

Appendice

In quest'appendice si approfondiscono aspetti teorici e si riportano tutti i programmi scritti e discussi nei vari capitoli omessi in precedenza per non appesantire oltremodo la lettura. L'ordine con cui si mostrano i vari argomenti rispecchia quello dei rimandi fatti nel testo.

Quantizzazione di una giunzione Josephson e Hamiltoniana di uno SQUID

Si riprende il discorso con la discussione delle giunzioni Josephson. Una giunzione Josephson consiste in due superconduttori connessi con una barriera isolante per effetto tunnel. Può essere descritta tramite la sua corrente critica I_c e la differenza di fase *gauge* invariante φ attraverso la giunzione. Valori che caratterizzano la giunzione e dipendono dai materiali superconduttori impiegati e dalle dimensioni della stessa. Più precisamente, si può associare ad ogni superconduttore $k=1,2$ una funzione d'onda del tipo:

$$\Psi_k = \sqrt{\rho_k} e^{i\phi_k}$$

dove ρ_k è la densità di coppie di Cooper del k -esimo conduttore e ϕ_k la rispettiva fase. La dinamica del sistema è descritta dalle equazioni di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \Psi_1 + k \Psi_2$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \Psi_2 + k \Psi_1$$

dove E_1 e E_2 sono le energie degli stati e k la costante d'accoppiamento che misura l'interazione delle due funzioni d'onda. Sostituendo l'espressione di Ψ_k nelle equazioni di Schrödinger si ottengono le seguenti:

$$\hbar \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 2k\sqrt{\rho_1\rho_1} \sin\phi$$

$$\hbar \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -2k\sqrt{\rho_1\rho_1} \sin\phi$$

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E_2 - E_1$$

Le derivate $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$ sono proporzionali alla *corrente di Josephson* I_J , mentre la quantità $2k\sqrt{\rho_1\rho_1}$ alla corrente critica I_c menzionata precedentemente. Inoltre, se si applica una differenza di potenziale V alla giunzione, si ottiene $E_2 - E_1 = 2eV$ e la precedente equazione può essere riscritta nelle *equazioni di Josephson*:

$$I_J(t) = I_c \sin\phi(t) \quad (\text{prima eq. di Josephson})$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V \quad (\text{seconda eq. di Josephson})$$

Con queste si è in grado di descrivere l'evoluzione temporale della corrente di Josephson e di φ in funzione della differenza di potenziale V applicata. Nell'ultima equazione scritta è stato introdotto il fattore $\Phi_0 = h/2e$ dove $2e$ è la carica di una coppia di Cooper.

Derivando la prima equazione di Josephson rispetto al tempo e ricordando $\dot{I} = V/L$ si ottiene un'induttanza non lineare:

$$L_J = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\Phi_0}{2\pi I_C}$$

L'energia relativa a questo termine d'induttanza la si può calcolare come:

$$E_{J,L} = \int_0^t d\tau I_J(\tau)V = E_J(1-\cos\varphi); \quad \text{con } E_J = \frac{\Phi_0 I_C}{2\pi}.$$

Dove E_J è chiamata energia di Josephson ed è una misura dell'accoppiamento attraverso la giunzione. Ma, dal momento che la giunzione di Josephson ha anche una capacità interna, indicata C_J , va considerato anche il relativo termine di energia: $E_{J,C} = \frac{Q^2}{2C_J}$ dove Q è la carica della giunzione.

A meno di termini costanti, l'Hamiltoniana classica è dunque:

$$H_J = \frac{Q^2}{2C_J} - E_J \cos\varphi$$

Dato che $Q=(2e)N$, dove N è un intero che definisce il numero di coppie di Cooper presenti in eccesso, $N = N_1 - N_2$, con N_1 e N_2 a rappresentare il numero di coppie presenti su ogni faccia della giunzione, si può definire il termine energetico capacitivo $E_C = \frac{e^2}{2C_J}$ e riscrivere l'Hamiltoniana come:

$$H_J = 4E_C N^2 - E_J \cos\varphi$$

Se invece di una singola giunzione Josephson se ne considerano due in parallelo, così da formare un anello superconduttore (o *loop*) si va a costituire un sistema chiamato SQUID: *Superconducting Quantum Interference Device*. Fig A.1

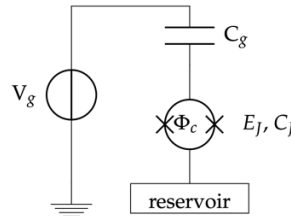


Fig A.1: Rappresentazione di uno SQUID inserito in un circuito con una differenza di potenziale V_g .

Nel caso in cui l'induttanza del loop può essere trascurata, allora l'Hamiltoniana corrispondente è identica ad H_J se ridefiniamo:

$$C_J \rightarrow 2C_J, \quad E_J \rightarrow E_J(\Phi_C) = 2E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi_C}{\Phi_0}\right)$$

Il termine Φ_C è (l'eventuale) flusso esterno, il quale può alterare il valore di E_J .

D'ora in avanti consideriamo uno SQUID inserito in un circuito proprio come in figura. La presenza di V_g riduce N di $N_g = C_g V_g / (2e)$, così l'Hamiltoniana diventa:

$$H = 4E_C (N - N_g)^2 - E_J \cos\varphi, \quad \text{con } E_C = \frac{e^2}{2(C_J + C_g)}$$

Considerando ora $4E_C N^2$ come termine cinetico e $-E_J \cos\varphi$ come energia potenziale, allora H rappresenta l'Hamiltoniana di un oscillatore non lineare, in cui le variabili coniugate sono N (il momento corrispondente) e φ (l'analogo della posizione).

