

Evoluzione temporale di un modello di Ising tramite Trotterization

Candidato:
Lorenzo del Prete

Relatore:
Prof. Andrea Giachero

Co-relatore:
Dr. Stefano Barison

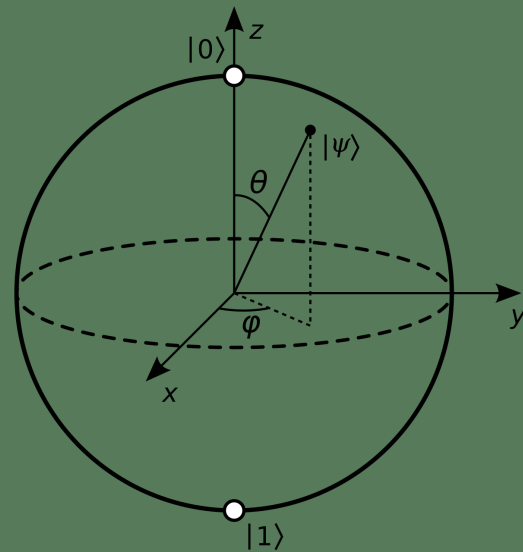
OBIETTIVO

Simulazione di una *XXX-Heisenberg Chain* monodimensionale con calcoli effettuati sui processori quantistici di IBM Quantum tramite la decomposizione di Suzuki-Trotter

Quantum Computing

- Quantum bits (qubit)
- Sfera di Bloch
- Quantum gates

$$\langle \psi | = \alpha \langle 0 | + \beta \langle 1 |$$



$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Heisenberg Chain

- Catena monodimensionale di spin- $1/2$ utilizzata per descrivere la magnetizzazione dei materiali tenendo conto dell'interazione spin-spin
- Interazione nearest neighbours

$$\mathcal{H}_{XYZ} = \sum_{i,j}^{N,\{x,y,z\}} J_j S_i^j \cdot S_{i+1}^j$$

i indice di
spin

j indice
cartesiano

$$\mathbb{H} = \bigotimes_N \mathbb{C}^2$$

CRITICITÀ

L'hamiltoniana è una matrice $2^N \times 2^N$ pertanto la diagonalizzazione tramite metodi computazionali cresce esponenzialmente di complessità con il crescere di N.

XXX-Heisenberg Chain

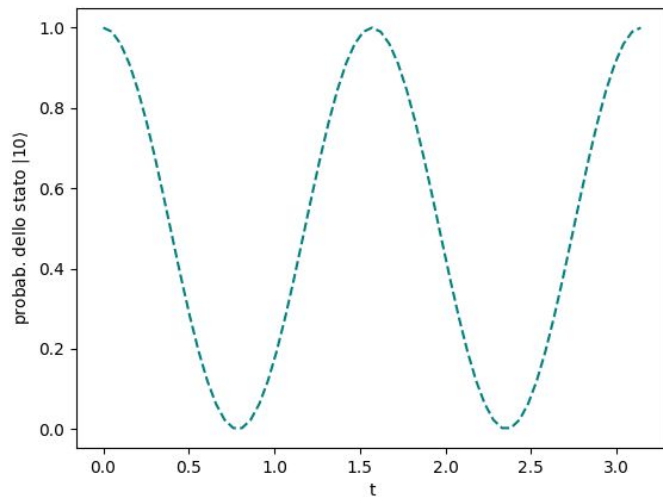
$$J_i = J \quad \forall j = \{x, y, z\}$$

- $J > 0$
ferromagnetico
- Overlap di $\langle 10 |$ e $\langle 110 |$

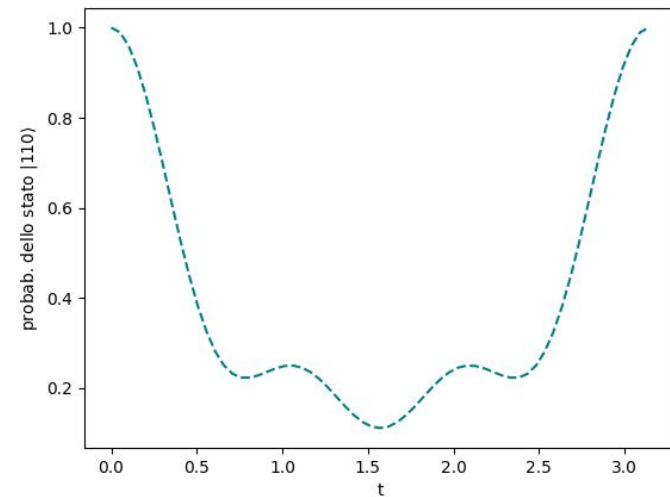
$$\mathcal{H}_{XXX} = J \cdot \left[\sum_{i,j}^{N, \{x,y,z\}} S_i^j \cdot S_{i+1}^j \right]$$

$$P(t) = |\langle 10 | U(t) | 10 \rangle|^2$$

Curve teoriche



Due spin



Tre spin

Decomposizione di Suzuki-Trotter

$$e^{t \sum_i^N A_i} \approx \prod_i^N e^{t A_i} + O(t^2)$$

Formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^Z = e^X \cdot e^Y \rightarrow Z(X, Y) = \log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots$$

...nella Heisenberg Chain

dato l'operatore di evoluzione temporale U

Due spin

$$U_2(t) \approx e^{-itS_x^{(0)} \cdot S_x^{(1)}} e^{-itS_y^{(0)} \cdot S_y^{(1)}} e^{-itS_z^{(0)} \cdot S_z^{(1)}}$$

N spin

$$dt = \frac{t}{n}$$

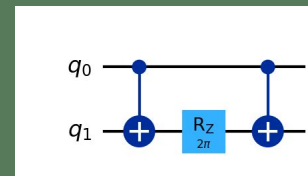
$$U_{N_{spin}} \approx \left\{ \prod_{i=0}^{N_{spin}-1} e^{-i \frac{t}{n} H_2^{(i,i+1)}} \right\}^n + O\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

Implementazione

scrittura degli operatori come rotazioni sulla sfera di Bloch

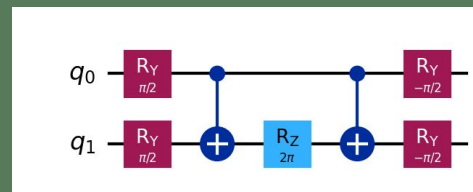
Sz

$$R_{ZZ}(\theta) = CNOT_{12} \cdot I \oplus R_Z(\theta) \cdot CNOT_{12}$$



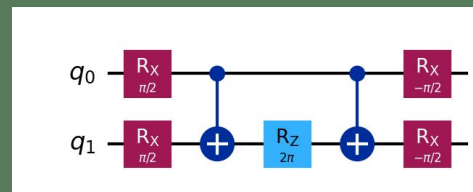
Sx

$$R_{XX}(\theta) = [R_y(\frac{\pi}{2}) \otimes R_y(\frac{\pi}{2})] \cdot R_{ZZ}(\theta) \cdot [R_y(-\frac{\pi}{2}) \otimes R_y(-\frac{\pi}{2})]$$



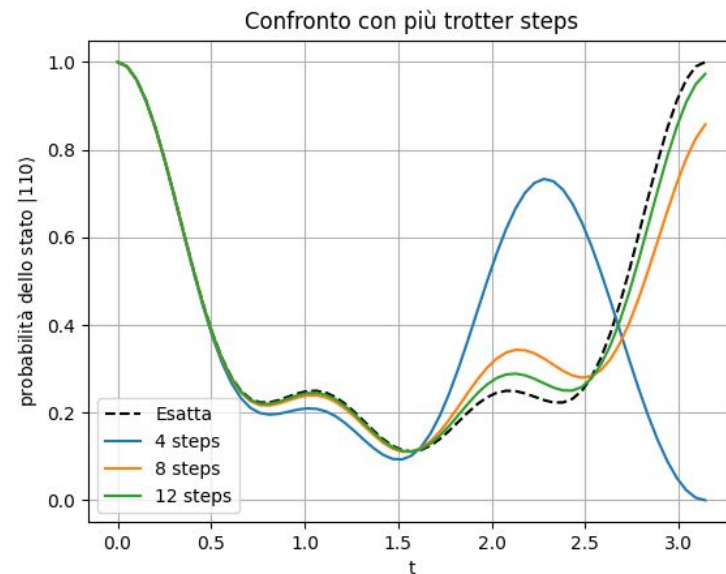
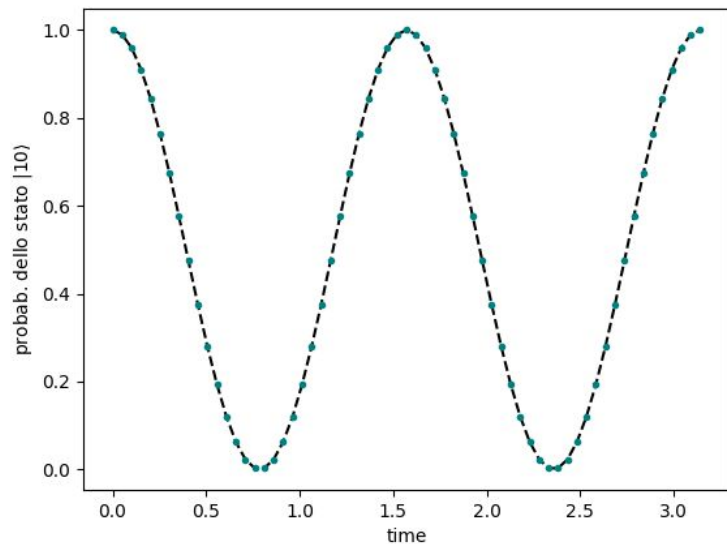
Sy

$$R_{YY}(\theta) = [R_x(\frac{\pi}{2}) \otimes R_x(\frac{\pi}{2})] \cdot R_{ZZ}(\theta) \cdot [R_x(-\frac{\pi}{2}) \otimes R_x(-\frac{\pi}{2})]$$

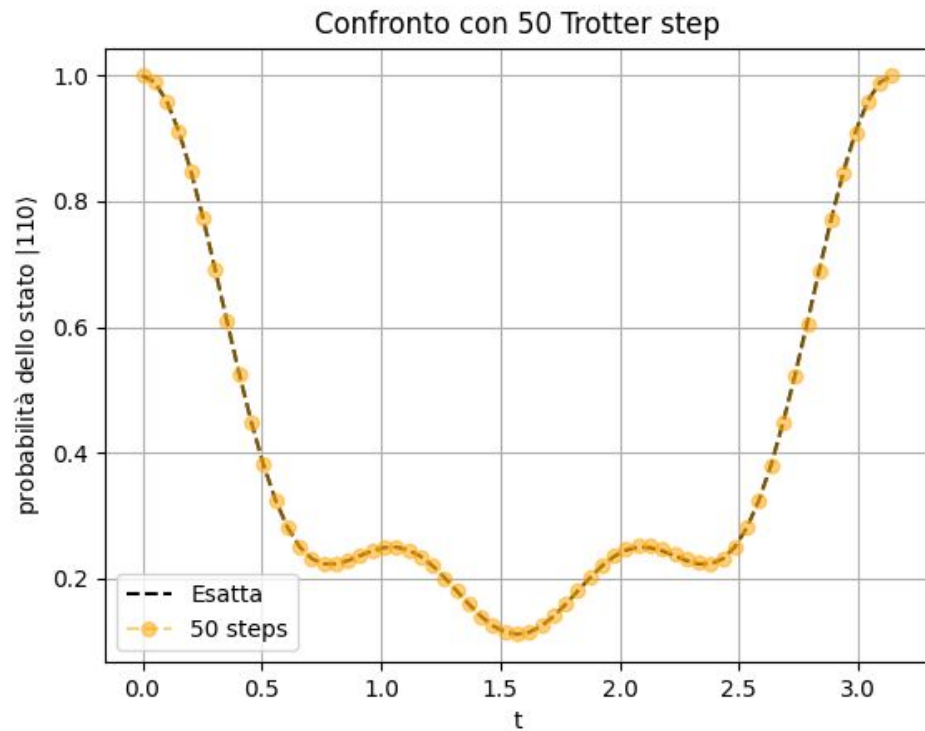


Curve ideali con Trotter

utilizzo di Qiskit



Con un circuito più lungo

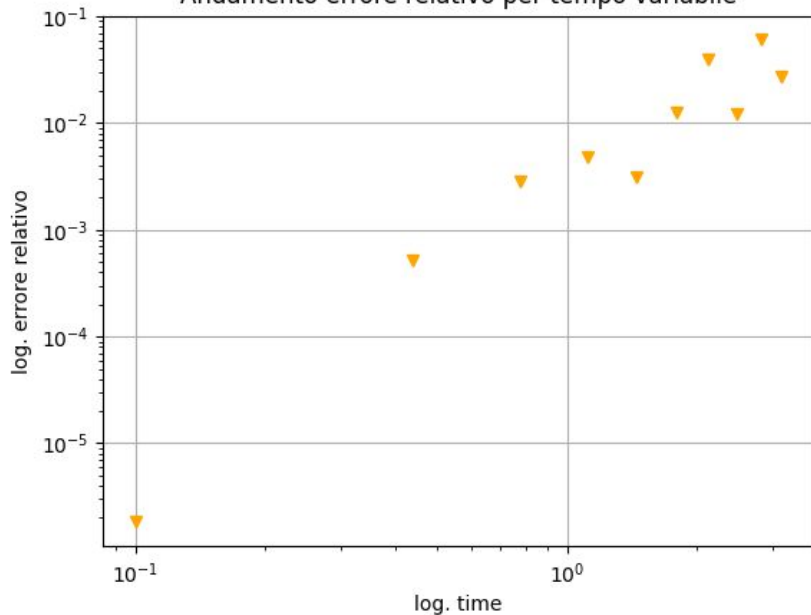


Errore algoritmico

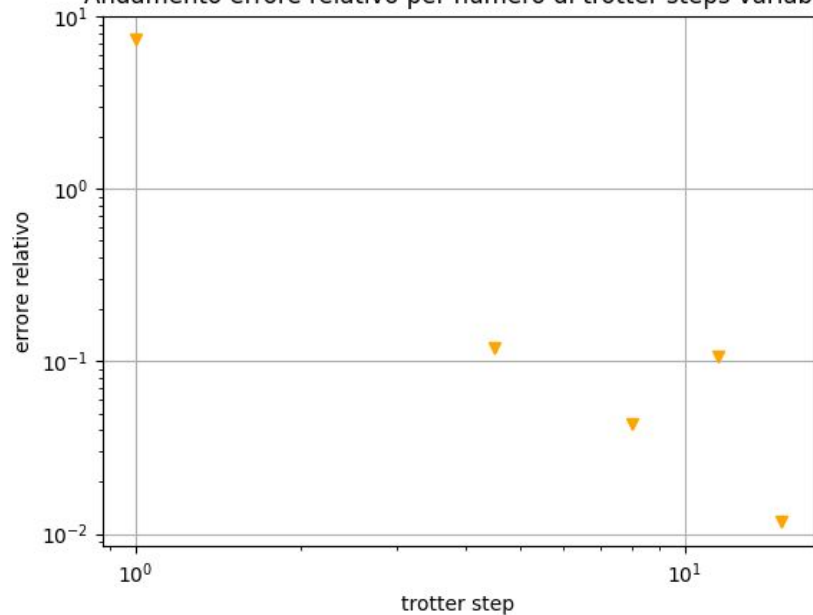
$$O\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$\epsilon = \frac{|true_val - trotter_val|}{true_val}$$

Andamento errore relativo per tempo variabile

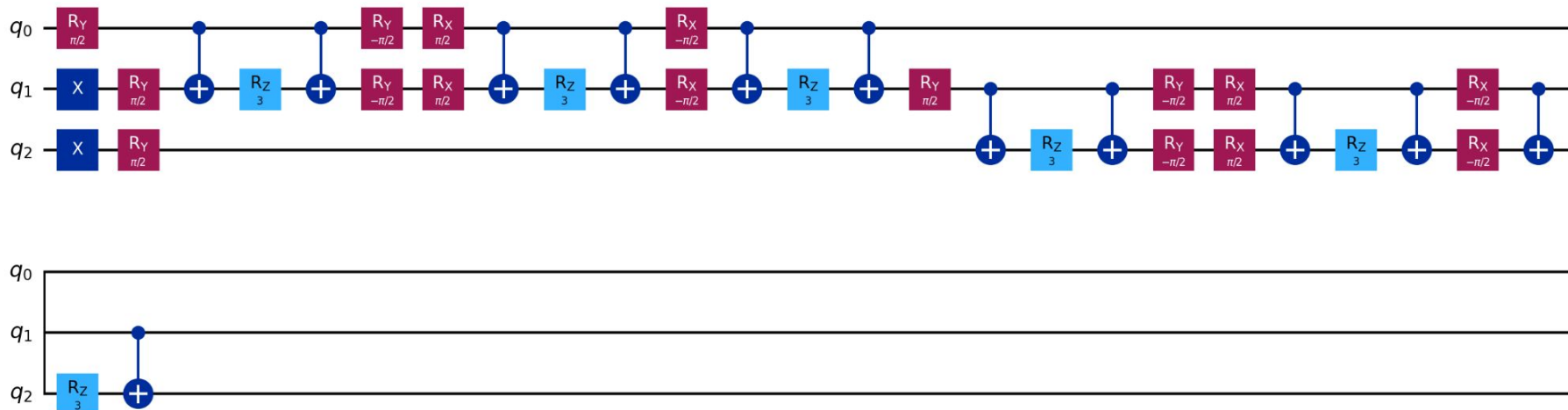


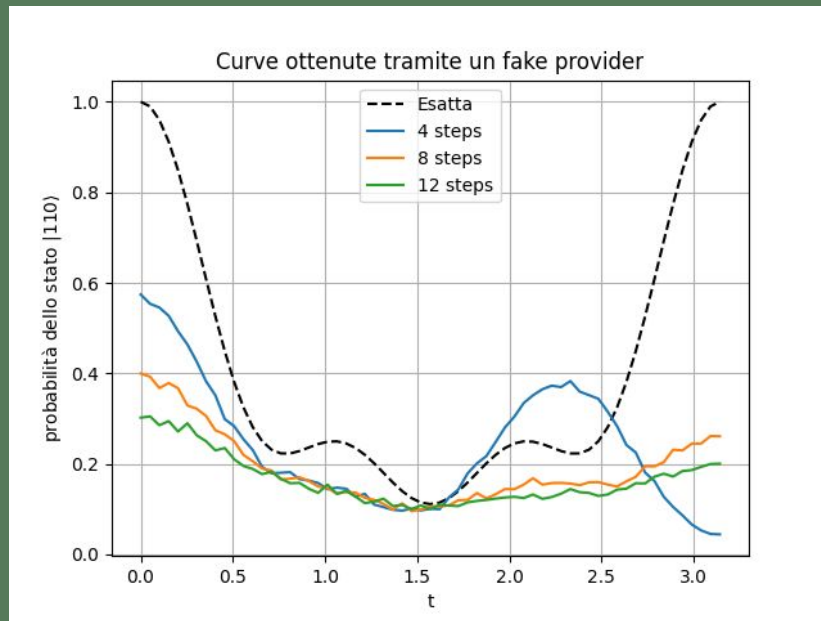
Andamento errore relativo per numero di trotter steps variabili



Circuito quantistico

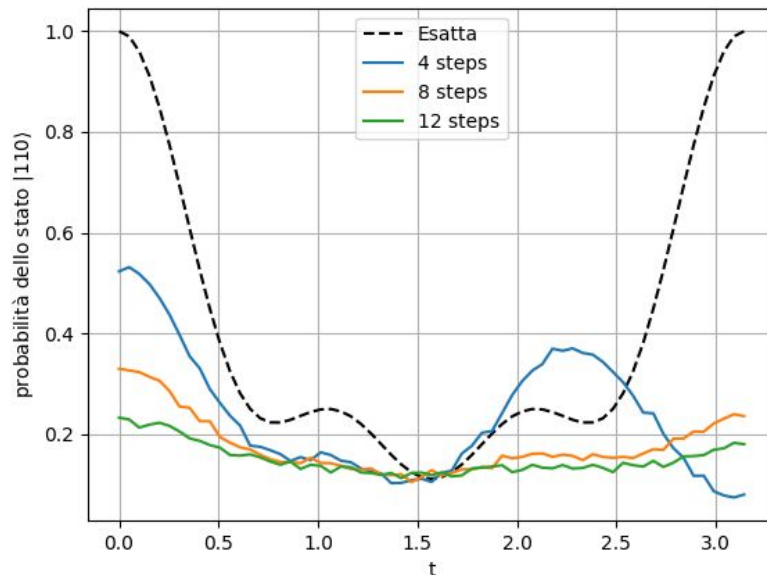
...di un singolo Trotter step





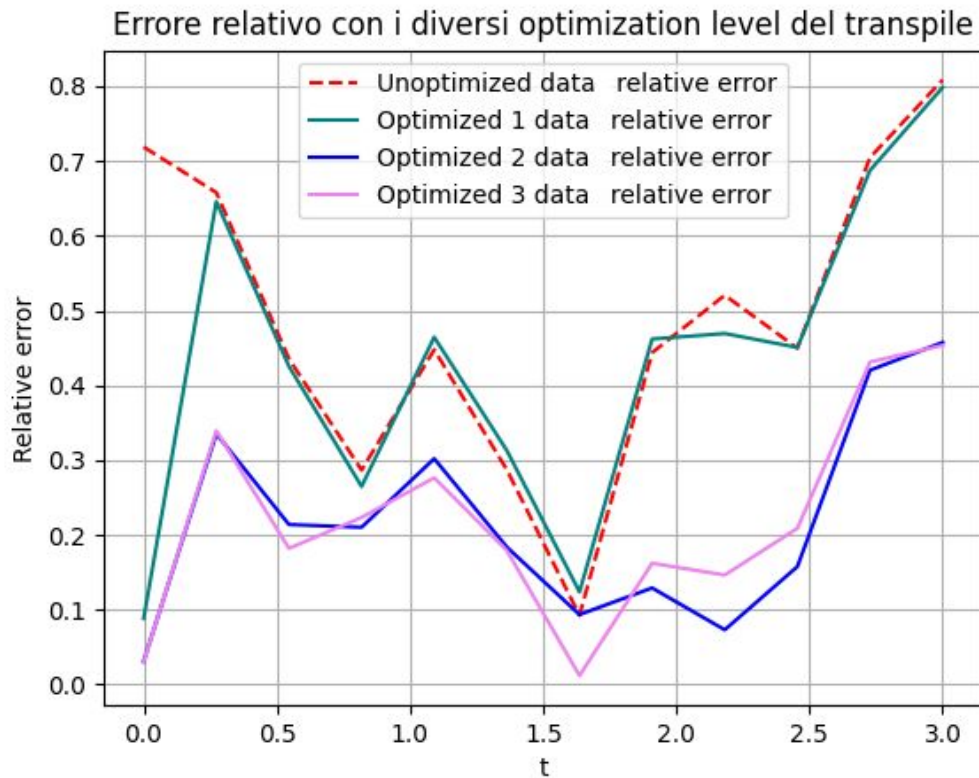
Noise Model

- Bitphase flip
- Depolarizing channel
- Amplitude e phase damping

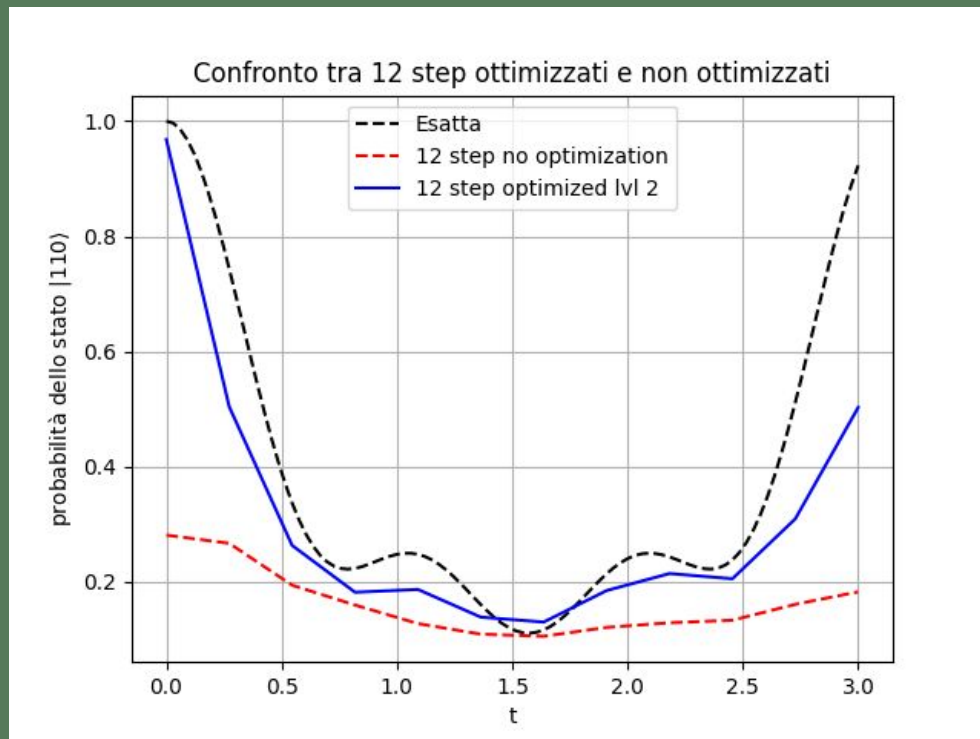


- Riscrittura del circuito per ottimizzazione sulla topologia dell'hardware
- Riduzione della profondità e della complessità del circuito
- Istruzioni conformi alla *Instruction Set Architecture (ISA)*

Transpilation

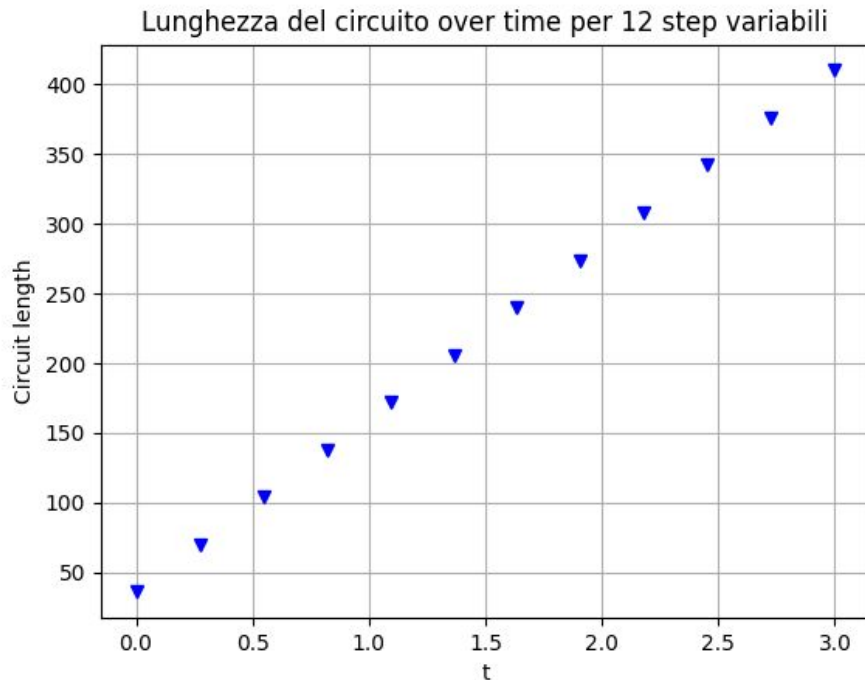


Curve con circuito ottimizzato



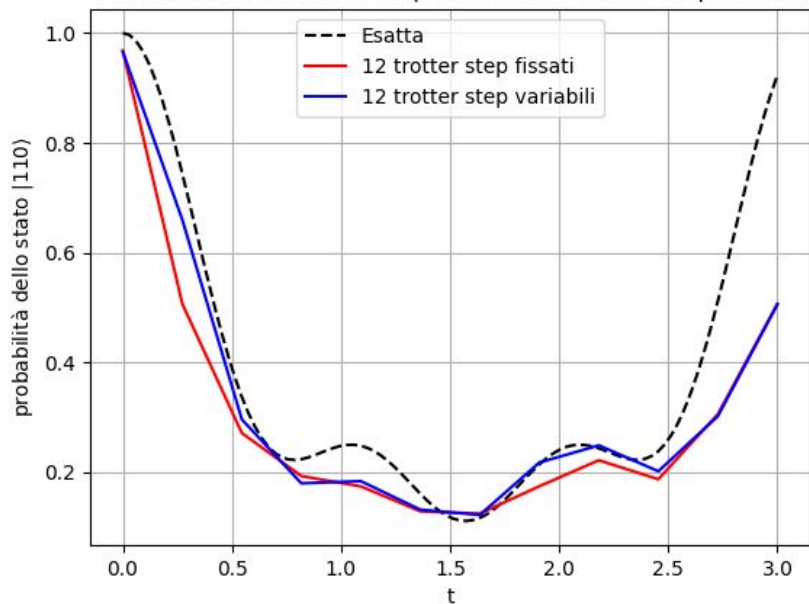
Lunghezza del circuito variabile

- Aumentare in modo lineare la lunghezza del circuito lungo l'intervallo temporale per ridurre l'errore

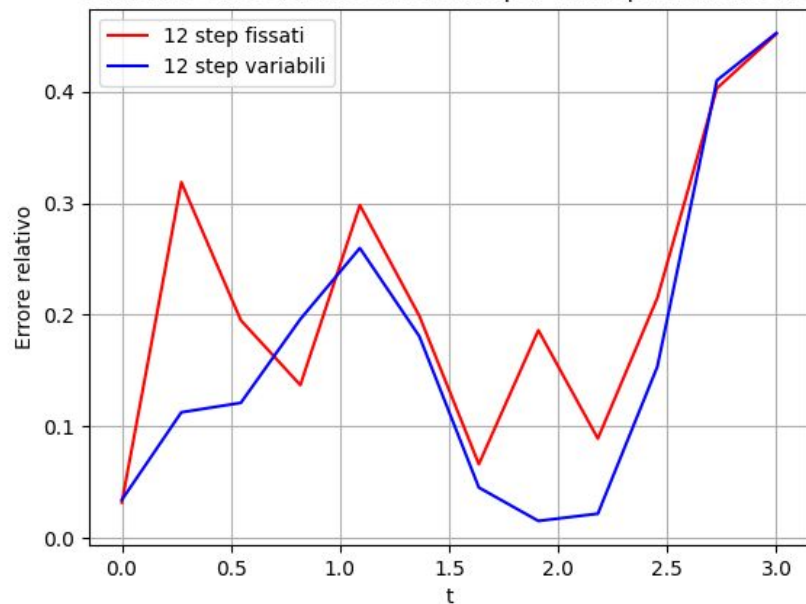


Curve ed errore con lunghezza variabile

Confronto tra 12 trotter step fissati e 12 trotter step variabili



Confronto errore relativo over time per 12 step variabili e fissi

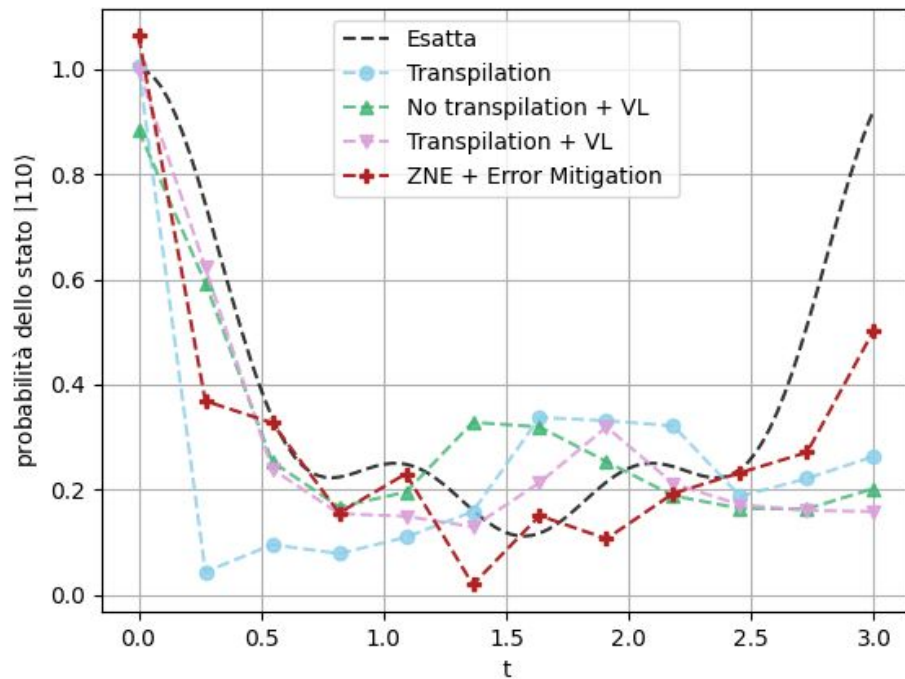


Tecniche di mitigazione dell'errore

- Qubit -> scale atomiche, influenzato enormemente da fenomeni ambientali
- Pauli gate Twirling
- TREN su Gate di misura
- ZNE
 - Digital gate folding
 - Estrapolazione lineare
- Dynamical Decoupling

Simulazione su QPU di IBM Quantum

127 qubit superconduttivi



	Transpilation	VL	Transpilation + VL	Error Mitigation
MAE %	22,69%	17,82%	15,90%	13,39%

Risultato ottenuto: MAE 13,39%

- 12 Trotter steps;
- Lunghezza del circuito variabile;
- Transpilation;
- Tecniche di mitigazione dell'errore.

Prospettive future

- Implementazione di tecniche di mitigazione dell'errore avanzate;
- Utilizzo degli approcci studiati per la simulazione con un maggior numero di spin.

Grazie per l'attenzione!