



Dipartimento di Fisica G. Occhialini
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Analisi delle disuguaglianze di Bell su computer quantistico IBM: l'esperimento BARBEQuE

Candidato:
Marco Gobbo

Matricola:
826892

Relatore:
Andrea Giachero

Relatore esterno:
Paolo Solinas

Correlatore:
Matteo Borghesi

Anno accademico 2020-2021

Indice

Introduzione	5
1 Paradosso Einstein-Podolsky-Rosen	7
1.1 Considerazioni generali	7
1.2 Formulazione del paradosso	8
1.3 Versione di Bohm - Aharonov	12
2 Teorema di Bell	15
2.1 Disuguaglianze di Bell	16
2.2 Versione di Wigner	19
2.3 Esperimenti di Alain Aspect	22
3 Computazione quantistica	27
3.1 Breve storia della computazione quantistica	27
3.2 Nozioni teoriche	28
3.2.1 Quantum bit	28
3.2.2 Porte logiche quantistiche	30
3.2.3 Misura	32
3.2.4 Sistemi a n qubit	32
3.3 IBM Quantum Experience	35
3.3.1 Framework Qiskit	36
3.3.2 Giunzione Josephson	37
4 Esperimento BARBEQuE	39
4.1 Traduzione della teoria in codice quantistico	39
4.2 Simulazione locale	42
4.3 Simulazione su IBM QE	44
4.4 Esecuzione su IBM QE	45
4.5 Simulazione locale in parallelo	49
4.6 Simulazione su IBM QE in parallelo	51
4.7 Esecuzione su IBM QE in parallelo	51
4.8 Quantum Volume	54
5 Conclusioni	57
A Appendice	59
A.1 Grafici dei backend quantistici di IBM QE	59
A.1.1 ibmq_5_yorktown	59
A.1.2 ibmq_ourense	60

A.1.3	ibmq_16_melbourne	61
A.1.4	ibmq_vigo	63
A.1.5	ibmq_valencia	64
A.1.6	ibmq_santiago	65
A.1.7	ibmq_athens	66
Bibliografia		69
Ringraziamenti		73

Introduzione

«Credo di poter dire con sicurezza che nessuno... comprende la meccanica quantistica.»¹

Questa affermazione, forse un po' provocatoria, di Richard Feynman era già nota alla comunità dei fisici del tempo, i quali si trovarono per la prima volta davanti a questa nuova teoria. Che piaccia oppure no dal punto di vista teorico, così come nella pratica, funziona. Potrebbe risultare incompleta come teoria, necessitare di alcuni pezzi e magari, propri questi pezzi, renderebbero la meccanica quantistica più comprensibile. Questo è, in poche parole ciò che si sono domandati e hanno trattato in un loro articolo del 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen.² Nella loro accesa discussione mostrarono come la meccanica quantistica fosse incompleta, mettendo in luce il suo aspetto non locale e necessitasse di essere rimpiazzata da nuove teorie, in particolare dalle teorie a variabili nascoste. In queste nuove descrizioni, vi sarebbero delle variabili nascoste le quali darebbero una descrizione più precisa dello stato fisico di un sistema, rispetto a quanto fa attualmente la meccanica quantistica. Nel 1964, il fisico nordirlandese John Stewart Bell dimostrò³ che se davvero esistessero queste variabili e rendessero locale la teoria, alcuni sistemi avrebbero dovuto soddisfare determinate disuguaglianze non previste dalla meccanica quantistica. Dalla pubblicazione dell'articolo di Bell ad oggi furono realizzati numerosi esperimenti volti a verificare che, le teorie a variabili nascoste e le teorie alternative basate sul cosiddetto principio di località di Einstein, in realtà prevedono una relazione di disuguaglianza verificabile tra le osservabili degli esperimenti. Tale relazione però risulta essere in disaccordo con le previsioni della meccanica quantistica.

L'obiettivo di questa tesi è quello di ripercorrere dal punto di vista storico e scientifico l'evoluzione degli esperimenti sulle disuguaglianze di Bell che hanno consentito alla meccanica quantistica di affermarsi come teoria. Ci concentreremo e approfondiremo gli strumenti del Quantum Computing, un paradigma di calcolo che sfrutta le proprietà e i principi della meccanica quantistica, in particolare *sovrapposizione*, *entanglement* e *interferenza*. Esistono diversi modelli di Quantum Computing tutti equivalenti tra loro: macchina di Turing quantistica, computazione quantistica unidirezionale o basato su misurazioni (noto anche come MBQC: Measurement-Based Quantum Computer), computazione quantistica adiabatica, computazione quantistica topologica e, il più diffuso e quello che utilizzeremo, i circuiti quantistici.

Un circuito quantistico è una sequenza ordinata di porte quantistiche che vengono applicate ai qubit, sistemi quantistici a due livelli rappresentati ad esempio dallo spin degli elettroni (spin up e spin down) oppure dalla polarizzazione di un fotone (polarizzazione verticale e polarizzazione orizzontale). Questi qubit, in un secondo momento, vengono misurati attraverso un'operazione, appunto, di misura. Gli elementi chiave di questo modello sono quindi i qubit, le porte quantistiche e l'operazione di misura. Il codice quantistico realizzato deve essere eseguito, a meno di una simulazione, su un sistema

quantistico. Esistono varie tecnologie sviluppate e in continuo sviluppo da varie aziende che consentono di creare un computer quantistico: gli anelli superconduttori (Google, IBM, D-Wave, Quantum Circuits), a trappola ionica (ionQ), i quantum-dots in silicio (Intel), a qubit topologico (Microsoft, Bell Labs), ...

A partire dalla disuguaglianza di Bell, che dimostreremo anche in una versione realizzata da Eugene Paul Wigner,²⁴ andremo a tradurre il risultato ottenuto da John Bell, mediante la scrittura di un codice Python e l'utilizzo del framework open-source Qiskit per lavorare, a livello di circuiti, con i backend quantistici messi a disposizione dalla piattaforma IBM Quantum Experience. L'idea è quella di modellizzare uno stato di singoletto formato da due elettroni con spin opposti, in un sistema entangled di due qubit realizzato con l'ausilio di varie porte quantistiche. In un secondo momento effettueremo delle operazioni di rotazione attorno a un asse su ciascun qubit per proiettarli su uno dei tre possibili assi e infine misureremo per entrambi tutte le probabilità di trovarsi in uno specifico stato. Questa prima parte di codice verrà eseguita sulla piattaforma IBM Quantum Experience su uno specifico backend caratterizzato da parametri come il Quantum Volume, numero di qubit e disposizione dei qubit. Raccolti questi risultati andremo a ricavare la probabilità congiunta di avere entrambi i qubit con spin up lungo i tre assi e verificheremo graficamente quanto ottenuto da Bell, cioè che per certi angoli la disuguaglianza è non verificata e quindi il realismo locale è violato in meccanica quantistica.

La struttura di questo elaborato si articola nel seguente modo:

1. Nella prima parte approfondiremo gli aspetti non chiari che vi erano negli anni '30 tra meccanica classica e meccanica quantistica. Introduciamo il paradosso EPR il quale pose le basi alle teorie a variabili nascoste;
2. In un secondo momento dimostreremo matematicamente e analizzeremo la disuguaglianza ottenuta da Bell anche nella versione trattata da Eugene Paul Wigner, tale risultato ci consentirà di risolvere il paradosso;
3. Nella terza parte faremo una digressione sulla computazione quantistica, sugli strumenti che ci torneranno utili e sulla piattaforma IBM Quantum Experience;
4. Nell'ultima parte introdurrò il progetto BARBEQuE (Bring A Rational Bell Experiment on Quantum Experience) in cui useremo le nozioni imparate nella sezione precedente per dimostrare la disuguaglianza di Bell attraverso varie modalità: due simulazioni classiche di calcoli quantistici (in locale e su IBM Quantum Experience) e il calcolo quantistico su un vero computer quantistico. Come ultimo passo andremo ad analizzare i dati raccolti.

Capitolo 1

Paradosso Einstein-Podolsky-Rosen

Il 15 maggio del 1935 fu pubblicato, nel volume 47 del *Physical Review*, un articolo a cura di Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen intitolato: «*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*».² Nella loro dissertazione evidenziarono come assumendo per ipotesi l'idea che la funzione d'onda dia una descrizione completa della realtà fisica, insieme al criterio di realtà, che enunceremo, si arrivi a una contraddizione. Questa incongruenza è tale da forzare la conclusione che, la descrizione quantomeccanica della realtà fisica, data dalla funzione d'onda, non è completa.

1.1 Considerazioni generali

Secondo Einstein, Podolsky e Rosen in una qualunque teoria fisica, bisogna tener conto della distinzione tra:

- La realtà oggettiva che è indipendente dalla teoria;
- I concetti reali ossia gli strumenti con cui lavora la teoria.

Nel valutare una teoria ci si può porre due domande:

1. La teoria è corretta?
2. La descrizione fornita dalla teoria è completa?

Per quanto riguarda il primo punto, è possibile rispondere attraverso l'esperienza, eseguendo vari esperimenti che corroborano o meno la teoria e ne consentono un ulteriore sviluppo attraverso modifiche e/o implementazioni. La seconda domanda invece è trattata nell'articolo, più precisamente applicata al caso della meccanica quantistica. Necessariamente se una teoria voglia definirsi completa, deve soddisfare la seguente condizione:

Definizione 1.1 (Condizione di Completezza). *Ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.*

Non appena si definisce cosa sia un elemento della realtà fisica, la seconda domanda trova una risposta. Gli elementi devono essere trovati facendo appello ai risultati sperimentali e alle misure. Un criterio che considerarono ragionevole e sufficiente per una definizione di realtà è il seguente:

Definizione 1.2 (Criterio di Realtà). *Se, senza in alcun modo disturbare un sistema, possiamo prevedere con certezza (con probabilità pari all'unità) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica.*

Nella descrizione quantomeccanica, nel caso in cui si abbiano due quantità fisiche descritte da due operatori hermitiani che indichiamo con \hat{A} e \hat{B} , se questi due operatori non commutano ossia $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, la conoscenza dell'uno, preclude la conoscenza dell'altro. Questo fatto prende il nome di **Principio di indeterminazione di Heisemberg** ed è così formulato:

$$\Delta\hat{A} \cdot \Delta\hat{B} \geq \frac{\hbar}{2}$$

dove $\Delta\hat{A}$ e $\Delta\hat{B}$ rappresentano le incertezze su \hat{A} e \hat{B} .

Dal punto di vista sperimentale, questo significa che, più aumentiamo la precisione con cui vogliamo conoscere il valore della quantità \hat{A} , più l'incertezza su \hat{B} aumenterà e viceversa. Allora o la descrizione fornita dalla funzione d'onda in meccanica quantistica è non completa o queste due quantità non possono avere una realtà simultanea. Se entrambe le opzioni risultassero false, otterremmo una contraddizione, che prende lo storico nome di **Paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen**.

1.2 Formulazione del paradosso

Nella loro trattazione, iniziarono con il considerare una descrizione quantomeccanica del comportamento di una particella avente un solo grado di libertà. Come ben sappiamo dalla meccanica quantistica, il concetto fondamentale della teoria è quello di stato, che si suppone essere completamente caratterizzato dalla funzione d'onda ψ , la quale, a sua volta, è una funzione delle variabili scelte per descrivere il comportamento della particella. In corrispondenza di ogni quantità fisica osservabile A vi è un operatore hermitiano, che può essere indicato con la stessa lettera e un accento circonflesso (\hat{A}). Quindi se ψ è un autofunzione dell'operatore \hat{A} , ossia:

$$\hat{A}\psi = a\psi, \quad (1.2.1)$$

allora la grandezza \hat{A} ha con certezza il valore a ogni volta che la particella è nello stato dato da ψ . In accordo con il criterio di realtà, per una particella descritta da ψ per cui vale l'equazione (1.2.1), c'è un elemento della realtà corrispondente alla grandezza \hat{A} .

Si consideri, per esempio:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}p_0x} \quad (1.2.2)$$

dove \hbar e p_0 sono rispettivamente la costante di Planck ridotta e il momento lineare, mentre x è la variabile indipendente.

L'operatore corrispondente al momento lineare della particella è

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

da cui

$$\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_0\psi$$

Quindi, nello stato dato dall'equazione (1.2.2), il momento lineare ha con certezza il valore p_0 . Questo significa che il momento della particella nello stato dato dall'equazione (1.2.2)

ha realtà fisica. Dall'altra parte se l'equazione (1.2.1) non fosse valida, non potremmo più parlare della grandezza \hat{A} avente un preciso valore. Questo è il caso, per esempio, con la coordinata della particella. Se l'operatore corrispondente, diciamo \hat{x} , è l'operatore di moltiplicazione per la variabile indipendente, allora

$$\hat{x}\psi = x\psi \neq a\psi$$

Seguendo la descrizione quantomeccanica, possiamo solo calcolare la probabilità relativa che una misura della posizione sia in un intervallo compreso tra a e b :

$$P(a, b) = \int_a^b \psi^* \psi dx = \int_a^b dx = b - a$$

Dal momento che la probabilità è indipendente da a , ma dipende solo dalla differenza tra $b - a$, vediamo che tutti i valori delle posizioni sono tutti equiprobabili.

Per ottenere il valore esatto della posizione della particella nello stato (1.2.2), l'unico modo è quello di eseguire una misura diretta. Questa operazione però disturba lo stato della particella e quindi ne altera il suo stato. Dopo che la misura della posizione è determinata, la particella non sarà più in un autostato del momento, ma in un autostato della posizione. Possiamo quindi concludere che quando il momento della particella è conosciuto, la posizione non ha una realtà fisica.

Mostriamo quindi che se, secondo la meccanica quantistica, la funzione d'onda fornisce una descrizione completa della realtà fisica di un sistema e applichiamo il criterio di realtà, giungiamo ad un assurdo.

Prima di addentrarci nel vivo della discussione, introduciamo un concetto fondamentale: l'**entanglement quantistico**. Si tratta di un fenomeno fisico puramente quantistico, non ha una controparte classica, in cui lo stato quantistico, rappresentante l'insieme di due o più sistemi fisici, dipende dai singoli stati di ciascun sistema.

Da un punto di vista matematico possiamo vederlo nel seguente modo:

Definizione 1.3 (Entanglement Quantistico). *Siano A e B due sistemi non interagenti appartenenti ai rispettivi spazi di Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , e siano $|\psi\rangle_A$ e $|\phi\rangle_B$ i due stati in cui si trovano i due sistemi. Allora lo stato del sistema composto, appartenente a $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, sarà $|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B$.*

*Gli stati del sistema composto che possono essere scritti in questo modo sono detti **stati separabili**. Tuttavia non tutti gli stati di un sistema composto sono stati separabili.*

Siano $|i\rangle_A$ e $|j\rangle_B$ una base nei rispettivi spazi di Hilbert. Mediante la decomposizione di Schmidt, ogni stato nello spazio composto può essere scritto come:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j=0}^N c_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B$$

Lo stato sarà separabile se esiste un indice $i'j'$ tale per cui $c_{i'j'} = 1$ e $c_{ij} = 0 \forall i'j' \neq ij$, cioè se e solo se lo stato è separabile

$$|\psi\rangle_{AB} = |i\rangle_A |j\rangle_B$$

*Ogni stato per cui esiste più di un $c_{ij} \neq 0$, viene detto **stato entangled**.*

Partiamo dalle seguenti considerazioni:

- Supponiamo di avere due sistemi che indichiamo con I e II in grado di interagire in un intervallo di tempo, da $t = 0$ a $t = T$;
- Per $t > T$ supponiamo che non vi sia più interazione tra i due sistemi;
- Prima di $t = 0$ gli stati dei due sistemi sono noti.

Possiamo calcolare, con l'ausilio dell'equazione di Schrödinger, lo stato entangled dei due sistemi ad ogni istante di tempo successivo, in particolare siamo interessati a tempi $t > T$. Indichiamo con Ψ la funzione d'onda che descrive lo stato del sistema I e II. Precisiamo che non possiamo calcolare lo stato in cui è lasciato uno dei due sistemi dopo l'interazione. Questa informazione può essere ricavata solamente con l'aiuto di misure, attraverso un processo istantaneo e irreversibile conosciuto come collasso della funzione d'onda. Consideriamo gli elementi principali di questo processo. Sia A una grandezza fisica relativa al sistema I:

- a_1, a_2, \dots, a_n rappresentano gli autovalori di \hat{A} ;
- $u_1(x_1), u_2(x_1), \dots, u_n(x_1)$ rappresentano le autofunzioni di \hat{A} mentre x_1 è la variabile usata per descrivere il sistema I.

A questo punto Ψ può essere espressa nel seguente modo:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \quad (1.2.3)$$

dove in questo caso x_2 è la variabile relativa al sistema II e i $\psi_n(x_2)$ sono i coefficienti di espansione di Ψ sulla base di funzioni ortogonali $u_n(x_1)$.

Immaginiamo ora di misurare l'osservabile \hat{A} e ottenere come risultato a_k . Allora seguendo i principi della meccanica quantistica, il nostro sistema $\Psi(x_1, x_2)$ collasserà nell'auto-stato relativo ad a_k , ossia:

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) u_k(x_1)$$

Ovviamente il set di funzioni $u_n(x_1)$ dipende dalla scelta dell'osservabile. Se, invece di A avessimo scelto un'altra quantità che indichiamo con B , sempre relativa al sistema I, con:

- Autovalori: b_1, b_2, \dots, b_s ;
- Autostati: $v_1(x_1), v_2(x_1), \dots, v_s(x_1)$.

avremmo ottenuto, anziché l'equazione precedente, l'espansione:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1) \quad (1.2.4)$$

come prima, x_2 è la variabile relativa al sistema II e i $\varphi_s(x_2)$ sono i coefficienti di espansione di Ψ sulla base di funzioni ortogonali $v_s(x_1)$.

Nuovamente, se ora misurassimo la grandezza fisica \hat{B} ottenendo come risultato b_r , concludiamo che dopo la misura, il nostro sistema si troverà nello stato:

$$\Psi(x_1, x_2) = \varphi_r(x_2) v_r(x_1)$$

Come conseguenza di due differenti misure eseguite sempre sul sistema I, il sistema II potrebbe essere lasciato in stati con due differenti funzioni d'onda. D'altro canto, quando si va a effettuare un'operazione di misurazione, i due sistemi non interagiscono più, nel sistema II non può avvenire alcun cambiamento reale in conseguenza di tutto ciò che può essere fatto al sistema I. Quindi è possibile assegnare due funzioni d'onda differenti (nel nostro caso ψ_k e φ_r) alla stessa realtà (il sistema II dopo l'interazione con il sistema I). Approfondiamo la questione, supponendo che ψ_k e φ_r siano autofunzioni associati a due operatori hermitiani non commutanti. Siano i sistemi I e II, due particelle e che:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

dove x_0 è una costante. Identifichiamo \hat{A} con il momento lineare della prima particella, per cui la sua autofunzione sarà:

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar}p x_1}$$

corrispondente all'autovalore p . Per il caso in questione, abbiamo uno spettro continuo, quindi l'equazione (1.2.3) può essere riscritta come:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp$$

per cui

$$\psi_p(x_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(x_2 - x_0)p}$$

risulta essere l'autofunzione associata all'operatore

$$\hat{p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}$$

corrispondente all'autovalore $-p$ del momento della seconda particella.

Se consideriamo ora \hat{B} come la grandezza associata alla posizione della prima particella, la sua autofunzione risulterà:

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

con autovalore x . L'equazione (1.2.4) diventa:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx$$

dove

$$\varphi_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x - x_2 + x_0)p} dp = 2\pi\hbar \delta(x - x_2 + x_0)$$

Ma questo non è nient'altro che l'autofunzione associata all'operatore:

$$\hat{x} = x_2$$

corrispondente all'autovalore $x + x_0$ della posizione della seconda particella.

Mettendo insieme i risultati appena ottenuti ricaviamo che:

$$\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = i\hbar$$

Abbiamo dimostrato che in generale è possibile che ψ_k e φ_r siano autofunzioni di due operatori non commutanti, corrispondenti a grandezze fisiche. Tornando al caso generale trattato all'inizio, assumiamo che ψ_k e φ_r siano effettivamente autofunzioni di qualche operatore non commutante \hat{p} e \hat{x} , corrispondenti ad autovalori p_k e x_r , rispettivamente. Quindi, attraverso la misura di \hat{A} o \hat{B} siamo in grado di prevedere con certezza, senza in alcun modo disturbare il secondo sistema, o il valore della quantità \hat{p} (che è p_k) oppure il valore della quantità \hat{x} (ossia x_r).

In accordo con il **Criterio di Realtà**, nel primo caso dobbiamo considerare la quantità p essere un elemento della realtà, nel secondo caso la quantità x essere un elemento della realtà. Ma, come abbiamo visto, entrambe le funzioni d'onda ψ_k e φ_r appartengono alla stessa realtà.

All'inizio abbiamo affermato che o la descrizione fornita dalla funzione d'onda in meccanica quantistica è non completa o queste due quantità non possono avere una realtà simultanea. Siccome abbiamo appena dimostrato che due grandezze fisiche rappresentate da due operatori hermitiani, non commutanti, non possono appartenere alla stessa realtà, necessariamente ad Einstein, Podolsky e Rosen rimase solo affermare che la meccanica quantistica sia una teoria incompleta.

1.3 Versione di Bohm - Aharonov

Nel 1957, il 15 novembre, sempre sul Physical Review Letters, David Bohm e Yakir Aharonov pubblicarono una versione semplificata del paradosso trattato, anni prima, da Einstein, Podolsky e Rosen.⁴ Considerarono una molecola, dunque uno stato entangled, con spin totale pari a zero, caratterizzata da due atomi, che indichiamo con U e V , ciascuno con spin lungo l'asse z pari a $\frac{1}{2}$.

La funzione d'onda opportunamente antisimmetrizzata, risulta essere:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_z^U |-\rangle_z^V - |-\rangle_z^U |+\rangle_z^V \right]$$

dove $|\pm\rangle_z$ è la funzione d'onda in cui la particella U o V ha spin $\pm\frac{\hbar}{2}$ lungo l'asse z .

I due atomi successivamente sono separati mediante un metodo che non influenza in alcun modo lo spin totale. Dopo averli sufficientemente separati, così che la loro interazione cessi di esistere, ogni componente desiderata dello spin della prima particella (U) è misurata. Allora, poiché lo spin totale è ancora zero, si può immediatamente concludere che la stessa componente dello spin dell'altra particella (V) è opposta a quella di U .

Se questo fosse un sistema classico, non ci sarebbe alcuna difficoltà nell'interpretare questi risultati, perché tutte le componenti dello spin di ciascuna particella sono ben definite in ogni istante di tempo. Quindi, nelle molecole, ogni componente dello spin della particella U , ha, dall'inizio, un valore opposto a quello della stessa componente di V . In altre parole, i due spin sono correlati. La possibilità di ottenere informazioni sullo spin della particella V in questo modo evidente, non implica alcuna interazione dell'apparato con la particella V o qualsiasi interazione tra U e V .

Nella teoria quantistica, nasce una difficoltà nell'interpretare l'esperimento sopra, perché solo una componente dello spin di ciascuna particella può avere un valore definito ad un dato tempo. Quindi, se la componente x è definita, allora le componenti lungo gli altri assi sono indeterminate, infatti:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k$$

Nonostante ciò, la teoria quantistica implica che non importa quale componente dello spin di U possa essere misurata, la stessa componente dello spin di V avrà un valore definito e opposto quando la misura sarà finita. Ovviamente la funzione d'onda collasserà nello stato $|+\rangle_z^U |-\rangle_z^V$ oppure $|-\rangle_z^U |+\rangle_z^V$ se effettuiamo una misura dello spin lungo z , in accordo con i risultati della misurazione. Quindi, non vi sarà correlazione tra le componenti rimanenti degli spin dei due atomi. Tuttavia, prima che la misura abbia luogo, siamo liberi di scegliere qualsiasi direzione lungo cui misurare lo spin.

In modo da tirare fuori le difficoltà di interpretazione del risultato, ricordiamo che, originariamente, si riteneva che il principio di indeterminazione rappresentasse gli effetti del disturbo del sistema osservato da parte dei quanti discreti emessi dall'apparato di misura.

Questa interpretazione non porta a delle difficoltà gravi per il caso di una particella singola. Potremmo dire che misurando la componente z dello spin della particella U , disturbiamo le componenti x e y e le facciamo fluttuare. Questo punto di vista, più in generale dello spin, è una potenzialità realizzabile con l'ausilio di un apparato di misura opportunamente orientato.

Nel caso di coppie complementari di variabili continue, come posizione e momento lineare, si ottiene la ben nota dualità onda-particella. In altre parole, l'elettrone, ad esempio, ha potenzialità di comportamento ondulatorio e particellare reciprocamente incompatibili, che si realizzano in condizioni esterne adeguate. In laboratorio queste condizioni sono generalmente determinate da apparecchi di misura sebbene, più in generale, possano essere determinate da qualsiasi materia con cui interagisce l'elettrone. Ma, in ogni caso, è essenziale che ci sia un'interazione esterna, che disturbi il sistema osservato in maniera tale da portare alla realizzazione di una delle sue varie potenzialità. Come risultato di questo disturbo, quando una qualsiasi variabile viene resa definita, le altre variabili (non commutanti) devono necessariamente diventare indefinite e subire fluttuazioni.

Evidentemente, la precedente interpretazione non è soddisfacente quando applicata all'esperimento di EPR. Ovviamente è accettabile solo per la particella U (la particella il cui spin viene misurato direttamente). Ma non spiega perché la particella V (che non interagisce con U o con l'apparato di misura) realizza la sua potenzialità per uno spin definito esattamente nella stessa direzione di quella di U . Inoltre, non può spiegare le fluttuazioni delle altre due componenti dello spin della particella V come risultato del disturbo dovuto all'apparato di misura. Si potrebbe forse supporre che ci sia qualche interazione nascosta tra V e U , o tra V e l'apparato di misurazione, che ne spiega il comportamento. Una tale interazione sarebbe fuori dal contesto dell'attuale teoria quantistica. Inoltre dovrebbe essere istantaneo, perché l'orientamento dell'apparato di misura potrebbe essere cambiato molto rapidamente, e lo spin di V dovrebbe rispondere immediatamente al cambiamento. Un'interazione così immediata tra sistemi distanti non sarebbe in generale coerente con la teoria della relatività, poiché la velocità limite è finita e vale c .

Capitolo 2

Teorema di Bell

Negli anni successivi alla pubblicazione dell'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen continuò la diatriba tra i sostenitori del determinismo, secondo i quali la meccanica quantistica è parte di una teoria ancor più grande, la quale utilizzerebbe variabili nascoste per descrivere in maniera completa lo stato di un sistema fisico e i sostenitori dell'indeterminismo, gran parte di loro appartenenti al gruppo dell'interpretazione della scuola di Copenaghen, la cui idea era che le ipotesi di partenza di Einstein, Podolsky e Rosen, su cui basarono la loro dimostrazione, giungendo al paradosso, fossero errate.

La situazione sfociò in un continuo attacco nei confronti delle varie teorie a sostegno della propria idea, finché nella seconda metà del XX secolo, nel 1964, John Stewart Bell, pubblicò sul giornale scientifico *Physics, Physique, Fizika* l'articolo dal nome «*On the Einstein Podolsky Rosen paradox*». ³ Nella sua argomentazione, riprendendo gli articoli di EPR² e di Bohm e Aharonov,⁴ mostrò esplicitamente che l'aggiunta di variabili nascoste porterebbe a delle previsioni incompatibili con quelle della meccanica quantistica.

La chiave di volta, che crea questo problema, è proprio la richiesta di località, ossia che la misura effettuata su un sistema non sia influenzata da altre operazioni su un altro sistema lontano con cui ha interagito precedentemente. Vi è stato anche il tentativo di dimostrare che anche senza il principio di località, non sia possibile alcuna interpretazione a variabili nascoste della meccanica quantistica. Il risultato ottenuto da Bell, può essere formulato sottoforma di teorema:

Teorema di Bell. *Nessuna teoria fisica locale a variabili nascoste può riprodurre le predizioni della meccanica quantistica.*

Tali predizioni sono rappresentate da distribuzioni di probabilità ottenute a partire da una serie di misure in opportune condizioni. Bell riuscì a dimostrare che l'assunzione a priori del realismo locale fatta da Einstein, Podolsky e Rosen impone dei vincoli, non richiesti, su alcuni fenomeni che però vengono violati dalla meccanica quantistica.

La presenza di questi vincoli, che prendono il nome di **Disuguaglianze di Bell**, sono il punto chiave nella dissertazione di Bell in quanto permettono di verificare, per via sperimentale, le teorie a variabili nascoste. Nel corso degli anni sono stati svolti numerosi esperimenti aventi, come risultato comune, una chiara violazione delle disuguaglianze di Bell. Questi esperimenti hanno permesso dunque di dimostrare che il realismo locale è violato, in particolar modo in meccanica quantistica. Nonostante questo risultato, gli assiomi su cui si basa la teoria della relatività ristretta non sono errati, questo grazie al **teorema di non comunicazione**. Questo teorema, che non tratteremo, afferma l'impossibilità per due persone di inviare informazioni a velocità superiore a quella della luce sfruttando l'entanglement quantistico.

2.1 Disuguaglianze di Bell

Nel suo articolo,³ Bell, partì dal paradosso discusso da Einstein, Podolsky e Rosen nella versione trattata da Bohm e Aharonov.⁴ Considerò una coppia di particelle aventi spin pari a $\frac{1}{2}$, organizzate in un sistema nello stato di singoletto e libere di muoversi in direzioni opposte. Le operazioni di misura possono essere effettuate attraverso i magneti Stern-Gerlach selezionando le componenti degli spin $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$.

In accordo con i principi della meccanica quantistica, se viene realizzata una misura della componente $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$, dove \vec{a} rappresenta un generico vettore unitario, ottenendo il valore $+1$, allora una misura di $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$ deve necessariamente produrre come risultato il valore -1 e in maniera analoga vale il viceversa.

A questo punto, introduciamo e assumiamo il principio di località di Einstein. Questo ci mostra che se le due misure sono fatte in due luoghi molto distanti l'uno dall'altro, l'orientazione di uno dei magneti non influenza il risultato ottenuto dall'altro. Dal momento che possiamo prevedere in anticipo il risultato della misurazione di qualsiasi componente scelta di $\vec{\sigma}_2$, misurando in precedenza la stessa componente, ma di $\vec{\sigma}_1$, ne consegue che il risultato di una tale misurazione deve essere effettivamente predeterminato. Siccome la funzione d'onda iniziale quantomeccanica non determina il risultato di una misura individuale, questa predeterminazione pone la possibilità di una più completa specificazione dello stato. Tale possibilità può essere realizzata assumendo che una descrizione più completa sia data per mezzo di parametri λ .

Nella trattazione è del tutto irrilevante la natura di questi parametri, nella dimostrazione, Bell, assume che λ sia un singolo parametro continuo.

Il risultato A di misurare $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ è allora determinato sia dal vettore unitario \vec{a} che dal parametro λ e il risultato B di ottenere $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ allo stesso modo è determinato dal versore \vec{b} e dal parametro λ , abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \lambda) &= \pm 1 \\ B(\vec{b}, \lambda) &= \pm 1 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

L'importanza nell'assumere il principio di località è che il risultato B , per la particella 2, non dipende dalla configurazione di \vec{a} , del magnete, per la particella 1, in maniera analoga per la misura di A con l'orientazione di \vec{b} .

Introducendo $\rho(\lambda)$ come la distribuzione di probabilità di λ , possiamo calcolare il valore di aspettazione del prodotto delle due componenti $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ e $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \tag{2.1.2}$$

questo dovrà essere uguale al valore di aspettazione quantomeccanico, che, per lo stato di singoletto, è

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} \tag{2.1.3}$$

ma, come verrà mostrato, questo non è possibile. Dal momento che la distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ è una distribuzione di probabilità normalizzata

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

e visto che deve valere la relazione (2.1.1), la (2.1.2) non può essere minore di -1 , tale valore può essere raggiunto a $\vec{a} = \vec{b}$ solo se

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda)$$

Pertanto la relazione (2.1.2), può essere riscritta come:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)$$

Consideriamo un altro versore che indichiamo con \vec{c} , usando lo stesso ragionamento otteniamo che:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) \left[A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \left[A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1 \right] \end{aligned}$$

da cui

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right]$$

dove il membro di destra rappresenta $P(\vec{b}, \vec{c})$. Quindi abbiamo:

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c})$$

Supponendo che P non sia costante, in generale, il membro di sinistra è dell'ordine di $|\vec{b} - \vec{c}|$ per $|\vec{b} - \vec{c}|$ piccolo. Dunque $P(\vec{b}, \vec{c})$ non può essere stazionario nel valore minimo, ossia -1 , quando $\vec{b} = \vec{c}$, e non può essere uguale al valore ottenuto quantomeccanicamente.

Non vale nemmeno il viceversa, il risultato ottenuto dalla meccanica quantistica non può essere approssimato in maniera arbitrariamente precisa alla (2.1.3).

Dal momento che nessuna misura può essere effettuata senza un margine di errore, anziché considerare le relazioni (2.1.2) e (2.1.3), prendiamo in considerazione i valori medi:

$$\bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{e} \quad -\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

Supponiamo che per qualunque scelta di \vec{a} e \vec{b} , la differenza tra questi due è limitata da ε :

$$\left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right| \leq \varepsilon$$

L'obiettivo è quello quindi di dimostrare la **non** arbitrarietà di ε , ossia il suo valore non può essere scelto arbitrariamente piccolo. Ipotezziamo che per tutti i \vec{a} e \vec{b} valga la condizione

$$\left| \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \delta$$

Allora

$$\left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right| + \left| \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \varepsilon + \delta \quad (2.1.4)$$

da (2.1.2)

$$\bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) \quad (2.1.5)$$

dove

$$|\bar{A}(\vec{a}, \lambda)| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\bar{B}(\vec{b}, \lambda)| \leq 1 \quad (2.1.6)$$

dalla (2.1.4) e dalla (2.1.5), con $\vec{a} = \vec{b}$

$$d\lambda \rho(\lambda) \left[\bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) + 1 \right] \leq \varepsilon + \delta \quad (2.1.7)$$

dalla (2.1.5) abbiamo

$$\begin{aligned}\bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \bar{P}(\vec{a}, \vec{c}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) - \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda) \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) \left[1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda) \right] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda) \left[1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) \right]\end{aligned}$$

usando le condizioni in (2.1.6)

$$\left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \bar{P}(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda) \right] + \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) \right]$$

applicando (2.1.5) e (2.1.7):

$$\left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \bar{P}(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 1 + \bar{P}(\vec{b}, \vec{c}) + \varepsilon + \delta$$

e finalmente, sfruttando la (2.1.4),

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| - 2(\varepsilon + \delta) \leq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2(\varepsilon + \delta)$$

oppure

$$4(\varepsilon + \delta) \geq \left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| + \vec{b} \cdot \vec{c} - 1$$

Supponiamo ora di scegliere i tre versori sotto queste condizioni:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Allora

$$4(\varepsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1$$

Nonostante ciò, per δ finito e piccolo, ε non può essere preso arbitrariamente piccolo. Quindi, il valore medio quantomeccanico non può essere ricondotto, né accuratamente né arbitrariamente vicino, alla forma (2.1.2).

Questo mostra come le teorie a variabili nascoste, considerate essere una teoria più generale e nate per completare la teoria della meccanica quantistica, non sono in grado di riprodurre in alcun modo i risultati ottenuti da essa. Il significato qui è molto più profondo, la natura, per anni considerata avente un comportamento classico, per via della conservazione della località, si è dimostrata, con il risultato ottenuto da Bell e confermato dai numerosi esperimenti svolti, avere un carattere quantistico.

2.2 Versione di Wigner

Diamo ora uno sguardo a una derivazione particolare della disuguaglianza di Bell. Tale derivazione è stata realizzata dal fisico-matematico ungherese Eugene Paul Wigner²⁴ durante gli anni '70 e la dimostriamo poiché, come già annunciato, sarà la versione trattata nei nostri esperimenti su dispositivi quantistici.

Wigner considerò un modello semplice che riprende gli aspetti principali delle varie teorie alternative. Chi sostiene questo modello, concorda sul fatto che, a causa del principio di indeterminazione, risulti impossibile determinare simultaneamente \hat{S}_x ed \hat{S}_z . Nel momento in cui andiamo a considerare un insieme numeroso di particelle aventi spin pari a $\frac{1}{2}$, assegniamo a una certa frazione di essi la seguente proprietà:

- Se viene misurato \hat{S}_z , otteniamo con certezza il valore $+1$;
- Se viene misurato \hat{S}_x , otteniamo con certezza il valore -1 .

Una particella che verifica questa proprietà viene detta del tipo $|\vec{z}+; \vec{x}-\rangle$. Precisiamo che non stiamo affermando di poter misurare contemporaneamente le due componenti di \hat{S} , ma stiamo assegnando valori definiti delle componenti di spin in più di una direzione con la consapevolezza che solo una o l'altra componente possa essere effettivamente misurata.

Nonostante questo approccio sia fondamentalmente diverso da quello adottato dalla meccanica quantistica, le previsioni quantomeccaniche sulle misure di \hat{S}_x ed \hat{S}_z , eseguite sullo stato di spin up, vengono riprodotte, a condizione che il numero di particelle del tipo $|\vec{z}+; \vec{x}+\rangle$, sia uguale al numero di particelle del tipo $|\vec{z}+; \vec{x}-\rangle$.

Analizziamo come questo modello possa spiegare i risultati delle misurazioni di correlazione di spin, effettuate su sistemi composti nello stato di singoletto.

Necessariamente, per una particolare coppia di particelle deve esserci una corrispondenza perfetta tra la particella 1 e la particella 2, affinché il momento angolare totale intrinseco sia nullo.

I risultati previsti dalla meccanica quantistica vengono riprodotti nel momento in cui le particelle 1 e 2 sono abbinati nel seguente modo:

particella 1	particella 2
$ \vec{z}+; \vec{x}-\rangle$	$ \vec{z}-; \vec{x}+\rangle$
$ \vec{z}+; \vec{x}+\rangle$	$ \vec{z}-; \vec{x}-\rangle$
$ \vec{z}-; \vec{x}+\rangle$	$ \vec{z}+; \vec{x}-\rangle$
$ \vec{z}-; \vec{x}-\rangle$	$ \vec{z}+; \vec{x}+\rangle$

con popolazioni uguali, cioè il 25% ciascuna. Ipotizziamo che una particolare coppia di particella sia del primo tipo (riga 1) e che l'osservatore A decida di misurare \hat{S}_z per la particella 1. Alla luce di quanto appena osservato, A otterrà necessariamente il risultato $+1$, indipendentemente dal fatto che B scelga di misurare \hat{S}_z o \hat{S}_x per la particella 2. È proprio in questo modo che in questo modello si tiene conto del principio di località di Einstein. Il risultato ottenuto dall'osservatore A è predeterminato indipendentemente

cosa B scelga di misurare.

Al momento, questo modello, è riuscito a riprodurre in maniera esatta le previsioni ottenute dalla meccanica quantistica. Vediamo ora situazioni più complesse in cui il modello porta a previsioni diverse dalle solite predizioni quantomeccaniche.

Consideriamo tre versori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , in generale non mutuamente ortogonali. Ipotizziamo che una delle particelle appartenga al tipo $|\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+\rangle$. Sostanzialmente significa che se $\hat{S} \cdot \vec{a}$ è misurata, otteniamo con certezza il valore -1 , in maniera analoga la misura di $\hat{S} \cdot \vec{b}$ e $\hat{S} \cdot \vec{c}$ produrrà il valore $+1$. Anche in questo caso, deve esserci una perfetta combinazione, nel senso che l'altra particella dovrà necessariamente appartenere al tipo $|\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-\rangle$ per garantire un momento angolare intrinseco totale pari a zero, visto che il sistema complessivo è nello stato di singoletto.

Quello che si ottiene è una nuova tabella, simile alla precedente, in cui, in ogni dato evento, la coppia di particelle in questione deve essere un membro di uno degli otto tipi mostrati nella Tabella 2.2. Queste otto possibilità sono mutuamente esclusive e disgiunte.

popolazione	particella 1	particella 2
N_1	$ \vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}+\rangle$	$ \vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}-\rangle$
N_2	$ \vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}-\rangle$	$ \vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}+\rangle$
N_3	$ \vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+\rangle$	$ \vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-\rangle$
N_4	$ \vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-\rangle$	$ \vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+\rangle$
N_5	$ \vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+\rangle$	$ \vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-\rangle$
N_6	$ \vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-\rangle$	$ \vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+\rangle$
N_7	$ \vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}+\rangle$	$ \vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}-\rangle$
N_8	$ \vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}-\rangle$	$ \vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}+\rangle$

Immaginiamo che l'osservatore A misuri $\hat{S}_1 \cdot \vec{a}$ e ottenga $+1$ e che l'osservatore B misuri $\hat{S}_2 \cdot \vec{b}$ e ottenga $+1$. Ovviamente, seguendo la Tabella 2.2, la coppia di particelle appartiene al tipo 3 o al tipo 4, quindi il numero di coppie di particelle per le quali si realizza questa situazione, è $N_3 + N_4$. Dal momento che N_i è semidefinito positivo, abbiamo una relazione di disuguaglianza di questo tipo:

$$N_3 + N_4 \leq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7) \quad (2.2.1)$$

Definiamo con $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$ la probabilità che, in una selezione casuale, l'osservatore A misuri $\hat{S}_1 \cdot \vec{a}$ ottenendo $+1$ e l'osservatore B misuri $\hat{S}_2 \cdot \vec{b}$ ottenendo $+1$. Ovviamente

avremo

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) = \frac{N_3 + N_4}{\sum_{i=1}^8 N_i}$$

in maniera analoga, otteniamo

$$P(\vec{a}+, \vec{c}+) = \frac{N_2 + N_4}{\sum_{i=1}^8 N_i} \quad \text{e} \quad P(\vec{c}+, \vec{b}+) = \frac{N_3 + N_7}{\sum_{i=1}^8 N_i}$$

La condizione di positività data dalla (2.2.1), diventa quindi

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) \leq P(\vec{a}+, \vec{c}+) + P(\vec{c}+, \vec{b}+) \quad (2.2.2)$$

Questa è pertanto la **disuguaglianza di Bell** che segue dal **principio di località di Einstein**. Torniamo al mondo della meccanica quantistica senza parlare di frazioni di coppie di particelle appartenenti ad un tipo o ad un altro. Caratterizziamo tutti i singoletti di spin con lo stesso ket:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\vec{z}+; \vec{z}-\rangle - |\vec{z}-; \vec{z}+\rangle]$$

Usando questo ket e le regole della meccanica quantistica, possiamo calcolare senza ambiguità ciascuno dei tre termini in disuguaglianza.

Cominciamo con $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$. Supponiamo che l'osservatore A trovi $\hat{S}_1 \cdot \vec{a}$ essere positivo, per via della correlazione del 100% (segno opposto) discussa prima, la misura effettuata da B di $\hat{S}_2 \cdot \vec{a}$ produrrà con certezza un segno meno. Per calcolare $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$ dobbiamo considerare un nuovo asse di quantizzazione \vec{b} inclinato rispetto ad \vec{a} di un angolo θ_{ab} (vedi Figura 2.1).

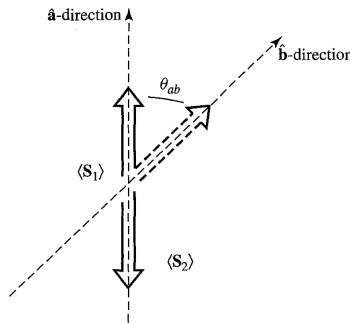


Figura 2.1: Calcolo di $P(\vec{a}, \vec{b})$.

La probabilità che la misura di $\hat{S}_2 \cdot \vec{b}$ dia un risultato positivo quando la particella 2 si trova in un autostato di $\hat{S}_2 \cdot \vec{a}$ con autovalore negativo è dato da:

$$\cos^2 \left[\frac{\pi - \theta_{ab}}{2} \right] = \sin^2 \left(\frac{\theta_{ab}}{2} \right)$$

di conseguenza otteniamo:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_{ab}}{2} \right) \quad (2.2.3)$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ viene dalla probabilità iniziale di ottenere $\hat{S}_1 \cdot \vec{a}$ con valore positivo. A questo punto estendiamo il risultato dell'equazione (2.2.3) agli altri due termini presenti nella (2.2.2). La disuguaglianza di Bell può essere dunque riscritta come:

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\theta_{ac}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_{cb}}{2}\right) \quad (2.2.4)$$

Tale disuguaglianza non è sempre verificata da un punto di vista geometrico. Per semplicità se scegliamo \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} complanari e lasciamo che \vec{c} divida in due le due direzioni definite da \vec{a} e \vec{b} :

$$\theta_{ab} \equiv 2\theta \quad \theta_{ac} = \theta_{cb} \equiv \theta$$

Allora la (2.2.4) è violata per

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (2.2.5)$$

Concludiamo nuovamente che le previsioni della meccanica quantistica non sono compatibili con la disuguaglianza di Bell. Esiste una differenza reale, osservabile - nel senso di essere verificabile da un punto di vista sperimentale - tra la meccanica quantistica e le teorie alternative che preservano il principio di località di Einstein.

2.3 Esperimenti di Alain Aspect

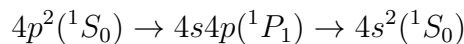
Numerosi esperimenti sono stati svolti nel corso degli anni per poter accettare una volta per tutte il risultato ottenuto da John Bell, poter finalmente affermare il comportamento quantistico della natura. Verso la fine del XX secolo, il fisico francese Alain Aspect, insieme ai suoi colleghi, realizzò complessi apparati sperimentali che permisero l'esecuzione di tre esperimenti, degni di nota, che sfruttarono la stessa sorgente:

- **Esperimento con polarizzatori ad un canale;**⁵
- **Esperimento con polarizzatori a due canali;**⁶
- **Esperimento con polarizzatori variabili nel tempo.**⁷

Dal momento che tutti e tre gli esperimenti sono simili tra loro, considereremo solo quello con polarizzatori variabili nel tempo visto come estensione degli altri due casi.

Questi esperimenti non sono nient'altro che la realizzazione del Gedankenexperiment di Bohm - Aharonov⁴ ispirato all'articolo EPR.² L'idea è quella di considerare una sorgente in grado di emettere coppie di fotoni correlati (ad esempio uno stato di singoletto) per poi essere separati. Vengono effettuate delle misurazioni correlate delle loro polarizzazioni con l'uso di opportuni polarizzatori remoti in vari orientamenti. In particolari serie di orientamenti dei polarizzatori, le due correlazioni di particelle, predette dalla descrizione quantomeccanica, non obbediscono al teorema di Bell.

I fotoni utilizzati, per via della loro bassa energia, provengono da cascate radiative atomiche, in particolar modo si utilizzò la cascata atomica del calcio:



Come mostrato nella Figura 2.2, questa cascata produce due fotoni ν_1 e ν_2 opportunamente correlati in polarizzazione. Per produrre questi fotoni, la cascata viene realizzata

con due diversi laser polarizzati parallelamente e focalizzati perpendicolarmente sul fascio atomico di calcio. Al fine di avere il massimo segnale in fluorescenza, viene eseguito un primo ciclo di retroazione che ne controlla la lunghezza d'onda. Un secondo ciclo viene invece effettuato per controllare la potenza del laser e stabilizzare l'emissione dei fotoni. Dopo questa fase preparativa, Aspect ottenne una sorgente efficiente e precisa, di dimensioni ridotte adatta per la progettazione dell'ottica nei canali di rivelazione e con una velocità di emissione pari a 4×10^7 coppie di fotoni al secondo utilizzando una potenza di 40 mW per ciascun laser.

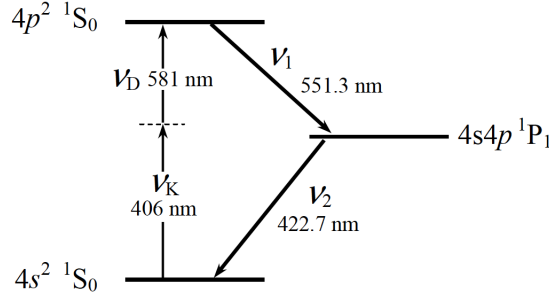


Figura 2.2: Eccitazione selettiva a due fotoni della cascata atomica del calcio.

Quando si parla di *polarizzatori ad un canale*,⁵ si pone davanti a ciascun polarizzatore un filtro polarizzatore lineare che lascia passare solo i fotoni polarizzati parallelamente all'asse del polarizzatore stesso e blocca quelli polarizzati in direzione ortogonale. Il risultato di questa configurazione è che viene misurato soltanto il valore +1 per ogni fotone delle coppie emesse dalla sorgente. Da un punto di vista matematico questo comporta la determinazione del solo risultato $R(\vec{a}+, \vec{b}+) = R(\vec{a}, \vec{b})$, poiché non si sa se il risultato -1 per un fotone sia dovuto al fatto che la sua polarizzazione sia veramente ortogonale agli assi del polarizzatore o se è un problema di efficienza del sistema di conteggio. Effettuando delle opportune raccolte con uno o entrambi i polarizzatori rimossi, si trovano le seguenti quantità per i rate di coincidenze:

- $R(\vec{a})$ è il rate di coincidenza con il polarizzatore II rimosso e il polarizzatore I orientato lungo la direzione \vec{a} ;
- $R(\vec{b})$ è il rate di coincidenza con il polarizzatore I rimosso e il polarizzatore II orientato lungo la direzione \vec{b} ;
- R_0 è il rate di coincidenza con i due polarizzatori rimossi.

Con queste informazioni ed elaborando il teorema di Bell, si giunge alla seguente disuguaglianza

$$-1 \leq S = \frac{1}{R_0} \left[R(\vec{a}, \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}') - R(\vec{a}, \vec{b}') - R_1(\vec{a}') - R_2(\vec{b}) \right] \leq 0 \quad (2.3.1)$$

Questa breve disquisizione, inerente al primo esperimento, è servita a ricavare questa disuguaglianza poiché, nell'esperimento con i polarizzatori variabili nel tempo, si terrà conto di questa. Il range di violazione per questa disuguaglianza di Bell è $[-1, 0]$.

Gli esperimenti con polarizzatori ad un canale⁵ e con polarizzatori a due canali⁶ erano stati eseguiti in configurazioni statiche, in cui i polarizzatori erano tenuti fissi per l'intera durata di una esecuzione. Sotto questo punto di vista, uno potrebbe mettere in discussione l'assunzione del principio di località, i cui risultati della misurazione del polarizzatore II non dipendono dall'orientamento del primo polarizzatore e viceversa, né il modo in cui le coppie vengono emesse dipende dalla direzione \vec{a} o \vec{b} . Tale condizione di località non è prescritta da alcuna legge fisica fondamentale se non dalla relatività ristretta. Si potrebbe immaginare che la disposizione degli strumenti sia effettuata con sufficiente anticipo per consentire loro una relazione reciproca nello scambio di segnali con velocità minore o uguale a quella della luce. Se un tipo di queste interazioni esistesse, il teorema di Bell e, di conseguenza, le disuguaglianze di Bell non varrebbero più.

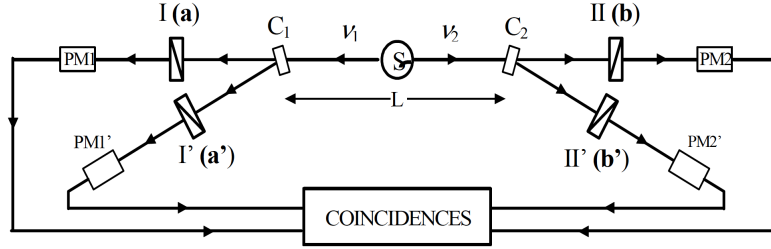


Figura 2.3: Apparato sperimentale dell'esperimento a disposizione variabile con commutatori ottici (C_1 e C_2) ciascuno seguito da due polarizzatori orientati lungo due diverse direzioni.

In questo esperimento, come mostrato in Figura 2.3 ogni polarizzatore è rimpiazzato da un apparato costituito da un dispositivo di commutazione seguito da due polarizzatori in due diversi orientamenti: \vec{a} e \vec{a}' sul lato I e \vec{b} e \vec{b}' sul lato II. Un tale commutatore è in grado di reindirizzare rapidamente la luce incidente da un polarizzatore all'altro. Le commutazioni tra i due canali avvengono ogni 10 ns. Considerato che tale intervallo di tempo e il tempo di vita medio del livello intermedio della cascata atomica (5 ns) sono piccoli in confronto a $\frac{L}{c}$ (40 ns), la rilevazione su un lato e il corrispondente cambio di orientamento sull'altro sono separati da un intervallo *spacelike*.

La commutazione della luce avviene attraverso una interazione acustico-ottica con un'onda stazionaria ultrasonica nell'acqua. L'angolo di incidenza (che coincide con l'angolo di Bragg $\theta_B = 5 \times 10^{-3}$ rad) e la potenza acustica sono regolati in maniera tale da avere una commutazione completa. Il problema è che l'utilizzo di grandi fasci non permette una commutazione completa, poiché l'angolo di incidenza non è esattamente l'angolo di Bragg. Al fine di avere la miglior commutazione, fu ridotta la convergenza dei fasci e pertanto il rate di correlazioni rilevate è minore rispetto agli altri due esperimenti. Nell'insieme, questo ha portato a tempi di misurazione maggiori e a risultati che violano ancora una volta la disuguaglianza di Bell mostrata in (2.3.1) e che sono in completo accordo con le previsioni della meccanica quantistica.

Alain Aspect e il suo team di ricerca per misurazioni ad angoli $\theta_{ab} = \theta_{ba'} = \theta_{a'b'} = 22.5^\circ$ hanno ottenuto come risultato

$$S_{\text{exp}} = 0.101 \pm 0.020$$

violando la disuguaglianza $S \leq 0$ di 5 deviazioni standard. Dall'altra parte, il valore previsto dalla meccanica quantistica è

$$S_{QM} = 0.112$$

Questo esperimento⁷, insieme agli altri due⁵⁻⁶, sono una verifica sperimentale e inconfutabile del disaccordo tra la meccanica quantistica e le teorie a variabili nascoste.

Capitolo 3

Computazione quantistica

3.1 Breve storia della computazione quantistica

²⁵ Durante gli anni Settanta, fisici, matematici e informatici iniziarono a prendere in considerazione l'idea di sviluppare un dispositivo computazionale in grado di sfruttare i principi e meccanismi della teoria quantistica. I primi articoli che cominciarono a parlare di computazione quantistica si hanno grazie ad Holevo⁸ (1973), Poplavskii⁹ (1975), Ingarden¹⁰ (1976) e Manin¹¹ (1980), ma è dal 1980 in poi che si hanno dei contributi sostanziali. Bennet, Benioff, Deutsch e Feynman cominciarono a sondare i limiti fisici fondamentali del calcolo classico. Se la tecnologia continuasse a rispettare la **Legge di Moore**, la quale afferma che il numero di transistor, per pollice quadrato, sui circuiti integrati sarebbe raddoppiato ogni 18 mesi dall'invenzione del circuito integrato, la dimensione, in continua diminuzione, di circuiti imballati su chip di silicio, raggiungerebbe alla fine una situazione in cui i singoli elementi non sarebbero più grandi di qualche atomo.

Con la consapevolezza della natura intrinsecamente quantistica dei principi che regolano e governano il comportamento e le proprietà del circuito considerato su scala atomica, è sorta spontanea la domanda sulla possibilità di realizzare un nuovo modello di computer che possa essere realizzato sulla base delle leggi quantomeccaniche.

La capacità intuitiva di Feynman, nello sfruttare le idee di Fredkin sulle possibilità del calcolo reversibile, permise di formulare un primo tentativo di risposta a questa domanda. L'idea si concretizzò nel 1982 in un modello astratto,¹² il quale mostrò come un sistema quantistico potesse essere utilizzato per eseguire calcoli. Un dispositivo di questo genere sarebbe in grado di operare come un simulatore per il mondo della fisica quantistica, ipotizzando che qualsiasi computer classico possa svolgere tale compito solamente in maniera inefficiente.

Nel 1985, un giovane David Deutsch¹³ formalizzò queste idee nella prima macchina di Turing quantistica universale, in analogia a quanto fece Alan Turing nel caso classico 50 anni prima. Questo risultato ha un significato molto profondo poiché, in teoria del Quantum Computing, rappresenta esattamente quello che la macchina di Turing universale rappresenta per il Classical Computing e ha condotto alla concezione contemporanea di computazione quantistica. Da qui si aprì la strada al modello di circuito quantistico realizzato per la prima volta nel 1989.

Lo sviluppo degli algoritmi quantistici iniziò nei primi anni Novanta, con la scoperta dell'algoritmo Deutsch-Josza¹⁴ (1992) e dell'algoritmo di Simon¹⁵ (1994). Quest'ultimo fornì gli strumenti per l'algoritmo di Shor¹⁶ sul factoring, esso dimostrò che il problema

della fattorizzazione dei numeri primi, classicamente considerato non trattabile, si può risolvere efficientemente con un algoritmo quantistico. Pubblicato nel 1994, questo algoritmo segnò una transizione di fase nello sviluppo dell'informatica quantistica e cominciò a suscitare un enorme interesse anche al di fuori della comunità dei fisici. In quello stesso anno, la prima realizzazione sperimentale della porta quantistica CNOT con trappole di ioni fu avanzata da Cirac e Zoller.¹⁷ Intorno al 1995, Shor¹⁸ e Steane¹⁹ proposero in parallelo, il primo schema per la correzione degli errori quantistici. Nello stesso anno la prima realizzazione di una porta logica quantistica fu fatto a Boulder nel Colorado, seguendo l'approccio proposto da Cirac e Zoller. Nel 1996, Lov Grover²⁰ dai Bell Labs, inventò un algoritmo di ricerca quantistica che produce una accelerazione dimostrabile rispetto alle sue controparti classiche. L'anno successivo fu proposto il primo modello per il calcolo quantistico basato su tecniche di risonanza magnetica nucleare (dall'inglese Nuclear Magnetic Resonance: NMR). Questa tecnica è stata realizzata nel 1998 con un registro a 2 qubit ed è stata migliorata fino a 7 qubit nel Los Alamos National Lab.

All'inizio del XXI secolo il campo ha subito una crescita esponenziale. Vennero sviluppati nuovi paradigmi di algoritmi quantistici come quelli adiabatici, basati su misurazioni e sulla teoria quantistica dei campi topologica, così come nuovi modelli fisici per la realizzazione su larga scala di computer quantistici a trappole di ioni freddi, basate sull'ottica quantistica (utilizzando fotoni e cavità ottiche), a sistemi di materia condensata e sulla fisica dello stato solido.

3.2 Nozioni teoriche

Siamo pronti ora a familiarizzare con gli strumenti fondamentali del calcolo quantistico. In particolar modo seguiremo un approccio che mostra le analogie e differenze sostanziali tra la computazione quantistica e quella classica, ci focalizzeremo sul formalismo matematico per avere una visione più generale e chiara, senza dover introdurre ulteriori nozioni e strumenti.

3.2.1 Quantum bit

Nel paradigma classico, il concetto fondamentale sul quale si fondano le teorie classiche della computazione e quella dell'informazione, contenente la quantità minima di informazione è il **bit**, dall'inglese *binary digit*. L'analogo quantistico, trattato nelle teorie quantistiche della computazione e dell'informazione, prende il nome di *quantum bit*, in breve **qubit**.

Classicamente il bit può assumere solo due valori: 0 oppure 1. Allo stesso modo il qubit può esistere in due stati che, sfruttando la notazione di Diracⁱ, possiamo scrivere come $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Dal punto di vista quantistico, un qubit può essere rappresentato mediante un vettore unitario appartenente a uno spazio vettoriale complesso bidimensionale \mathbb{C}^2 (Spazio di Hilbert \mathcal{H}). Gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ costituiscono una base ortonormale per lo spazio di \mathbb{C}^2 e sono definiti come:

ⁱNota anche come **notazione bra-ket**, è un formalismo introdotto da Paul Dirac per descrivere uno stato quantistico. Il nome deriva dal fatto che il prodotto scalare di due stati ϕ e ψ è denotato con un bracket $\langle\phi|\psi\rangle$ costituito da due parti: $\langle\phi|$ il *bra* e $|\psi\rangle$ il *ket*. Quest'ultimo descrive completamente uno stato quantistico.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nel linguaggio della computazione quantistica, questa base prende il nome di *base computazionale standard*. Alla luce di ciò lo stato di un qubit $|\psi\rangle$ può essere espresso mediante il *principio di sovrapposizione* tramite questi due vettori:

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e sono dei coefficienti. Questi coefficienti prendono il nome di **ampiezze** e sono opportunamente normalizzati in maniera tale da soddisfare la seguente relazione:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

La differenza sostanziale è che mentre un **bit** può assumere solo due valori, cioè è **discreto**, il **qubit**, sfruttando il principio di **sovrapposizione**, può assumere infiniti valori. Questo caratterizza il qubit essere una quantità **continua**.

Durante il processo di misura, nel caso classico, è sempre possibile osservare un **bit** e stabilire in che configurazione si trova, se 0 oppure 1. Dall'altra parte, nel caso quantistico si possono ricavare poche informazioni riguardanti lo stato in cui si trova il qubit. In particolare l'operazione di misura è difficile da effettuare e questo è legato al processo di collasso dello stato che avviene durante la fase di misura. Tale aspetto prende il nome di decoerenza quantistica e verrà trattato più avanti.

Quindi se con il bit ho la certezza di trovare lo stato in 0 oppure in 1, al qubit posso solamente associare una distribuzione di probabilità di trovarsi in certi stati.

Tutti i possibili valori assumibili da un qubit possono essere rappresentati mediante la **sfera di Bloch** (Figura 3.1). Si tratta di una sfera di raggio unitario in cui il polo nord coincide con lo stato $|0\rangle$ e il polo sud con $|1\rangle$. Ogni stato coincide con ogni punto presente sulla superficie della sfera, vi è una corrispondenza biunivoca tra punto sulla superficie e uno stato $|\psi\rangle$.

Uno stato generico è quindi rappresentato, mediante coordinate sferiche, come:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

in cui $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$.

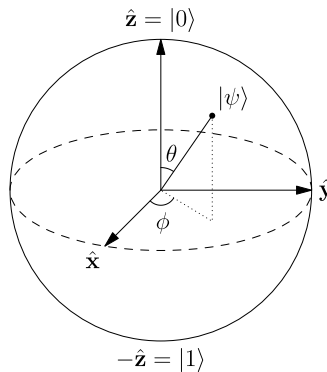


Figura 3.1: Rappresentazione generica di un qubit $|\psi\rangle$ sulla sfera di Bloch.

Questa rappresentazione potrebbe trarre un attimo il lettore in confusione. Paradossalmente uno potrebbe pensare che l'informazione rappresentabile sia infinita. I punti sulla superficie della sfera di Bloch sono infiniti e, di conseguenza, anche i coefficienti α e β possono assumere tutti i valori presenti nel campo complesso. In realtà, nel momento in cui viene effettuata una misura si passa da una sovrapposizione di stati a uno stato definito, quello associato al risultato della misura. Pertanto possiamo ottenere solo un unico valore, ciò che cambia è soltanto la probabilità di ottenere questi stati.

L'utilità di questa rappresentazione è che ci consente di realizzare uno stato in infiniti modi. Sfruttare questa versatilità ci tornerà utile quando opereremo con le porte logiche quantistiche e le operazioni di misura.

3.2.2 Porte logiche quantistiche

L'analogo quantistico delle porte logiche classiche sono le porte quantistiche che, in inglese, prendono il nome di **quantum gates**. La principale differenza rispetto al caso classico, risiede nel fatto che non possiamo implementare direttamente tutte le porte classiche come *and*, *or*, *xor*, ...

Siccome la meccanica quantistica ci mostra che l'evoluzione di uno stato isolato è dato dalla famosa equazione di Schrödinger:

$$H(t) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle$$

nel caso dei circuiti quantistici, questo implica che le operazioni possono essere realizzate solo da matrici unitarie:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I} \quad (3.2.1)$$

Ogni matrice, soddisfacente la condizione (3.2.1), è una possibile porta logica quantistica all'interno di un circuito quantistico.

Come conseguenza di questa osservazione, tutte le operazioni sono invertibili, ogni porta ha lo stesso numero di input e output e, attraverso un piccolo overhead, possiamo simulare ogni calcolo classico.

Quando stiamo operando con un solo qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, che solitamente rappresentiamo come $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, allora un quantum gate può essere identificato con una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ che soddisfa la condizione (3.2.1):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo stato $|\psi\rangle$ è quindi trasformato in

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix}$$

ossia

$$|\psi'\rangle = (a\alpha + b\beta)|0\rangle + (c\alpha + d\beta)|1\rangle$$

Dal momento che la trasformazione è unitaria, viene preservata la condizione di normalizzazione

$$|(a\alpha + b\beta)|^2 + |(c\alpha + d\beta)|^2 = 1$$

Dopo questa breve introduzione al concetto e alle proprietà delle porte logiche quantistiche, facciamo una carrellata dei quantum-gates più utilizzati e noti:

Porta Logica Quantistica	Rappresentazione Matriciale
X (o NOT) gate	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Z gate	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Hadamard (o H) gate	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Y gate	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
S gate	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$
T gate	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$

I gates X , Y e Z sono anche chiamati, insieme all'identità \mathbb{I} , **matrici di Pauli**. Una notazione alternativa per indicarli è: σ_X , σ_Y e σ_Z .

Queste particolari matrici, giocano un ruolo interessante nelle definizioni dei quantum gates di **rotazione**:

$$\begin{aligned} R_X(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}X} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ R_Y(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}Y} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ R_Z(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}Z} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo notare che a seconda del valore assunto da θ , possiamo ritrovare alcuni operatori visti in tabella.

Si può verificare che: $R_X(\pi) = X$, $R_Y(\pi) = Y$, $R_Z(\pi) = Z$, $R_Z(\frac{\pi}{2}) = S$, $R_Z(\frac{\pi}{4}) = T$.

Più in generale, per ogni quantum gate U a un solo qubit, esiste un vettore unitario $r = (r_x, r_y, r_z)$ e un angolo θ , tale per cui:

$$U \equiv e^{-i\frac{\theta}{2}r \cdot \sigma} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\theta}{2}(r_xX + r_yY + r_zZ)$$

Per esempio, scegliendo $\theta = \pi$ e $r = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si può osservare che:

$$H \equiv e^{-i\frac{\theta}{2}r \cdot \sigma} = -i\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z)$$

3.2.3 Misura

L'ultima componente fondamentale nella realizzazione di un circuito quantistico, dopo aver introdotto i **qubit** e le **porte logiche quantistiche** è l'operazione di **misura**.

Nella descrizione quantomeccanica con operazione di misura si intende l'interazione tra un sistema quantistico (appartenente al mondo microscopico) e uno strumento di misura (oggetto macroscopico). Questo processo risulta essere complesso sia da un punto di vista pratico che teorico. Durante questa fase, il sistema quantistico va incontro a un processo irreversibile, che è quello del *collasso della funzione d'onda*. In tale processo, lo stato rappresentato da una sovrapposizione lineare di stati, si riduce, collassa, a uno solo di questi stati il quale trova una corrispondenza nella realtà.

Nella computazione quantistica succede proprio questo. Effettuando una misura, si fa collassare il sistema in uno stato da cui poi si ricava l'informazione trasportata. Precisiamo che le misure vengono effettuate su una base opportuna, nel caso dei sistemi di IBM Quantum Experience, la base predefinita è quella rispetto a Z , i cui autostati sono $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

3.2.4 Sistemi a n qubit

La situazione non cambia molto nel momento in cui decidiamo di lavorare con sistemi dotati di più di un qubit. Supponiamo di scegliere di scrivere un algoritmo che necessiti l'utilizzo di due qubit, l'estensione a n qubit è analoga.

Ricordando che ogni qubit può essere nello stato $|0\rangle$ oppure $|1\rangle$, abbiamo quattro combinazioni possibili:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Possiamo alleggerire la notazione scrivendo

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle$$

anche in questo caso vale il principio di sovrapposizione, per cui un generico stato è scrivibile come:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (3.2.2)$$

dove i coefficienti α_{xy} sono numeri complessi che soddisfano la relazione di normalizzazione

$$\sum_{x,y=0}^1 |\alpha_{xy}|^2 = 1$$

Possiamo rappresentare $|\psi\rangle$ attraverso un vettore colonna

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

ed eseguire i prodotti interni, notando che:

$$\langle 00|00\rangle = \langle 01|01\rangle = \langle 10|10\rangle = \langle 11|11\rangle = 1$$

$$\langle 00|01\rangle = \langle 00|10\rangle = \langle 00|11\rangle = \dots = \langle 11|00\rangle = 0$$

Durante l'operazione di misura di entrambi i qubit dello stato generico ψ , descritto dall'equazione (3.2.2), possiamo ottenere:

- 00 con probabilità $|\alpha_{00}|^2$ e il nuovo stato sarà $|00\rangle$;
- 01 con probabilità $|\alpha_{01}|^2$ e il nuovo stato sarà $|01\rangle$;
- 10 con probabilità $|\alpha_{10}|^2$ e il nuovo stato sarà $|10\rangle$;
- 11 con probabilità $|\alpha_{11}|^2$ e il nuovo stato sarà $|11\rangle$.

Osserviamo quindi che la situazione è analoga a quanto avevamo con un solo qubit, ma ora abbiamo quattro possibilità.

Una delle novità di usare un sistema a due qubit, è la possibilità di misurare un solo qubit. Considerando sempre il nostro stato generico $|\psi\rangle$, se misuriamo il primo qubit (per il secondo vale lo stesso discorso) otterremo:

- 0 con probabilità pari a $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$. In questo caso, il nuovo stato di $|\psi\rangle$ sarà:

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

- 1 con probabilità pari a $|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2$. In questo caso, il nuovo stato di $|\psi\rangle$ sarà:

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}}$$

Una porta logica quantistica a due qubit in questo caso è sempre una matrice unitaria U , ma è una matrice 4×4 . Il modo più semplice per ottenere un gate a due qubit è avere una coppia di gate a un qubit, ad esempio A e B , che agiscono su ogni qubit. Nel caso delle matrici per un gate a due qubit, lo strumento matematico che si utilizza è il prodotto tensore $A \otimes B$ che agisce nel seguente modo:

$$(A \otimes B)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (A|\psi_1\rangle) \otimes (B|\psi_2\rangle)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{1,2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\ a_{2,1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{2,2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Una delle porte logiche quantistiche a due qubit più importanti e utilizzate negli algoritmi quantistici è il **CNOT gate** noto anche come *controlled-NOT gate* oppure *cX gate*. Esso è dato dalla matrice unitaria:

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo funzionamento è particolarmente interessante e descritto anche dal nome:

- Se il primo qubit è $|0\rangle$, nulla cambia:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle$$

- Se invece è $|1\rangle$, invertiamo il secondo qubit (e il primo rimane lo stesso):

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle$$

$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

La sua azione su $x, y \in \{0, 1\}$ è allora:

$$\begin{array}{ccc} |x\rangle & \text{---} \bullet \text{---} & |x\rangle \\ |y\rangle & \text{---} \oplus \text{---} & |y \oplus x\rangle \end{array}$$

La sua importanza è dovuta al fatto che consente di:

1. Creare sistemi **entangled**;
2. Copiare **informazioni classiche**, poiché

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle$$

3. Costruire altri **controlled gates**.

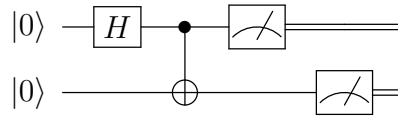
Analizziamo il primo punto. Abbiamo detto che uno stato $|\psi\rangle$ è un prodotto tra stati se può essere scritto nella forma:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle$$

dove $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono due stati (di almeno un qubit). Quando abbiamo introdotto gli stati **entangled**, abbiamo visto che **NON** è un prodotto tra stati. Un esempio di stati entangled, sono i seguenti e sono noti anche come **stati di Bell**:

$$\begin{array}{cc} \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Nell'ambito della computazione quantistica, possiamo costruire e misurare gli stati di Bell con dei semplici circuiti:



Inizialmente lo stato del sistema è $|00\rangle$. Dopo che applichiamo l'operatore **H gate**, lo stato è:

$$\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

quando applichiamo il **CNOT gate**, lo stato cambia in:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Osserviamo che nella fase di misura, otterremo 0 oppure 1 ognuno con probabilità $\frac{1}{2}$. Supponiamo di ottenere 0, allora, il nuovo stato sarà $|00\rangle$. Quando misureremo il secondo qubit otterremo 0 con probabilità 1. In maniera analoga, se otteniamo 1 dal primo qubit, il secondo sarà necessariamente 1.

Avendo ora a disposizione questo bagaglio di conoscenze possiamo addentrarci nell'ambiente in cui eseguiremo i nostri circuiti quantistici.

3.3 IBM Quantum Experience

La piattaforma online **IBM Quantum Experience**, nota anche separatamente come *IBM Quantum Composer* e *IBM Quantum Lab*, permette l'accesso, mediante servizio cloud, ai device quantistici forniti da **IBM Quantum**. L'accesso al servizio è disponibile mediante tre modalità:

- **Open Access** a più sistemi di calcolo quantistico disponibili tramite il cloud pubblico;
- **Advanced Access** per utenti selezionati ai sistemi aperti e aggiuntivi di IBM Quantum con un numero e una capacità maggiori di qubit;
- **Premium Access** ai sistemi di calcolo quantistico più avanzati di IBM tramite abbonamento a un'assegnazione di ore prioritarie.

Queste ultime due modalità vengono utilizzate principalmente per scopi di ricerca e sviluppo da enti di ricerca e aziende private. La piattaforma consente l'accesso a una serie di prototipi di processori quantistici IBM, una serie di tutorial sul calcolo quantistico e l'accesso a un libro di testo interattivo. I processori di questi device sono costituiti da qubit transmon superconduttori immersi in un refrigeratore a diluizione presso la sede centrale di **IBM Research**. Gli utenti eseguono il loro codice sul processore quantistico attraverso il modello di calcolo del **circuito quantistico**. I circuiti vengono realizzati attraverso il **framework Qiskit** e possono essere compilati in **OpenQASM** (acronimo di Open Quantum Assembly Language) per l'esecuzione su sistemi quantistici reali.

3.3.1 Framework Qiskit

IBM Research nel 2017 rilasciò **Qiskit** un framework open-source per poter lavorare con il calcolo quantistico. Fornisce gli strumenti per creare e manipolare algoritmi quantistici ed eseguirli su dispositivi quantistici o su simulatori forniti da IBM Quantum. Il modello utilizzato è quello del circuito quantistico che è attualmente utilizzato da gran parte dei dispositivi quantistici ad oggi a disposizione. Qiskit contiene a sua volta quattro pacchetti ciascuno dei quali è specializzato in compiti diversi:

- **Qiskit Terra** fornisce gli strumenti per creare circuiti quantistici pari o vicini al livello del linguaggio macchina. Consente di costruire i processi eseguiti su hardware quantistico in termini di porte logiche quantistiche e permette l'ottimizzazione dei circuiti quantistici per un particolare dispositivo;
- **Qiskit Aqua** mette a disposizione strumenti che possono essere usati senza alcuna conoscenza di programmazione quantistica. Attualmente supporta applicazioni in chimica, intelligenza artificiale, ottimizzazione e finanza;
- **Qiskit Aer** è caratterizzato da un insieme di elementi che permettono l'esecuzione di software quantistico attraverso la simulazione di piccoli dispositivi quantistici. Questi simulatori possono anche simulare gli effetti del rumore per modelli di rumore semplici e complessi;
- **Qiskit Ignis** contiene gli strumenti per caratterizzare il rumore nei dispositivi a breve termine, oltre a consentire l'esecuzione di calcoli in presenza di rumore. Ciò include anche elementi per il benchmarking dei device.

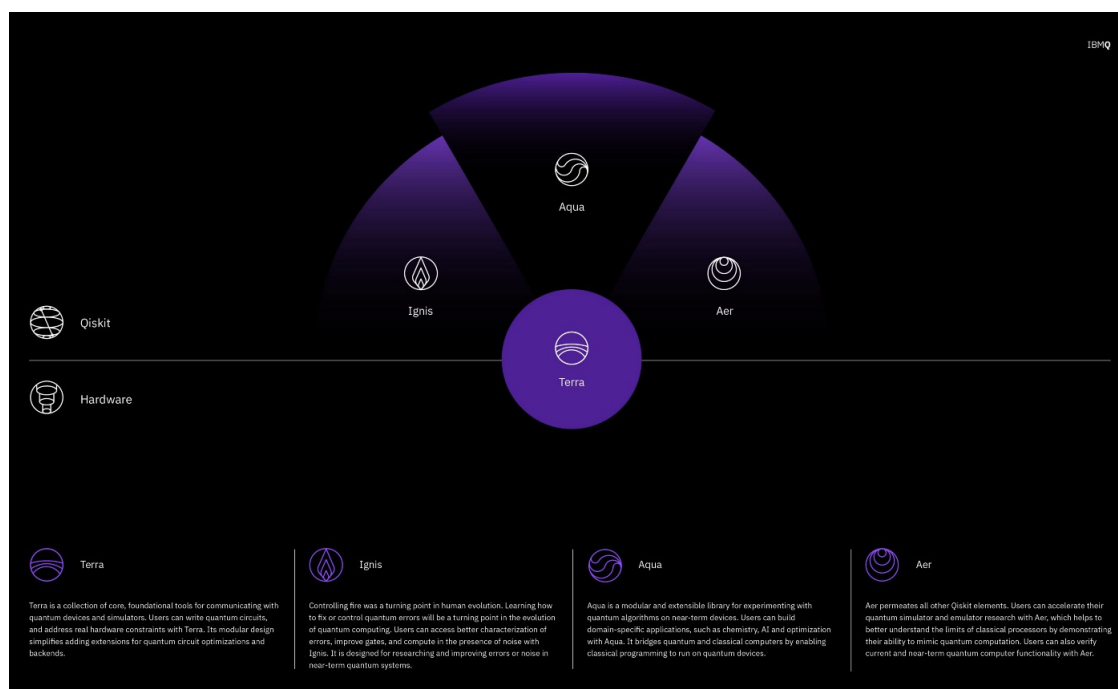


Figura 3.2: Schema del framework Qiskit su come interfacci le componenti hardware e software.

3.3.2 Giunzione Josephson

Nei sistemi quantistici di IBM Quantum (e anche di altri enti), basati sulla superconduttività, possiamo selezionare un'unità per la computazione. Questa unità l'abbiamo identificata con il nome di **qubit** ed esistono modi differenti per la sua realizzazione. Abbiamo:

- **Charge Qubit;**
- **Flux Qubit;**
- **Phase Qubit.**

Senza addentrarci nell'analisi di ogni singolo qubit, sono tutti un'implementazione dello schema di calcolo quantistico a superconduzione e sono tutti basati sull'aggiunta di un elemento non lineare al circuito LC.

Se si pensasse a un oscillatore armonico quantistico, si hanno vari livelli degeneri tra differenti livelli energetici e questo aspetto complica non poco la possibilità di riferirsi a un preciso stato. L'introduzione di un elemento non lineare, noto con il nome di **giunzione Josephson**, cambia i livelli energetici e risolve questo problema di indirizzamento, in particolar modo consente di realizzare un registro quantistico basato sugli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

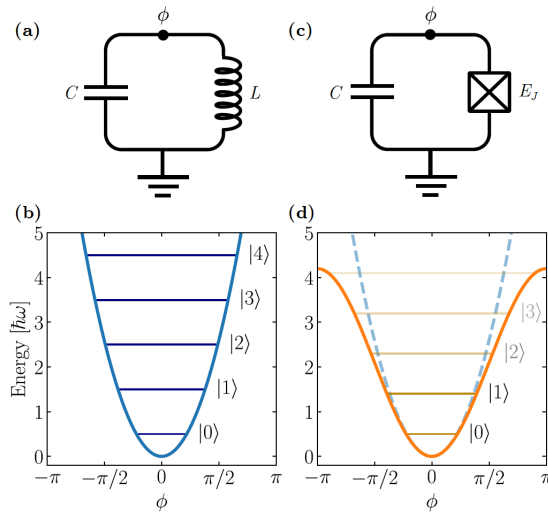


Figura 3.3: (a) Circuito LC. (b) Energia potenziale dell'oscillatore armonico che si ottiene dal circuito LC. (c) Circuito LC dove l'induttanza è rimpiazzata dalla giunzione Josephson (elemento non lineare). (d) Energia potenziale dell'oscillatore anarmonico che si ottiene introducendo la giunzione Josephson.

La **giunzione Josephson** è costituita da due lamine di materiale superconduttore separate da uno strato isolante. La fisica che sta dietro al suo funzionamento si basa sull'effetto tunnel della coppia di Cooper (stato legato di due elettroni con comportamento bosonico) attraverso la componente isolante.

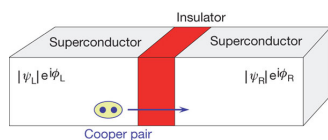


Figura 3.4: Schema della giunzione Josephson.

Se la temperatura del sistema è alta (superiore a quella critica degli elettrodi), il sistema superconduttore-giunzione-superconduttore si comporta come una resistenza ohmica. Se invece la temperatura è al di sotto di quella critica, il sistema si comporta da superconduttore, ossia come uno stato condensato di bosoni (coppie di Cooper). Queste coppie sono in grado di trasportare corrente senza che vi sia una caduta di tensione e questo spiega il tratto verticale nella Figura 3.5.

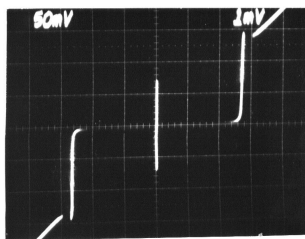


Figura 3.5: Caratteristica corrente-tensione della giunzione Josephson.

Grazie a questo elemento si è riusciti a realizzare e a sviluppare da un punto di vista hardware i sistemi quantistici. IBM Quantum usa un particolare tipo di charge qubit superconduttivo che prende il nome di **transmon**, sviluppato per ridurre la sensibilità al rumore.

Capitolo 4

Esperimento BARBEQuE

Nel primo capitolo abbiamo affrontato gli stessi ostacoli con cui, i fautori del più acceso determinismo, hanno dovuto far fronte. In particolare abbiamo citato il grande lavoro svolto da Einstein, Podolsky e Rosen il cui scopo era riuscire a comprendere meglio la descrizione della realtà fornita dalla meccanica quantistica.

Nella seconda sezione abbiamo visto come, in maniera elegante, Bell abbia risolto tale paradosso sconfiggendo l'esistenza delle teorie a variabili nascoste. Meno di vent'anni dopo Alain Aspect riuscì a chiudere quasi definitivamente la discussione, dimostrò in maniera diretta la violazione delle disuguaglianze di Bell e verificò, con un'elevata probabilità, il fenomeno dell'entanglement quantistico.

Negli ultimi anni, con l'affermarsi della computazione quantistica, abbiamo, nel terzo capitolo, introdotto i concetti teorici del calcolo quantistico e della piattaforma IBM Quantum Experience. Il passo successivo, che verrà mostrato in questo capitolo, è la dimostrazione sperimentale della violazione della disuguaglianza di Bell nella versione di E. P. Wigner mediante l'uso di dispositivi quantistici. Questo esperimento prende il nome di **BARBEQuE**, acronimo di *Bring A Rational Bell Experiment on Quantum Experience*. Il fine è quello di dimostrare per l'ennesima volta che il realismo locale è violato in meccanica quantistica e in secondo luogo mostrare che attualmente i dispositivi quantistici sono ancora in una fase embrionale, in quanto limitati da vari fattori (che vedremo) prima di poter essere utilizzati in maniera ottimale.

4.1 Traduzione della teoria in codice quantistico

Il primo passo, come abbiamo già ripetuto più volte, è convertire il lavoro fatto da Wigner in codice quantistico. Partiamo anzitutto con la realizzazione di uno stato entangled di due fermioni aventi spin pari a $\frac{1}{2}$, consideriamo allora uno stato di singoletto

$$|00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.1.1)$$

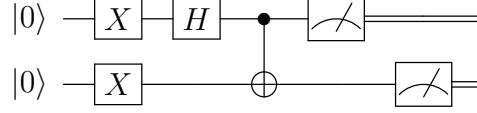
Precisiamo che lo stato $|00\rangle$ non ha nulla a che vedere con i qubit $|0\rangle$ e $|1\rangle$ al momento, si tratta di una trattazione matematica. Per realizzare questo stato dal punto di vista quantistico, identifichiamo gli stati:

- $|+\rangle$ con lo stato di spin-up: qubit $|0\rangle$;
- $|-\rangle$ con lo stato di spin-down: qubit $|1\rangle$;

Per cui possiamo riscrivere l'equazione (4.1.1) in questo modo:

$$|00\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Siccome IBM Composer inizializza gli stati nello stato $|0\rangle$ sfruttiamo la porta logica quantistica **X** (equivalente quantistico della porta NOT per i computer classici) per metterci nello stato $|1\rangle$. Attraverso **H** e **CNOT** possiamo creare il nostro stato entangled



Con l'ausilio di Qiskit possiamo scrivere in Python il seguente codice:

```
# Circuito quantistico di 2 qubit quantistici e 2 qubit classici
circ = QuantumCircuit(2,2)

# Inizio con gli stati |1> applicando il gate X
circ.x(0)
circ.x(1)

# Creo lo stato entangled con i gate H e CNOT
circ.h(0)
circ.cx(0,1)
```

Codice 4.1: Stato entangled di due fermioni (singoletto).

A questo punto, andiamo a individuare tre vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} complanari. E supponiamo che \vec{c} sia la bisettrice dell'angolo tra \vec{a} e \vec{b} . Siamo nella situazione raffigurata in Figura 4.1 dove

$$\theta_{ab} \equiv 2\theta \quad \theta_{ac} = \theta_{cb} \equiv \theta \quad (4.1.2)$$

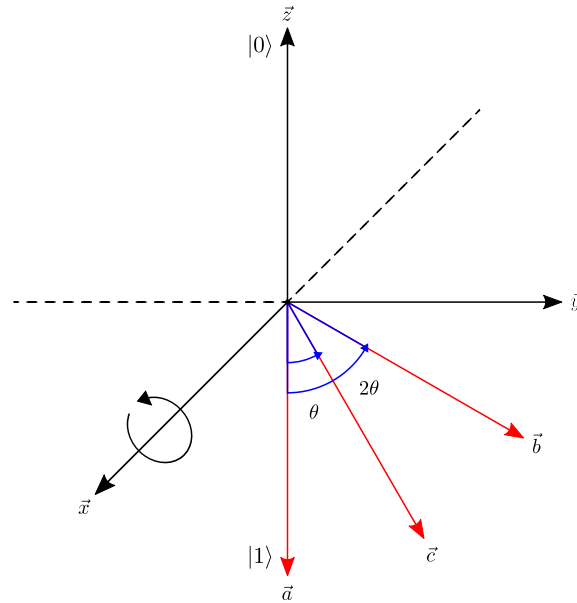


Figura 4.1: Disposizione geometrica dei tre vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} rispetto a un sistema di riferimento cartesiano.

Siccome nel framework Qiskit la base di misura predefinita è quella data dagli autostati del gate Z, per eseguire misure di spin rispetto ai tre versori, possiamo operare nella seguente modalità:

- Identifichiamo l'asse \vec{a} avente la stessa di direzione dell'asse \vec{z} , ma verso opposto;
- L'asse \vec{c} si ottiene attraverso la rotazione dell'asse \vec{a} rispetto all'asse \vec{x} di un angolo θ ;
- Il versore \vec{b} è costruito sempre come una rotazione attorno all'asse \vec{x} , in base all'angolo tra l'asse \vec{a} e l'asse \vec{c} , esso forma un angolo pari a 2θ rispetto ad \vec{a} .

Il risultato a cui era giunto Wigner era la seguente disuguaglianza di Bell

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) \leq P(\vec{a}+, \vec{c}+) + P(\vec{c}+, \vec{b}+) \quad (4.1.3)$$

in particolare per il caso dei tre versori complanari e dell'equazione (4.1.2), la disuguaglianza risultava essere violata per

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

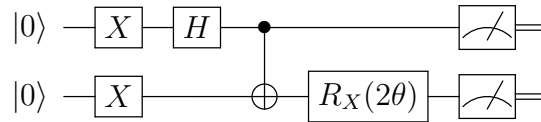
La disuguaglianza a cui faremo riferimento per i nostri dati e grafici sarà l'equazione (4.1.3) scritta in questa forma,

$$0 \leq P(\vec{a}+, \vec{c}+) + P(\vec{c}+, \vec{b}+) - P(\vec{a}+, \vec{b}+) \quad (4.1.4)$$

in maniera tale da rendere chiara l'idea che tutti i valori che si trovano al di sotto dello zero, violano la disuguaglianza.

Avendo ora chiara la situazione, non ci resta che realizzare tre circuiti quantistici per valutare ciascuna probabilità presente in equazione (4.1.4).

Iniziamo da $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$:



```

circ = QuantumCircuit(2,2)

circ.x(0)
circ.x(1)

circ.h(0)
circ.cx(0,1)

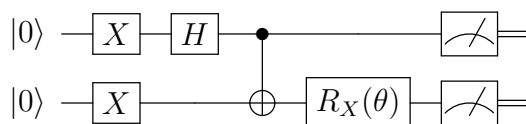
# Rotazione attorno all'asse x
circ.rx(2*theta, 1)

# Misura nella base del gate Z
circ.measure(range(2), range(2))

```

Codice 4.2: Misura del primo qubit lungo l'asse \vec{a} . Rotazione del secondo qubit di 2θ e misura lungo l'asse \vec{b} .

Per quanto riguarda $P(\vec{a}+, \vec{c}+)$:



```

circ = QuantumCircuit(2,2)

circ.x(0)
circ.x(1)

circ.h(0)
circ.cx(0,1)

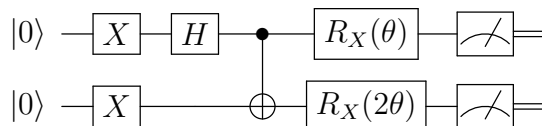
# Rotazione attorno all'asse x
circ.rx(theta, 1)

# Misura nella base del gate Z
circ.measure(range(2), range(2))

```

Codice 4.3: Misura del primo qubit lungo l'asse \vec{a} . Rotazione del secondo qubit di θ e misura lungo l'asse \vec{c} .

Infine per $P(\vec{c}+, \vec{b}+)$:



```

circ = QuantumCircuit(2,2)

circ.x(0)
circ.x(1)

circ.h(0)
circ.cx(0,1)

# Rotazioni attorno all'asse x
circ.rx(theta, 0)
circ.rx(2*theta, 1)

# Misura nella base del gate Z
circ.measure(range(2), range(2))

```

Codice 4.4: Rotazione del primo qubit di θ e misura lungo l'asse \vec{c} . Rotazione del secondo qubit di 2θ e misura lungo l'asse \vec{b} .

Ora non ci resta che eseguire questi tre circuiti e andare a considerare la probabilità di avere lungo le tre direzioni lo stato di spin-up, nel nostro caso siamo interessati a $|00\rangle$.

4.2 Simulazione locale

Prima di eseguire i nostri circuiti su un vero device quantistico, per avere già un'idea di quello che dovremmo aspettarci, risulta opportuno eseguire prima una simulazione locale tramite il pacchetto **Qiskit Aer**. Nello specifico utilizziamo il **simulatore QASM** che è

il principale backend di Qiskit Aer. Questo backend simula l'esecuzione di circuiti quantistici su un dispositivo reale e restituisce i conteggi delle misurazioni. Include modelli di rumore altamente configurabili e può anche essere caricato con modelli di rumore approssimativi generati automaticamente in base ai parametri di calibrazione dei dispositivi hardware. A livello di codice, si implementa nel seguente modo

```
# Scelta del backend
backend = Aer.get_backend('qasm_simulator')

# Esecuzione del circuito
job = execute(circ, backend, shots = launcher['shots'])

# Raccolta dei risultati
counts = job.result().get_counts(circ)
```

Codice 4.5: Esecuzione del circuito in locale tramite il pacchetto Aer e raccolta dei risultati.

Osserviamo che all'interno del codice viene indicato anche il numero di esecuzioni (**shots**), siccome il limite di esecuzioni sulla piattaforma online è fissato a 8192, in locale ci limitiamo a 10000 esecuzioni così da avere dati sufficienti per valutare in maniera opportuna le probabilità di ottenere $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$ per un certo angolo θ .

I dati vengono poi salvati in un file `.json` così da consentire un miglior accesso in fase di analisi dati. Attraverso la classe `Analyzer` presente in `barbeque.py` possiamo procedere nel mettere a grafico (Figura 4.2) le probabilità per $|00\rangle$ ottenute in funzione dell'angolo θ .

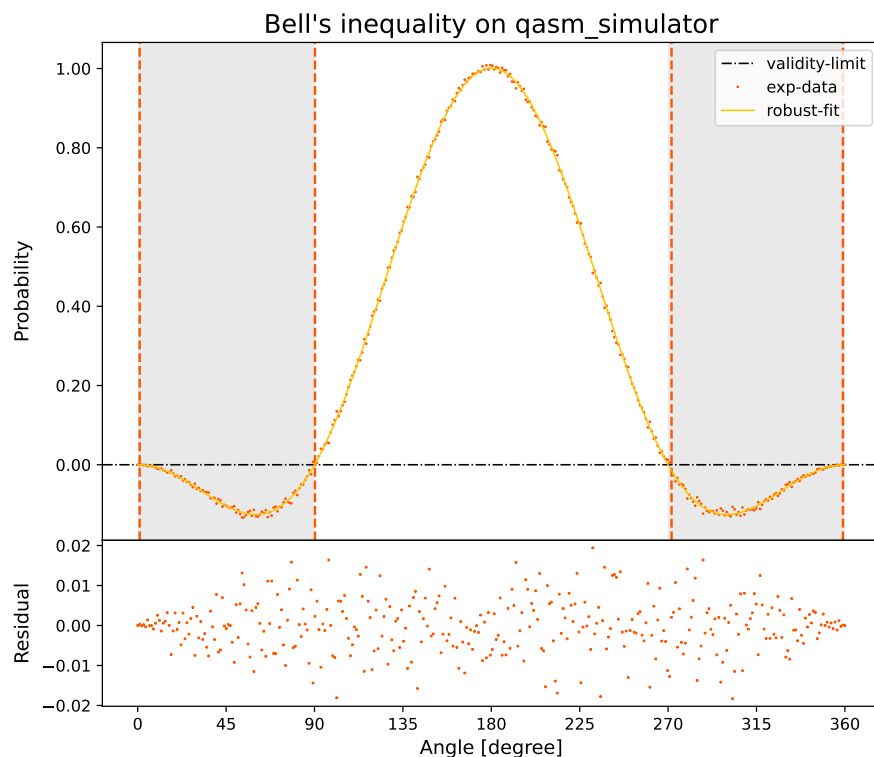


Figura 4.2: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ valutata lungo le tre direzioni tramite il simulatore QASM per 2 qubit con angoli fino a 360° e ciascun angolo valutato 10000 volte.

Il fit dei dati è stato realizzato tramite un fit robusto con una loss functionⁱ di Cauchy $\rho(z) = \ln(1 + z)$. La scelta è giustificata dal fatto che indebolisce enormemente l'influenza dei valori anomali, che possono essere principalmente dati in questo caso da errori quantistici simulati, di contro limita il processo di ottimizzazione del modello. La funzione utilizzata per realizzare il fit fa riferimento alla relazioni di disuguaglianza (2.2.4) e (4.1.4) ed è

$$a \sin(bx)^2 + a \sin(bx)^2 - c \sin(x)^2$$

dove a , b e c sono parametri inizializzati. In termini di codice

```
a*(np.sin(b*x)**2)+a*(np.sin(b*x)**2)-c*(np.sin(x)**2)
```

Codice 4.6: Funzione di fit utilizzata per il fit robusto.

Prima di passare alla fase successiva, è doveroso fare due osservazioni chiave che ci serviranno quando andremo a confrontarci con l'esecuzione quantistica:

- La disuguaglianza è violata per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e si ripete, ovviamente, per periodicità, proprio come previsto dal modello teorico. In particolare sono state evidenziate in grigio le regioni di violazione ($0^\circ - 90^\circ$ e $270^\circ - 360^\circ$), mentre con dei tratteggi verticali, il primo e ultimo valore di probabilità nelle regioni che si trovano al di sotto dello zero. In questo caso trattandosi di una simulazione, coincidono con l'ampiezza delle regioni in grigio;
- La distribuzione dei residui è uniforme, questa uniformità è dovuta al fatto che siamo di fronte a una simulazione.

4.3 Simulazione su IBM QE

La seconda simulazione che andiamo a realizzare viene eseguita direttamente su IBM Quantum Experience, si tratta sempre di una simulazione eseguita su un computer classico con una potenza di calcolo nettamente superiore rispetto agli ordinari computer (ad esempio sul computer in cui è stata eseguita la precedente simulazione). Il backend utilizzato in questa simulazione è `ibmq_qasm_simulator`, che, come nel caso locale, possiede modelli di rumore quantistico configurabili, così da avere una simulazione più vicina a quella che sarà l'esecuzione sui device quantistici. Il codice per implementarlo è simile al precedente, infatti

```
# Scelta del backend
backend = provider.get_backend('ibmq_qasm_simulator')

# Esecuzione del circuito
job = execute(circ, backend, shots = launcher['shots'])

# Raccolta dei risultati
counts = job.result().get_counts(circ)
```

Codice 4.7: Esecuzione del circuito su IBM QE tramite `ibmq_qasm_simulator` e raccolta dei risultati.

ⁱUna loss function è un metodo per valutare quanto bene il nostro algoritmo modella il nostro set di dati. Se le nostre previsioni sono completamente insensate, la nostra loss function produrrà un numero più alto. Se sono abbastanza buoni, produrrà un numero inferiore. Quando cambiamo parti del nostro algoritmo, la loss function ci dirà se stiamo migliorando il nostro modello oppure no.

tuttavia, per poter accedere ai sistemi quantistici di IBM è necessario essere in possesso di un APIⁱⁱ token, in maniera tale da tenere traccia, da parte di IBM, chi ha accesso ai suoi servizi.

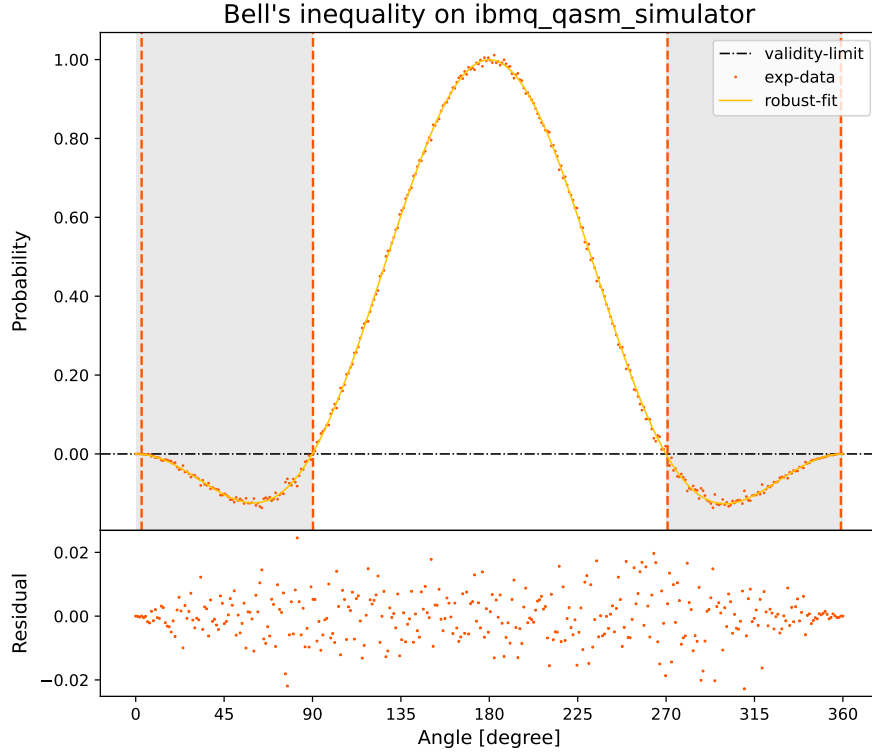


Figura 4.3: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ valutata lungo le tre direzioni tramite `ibmq_qasm_simulator` per 2 qubit con angoli fino a 360° e ciascun angolo valutato 8192 volte.

La stessa analisi dati è realizzata sui risultati ottenuti mediante fit robusto e stessa funzione di fit. Come possiamo notare, confrontando con la Figura 4.2, i grafici sono molto simili, entrambe le simulazioni danno il medesimo risultato, cioè la disuguaglianza è violata per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e la distribuzione dei residui è uniforme. Questo fatto ci indica che il codice non è così complesso da dover essere eseguito, necessariamente, su sistemi che richiedono alte prestazioni in termini di performance.

4.4 Esecuzione su IBM QE

Avendo ora a disposizione due simulazioni che prevedono la medesima distribuzione di probabilità, siamo pronti a eseguire il codice sui backend quantistici di IBM Quantum Experience. Durante la fase di raccolta dati sono stati sfruttati più backend possibili così da poter raccogliere più informazioni possibili e individuare quali siano le caratteristiche che incidono maggiormente sulle prestazioni di un device quantistico. Tutti gli esperimenti fatti sono stati eseguiti su angoli nell'intervallo da $[0, 360]$ con passo di 1° , ciascun angolo è stato valutato 8192 volte e il tutto per le tre probabilità $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$, $P(\vec{a}+, \vec{c}+)$ e $P(\vec{c}+, \vec{b}+)$. Qui di seguito riportiamo il migliore e il peggiore risultato ottenuti. Per gli

ⁱⁱApplication Programming Interface, software intermediario che consente a due applicazione di comunicare tra loro. Vengono spesso messe a disposizione da varie aziende per consentire a terzi di realizzare ulteriori applicazioni.

altri grafici eseguiti su backend differenti si veda Appendice A.

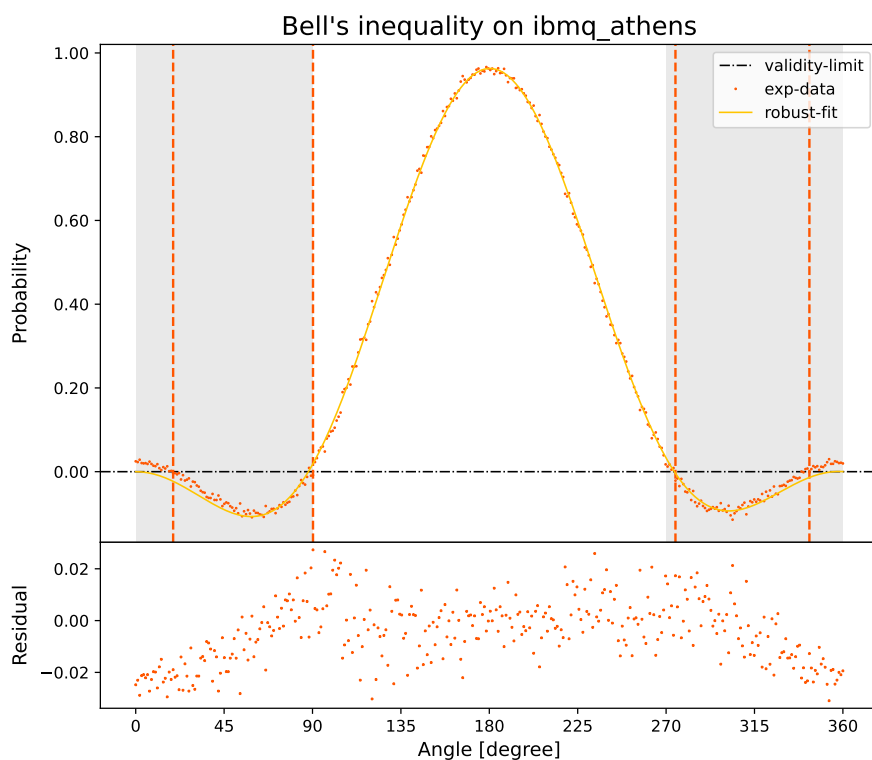


Figura 4.4: Esecuzione su `ibmq_athens`.

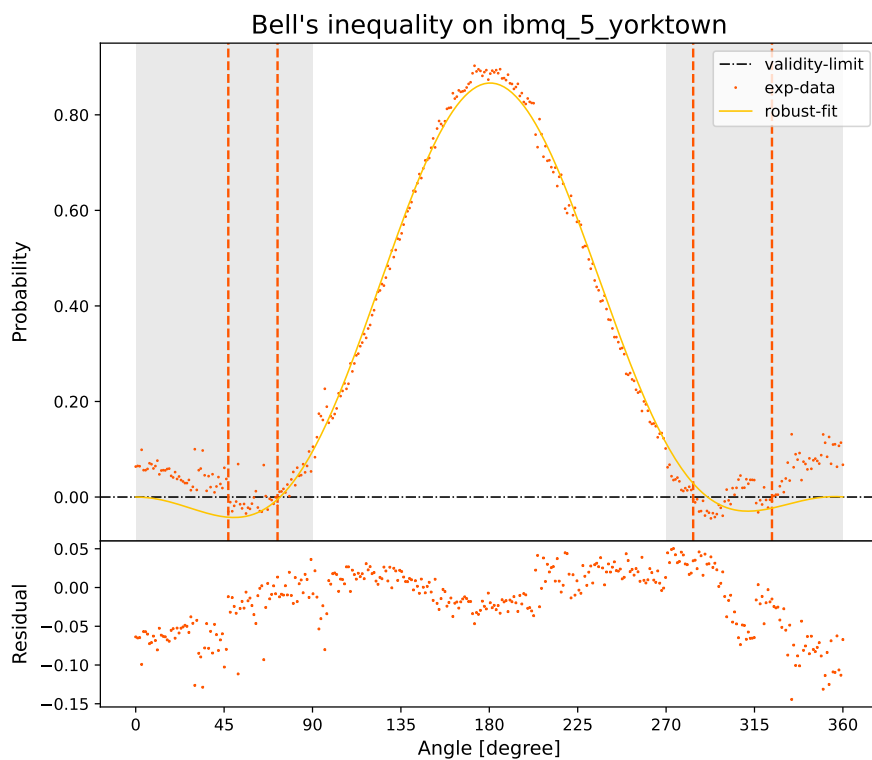


Figura 4.5: Esecuzione su `ibmq_5_yorktown`.

L'andamento previsto per entrambi i grafici è in accordo con le simulazioni, tuttavia

possiamo ben evidenziare che la distribuzione all’inizio e alla fine della curva, regione in cui dovremmo avere violazione della disuguaglianza, per alcuni valori non è sempre soddisfatta. In particolar modo per `ibmq_5_yorktown` la Figura 4.5 mostra alcuni punti al di sopra del limite di violazione, infatti la regione di validità risulta essere più stretta rispetto alla regione teorica in grigio. Dopo aver eseguito il fit robusto con i parametri inizializzati ricavati dalle simulazioni precedenti, guardando i residui possiamo constatare che la distribuzione non risulta essere più uniforme, specialmente per `ibmq_5_yorktown`. Abbiamo quindi che per entrambi i backend quantistici viene rispettato l’andamento previsto dalle simulazioni, tuttavia essendo sistemi quantistici sono soggetti a particolari sorgenti di rumore (quantistico, termico, elettronico, ...) e altri parametri che vediamo ora.

Iniziamo con l’analizzare singolarmente i device quantistici, ciascun backend fornisce alcune informazioni sui qubit presenti al suo interno.

ibmq_athens					
Qubit	Frequenza (GHz)	T1 (μs)	T2 (μs)	Readout Error	CNOT Error
0	5.175	90.064	101.008	0.809×10^{-2}	cx0_1: 9.955×10^{-3}
1	5.267	72.271	98.256	1.449×10^{-2}	cx1_2: 7.847×10^{-3} cx1_0: 9.955×10^{-3}
2	5.052	85.724	123.600	1.800×10^{-2}	cx2_3: 6.922×10^{-3} cx2_1: 7.847×10^{-3}
3	4.855	137.955	25.278	1.600×10^{-2}	cx3_4: 6.748×10^{-3} cx3_2: 6.922×10^{-3}
4	5.118	114.209	159.438	1.720×10^{-2}	cx4_3: 6.748×10^{-3}
ibmq_5_yorktown					
0	5.283	42.157	20.021	2.229×10^{-2}	cx0_2: 1.371×10^{-2} cx0_1: 2.164×10^{-2}
1	5.247	58.408	26.439	2.980×10^{-2}	cx1_2: 1.998×10^{-2} cx1_0: 2.164×10^{-2}
2	5.033	60.282	76.485	7.530×10^{-2}	cx2_4: 1.314×10^{-2} cx2_3: 2.353×10^{-2} cx2_1: 1.998×10^{-2} cx2_0: 1.371×10^{-2}
3	5.292	47.668	31.841	6.220×10^{-2}	cx3_4: 2.366×10^{-2} cx3_2: 2.353×10^{-2}
4	5.078	59.234	40.169	3.839×10^{-2}	cx4_3: 1.314×10^{-3} cx4_3: 2.366×10^{-2}

Tabella 4.1: Calibrazione di `ibmq_athens` e di `ibmq_5_yorktown`.

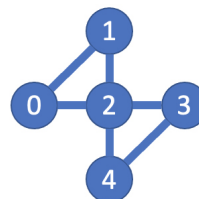
In questo caso la Tabella 4.1 mostra cinque caratteristiche che caratterizzano principalmente un qubit:

1. **Frequenza:** i dispositivi IBM sono costituiti da più qubit e componenti oscillatori LC, ciascuno con una frequenza ben definita. I dispositivi sono progettati mirando a frequenze nell’intervallo di 5 – 7 GHz, ma a causa di piccole variazioni, fluttuano da questi valori ideali;

2. **T1**: noto anche come **relaxation time**, rappresenta il tempo necessario affinché un sistema passi dallo stato eccitato $|1\rangle$ allo stato fondamentale $|0\rangle$ attraverso un'emissione spontanea di fotoni. Questo fenomeno in teoria dell'informazione quantistica prende il nome di **amplitude damping**;
3. **T2**: noto anche come **dephasing time**, rappresenta il tempo necessario affinché si verifichi simultaneamente sia una perdita di energia e sia una perdita di fase, si tratta di fenomeni conosciuti anche come **amplitude damping** e **phase damping**;
4. **Readout Error**: rappresenta l'errore associato nel misurare il singolo qubit, ad esempio per il qubit 0 di `ibmq_athens`, se noi eseguiamo 1000 misure su quel qubit, statisticamente 8 misure saranno errate;
5. **CNOT Error**: rappresenta l'errore associato quando si opera con due qubit, si noti infatti che ciascuna connessione possibile ha un proprio errore di coppia.

Precisiamo che insieme, **T1** e **T2**, prendono il nome di **tempo di coerenza**, più sono lunghi T1 e T2, più il nostro sistema si mantiene uguale a se stesso senza che vi sia applicata qualche operazione. Iniziamo a confrontare i due sistemi quantistici saltano all'occhio alcune analogie e differenze sostanziali che andiamo a elencare qui di seguito:

- Il numero di qubit a disposizione per entrambi i sistemi è 5, noi ci limitiamo a utilizzare i primi due (0 e 1);
- Le frequenze sono simili tra loro, sono nell'intorno dei 5 GHz;
- T1 e T2 sono molto più lunghi per `ibmq_athens`, e questo è già un primo vantaggio rispetto all'altro backend, poter lavorare con qubit che si mantengono coerenti per più tempo è un fattore importante;
- L'errore associato al readout è superiore di qualche unità per `ibmq_5_yorktown`, il che è uno svantaggio perché significa avere una probabilità maggiore nell'ottenere misure errate;
- Per l'errore legato al CNOT notiamo che le connessioni tra qubit di `ibmq_5_yorktown` hanno un errore superiore, di un fattore 10, ma la discussione non si limita solo a questo. Osserviamo che sempre per `ibmq_5_yorktown` abbiamo più connessioni, infatti questi backend non si differenziano soltanto per le caratteristiche dei qubit, ma anche per la loro posizione all'interno del chip che li contiene. Come notiamo nella Figura 4.6: `ibmq_athens` presenta una disposizione lineare dei qubit, ciascun qubit è connesso con quello ai propri lati, mentre `ibmq_5_yorktown`, Figura 4.7, ha una disposizione a rombo, dove la maggior parte dei qubit presenta tre connessioni fatta eccezione per il qubit centrale connesso a tutti.

Figura 4.6: Geometria di `ibmq_athens`.Figura 4.7: Geometria di `ibmq_5_yorktown`.

Analizzando tutti questi parametri, si evince che il backend migliore sia `ibmq_athens` e questo è confermato anche dalla miglior distribuzione presente nella Figura 4.4 più vicina alle simulazioni. Tuttavia, alla luce di queste nuove informazioni, potrebbe risultare utile eseguire esperimenti con parametrizzazioni e configurazioni diverse, così da individuare la configurazione ottimale e che parametri uno sperimentatore debba considerare prima di eseguire il proprio codice su dispositivi quantistici.

4.5 Simulazione locale in parallelo

In questa sezione ci occupiamo di andare a testare in maniera diretta, sfruttando l'algoritmo creato per testare le disuguaglianze di Bell, quali siano i parametri che giocano un ruolo fondamentale nella scelta di un device quantistico. Dal momento che gran parte dei backend quantistici mette a disposizione 5 qubit (a parte `ibmq_16_melbourne` che ne ha 15), si può pensare di eseguire lo stesso circuito due volte simultaneamente in una configurazione parallela valutando, ad esempio, lo stesso angolo per entrambi i circuiti. Questo significa andare a eseguire i circuiti rappresentati in Figura 4.8, Figura 4.9 e Figura 4.10.

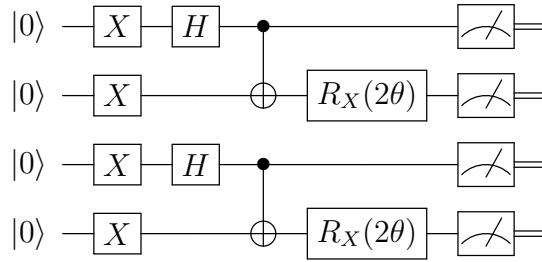


Figura 4.8: Circuiti in parallelo della probabilità $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$.

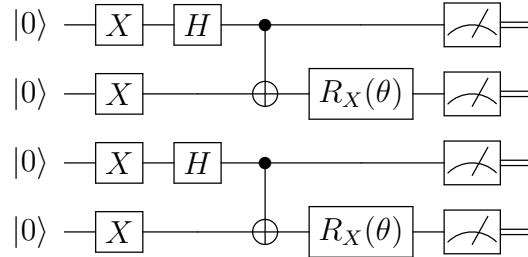


Figura 4.9: Circuiti in parallelo della probabilità $P(\vec{a}+, \vec{c}+)$.

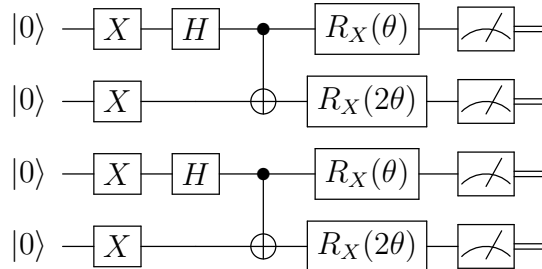


Figura 4.10: Circuiti in parallelo della probabilità $P(\vec{c}+, \vec{b}+)$.

Le simulazioni vengono eseguite nuovamente in locale tramite Qiskit Aer, sfruttando il simulatore QASM. I risultati della simulazione sono disposti all'interno del grafico in Figura 4.11. Entrambi i fit sono eseguiti attraverso fit robusti così da minimizzare l'influenza degli errori quantistici simulati.

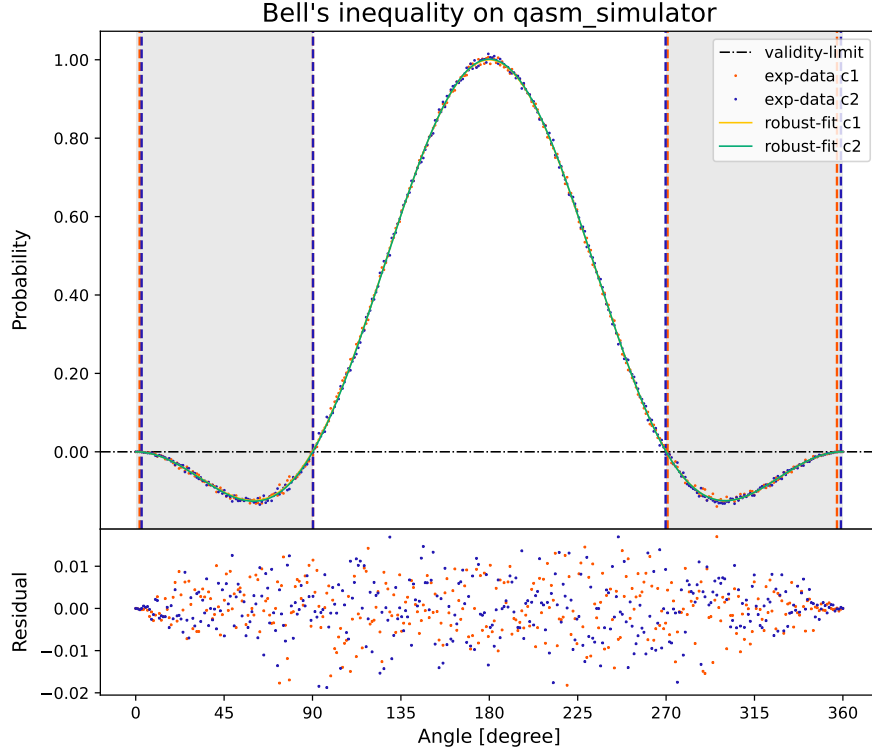


Figura 4.11: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ valutata lungo le tre direzioni tramite il simulatore QASM per due circuiti in parallelo che valutano il medesimo angolo.

Notiamo una cosa importante, le simulazioni sembrano mostrare che tra i vari qubit non ci sia alcuna influenza, è come se ciascun qubit fosse isolato dagli altri, infatti la regione di validità dei dati coincide con la regione di validità in grigio. Osservando invece la disposizione geometrica dei qubit in `ibmq_athens` e in `ibmq_5_yorktown`, ci aspettiamo che il rumore giochi un ruolo più importante rispetto al caso a singolo circuito.

4.6 Simulazione su IBM QE in parallelo

Ancora una volta, prima di spostarci sui due device quantistici, vogliamo valutare un'altra simulazione su `ibmq_qasm_simulator`, già la simulazione locale non ha dato risultati anomali, per cui ci aspettiamo che anche questa simulazione sia conforme alla precedente, infatti, come mostra la Figura 4.12, la simulazione non mostra alcuna difformità.

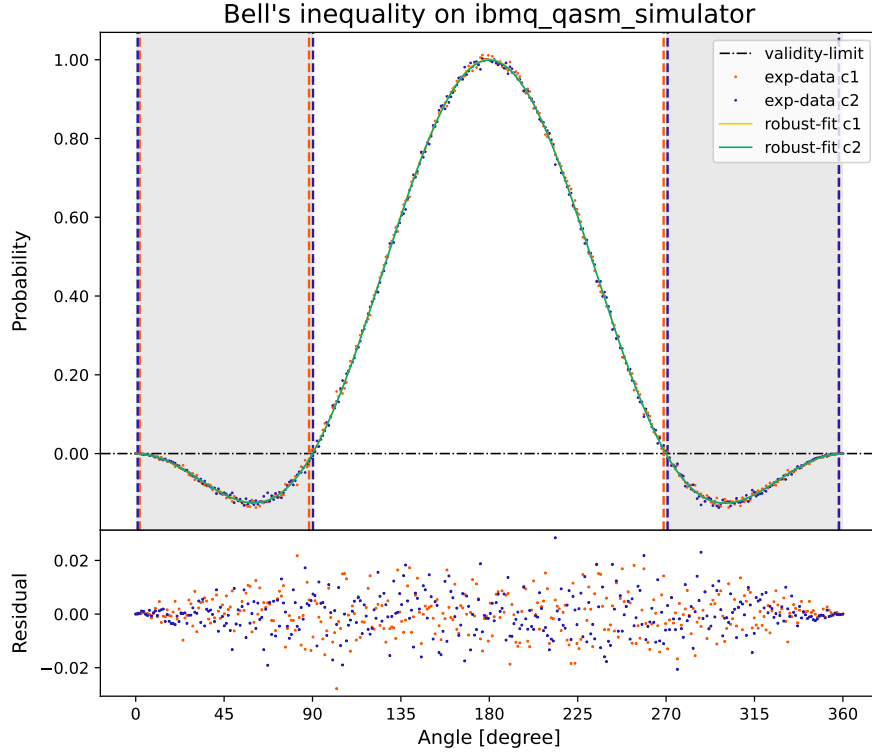


Figura 4.12: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ valutata lungo le tre direzioni tramite il simulatore `ibmq_qasm_simulator` per due circuiti in parallelo che valutano il medesimo angolo.

4.7 Esecuzione su IBM QE in parallelo

Avendo ora a disposizione due simulazioni che ci diano un'idea dell'andamento di entrambe le distribuzioni di probabilità possiamo andare a eseguire i circuiti in parallelo mostrati in Figura 4.8, Figura 4.9 e Figura 4.10. Le configurazioni usate sono uguali sia per `ibmq_athens` e `ibmq_5_yorktown`:

- Numero di qubit coinvolti: 4, cioè i qubit 0-1-2-3;
- Numero di esecuzioni per ciascun angolo: 8192 (limite imposto dalla piattaforma);
- Numero di probabilità valutate: 3 cioè $P(\vec{a}+, \vec{c}+)$, $P(\vec{c}+, \vec{b}+)$ e $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$.

I parametri invece per cui si differenziano in maniera sostanziale sono:

- Tempo di coerenza dato da T1 e T2;
- Disposizione geometrica dei qubit;

- Readout Error;
- CNOT Error.

Avendo chiara la situazione possiamo andare a eseguire i due circuiti, raccogliere i dati, valutare la probabilità di $|00\rangle$ e infine eseguire il nostro solito fit robusto. I risultati che si ottengono sono dati da Figura 4.13 e Figura 4.14.

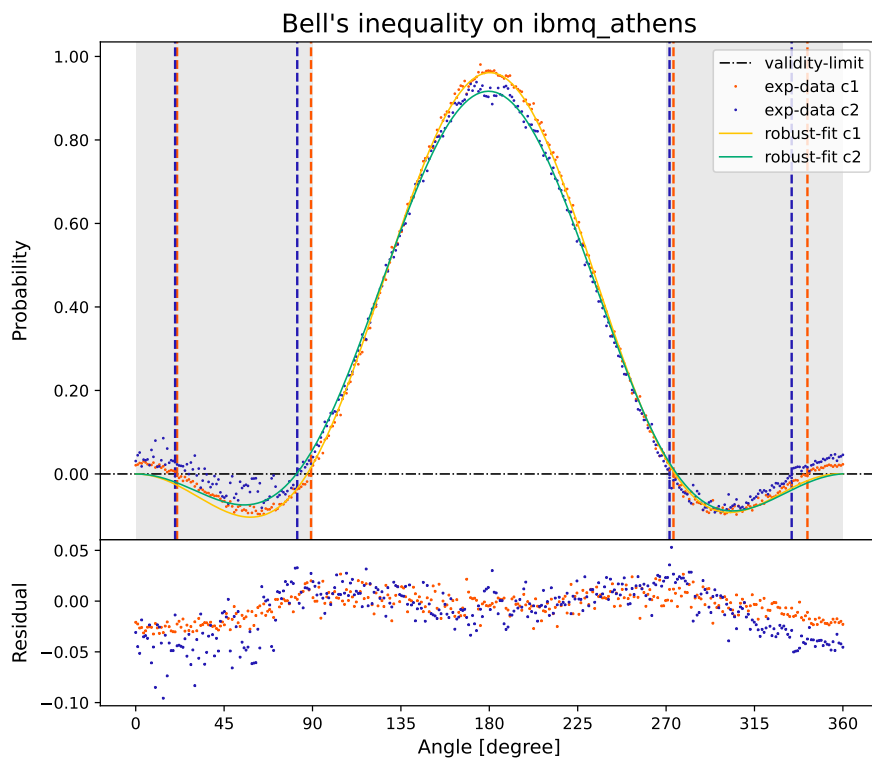


Figura 4.13: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ per due circuiti in parallelo valutata su `ibmq_athens`.

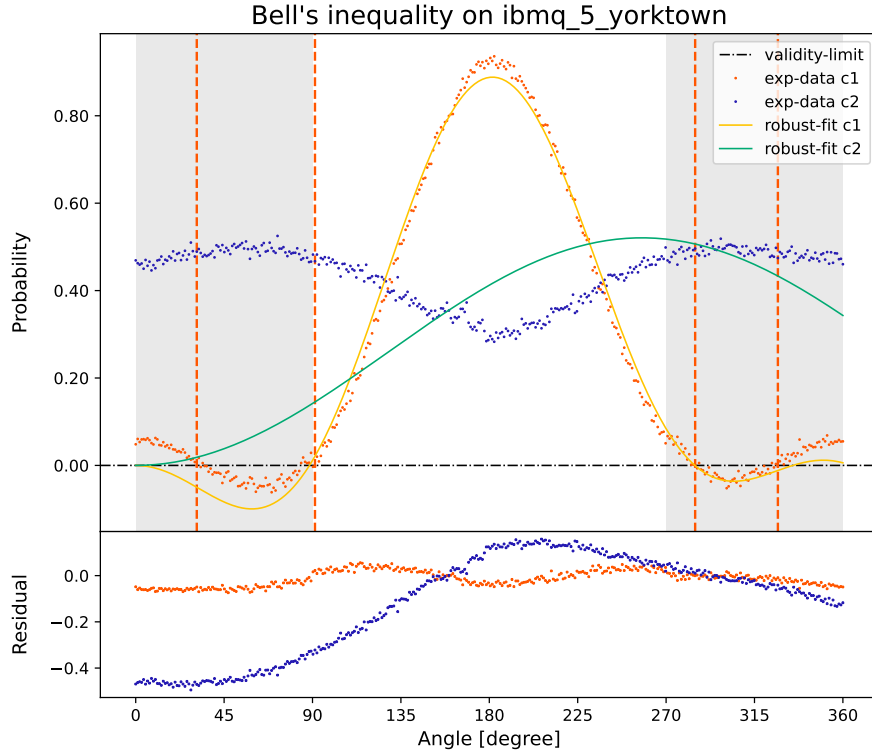


Figura 4.14: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ per due circuiti in parallelo valutata su `ibmq_5_yorktown`.

La situazione che si presenta risulta essere molto più rumorosa rispetto al caso del singolo circuito. Analizziamo separatamente i risultati ottenuti dai due backend. Per quanto riguarda `ibmq_athens` (Figura 4.13), confrontandolo con il caso a singolo circuito (Figura 4.4) la distribuzione sulla coda primaria risulta essere più disturbata, nonostante i valori si trovino comunque al di sotto del limite di validità della disuguaglianza, fatta eccezione per i punti prossimi all'angolo 0 e 2π (si veda la distribuzione dei residui). La curva gialla (dati in rossi), è descritta dai qubit 0 e 1 mentre la curva verde (dati in blu) è descritta dai qubit 2 e 3. Confrontando le due curve, quella che ha un comportamento più vicino alle simulazioni e al caso a singolo circuito è quella gialla, infatti notiamo che nella curva verde, a causa del fatto che il qubit 3 presenta un T_2 bassissimo $25.278 \mu s$, si discosta leggermente dall'andamento corretto. La situazione è molto più drammatica per `ibmq_5_yorktown` (Figura 4.14), la curva verde (dati in blu) che descrive il secondo circuito in parallelo con il primo è completamente errata. Sembra che la curva verde sia specchiata rispetto al reale andamento, nonostante la curva gialla (dati in rosso) che descrive il primo circuito presenti un andamento compatibile con le simulazioni e al caso a singolo circuito. I punti (rossi) che violano il limite di validità sono molto meno rispetto ai casi precedenti.

Cerchiamo di capire a cosa sia dovuto. Guardando alle calibrazioni in Tabella 4.1 e alla disposizione geometrica Figura 4.7, il qubit 2 di `ibmq_5_yorktown` presenta T_1 e T_2 molto lunghi rispetto a tutti gli altri (il che è un bene), di contro però ha un Readout Error elevato e tutti i qubit sono connessi a lui (in quanto qubit centrale). Può risultare ragionevole pensare di eseguire i due circuiti in parallelo con qubit che hanno un tempo di coerenza compatibile tra loro e che presentino poche connessioni tra loro così da ridurre il rumore dovuto a qubit adiacenti. Questa idea può essere realizzata passando da una

configurazione in cui si utilizzano i qubit 0-1-2-3 (Figura 4.15) a una in cui si utilizzano i qubit 0-1-3-4 (Figura 4.16).

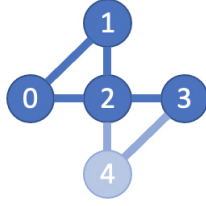


Figura 4.15: Configurazione 0123

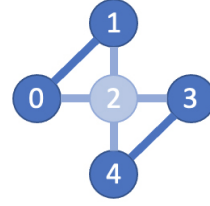


Figura 4.16: Configurazione 0134

Forti di queste assunzioni, proviamo a eseguire il codice in questa nuova configurazione su `ibmq_5_yorktown`.

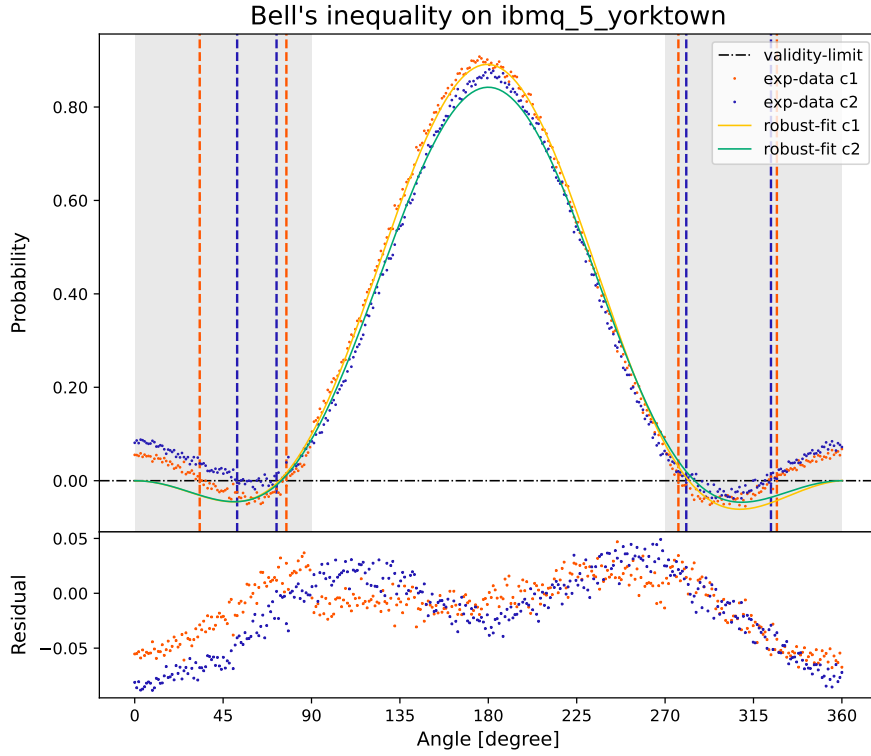


Figura 4.17: Distribuzione di probabilità di $|00\rangle$ per due circuiti in parallelo valutata su `ibmq_5_yorktown` in configurazione Figura 4.16.

Quello che otteniamo è rappresentato in Figura 4.17. La situazione torna normale per il secondo circuito, non presenta più quell'andamento anomalo. I punti che violano la disuguaglianza sono davvero pochi e sono quelli compresi circa nell'intervallo $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ esteso per periodicità.

4.8 Quantum Volume

Tenere conto di tutti i parametri visti nella Tabella 4.1 aggiungendo anche la disposizione geometrica dei vari qubit all'interno dello stesso backend, porta con sé ulteriori

complicazioni nella realizzazione di un esperimento. IBM, e altre aziende, per valutare le performance dei propri backend quantistici ha introdotto un protocollo che consente di andare a quantificare quanto un device quantistico sia efficiente in termini prestazionali e di coerenza. Questo protocollo è noto come **Quantum Volume** e va a testare quanto bene un computer quantistico può eseguire un circuito costituito da gate casuali a due qubit che agiscono in parallelo su un sottoinsieme dei qubit del dispositivo. La parola *volume* non è casuale, perché possiamo definire una *larghezza* che ci dice quanti qubit sono coinvolti e una *profondità* che quantifica il numero di passi temporali discreti, durante i quali, il circuito può eseguire i gate prima che i qubit perdano coerenza. Il protocollo consente al computer quantistico di riscrivere il circuito in uno che può effettivamente eseguire in base ai suoi gate disponibili e al modo in cui i suoi qubit sono interconnessi (disposizione geometrica). Il protocollo Quantum Volume va ad identificare il circuito di forma quadrata più grande, uno in cui larghezza e profondità sono uguali, che può essere eseguito su un determinato dispositivo quantistico.

I circuiti quantistici possono emettere più stringhe di bit differenti:

- Stringhe di bit previste;
- Stringhe di bit impreviste causate da errori di qubit.

Il protocollo determina se un computer quantistico che esegue il dato circuito sta emettendo le stringhe di bit corrette utilizzando l'**heavy output generation problem**ⁱⁱⁱ e infine, si eleva 2 alla potenza di qualunque fosse la profondità finale e questo è il **Quantum Volume** del dispositivo quantistico.

Esempio 4.1. *Supponiamo di avere un dispositivo quantistico a 27 qubit. Impostiamo un circuito casuale a due qubit di profondità 2, lo eseguiamo molte volte e il test ha esito positivo: emette stringhe pesanti con una probabilità maggiore di due terzi e con un intervallo di confidenza maggiore del 97,725%. Ripetiamo con: 3 qubit a profondità 3, 4 qubit a profondità 4, 5 qubit a profondità 5, 6 qubit a profondità 6 e il test funziona ancora. Se ci spostassimo fino a 7 qubit con un circuito di profondità 7 e il test fallisce allora il quantum volume sarà $2^6 = 64$.*

Per concludere il discorso riguardante le prestazioni dei vari backend quantistici un'ultima idea è stata quella di introdurre un parametro che quantificasse la bontà dei risultati ottenuti rispetto al fit robusto utilizzato. Questa quantità è nota come **RSS** (*Residual Sum of Squares*) ed è una misura della discrepanza tra i dati e un modello di stima, nel nostro caso il fit robusto. Un valore piccolo di RSS indica una stretta corrispondenza del modello con i dati. Questo parametro è stato messo come variabile in funzione del **Quantum Volume** per vedere se i device quantistici con bassi valori di RSS risultino avere un quantum volume grande e viceversa. Nella Tabella 4.2, qui di seguito, abbiamo

ⁱⁱⁱCiascuna delle stringhe di output corrette del circuito ha una probabilità associata che viene misurata. Possiamo trovare una probabilità mediana da quell'insieme di probabilità e gli "heavy outputs" del circuito sono tutte quelle stringhe per le quali la probabilità di misurarle è maggiore della probabilità mediana. Il protocollo richiede prima di simulare il circuito su un computer classico per raccogliere gli "heavy outputs". Quindi, viene eseguito il circuito molte volte sul dispositivo che desideriamo confrontare, viene aumentata la profondità e la larghezza del circuito di uno contemporaneamente e si esegue nuovamente il codice. Il processo si ferma alla massima profondità e larghezza corrispondente per cui la probabilità di misurare una qualsiasi degli output pesanti sul dispositivo è maggiore di due terzi con un intervallo di confidenza maggiore del 97,725%.

elencato tutti i vari dispositivi quantistici utilizzati (si veda Appendice per gli altri backend) per testare l'algoritmo sulle disuguaglianze di Bell, con il loro Quantum Volume e RSS calcolata.

Device quantistico	Quantum Volume	RSS
ibmq_5_yorktown	8	0.680
ibmq_ourense	8	0.599
ibmq_16_melbourne	8	0.588
ibmq_vigo	16	0.543
ibmq_valencia	16	0.324
ibmq_santiago	32	0.158
ibmq_athens	32	0.062

Tabella 4.2: Quantum Volume e RSS per i vari device quantistici utilizzati.

Inserendo questi dati all'interno di un grafico Quantum Volume in funzione della RSS si ottiene la Figura 4.18.

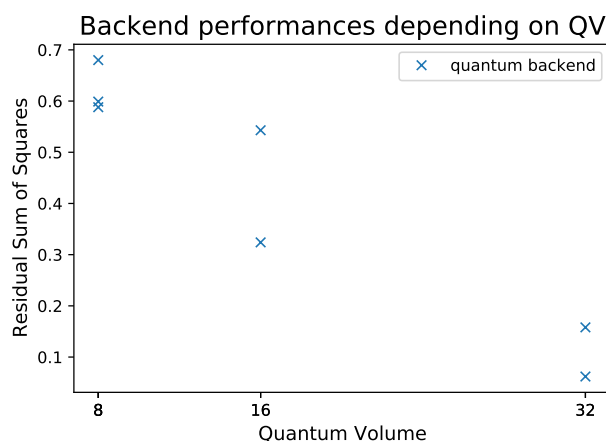


Figura 4.18: Quantum Volume in funzione del parametro RSS per i vari backend quantistici presenti in Tabella 4.2.

In conclusione possiamo constatare che, in generale, i migliori backend quantistici, in termini prestazionali, sono quelli aventi un Quantum Volume maggiore. Ad esempio gli altri dispositivi, disponibili a scopo privato e di ricerca di IBM, possiedono volumi quantistici pari a 64 e 128. Bisogna però sottolineare che nel caso in cui uno poi scelga il dispositivo con migliore volume quantistico deve considerare in secondo luogo anche quali qubit e disposizione geometrica avrà bisogno, in base alle proprie esigenze, per eseguire il proprio codice quantistico.

Capitolo 5

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato quello di analizzare come fenomeni quantistici come l'entanglement quantistico possano essere studiati sotto un nuovo punto di vista, in maniera diretta con sistemi che presentino un comportamento quantistico. Ad oggi, le disuguaglianze di Bell sono ancora oggetto di discussione, oltre alla serie di esperimenti condotti da Aspect negli anni 1981 e 1982, altri esperimenti degni di nota sono quelli condotti da Freedman e Clauser nel 1972, da Tittel e il gruppo Geneva nel 1988 e da Weihs sotto condizioni di località "strettamente einsteniane" nel 1998. La serie di esperimenti sulle disuguaglianze di Bell, di crescente sofisticazione, ha ridotto i critici, che mettono in discussione i risultati, a indicare falle in tale esperimenti, alcune delle quali distorcerebbero i risultati sperimentali in favore della meccanica quantistica. Nel 2015 è stato pubblicato il primo esperimento dichiarato totalmente privo di falle (loopholes), che ha confermato i risultati degli esperimenti precedenti.

L'esperimento BARBEQuE, come visto, può essere migliorato ulteriormente sfruttando dispositivi quantistici migliori, individuando un'ottimale disposizione geometrica dei qubit, realizzare una miglior implementazione del codice e molto altro. Il fine tuttavia era quello di mostrare che il quantum computing non è pura fantasia o invenzione, ma una realtà che si è sviluppata negli ultimi 50 anni e si sta sviluppando tuttora, ovviamente le applicazioni che possono essere realizzate sono molto banali, ma che comunque iniziano a mostrare piccoli vantaggi rispetto al classical computing. Per poter effettivamente eseguire algoritmi importanti come quello di Shor, Deutsch-Jozsa, Grover e altri si necessitano un gran numero di qubit e un bassissimo rumore termico, elettronico e quantistico. Proprio da quest'ultimo aspetto si è sviluppata una branca delle tecnologie quantistiche che si occupa di correggere gli errori quantistici nota come quantum error-correction theory che raccoglie molti algoritmi interessanti per prevenire e correggere errori di natura quantistica come ad esempio l'algoritmo di Shor a 9 qubit, l'algoritmo di Steane a 7 qubit, ecc. . .

Il mondo delle tecnologie quantistiche non si ferma solamente al quantum computing, ma esistono tantissime ramificazioni che riguardano la quantum cryptography, il quantum sensing, la quantum simulation, la quantum communication, la quantum metrology e altro ancora! Per non parlare delle numerose applicazioni nei campi più disparati come nell'informatica per lo sviluppo del machine learning, in chimica per la simulazione di sistemi atomici e molecolari o in economia per lo studio di modelli finanziari.

Appendice A

Appendice

A.1 Grafici dei backend quantistici di IBM QE

A.1.1 ibmq_5_yorktown

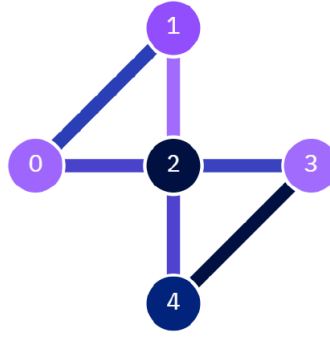


Figura A.1: Distribuzione dei qubit in `ibmq_5_yorktown`.

ibmq_5_yorktown					
0	5.283	42.157	20.021	2.229×10^{-2}	cx0_2: 1.371×10^{-2} cx0_1: 2.164×10^{-2}
1	5.247	58.408	26.439	2.980×10^{-2}	cx1_2: 1.998×10^{-2} cx1_0: 2.164×10^{-2}
2	5.033	60.282	76.485	7.530×10^{-2}	cx2_4: 1.314×10^{-2} cx2_3: 2.353×10^{-2} cx2_1: 1.998×10^{-2} cx2_0: 1.371×10^{-2}
3	5.292	47.668	31.841	6.220×10^{-2}	cx3_4: 2.366×10^{-2} cx3_2: 2.353×10^{-2}
4	5.078	59.234	40.169	3.839×10^{-2}	cx4_3: 1.314×10^{-3} cx4_3: 2.366×10^{-2}

Tabella A.1: Calibrazione di `ibmq_5_yorktown`.

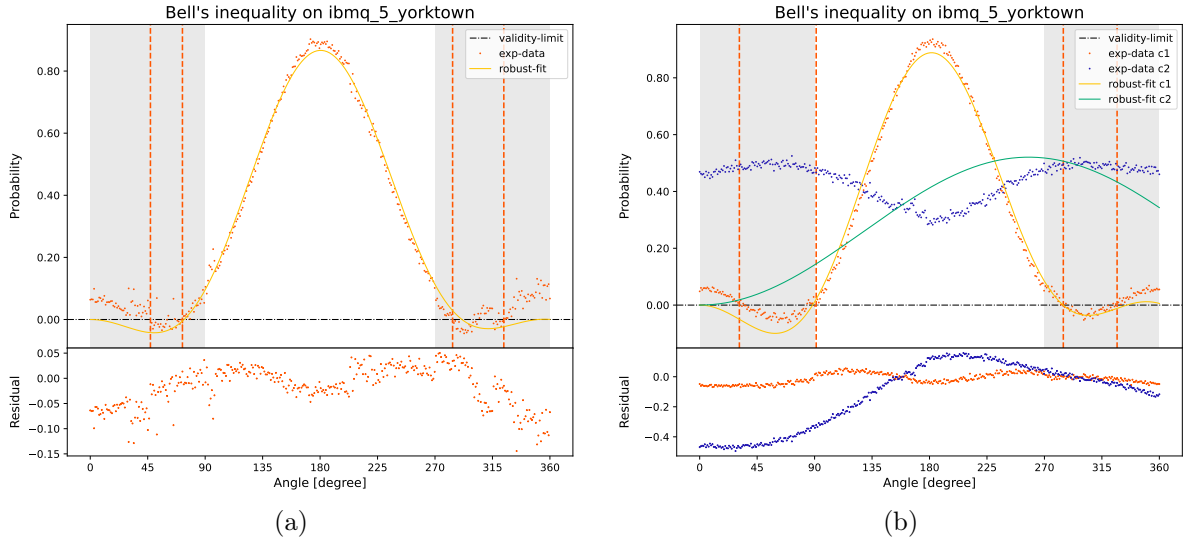


Figura A.2: (A.2a) Configurazione a singolo circuito. (A.2b) Configurazione a doppio circuito.

A.1.2 ibmq_ourense

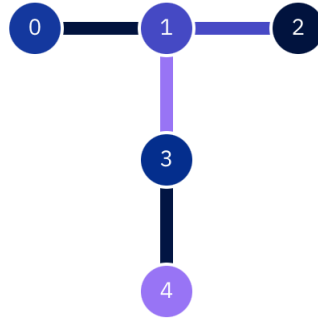


Figura A.3: Distribuzione dei qubit in ibmq_ourense.

ibmq_ourense					
0	4.820	110.774	91.040	1.519×10^{-2}	cx0_1: 5.540×10^{-3}
1	4.890	111.141	30.516	2.950×10^{-2}	cx1_3: 9.378×10^{-3}
					cx1_2: 7.731×10^{-2}
					cx1_0: 5.540×10^{-3}
2	4.716	97.066	113.523	2.190×10^{-2}	cx2_1: 7.731×10^{-3}
3	4.789	142.795	102.038	3.180×10^{-2}	cx3_4: 5.620×10^{-3}
					cx3_1: 9.378×10^{-3}
4	5.024	119.620	29.486	5.459×10^{-2}	cx4_3: 5.620×10^{-3}

Tabella A.2: Calibrazione di ibmq_ourense.

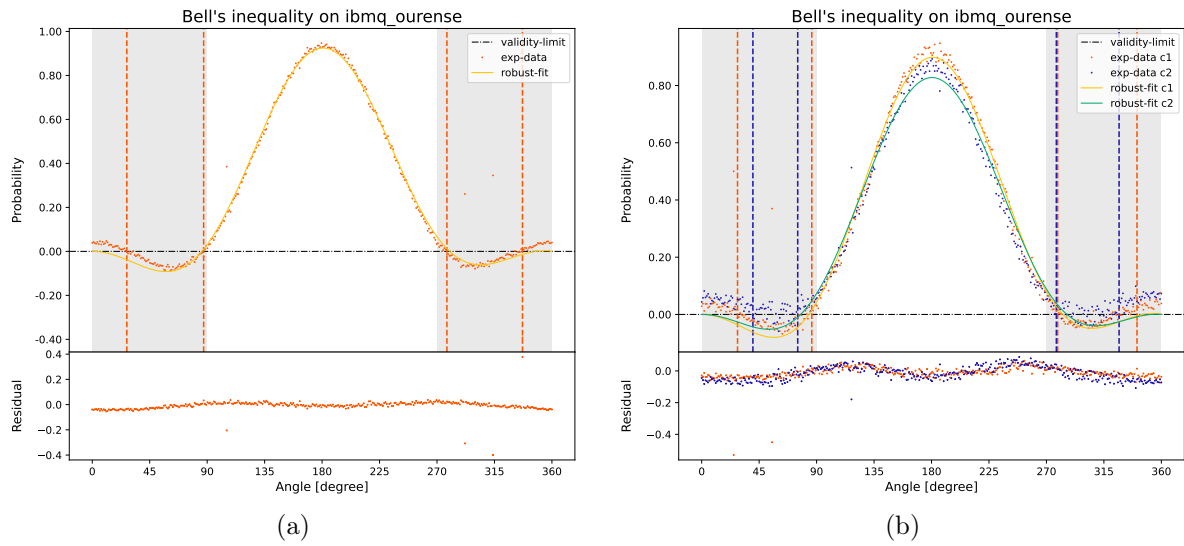


Figura A.4: (A.4a) Configurazione a singolo circuito. (A.4b) Configurazione a doppio circuito.

A.1.3 ibmq_16_melbourne

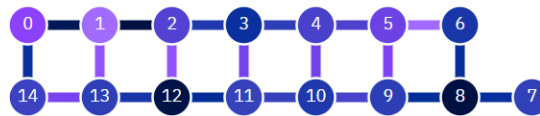


Figura A.5: Distribuzione dei qubit in ibmq_16_melbourne.

ibmq_melbourne					
0	5.114	69.008	108.352	3.259×10^{-2}	cx0_14: 2.183×10^{-2} cx0_1: 1.791×10^{-2}
1	5.235	46.163	53.517	8.860×10^{-2}	cx1_13: 4.914×10^{-2} cx1_2: 9.637×10^{-3} cx1_0: 1.791×10^{-2}
2	5.038	69.195	105.810	2.820×10^{-2}	cx2_12: 5.285×10^{-2} cx2_3: 2.411×10^{-2} cx2_1: 9.637×10^{-3}
3	4.894	83.931	16.678	4.840×10^{-2}	cx3_11: 2.999×10^{-2} cx3_4: 1.908×10^{-2} cx3_2: 2.411×10^{-2}
4	5.021	59.119	67.010	4.649×10^{-2}	cx4_10: 2.833×10^{-2} cx4_5: 2.712×10^{-2} cx4_3: 1.908×10^{-2}
5	5.073	14.739	37.879	5.440×10^{-2}	cx5_9: 3.995×10^{-2} cx5_6: 4.451×10^{-2} cx5_4: 2.712×10^{-2}
6	4.929	74.298	78.280	3.590×10^{-2}	cx6_8: 2.053×10^{-2} cx6_5: 4.451×10^{-2}
7	4.982	39.947	14.094	4.710×10^{-2}	cx7_8: 2.612×10^{-2}
8	4.751	126.050	180.373	4.699×10^{-2}	cx8_6: 2.053×10^{-2} cx8_9: 2.247×10^{-2} cx8_7: 2.612×10^{-2}
9	4.973	46.859	61.974	1.074×10^{-1}	cx9_5: 3.995×10^{-2} cx9_10: 2.713×10^{-2} cx9_8: 2.247×10^{-2}
10	4.945	64.116	77.880	3.390×10^{-2}	cx10_4: 2.833×10^{-2} cx10_11: 2.979×10^{-2} cx10_9: 2.713×10^{-2}
11	4.997	55.616	71.947	1.766×10^{-1}	cx11_3: 2.999×10^{-2} cx11_12: 4.087×10^{-2} cx11_10: 2.979×10^{-2}
12	4.763	76.040	60.291	1.151×10^{-1}	cx12_2: 5.285×10^{-2} cx12_13: 3.289×10^{-2} cx12_11: 4.087×10^{-2}
13	4.974	31.340	30.657	8.599×10^{-2}	cx13_14: 3.004×10^{-2} cx13_1: 4.914×10^{-2} cx13_12: 3.289×10^{-2}
14	5.007	43.540	58.191	4.430×10^{-2}	cx14_0: 2.183×10^{-2} cx14_13: 3.004×10^{-2}

Tabella A.3: Calibrazione di `ibmq_melbourne`.

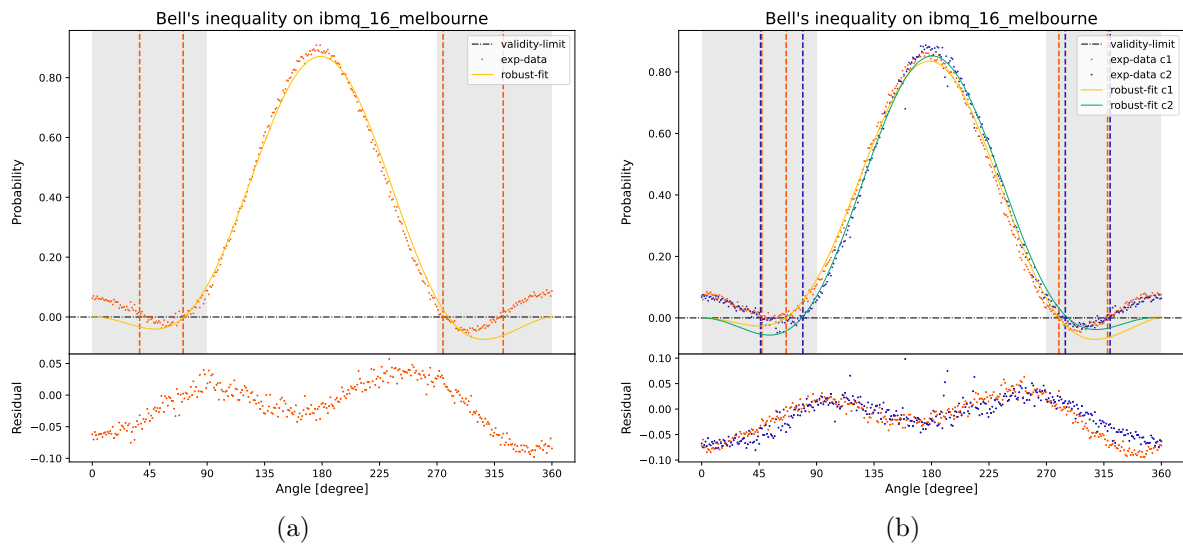


Figura A.6: (A.6a) Configurazione a singolo circuito. (A.6b) Configurazione a doppio circuito.

A.1.4 ibmq_vigo

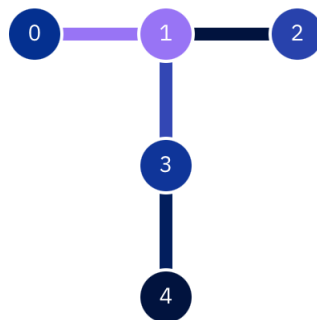


Figura A.7: Distribuzione dei qubit in ibmq_vigo.

ibmq_vigo					
0	4.796	121.708	17.049	7.509×10^{-2}	cx0_1: 1.201×10^{-2}
1	4.940	111.685	132.023	2.249×10^{-2}	cx1_3: 9.297×10^{-3} cx1_2: 6.590×10^{-3} cx1_0: 1.201×10^{-2}
2	4.833	101.820	68.980	1.459×10^{-2}	cx2_1: 6.590×10^{-3}
3	4.808	116.719	85.882	2.150×10^{-2}	cx3_4: 7.130×10^{-3} cx3_1: 9.297×10^{-3}
4	4.749	86.800	46.854	3.329×10^{-2}	cx4_3: 7.130×10^{-3}

Tabella A.4: Calibrazione di ibmq_vigo.

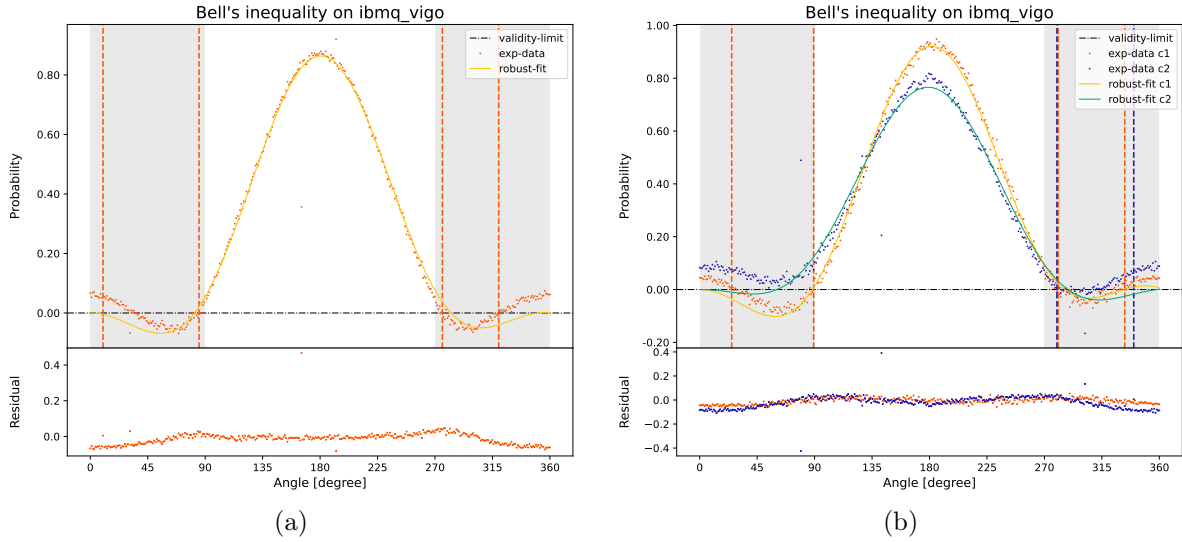


Figura A.8: (A.8a) Configurazione a singolo circuito. (A.8b) Configurazione a doppio circuito.

A.1.5 ibmq_valencia

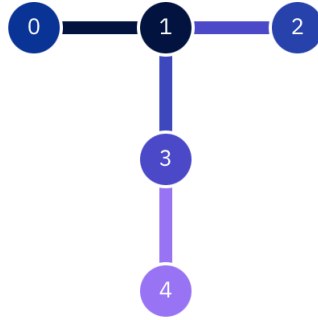


Figura A.9: Distribuzione dei qubit in ibmq_valencia.

ibmq_valencia					
0	4.743	92.787	36.536	3.479×10^{-2}	cx0_1: 7.325×10^{-3}
1	4.661	101.756	42.126	2.339×10^{-2}	cx1_3: 1.035×10^{-3} cx1_2: 1.063×10^{-2} cx1_0: 7.325×10^{-3}
2	4.792	140.464	84.617	4.790×10^{-2}	cx2_1: 1.063×10^{-2}
3	4.834	112.482	49.158	3.029×10^{-2}	cx3_4: 1.296×10^{-2} cx3_1: 1.035×10^{-2}
4	4.959	100.826	110.431	5.420×10^{-2}	cx4_3: 1.296×10^{-2}

Tabella A.5: Calibrazione di ibmq_valencia.

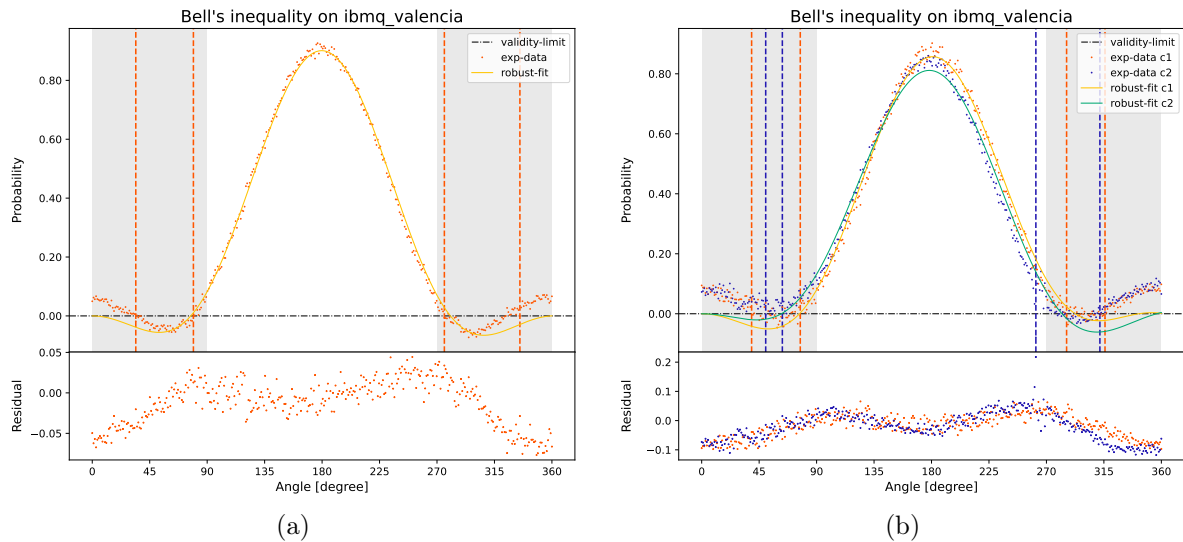


Figura A.10: (A.10a) Configurazione a singolo circuito. (A.10b) Configurazione a doppio circuito.

A.1.6 ibmq_santiago



Figura A.11: Distribuzione dei qubit in `ibmq_santiago`.

ibmq_santiago					
0	4.833	100.308	226.499	1.410×10^{-2}	cx0_1: 6.619×10^{-3}
1	4.623	81.998	66.539	1.510×10^{-2}	cx1_2: 1.230×10^{-2} cx1_0: 6.619×10^{-3}
2	4.820	121.982	82.076	1.059×10^{-2}	cx2_3: 8.471×10^{-3} cx2_1: 1.230×10^{-2}
3	4.742	154.371	89.963	3.349×10^{-2}	cx3_4: 5.695×10^{-3} cx3_2: 8.471×10^{-3}
4	4.816	87.957	109.762	1.239×10^{-2}	cx4_3: 5.695×10^{-3}

Tabella A.6: Calibrazione di `ibmq_santiago`.

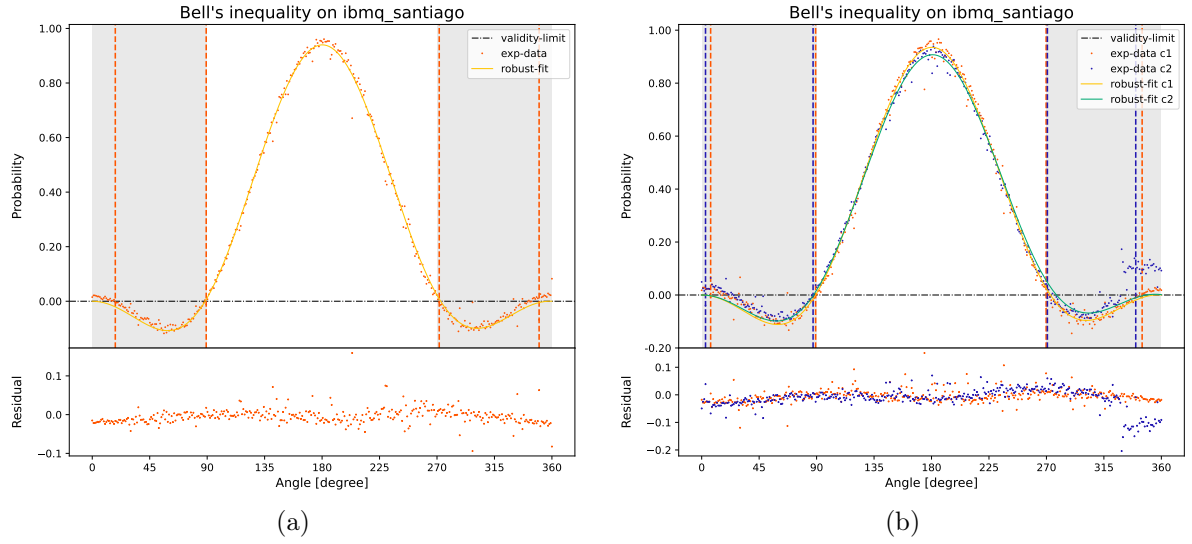


Figura A.12: (A.12a) Configurazione a singolo circuito. (A.12b) Configurazione a doppio circuito.

A.1.7 ibmq_athens



Figura A.13: Distribuzione dei qubit in `ibmq_athens`.

ibmq_athens					
Qubit	Frequenza (GHz)	T1 (μs)	T2 (μs)	Readout Error	CNOT Error
0	5.175	90.064	101.008	0.809×10^{-2}	cx0_1: 9.955×10^{-3}
1	5.267	72.271	98.256	1.449×10^{-2}	cx1_2: 7.847×10^{-3} cx1_0: 9.955×10^{-3}
2	5.052	85.724	123.600	1.800×10^{-2}	cx2_3: 6.922×10^{-3} cx2_1: 7.847×10^{-3}
3	4.855	137.955	25.278	1.600×10^{-2}	cx3_4: 6.748×10^{-3} cx3_2: 6.922×10^{-3}
4	5.118	114.209	159.438	1.720×10^{-2}	cx4_3: 6.748×10^{-3}

Tabella A.7: Calibrazione di `ibmq_athens`.

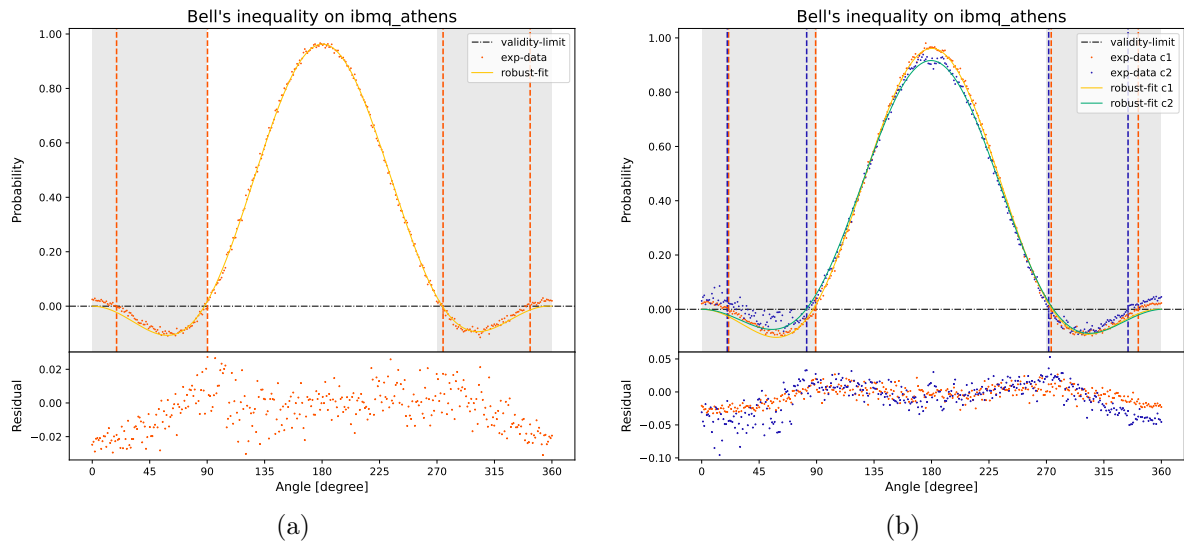


Figura A.14: (A.14a) Configurazione a singolo circuito. (A.14b) Configurazione a doppio circuito.

Bibliografia

Articoli

- ¹ Feynman, R. P. (1965). *The character of physical law*. Cambridge, Mass: M.I.T. Press.
- ² Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*. Phys. Rev., 47, 777–780.
- ³ Bell, J. (1964). *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*. Physics Physique Fizika, 1, 195–200.
- ⁴ Bohm, D., & Aharonov, Y. (1957). *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*. Phys. Rev., 108, 1070–1076.
- ⁵ Aspect, A., Grangier, P., & Roger, G. (1981). *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*. Phys. Rev. Lett., 47, 460–463.
- ⁶ Aspect, A., Grangier, P., & Roger, G. (1982). *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*. Phys. Rev. Lett., 49, 91–94.
- ⁷ Aspect, A., Dalibard, J., & Roger, G. (1982). *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*. Phys. Rev. Lett., 49, 1804–1807.
- ⁸ Holevo, A. S. (1973). *Bounds for the Quantity of Information Transmitted by a Quantum Communication Channel*. Problemy Peredachi Informatsii, 9: 3–11. English translation in Problems of Information Transmission 9: 177–83, 1973.
- ⁹ Poplavskii, R. P. (1975). *Thermodynamical Models of Information Processing (in Russian)*. Uspekhi Fizicheskikh Nauk, 115: 465–501.
- ¹⁰ Ingarden, R. S. (1976). *Quantum Information Theory*. Rep. Math. Phys., 10: 43–72.
- ¹¹ Manin, Y. (1980). *Computable and Uncomputable*. Moscow: Sovetskoye Radio.
- ¹² Feynman, R. P. (1982). *Simulating Physics with Computers*. International Journal of Theoretical Physics, 21: 467–88.
- ¹³ Deutsch, D. (1985). *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 400: 97–117.
- ¹⁴ Deutsch, D., & Jozsa, R. (1992). *Rapid Solution of Problems by Quantum Computation*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 439: 553–58.

- ¹⁵ Simon, D. R. (1994). *On the Power of Quantum Computation*. Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 116–23, Los Alamitos, CA: IEEE Press.
- ¹⁶ Shor, P. (1994). *Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring*. Proceedings of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 124–134.
- ¹⁷ Cirac, J., & Zoller, P. (1995). *Quantum Computations with Cold Trapped Ions*. Phys. Rev. Lett., 74, 4091–4094.
- ¹⁸ DiVincenzo, D., & Shor, P. (1996). *Fault-Tolerant Error Correction with Efficient Quantum Codes*. Phys. Rev. Lett., 77, 3260–3263.
- ¹⁹ Steane, A. M. (1996). *Multiple Particle Interference and Quantum Error Correction*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 452: 2551–77.
- ²⁰ Grover, L. K. (1996). *A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search*. Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '96), 212–19, New York, NY, USA: Association for Computing Machinery.

Libri

- ²¹ Forte, S., & Rottoli, L. (2018). *Fisica quantistica*. Bologna: Zanichelli.
- ²² Gasiorowicz, S. (1996). *Quantum Physics Stephen Gasiorowicz*. New York: John Wiley.
- ²³ Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to quantum mechanics*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
- ²⁴ Sakurai, J., & Napolitano, J. (2017). *Modern Quantum Mechanics (2nd ed.)*(pp. 238–245). Cambridge: Cambridge University Press.

Siti web

- ²⁵ Hagar, A., Cuffaro, M., (2019). *Quantum Computing (The Stanford Encyclopedia of Philosophy)*. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- ²⁶ Qiskit (2020, Agosto 20). *What Is Quantum Volume, Anyway?*. Medium. <https://medium.com/qiskit/what-is-quantum-volume-anyway-a4dff801c36f>
- ²⁷ Hui, J. (2018, Dicembre 3). *QC — Quantum programming: implementation issues*. Medium. <https://jonathan-hui.medium.com/qc-quantum-programming-implementation-issues-51e3a146645e>
- ²⁸ IBM Quantum Experience: <https://quantum-computing.ibm.com>
- ²⁹ Qiskit: <https://qiskit.org>

Seminari

- ³⁰ Combarro, E. F. (2020). *A practical introduction to quantum computing: from qubits to quantum machine learning and beyond*. CERN Quantum Technology Initiative, CERN openlab. <https://indico.cern.ch/event/970903/>
- ³¹ Grassellino, A. (2021, Febbraio 24). *Superconducting Quantum Materials and Systems (SQMS) – a new DOE National Quantum Information Science Research Center*. Università di Milano-Bicocca. <https://sites.google.com/unimib.it/biqute/seminars>
- ³² Formaggio, J. (2021, Maggio 17). *Impact of ionizing radiation on superconducting qubit coherence*. Università di Milano-Bicocca. <https://sites.google.com/unimib.it/biqute/seminars>

Ringraziamenti

Giunto finalmente al termine di questo primo percorso, realizzo che le conoscenze e le esperienze acquisite fino ad oggi non sono nient'altro che una piccolissima parte di ciò che in realtà, la fisica, può raccontarmi riguardo al funzionamento della natura. Questa consapevolezza mi lascia con molti dubbi, ma anche con una risposta: non sono ancora arrivato, questo è soltanto un primo passo verso il mio obiettivo e continuerò a inseguirlo finché non lo raggiungerò. Tagliare questo primo traguardo da solo non sarebbe mai stato possibile, l'aiuto e il supporto delle persone che ho incontrato è stato fondamentale, essenziale, ognuno, con piccoli o grandi gesti, ha contribuito a formarmi come uomo che, nonostante tutto, continua a guardare il mondo con la curiosità di un bambino. E allora

Grazie al professore *Andrea Giachero* che, assieme al professore *Paolo Solinas*, mi ha introdotto a questo fantastico mondo delle tecnologie quantistiche. Grazie per la loro pazienza, cordiale disponibilità e interesse nel mettermi nelle condizioni più adatte per poter introdurmi e approfondire al meglio questo nuovo settore della fisica. Grazie per avermi, fin da subito, fatto sentire parte di questa nuova realtà, introdotta qui, in Milano Bicocca, e aver investito su di me. Un ulteriore ringraziamento al dottorando *Matteo Borghesi*, fondamentale nell'elaborazione dati e nell'aver dedicato parte del suo tempo a discutere su come poter realizzare al meglio l'analisi dati.

Grazie ai miei genitori per aver avuto pazienza nell'ultimo periodo, avermi dato sempre la fiducia di cui necessitavo per andare avanti, aver creduto nelle mie capacità e appoggiarmi in ogni mia scelta, aver finanziato economicamente questi anni e a lasciarmi lo spazio di cui avevo bisogno per studiare e rilassarmi. Spero solo, un giorno, di poter ricambiare in qualche modo tutto il tempo e l'affetto che mi dedicate.

Grazie a *Giorgia*, a una persona straordinaria. Negli ultimi anni inizia a essere riduttivo definirla migliore amica. Ad oggi si è dimostrata essere una vera e propria sorella. Mai avrei pensato di trovare una persona di cui ammirare così tanto la forza di volontà, l'energia e la solarità con cui affronta la vita. Avere una persona così vicina con cui ridere, scherzare, confidarsi, discutere e chiedere consiglio è stata una delle fortune più grandi che potessi mai ricevere. Ho ricevuto così tanto da lei che spero di aver ricambiato, almeno in parte, tutto il bene e il tempo che mi ha donato.

Grazie ai miei *amici*, a tutti loro, così diversi ma unici e speciali. Vorrei ringraziare il gruppo de "*I Soliti*", ormai da anni condivido con ciascuno di loro serate, risate ed esperienze uniche che non dimenticherò mai. Un grazie quindi a *Dac*, *Cazza*, *Sara*, *Beni*, *Ceck*, *Giulia*, *Giorgio*, *Martina M.*, *Fede*, *Martina S.*, *Franco*, *Daniel*, *Elisa*, *Elena*, *Arianna*, *Filippo*, *Giovanni* e *Chiara*. Un grazie anche a chi ho potuto conoscere più recentemente in questi ultimi anni, con cui ho condiviso fantastici e bellissimi momenti,

grazie allora a *Roberto*, *Valeria*, *Alice* e *Fish*. Ultimi, ma non per importanza, *Gabriele* e *Pallu*, colleghi, ma soprattutto amici, con cui ho avuto modo di condividere questo percorso, tantissimi i momenti trascorsi insieme, attimi di ansia, paura, gioia e felicità. Sento mancare le nostre abitudini come gustare una buona piadina nella pausa pranzo, commentare certi personaggi presenti nelle aule o impazzire su calcoli, dove una banalità ci faceva perdere ore e ore.

Grazie a *Marco*, a colui che ho sempre chiesto il massimo in ogni sfida e opportunità. Colui che ha sempre gareggiato per competere con e contro gli altri per trovare uno stimolo, per migliorarsi, fino ad affrontare se stesso. A conti fatti non si è mai goduto i risultati, non si è mai fermato a guardare ciò che ha raccolto in tutti questi anni, ha sempre guardato avanti. Non si tratta di ambizione o di ostentare le proprie capacità, perché alla fine Marco è una persona comune con una passione immensa per ciò che studia, un ragazzo determinato, che ha paura di iniziare a rallentare, a camminare fino a fermarsi e di vedersi arrivato. È caduto più e più volte, fino a toccare il fondo dove né il corpo né la mente ce la facevano più, ma si è rialzato con le sue forze, con le persone a lui più vicine ed è andato oltre. Pertanto voglio ringraziarlo per questo sforzo immane e gli chiedo scusa per quello che è stato e sarà, perché il viaggio non finisce qui.