

# 1 摄像机

## 1.1 习题

**问题 1.1.** 试推导出针孔前面  $f'$  处的虚拟图像的透视方程式投影。

**问题 1.2.** 试从几何上证明，设平面  $\Pi$  中两条平行线的投影汇聚到一条水平线  $H$  上，该水平线是图像平面  $\Pi$  与过针孔点平行于  $\Pi$  的平面交线。

**问题 1.3.** 用透视投影式 (1.1) 从代数上证明与上题相同的内容。为了简单起见，可以假设平面  $\Pi$  与图像平面平行。

**问题 1.4.** 试用 Snell 规则说明过薄透镜中光心的射线没有折射现象，并推导薄透镜方程。提示：考虑一条过点  $P$  的射线  $r_0$ ，并分别构造透镜的右轮廓和左轮廓对  $r_0$  折射而得到的两条射线  $r_1$  与  $r_2$ 。

**问题 1.5.** 考虑一个用薄透镜配备的摄像机，图像平面在  $z'$  位置，而平面上的景物点聚焦在  $z$  处。现假设图像平面移动至  $\hat{z}'$ ，证明相应的模糊圆的直径为

$$d \frac{|z' - \hat{z}'|}{z'}$$

其中， $d$  是透镜的直径。使用以上结果来说明视场深度（也就是使模糊圆的直径低于某个阈值  $\varepsilon$  的最近与最远平面之间的距离）可按式计算

$$D = 2\varepsilon f z(z + f) \frac{d}{f^2 d^2 - \varepsilon^2 z^2}$$

并且做出结论，即对一个固定的焦距长度，视场深度随透镜直径减少而增加， $f$  数也因而增加。提示：解出图像聚焦在图像平面上  $\hat{z}'$  位置的点的深度  $\hat{z}$ ；要考虑  $z'$  比  $\hat{z}'$  大与小两种情况。

**问题 1.6.** 在一个薄透镜的两个焦点分别为  $F$  与  $F'$  的条件下，拥挤和方法构造点  $P$  的图像  $P'$ 。

**问题 1.7.** 推出厚透镜两个球面边半径相同的厚透镜方程。

# 2 摄像机的几何模型

## 2.1 习题

**问题 2.1.**  $B$  是坐标系  $A$  依次绕  $i_A$ ,  $j_A$  和  $k_A$  转  $\theta$  角以后的坐标系，求旋转矩阵  ${}^B_A R$ 。

**问题 2.2.** 证明旋转矩阵有如下性质：(a) 旋转矩阵的逆和转置相同；(b) 行列式为 1。

**问题 2.3.** 证明刚体变换的矩阵在矩阵乘法作用下是群。

**问题 2.4.**  ${}^A T$  表示坐标系  $A$  中变换  $T$  的矩阵，

$${}^A T = \begin{pmatrix} {}^A R & {}^A t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

用  ${}^A T$  与  $A$  合  $B$  之间的刚体变换关系求  $T$  在  $B$  下的表示  ${}^B T$ 。

**问题 2.5.** 坐标系  $A$  做刚体变换  $T$  后得到  $B$ ，证明  ${}^B P = T^{-1} {}^A P$

**问题 2.6.** 证明，坐标系  $F$  绕  $k$  轴旋转  $\theta$  可以表示为

$${}^F P' = R^F P, R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**问题 2.7.** 证明坐标系的刚体变换保持距离和角度。

**问题 2.8.** 证明：若摄像机坐标系有偏差，两个图像轴的夹角不是  $90^\circ$  度，则方程 (2.11) 变为方程 (2.12)。

**问题 2.9.** 用  $O$  表示光心在参考坐标系内的齐次坐标， $M$  表示对应的透视投影矩阵，证明  $M(O) = 0$ 。

**问题 2.10.** 证明定理 1 的条件是必要的。

**问题 2.11.** 证明定理 1 的条件是充分的。这里的定理 1 和 Faugeras(1993) 及 Heyden(1995) 有一些区别。 $\text{Det}(A) \neq 0$  改为了  $a_3 \neq 0$ ，显然， $\text{Det}(A) \neq 0$  推出  $a_3 \neq 0$ 。

**问题 2.12.**  ${}^A\Pi$  表示坐标系  $A$  上的平面  $\Pi$  齐次坐标，坐标系  $B$  中它的表示  ${}^B\Pi$  是什么？

**问题 2.13.**  ${}^AQ$  表示坐标系  $A$  内的一个二次曲面的对称矩阵，坐标系  $B$  中它的表示  ${}^BQ$  是什么？

**问题 2.14.** 证明定理 2。

**问题 2.15. 线性 Plücker 坐标系。**  $\mathbb{R}^4$  空间上的两个向量  $u, v$  的外积定义为

$$u \wedge v \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u_1v_2 - u_2v_1 \\ u_1v_3 - u_3v_1 \\ u_1v_4 - u_4v_1 \\ u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_2v_4 - u_4v_2 \\ u_3v_4 - u_4v_3 \end{pmatrix}$$

在给定的坐标系中， $A$  和  $B$  表示  $\mathbb{R}^3$  中的两个向量，则  $L = A \wedge B$  称为  $A$  和  $B$  交线的坐标。

(a) 记  $L = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)^T$ ， $O$  表示坐标原点， $H$  是  $O$  在  $L$  上的投影位置。用  $\overrightarrow{OA}$  和  $\overrightarrow{OB}$  表示的非齐次坐标。证明， $\overrightarrow{AB} = -(L_3, L_5, L_6)^T$  和  $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{AB} = (L_4, -L_2, L_1)^T$ ，并且直线的  $\mathbb{R}^4$  坐标满足二次约束  $L_1L_6 - L_2L_5 + L_3L_4 = 0$ 。

(b) 证明  $A$  和  $B$  在直线  $L$  上移动只改变  $L$  的全局比例，Plücker 坐标是齐次坐标。

(c) 证明对  $\mathbb{R}^4$  上的点  $x, y, z$  和  $t$  有  $(x \wedge y) \cdot (z \wedge t) = (x \wedge z)(y \wedge t) - (x \wedge t)(y \wedge z)$

(d) 证明 Plücker 坐标  $L$  表示的直线和它在图像上的齐次坐标  $l$  满足如下关系

$$\rho l = \widetilde{M}L, \widetilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (m_2 \wedge m_3)^T \\ (m_3 \wedge m_1)^T \\ (m_1 \wedge m_2)^T \end{pmatrix} \quad (1)$$

$m_1^T, m_2^T$  和  $m_3^T$  表示  $M$  的各行， $\rho$  是比例系数。提示： $L$  是过  $A$  和  $B$  的直线， $A$  和  $B$  的投影点用  $a$  和  $b$  表示，齐次坐标分别是  $a, b$ 。 $a, b$  在  $l$  上，用  $\mathbf{1}$  表示  $l$  的齐次坐标，则有  $l \cdot a = l \cdot b = 0$ 。

(e) 已知  $L$  的 Plücker 坐标为  $L = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)^T$ ，点  $P$  的齐次坐标向量为  $\mathbf{P}$ 。证明  $\mathbf{P}$  在  $L$  上的充要条件是

$$\mathcal{L}\mathbf{P} = 0, \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & L_6 & -L_5 & L_4 \\ -L_6 & 0 & L_3 & -L_2 \\ L_5 & -L_3 & 0 & L_1 \\ -L_4 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)  $\Pi$  是平面  $\Pi$  的齐次坐标, 证明直线  $L$  在平面  $\Pi$  上的充要条件是

$$\mathcal{L}^* \Pi = 0, \mathcal{L}^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ -L_1 & 0 & L_4 & L_5 \\ -L_2 & L_4 & 0 & L_6 \\ -L_3 & L_5 & -L_6 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3 摄像机的几何标定

#### 3.1 习题

**问题 3.1.** 证明, 在  $|\mathcal{V}x|^2 = 1$  约束下, 使  $|\mathcal{U}x|$  最小的向量  $x$  就是对称矩阵  $|\mathcal{U}^T \mathcal{U}|$  和  $|\mathcal{V}^T \mathcal{V}|$  上最小广义特征值对应的特征向量。提示: 等价于下面的没有约束的最小化问题: 求  $x$  使  $E(x) = |\mathcal{V}x|^2 \setminus |\mathcal{U}x|^2$  最小。

**问题 3.2.** 证明在 3.1.1 节中得到的  $2 \times 2$  矩阵  $\mathcal{U}^T \mathcal{U}$  就是点集  $p_i (i = 1, \dots, n)$  的惯性矩。

**问题 3.3.** 把 3.1.1 节中的直线拟合方法扩展到在  $\mathbb{E}^3$  空间寻找最佳拟合平面。

**问题 3.4.** 推导下面两个式子的 Hessian 矩阵:  $f_{2i-1}(\xi) = \tilde{u}_i(\xi) - u_i, f_{2i}(\xi) = \tilde{v}_i(\xi) - v_i (i = 1, \dots, n)$ 。

**问题 3.5.** 欧拉角是这样定义的: 先绕  $z$  轴旋转  $\alpha$ , 再绕  $y$  轴旋转  $\beta$ , 最后再绕  $z$  轴旋转  $\gamma$ 。证明欧拉角可以在原坐标系中用下面的矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}$$

**问题 3.6.** 证明 Rodrigues 公式。设  $\mathcal{R}$  是绕着  $u$  的旋转, 转角为  $\theta$ , 则

$$\mathcal{R}x = \cos \theta x + \sin \theta u \times x + (1 - \cos \theta)(u \cdot x)u$$

提示: 旋转不会改变向量在与旋转轴垂直的平面上的透影值。

**问题 3.7.** 利用 Rodrigues 定理证明,  $\mathcal{R}$  的坐标变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} u^2(1-c) + c & uv(1-c) - ws & uw(1-c) + vs \\ uv(1-c) + ws & v^2(1-c) + c & vw(1-c) - us \\ uw(1-c) - vs & vw(1-c) + us & w^2(1-c) + c \end{pmatrix}$$

其中,  $c = \cos \theta$  和  $s = \sin \theta$ 。

**问题 3.8.** 若已知摄像机内参数, 如何从 3.5 节中介绍的向量  $n'$  求摄像机外参数。提示: 旋转矩阵的各列都是单位向量。

**问题 3.9.** 假设用摄像机拍摄了  $n$  条 Plücker 坐标已知的刻线,

(a) 证明若  $u \geq 9$ , 可以恢复第 2 章习题中的投影矩阵  $\widetilde{\mathcal{M}}$ ;

(b) 若  $\widetilde{\mathcal{M}}$  已知, 则投影矩阵  $\mathcal{M}$  也能用最小二乘法得到。提示:  $\mathcal{M}$  的各列  $m_i$  分别表示三个平面  $\Pi_i$ , 而  $\mathcal{M}$  的各行表示三条直线。利用线和平面间的关系可以写出  $\tilde{m}_i$  的约束。

## 3.2 编程作业

**问题 3.10.** 用最小二乘法在三维空间中找到点集的最佳拟合平面。

**问题 3.11.** 在平面  $\mathbb{R}^2$  内找到点集  $(x_i, y_i)^T (i = 1, \dots, n)$  的最小二乘拟合的圆锥曲线  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 。

**问题 3.12.** 实现 3.2 节中介绍的线性标定法。

**问题 3.13.** 实现 3.3 节中介绍的带径向畸变的标定算法。

**问题 3.14.** 实现 3.4 节中介绍的非线性标定法。

## 4 光亮度度量