

# 安徽大学

## 本科毕业论文

题    目： 模糊最大熵模型及其应用

学生姓名： 覃浩蓝 学号： A01714003

院（系）： 数学科学学院 专业： 信息与计算科学

入学时间： 二〇一七年 九月

导师姓名： 吴涛 职称/学位： 教授

导师单位： 数学科学学院

完成时间： 二〇二一年 四月

## 模糊最大熵模型及其应用

### 摘 要

在模糊 C 均值 (Fuzzy C-means) 算法中, 通过与模糊数学的融合, 给出了相比于 K-means 硬聚类更灵活的聚类结果。

关键字: 模糊熵, 最大熵, 聚类

# **Fuzzy Maximum Entropy Model and Its Application**

## **Abstract**

In the.

**Keywords:** Fuzzy Sets;

## 目 录

摘 要	i
Abstract	ii
1 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究内容	1
1.3 研究意义	1
2 模糊 C-均值聚类	2
2.1 模糊集及其表示方法	2
2.1.1 模糊集的定义	2
2.1.2 模糊集的表示方法	2
2.2 模糊 C-均值算法	3
3 模糊最大熵准则的模糊聚类模型	5
3.1 最大熵原理	5
3.1.1 信息熵	5
3.1.2 最大熵	5
3.2 模糊熵	5
3.3 模糊最大熵模型	6
4 iris 数据集分类案例研究	7
4.1 模糊最大熵模型的求解算法	7
4.2 模型求解	7
4.3 与实际值和 FCM 算法分类结果比较	7
5 总结与展望	8
5.1 总结	8
5.2 展望	8
参考文献	9
附录 A 致谢	10

# 1 绪论

## 1.1 研究背景

人类从原始社会一步步走到现在，经历了漫长的进化和发展，站到了食物链的顶端，步入了信息时代，这一切都得益于我们对信息的获取和加工能力在不断进步。进入信息时代后，我们周围的信息越来越多，五花八门各式各样的信息充斥在我们的生活中，这些信息有的是确定的，但更多的是不确定的、带有模糊性的信息。所谓模糊性是指不确定的，介于是和不是两者之间的性质。例如，对于优等生的判定，有的人觉得 90 就可以了，有的人却觉得需要达到 95 分以上才算优秀，所以我们很难这种非此即彼的性质去衡量一个人是不是优等生。

我们所处的是一个复杂多变、时刻在运动的世界，大到星系运动，小到粒子碰撞，里面蕴含的规律都是复杂多样的。信息本身就包含着确定性和不确定性，无所谓的好坏之分，它取决于我们如何认识信息，了解信息和使用信息。比如，我们在评价某一个菜品时，会用“好吃”、“还行”、“难吃”来形容；描述天气时说“多云”、“晴朗”；说一个人的衣服搭配好看等等。这些问题很难用统一的标准去衡量，但是我们却可以得到清晰的结论，我们已经习惯在生活中运用模糊性所谓语言描述事物，用模糊的方法认识生活中的事物。虽然信息带着不确定性，但是我们所处的客观世界是确定的，所以我们需要一种方法研究模糊的信息，得到清晰的结论。于是数学诞生了一个新的分支：模糊数学。1965 年，L.A.Zadeh 在期刊 Information and Control 上发表了论文《Fuzzy Sets》，标志着模糊理论的诞生。

## 1.2 研究内容

最大熵模型是一种分类学习模型，模糊熵是模糊数学里面的概念，本文在模糊理论框架下，将最大熵推广到模型信息情形，在传统的模糊 C 均值聚类（FCM）上进行改进，建立模糊最大熵模型并应用于实际的分类问题中，通过进一步的研究探索模糊最大熵模型在实际问题中的应用。

## 1.3 研究意义

随着人工智能的大热，机器学习开始迅速应用于我们的生活中，比如商品推荐、语音识别和智能导航等。其中，分类问题是机器学习领域的一个重要问题。生活中许多的分类问题是模糊的，计算机无法直接处理这些模糊信息，而我们的人脑却可以很好地从这些模糊信息中得到精确的结论。随着熵理论和模糊数学的发展，模糊数学和最大熵模型的应用范围也越来越广泛，为了处理分类问题中的不确定性，国内外的许多这方面的学者也进行了许多研究，寻找分类问题模糊性的度量方式，探寻新的实际应用。本文将模糊熵与最大熵原理结合，

## 2 模糊 C-均值聚类

### 2.1 模糊集及其表示方法

在经典集合理论里面，一个集合就是某一个概念的内涵。对于论域上的一个对象，它要么属于这个集合，要么不属于这个集合，两者只能选一个，不能两者兼之，也不能有模棱两可的情况。而对模糊数学研究的对象来说，我们不能简单地用是或否来描述一个对象是否属于一个集合。由此，我们把集合的特征函数的取值从  $\{0, 1\}$  这个集合扩充到  $[0, 1]$  这个区间上的连续取值。越靠近 1，说明该对象属于集合的程度越大，反之，越靠近 0 就越小。这样我们就把经典集合扩充到带有模糊边界的模糊集了，从而我们可以用这样的集合表示模糊概念。

#### 2.1.1 模糊集的定义

定义 2.1.1 (模糊子集<sup>[1]</sup>). 设  $U$  为我们所研究的论域，

$$\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow [0, 1]$$

称  $\mu$  确定了  $U$  上的一个模糊子集，记为  $\tilde{A}$ 。 $\mu$  称为  $\tilde{A}$  的隶属函数，把  $\mu_{\tilde{A}}(u)(u \in U)$  的值称为  $u$  对于模糊子集  $\tilde{A}$  的隶属度。 $\mu_{\tilde{A}}(u)$  越大，代表  $u$  隶属于  $\tilde{A}$  的程度越高。通常，我们也把模糊子集简称为模糊集。

#### 2.1.2 模糊集表示方法

设有限集  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ，则有限集可以用如下几种方法表示<sup>[2]</sup>。

- Zadeh 表示法

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}(u_1)}{u_1} + \frac{\tilde{A}(u_2)}{u_2} + \dots + \frac{\tilde{A}(u_n)}{u_n}.$$

虽然我们以分式和的方式表示，但是其中的  $\tilde{A}(u_i)/u_i$  并不表示分数，“+”也不表示和。 $\tilde{A}(u_i)/u_i$  表示的是元素  $u_i$  与对  $\tilde{A}$  的隶属度的一一对应关系；“+”表示的是  $\tilde{A}$  在论域  $U$  上的整体。

- 序偶表示法

$$\tilde{A} = \{(\tilde{A}(u_1), u_1), (\tilde{A}(u_2), u_2), \dots, (\tilde{A}(u_n), u_n)\}.$$

序偶表示法是从例举法演变而来，由元素的隶属度和对应的元素组成的有序对列出。

- 向量表示法

$$\tilde{A} = (\tilde{A}(u_1), \tilde{A}(u_2), \dots, \tilde{A}(u_n)).$$

向量表示法是用  $n$  维数组来实现的，在论域中的元素按一定的顺序排列时，按此顺序记录元素的隶属度。此时也称  $\tilde{A}$  为模糊向量。

## 2.2 模糊 C-均值算法

C-均值聚类是我们聚类经常用的方法之一，通过迭代计算使得目标函数达到局部最小值的时候，就是我们的最优分类。在模糊 C-均值聚类中，我们定义目标函数为：

$$J(A, V) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n (a_{ij})^r d_{ij}^2 \quad (2-1)$$

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,  $u_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}) \in R^m$  为给定的  $n$  个样本的  $m$  维数据集,  $A = (a_{ij})$  是隶属度矩阵,  $r$  是模糊数,  $d_{ik} = \|u_k - v_i\|$  是第  $k$  个样本到第  $i$  个聚类中心的距离。

当  $v_i$  不变时问题等价于

$$\min L(A, \lambda) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n (a_{ij})^r d_{ik} \quad (2-2)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^c a_{ik} = 1, \forall k \quad (2-3)$$

这是最优化问题，我们引入拉格朗日乘子  $\lambda$ , 于是变为

$$L(A, \lambda) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n (a_{ij})^r \|u_j - v_i\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \sum_{i=1}^c a_{ij} - 1 \right) \quad (2-4)$$

对式2-4求导，局部最小值时必要条件为

$$\frac{\partial L(A, \lambda)}{\partial a_{ij}} = \left[ r (a_{ij})^{r-1} \|u_j - v_i\|^2 - \lambda_j \right] = 0 \quad (2-5)$$

$$\frac{\partial L(A, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^c a_{ij} - 1 = 0 \quad (2-6)$$

由式2-5可得：

$$a_{ij} = \left( \frac{\lambda_j}{r \|u_j - v_i\|^2} \right)^{\frac{1}{r-1}} \quad (2-7)$$

将式2-7带入式2-6解得：

$$\left( \frac{\lambda_j}{r} \right)^{\frac{1}{r-1}} = \left[ \sum_{i=1}^c \left( \frac{1}{r \|u_j - v_i\|^2} \right)^{\frac{1}{r-1}} \right]^{-1} \quad (2-8)$$

最后将式2-8代回式2-7得到隶属度的更新公式为：

$$a_{ij} = \left[ \sum_{j=1}^c \left( \frac{\|u_j - v_i\|}{\|u_j - v_j\|} \right)^{\frac{2}{r-1}} \right]^{-1} \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq j \leq n \quad (2-9)$$

假设  $a_{ij}$  不变，原问题就变成了无约束最优化问题，必要条件为：

$$\frac{\partial J(A, V)}{\partial v_i} = - \sum_{j=1}^n 2 (a_{ij})^r (u_j - v_i) = 0 \quad (2-10)$$

解之得：

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^n (a_{ij})^r u_j}{\sum_{j=1}^n (a_{ij})^r}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2-11)$$



### 3 模糊最大熵准则的模糊聚类

#### 3.1 最大熵原理

熵原本是物理学中的概念，是由热力学第二定律引出的一个物质系统的状态参量，是反映系统的混乱程度，度量信息有效性的一个重要工具。自从熵的概念被提出来之后，很快引起了其他领域研究者的注意，熵理论得以迅速传播，渗透进各个领域。

##### 3.1.1 信息熵

1948 年，香农<sup>[3]</sup> 提出了信息熵的概念，解决了信息的量化度量问题。

##### (1) 离散模糊变量的信息熵

设某个离散型的随机变量  $X$ ， $X$  的分布率是  $\{p_i\}$ ，且  $p_i = P\{X = x_i\}$ ， $0 \leq p_i \leq 1$ ， $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ， $(i = 1, 2, \dots, n)$  则用信息熵来度量事件  $X$  的确定程度为：

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (3-1)$$

##### (2) 连续连续模糊变量的信息熵

假设某个连续型随机变量  $X$ ，其概率密度函数是  $p(x)$ ，则该连续随机变量  $X$  的信息熵为：

$$H(X) = - \int p(x) \ln p(x) dx \quad (3-2)$$

##### 3.1.2 最大熵

1957 年，E.T.Jaynes 提出了最大熵原理，通过把随机变量与信息熵联系起来，然后最大化信息熵。最大熵原理并不是某一固定的数学公式，而是一种选择随机变量的准则。最大熵的主要思想是，在我们只掌握未知变量的部分知识的时候，未知变量的分布可能有很多种，此时我们应该选符合这些知识的情况下，使得信息熵取得最大值的概率分布。

#### 3.2 模糊熵

自从模糊理论提出以后，很多学者就在如何用模糊熵度量信息的模糊程度这一方面进行了许多研究，比如 Li, Pingke 和 Liu, Baoding<sup>[4]</sup>、Aldo de Luca 和 Settimo Termini<sup>[5]</sup> 等。

**定义 3.2.1 (模糊熵).** 对于离散变量的模糊

$$H(\tilde{A}) = - \sum_{i=1}^n \tilde{A}(u_i) \ln \tilde{A}(u_i) \quad (3-3)$$

对于连续的模糊变量

$$H(\tilde{A}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(u) \ln \tilde{A}(u) du \quad (3-4)$$

### 3.3 模糊最大熵模型

定义了模糊熵之后，我们就可以将最大熵原理推广到模糊熵的情形。设  $a_{ij}$  为第  $j$  个元素对于第  $i$  类的隶属度，则我们的目标函数可以表示成

$$\max \left\{ - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^c a_{ij} \ln a_{ij} \right\} \quad (3-5)$$

我们首先得定义我们的损失函数，在这里，我们选取

$$L = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n a_{ij} d_{ij}^2$$

作为我们的损失函数。于是我们可以将问题归结为最优化问题，用拉格朗日乘子法：

$$L(A, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n a_{ij} d_{ij}^2 + \beta \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln a_{ij} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \sum_{i=1}^c a_{ij} - 1 \right) \quad (3-6)$$

其中  $\beta$  是差异因子，由数据集的分布情况来决定， $\lambda_j$  是  $\sum_{i=1}^c a_{ij}$  的拉格朗日乘子。

$$\frac{\partial L(A, \beta, \lambda)}{\partial a_{ij}} = d_{ij}^2 + \beta(\ln a_{ij} + 1) + \lambda_j = 0 \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial L(A, \beta, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \quad (3-8)$$

最后解得

$$a_{ij} = \frac{\exp(\frac{-d_{ij}^2}{\beta})}{\sum_{i=1}^c \exp(\frac{-d_{ij}^2}{\beta})} \quad (3-9)$$

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^n a_{ij}} \quad (3-10)$$

## 4 iris 数据集分类案例研究

### 4.1 模糊最大熵模型的求解算法

模糊最大熵模型的聚类算法步骤如下：

输入：原始数据  $U$  和聚类数  $c$

输出：隶属度矩阵  $A$  和聚类中心  $V$

1) 首先

### 4.2 模型求解

巴拉巴拉

### 4.3 与实际值和 FCM 算法分类结果比较

## 5 总结与展望

5.1 总结

5.2 展望

## 参考文献

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] 李安贵, 张志宏. 模糊数学及其应用 [M]. (第 2 版). 北京: 冶金工业出版社, 2005.
- [3] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(4): 379-423.
- [4] LI P, LIU B. Entropy of credibility distributions for fuzzy variables[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2008, 16(1): 123-129.
- [5] DE LUCA A, TERMINI S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Information and Control, 1972, 20(4): 301-312.
- [6] ZADEH L A. Probability measures of fuzzy events[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 1968, 23(2): 421-427.
- [7] 谭扬波, 陈光 (禹). 一种基于最大模糊熵的高斯聚类算法 [J]. 电子科技大学学报, 2000 (3): 269-272.
- [8] QIAN P, SUN S, JIANG Y, et al. Cross-domain, soft-partition clustering with diversity measure and knowledge reference[J]. Pattern Recognition, 2016, 50.
- [9] FU H J, WU X H, MAO H P, et al. Fuzzy entropy clustering using possibilistic approach[J]. Procedia Engineering, 2011, 15: 1993-1997.
- [10] LI R P, MUKAIDONO M. A maximum-entropy approach to fuzzy clustering[C]// Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. [S.l.: s.n.], 1995.

## 附录 A 致谢

谢谢！