1 摄像机

1.1 习题

问题 1.1. 试推导出于针孔前面 f' 处的虚拟图像的透视方程式投影。

问题 1.2. 试从几何上证明，谋改革平面 Π 中两条平行线的投影汇聚到一条水平线 H 上，该水平线是图像平面 Π 与过针孔点平行于的平面交线。

问题 1.3. 用透视投影式 *(1.1)* 从代数上证明与上题相同的内容。为了简单起见，可以假设改平面 Π 与图像平面平行。

问题 1.4. 试用 *Snell* 规则说明过薄透镜中光心的射线没有折射现象，并推导薄透镜方程。提示：考虑一条过点 P 的射线 r_0，并分别构造透镜的右轮廓和左轮廓对 r_0 折射而得到的两条射线 r_1 与 r_2。

问题 1.5. 考虑一个用薄透镜配备的摄像机，图像平面在 z' 位置，而平面上的景物点聚焦在 z 处。现假设图像平面移动至 $\hat{z}'$，证明相应的模糊圆的直径为

$$\mathrm{d}\frac{|z'-\hat{z}'|}{z'}$$

其中，d 是透镜的直径。使用以上结果来说明视场深度（也就是使模糊圆的直径低于某个阈值 ε 的最近与最远平面之间的距离）可按下式计算

$$D = 2\varepsilon fz(z+f)\frac{d}{f^2d^2-\varepsilon^2z^2}$$

并且做出结论，即对一个固定的焦距长度，视场深度随透镜直径减少而增加，f 数也因而增加。提示：解出图像聚焦在图像平面上 $\hat{z}'$ 位置的点的深度 $\hat{z}$；要考虑 z' 比 $\hat{z}'$ 大与小两种情况。

问题 1.6. 在一个薄透镜的两个焦点分别为 F 与 F' 的条件下，拥挤和方法构造点 P 的图像 P'。

问题 1.7. 推出厚透镜两个球面边半径相同的厚透镜方程。

2 摄像机的几何模型

2.1 习题

问题 2.1. B 是坐标系 A 依次绕 i_A，j_A 和 k_A 转 θ 角以后的坐标系，求旋转矩阵 ${}^B_AR$。

问题 2.2. 证明旋转矩阵有如下性质：*(a)* 旋转矩阵的逆和转置相同；*(b)* 行列式为 *1*。

问题 2.3. 证明刚体变换的矩阵在矩阵乘法作用下是群。

问题 2.4. ${}^AT$ 表示坐标系 A 中变换 T 的矩阵，

$${}^AT = \begin{pmatrix} {}^AR & {}^At \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

用 ${}^AT$ 与 A 合 B 之间的刚体变换关系求 T 在 B 下的表示 ${}^BT$。

问题 2.5. 坐标系 A 做刚体变换 T 后得到 B，证明 ${}^BP = T^{-1A}P$

问题 2.6. 证明，坐标系 F 绕 k 轴旋转 θ 可以表示为

$${}^FP' = R^FP, R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

问题 2.7. 证明坐标系的刚体变换保持距离和角度。

问题 2.8. 证明：若摄像机坐标系有偏歪，两个图像轴的夹角不是 *90* 度，则方程 *(2.11)* 变为方程 *(2.12)*。

问题 2.9. 用 O 表示光心在参考坐标系内的齐次坐标，M 表示对应的透视投影矩阵，证明 $M(O)=0$。

问题 2.10. 证明定理 *1* 的条件是必要的。

问题 2.11. 证明定理 *1* 的条件是充分的。这里的定理 *1* 和 *Faugeras(1993)* 及 *Heyden(1995)* 有一些区别。$Det(A)\neq 0$ 改为了 $a_3\neq 0$，显然，$Det(A)\neq 0$ 推出 $a_3\neq 0$。

问题 2.12. ${}^{A}\Pi$ 表示坐标系 A 上的平面 Π 齐次坐标，坐标系 B 中它的表示 ${}^{B}\Pi$ 是什么？

问题 2.13. ${}^{A}Q$ 表示坐标系 A 内的一个二次曲面的对称矩阵，坐标系 B 中它的表示 ${}^{B}Q$ 是什么？

问题 2.14. 证明定理 *2*。

问题 2.15. 线性 *Plücker* 坐标系。$\mathbb{R}^4$ 空间上的两个向量 u，v 的外积定义为

$$u\wedge v \overset{def}{=} \begin{pmatrix} u_1v_2-u_2v_1\\ u_1v_3-u_3v_1\\ u_1v_4-u_4v_1\\ u_2v_3-u_3v_2\\ u_2v_4-u_4v_2\\ u_3v_4-u_4v_3 \end{pmatrix}$$

在给定的坐标系中，A 和 B 表示 $\mathbb{E}^3$ 中的两个向量，则 $L=A\wedge B$ 称为 A 和 B 交线的坐标。
(a) 记 $L=(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6)^T$，$O$ 表示坐标原点，H 是 O 在 L 上的投影位置。用 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示的非齐次坐标。证明，$\overrightarrow{AB}=-(L_3,L_5,L_6)^T$ 和 $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\times\overrightarrow{AB}=(L_4,-L_2,L_1)^T$，并且直线的 $\mathbb{R}^4$ 坐标满足二次约束 $L_1L_6-L_2L_5+L_3L_4=0$。
(b) 证明 A 和 B 在直线 L 上移动只改变 L 的全局比例，*Plücker* 坐标是齐次坐标。
(c) 证明对 $\mathbb{R}^4$ 上的点 x,y,z 和 t 有 $(x\wedge y)\cdot(z\wedge t)=(x\wedge z)(y\wedge t)-(x\wedge t)(y\wedge z)$
(d) 证明 *Plücker* 坐标 L 表示的直线和它在图像上的齐次坐标 l 满足如下关系

$$\rho l=\widetilde{M}L, \widetilde{M} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} (m_2\wedge m_3)^T\\ (m_3\wedge m_1)^T\\ (m_1\wedge m_2)^T \end{pmatrix} \tag{1}$$

m_1^T，m_2^T 和 m_3^T 表示 M 的各行，ρ 是比例系数。提示：L 是过 A 和 B 的直线，A 和 B 的投影点用 a 和 b 表示，齐次坐标分别是 a，b。a，b 在 l 上，用 $\mathbf{l}$ 表示 l 的齐次坐标，则有 $l\cdot a=l\cdot b=0$。
(e) 已知 L 的 *Plücker* 坐标为 $L=(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6)^T$，点 P 的齐次坐标向量为 $\mathbf{P}$。证明 $\mathbf{P}$ 在 L 上的充要条件是

$$\mathcal{L}\mathbf{P}=0, \mathcal{L} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & L_6 & -L_5 & L_4\\ -L_6 & 0 & L_3 & -L_2\\ L_5 & -L_3 & 0 & L_1\\ -L_4 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) Π 是平面 Π 的齐次坐标，证明直线 L 在平面 Π 上的充要条件是

$$\mathcal{L}^*\Pi = 0, \mathcal{L}^* \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ -L_1 & 0 & L_4 & L_5 \\ -L_2 & L_4 & 0 & L_6 \\ -L_3 & L_5 & -L_6 & 0 \end{pmatrix}$$