组合选择模型[J]．系统工程，24(9), 2006(9):68-73

[24]陈收，刘卫国，汪寿阳．融资约束条件下投资组合有效边界研究[J]．预测，2000(1):38-40

[25]郭福华，彭大衡，吴健雄．机会约束下的均值-VaR投资组合模型研究[J]．中国管理科学, 2004(2):28-34

[26]李磊，倪明放．含交易费用和机会约束的均值-VaR投资组合模型[J]．统计与决策，2007(8):161-163

[27]马树才，张世宏，张虹．证券组合投资理论及实证分析[M]．沈阳东北大学出版社，2000

[28]徐绪松，侯成琪．非正态稳定分布条件下的投资组合模型:均值-尺度参数模型[J]．系统工程理论与实践, 2006(9):1-9

[29]程娇翼，向东进．遗传算法在投资组合模型中的应用[J]．统计与信息论坛，2008(5):65-70

[30]林丹，李小明，王萍．用以遗传算法求解改进的投资组合模型[J]．系统工程，2005(8):68-72

[31]陈铁英，张忠桢．自融资均值方差投资组合模型的旋转算法[J]．系统工程理论与实践, 2004(6):98-103

[32]王文智，张霞文. 蚂蚁算法的投资组合模型[J]. 统计与决策, 2005(7):15-17

[33]徐绪松，陈彦斌. 绝对离差证券组合投资模型及其模拟退火算法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3):80-85

[33]朱小梅，郭志钢，扬先凤. 基于遗传算法BP神经网络优化证券组合投资[J]. 江汉大学学报（自然科学版）, 2005, 33(3):47-50

[34]徐咏梅，钟拥军. Markowiz模型的遗传模拟退火算法[J]. 统计与决策, 2007(6):15-16

[36]Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965(8):338-353

[37]Inuiguchi M.,Tanino T. Portfolio selection under independent possibilistic information[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000,115:83-92

[38]Tanaka H.,Guo P.& Turksen I.B. Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000,111:387-397

[39]Tanaka H.,Guo P. Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions[J]. European Journal of Operational Research, 1999,114:115-126

[40]Carlsson C., Fuller R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001,122(1):315-326

[41]Zhang W. G., Wang Y. L.& Chen Z. P. etal. Possibilistic mean-variance models and efficient frontiers for portfolio selection problem[J]. Information Sciences, 2007,177:2787-2801

[42]Charnes A., Cooper W. W. Chance-constrained programming[J]. Mangement Science, 1959,6:73-79

[43]Liu B. Theory and practice of uncertain programming[M]. Physica-Verlag, Heodelberg, 2002

[44]Liu B., Liu Y. K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2002,10:445-450

[45]Liu B. Uncertainty theory: an introduction to its axiomatic foundations[M]. Berlin:Springer-Verlag, 2004

[46]Huang X. X. Fuzzy chance-constrained portfolio selection[J]. Applied Mathematics and Compution, 2006,177:500-507

[47]宁玉富，唐万生，严维真. 商业银行贷款组合优化决策的机会准则模型[J]. Computer Engineering and Applications, 2008,44(21):235-237

[48] Huang X. X. Portfolio selection with fuzzy returns[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2007,18(4):382-390

[49]Huang X. X. Risk curve and fuzzy portfolio selection[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008,55:1102-1112

[50]Li J., Xu J. A novel portfolio selection model in a hybird uncertain enviroment[J]. Omega- Internationl Journal of Management Science, 2009,37(2):439-449

[51]Qin Z., Li X., Ji X. Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009,228(1):139-149

[52]许若宁，李楚霖. 收益率为模糊数的投资组合问题的讨论[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(4):100-105

[53]张世英，王东. 基金投资行为及其监管的模糊随机理论研究[J]. 管理科学学报, 2002, 3(1):59-65

[54]Kwakerneak H. Fuzzy random variable I[J]. Information Science, 1978,15:1-29

[55] Kwakerneak H. Fuzzy random variable II[J]. Information Science, 1979,17:253-278

[56]曾建华，汪寿阳. 一个基于模糊决策理论的投资组合模型[J]. 系统工程理论与实践, 2003(1):99-104

[57]秦学志，吴冲锋. 模拟随即风险偏好下的证券投资组合选择方法[J]. 管理科学学报, 2003, 6(4):73-76

[58]梁素红. 组合投资数学模型发展的研究[D]. 长春:吉林大学, 2011

[59]陈国华. 模糊投资组合优化研究[D]. 长沙:湖南大学, 2009

[60]Brissaud, J.B. The meanings of entropy[J]. Entropy 2005, 7, 68–96.

[61]Philippatos, G. C., Wilson. C. J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios[J]. Appl. Econ, 1972, 4, 209–220

[62]Xu, J.P., Zhou. X.Y., Wu. D.D. Portfolio selection using λ mean and hybrid entropy[J]. Ann. Oper. Res, 2011, 185:213–229.

[63]Usta. I., Kantar. Y. M. Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection[J]. Entropy, 2011, 13:117–133

[64]Jana. P., Roy. T. K., Mazumder. S. K., Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. J. Comput[J]. Appl. Math, 2009, 228:188–196

[65]Zhang. W. G.., Liu. Y. J., Xu. W. J. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for

multi-period portfolio selection with transaction costs[J]. Oper. Res, 2012, 222:341–349

[66]Zhou. R. X., Wang. X. G., Dong. X. F, Zong. Z. Portfolio selection model with the measures of information entropy-incremental entropy-skewness[J]. Adv. Inf. Sci. Service Sci., 2013, 5: 853–864

[67]Smimoua. K., Bector. C. R., Jacoby. G. A subjective assessment of approximate probabilities with a portfolio application[J]. Res. Int. Bus. Finance, 2007, 21:134–160

[68]Huang. X. X.,Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection[J]. IEEE Tran. Fuzzy Syst, 2008,16:1096–1101

[69]Rödder. W., Gartner. I. R., Rudolph. S. An entropy-driven expert system shell applied to portfolio selection[J]. Expert Syst, 2010, 37:7509–7520

[70]Gulko. L. Dart boards and asset prices introducing the entropy pricing theory[J]. Adv. Econom, 1997,12:237–276

[71]Gulko. L. The entropy theory of stock option pricing[J]. Int. J. Theoretical Appl. Finance, 1999, 2:331–355

[72]Gulko. L. The entropy theory of bond option pricing[J]. Int. J. Theoretical Appl. Finance, 2002, 5:355–383

[73]Buchen. P. W., Kelly. M. The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices[J]. J. Financ. Quant. Anal, 1996, 31:143–159

[74]Neri. C., Schneider. L. Maximum entropy distributions inferred from option portfolios on an asset[J]. Finance Stochast, 2012, 16:293–318

[75]Kullback. S. Leibler. R. A. On information and sufficiency[J]. Ann. Math. Stat, 1951, 22:79–86

[76]McCauley. E. and J. Racine. Entroy and Predictability of Stock Market Returns[J]. Journal of Econonmetrics, 2002, 107:291-313

[77]姜继娇，杨乃定．基于管理熵的机构投资者集成风险预警模式研究[J]．财经研究，2004,30(3):85-93

[78]张继国，朱永忠．模糊性的信息上度量[J]. 2001, 15(4):16-21

[79]李华，何东华，李兴斯．熵—证券投资组合风险的一种新的度量方法[J]．数学的实践与认识, 2003, 33(6):16-21

[80]李江涛，王建国，马晓波．熵风险下的国内证券投资组合模型[J]．商业经济，2009,

11:64-63

[81]王俊，周煦，叶中行．投资组合分散风险能力的度量及应用[J]．宁夏大学，2004, 25(2):134-137

[82]张阚，丰雪．最大熵分布在投资组合中的应用研究[J]．沈阳农业大学，2007, 38(6):881-884

[83]陈华，廖小莲．均值熵投资组合模型的模糊两阶段解法[J]．第八届中国不确定系统年会论文集, 2010:101-104

[84]Kaufumann A. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. New York: Academic Press, 1975

[85]Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences, 1975, 8:199-251

[86] Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibiliy. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1:3-28

[87]Nahmias S. Fuzzy variable. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1:97-110

[88]Dubois D. and Prade H. Possibility Theory: An Approach to Computeized Processing of Uncertainty. New Yourk: Plenum, 1988

[89]Dubois D. and Prade H. Fuzzy numbers: An overview. Analusis of Fuzzy Information, 1988, 2:3-39

[90]Li X., and Liu B. A sufficient and cecessary condition for credibility measures, International Journal of Uncertainty[B]. Fuzziness & Knowledge-Based Systems, 2006,Vol. 14, No.5, 527-535

[91]Zadeh L. A. A theory of approximate reasoning, In: J Hayes, D Michie and RM Thrall, eds[J]. Mathematicak Frontiers of the Social and Policy Sciences, Westview Press, Boulder, Cororado, 1979, 69-129

[92]Nahmias S, Fuzzy variables[J]. Fuzzy Sets and Systems,1978, 1:97-110

[93]Yager R. R., On the specificity of a possibility distribution[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 50:279-292

[94]Liu Y. K., and Gao J. The independence of fuzzy variables in credibility theory and its applications[J]. International Journal of Uncertainty, 2007, 15(1-20)

[95]Li X., Liu B., The independence of fuzzy variables with applications[J]. International

Journal of Natural Sciences & Technology, 2006, 1:95-100

[96]Dubois D., Prade H., Twofold fuzzy sets and rough sets-some issues in knowledge representain[J]. Fuzzy Sets and Systemss, 1987, 23:3-18

[97]Heilpern S. The expected value of a fuzzy number[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 47:81-86

[98]Campos L., Gonzalez A., A subjective approach for ranking fuzzy nunmbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 29:145-153

[99]Gonzalez A. A study of the ranking function approach through mean values[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 35:29-41

[100]Yager R. R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval[J]. Infoemation Sciences, 1981, 24:143-161

[101]Yager R. R. Generalized probabilities of fuzzy events from fuzzy belief structures[J]. Infoemation Sciences, 1982, 28:45-62

[102]Liu B., Iwamura K. Chance constrained programming with fuzzy parameters[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94(2):227-237

[103]Liu B. Dependent-chance programming with fuzzy decisions[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(3):354-360

[104]De Luca A., Termini S. A definition ofnonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Information and Control, 1972, 20:301-312

[105]Kaufmann A. Introducation to the Theory of Fuzzy Subsets[J]. Academic Press, 1975, (1):1-45

[106]Yager R. R. On measures of fuzziness and negation[J]. International Journal of General Systems, 1979, (5):221-229

[107]Kosko B., Fuzzy entropy and conditioning[J]. information Sciences, 1986, 40:165-174

[108]Pal N. R. and Pal S. K. Object background segmentation using anew definition of entropy[J], IEEE Proc. 1989, 136:284-295

[109]Bhandari D. and Pal N. R. Some new information measures of fuzzy sets[J].Information Sciences, 1993, 67:209-228

[110]Pal N. R. and Bezdek J. C. Measuring fuzzy uncertainty[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1994, 12:107-118

[111]Li P., and Liu B. Entroy of credibility distributions for fuzzy variable[J]. IEEE Transaction s on Fuzzy Systems, 2007, 1:1-59

[112]Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems[M]. Ann Arbor:University of Michigan Press, 1975

致 谢

在此论文即将完成之际，我衷心感谢曾经对我细心指导、关心和帮助过我的老师、亲人、朋友和同学们，是您们对我的帮助，让我得以完成自己的学业，可以努力为了自己的梦想投入社会。

首先，要衷心感谢我的导师宁玉富教授。宁老师不仅仅在严谨的教学态度上和渊博的知识面上感染了我，谦和的为人以及对我的悉心的指导和帮助，更是让我终生难忘。本论文从选题到相关的研究、撰写、审稿以及修改都是在宁老师的细心指导下完成的。在此，我以诚挚的心情对我的导师致意最衷心的感谢。一日为师，终生为父。我所取得的每一点成绩和进步都离不开宁老师的指导和帮助。我也会在以后的生活和工作上谨记宁玉富老师的教诲！

我还要衷心感谢山东师范大学管理科学与工程学院的各位尊敬的老师。老师们渊博的学识、严谨的教学态度和平易近人的谦逊态度，给我留下了深刻的印象。管理科学与工程学院有很多值得我尊敬和敬仰的老师，他们为人处世的风范以及精益求精的学术是我以后学习的榜样。同时我也要感谢研究生班里的同学以及学校里的朋友们，是你们让我在山东师范大学三年的学生生涯里充满了欢乐和精彩。在这里，留下了我太多美好的回忆。

我更要感谢自己的家人。感谢父母对我的养育之恩，感谢父母对我不求回报的奉献。父母是我这一生中最重要的人，他们撑起了一个家，让我在舒适的环境里生活和学习。他们是我这一生最大的动力，我会在以后的时间里回报父母的养育之恩，同时衷心祝愿父母身体健康！

最后衷心感谢评阅论文和出席硕士论文答辩委员会的诸位专家和教授，感谢您们在百忙中给予的悉心指导！

攻读硕士学位期间公开发表的论文

发表的论文：

[1]Li ShiHang. Entropy model for portfolio with fuzzy returns[J]. Journal of Applied Sciences,2013, 13(20):4162-4165