

Appendice

In quest'appendice si approfondiscono aspetti teorici e si riportano tutti i programmi scritti e discussi nei vari capitoli omessi in precedenza per non appesantire oltremodo la lettura. L'ordine con cui si mostrano i vari argomenti rispecchia quello dei rimandi fatti nel testo.

Quantizzazione di una giunzione Josephson e Hamiltoniana di uno SQUID

Si riprende il discorso con la discussione delle giunzioni Josephson. Una giunzione Josephson consiste in due superconduttori connessi con una barriera isolante per effetto tunnel. Può essere descritta tramite la sua corrente critica I_c e la differenza di fase *gauge* invariante φ attraverso la giunzione. Valori che caratterizzano la giunzione e dipendono dai materiali superconduttori impiegati e dalle dimensioni della stessa. Più precisamente, si può associare ad ogni superconduttore $k=1,2$ una funzione d'onda del tipo:

$$\Psi_k = \sqrt{\rho_k} e^{i\phi_k}$$

dove ρ_k è la densità di coppie di Cooper del k -esimo conduttore e ϕ_k la rispettiva fase. La dinamica del sistema è descritta dalle equazioni di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \Psi_1 + k \Psi_2$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \Psi_2 + k \Psi_1$$

dove E_1 e E_2 sono le energie degli stati e k la costante d'accoppiamento che misura l'interazione delle due funzioni d'onda. Sostituendo l'espressione di Ψ_k nelle equazioni di Schrödinger si ottengono le seguenti:

$$\hbar \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 2k\sqrt{\rho_1\rho_2} \sin\phi$$

$$\hbar \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -2k\sqrt{\rho_1\rho_2} \sin\phi$$

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = E_2 - E_1$$

Le derivate $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$ sono proporzionali alla *corrente di Josephson* I_J , mentre la quantità $2k\sqrt{\rho_1\rho_2}$ alla corrente critica I_c menzionata precedentemente. Inoltre, se si applica una differenza di potenziale V alla giunzione, si ottiene $E_2 - E_1 = 2eV$ e la precedente equazione può essere riscritta nelle *equazioni di Josephson*:

$$I_J(t) = I_c \sin\phi(t) \quad (\text{prima eq. di Josephson})$$

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V \quad (\text{seconda eq. di Josephson})$$

Con queste si è in grado di descrivere l'evoluzione temporale della corrente di Josephson e di ϕ in funzione della differenza di potenziale V applicata. Nell'ultima equazione scritta è stato introdotto il fattore $\Phi_0 = h/2e$ dove $2e$ è la carica di una coppia di Cooper.

Derivando la prima equazione di Josephson rispetto al tempo e ricordando $\dot{\phi} = V/L$ si ottiene un'induttanza non lineare:

$$L_J = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\Phi_0}{2\pi I_C}$$

L'energia relativa a questo termine d'induttanza la si può calcolare come:

$$E_{J,L} = \int_0^t d\tau I_J(\tau)V = E_J(1 - \cos\varphi); \quad \text{con } E_J = \frac{\Phi_0 I_C}{2\pi}.$$

Dove E_J è chiamata energia di Josephson ed è una misura dell'accoppiamento attraverso la giunzione. Ma, dal momento che la giunzione di Josephson ha anche una capacità interna, indicata C_J , va considerato anche il relativo termine di energia: $E_{J,C} = \frac{Q^2}{2C_J}$ dove Q è la carica della giunzione.

A meno di termini costanti, l'Hamiltoniana classica è dunque:

$$H_J = \frac{Q^2}{2C_J} - E_J \cos\varphi$$

Dato che $Q=(2e)N$, dove N è un intero che definisce il numero di coppie di Cooper presenti in eccesso, $N = N_1 - N_2$, con N_1 e N_2 a rappresentare il numero di coppie presenti su ogni faccia della giunzione, si può definire il termine energetico capacitivo $E_C = \frac{e^2}{2C_J}$ e riscrivere l'Hamiltoniana come:

$$H_J = 4E_C N^2 - E_J \cos\varphi$$

Se invece di una singola giunzione Josephson se ne considerano due in parallelo, così da formare un anello superconduttore (o *loop*) si va a costituire un sistema chiamato SQUID: *Superconducting Quantum Interference Device*. Fig A.1

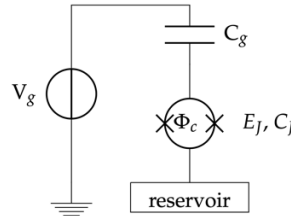


Fig A.1: Rappresentazione di uno SQUID inserito in un circuito con una differenza di potenziale V_g .

Nel caso in cui l'induttanza del loop può essere trascurata, allora l'Hamiltoniana corrispondente è identica ad H_J se ridefiniamo:

$$C_J \rightarrow 2C_J, \quad E_J \rightarrow E_J(\Phi_C) = 2E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi_C}{\Phi_0}\right)$$

Il termine Φ_C è (l'eventuale) flusso esterno, il quale può alterare il valore di E_J .

D'ora in avanti consideriamo uno SQUID inserito in un circuito proprio come in figura. La presenza di V_g riduce N di $N_g = C_g V_g / (2e)$, così l'Hamiltoniana diventa:

$$H = 4E_C (N - N_g)^2 - E_J \cos\varphi, \quad \text{con } E_C = \frac{e^2}{2(C_J + C_g)}$$

Considerando ora $4E_C N^2$ come termine cinetico e $-E_J \cos\varphi$ come energia potenziale, allora H rappresenta l'Hamiltoniana di un oscillatore non lineare, in cui le variabili coniugate sono N (il momento corrispondente) e φ (l'analogo della posizione).

Per passare all'Hamiltoniana quantistica si procede sostituendo N e φ con i corrispondenti operatori. Dato che \hat{N} e $\hat{\varphi}$ sono variabili coniugate, nella base di autostati di $\hat{\varphi}$ vale la seguente relazione:

$$\hat{\varphi} \rightarrow \varphi \quad \hat{N} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

In questo modo si può riscrivere l'Hamiltoniana:

$$H = 4E_c \left(-i \frac{\partial}{\partial \varphi} - N_g \right)^2 - E_J \cos \varphi$$

Le cui soluzioni al problema agli autovalori sono date dalle **soluzioni di Floquet**:

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} m e^{-2[N_g - f(m, N_g)]} \left(-\frac{E_J}{2E_c} \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$f(m, N_g) = \sum_{k=\pm 1} [\text{int}(2N_g + k/2) \bmod 2] \{ \text{int}[N_g] - k(-1)^m [(m+1) \bmod 2 + m \bmod 2] \}$$

dove $\text{int}(x)$ arrotonda all'intero più vicino x , $x \bmod y$ denota la solita operazione di modulo, ossia restituisce il quoziente intero di x/y . I corrispondenti autovalori sono:

$$E_m = E_c a_{-2[N_g - f(m, N_g)]} \left(-\frac{E_J}{2E_c} \right)$$

Dove $a_v(q)$ denota il valore caratteristico di Mathieu. In fig A.2 è riportato l'andamento di E_m (per $m=0,1,2,3$) in funzione di N_g e normalizzati rispetto all'energia di transizione E_{01} , la quale è la minima separazione energetica tra i livelli E_1 e E_0 , per diversi valori di E_J/E_c .

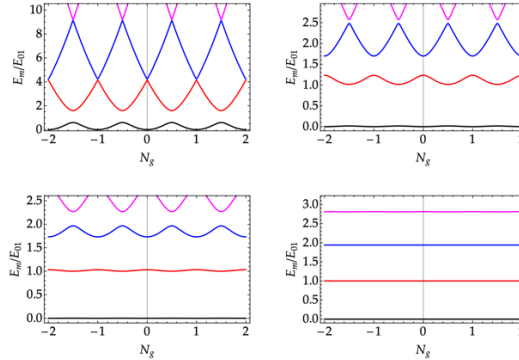


Fig A.2: E_m in funzione di N_g (in ogni grafico, dal basso verso l'alto $m=0,1,2,3$) normalizzati rispetto a E_{01} per diversi valori di $E_J/E_c=1.0, 5.0, 10.0, 50.0$. Il punto zero dell'energia è scelto come il minimo del livello $m=0$.

Si possono ora individuare due regimi: per $E_c \gg E_J$ si è in regime *charge* e per $E_c \ll E_J$ in regime *transmon*. Sebbene entrambi siano validi per la costruzione di un qubit, si discuterà solamente del regime transmon; in quanto questo è quello usato da IBM. I due regimi sono mostrati in fig A.3.

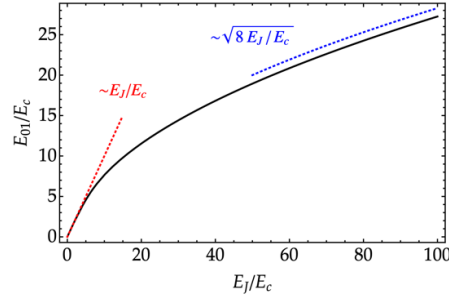


Fig A.3: grafico di E_{01}/E_c in funzione di E_J/E_c

Qubit di tipo transmon

Come mostrato in fig A.2, i livelli energetici E_m sono rappresentabili con una funzione oscillante che dipende da N_g . Ma, nel limite $E_J \gg E_c$ il termine oscillante diventa trascurabile e si può considerare che E_m non dipenda più da N_g . Questo è il regime *transmon*: *transmission line shunted plasma oscillation*.

Quando lo SQUID è portato a questo regime, il termine energetico capacitivo può essere considerato pari a:

$$E_c = \frac{e^2}{2(C_J + C_g + C_B)}$$

Per cui è possibile diminuire E_c aumentando C_B , fino ad ottenere $E_J \gg E_c$. A questo punto si può espandere in serie di Taylor $\cos\varphi$ che compare nell'Hamiltoniana per ottenerne una "nuova" valida per i qubit di tipo transmon. Si fa notare che in questa non compare N_g in quanto i livelli energetici sono indipendenti da esso.

$$H_{Tr} = 4E_c \hat{N}^2 + \frac{1}{2} E_J \hat{\varphi}^2 - \frac{1}{24} E_J \hat{\varphi}^4$$

In questa Hamiltoniana è facile individuare un oscillatore armonico tra i primi due termini e il termine non-lineare perturbativo $H_1 = -\frac{1}{24} E_J \hat{\varphi}^4$. Si dimostra come questo termine, in teoria delle perturbazioni, porti a non avere più livelli energetici equidistanti e si raggiungono le espressioni valide per i primi due salti di energia:

$$\begin{aligned} \Delta E_{0,1} &= \sqrt{8E_J E_c} - E_c \\ \Delta E_{1,2} &= \Delta E_{0,1} - E_c \end{aligned}$$

Dal momento che i valori tipici in gioco sono $E_J/\hbar \sim 2\text{GHz}$ e $E_c/\hbar \sim 400\text{MHz}$ è possibile selezionare sperimentalmente l'unica transizione a cui siamo interessati: quella tra il livello E_0 e E_1 ; ottenendo così un sistema fisico a due livelli utilizzabile come qubit.

Oscillazioni Rabi

In questa sezione si vuole fornire la spiegazione teorica di quanto osservato nell'esperimento di caratterizzazione circa le oscillazioni Rabi. Il fenomeno indagato è dunque un sistema a due livelli sotto l'azione continua di radiazione elettromagnetica coerente con la frequenza del sistema [REF_MeasureIPad]. L'approccio risolutivo qui presentato è quello semiclassico.

Assumendo che l'hamiltoniana del qubit sia:

$$\hat{H}_q = -\omega_q \frac{\sigma_z}{2}$$

dove ω_q rappresenta l'energia necessaria per far transire lo stato da $|0\rangle$ a $|1\rangle$ (per il qubit di tipo transmon) e σ_z la terza matrice di Pauli.

Per interazione semiclassica, si consideri il momento di dipolo elettrico $\vec{d} = \vec{d}\sigma_x$ del qubit posto in un campo elettrico E oscillante alla sua frequenza di risonanza con dipendenza temporale descritta da $E(t) =$

$E \cos(\omega_d t)$. L'hamiltoniana che descrive l'interazione tra campo e sistema è $H_{int} = -\vec{E} \cdot \hat{d}$; se si assume, per semplicità, il dipolo elettrico allineato col campo E , allora l'hamiltoniana totale diventa:

$$H_{tot} = -\omega_q \frac{\sigma_z}{2} - A \cos(\omega_d t) \sigma_x$$

In cui è stato introdotto il parametro $A=Ed$ che rappresenta quanto è forte il termine d'interazione.

Per conoscere come il sistema evolve è possibile risolvere esplicitamente l'equazione di Schrödinger per hamiltoniana dipendente dal tempo, oppure, cercare la soluzione partendo da un *ansatz*. Infatti, la dipendenza temporale di H_{tot} è data esclusivamente dal termine d'interazione; immaginando ora di "spegnere" il campo elettrico sappiamo che per un generico stato $|\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_1|1\rangle$ il suo evoluto temporale sarebbe:

$$|\psi(t)\rangle = C_{0(t)} e^{i\frac{\omega_q}{2}t} |0\rangle + C_{1(t)} e^{-i\frac{\omega_q}{2}t} |1\rangle$$

dove si è esplicitata la dipendenza temporale per i coefficienti. Assumendo per *ansatz* questo tipo di soluzione e inserendola nell'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \left(-\omega_q \frac{\sigma_z}{2} - A \cos(\omega_d t) \sigma_x \right) |\psi(t)\rangle$$

Quello che si trova è un sistema di due equazioni differenziali accoppiate per $C_{0(t)}$ e $C_{1(t)}$.

$$\dot{C}_0 = iA \cos(\omega_d t) e^{-i\omega_q t} C_1$$

$$\dot{C}_1 = iA \cos(\omega_d t) e^{i\omega_q t} C_0$$

Al fine di risolvere questo analiticamente si espande il $\cos(\omega_d t) e^{\pm i\omega_q t} = e^{i(\omega_q \pm \omega_d)t} + e^{-i(\omega_q \mp \omega_d)t}$; di cui ignoriamo i termini rapidamente rotanti, ossia $e^{\pm i(\omega_q + \omega_d)t}$, in quanto poco interessati alle piccole scale temporali. Dunque, il sistema diventa:

$$\dot{C}_0 = iA e^{-i(\omega_q - \omega_d)t} C_1$$

$$\dot{C}_1 = iA e^{i(\omega_q - \omega_d)t} C_0$$

Si pongano ora le condizioni iniziali ($C_0(0) = 1$, $C_1(0) = 0$) necessarie per risolvere il problema di Cauchy. Così facendo, si ottengono le seguenti evoluzioni temporali per i due coefficienti:

$$C_{0(t)} = \frac{e^{-i\frac{\Delta_d}{2}t}}{\Omega_R} \left(\Omega_R \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + i \Delta_d \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \right)$$

$$C_{1(t)} = i \frac{A e^{-i\frac{\Delta_d}{2}t}}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

In cui sono stati inseriti i termini $\Delta_d = \omega_q - \omega_d$ e $\Omega_R = \sqrt{A^2 + \Delta_d^2}$ per alleggerire la notazione. Ottenuta l'evoluzione per $|\psi(t)\rangle$ si può ottenere l'evoluzione per qualsiasi osservabile. Al fine di mostrare con maggiore chiarezza quale sia la dinamica del sistema, è comodo osservare l'andamento del popolamento dello stato eccitato:

$$P_{1(t)} = |C_{1(t)}|^2 = \frac{A^2}{\Omega_R^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

Il che giustifica l'andamento oscillatorio osservato sperimentalmente.

A.?? Programma di Caratterizzazione

Di seguito il programma in linguaggio Python usato per la caratterizzazione del qubit del backend `ibmq_armonk`. Il programma si può eseguire tranquillamente da terminale, previa creazione all'IBM Quantum Experience e necessita di connessione internet, in quanto invia i circuiti da eseguire al cloud IBM. È consigliabile, però, trasporre il programma su uno *jupyter notebook* per seguire *step by step* i passi dell'esecuzione.