МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

Освітній компонент
«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

ЗВІТ
З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ № 6

Виконав
студент групи КН-24-1
Конько Ярослав

Кременчук 2025

Тема: Закони розподілу функцій випадкових величин. Композиція законів розподілу. Розподіл екстремальних значень.

Мета роботи: набути практичних навичок у розв’язанні задач з обчислення функцій від випадкових величин, їх законів розподілу та числових характеристик.

Хід роботи

1. Задача №9

Знайти закон розподілу $Z = X + Y,$ якщо $X \sim N(a;\ \sigma^2), Y \sim U(a, b)$

1.1.Вихідні дані:

- $f_{X(x)} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \cdot e\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$
- $f_{Y(y)} = \frac{1}{b-a}, y \in [a, b]$
- Величини незалежні

1.2.Формула згортки:

$f_{Z(z)} = \int f_{X(t)} \cdot f_{Y(z-t)dt}$

1.3.Область інтегрування:

Інтеграл ненульовий при $a \leq z - t \leq b$, тобто $z - b \leq t \leq z - a$

1.4.Підстановка:

$$f_{Z(z)} = \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_{\{z-b\}}^{\{z-a\}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \cdot \mathrm{e}\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

1.5.Через функцію Лапласа:

$$f_{Z(z)} = \left(\frac{1}{b-a}\right) \cdot \left[\Phi\left(\frac{z-2a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z-a-b}{\sigma}\right)\right]$$

2. Задача №10

Знайти закон розподілу $Z = X + Y,$ якщо $X \sim U(a, b), Y \sim U(a, b)$

1.1.Вихідні щільності:

$$f_{X(t)} = f_{Y(t)} = \frac{1}{b-a}, t \in [a, b]$$

1.2.Формула згортки:

$$f_{Z(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} fx(t)fy(z-t)dt$$

1.3.Область інтегрування:

- $t \in [a,b]$
- $z-t \in [a,b] \Rightarrow t \in [z-b, z-a]$

1.4.Аналіз випадків:

Випадок 1: $2a \le z \le a+b$

- $f_{Z(z)} = \int_{a}^{\{z-a\}} \left(\frac{1}{(b-a)^2}\right) dt = \frac{z-2a}{(b-a)^2}$

Випадок 2: $a+b \le z \le 2b$

- $f_{Z(z)} = \int_{\{z-b\}}^{b} \left(\frac{1}{(b-a)^2}\right) dt = \frac{2b-z}{(b-a)^2}$

3. Задача №11

Знайти закон розподілу $Z = X + Y$, якщо $X \sim U(-a,a), Y \sim U(-2a,2a)$

1.1.Вихідні щільності:

$$f_{X(t)} = \frac{1}{2a}, t \in [-a,a]$$

$$f_{Y(u)} = \frac{1}{4a}, u \in [-2a,2a]$$

1.2.Область інтегрування:

$t \in [-a,a] \cap [z-2a, z+2a]$

1.3.Аналіз випадків:

Випадок 1: $-3a \le z \le -a$

- $f_{Z(z)} = \frac{z+3a}{8a^2}$

Випадок 2: $-a \le z \le a$

- $f_{Z(z)} = \frac{1}{4a}$

Випадок 3: $a \le z \le 3a$

- $f_{Z(z)} = \frac{3a-z}{8a^2}$

4. Задача №12

Знайти закон розподілу $Z = X + Y$, якщо $X \sim E(\lambda^1), Y \sim E(\lambda^2)$

1.1.Вихідні щільності:

- $f_{X(t)} = \lambda^1 \cdot exp(-\lambda^1 t), t \geq 0$
- $f_{Y(u)} = \lambda^2 \cdot exp(-\lambda^2 u), u \geq 0$

1.2.Згортка для $z \geq 0$:

$$f_{Z(z)} = \int_0^z \lambda^1 \cdot exp(-\lambda^1 t) \cdot \lambda^2\,\lambda^1 \cdot exp\big(-\lambda^2(z-t)\big)dt$$

$$= \lambda^1\lambda^2 \cdot exp(-\lambda^2 z) \cdot \int_0^z exp(-(\lambda^1 - \lambda^2)t)d\mathrm{t}$$

1.3.Розв'язок:

Випадок $\lambda^1 \neq \lambda^2$:

- $f_{Z(z)} = \left(\frac{\lambda^1\lambda^2}{\lambda^1-\lambda^2}\right) \cdot \big(exp(-\lambda^2 z) - exp(-\lambda^1 z)\big)$

Випадок $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda$:

- $f_{Z(z)} = \lambda^2 \cdot z \cdot exp(-\lambda z)$

5. Задача №13

Знайти закон розподілу $Z = sin(X)$, де $X \sim U(0, 2\pi)$

1.1.Вихідні дані:

$$f_{X(x)} = \frac{1}{2\pi}, x \in [0{,}2\pi)$$

1.2.Метод обернених функцій:

Рівняння sin x = z має два розв'язки на $[0{,}2\pi)$:

- $x_1 = arcsin(z)$
- $x_2 = \pi - arcsin(z)$

1.3.Похідні:

$$\left|\frac{dx^1}{dz}\right| = \left|\frac{dx^2}{dz}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

1.4.Формула перетворення:

$$f_{Z(z)} = \sum f_{X(x_\mathrm{i})} \cdot \left|\frac{dx_\mathrm{i}}{dz}\right| = 2 \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}$$

Контрольні питання

1. Як знання закону розподілу значень пікових навантажень у комп'ютерній мережі підприємства може допомогти при моделюванні та аналізі пікових навантажень?
   Знаючи закон розподілу, можна прогнозувати ймовірність виникнення критичних навантажень, планувати потужність обладнання та оптимізувати ресурси мережі для запобігання її перевантаженню.

2. Як знайти математичне сподівання функції одного випадкового аргумента?
   Для функції $Y = g(X)$ математичне сподівання знаходиться за формулою: $M[Y] = \int g(x)\, fx(x)dx$, де $fx(x)$- щільність розподілу випадкової величини X

3. Як знайти дисперсію функції одного випадкового аргумента?
   Дисперсія знаходиться за формулою: $D[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2$, де $M[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \big(g(x)\big)^2 fx(x)dx$

4. Чому на етапі обчислення закону розподілу функції від випадкової величини важливо виконати аналіз монотонності функції?

Аналіз монотонності дозволяє коректно застосувати формулу для перетворення щільності.

5. Наведіть приклади задач, де виникає потреба в обчисленні закону розподілу суми випадкових величин.
   - Сумарна похибка вимірювання, що складається з декількох незалежних джерел похибок.
   - Загальний час відгуку системи, що є сумою часу обробки на різних серверах.
   - Сумарна витрата ресурсів кількома незалежними процесами.