1 几何最优传输映射

1.1 Monge-Ampére 方程

问题 1.1 (Brenier). 给定 (Ω, μ) 和 $(\sum, \nu)$ 以及成本函数 $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$，最优传输映射 $T: \Omega \to \sum$ 是满足 *Monge-Ampére* 方程的 *Brenier* 势 $u: \Omega \to \mathcal{R}$ 的梯度映射。

$$\boxed{det\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{f(x)}{g \circ \bigtriangledown u(x)}} \tag{1}$$

问题 1.2 (Semi-discrete OT). 给定一个在 $\mathcal{R}^d$ 上的紧凸域 Ω，和 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 以及质量 $w_1, w_2, \cdots, w_k > 0$ ，找到一个最优传输映射 $T: \Omega \to \{p_1, \cdots, p_k\}$，则 $vol(T^{-1}(p_i)) = w_i$，使运输成本最小化

$$C(T) := \frac{1}{2}\int_\Omega |x - T(x)|^2 \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

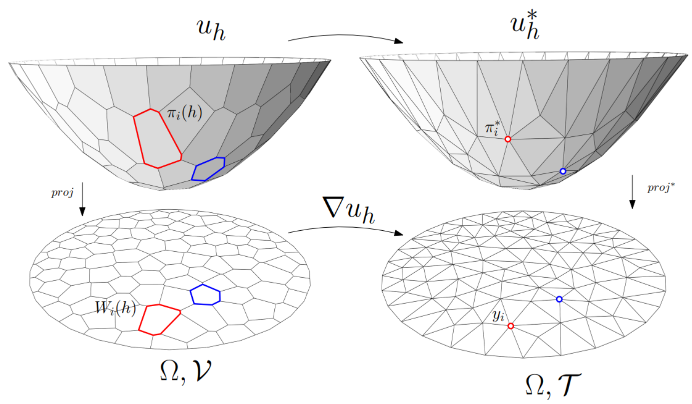

图 1: Brenier 图

根据 Brenier 定理，将有一个分段线性凸函数 $u: \Omega \to \mathbb{R}$、梯度映射给出了最佳运输映射。

定理 1.1 (Alexandrov 1950). 给定在 $\mathbb{R}^n$ 上的紧凸域 Ω，在 $\mathbb{R}^n$ 上互不相同的 $p_1, \cdots, p_k$，当 $A_1, \cdots, A_k > 0$，使得 $\sum A_i = Vol(\Omega)$，则存在 *PL* 凸函数

$$f(x) := \max\{\langle x, p_i \rangle + h_i \mid i = 1, \cdots, k\}, \tag{3}$$

唯一的传输使得

$$Vol(W_i) = Vol(\{x \mid \bigtriangledown f(x) = p_i\}) = A_i. \tag{4}$$

Alexandrov’s 证明是拓扑的，而不是变分。多年来人们一直开放寻找构造性的证明。

1.2 变分证明

定理 1.2 (Gu-Luo-Sun-Yau 2013). Ω 是在 $\mathbb{R}^2$ 上的紧凸域，$y_1, \cdots, y_k$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上互不相同，μ 是在 Ω 上的正连续。任意 $v_1, \cdots, v_k > 0$ 以及 $\sum v_i = \mu(\Omega)$，存在 *1* 个向量 $(h_1, \cdots, h_k)$ 使得，

$$u(x) = \max\{\langle x, \mathbf{p}_i \rangle + h_i\}$$

满足 $\mu(W_i \cap \Omega) = v_i$，其中 $W_i = \{x \mid \triangledown f(x) = \mathbf{p}_i\}$。此外，$\mathbf{h}$ 是凹函数的最大点

$$E(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{k} v_i h_i - \int_0^h \sum_{i=1}^{k} w_i(\eta) \mathrm{d}\eta_i \tag{5}$$

其中 $w_i(\eta) = \mu(W_i(\eta) \cap \Omega)$ 是胞腔的 $\mu-$ 体积。

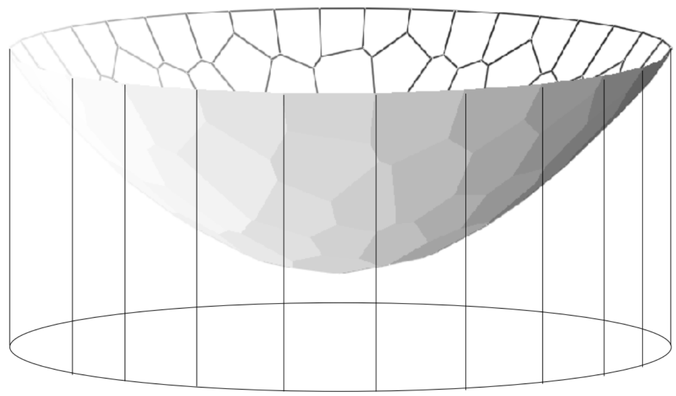

图 2: polyhedron 图

可以通过定义圆柱体 $\partial\Omega$, 圆柱体被 xy 平面和凸多面体截断。能量项 $\int^{\mathbf{h}} \sum w_i(\eta) \mathrm{d}\eta_i$ 等于截断圆柱体的体积。

1.3 计算算法

定义 1.1 (Alexandrov Potential). 凹面能量是

$$E(h_1, h_2, \cdots, h_k) = \sum_{i=1}^{k} v_i h_i - \int_0^{\mathbf{h}} \sum_{j=1}^{k} w_j(\eta) \mathrm{d}\eta_j \tag{6}$$

能量的 Hessian 是边和双边的长度比，

$$\frac{\partial w_i}{\partial h_j} = -\frac{\lfloor e_{ij} \rfloor}{\lfloor \bar{e}_{ij} \rfloor}$$

Algorithm: `Optimal Transport Map`

Input: A set of distinct points $P = p_1, p_2, \cdots, p_k$

, and the weights $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$; A convex domain $\Omega, \sum A_j = Vol(\Omega)$;

Output: The optimal transport map $T : \Omega \to P$

Scale and translate $\mathbf{P}$, such that $P \subset \Omega$; Initialize $\mathbf{h}^0 \leftarrow \frac{1}{2}\left(|p_1|^2, |p_2|^2, \cdots, |p_k|^2\right)^T$;

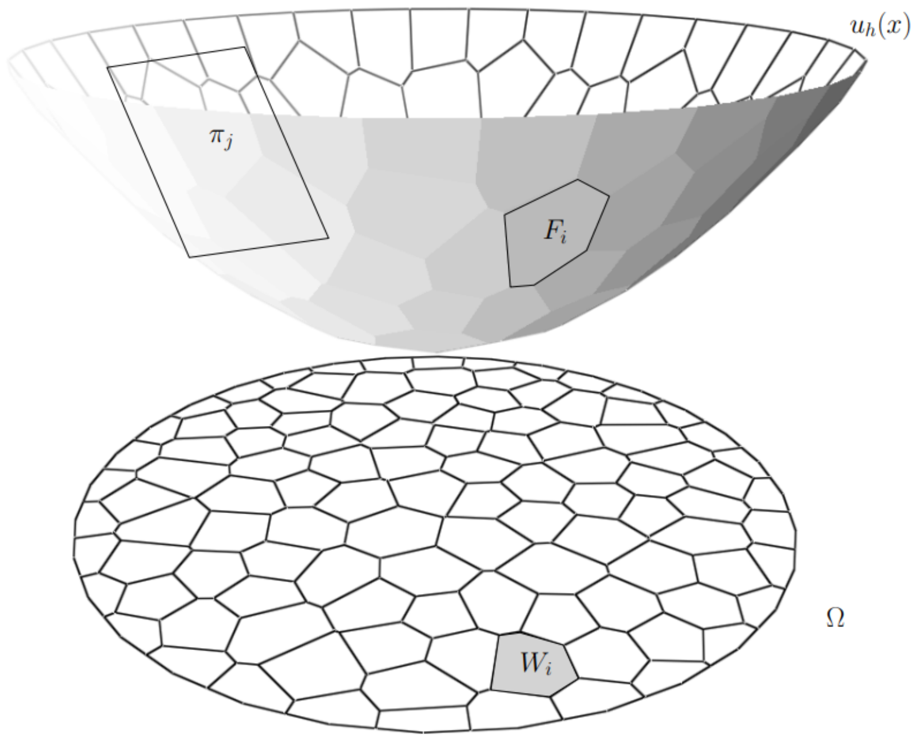

图 3: particale 图

Algorithm: `ConvexHull`(P)

Input: A set P of points in the plane.

Output: A list $\mathcal{L}$ containing the vertices of $\mathcal{CH}(P)$ in clockwise order.

Sort the points by x-coordinate, resulting in a sequence $p_1, ..., p_n$.

Put the points p_1 and p_2 in a list $\mathcal{L}_{\text{upper}}$, with p_1 as the first point.

for $i \leftarrow 3$ **to** n **do**

  Append p_i to $\mathcal{L}_{\text{upper}}$.

  while $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ *contains more than* 2 *points* **and** *the last three points in* $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ *do not make a right turn* **do**

    Delete the middle of the last three points from $\mathcal{L}_{\text{upper}}$.

  end

end

Put the points p_n and p_{n-1} in a list $\mathcal{L}_{\text{lower}}$, with p_n as the first point.

for $i \leftarrow n-2$ **downto** 1 **do**

  Append p_i to $\mathcal{L}_{\text{lower}}$.

  while $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ *contains more than* 2 *points* **and** *the last three points in* $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ *do not make a right turn* **do**

    Delete the middle of the last three points from $\mathcal{L}_{\text{lower}}$.

  end

end

Remove the first and the last point from $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ to avoid duplication of the points where the upper and lower hull meet.

Append $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ to $\mathcal{L}_{\text{upper}}$, and call the resulting list $\mathcal{L}$.

return $\mathcal{L}$

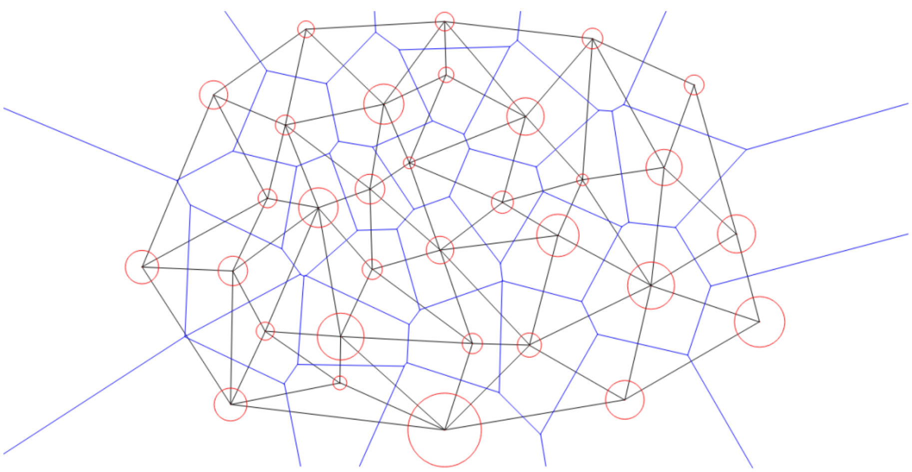

图 4: Alexandrov Potential 图