Appendice

In quest’appendice si approfondiscono aspetti teorici e si riportano tutti i programmi scritti e discussi nei vari capitoli omessi in precedenza per non appesantire oltremodo la lettura. L’ordine con cui si mostrano i vari argomenti rispecchia quello dei rimandi fatti nel testo.

**Quantizzazione di una giunzione Josephson e Hamiltoniana di uno SQUID**

Si riprende il discorso con la discussione delle giunzioni Josephson. Una giunzione Josephson consiste in due superconduttori connessi con una barriera isolante per effetto tunnel. Può essere descritta tramite la sua corrente critica e la differenza di fase *gauge* invariante attraverso la giunzione. Valori che caratterizzano la giunzione e dipendono dai materiali superconduttori impiegati e dalle dimensioni della stessa. Più precisamente, si può associare ad ogni superconduttore k=1,2 una funzione d’onda del tipo:

dove è la densità di coppie di Cooper del k-esimo conduttore e la rispettiva fase. La dinamica del sistema è descritta dalle equazioni di Schrödinger:

dove e sono le energie degli stati e k la costante d’accoppiamento che misura l’interazione delle due funzioni d’onda. Sostituendo l’espressione di nelle equazioni di Schrödinger si ottengono le seguenti:

Le derivate sono proporzionali alla *corrente di Josephson* , mentre la quantità alla corrente critica menzionata precedentemente. Inoltre, se si applica una differenza di potenziale *V* alla giunzione, si ottiene e la precedente equazione può essere riscritta nelle *equazioni di Josephson:*

(prima eq. di Josephson)

(seconda eq. di Josephson)

Con queste si è in grado di descrivere l’evoluzione temporale della corrente di Josephson e di in funzione dellla differenza di potenziale V applicata. Nell’ultima equazione scritta è stato introdotto il fattore dove *2e* è la carica di una coppia di Cooper.

Derivando la prima equazione di Josephson rispetto al tempo e ricordando si ottiene un’induttanza non lineare:

L’energia relativa a questo termine d’induttanza la si può calcolare come:

; con .

Dove è chiamata energia di Josephson ed è una misura dell’accoppiamento attraverso la giunzione. Ma, dal momento che la giunzione di Josephson ha anche una capacità interna, indicata , va considerato anche il relativo termine di energia: dove Q è la carica della giunzione.

A meno di termini costanti, l’Hamiltoniana classica è dunque:

Dato che Q=(2e)N, dove N è un intero che definisce il numero di coppie di Cooper presenti in eccesso, , con e a rappresentare il numero di coppie presenti su ogni faccia della giunzione, si può definire il termine energetico capacitivo e riscrivere l’Hamiltoniana come:

Se invece di una singola giunzione Josephson se ne considerano due in parallelo, così da formare un anello superconduttore (o *loop*) si va a costituire un sistema chiamato SQUID: *Superconducting Quantum Interference Device*. Fig A.1

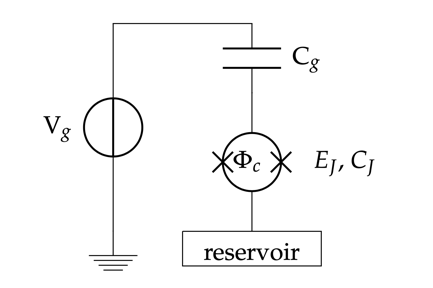


Fig A.1: Rappresentazione di uno SQUID inserito in

un circuito con una differenza di potenziale .

Nel caso in cui l’induttanza del loop può essere trascurata, allora l’Hamiltoniana corrispondente è identica ad se ridefiniamo:

,

Il termine è (l’eventuale) flusso esterno, il quale può alterare il valore di .

D’ora in avanti consideriamo uno SQUID inserito in un circuito proprio come in figura. La presenza di riduce N di , così l’Hamiltoniana diventa:

, con

Considerando ora come termine cinetico e come energia potenziale, allora H rappresenta l’Hamiltoniana di un oscillatore non lineare, in cui le variabili coniugate sono N (il momento corrispondente) e (l’analogo della posizione).

Per passare all’Hamiltoniana quantistica si procede sostituendo N e con i corrispondenti operatori. Dato che e sono variabili coniugate, nella base di autostati di vale la seguente relazione:

In questo modo si può riscrivere l’Hamiltoniana:

Le cui soluzioni al problema agli autovalori sono date dalle soluzioni di Floquet:

dove int(x) arrotonda all’intero più vicino x, x mod y denota la solita operazione di modulo, ossia restituisce il quoziente intero di x/y. I corrispondenti autovalori sono:

Dove denota il valore caratteristico di Mathieu. In fig A.2 è riportato l’andamento di (per m=0,1,2,3) in funzione di e normalizzati rispetto all’energia di transizione , la quale è la minima separazione energetica tra i livelli e , per diversi valori di .

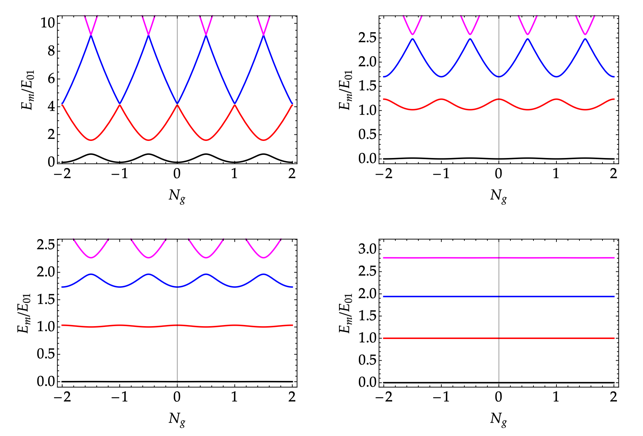


Fig A.2: in funzione di (in ogni grafico, dal basso verso l’alto m=0,1,2,3) normalizzati

rispetto a per diversi valori di =1.0, 5.0, 10.0, 50.0. Il punto zero dell’energia è

scelto come il minimo del livello m=0.

Si possono ora individuare due regimi: per si è in regime *charge* e per in regime *transmon.* Sebbene entrambi siano validi per la costruzione di un qubit, si discuterà solamente del regime transmon; in quanto questo è quello usato da IBM. I due regimi sono mostrati in fig A.3.

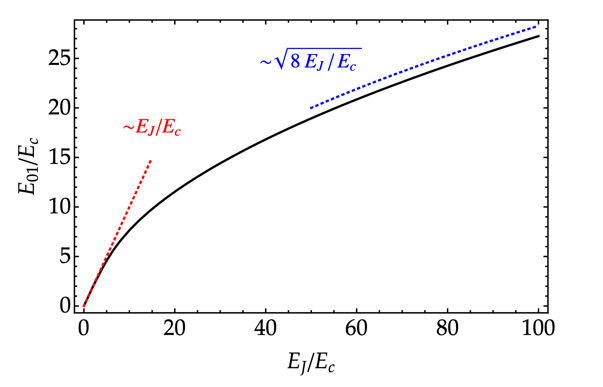


Fig A.3: grafico di in funzione di

**Qubit di tipo transmon**

Come mostrato in fig A.2, i livelli energetici sono rappresentabili con una funzione oscillante che dipende da . Ma, nel limite il termine oscillante diventa trascurabile e si può considerare che non dipenda più da . Questo è il regime *transmon*: *transmission line shunted plasma oscillation*.

Quando lo SQUID è portato a questo regime, il termine energetico capacitivo può essere considerato pari a:

Per cui è possibile diminuire aumentando , fino ad ottenere . A questo punto si può espandere in serie di Taylor che compare nell’Hamiltoniana per ottenerne una “nuova” valida per i qubit di tipo transmon. Si fa notare che in questa non compare in quanto i livelli energetici sono indipendenti da esso.

In questa Hamiltoniana è facile individuare un oscillatore armonico tra i primi due termini e il temine non-lineare perturbativo . Si dimostra come questo termine, in teoria delle perturbazioni, porti a non avere più livelli energetici equidistanti e si raggiungono le espressioni valide per i primi due salti di energia:

Dal momento che i valori tipici in gioco sono e è possibile selezionare sperimentalmente l’unica transizione a cui siamo interessati: quella tra il livello e ; ottenendo così un sistema fisico a due livelli utilizzabile come qubit.

**Oscillazioni Rabi**

In questa sezione si vuole fornire la spiegazione teorica di quanto osservato nell’esperimento di caratterizzazione circa le oscillazioni Rabi. Il fenomeno indagato è dunque un sistema a due livelli sotto l’azione continua di radiazione elettromagnetica coerente con la frequenza del sistema [REF\_MeasureIPad]. L’approccio risolutivo qui presentato è quello semiclassico.

Assumendo che l’hamiltoniana del qubit sia:

dove rappresenta l’energia necessaria per far transire lo stato da |0> a |1> (per il qubit di tipo trasmon) e la terza matrice di Pauli.

Per interazione semiclassica, si consideri il momento di dipolo elettrico del qubit posto in un campo elettrico oscillante alla sua frequenza di risonanza con dipendenza temporale descritta da . L’hamiltoniana che descrive l’interazione tra campo e sistema è ; se si assume, per semplicità, il dipolo elettrico allineato col campo , allora l’hamiltoniana totale diventa:

In cui è stato introdotto il parametro A=Ed che rappresenta quanto è forte il termine d’interazione.

Per conoscere come il sistema evolve è possibile risolvere esplicitamente l’equazione di Schrdinger per hamiltoniana dipendente dal tempo, oppure, cercare la soluzione partendo da un *ansatz*. Infatti, la dipendenza temporale di è data esclusivamente dal termine d’interazione; immaginando ora di “spegnere” il campo elettrico sappiamo che per un generico stato il suo evoluto temporale sarebbe:

dove si è esplicitata la dipendenza temporale per i coefficienti. Assumendo per ansatz questo tipo di soluzione e inserendola nell’equazione di Schrdinger:

Quello che si trova è un sistema di due equazioni differenziali accoppiate per e .

Al fine di risolvere questo analiticamente si espande il ; di cui ignoriamo i termini rapidamente rotanti, ossia , in quanto poco interessati alle piccole scale temporali. Dunque, il sistema diventa:

Si pongano ora le condizioni iniziali ( , ) necessarie per risolvere il problema di Cauchy. Così facendo, si ottengono le seguenti evoluzioni temporali per i due coefficienti:

In cui sono stati inseriti i termini e per alleggerire la notazione. Ottenuta l’evoluzione per si può ottenere l’evoluzione per qualsiasi osservabile. Al fine di mostrare con maggiore chiarezza quale sia la dinamica del sistema, è comodo osservare l’andamento del popolamento dello stato eccitato:

Il che giustifica l’andamento oscillatorio osservato sperimentalmente.

**A.?? Programma di Caratterizzazione**

Di seguito il programma in linguaggio Python usato per la caratterizzazione del qubit del backend ibmq\_armonk. Il programma si può eseguire tranquillamente da terminale, previa creazione all’IBM Quantum Experience e necessita di connessione internet, in quanto invia i circuiti da eseguire al cloud IBM. È consigliabile, però, trasporre il programma su uno *jupyter notebook* per seguire *step by step* i passi dell’esecuzione.