SPOJ PROBLEM POLYEQ

W E L C O M E

Kelompok: BismillahDirestuiBapak

slidesmania.com

Nama Anggota

- Andika Rahman Teja (5025221022)
- Zelvan Abdi Wijaya (5025221125)
- Muhammad Aqil Farrukh (5025221158)
- Mochammad Zharif Asyam Marzuqi (5025221163)

Sphere online judge

PROBLEMS STATUS RANKS DISCUSS CONTESTS sign in

Problems / classical / Polynomial Equations

Status Ranking

Submit solution!

POLYEQ - Polynomial Equations

no tags

You are given the polynomial F(x) as the sum of monomials. Each monomial has the form:
[*coefficient**]*x*[^*degree*] or [*coefficient*],
where *coefficient* and *degree* are integers such that -30000 <= *coefficient* <= 30000, 0 <= *degree* <= 6. The parameters given in [] can be skipped.
In this problem you have to find all solutions of the equation: F(x)=0.

Input

t – the number of test cases, then *t* test cases follow. [*t* <= 100]
Each line contains one polynomial *F(x)* given as string *s* in the form described above.
The length of string *s* is not more than 300 characters.

Output

For each test case output all solutions (including repeated) of the given equation in non-decreasing order. All solutions lie within the interval [-100.0; 100.0]. Each solution must be given with an error of not more than 0.01. It's guaranteed that all solutions are real, not complex.

Example

```
Input:
2
x^4-6*x^3+11*x^2-6*x
-x^2+2*x-1

Output:
0.00 1.00 2.00 3.00
1.00 1.00
```

Added by:	Roman Sol
Date:	2005-01-27
Time limit:	1.694s
Source limit:	50000B
Memory limit:	1536MB
Cluster:	Cube (Intel G860)
Languages:	All except: ERL JS-RHINO
Resource:	ZCon 2005

POLYEQ

DASAR TEORI

Untuk dapat menemukan akar-akar persamaan polinomial, kita dapat menggunakan pendasaran teori aljabar.

Pada penerapannya, terdapat beberapa rumus umum yang dapat digunakan untuk mencari akar-akar persamaan polinomial pada derajat tertentu.

DASAR TEORI

Polinomial Derajat 0

Pada derajat ini, **tidak ada solusi** akar persamaan dikarenakan tidak ada variabel yang akan dipecahkan (dicari solusinya).

Polinomial Derajat 1

Pada derajat ini, solusi dapat ditemukan dengan cara membagi nilai konstanta dengan koefisien pada derajat 1 lalu dikalikan dengan -1

$$ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

DASAR TEORI

Polinomial Derajat 2

Pada derajat ini, dapat diselesaikan dengan menggunakan **rumus ABC** seperti berikut:

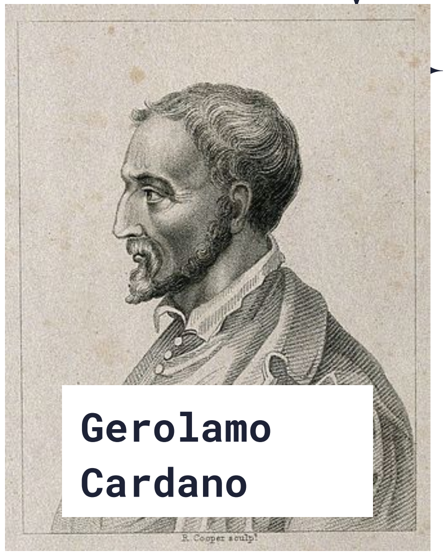
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Polinomial Derajat 3 dan 4

Pada polinomial derajat 3, terdapat rumus umum berupa “**Cardano Formula**”. Sementara pada polinomial derajat 4, terdapat rumus umum berupa “**Ferrari Formula**” yang juga berkaitan dengan Cardano Formula.

TEORI CARDANO DAN FERRARI

Teori ini adalah teori yang berkelanjutan dimana Gerolamo Cardano lebih dahulu menemukan solusi untuk penyelesaian pangkat 3 atau cubic equation. Kemudian Lodovico Ferrari menemukan solusi kuartik atau pangkat 4 pada tahun 1540, tetapi karena solusi ini, seperti semua solusi aljabar kuartik, memerlukan solusi kubik untuk ditemukan, maka solusi tersebut tidak dapat segera dipublikasikan. Solusi kuartik diterbitkan bersama dengan solusi kubik oleh mentor Ferrari yaitu Gerolamo Cardano dalam buku Ars Magna (1545).



Gerolamo Cardano

Lodovico Ferrari

Alasan Penggunaan Cardano dan Ferrari di Problem ini

Awalnya teori ini akan digunakan untuk optimasi program karna dapat dibilang teori ini langsung menggunakan rumus yang berarti mengurangi penggunaan brute force dengan perulangan yang berulang sehingga langsung mendapatkan jawaban yang tepat untuk cubic dan quartic equation. Ini juga berlaku untuk ferrari tapi di algoritma ferrari memiliki kekurangan di akurasi jika akar-akar pangkat 4 adalah bilangan desimal yang rumit sehingga bisa diakurasikan dengan cara melakukan newton rhapson sebanyak sekali saja. Tapi sebenarnya testcase yang ada di problem POLYEQ, tidak memiliki akar desimal yang rumit, jadi sebenarnya tidak perlu mengakurasikan hasil dari ferrari. Tapi disini saya akan menjelaskan alasannya saat penjelasan Ferrari method.

CATATAN UNTUK PENJELASAN TEORI CARDANO DAN FERRARI

Saya Muhammad Aqil Farrukh meminta maaf kepada Bapak apabila ada beberapa persamaan yang tidak saya turunkan atau jabarkan secara rinci, ditakutkan terlalu banyak memakan halaman karena penjelasan penjabaran suatu persamaan. Jadi di penjelasan teori Cardano dan Ferrari berikut saya akan memberikan hasil step by step dimana saya sudah berusaha serinci mungkin dan saya buat agar mudah dipahami. Saya mohon maaf apabila ada penjelasan yang kurang rinci dikarenakan penjabaran dan penyederhanaannya terlalu banyak, yang mana saya hanya mengambil intisari dan poin-poin penting dari teori cardano dan ferrari sehingga didapatkan nilai akar-akar persamaan yang sesuai. Saya juga sudah memberikan link youtube referensi untuk dua teori ini di slide akhir.

Penjelasan Teori Cardano

Misal ada suatu persamaan cubic

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

maka untuk menjadikannya sebuah persamaan cubic natural yang mana untuk a = 1, maka harus membagi semua koefisiennya dengan a.

$$\frac{A}{A}x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$$

karena sekarang koefisien a menjadi 1 karena sudah dibagi dengan dirinya sendiri, maka bisa untuk tidak perlu ditulis, sehigga persamaan menjadi

$$x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$$

kita bisa memisalkan kembali agar mudah sehingga persamaannya sebagai berikut

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Sekarang untuk menjadikan persamaan itu menjadi depressed cubic adalah dengan melakukan subtitusi x = y - a/3, ini dilakukan untuk menghilangkan x^2 sehingga persamaan bisa menjadi
$y^3 + py + q = 0$

Apabila sudah selesai disubtitusi, maka hasil dari p adalah sebagai berikut

$$p = -\left(\frac{a^2}{3}\right) + b$$

$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

```
double p = -(a * a / 3.0) + b;
double q = (2.0 / 27.0 * a * a * a) - (a * b / 3.0) + c;
double discriminant = q * q / 4.0 + p * p * p / 27.0;
```

Kemudian untuk mendapatkan perandaian lain, kita tahu bahwa ada persamaan

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u+v)^3 = u^3 + 3uv(u+v) + v^3$$

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - \left(u^3 + v^3\right) = 0$$

$$y^3 \quad + \quad py \quad + \quad q \quad = 0$$

Jadi dari persamaan diatas karena setara, maka bisa dimisalkan

$y = u + v$ .... *(tidak digunakan dulu karna secara teknik y bisa didapatkan setelah mengetahui nilai u dan v dari persamaan* (1) *dan* (2) *dibawah*)

$p = -3uv$ ...... (1)

$q = -\left(u^3 + v^3\right) \Rightarrow -q = u^3 + v^3$ ...... (2)

kemudian untuk mencari nilai u, akan dilakukan subtitusi dan perpangkatan untuk persamaan 1 dan 2

(2) x u^3 $\rightrightarrows$ $-qu^3 = \left(u^3\right)^2 + u^3v^3$ ..... (3)

$(1)^3$ $\rightrightarrows$ $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ ....(4)

subtitusi 4 ke 3

$$-qu^3 = \left(u^3\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\left(u^3\right)^2 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

kemudian dengan rumut kuadratik akan didapatkan nilai u^3

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$ ....(5) (jika dicari v , maka rumus nya juga sama dengan u)

karena rumus kuadrat adalah $-b \pm \sqrt{D}$ maka Diskriminan nya adalah $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

dari persamaan sebelumnya diketahui bahwa y = u+v
maka akan ada 3 solusi berbeda untuk solusi y

$$y1 \rightrightarrows \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y2 \rightrightarrows \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y3 \rightrightarrows \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

karena hanya dibutuhkan 1 nilai y yang memenuhi persamaan $y^3 + py + q = 0$, maka jika y1, y2 dan y3 disubtitusi ke persamaan tersebut, jawaban yang valid hanyalah y3.

Untuk langkah selanjutnya yaitu mencari diskriminan dimana akan ada 3 kondisi diskriminan, D>0 , D = 0, dan D<0 karena hanya dibutuhkan 1 nilai y yang memenuhi persamaan $y^3 + py + q = 0$, maka jika y1, y2 dan y3 disubtitusi ke persamaan tersebut, jawaban yang valid hanyalah y3.

Untuk langkah selanjutnya yaitu mencari diskriminan dimana akan ada 3 kondisi diskriminan, D>0 , D = 0, dan D<0

Dari bentuk kuadrat sebelumnya dapat diketahui bahwa nilai Diskriminan = $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Dari bentuk kuadrat sebelumnya dapat diketahui bahwa nilai Diskriminan = $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Berikut adalah kondisi-kondisi untuk diskriminannya.

1. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ **> 0 (D>0)**

   Jika D>0 Maka akan ada 1 solusi Real dan 2 Complex (Imajiner dan real)

2. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ **= 0 (D=0)**

   Jika D = 0 maka akan ada 3 solusi Real, dimana 2 solusi sama, dan 1 solusi berbeda

3. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ **< 0 (D<0)**

   Jika D<0, maka akan ada 3 solusi Real yang berbeda

dan untuk mendapatkan nilai x, maka jangan dilupakan bahwa x = y-a/3

Lalu kita akan masuk ke kondisi penyelesaian untuk setiap diskriminan

1. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ **> 0 (D>0)**

Jika D > 0, maka akan ada 1 sollusi real dan 2 solusi complex. Karena ini sebenarnya tidak dibutuhkan di soal POLYEQ, maka tidak perlu dimasukkan ke dalam code. Tapi akan saya jabarkan penjelasannya.

Dari pencarian akar dari y sudah diketahui bahwa nilai y yang valid adalah

$$y3 \rightrightarrows \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y \rightrightarrows u0 + v0$$

maka itu adalah solusi real jika D>0 , dan solusi complex nya akan menggunakan nilai $\epsilon 1$ dan $\epsilon 2$ yang akan diambil dari primitive root of unity (Teori De Moivre) untuk pangkat 3. Perlu diketahui bahwa primitive root of unitiy ini adalah sebuah persamaan atau bilangan yang apabila dipangkatkan n akan menghasilkan 1. Dalam kasus ini adalah $\epsilon 1$ dan $\epsilon 2$ jika dipangkatkan 3 akan menghasilkan 1. Didapatkan nilai $\epsilon 1$ dan $\epsilon 2$ sebagai berikut.

$$\epsilon 1 \;=\; \left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right) \; dan \; \epsilon 2 \;=\; \left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

jadi jika dicari nilai u dan v complex, maka solusi nya adalah sebagai berikut.

$$u1 \;=\; u0 \times \epsilon 1 \,,\; v1 \;=\; v0 \times \epsilon 1$$
$$u2 \;=\; u0 \times \epsilon 2 \,,\; v2 \;=\; v0 \times \epsilon 2$$

jadi jika dicari nilai u dan v complex, maka solusi nya adalah sebagai berikut.

$$u1 = u0 \times \epsilon 1 \,,\; v1 = v0 \times \epsilon 1$$
$$u2 = u0 \times \epsilon 2 \,,\; v2 = v0 \times \epsilon 2$$

Jika u0,u1,u2 dan v0,v1,v2 dikombinasikan untuk mencari nilai y , maka akan ada 9 kombinasi yang memungkinkan untuk mencari nilai yang valid untuk D>0. Tapi yang dibutuhkan hanya 3 solusi y saja, maka dari itu akan dilakukan pengecekan dengan menggunakan persamaan (1) yaitu $u \times v = -\frac{p}{3}$. Dari pengecekan kombinasi, didapatkan hasil y1, y2, dan y3 sebagai berikut, dimana y1 adalah solusi real, y2 dan y3 adalah complex.

y1 = u0 + v0
y2 = u1 + v2
y3 = u2 + v1

untuk mencari nilai x, maka harus mengurangi masing-masing nilai y dengan a/3
berikut adalah nilai masing masing x1,x2,dan x3 yang paling sederhana

$$x1 = u0 + v0 - a/3$$
$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x2 = x2\ real + x2\ complex$$
$$= \left(\frac{-(u+v)}{2} - \frac{a}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times (u-v)\right)$$
$$x3 = x2\ real - x2\ complex$$
$$= \left(\frac{-(u+v)}{2} - \frac{a}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times (u-v)\right)$$

2. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ **= 0 (D=0)**

Jika D = 0, maka akan ada 3 solusi real dimana 2 solusi kembar, dan 1 solusi beda.

$$\begin{aligned} y1 &= u0 + v0 \\ y2 &= u0\epsilon 1 + v0\epsilon 2 \\ &= -\frac{1}{2}(u0 + v0) \end{aligned}$$

y2 akan sama dengan y3. Kemudian masing-masing y akan dikurangi dengan a/3, untuk mendapatkan x1,x2 dan x3

Berikut adalah penerapan codenya untuk D=0

```
if (abs(discriminant) == 0)
{

    double u = Xroot(-q / 2.0, 3.0);
    double v = Xroot(-q / 2.0, 3.0);
    double solve1 = u + v - a / 3.0;
    double solve2 = -(u + v) / 2.0 - a / 3.0;
    roots.push_back(solve1);
    roots.push_back(solve2);
    roots.push_back(solve2);
}
```

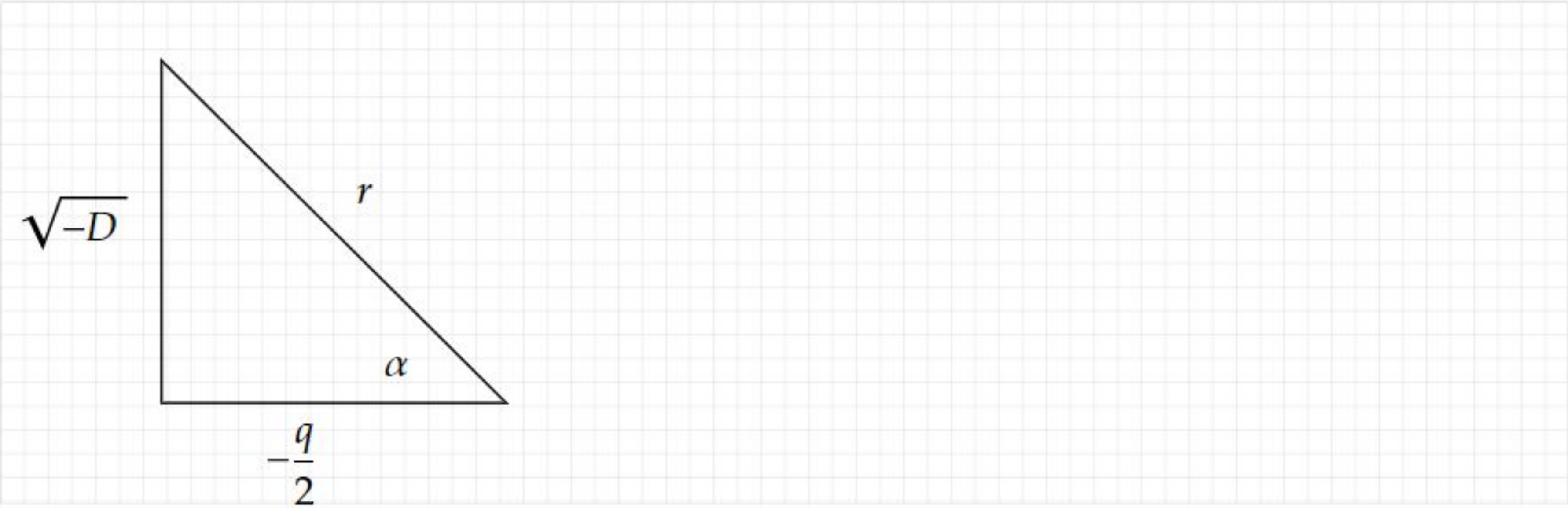
3. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ **< 0 (D<0)**

untuk kasus ini disebut "CASUS IRREDUCIBLIS' dimana D akan menjadi complex dan juga akar u dan v akan menjadi kompleks.
Sehingga,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}}\ ,\quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\sqrt{-D}}$$

untuk menyelesaikan ini dibutuhkan interpretasi complex tersebut sebagai r yaitu jarak antara $-\frac{q}{2}$ dan $\sqrt{-D}$ dan sudut α antara itu

$$r = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-D}\right)^2}$$
$$= \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$



$$\alpha u = atan\left(\frac{\sqrt{-D}}{-\frac{q}{2}}\right)$$

$$\alpha v = 2\pi - \alpha u$$

Untuk mendapatkan nilai u dan v, maka akan membagi sudut α dengan 3, kemudian akan diguanakan cos dan i sin untuk sudut alpha tersebut, Solusi pertama u akan menggunakan sudut $\frac{\alpha}{3}$, solusi kedua akan menggunakan $\frac{2\pi + \alpha}{3}$, dan yang ketiga menggunakan $\frac{4\pi + \alpha}{3}$.

Untuk solusi v karna kita tahu bahwa $\alpha v = 2\pi - \alpha u$, maka solusi pertama v adalah dengan menggunakan sudut $\frac{2\pi - \alpha u}{3}$ kemudian untuk solusi 2 mengalikan sudut 2π *dengan* 2 yaitu menjadi 4π dan yang ketiga menjadi 6π .

dengan itu didapatkan 3 solusi u dan 3 solusi v , jika dikombinasikan akan ada 9 kombinasi, tapi hanya ada 3 solusi valid. berikut adalah solusi valid untuk hasil akhir x.

$$x1 = \sqrt[3]{r} + (\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{6\pi - \alpha}{3}\right) - a/3$$

$$x2 = \sqrt[3]{r} + (\cos\left(\frac{2\pi + \alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi - \alpha}{3}\right) - a/3$$

$$x3 = \sqrt[3]{r} + (\cos\left(\frac{4\pi + \alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi - \alpha}{3}\right) - a/3$$

```
if (discriminant < 0)
{

    double r = sqrt(-p * p * p / 27.0);
    double alpha = atan(sqrt(-discriminant) / -q * 2.0);
    if (q > 0) // if q > 0 maka sudut menjadi PI + alpha
        alpha = PHI + alpha;

    double solve1 = Xroot(r, 3.0) * (cos((6.0 * PHI - alpha) / 3.0) + cos(alpha / 3.0)) - a / 3.0;
    double solve2 = Xroot(r, 3.0) * (cos((2.0 * PHI + alpha) / 3.0) + cos((4.0 * PHI - alpha) / 3.0)) - a / 3.0;
    double solve3 = Xroot(r, 3.0) * (cos((4.0 * PHI + alpha) / 3.0) + cos((2.0 * PHI - alpha) / 3.0)) - a / 3.0;
    roots.push_back(solve1);
    roots.push_back(solve2);
    roots.push_back(solve3);
}
```

Penjelasan Teori FERRARI

FERRARI METHOD (QUARTIC EQUATION)

Misalkan ada

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

kemudian agar koefisien pangkat tertinggi menjadi 1 maka semua koefisien harus dibagi dengan a sehingga persamaan menjadi

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}s^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

Kemudian untuk mengkonversi persamaan itu agar bisa menjadi depressed quartic, maka harus menghilangan x^3 dengan mensubtitusikan $x = y - \frac{b}{4a}$

maka persamaan depress quartic nya adalah sebagai berikut

$y^4 + py^2 + qy + r = 0$

dengan

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3}$$

$$r = \frac{-3b^2 + 256ea^3 - 64bda^2 + 16b^2ca}{256a^4}$$

Langkah selanjutnya adalah untuk mencari nilai y adalah dengan menambah satu variabel lagi yaitu variable λ. Caranya adalah dengan menambahkan $\left(y^2 + p + \lambda\right)^2$ di kedua ruas (ruas kiri dan kanan).

APLIKASI DALAM CODE

```
// depressed QUARTIC
double p = ((8.0 * A * C) - (3.0 * B * B)) / (8.0 * A * A);
double q = ((B * B * B) - (4.0 * A * B * C) + (8.0 * A * A * D)) / (8.0 * A * A * A);
double r = ((-3.0 * B * B * B * B) + (256.0 * E * A * A * A) - (64.0 * B * D * A * A) + (16 * B * B * C * A)) / (256.0 * A * A * A * A);
```

Sehingga persamaannya menjadi

$$\left(y^2+p+\lambda\right)^2 + y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2+p+\lambda\right)^2$$

kemudian setelah disederhanakan dan dikelompokkan, maka persamaannya menjadi

$$\left(y^2+p+\lambda\right)^2 = (p+2\lambda)y^2 + (-q)y + \left(\lambda^2 + 2\lambda p + p^2 - r\right)$$

Diketahui dari persamaan diatas bahwa

$(p+2\lambda)y^2 + (-q)y + \left(\lambda^2 + 2\lambda p + p^2 - r\right)$ adalah fungsi kuadrat seperti $ay^2 + by + c$

Maka dengan asumsi bahwa nilai y hanya ada 1 dimana Diskriminan = 0 (2 Akar Real kembar)

Maka dengan rumus diskriminan D = $b^2 - 4ac$, diskriminannya adalah sebagai berikut,

$$(-q)^2 - 4(p+2\lambda)\left(\lambda^2 + 2\lambda p + p^2 - r\right) = 0$$

kemudian setelah di sederhanakan, maka persamaannya menjadi

$$\lambda^3 + \frac{5}{2}p\lambda^2 + \left(2p^2 - r\right)\lambda + \left(\frac{p^3}{2} - \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8}\right) = 0$$

Dari persamaan barusan dapat diketahui bahwa itu adalah persamaan pangkat tiga atau cubic equation. Maka dibutuhkan rumus cardano, dimana untuk mencari nilai λ maka persamaan itu akan dimasukkan ke dalam rumus cardano yang sudah dijelaskan sebelumnya.

Setelah dimasukkan dan ditemukan nilai untuk λ maka dicek nilai lambda dengan syarat apakah $p + 2\lambda\,! =\ 0$, Pengecekan itu dilakukan karena apabila nilai $p + 2\lambda\ =\ 0$ maka persamaan diskriminan

$$(-q)^2\ - 4(p + 2\lambda)\left(\lambda^2\ +\ 2\lambda p\ +\ p^2\ - r\right)\ =\ 0$$

akan menjadi
$(-q)^2 = 0$

Dimana tidak logis, karena nilai q dari perhitungan p,q,r sebelumnya bisa saja tidak 0. Karena itu nilai λ harus dicek agar memenuhi syarat $p + 2\lambda\,! =\ 0$

APLIKASI CODE

```
// FIND FERRARI Y (mencari lambda)
double a3 = 1.0;
double a2 = 5.0 / 2.0 * p;
double a1 = (2.0 * (p * p)) - r;
double a0 = ((p * p * p) / 2.0) - (p * r / 2.0) - (q * q / 8.0);
CubicEquation solver(a3, a2, a1, a0);
vector<double> hasilpangkattiga = solver.Solve();
double y;
for (double root : hasilpangkattiga)
{
    if (p + 2.0 * root != 0.0)
    {
        y = root;
        break;
    }
}
```

ALASAN KENAPA TEORI FERRARI TIDAK AKURAT

$$\lambda^3 + \frac{5}{2}p\lambda^2 + \left(2p^2 - r\right)\lambda + \left(\frac{p^3}{2} - \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8}\right) = 0$$

Dari pencarian nilai λ di persamaan diatas, bisa saja didapatkan 3 nilai λ yang berbeda, dan apabila ketiga nilai memenuhi maka seharusnya diambil rata-rata. Saya sudah pernah menerapkan nilai rata-rata untuk ketiga nilai λ. Tapi ketidakakuratan nya masih diatas 0,01, dimana mencapai 0,05. Tapi ketidak akuratan ini hanya berlaku untuk akar-akar persamaan yang desimal.
Contoh apabila ada persamaan
$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3$
akar-akar nya adalah x = 2.62 , 0.38 , 1.30 , -2.30

Apabila diterapkan ferrari, maka hasilnya bisa tidak akurat seperti
x = 2.65 , 0.42 , 1.32 , -2.31

Salah satu cara untuk mengakuratkan nilai x itu adalah dengan cara menggunakan newton-rhapson sekali, yaitu mengurangi tiap nilai x dengan $f(x)\ /\ df(x)$. Tidak perlu ada perulangan dalam newton-rhapson, jadi hanya dilakukan sekali dan sudah pasti hasil x akan akurat.

Tetapi dalam soal POLYEQ, tidak ada testcase yang akar desimalnya sangat rumit seperti itu, jadi meski tidak saya akurasi masih bisa accepted.

Setelah ditemukan nilai λ yang memenuhi syarat, maka langkah selanjutnya adalah mencari nilai y. Dengan catatan karena sebelumnya ruas kanan dianggap D=0, maka faktor faktor ruas kanan adalah seperti $(y-a)^2$ dimana akar-akar nya adalah 2 akar real kembar.
Sehigga persamaanya menjadi,

$$\left(y^2+p+\lambda\right)^2 = \left(\sqrt{p+2\lambda}\,y - \frac{q}{2\sqrt{p+2\lambda}}\right)$$

$$\left(y^2+p+\lambda\right) = \pm\sqrt{p+2\lambda}\,y \mp \frac{q}{2\sqrt{p+2\lambda}}$$

$$y^2 + \left(\mp\sqrt{p+2\lambda}\right)y + \left(p+\lambda \pm \frac{q}{2\sqrt{p+2\lambda}}\right) = 0$$

Bentuk diatas merupakan bentuk kuadrat, yang bisa diselesaikan dengan rumus

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Setelah diterapkan rumus itu, maka didapatkan persamaan sebagai berikut.

$$y = \pm\sqrt{p+2\lambda} \pm \sqrt{(p+2\lambda) - 4\left(p+\lambda \pm \frac{q}{2\sqrt{p+2\lambda}}\right)}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{p+2\lambda} \pm \sqrt{-3p - 2\lambda \mp \frac{q}{\sqrt{p+2\lambda}}}}{2}$$

dan untuk mendapatkan nilai x maka setiap nilai y harus dikurangi dengan $\frac{b}{4a}$

karena dari subtitusi paling awal diketahui bahwa $x = y - \frac{b}{4a}$

Maka didapatkan hasil x sebagai berikut.

$$x1 = \frac{+\sqrt{p+2\lambda} + \sqrt{-3p - 2\lambda - \frac{q}{\sqrt{p+2\lambda}}}}{2} - \frac{b}{4a}$$

$$x2 = \frac{-\sqrt{p+2\lambda} + \sqrt{-3p - 2\lambda + \frac{q}{\sqrt{p+2\lambda}}}}{2} - \frac{b}{4a}$$

$$x3 = \frac{+\sqrt{p+2\lambda} - \sqrt{-3p - 2\lambda - \frac{q}{\sqrt{p+2\lambda}}}}{2} - \frac{b}{4a}$$

$$x4 = \frac{-\sqrt{p+2\lambda} - \sqrt{-3p - 2\lambda + \frac{q}{\sqrt{p+2\lambda}}}}{2} - \frac{b}{4a}$$

APLIKASI CODE

```
double firstPart = sqrt(p + 2.0 * y);
double positiveSecondPart = sqrt(-3.0 * p - 2.0 * y + 2.0 * q / sqrt(p + 2.0 * y));
double negativeSecondPart = sqrt(-3.0 * p - 2.0 * y - 2.0 * q / sqrt(p + 2.0 * y));
// x1 sampai x4
double solve1 = X0 + (firstPart + negativeSecondPart) / 2.0;
double solve2 = X0 + (-firstPart + positiveSecondPart) / 2.0;
double solve3 = X0 + (firstPart - negativeSecondPart) / 2.0;
double solve4 = X0 + (-firstPart - positiveSecondPart) / 2.0;
roots.push_back(newton(solve1));
roots.push_back(newton(solve2));
roots.push_back(newton(solve3));
roots.push_back(newton(solve4));
return roots;
```

CASE SPESIAL :

Case spesial ini hanya bisa ditemukan apabila.

1) Dari persamaan $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, apabila nilai b=0 dan d=0, maka persamaan akan menjadi $ax^4 + cx^2 + e = 0$

2) Dari persamaan $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ apabila q = 0, maka persamaanya akan menjadi $y^4 + py^2 + r = 0$

Dari dua kondisi itu , nilai x dan y bisa dicari dengan rumus kuadrat, dengan cara memisalkan $x^2 \; dan \; y^2 \; dengan \; n$ maka persamaanya akan menjadi,

(1) $an^2 + cn + e = 0$
(2) $n^2 + pn + r = 0$

kemudian setelah di temukan nilai n dengan rumus kuadrat, didapatkan nilai x dan y dengan cara
(1) $x = \pm n$
(2) y = $\pm n$

APLIKASI CODE CASE SPESIAL

```cpp
vector<double> roots;
if (B == 0 && D == 0)
{
    return biquadratic();
}
```

```cpp
if (q == 0)
{
    A = 1;
    C = p;
    E = r;
    depressedQuartic = true;
    return biquadratic();
}
```

```cpp
vector<double> biquadratic()
{
    vector<double> res;
    double z1 = (-C + sqrt((C * C) - (4.0 * A * E))) / (2.0 * A);
    double z2 = (-C - sqrt((C * C) - (4.0 * A * E))) / (2.0 * A);
    double x1 = sqrt(z1);
    double x2 = -sqrt(z1);
    double x3 = sqrt(z2);
    double x4 = -sqrt(z2);
    if (depressedQuartic)
    {
        x1 = x1 + X0;
        x2 = x2 + X0;
        x3 = x3 + X0;
        x4 = x4 + X0;
    }
    res.push_back(x1);
    res.push_back(x2);
    res.push_back(x3);
    res.push_back(x4);
    return res;
}
```

KESIMPULAN SETELAH PENGGUNAAN TEORI CARDANO DAN FERRARI

Awalnya dengan menggunakan newton rhapson saja, didapatkan waktu 0,08

32147323	☐	2023-11-09 03:58:35	Polynomial Equations	**accepted** edit ideone it	0.08	5.2M	CPP14-CLANG

Kemudian setelah dioptimasi dengan menggunakan rumus pangkat 1 dan pangkat 2, sudah bisa mencapai waktu 0,01.

Kemudian saya mencoba menerapkan teori cardano dan ferrari dengan niat mengoptimalkan pangkat 3 dan 4 yang mana saat itu untuk pangkat 3 dan 4 masih menggunakan newton rhapson. Tetapi setelah saya terapkan rumus cardano dan ferrari masih mendapatkan 0,01.Jadi asumsi saya untuk judge memang maksimal di 0,01s masa sekarang, Submission di rank POLYEQ bisa mencapai 0,0 mungkin karena dikerjakan beberapa tahun lalu saat server tidak terlalu penuh.

DASAR TEORI

POLYEQ

Pada polinomial derajat 5 dan seterusnya, **tidak ada rumus umum** yang pasti mendapatkan solusi akar persamaan secara pasti. Hal ini sesuai dengan pernyataan pada Teori Galois.

DASAR TEORI (Teori Galois)

Definisi Teori Grup

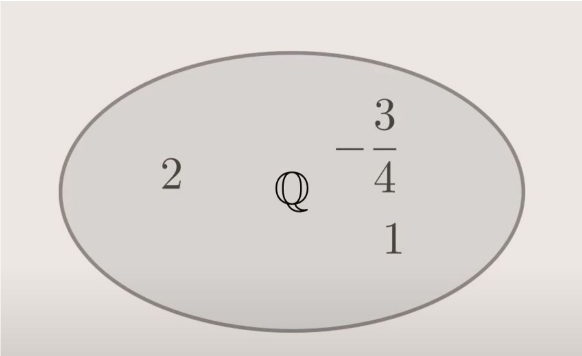
Sebuah himpunan yang terdiri dari beberapa elemen yang ketika disusun secara perkalian atau penjumlahan memiliki hasil yang sama (susunan berbentuk permutasi)

Misal: G(x,y) ⇔ x . y = y . x

Definisi Teori Medan (Field)

Sebuah ruang lingkup yang memiliki elemen-elemen yang nilainya dapat direpresentasikan dengan operasi aljabar

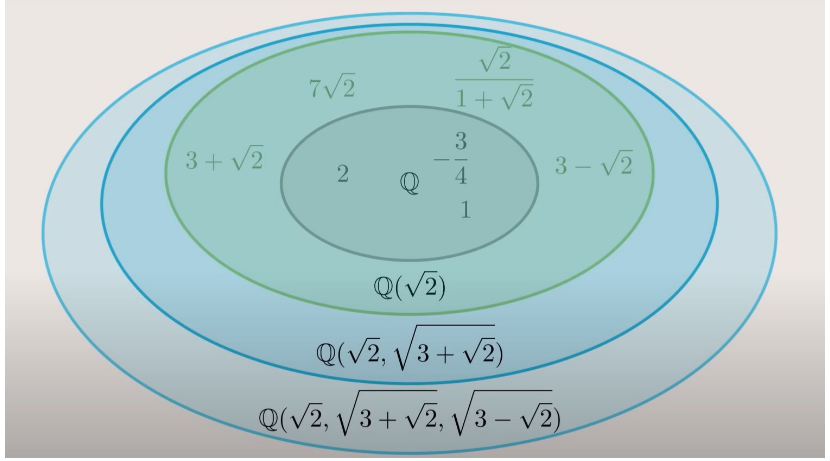
(+ , -, *, /, √)



DASAR TEORI (Teori Galois)

Teori Perluasan Field

Sebuah $\mathbb{Q}$ *Field* dapat mengalami perluasan (extension) menjadi $\mathbb{Q}(\mathbf{A})$ selama $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}$



Definisi Teori Grup Galois

Sebuah Grup yang melakukan perluasan dari sebuah $\mathbb{Q}$ *Field* menjadi F *Field* yang setiap elemen grup tersebut terdiri atas ε (identitas permutasi polinomial) dan τ (permutasi penukaran akar-akar polinomial).

$$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) = \{\varepsilon, \tau\}$$

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$\begin{gathered} Q \\ \Big\downarrow \\ Q(\sqrt{2}) \\ \Big\downarrow \\ Q\left(\sqrt{2}, \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right) \\ \Big\downarrow \\ Q\left(\sqrt{2}, \sqrt{3 + \sqrt{2}}, \sqrt{3 - \sqrt{2}}\right) \end{gathered}$$

FIELD

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{Gal(f/Q)}$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0$$

$$x_1x_2 + x_4x_3 = 0$$

$$x_2x_1 + x_3x_4 = 0$$

$$x_2x_1 + x_4x_3 = 0$$

$$x_3x_4 + x_1x_2 = 0$$

$$x_3x_4 + x_2x_1 = 0$$

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{Gal(f/Q)}$$

$$x_4 x_3 + x_1 x_2 = 0$$

$$x_4 x_3 + x_2 x_1 = 0$$

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{Gal(f/Q(\sqrt{2}))}$$

$$x_1 - x_3 + x_2 - x_4 - 4\sqrt{2} = 0$$

$$x_2 - x_3 + x_1 - x_4 - 4\sqrt{2} = 0$$

$$x_1 - x_4 + x_2 - x_3 - 4\sqrt{2} = 0$$

$$x_2 - x_4 + x_1 - x_3 - 4\sqrt{2} = 0$$

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 2\sqrt{3 + \sqrt{2}} = 0$$

$$Gal(f/Q(\sqrt{2}, \sqrt{3 + \sqrt{2}}))$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 + 0x_4 + 0x_3 - 2\sqrt{3 + \sqrt{2}} = 0$$

DASAR TEORI (Contoh Teori Galois)

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$Gal(f/Q(\sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{2}}, \sqrt{3-\sqrt{2}}))$$

$\Rightarrow$ **Identitas Permutasi Polinomial**

DASAR TEORI

POLYEQ

Untuk memastikan ada tidaknya rumus umum (solusi aljabarik) dari sebuah polinomial, dapat diketahui dari Grup Galois-nya. Namun untuk polinomial derajat 5 dan lebih tinggi, akan ada banyak sekali Grup Galois-nya sehingga tidak bisa direduksi hingga identitas permutasi polinomialnya **[Tidak ada rumus umumnya]**

Solusi untuk polinomial derajat 5 ke atas

Metode Newton-Raphson

DASAR TEORI

P O L Y E Q

Karena perhitungan secara analitik tidak bisa dilakukan untuk mencari akar-akar persamaan polinomial derajat 5 dan lebih tinggi, maka kami menggunakan salah satu metode numerik yakni metode Newton-Raphson.

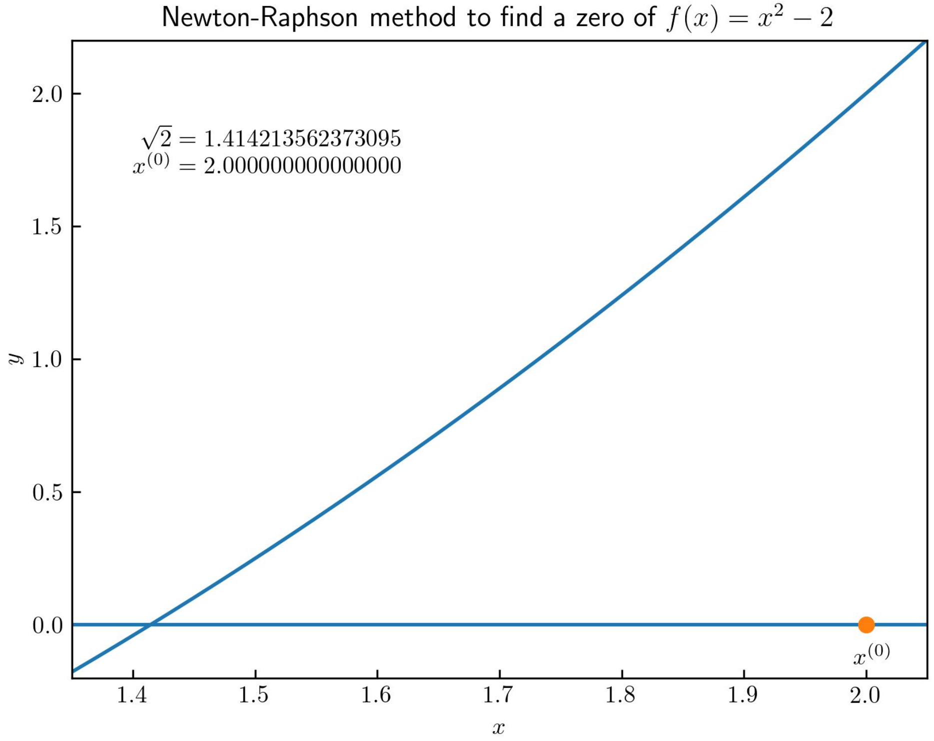
Pada prinsipnya metode numerik adalah melakukan “aproksimasi”, maka akan ada **iterasi** saat mengimplementasikan metode ini

DASAR TEORI (Metode Newton-Raphson)

Metode Newton Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau **gradien** pada titik tersebut.

Titik pendekatan ke n+1 dituliskan dengan:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$



slidesmania.com

DASAR TEORI

P O L Y E Q

Selain mengimplementasikan metode Newton-Raphson, kami juga mengimplementasikan **metode Horner** untuk melakukan pembagian persamaan polinomial dengan akar-akar persamaannya sehingga derajat polinomialnya turun hingga 0

DASAR TEORI (Metode Horner)

Untuk menentukan faktor lainnya kita bagi $x^3 + x^2 + x - 3$ oleh $x - 1$

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\
 & & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 0
\end{array}
\quad +
$$

PROSES PARSING

P
O
L
Y
E
Q

Agar dapat menyelesaikan permasalahan ini dengan sederhana, perlu dilakukan proses parsing (mengurai) yaitu mengelola input menjadi suatu bagian-bagian yang mana bagian tersebut terdiri dari derajat dan koefisien.Setiap bagian tersebut berperan penting pada tahap penyelesaian untuk mendapatkan output yang sesuai.

POLYEQ

PROSES PARSING

Pada permasalahan ini, proses parsing dilakukan menggunakan variabel pembantu seperti 2 flag dengan tipe data boolean untuk indikator apakah ditemukan karakter ‘-’ serta untuk indikator apakah ditemukan karakter ‘x’,lalu ada string untuk menampung semua digit koefisien yang ditemukan, dan 2 variabel dengan tipe data integer untuk mengecek derajat tertinggi serta untuk menampung konversi digit string ke integer dan vektor dengan templatenya yaitu tipe data integer untuk menampung semua koefisien untuk setiap derajatnya

PROSES PARSING

1.Ketika membaca angka derajat

Pada problem ini,terdapat kasus yang mana bagian dari parsing memiliki derajat yang pastinya derajat tersebut > 1.Sehingga apabila membaca digit dan melewati karakter ‘x’ maka angka yang disimpan(koefisien) ditambahkan dengan array dengan index digit yang dibaca saat ini(derajat) atau apabila tidak ada yang disimpan maka ditambah 1.

CONTOH

$$\underbrace{x^4}_{1}+\underbrace{4*x^4}_{4}-\underbrace{2*x^3}_{-2}+\underbrace{3*x^2}_{3}$$

=> derajat 4 = 1 + 4 = 5

derajat 3 = -2

derajat 2 = 3

PROSES PARSING

2.Ketika membaca operator(+,-)

Pada problem ini,apabila tidak ditemukannya digit setelah karakter ‘x’ yang berarti derajatnya adalah 1 atau tidak ditemukannya karakter ‘x’ yang berarti derajatnya adalah 0 dan bagian parsing tersebut tidak terletak pada akhir string maka ketika membaca operator(+,-) ditambahkan koefisien dengan index 1 apabila menemukan karakter ‘x’ dan 0 apabila tidak menemukan karakter ‘x’.

CONTOH

5*x+2*x+10+5+.....

5 2 10 5

=> derajat 1 = 5 + 2 = 7

derajat 0 = 10 + 5 = 15

PROSES PARSING

3.Ketika membaca null character (\0)

Apabila derajat 1 atau 0 terletak pada akhir string, penambahan koefisien pada derajat tersebut dilakukan setelah membaca karakter null dikarenakan pasti tidak ada operator(+,-) di belakang mereka.Sehingga setelah karakter null, untuk derajat 1 ditambahkan dengan nilai integer yang telah di konversi dari string lalu untuk derajat 0 ditambahkan dengan semua digit yang disimpan di dalam string.

CONTOH

….+2*x   ….+20

2   20

=> derajat 1 = 2

derajat 0 = 20

$$\underbrace{x^4}_{1}-\underbrace{6*x^3}_{1}+\underbrace{11*x^2}_{1}-\underbrace{6*x}_{3}$$

$$-\underbrace{x^2}_{1}+\underbrace{2*x}_{2}-\underbrace{1}_{3}$$

Berikut visualisasi menggunakan sample testcase pada problem
*penomoran berdasarkan proses parsing yang dilakukan

Implementasi Solusi

```
double f(double x){
    double ans = 0;
    for(int i=0; i<7; i++){
        ans += coff[i] * pow(x, i);
    }
    return ans;
}
```

Fungsi f mengembalikan nilai dari fungsi polinomial yang koefisien tiap derajat x nya disimpan ke dalam array coff, misal

x^2 + 1

Coff = {1,0,1,0,0,0,0}

f(0) = 1

Turunan Fungsi Polinomial

If $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m$$

then $$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + m a_m x^{m-1}.$$

Implementasi Solusi

```
double df(double x){
    double ans = 0;
    for(int i=1; i<7; i++){
        ans += i * coff[i] * pow(x, i-1);
    }
    return ans;
}
```

Fungsi df mengembalikan nilai turunan dari fungsi polinomial.
Misal f(x) = 2x^2
Df = 2*2*x^(2-1) = 4x

Implementasi Solusi

```
double newton(double x){
    for(int i=0; i<100; i++){
        x = x - f(x)/df(x);
    }
    return x;
}
```

Fungsi newton mengembalikan nilai akar yang didapat dari metode newton rapshon dengan parameter x sebagai nilai awal. Disini dilakukan beberapa iterasi agar presisi

Eliminasi faktor dari polinomial

Polinomial derajat n dituliskan $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_0$
Jika difaktorkan menjadi (x-x1)(x-x2)...(x-xn)=0
Apabila kita dapatkan x1 sebagai akar polinomial dari metode newton-raphson maka kita bagi polinomial dengan (x-x1) shg polinomial menjadi (x-x2)(x-x3)...(x-xn)=0

Implementasi Solusi

```
void horner(double x)
    {
        double ans = 0;
        double newPolynomial[7] = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
        for (int i = 6; i > 0; i--)
        {
            ans = ans * x + coff[i];
            newPolynomial[i - 1] = ans;
        }
        for (int i = 0; i < 7; i++)
        {
            coff[i] = newPolynomial[i];
        }
    }
```

Fungsi horner disini berfungsi untuk mengeliminasi 1 faktor dari polinomial.

slidesmania.com

Referensi

- Galois Theory (https://nrich.maths.org/1422) [University of Cambridge]
- Rochmad, R. (2013). Aplikasi Metode Newton-raphson Untuk Menghampiri Solusi Persamaan Non Linear. Jurnal MIPA Unnes, 36(2), 115305.
- Patty, H. W. M., Sanudin, F., Rumlawang, F. Y., & Patty, D. (2022). Kajian Grup Galois Isomorfis dengan Grup Alternating A5. Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal, 3(1), 49-56.
- https://en.cppreference.com/w/cpp/container/vector
- https://en.cppreference.com/w/cpp/header/cmath
- https://en.cppreference.com/w/cpp/header/cstring
- https://en.cppreference.com/w/cpp/header/iostream
- REFERENSI CARDANO : https://www.youtube.com/watch?v=q14F6fZf5kc&t=2455s
- REFERENSI FERRARI : https://www.youtube.com/watch?v=gDCu2pZd_LY&t=1265s

Sekian

Terima Kasih

THANK YOU

slidesmania.com