

# curl problem

wei yu

2017 年 6 月 5 日

1.PDE(2D)

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = g & \text{in } \Omega \\ \nabla \times \mathbf{u} = \lambda \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \phi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \partial_x u_2 - \partial_y u_1, \nabla \times \phi = (\phi_y, -\phi_x)$$

2.Fem space

$$U_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_T \in \mathbb{P}_m(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, U_h = [U_h]^2$$

$$W_h = \{q \in H^1(\Omega) : q|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$L(w, z) = (\nabla w, \nabla z) + (w, z)$$

2.Fem method

Find  $\mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}; \Omega) \cap H(div; \Omega)$ ,  $\omega \in H^1(\Omega)$ ,  $p \in H^1(\Omega)$  such that

$$\begin{aligned} & (\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (div \mathbf{u}, div \mathbf{v}) + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \omega \rangle_\Gamma + L(w, z) - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, z \rangle_\Gamma \\ & + L(p, q) - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_\Gamma + \sum_{F \in \Gamma} h_F \int_F (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \\ & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (g, div \mathbf{v}) + \int_\Gamma (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \lambda + \int_\Gamma \phi q + \sum_{F \in \Gamma} h_F \int_F \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \end{aligned}$$

$$\text{for all } \mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}; \Omega) \cap H(div; \Omega), z \in H^1(\Omega), q \in H^1(\Omega)$$

example1 L-domain

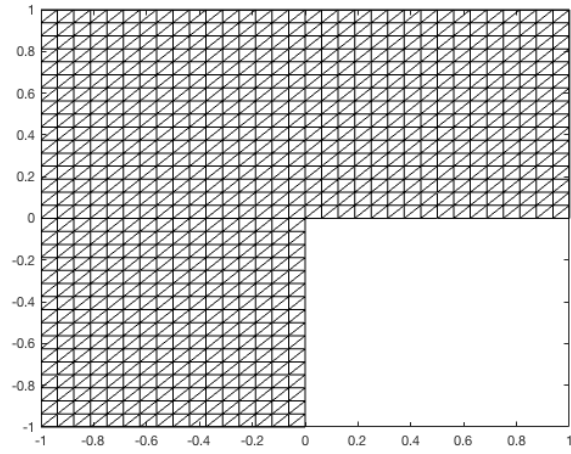


fig.  $h=1/16$  的 L 型网格剖分

exact solution:

$$u_1(x, y) = \sin(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$u_2(x, y) = -\sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

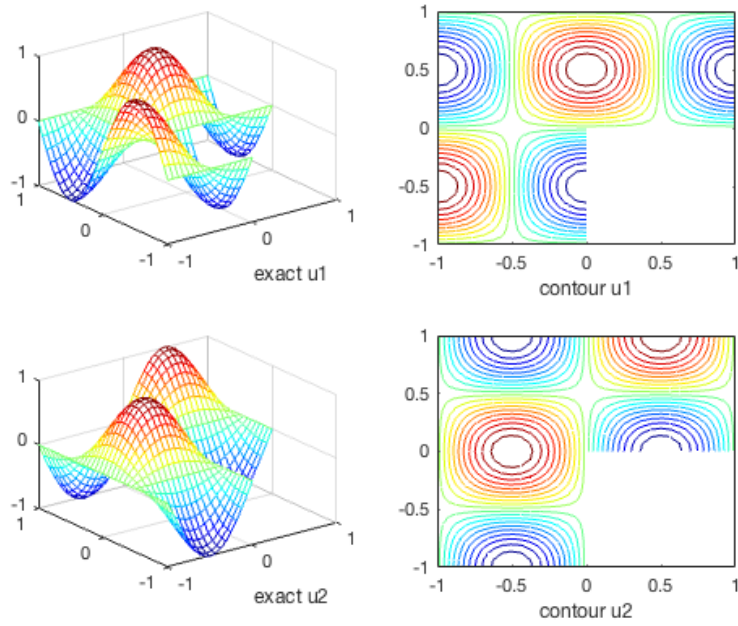


fig. 算例 1 的真解  $u_1$   $u_2$

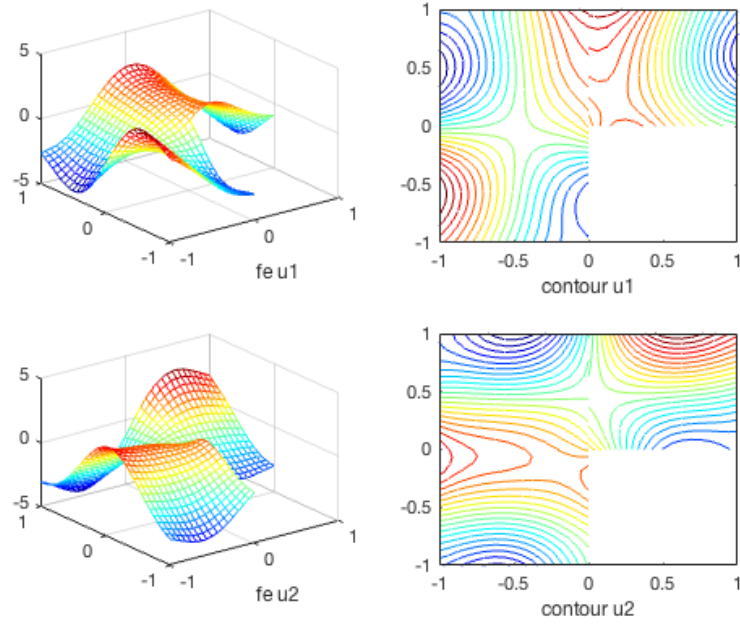


fig.  $\omega=1$  时 p1-p1 元算例 1 的有限元解

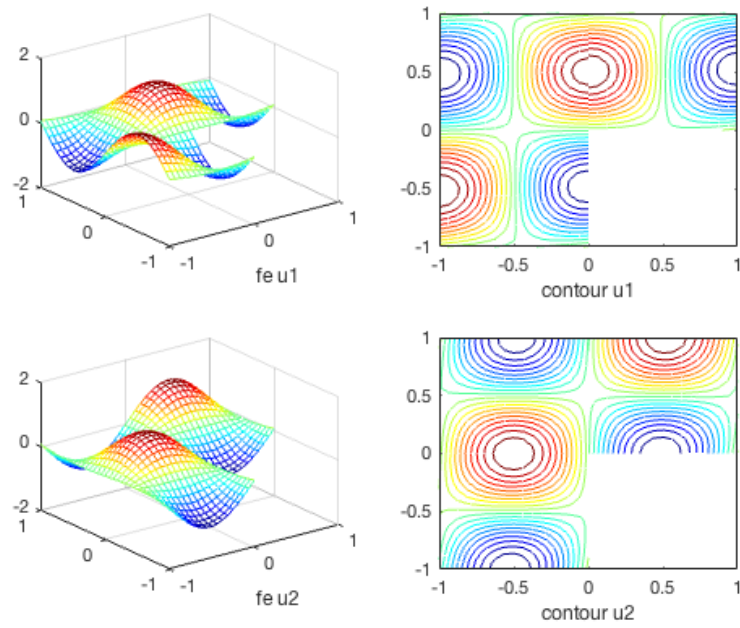


fig.  $\omega=0$  时 p1-p1 元算例 1 的有限元解

表 1:  $\omega = 0$  时, 算例 1 的  $\mathbf{u}$  的能量范数绝对误差

| $h^*$ | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|       | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4   | 3.62e-01      | -        | 5.34e-02      | -        | 4.65e-03      | -        |
| 1/8   | 1.88e-01      | 9.40e-01 | 1.43e-02      | 1.90e+00 | 5.96e-04      | 2.96e+00 |
| 1/16  | 9.63e-02      | 9.71e-01 | 3.70e-03      | 1.97e+00 | 7.53e-05      | 2.98e+00 |
| 1/32  | 4.87e-02      | 9.83e-01 | 9.27e-04      | 1.99e+00 | 9.47e-06      | 2.99e+00 |
| 1/64  | 2.44e-02      | 9.92e-01 | 2.37e-04      | 2.00e+00 | 1.19e-06      | 3.00e+00 |

表 2:  $\omega = 0$  时, 算例 1 的  $\mathbf{u}$  的 L2 范数绝对误差

| $h^*$ | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|       | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4   | 2.27e-01      | -        | 5.34e-02      | -        | 9.94e-04      | -        |
| 1/8   | 1.02e-01      | 1.15e+00 | 2.12e-02      | 2.61e+00 | 5.33e-05      | 4.22e+00 |
| 1/16  | 4.42e-02      | 1.20e+00 | 3.54e-03      | 2.69e+00 | 3.13e-06      | 4.08e+00 |
| 1/32  | 1.58e-02      | 1.48e+00 | 5.32e-04      | 2.59e+00 | 1.90e-07      | 4.04e+00 |
| 1/64  | 4.88e-02      | 1.69e+00 | 9.87e-05      | 2.56e+00 | 1.19e-08      | 4.00e+00 |

example2

区域: L 型域真解:

$$q(x, y) = r^{2/3} \cdot \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$$

$$u1(x, y) = \frac{-2}{3} r^{-1/3} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$u2(x, y) = \frac{2}{3} r^{-1/3} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

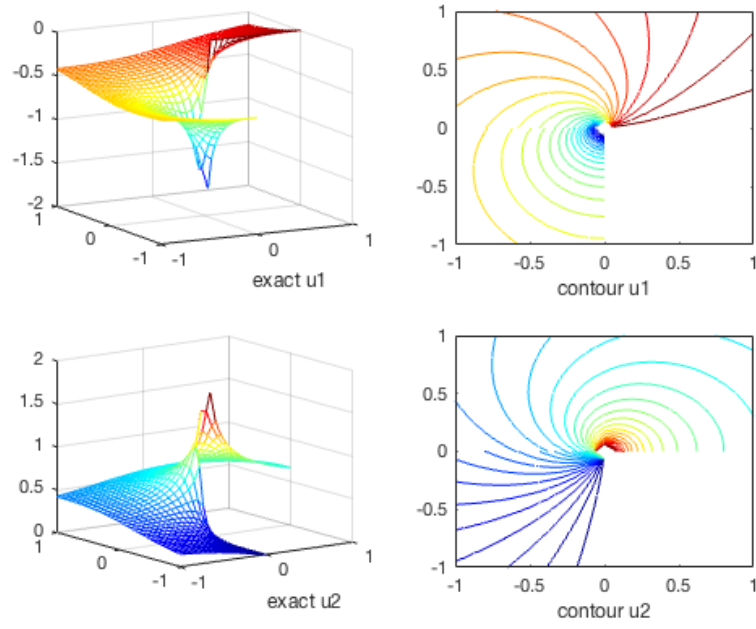


fig. 算例 2 的真解  $u_1$   $u_2$

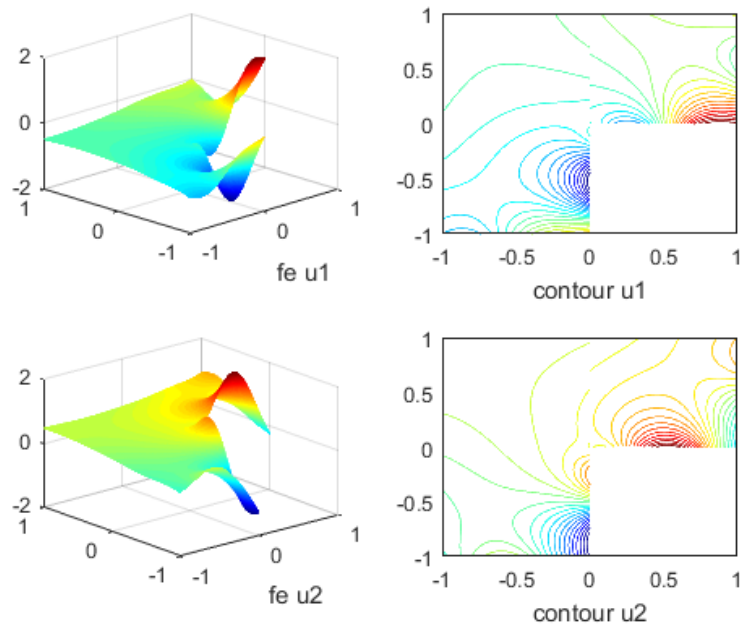


fig.P1-P1 算例 2 的有限元解  $u_1$   $u_2$   $h=1/256$

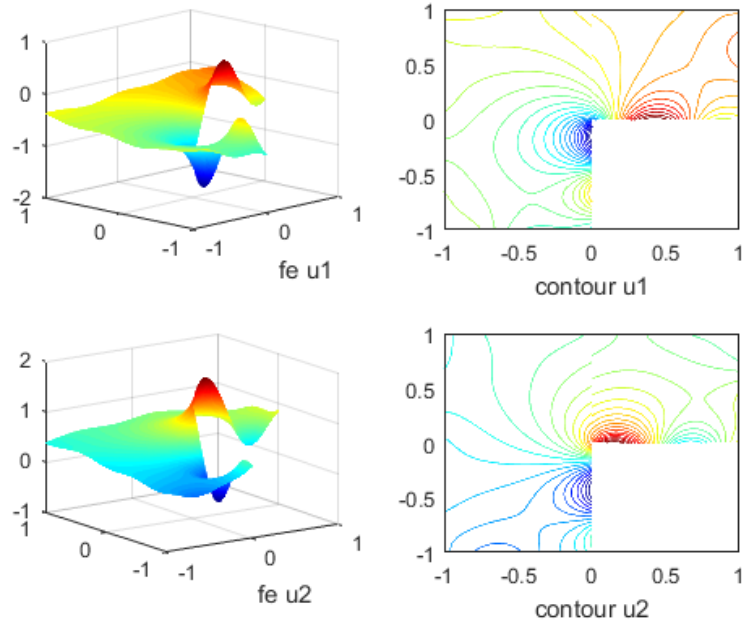


fig.P1-P1 算例 2 的有限元解  $u_1$   $u_2$   $h=1/512$

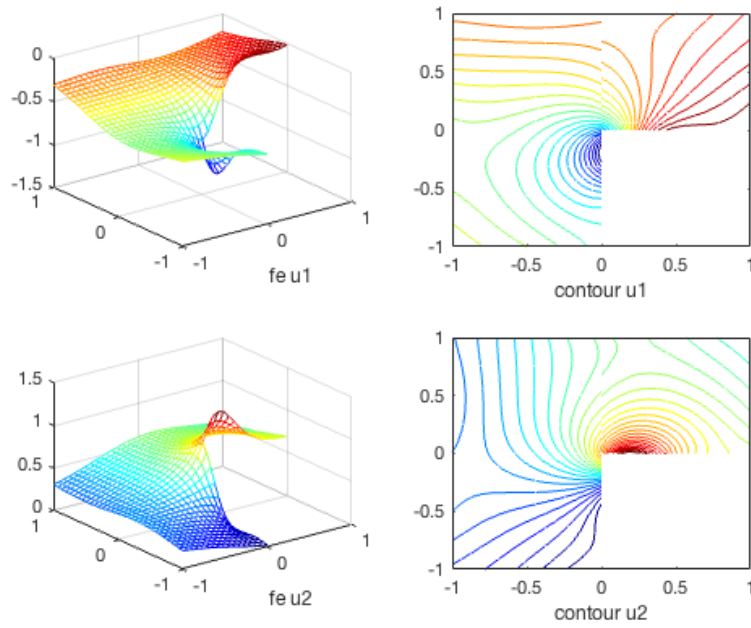


fig. p2-p1 元  $w=1$   $h=1/8$  有限元解  $u_1$   $u_2$

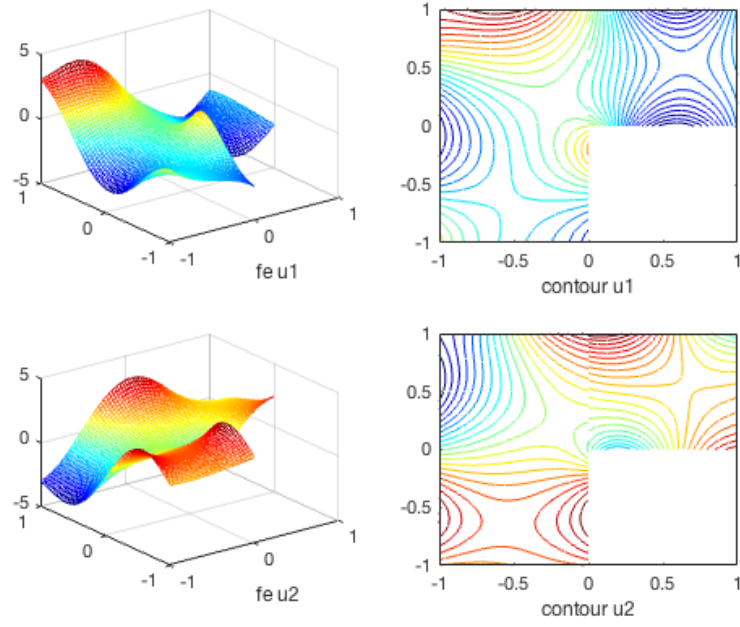


fig. p2-p1 元  $w=1$   $h=1/16$  有限元解  $u_1$   $u_2$

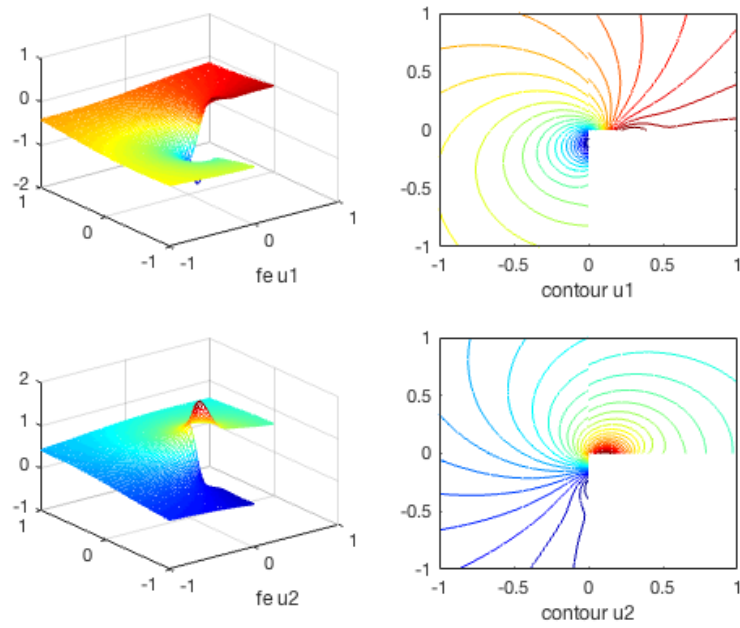


fig. p2-p1 元  $w=0$   $h=1/16$  有限元解  $u_1$   $u_2$

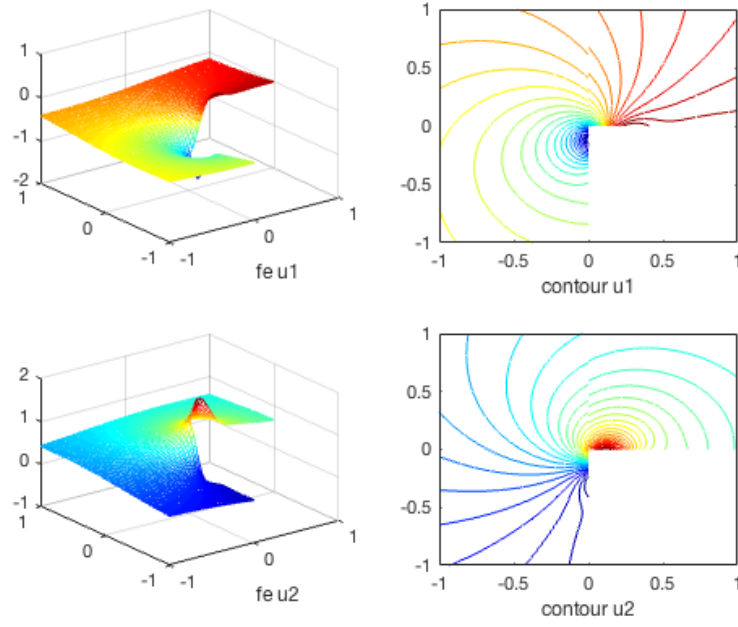


fig. p2-p1 元  $w=0.5$   $h=1/16$  有限元解  $u_1$   $u_2$

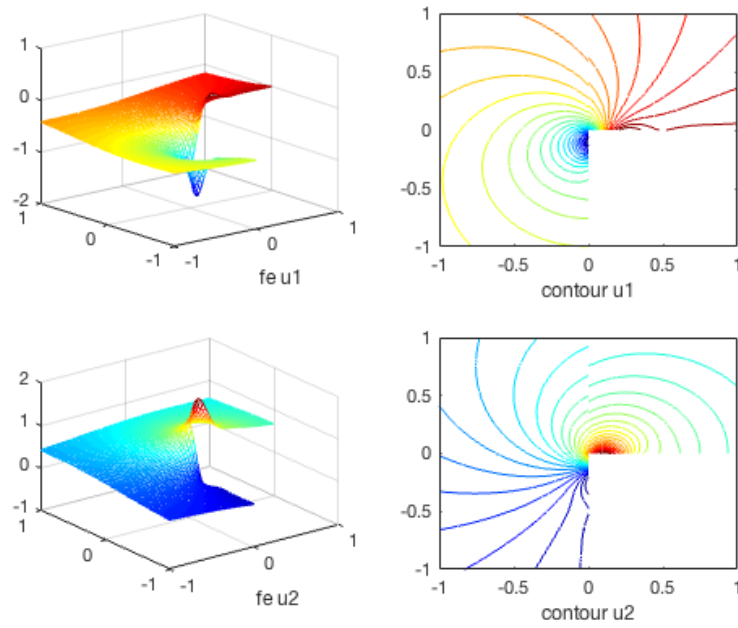


fig. p2-p1 元  $w=i$   $h=1/16$  有限元解  $u_1$   $u_2$



表 3:  $\omega = 0$  时, 算例 2 的  $\mathbf{u}$  的能量范数绝对误差

| h    | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|      | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4  | 2.87e-01      | -        | 1.84e-01      | -        | 1.34e-01      | -        |
| 1/8  | 2.38e-01      | 2.70e-01 | 1.38e-01      | 4.12e-01 | 9.72e-02      | 4.67e-01 |
| 1/16 | 1.92e-01      | 3.05e-01 | 1.03e-01      | 4.20e-01 | 7.03e-02      | 4.67e-01 |
| 1/32 | 1.54e-01      | 3.21e-01 | 7.68e-02      | 4.25e-01 | 5.07e-02      | 4.71e-01 |
| 1/64 | 1.23e-01      | 3.28e-01 | 5.70e-02      | 4.30e-01 | 3.65e-02      | 4.76e-01 |

表 4:  $\omega = 0$  时, 算例 2 的  $\mathbf{u}$  的 L2 范数绝对误差

| h*   | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|      | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4  | 2.35e-01      | -        | 1.44e-01      | -        | 1.02e-01      | -        |
| 1/8  | 1.92e-01      | 2.92e-01 | 1.11e-01      | 3.78e-01 | 7.77e-02      | 3.97e-01 |
| 1/16 | 1.54e-01      | 3.13e-01 | 8.46e-02      | 3.89e-01 | 5.80e-02      | 4.22e-01 |
| 1/32 | 1.24e-01      | 3.18e-01 | 6.41e-02      | 4.01e-01 | 4.27e-02      | 4.40e-01 |
| 1/64 | 9.91e-02      | 3.23e-01 | 4.82e-02      | 4.11e-01 | 3.12e-02      | 4.53e-01 |

表 5:  $\omega = 0.5$  时, 算例 2 的  $\mathbf{u}$  的能量范数绝对误差

| h*   | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|      | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4  | 2.91e-01      | -        | 1.84e-01      | -        | 1.33e-01      | -        |
| 1/8  | 2.41e-01      | 2.73e-01 | 1.38e-01      | 4.12e-01 | 9.67e-02      | 4.68e-01 |
| 1/16 | 1.95e-01      | 3.01e-01 | 1.03e-01      | 4.21e-01 | 7.00e-02      | 4.66e-01 |
| 1/32 | 1.55e-01      | 3.25e-01 | 7.67e-02      | 4.25e-01 | 5.05e-02      | 4.70e-01 |
| 1/64 | 1.24e-02      | 3.30e-01 | 5.70e-02      | 4.29e-01 | 3.64e-02      | 4.75e-01 |

表 6:  $\omega = 0.5$  时, 算例 2 的  $\mathbf{u}$  的 L2 范数绝对误差

| $h^*$ | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|       | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4   | 2.48e-01      | -        | 1.50e-01      | -        | 1.05e-01      | -        |
| 1/8   | 2.04e-01      | 2.82e-01 | 1.15e-01      | 3.84e-01 | 7.96e-02      | 4.02e-01 |
| 1/16  | 1.64e-01      | 3.17e-01 | 8.73e-02      | 3.93e-01 | 5.93e-02      | 4.24e-01 |
| 1/32  | 1.31e-01      | 3.22e-01 | 6.60e-02      | 4.03e-01 | 4.37e-02      | 4.41e-01 |
| 1/64  | 1.04e-02      | 3.26e-01 | 4.96e-02      | 4.11e-01 | 3.19e-02      | 4.54e-01 |

表 7:  $\omega = i$  时, 算例 2 的  $\mathbf{u}$  的能量范数绝对误差

| $h^*$ | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|       | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4   | 2.93e-01      | -        | 1.90e-01      | -        | 1.39e-01      | -        |
| 1/8   | 2.44e-01      | 2.63e-01 | 1.43e-01      | 4.01e-01 | 1.00e-01      | 4.68e-01 |
| 1/16  | 1.98e-01      | 3.03e-01 | 1.07e-01      | 4.20e-01 | 7.29e-02      | 4.69e-01 |
| 1/32  | 1.58e-01      | 3.20e-01 | 7.94e-02      | 4.27e-01 | 5.25e-02      | 4.73e-01 |
| 1/64  | 1.27e-01      | 3.27e-01 | 5.89e-02      | 4.31e-01 | 3.77e-02      | 4.79e-01 |

表 8:  $\omega = i$  时, 算例 2 的  $\mathbf{u}$  的 L2 范数绝对误差

| $h^*$ | P1-P1 element |          | P2-P1 element |          | P3-P1 element |          |
|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
|       | error         | Order    | error         | Order    | error         | Order    |
| 1/4   | 2.08e-01      | -        | 1.32e-01      | -        | 9.56e-02      | -        |
| 1/8   | 1.68e-01      | 3.03e-01 | 1.02e-01      | 3.66e-01 | 7.30e-02      | 3.89e-01 |
| 1/16  | 1.36e-01      | 3.05e-01 | 7.84e-02      | 3.83e-01 | 5.46e-02      | 4.17e-01 |
| 1/32  | 1.10e-01      | 3.12e-01 | 5.95e-02      | 3.99e-01 | 4.03e-02      | 4.37e-01 |
| 1/64  | 8.80e-02      | 3.17e-01 | 4.47e-02      | 4.10e-01 | 2.95e-02      | 4.51e-01 |

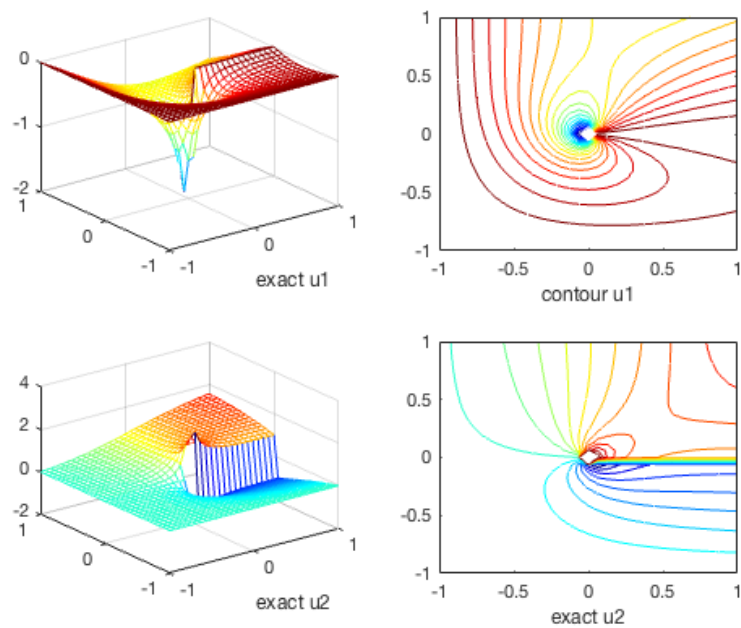


fig. 算例 3 的真解  $u_1$   $u_2$