

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

Освітній компонент
«Імовірісно-статистичні методи інформаційних технологій»

ЗВІТ
З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ № 7

Виконав
студент групи КН-24-1
Конько Ярослав

Кременчук 2025

Тема: Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова.

Мета роботи: набути практичних навичок у розв'язанні задач щодо випадкових процесів, СМО та ланцюгів Маркова.

Хід роботи

1. Задача №9

Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів – Web-сервер» і систему рівнянь Колмогорова для $n = 4$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Знайти $P_{\text{зан}}$, P_0 , A , w , $T_{\text{обс}}$, $T_{\text{відг}}$

1.1.Параметри системи:

1. $n = 4$ клієнтів
2. $\lambda = 2$ (інтенсивність від одного клієнта)
3. $\mu = 1$ (інтенсивність обслуговування)

1.2.Граф станів:

Стани S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 - кількість завдань у системній фазі

Переходи:

$$S_0 \rightarrow S_1: 4\lambda = 8$$

$$S_1 \rightarrow S_2: 3\lambda = 6$$

$$S_2 \rightarrow S_3: 2\lambda = 4$$

$$S_3 \rightarrow S_4: \lambda = 2$$

$$S_1 \rightarrow S_0: \mu = 1$$

$$S_2 \rightarrow S_1: \mu = 1$$

$$S_3 \rightarrow S_2: \mu = 1$$

$$S_4 \rightarrow S_3: \mu = 1$$

1.3.Система рівнянь Колмогорова:

Для стаціонарного режиму:

$$4\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow 8P_0 = P_1$$

$$3\lambda P_1 = \mu P_2 \Rightarrow 6P_1 = P_2$$

$$2\lambda P_2 = \mu P_3 \Rightarrow 4P_2 = P_3$$

$$\lambda P_3 = \mu P_4 \Rightarrow 2P_3 = P_4$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

1.4. Розрахунок ймовірностей:

$$P_1 = 8P_0$$

$$P_2 = 6P_1 = 48P_0$$

$$P_3 = 4P^2 = 192P_0$$

$$P_4 = 2P^3 = 384P_0$$

$$P_0(1 + 8 + 48 + 192 + 384) = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{633} \approx 0.00158$$

$$p_1 = \frac{8}{633} \approx 0.01264$$

$$p_2 = \frac{48}{633} \approx 0.07583$$

$$p_3 = \frac{192}{633} \approx 0.30332$$

$$p_4 = \frac{384}{633} \approx 0.60663$$

1.5. Характеристики системи:

$$P_{\text{зан}} = 1 - P^0 = \frac{632}{633} \approx 0.99842$$

$$P_0 = \frac{1}{633} \approx 0.00158$$

$$A = (1 - P_0)\mu = \left(\frac{632}{633}\right) \cdot 1 \approx 0.99842$$

$$w = \sum j \cdot P_j = 0 \cdot P^0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = 3.416$$

$$T_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu} = 1$$

$$T_{\text{відг}} = w \cdot T_{\text{обс}} = 3.416$$

2. Задача №10

Задано матрицю переходу $P_1 = [0.6 \ 0.4; 0.1 \ 0.9]$. Знайти матрицю переходу P_2

1.1.Розв'язок

$$P_2 = P_1^2 = [0.6 \ 0.4; 0.1 \ 0.9] \cdot [0.6 \ 0.4; 0.1 \ 0.9]$$

Елементи матриці:

$$P_2(1,1) = 0.6 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.1 = 0.36 + 0.04 = 0.40$$

$$P_2(1,2) = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.9 = 0.24 + 0.36 = 0.60$$

$$P_2(2,1) = 0.1 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.06 + 0.09 = 0.15$$

$$P_2(2,2) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.9 = 0.04 + 0.81 = 0.85$$

3. Задача №11

Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів – Web-сервер» і систему рівнянь Колмогорова для $n = 5, \lambda = 2, \mu = 1$. Знайти $P_{зан}, P_0, A, w, T_{обс}, T_{відг}$

1.1.Параметри:

$$n = 5, \lambda = 2, \mu = 1$$

1.2.Граф станів: $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$

1.3.Система рівнянь:

$$5\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow 10P_0 = P_1$$

$$4\lambda P_1 = \mu P_2 \Rightarrow 8P_1 = P_2$$

$$3\lambda P_2 = \mu P_3 \Rightarrow 6P_2 = P_3$$

$$2\lambda P_3 = \mu P_4 \Rightarrow 4P_3 = P_4$$

$$\lambda P_4 = \mu P_5 \Rightarrow 2P_4 = P_5$$

$$\Sigma P_j = 1$$

1.4.Ймовірності:

$$P_1 = 10P_0$$

$$P_2 = 8P_1 = 80P_0$$

$$P_3 = 6P_2 = 480P_0$$

$$P_4 = 4P_3 = 1920P_0$$

$$P_5 = 2P_4 = 3840P_0$$

$$P_0(1 + 10 + 80 + 480 + 1920 + 3840) = 1$$

$$P_0 = 1/6331 \approx 0.000158$$

1.5. Характеристики:

$$P_{\text{зан}} = 1 - P_0 \approx 0.99984$$

$$A = P_{\text{зан}} \cdot \mu \approx 0.99984$$

$$w = \sum j \cdot P_j \approx 4.999$$

$$T_{\text{обс}} = 1$$

$$T_{\text{відг}} = w \cdot T_{\text{обс}} \approx 4.999$$

4. Задача №12

Задано матрицю переходу $P_1 = [0.4 \ 0.6; 0.2 \ 0.8]$. Знайти матрицю переходу P_2

Розв'язок:

$$P_2 = P_1^2 = [0.4 \ 0.6; 0.2 \ 0.8] \cdot [0.4 \ 0.6; 0.2 \ 0.8]$$

$$P_2(1,1) = 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.16 + 0.12 = 0.28$$

$$P_2(1,2) = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.24 + 0.48 = 0.72$$

$$P_2(2,1) = 0.2 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.08 + 0.16 = 0.24$$

$$P_2(2,2) = 0.2 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.8 = 0.12 + 0.64 = 0.76$$

5. Задача №13

Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів – Web-сервер» і систему рівнянь Колмогорова для $n = 5, \lambda = 1, \mu = 2$. Знайти $P_{\text{зан}}, P_0, A, w, T_{\text{обс}}, T_{\text{відг}}$

1.1. Параметри:

$$n = 5, \lambda = 1, \mu = 2$$

1.2. Система рівнянь:

$$5\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow 5P_0 = 2P_1 \Rightarrow P_1 = 2.5P_0$$

$$4\lambda P_1 = \mu P_2 \Rightarrow 4P_1 = 2P_2 \Rightarrow P_2 = 2P_1 = 5P_0$$

$$3\lambda P_2 = \mu P_3 \Rightarrow 3P_2 = 2P_3 \Rightarrow P_3 = 1.5P_2 = 7.5P_0$$

$$2\lambda P_3 = \mu P_4 \Rightarrow 2P_3 = 2P_4 \Rightarrow P_4 = P_3 = 7.5P_0$$

$$\lambda P_4 = \mu P_5 \Rightarrow P_4 = 2P_5 \Rightarrow P_5 = 0.5P_4 = 3.75P_0$$

$$\sum P_j = 1$$

1.3. Ймовірності:

$$P_0(1 + 2.5 + 5 + 7.5 + 7.5 + 3.75) = 1$$

$$P^0 = \frac{1}{27.25} \approx 0.0367$$

1.4. Характеристики:

$$P_{\text{зан}} = 1 - P_0 \approx 0.9633$$

$$A = P_{\text{зан}} \cdot \mu \approx 1.9266$$

$$w = \sum j \cdot P_j \approx 2.5$$

$$T_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu} = 0.5$$

$$T_{\text{відг}} = w \cdot T_{\text{обс}} \approx 1.25$$

Контрольні питання

1. Що таке СМО і які основні елементи входять у її структуру?

СМО (Система Масового Обслуговування) – це система, що обслуговує випадковий потік заявок. Основні елементи:

- Вхідний потік заявок (напр., Пуассонівський).
- Обслуговуючі апарати (канали).
- Черга (може бути відсутньою).
- Дисципліна обслуговування (напр., FIFO).

2. Які властивості має найпростіший потік подій, і які його характеристики можна виміряти?

Властивості: стаціонарність, відсутність наслідків, ординарність.

Характеристики: інтенсивність потоку (λ) – середня кількість подій за одиницю часу.

3. Які основні характеристики СМО визначають її продуктивність?

- Ймовірність відмови ($P_{\text{відм}}$).
- Пропускна спроможність (A).
- Середня кількість заявок у черзі (L).
- Середній час очікування в черзі (W).
- Коефіцієнт завантаження (ρ).

4. Які фактори впливають на інтенсивність потоку подій в системі масового обслуговування?

Зовнішні умови щодо системи (наприклад, кількість користувачів, частота їх запитів, характер їх роботи).

5. Як визначається інтенсивність обслуговування в СМО?

Інтенсивність обслуговування (μ) – це середня кількість заявок, яку один канал може обслуговувати за одиницю часу. Це величина, обернена до середнього часу обслуговування однієї заявки: $\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}}$.

6. Які властивості мають ланцюги Маркова, і як вони застосовуються в теорії СМО?

Властивість марківськості (немає пам'яті): майбутній стан залежить тільки від поточного стану.

Застосовуються для моделювання СМО, де стан системи (напр., кількість заявок) у майбутньому залежить лише від поточного стану.

7. Що таке стаціонарний режим роботи СМО і чому він важливий для аналізу?

Це режим, коли характеристики системи (ймовірності станів, середня довжина черги) не змінюються з часом. Він важливий, оскільки дозволяє проводити аналіз та розрахунки для сталої, встановленої роботи системи.

8. Як визначається ймовірність втрати заявки в системі масового обслуговування?

Ймовірність втрати заявки – це ймовірність того, що заявка отримає відмову в обслуговуванні. Позначається як $P_{\text{відм}}$ або $P_{\text{втрати}}$.

9. Що таке ефективність обслуговування в СМО і як її вимірюють?

Ефективність обслуговування – це здатність системи виконувати свої функції. Вимірюється за допомогою основних характеристик продуктивності, таких як пропускна спроможність та середній час очікування.

10. Як визначається коефіцієнт завантаження системи масового обслуговування, і чому він важливий для оцінки її продуктивності?

Коефіцієнт завантаження (ρ) визначається як відношення інтенсивності вхідного потоку до сумарної інтенсивності обслуговування: $\rho = \frac{\lambda}{(c * \mu)}$, де c – кількість каналів.

Він важливий, оскільки показує ступінь завантаження системи.

Якщо $\rho \geq 1$, система не впорається з потоком заявок, і черга буде необмежено зростати.