МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

Освітній компонент
«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

ЗВІТ
З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ № 4

Виконав
студент групи КН-24-1
Конько Ярослав

Кременчук 2025

Тема: Схема Бернуллі.

Мета роботи: набути практичних навичок у розв'язанні типових задач в рамках схеми Бернуллі.

Хід роботи

1. Задача №9

Телефонна станція обслуговує 400 абонентів. Для кожного абонента ймовірність того, що протягом години він подзвонить на станцію, дорівнює 0,01.Знайдіть ймовірність наступних подій:

a) протягом години 5 абонентів зателефонують на станцію;
b) протягом години не більш 4 Абонентів зателефонують на станцію;
c) протягом години не менш 3 абонентів зателефонують на станцію.

1.1.Розв'язання

1.1.1. Скористаємося формулою $P(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

- Обчислимо ймовірність, що зателефонують рівно 5 абонентів: $P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} = \frac{1024}{120} e^{-4} \approx 0.1563$
- Обчислимо ймовірність, що зателефонують не більше 4 абонентів:
- $P(0) \approx \frac{4^0}{0!} e^{-4} = 1 \cdot 0.0183156 \approx 0.0183$
- $P(1) \approx \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 4 \cdot 0.0183156 \approx 0.0733$
- $P(2) \approx \frac{4^2}{2!} e^{-4} = \frac{16}{2} * 0.0183156 \approx 0.1456$
- $P(3) \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} = \frac{64}{6} * 0.0193156 \approx 0.1954$
- $P(4) \approx \frac{4^4}{4!} e^{-4} = \frac{256}{24} * 0.0183156 \approx 0.1954$
- $P(k \leq 4) \approx 0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 = 0.6289$

- Обчислимо через протилежну подію імовірність, що зателефонують не менше 3 абонентів:
- $P(k < 3) = P(0) + P(1) + P(2) \approx 0.0183 + 0.0733 + 0. = 0.2381$
- $P(k \geq 3) = 1 - P(k < 3) \approx 1 - 0.2381 = 0.7619$

1.2. Відповідь

a) Імовірність того, що зателефонують рівно 5 абонентів, становить приблизно 0.1563.

b) Імовірність того, що зателефонують не більше 4 абонентів, становить приблизно 0.6289.

c) Імовірність того, що зателефонують не менше 3 абонентів, становить приблизно 0.7619.

2. Задача №10

Імовірність того, що деталь не є стандартною, дорівнює p=0,1. Знайти ймовірність того, що серед навмання відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від ймовірності p=0,1 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03.

1.1. Умова

- n=400
- p=0.1
- q=1-p=0.9
- e= 0.03

1.2. Розв’язання

1.2.1. Використаємо формулу Муавра-Лапласа: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\varphi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{pq}\right)$

1.2.2. Обчислимо аргумент функції Лапласа: $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=0.03*\frac{\sqrt{400}}{0.1*0.9}=0.03*\frac{\sqrt{400}}{0.09}=0.03*\sqrt{4444.4}\approx 0.03*66.6667=2$

1.2.3. В результаті маємо: $P\approx 2*\varphi(2)\approx 2*0.4772=0.9544$

1.3. Відповідь

Ймовірність того, що відносна частота відхилиться від імовірності не більше ніж на 0.03, дорівнює 0.9544.

3. Задача №11

У локальній комп’ютерній мережі підрозділу комерційного банку 20 персональних комп’ютерів. Кожен з клієнтів може протягом хвилини незалежно один від одного здійснити запит до серверу головної бази даних банку з ймовірністю p=0.3, або не здійснити з ймовірністю $q = 1-p$.

a) чому дорівнює найбільш ймовірна кількість запитів за годину?
b) чому дорівнює ймовірність найбільш ймовірної кількості запитів за годину?
c) чому дорівнює ймовірність того, що кількість запитів за годину буде від 3 до 7?
d) чому дорівнює ймовірність того, що хоча б один з клієнтів здійснить запит?

1.1. Умова

- Маємо n=20 комп’ютерів
- Маємо p=0.3 ймовірність запиту
- Відповідно q=0.7

1.2. Розв’язання

1.2.1. Знаходимо найбільш імовірну кількість запитів: $k_0 = np + p = 20 * 0.3 + 0.3 = 6.3 = 6$

1.2.2. Знаходимо ймовірність найбільш імовірної кількості запитів: $P_{20}(6) = C_{20}^{6} * (0.3)^6 * (0.7)^{14} = 38760 * 0.000729 * 0.00678223 \approx 0.1916$

1.2.3. Знаходимо ймовірність того, що кількість запитів буде від 3 до 7: $P(3 \leq k \leq 7) = \Sigma_{k=3}^{7} C_{20}^{k} * (0.3)^k * (0.7)^{20-k}$

Обчислимо кожну ймовірність:

- $P(3) = 1140 * 0.027 * 0.0007979 \approx 0.0245$
- $P(4) = 4845 * 0.0081 * 0.0011398 \approx 0.0446$
- $P(5) = 15504 * 0.00243 * 0.0016283 \approx 0.0613$
- $P(6) = 38760 * 0.000729 * 0.0023261 \approx 0.0656$
- $P(7) = 77520 * 0.0002187 * 0.0033230 \approx 0.0563$

Сума дорівнюватиме: $0.0245 + 0.0446 + 0.0613 + 0.0656 + 0.0563 = 0.2523$

1.2.4. Знаходимо ймовірність бодай одного запиту: $P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - (0.7)^{20} = 1 - 0.0007979 \approx 0.9992$

1.3. Відповідь

a) Найбільш імовірна кількість запитів: 6

b) Імовірність найбільш імовірної кількості запитів: 0.1916

c) Імовірність отримати від 3 до 7 запитів: 0.2523

d) Імовірність бодай одного запиту: 0.9992

4. Задача №12

У корпоративній мережі науково-виробничого об’єднання 1000 персональних комп’ютерів. Кожен з клієнтів може протягом хвилини незалежно один від одного здійснити запит до серверу головної бази даних з ймовірністю p=0,2, або не здійснити з ймовірністю $q = 1 - p$.

a) чому дорівнює найбільш ймовірна кількість запитів за годину?
b) чому дорівнює ймовірність найбільш ймовірної кількості запитів за годину?
c) чому дорівнює ймовірність того, що кількість запитів за годину буде від500 до 1000?
d) чому дорівнює ймовірність того, що хоча б один з клієнтів здійснить запит?

1.1. Умова

Маємо схему Бернуллі з параметрами:

- n=1000
- p=0.2
- q=0.8

1.2. Розв'язання

1.2.1. Знаходимо найбільш імовірну кількість запитів: $k_0 = np + p = 1000 * 0.2 + 0.2 = 200.2 = 200$

1.2.2. Знаходимо ймовірність найбільш імовірної кількості за теоремою Муавра-Лапласа: $P_{1000}(200) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{200-200}{\sqrt{160}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{160}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{12.649} * 0.3989 \approx 0.0315$

1.2.3. Знаходимо ймовірність кількості запитів від 500 до 1000: $P(500 \leq k \leq 1000) \approx \varphi\left(\frac{1000-200}{12.649}\right) - \varphi\left(\frac{500-300}{12.649}\right) = \varphi(63.25) - \varphi(23.72) \approx 0.5 - 0.5 = 0$

1.2.4. Знаходимо ймовірність бодай одного запиту: $P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - (0.8)^{1000} \approx 1 - 0 \approx 1$

1.3. Відповідь

a) Найбільш імовірна кількість запитів: 200
b) Імовірність найбільш імовірної кількості запитів: 0.0315
c) Імовірність отримати від 500 до 1000 запитів: 0

d) Імовірність бодай одного запиту: 1

5. Задача №13

Кількість клієнтів місцевого інтернет-провайдера складає 10000 абонентів. Для кожного абонента ймовірність того, що протягом однієї секунди він здійснить запит до сервера провайдера складає p = 0,001.

a) Знайти ймовірність того, що протягом секунди здійснять запит 5 абонентів;
b) Знайти ймовірність того, що протягом секунди здійснять запит від 5 до 7 абонентів;
c) Знайти ймовірність того, що протягом секунди хоча б один абонент здійснить запит.

1.1. Умова

Маємо схему Бернуллі з параметрами:

- n=1000
- p=0.001

1.2. Розв'язання

1.2.1. Знаходимо ймовірність 5 запитів: $P(5) = \frac{10^5}{5!}e^{-10} = \frac{100000}{120} * 0.0000454 \approx 833.333 * 0.0000454 \approx 0.0378$

1.2.2. Знаходимо ймовірність від 5 до 7 запитів:

- $P(5) \approx 0.0378$
- $P(6) = \frac{10^6}{6!}e^{-10} = \frac{1000000}{720} * 0.0000454 \approx 1388.889 * 0.0000454 \approx 0.0631$
- $P(7) = \frac{10^7}{7!}e^{-10} = \frac{10000000}{5040} * 0.0000454 \approx 1984.127 * 0.0000454 \approx 0.0901$

Сума дорівнюватиме: $0.0378 + 0.0631 + 0.0901 = 0.1910$

1.2.3. Знаходимо ймовірність бодай одного запиту: $P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{10^0}{0!}e^{-10} = 1 - 0.0000454 \approx 0.99995$

1.3. Відповідь

a) Імовірність 5 запитів: 0.0378

b) Імовірність від 5 до 7 запитів: 0.1910

c) Імовірність бодай одного запиту: 0.99995

Контрольні питання

1) Дати визначення схеми випробувань Бернуллі.

   Схема Бернуллі - це послідовність незалежних випробувань, у кожному з яких може статися лише дві події: успіх або неуспіх.

2) Які властивості має випадковий експеримент за схемою Бернуллі?
   - Випробування є незалежними.
   - Кожне випробування має лише два можливих результати: успіх та неуспіх.
   - Ймовірність успіху p є незмінною для кожного випробування.

3) Що загального і в чому відмінність схеми випробувань Бернуллі від схеми випробувань, що описується гіпергеометричним розподілом?
   - Загальне: Обидві схеми описують кількість успіхів у серії випробувань.
   - Відмінність: У схемі Бернуллі випробування незалежні, тоді як у гіпергеометричній схемі випробування залежні.

Імовірність успіху в гіпергеометричній схемі змінюється від випробування до випробування.

4) Як визначається ймовірність отримати k успіхів у n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі?
Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія А відбудеться рівно k разів, обчислюється за формулою: $P_n(k) = C_n^k * p^k * q^{n-k}$

5) Навести приклади випадкових експериментів, які можна моделювати за допомогою схеми Бернуллі?
   - Кидання монети декілька разів
   - Стрільба по мішені декілька разів за однакових умов