1 摄像机

1.1 习题

问题 1.1. 试推导出于针孔前面 f' 处的虚拟图像的透视方程式投影。

问题 1.2. 试从几何上证明，谋改革平面 Π 中两条平行线的投影汇聚到一条水平线 H 上，该水平线是图像平面 Π 与过针孔点平行于的平面交线。

问题 1.3. 用透视投影式 *(1.1)* 从代数上证明与上题相同的内容。为了简单起见，可以假设改平面 Π 与图像平面平行。

问题 1.4. 试用 *Snell* 规则说明过薄透镜中光心的射线没有折射现象，并推导薄透镜方程。提示：考虑一条过点 P 的射线 r_0，并分别构造透镜的右轮廓和左轮廓对 r_0 折射而得到的两条射线 r_1 与 r_2。

问题 1.5. 考虑一个用薄透镜配备的摄像机，图像平面在 z' 位置，而平面上的景物点聚焦在 z 处。现假设图像平面移动至 $\hat{z}'$，证明相应的模糊圆的直径为

$$\mathrm{d}\frac{|z'-\hat{z}'|}{z'}$$

其中，d 是透镜的直径。使用以上结果来说明视场深度（也就是使模糊圆的直径低于某个阈值 ε 的最近与最远平面之间的距离）可按下式计算

$$D = 2\varepsilon fz(z+f)\frac{d}{f^2d^2-\varepsilon^2z^2}$$

并且做出结论，即对一个固定的焦距长度，视场深度随透镜直径减少而增加，f 数也因而增加。提示：解出图像聚焦在图像平面上 $\hat{z}'$ 位置的点的深度 $\hat{z}$；要考虑 z' 比 $\hat{z}'$ 大与小两种情况。

问题 1.6. 在一个薄透镜的两个焦点分别为 F 与 F' 的条件下，拥挤和方法构造点 P 的图像 P'。

问题 1.7. 推出厚透镜两个球面边半径相同的厚透镜方程。

2 摄像机的几何模型

2.1 习题

问题 2.1. B 是坐标系 A 依次绕 i_A，j_A 和 k_A 转 θ 角以后的坐标系，求旋转矩阵 ${}^B_AR$。

问题 2.2. 证明旋转矩阵有如下性质：*(a)* 旋转矩阵的逆和转置相同；*(b)* 行列式为 *1*。

问题 2.3. 证明刚体变换的矩阵在矩阵乘法作用下是群。

问题 2.4. ${}^AT$ 表示坐标系 A 中变换 T 的矩阵，

$${}^AT = \begin{pmatrix} {}^AR & {}^At \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

用 ${}^AT$ 与 A 合 B 之间的刚体变换关系求 T 在 B 下的表示 ${}^BT$。

问题 2.5. 坐标系 A 做刚体变换 T 后得到 B，证明 ${}^BP = T^{-1A}P$

问题 2.6. 证明，坐标系 F 绕 k 轴旋转 θ 可以表示为

$${}^FP' = R^FP, R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

问题 2.7. 证明坐标系的刚体变换保持距离和角度。

问题 2.8. 证明：若摄像机坐标系有偏歪，两个图像轴的夹角不是 *90* 度，则方程 *(2.11)* 变为方程 *(2.12)*。

问题 2.9. 用 O 表示光心在参考坐标系内的齐次坐标，M 表示对应的透视投影矩阵，证明 $M(O) = 0$。

问题 2.10. 证明定理 *1* 的条件是必要的。

问题 2.11. 证明定理 *1* 的条件是充分的。这里的定理 *1* 和 *Faugeras(1993)* 及 *Heyden(1995)* 有一些区别。$Det(A) \neq 0$ 改为了 $a_3 \neq 0$，显然，$Det(A) \neq 0$ 推出 $a_3 \neq 0$。

问题 2.12. ${}^{A}\Pi$ 表示坐标系 A 上的平面 Π 齐次坐标，坐标系 B 中它的表示 ${}^{B}\Pi$ 是什么？

问题 2.13. ${}^{A}Q$ 表示坐标系 A 内的一个二次曲面的对称矩阵，坐标系 B 中它的表示 ${}^{B}Q$ 是什么？

问题 2.14. 证明定理 *2*。

问题 2.15. 线性 *Plücker* 坐标系。$\mathbb{R}^4$ 空间上的两个向量 u，v 的外积定义为

$$u \wedge v \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} u_1v_2 - u_2v_1 \\ u_1v_3 - u_3v_1 \\ u_1v_4 - u_4v_1 \\ u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_2v_4 - u_4v_2 \\ u_3v_4 - u_4v_3 \end{pmatrix}$$

在给定的坐标系中，A 和 B 表示 $\mathbb{E}^3$ 中的两个向量，则 $L = A \wedge B$ 称为 A 和 B 交线的坐标。
(a) 记 $L = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)^T$，$O$ 表示坐标原点，H 是 O 在 L 上的投影位置。用 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示的非齐次坐标。证明，$\overrightarrow{AB} = -(L_3, L_5, L_6)^T$ 和 $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{AB} = (L_4, -L_2, L_1)^T$，并且直线的 $\mathbb{R}^4$ 坐标满足二次约束 $L_1L_6 - L_2L_5 + L_3L_4 = 0$。
(b) 证明 A 和 B 在直线 L 上移动只改变 L 的全局比例，*Plücker* 坐标是齐次坐标。
(c) 证明对 $\mathbb{R}^4$ 上的点 x, y, z 和 t 有 $(x \wedge y) \cdot (z \wedge t) = (x \wedge z)(y \wedge t) - (x \wedge t)(y \wedge z)$
(d) 证明 *Plücker* 坐标 L 表示的直线和它在图像上的齐次坐标 l 满足如下关系

$$\rho l = \widetilde{M}L, \widetilde{M} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} (m_2 \wedge m_3)^T \\ (m_3 \wedge m_1)^T \\ (m_1 \wedge m_2)^T \end{pmatrix} \tag{1}$$

m_1^T，m_2^T 和 m_3^T 表示 M 的各行，ρ 是比例系数。提示：L 是过 A 和 B 的直线，A 和 B 的投影点用 a 和 b 表示，齐次坐标分别是 a，b。a，b 在 l 上，用 $\mathbf{l}$ 表示 l 的齐次坐标，则有 $l \cdot a = l \cdot b = 0$。
(e) 已知 L 的 *Plücker* 坐标为 $L = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)^T$，点 P 的齐次坐标向量为 $\mathbf{P}$。证明 $\mathbf{P}$ 在 L 上的充要条件是

$$\mathcal{L}\mathbf{P} = 0, \mathcal{L} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & L_6 & -L_5 & L_4 \\ -L_6 & 0 & L_3 & -L_2 \\ L_5 & -L_3 & 0 & L_1 \\ -L_4 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) Π 是平面 Π 的齐次坐标，证明直线 L 在平面 Π 上的充要条件是

$$\mathcal{L}^*\Pi = 0, \mathcal{L}^* \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ -L_1 & 0 & L_4 & L_5 \\ -L_2 & L_4 & 0 & L_6 \\ -L_3 & L_5 & -L_6 & 0 \end{pmatrix}$$

3 摄像机的几何标定

3.1 习题

问题 3.1. 证明，在 $|\mathcal{V}x|^2 = 1$ 约束下，使 $|\mathcal{U}x|$ 最小的向量 $\mathbf{x}$ 就是对称矩阵 $|\mathcal{U}^T\mathcal{U}|$ 和 $|\mathcal{V}^T\mathcal{V}|$ 上最小广义特征值对应的特征向量。提示：等价于下面的没有约束的最小化问题：求 $\mathbf{x}$ 使 $E(x) = |\mathcal{V}x|^2 \setminus |\mathcal{V}x|^2$ 最小。

问题 3.2. 证明在 *3.1.1* 节中得到的 2×2 矩阵 $\mathcal{U}^T\mathcal{U}$ 就是点集 $p_i(i=1,\cdots,n)$ 的惯性矩。

问题 3.3. 把 *3.1.1* 节中的直线拟合方法扩展到在 $\mathbb{E}^3$ 空间寻找最佳拟合平面。

问题 3.4. 推导下面两个式子的 *Hessian* 矩阵：$f_{2i-1}(\xi) = \tilde{u}_i(\xi) - u_i, f_{2i}(\xi) = \tilde{v}_i(\xi) - v_i(i = 1,\cdots,n)$。

问题 3.5. 欧拉角是这样定义的：先绕 z 轴旋转 α，再绕 y 轴旋转 β，最后再绕 z 轴旋转 γ。证明欧拉角可以在原坐标系中用下面的矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

问题 3.6. 证明 *Rodrigues* 公式。设 $\mathcal{R}$ 是绕着 u 的旋转，转角为 θ，则

$$\mathcal{R}x = \cos\theta x + \sin\theta u \times x + (1-\cos\theta)(u\cdot x)u$$

提示：旋转不会改变向量在与旋转轴垂直的平面上的透影值。

问题 3.7. 利用 *Rodrigues* 定理证明，$\mathcal{R}$ 的坐标变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} u^2(1-c)+c & uv(1-c)-ws & uw(1-c)+vs \\ uv(1-c)+ws & v^2(1-c)+c & vw(1-c)-us \\ uw(1-c)-vs & vw(1-c)+us & w^2(1-c)+c \end{pmatrix}$$

其中，$c = \cos\theta$ 和 $s = \sin\theta$。

问题 3.8. 若已知摄像机内参数，如何从 *3.5* 节中介绍的向量 n' 求摄像机外参数。提示：旋转矩阵的各列都是单位向量。

问题 3.9. 假设用摄像机拍摄了 n 条 *Plücker* 坐标已知的刻线，
(a) 证明若 $u \geq 9$，可以恢复第 *2* 章习题中的投影矩阵 $\widetilde{\mathcal{M}}$；
(b) 若 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 已知，则投影矩阵 $\mathcal{M}$ 也能用最小二乘法得到。提示：$\mathcal{M}$ 的各列 m_i 分别表示三个平面 Π_i，而 $\mathcal{M}$ 的各行表示三条直线。利用线和平面间的关系可以写出 $\widetilde{m}_i$ 的约束。

3.2 编程作业

问题 3.10. 用最小二乘法在三维空间中找到点集的最佳拟合平面。

问题 3.11. 在平面 $\mathbb{R}^2$ 内找到点集 $(x_i, y_i)^T (i = 1, \cdots, n)$ 的最小二乘拟合的圆锥曲线 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$。

问题 3.12. 实现 *3.2* 节中介绍的线性标定法。

问题 3.13. 实现 *3.3* 节中介绍的带径向畸变的标定算法。

问题 3.14. 实现 *3.4* 节中介绍的非线性标定法。