МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

Освітній компонент
«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

ЗВІТ
З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ № 5

Виконав
студент групи КН-24-1
Конько Ярослав

Кременчук 2025

Тема: Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин

Мета роботи: набути практичних навичок у розв'язанні задач на знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин, зокрема нормального закону, та розв'язання типових задач по цій темі.

Хід роботи

1. Задача №9

НВВ X має розподіл Коші. Функція щільності розподілу Коші задана у вигляді $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$, де c – деяка константа. Знайти константу c, функцію розподілу Коші $F(x)$ та ймовірність події $-1 \le X \le 1$.

1.1. Знаходження константи c

Умова нормування:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = 1$

3) $c * \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 1$

4) $c * [arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = c * \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = c * \pi = 1$

5) $c = \frac{1}{\pi}$

Отже, $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

1.2. Знаходження функції розподілу Коші F(x)

1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$

2) $F(x) = \frac{1}{\pi}[arctan\ t]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arctan\ x + \frac{\pi}{2}\right)$

3) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctan\ x$

1.3.Знаходження ймовірності події $P(-1 \leq X \leq 1)$

1) $P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1)$
2) $F(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$
3) $F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$
4) $P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2. Задача №10

НВВ X задана функцією щільності розподілу: $f(x) = \begin{cases} c \cdot cos\, x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$, де с – деяка константа. Знайти константу с, функцію розподілу $F(x)$, імовірність події $|X| \leq \frac{\pi}{4}$

1.1.Знаходження константи с

Умова нормування:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{c} * \cos x\, dx = 1$
3) $c \cdot [sin\, x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c * \left(sin\frac{\pi}{2} - sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
4) $c * (1 - (-1)) = c * 2 = 1$
5) $c = \frac{1}{2}$

Отже, $f(x) = \frac{1}{2} cos\, x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

1.2.Знаходження функції розподілу Коші F(x)

За означенням: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Випадок 1: $x < -\frac{\pi}{2}$

$F(x) = 0$

Випадок 2: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2} \cos t \, dt = 1 \, [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}\left(\sin x - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(\sin x + 1)$$

Випадок 3: $x > \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = 1$$

Підсумок:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1.3.Знаходження ймовірності події $|X| \leq \frac{\pi}{4}$

1) $P\left(|X| \leq \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
2) $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3) $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4) $P = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Задача №11

Часовий інтервал між надходженнями пакетів даних у комп’ютерній мережі зі швидкістю передачі даних 10 Мбіт/сек підприємства має експоненціальний розподіл з параметром λ = 15 мкс. Знайти:

– середню довжину інтервалу;

– дисперсію довжини інтервалу;

– СКВ довжини інтервалу;

– ймовірність того, що часовий інтервал між надходженнями пакетів перевищить 20мкс;

– ймовірність того, що часовий інтервал між надходженнями пакетів буде у межах 10 < X < 15 мкс

1.1.Знаходження середньої довжини інтервалу

$$M[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{15}\,\text{мкс}$$

1.2.Знаходження дисперсії довжини інтервалу

$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{15^2} = \frac{1}{225}\,\text{мкс}^2$$

1.3.Знаходження середнього квадратичного відхилення

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{15}\,\text{мкс}$$

1.4.Імовірність того, що 10<X<15 мкс

$$P(10 < X < 15) = F(15) - F(10) = (1 - e^{-15*15}) - (1 - e^{-15*10}) \\ = e^{-150} - e^{-225} \approx 0$$

4. Задача №12

Параметри генератора псевдовипадкових чисел $random$, що входить до інтегрованого середовища $Turbo\ Pascal$, за замовчанням дорівнюють a = 0, b = 1. Знайти:

– математичне сподівання;

– дисперсію;

– середнє квадратичне відхилення;

– ймовірність того, що X > 0.5.

1.1.Знаходження математичного сподівання

$$M[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

1.2.Знаходження дисперсії

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

1.3.Знаходження середнього квадратичного відхилення

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

1.4.Знаходження ймовірності того, що X>0.5

$$P(X > 0.5) = \int_{0.5}^{1} 1dx = 1 - 0.5 = 0.5$$

5. Задача №13

НВВ X має нормальний розподіл з параметрами μ та σ. Функція щільності нормального розподілу $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Вивести формулу для функції нормального розподілу $F(x)$, математичного сподівання $M(x)$, дисперсії $D(x)$, ймовірності події $\alpha \leq X \leq \beta$, ймовірності того, що значення випадкової величини відхилиться від математичного сподівання μ на величину, що не перевищує δ $\left(P(|x - \mu| \leq \delta)\right)$.

1.1.Виведення формули для функції нормального розподілу F(x)

1) $F(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

2) $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}dt}$

1.2.Виведення формули математичного сподівання M(x)

1.2.1. За означенням маємо: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$

1.2.2. Підставляємо $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = \mu + \sigma z, dx = \sigma dz$:

- $M(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z) e^{-\frac{z}{2}^2} dz$
- $M(x) = \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sigma * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

1.2.3. Відповідно, перший інтеграл дорівнює $\sqrt{2\pi}$, а другий – 0

- $M(X) = \mu * 1 + 0 = \mu$

1.3. Виведення формули дисперсії D(x)

1.3.1. За означенням маємо: $D(X) = M[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$

1.3.2. Підставляємо $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x-\mu = \sigma\, z, dx = \sigma\, dz$:

- $D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz$
- $D(X) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

1.3.3. Розв'язуємо інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz$:

- Позаяк $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 1$, маємо $D(X) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$

1.4. Виведення формули ймовірності події $\alpha \leq X \leq \beta$

- $P(a < X < \beta) = F(\beta) - F(a) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

1.5. Виведення формули ймовірності того, що значення випадкової величини відхилиться від математичного сподівання μ на величину, що не перевищує δ $\left(P(|x - \mu| \leq \delta)\right)$

1) $P(|X - \mu| \leq \delta) = P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta) = \Phi\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)$
2) $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$

Контрольні питання

1. Навести декілька прикладів дискретної випадкової величини.
   Приклад: кількість очок на гральній кістці, кількість влучень у мішень при стрільбі.

2. Навести декілька прикладів неперервної випадкової величини.
   Приклад: час очікування автобуса, температура повітря.

3. Чи для всіх розподілів існують математичне сподівання і дисперсія?
   Ні, наприклад, для розподілу Коші математичне сподівання не існує.

4. Як виправдати використання математичного сподівання як числової характеристики для розподілу, який не має скінченного математичного сподівання?
   У таких випадках використовують інші характеристики — медіану, моду, квантилі.

5. Яка форма закону розподілу є універсальною і може бути застосовна як для ДВВ, так і для НВВ?
   Функція розподілу $F(x)$, яка застосовується як для ДВВ, так і для НВВ.

6. Які альтернативні числові характеристики можна використовувати для опису розподілу, якщо математичне сподівання не відображає його повністю?
   Альтернативні числові характеристики: медіана, мода, квартилі, інтерквартильний розмах.

7. У чому полягає ймовірнісний та статистичний сенс математичного сподівання?
   Імовірнісний та статистичний сенс математичного сподівання полягає у середньому значенні випадкової величини при великій кількості випробувань.

8. Чому важливо враховувати асиметрію та ексцес при аналізі розподілу величин?

Вони показують форму розподілу: асиметрія - симетрію, ексцес - гостровершинність.

9. Чому, якщо для певної ВВ не існую математичного сподівання, то не існує дисперсія, асиметрія і ексцес? Відповідь обґрунтуйте.
   Тому що вони визначаються через моменти, які базуються на математичному сподіванні.

10. Чому на практиці часто можна апріорі вважати розподіл ВВ нормальним?
    Через центральну граничну теорему - сума великої кількості незалежних величин прагне до нормального розподілу.