第一篇

第2讲 概率论 基础

1. 随机变量及其分布

2. 随机变量数字特征

3. 大数定理&中心极限定理

1. 随机变量及其分布

1.1 随机变量

任何随机试验的试验结果，都可以定量化并用随机变量表示。

例如，在灯泡寿命试验中，令X为“灯泡寿命”(小时)，则X为一随机变量。

$\{X>500\}$、$\{X\leq 1000\}$、$\{800<X\leq 1200\}$等表示了不同的随机事件。

又如，明年宝钢股票的收益r为一随机变量。

$\{r>$一年期存款利率$\}$为随机事件。

1.2 分布函数

设X是一随机变量，x是任意实数，称函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

为X的分布函数。显然，对任意实数 $x_1<x_2$，有

$$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{X\le x_2\}-P\{X\le x_1\}$$
$$=F(x_2)-F(x_1)$$

分布函数的性质

(1) $0\le F(x)\le 1$；　$x\in(-\infty,+\infty)$

(2) 对任意 $x_1<x_2$，$F(x_1)\le F(x_2)$

(3)
$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$
$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

1.2.1. 离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量X的所有可能取值为 x_k，记

$$P\{X=x_k\}=p_k\,,\quad k=1, 2,\ldots$$

称上式为X的概率分布或分布律，简称分布。

离散分布的性质

(1) $0 \leq p_k \leq 1$； $k=1, 2,\ldots$

(2) $\sum p_k = 1$

(3) $F(x) = \sum\limits_{x_k \leq x} p_k$

1.2.2 连续型随机变量的概率密度

对连续型随机变量X，如果存在非负可积函数$f(x)$，使得对任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称$f(x)$为X的**概率密度函数**，简称**概率密度**或**密度**。

概率密度的性质

(1) $f(x) \geq 0$

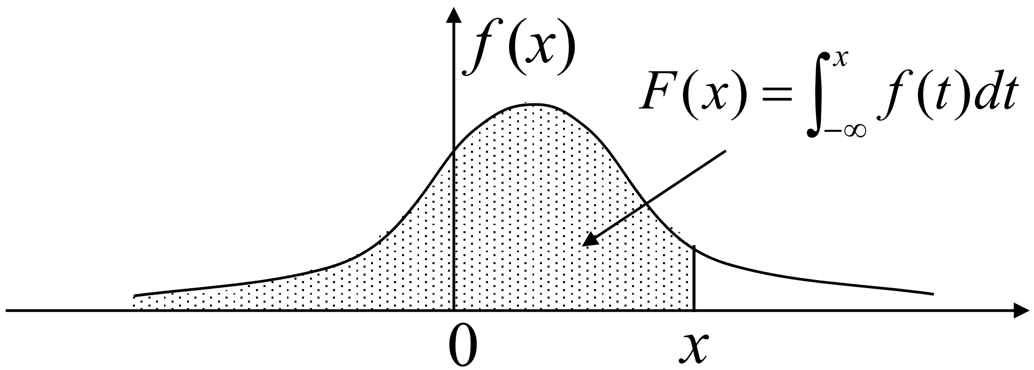
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

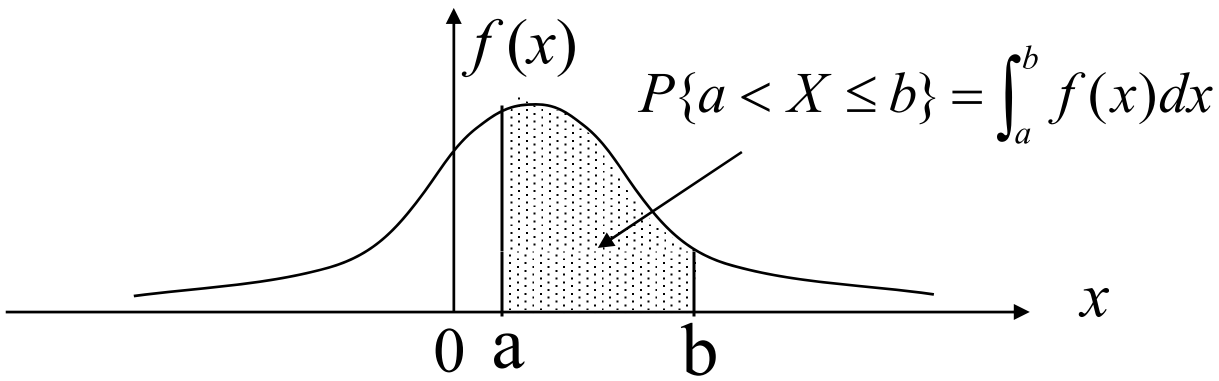
(3) $P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$

(4) 若$f(x)$在点 x 处连续,则：

$$F'(x) = f(x)$$

分布函数和密度函数的关系





1.2.3 正态分布

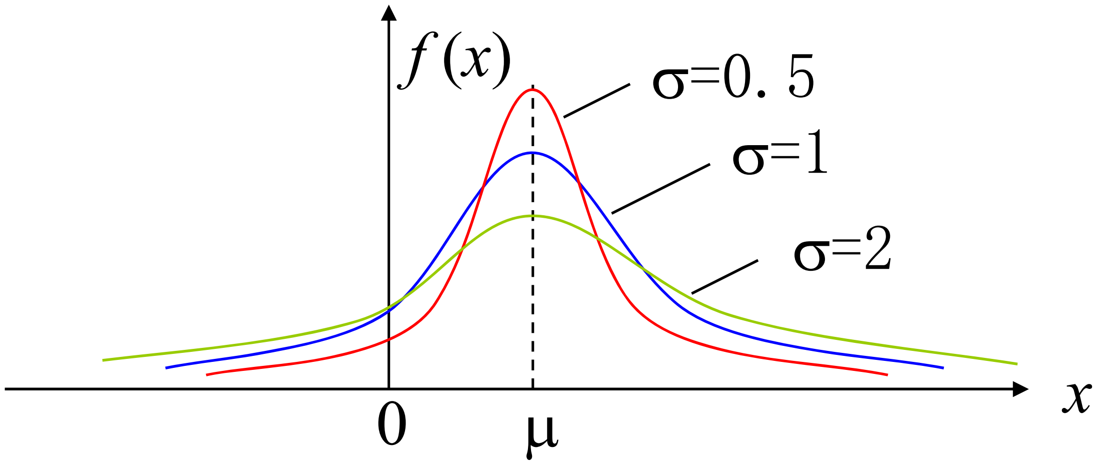
设随机变量X的概率密度为

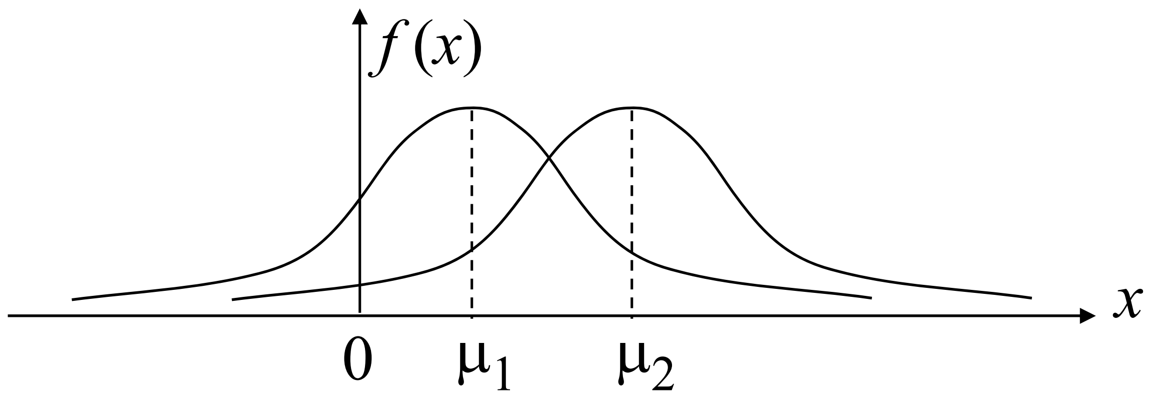
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中μ、σ为常数，且$\sigma>0$，则称X服从参数为μ、σ的正态分布，记为

$$X\sim \mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$$

正态分布密度函数的图形





标准正态分布

称 $\mu=0$、$\sigma=1$ 的正态分布为**标准正态分布**，记为 $Z\sim$ **N(0,1)**，其密度函数和分布函数分别记为 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 。

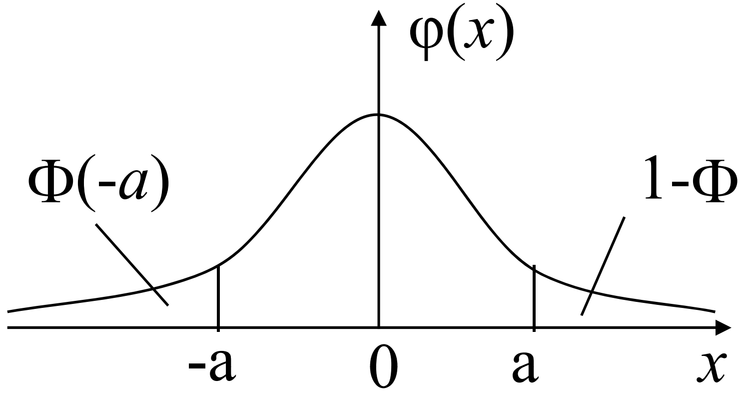
标准正态分布的分布函数的值$\Phi(x)$ 有以下关系：

① $P\{Z\leq a\}=\Phi(a)$

② $P\{Z>a\}=1-\Phi(\mathrm{a})$

③ $P\{a<Z\leq b\}=\Phi(b)-\Phi(a)$

④ $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$



标准与非标准正态分布之间的转换

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

设$Z \sim N(0,1)$，则

$$X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu,\sigma^2)$$

2. 随机变量的数字特征

2.1 数学期望

设离散型随机变量X的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$， $k=1, 2, \ldots,$ 称级数

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

为X的**数学期望** 或 **均值**。

连续型随机变量的数学期望为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

若X~N(μ,σ^2)，则 $E(X)=\mu$

数学期望的性质

设 c、k、b为常数，X、Y 为随机变量

(1) $E(c)= c$

(2) $E(kX)=kE(X)$

(3) $E(kX+b)=kE(X)+b$

(4) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

(5) 若X，Y独立，则 $E(XY)= E(X)E(Y)$

2.2 方差

对随机变量X，若 $E\{[X- E(X)]^2\}$ 存在，则称它为X的**方差**，记为$D(X)$或$\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)= E\{[X-E(X)]^2\}$$

并称

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

为X的**标准差**。标准差与X具有相同的量纲。

方差的性质

设c，k，b为常数，X，Y为随机变量

(1) $D(c)=0$；

(2) $D(kX)=k^2D(X)$； $D(kX+b)=k^2D(X)$

(3) 若X、Y独立，则：

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

2.3 协方差与相关性

对随机变量X、Y，称

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

为 X与 Y的协方差。称

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

为 X与 Y的相关性 $(-1 \le \rho_{XY} \le 1)$。

设随机向量 $\mathrm{x} = (X_1, X_2, \cdots X_n)'$ 的协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

那么 $\mathrm{w}'\mathrm{x} = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n$ 的方差为

$$\mathrm{Var}(\mathrm{w}'\mathrm{x}) = \mathrm{w}'\Sigma\mathrm{w}$$

3. 大数定理&中心极限定理

3.1 大数定理

设$\{X_n\}$, n=1, 2, … 是独立同分布的随机变量序列, 若 $E(X_n)=a$, $D(X_n)<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_n - a\right) = 0 \qquad (P)$$

3.2 中心极限定理

设$\{X_n\}$, n=1, 2, … 是独立同分布的随机变量序列, 若 $E(X_n)=a, D(X_n)=\sigma^2$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_n-a}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy}$$