Algoritmi quantistici per la risoluzione di equazioni differenziali

Sessione di laurea di Luglio
Anno accademico 2022/2023

Relatore:
Andrea Giachero

Correlatori:
Roberto Moretti
Danilo Labranca

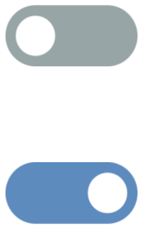
Federico Shin'ichi Finardi

Quantum Computing

bit

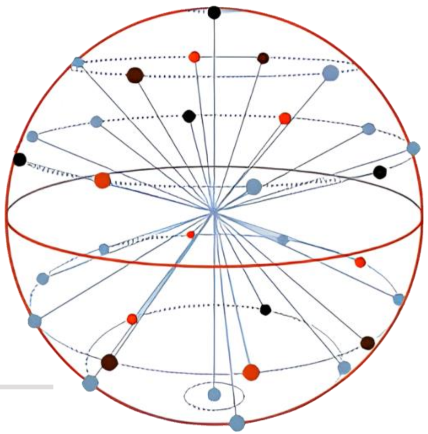
0

1



qubit

$|0\rangle$



$|1\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

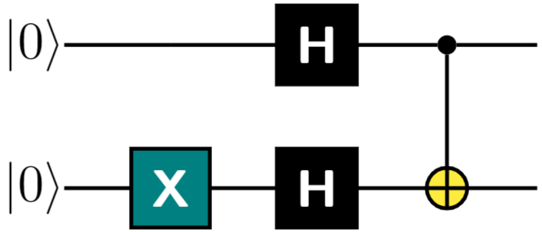
Base computazionale:

$$\mathcal{B} = \left\{ |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quantum gates: Porte logiche quantistiche

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle = |\varphi\rangle$$

Circuiti quantistici:



Quantum Gates

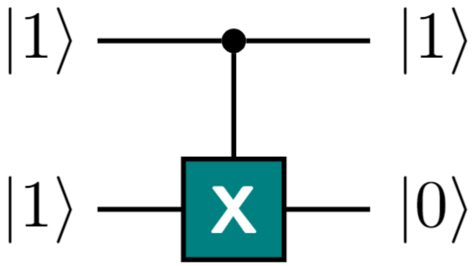
Hadamard gate

`H`

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Controlled NOT gate

`CNOT`



$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotational gate

`Rn(t)`

`n= {X, Y, Z}`

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}$$

Le **tecniche classiche** comunemente utilizzate ricorrono a metodi di **differenze finite** → Sorgente di **errore** sulla soluzione

Parameter-shift Rule

$$U(t) : \text{Circuito Quantistico Variazionale}$$

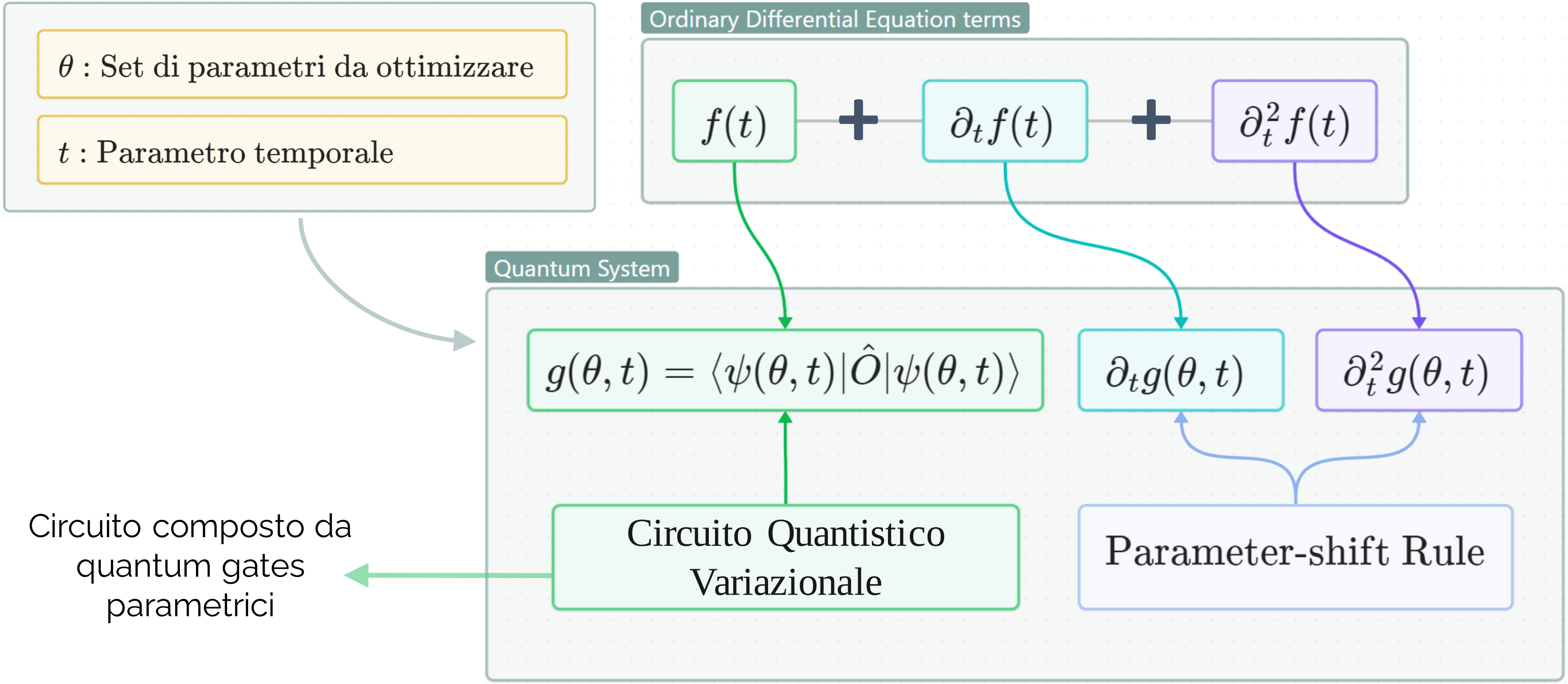
$$|\psi\rangle = U(t)|0\rangle$$

$$f(t) = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$$

$$\partial_t f(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(t+\frac{\pi}{2}\right) - f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

- Permette di valutare la derivata di una funzione $f(t)$ in modo esatto;
- Facilmente implementabile su hardware reale;
- Non ricorre a incrementi finiti;
- **Contro:** Difficoltà nell'approssimare la soluzione $f(t)$ come $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$.

Costruzione del modello



Osservabile Hermitiana:

Operatore di cui calcolare il valor medio sullo stato $|\psi\rangle$ per estrarre $g(t)$

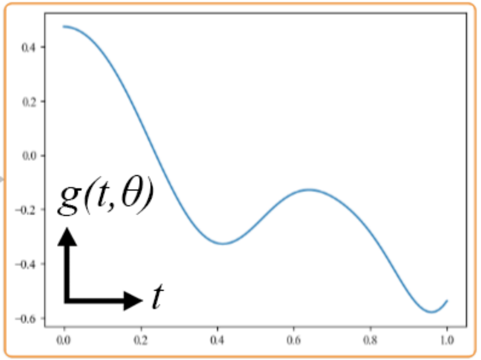
Nel nostro caso

$$\hat{O} = \sigma_Z^{\otimes n_{qubits}}$$

$\hat{O}$: Hermitian observable

Expectation value

$$g(\theta, t) = \langle \psi(\theta, t) | \hat{O} | \psi(\theta, t) \rangle$$



Funzione di costo:

Misura della bontà del modello

Ordinary Differential Equation

$$a \cdot f(t) + b \cdot \partial_t f(t) + \partial_t^2 f(t) = 0$$

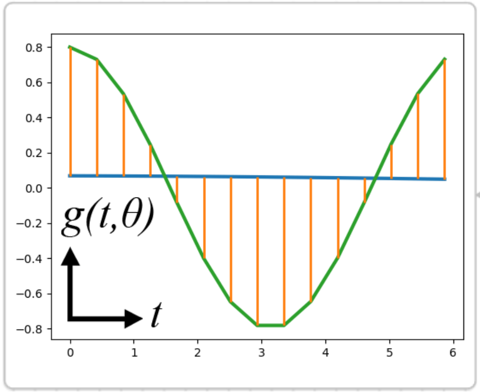
Quantum approximation

$$a \cdot g(\theta, t) + b \cdot \partial_t g(\theta, t) + \partial_t^2 g(\theta, t) = A$$

$$A \to 0$$

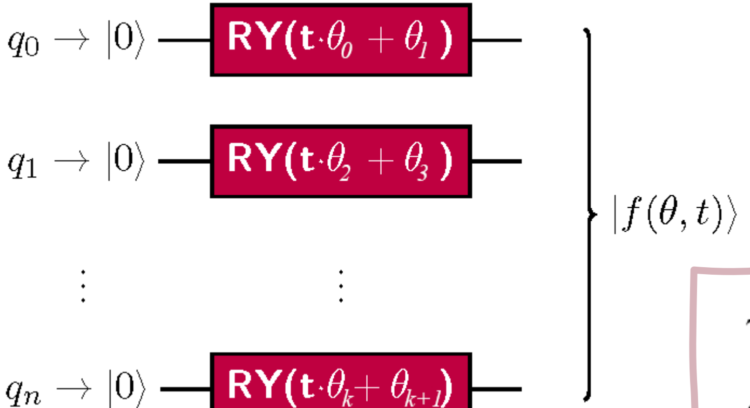
Algoritmo di ottimizzazione:

Strumento per la ricerca dei migliori parametri

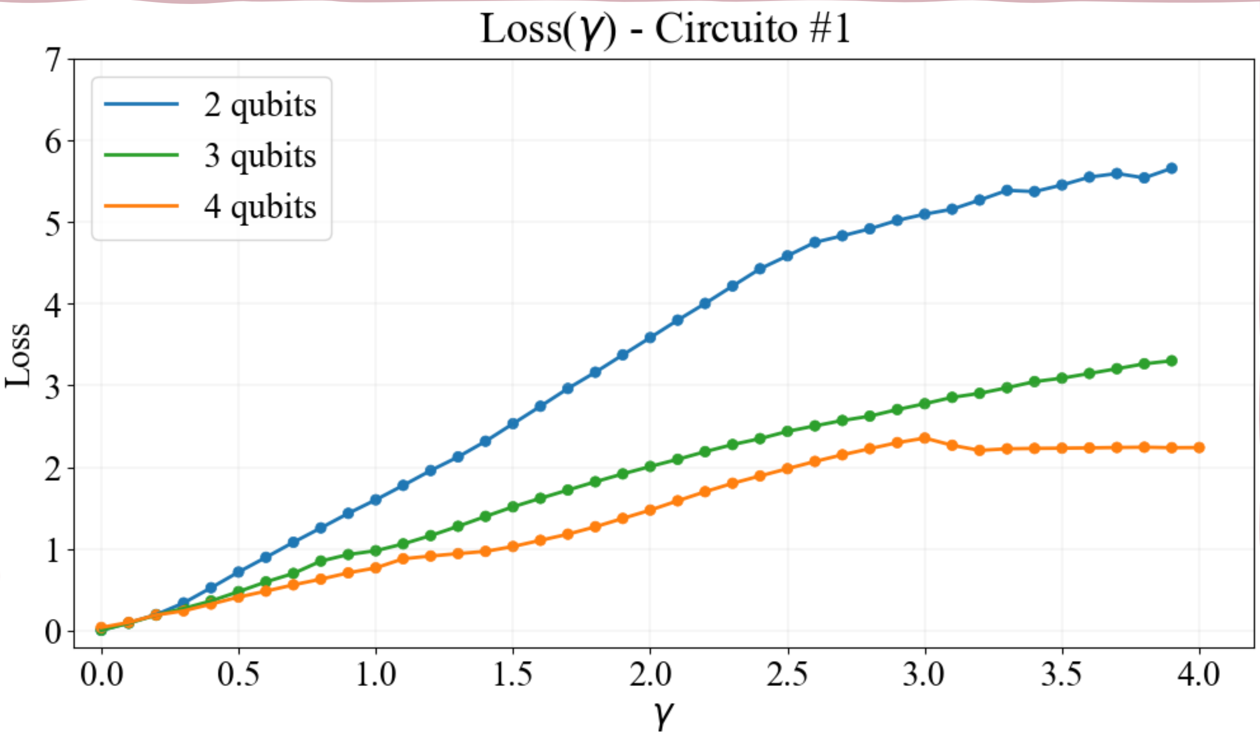


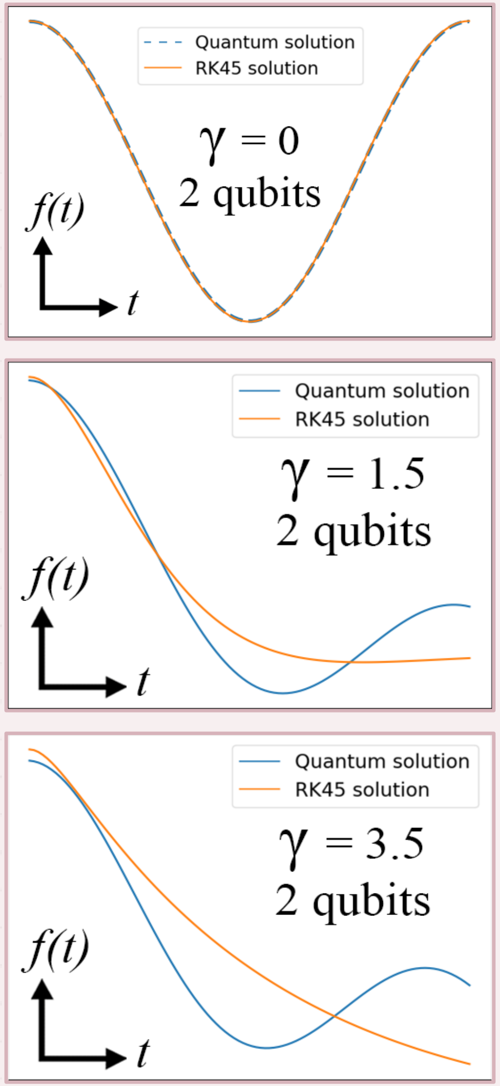
Analisi circuito $R_Y(t \cdot \theta_i + \theta_j)$

Per l'EDO di **un'oscillatore armonico smorzato**



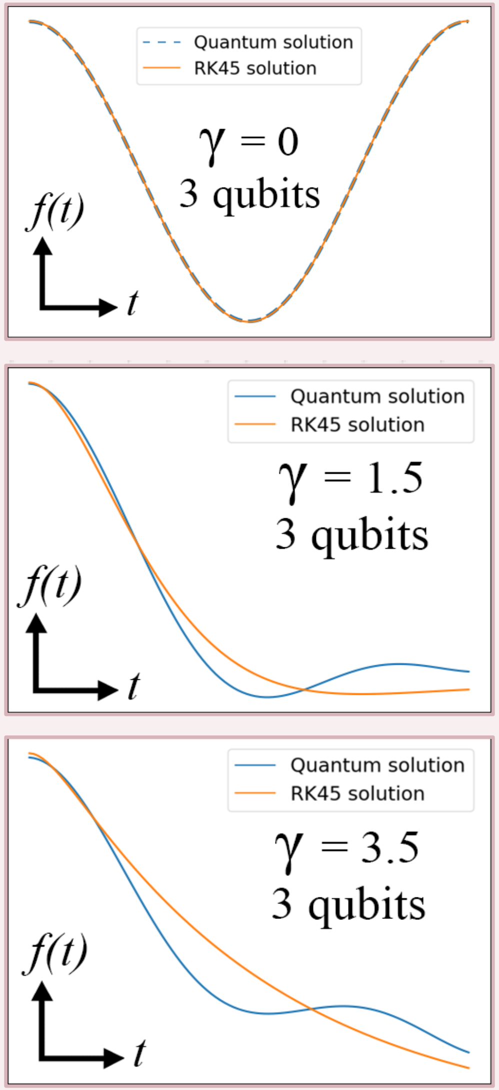
Andamento della funzione di costo al variare del coefficiente di smorzamento γ e del numero di qubit

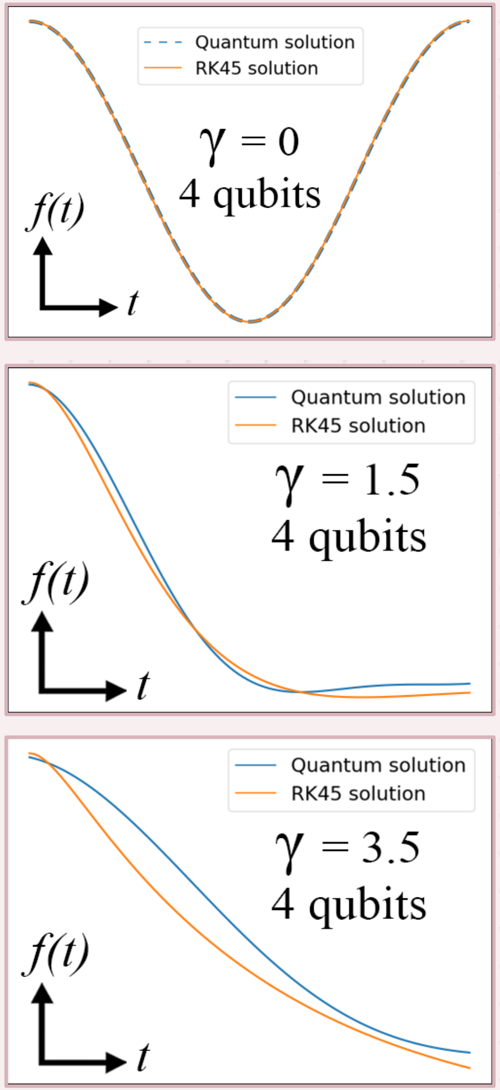




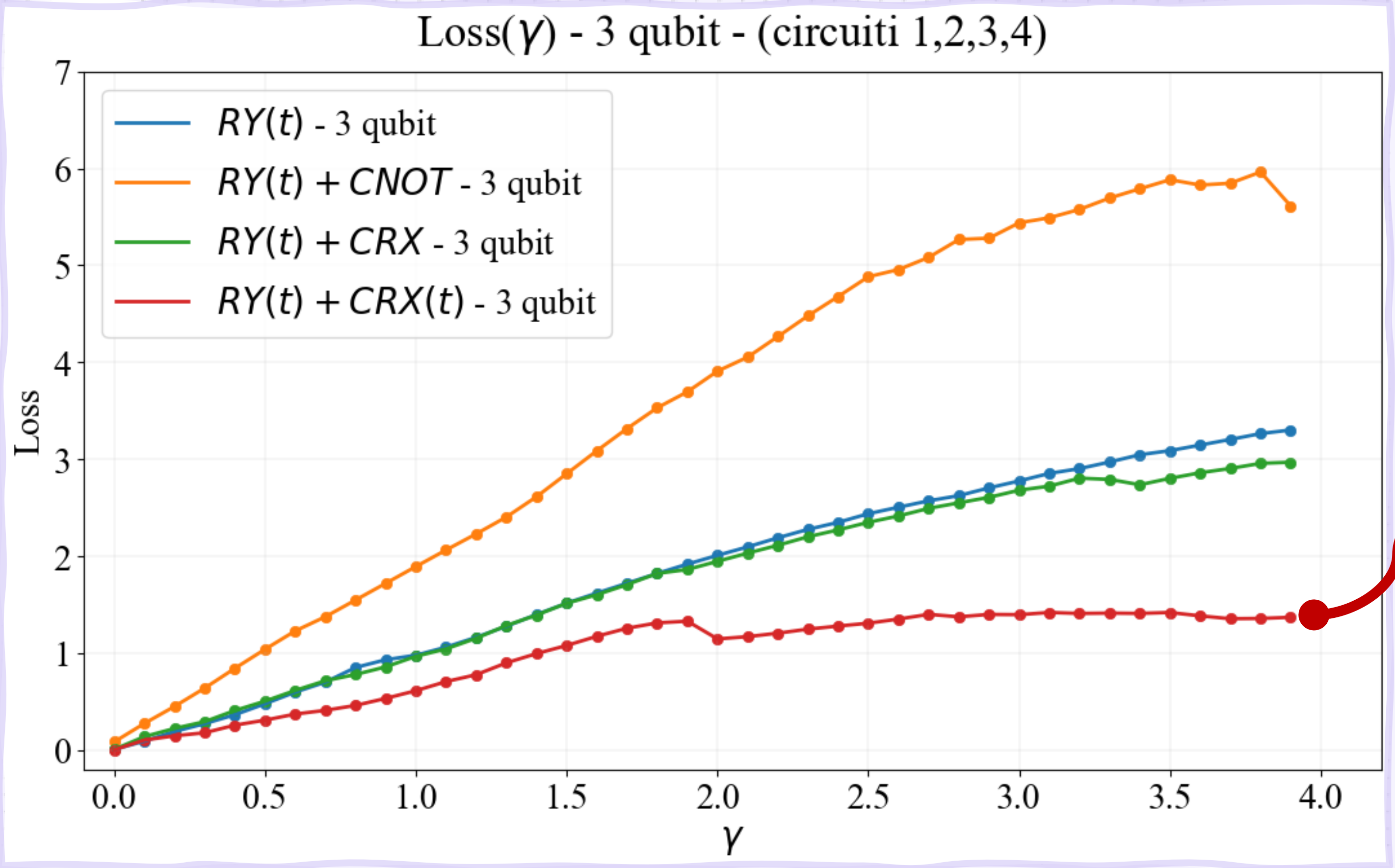
Confronto con RK45

RK45: metodo classico di Runge Kutta





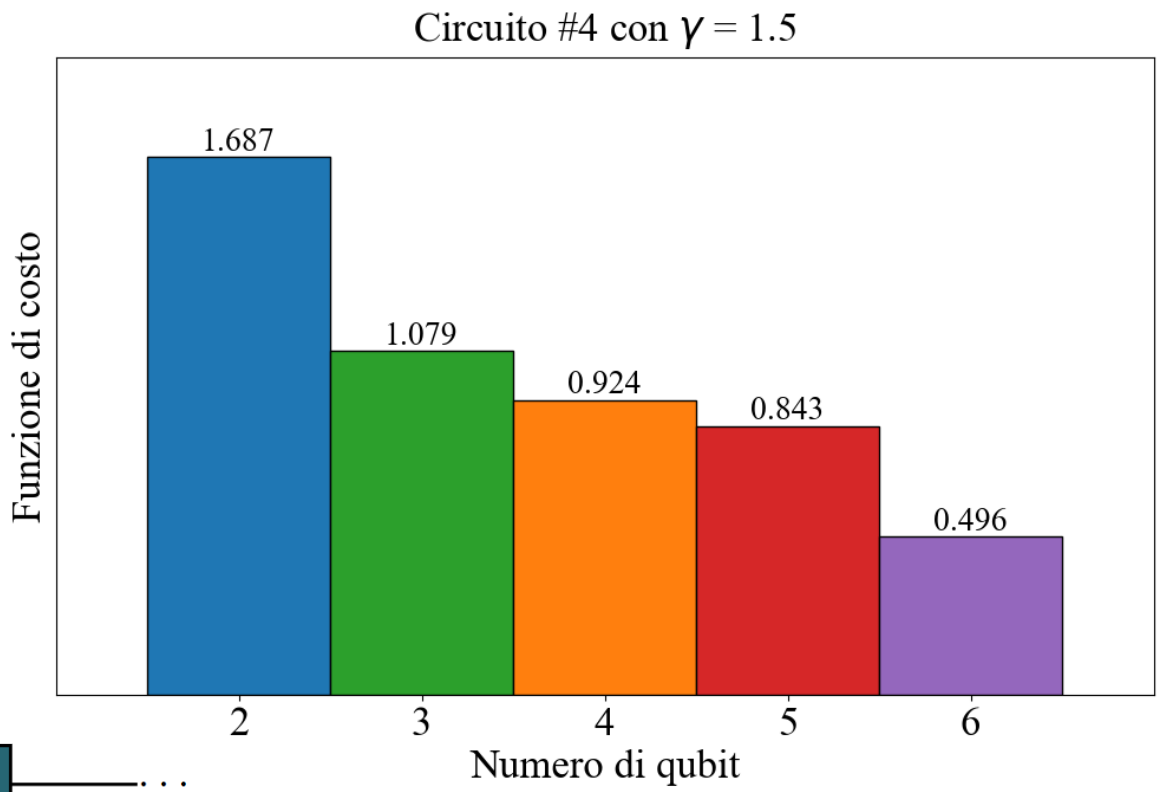
Confronto fra i circuiti studiati

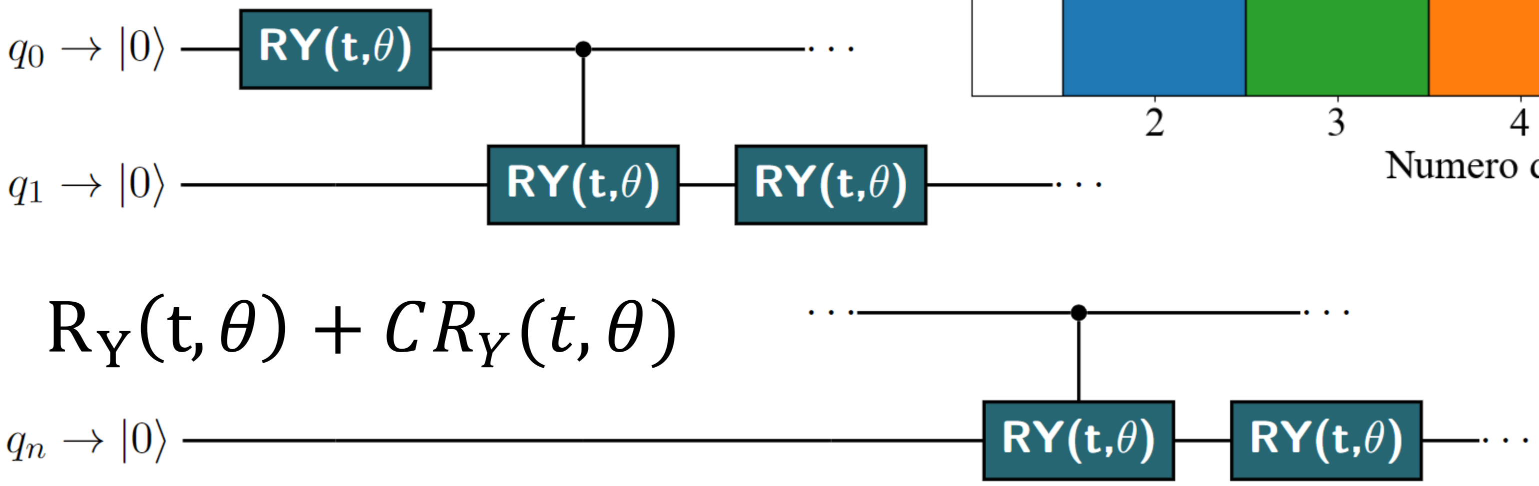


Andamento della Funzione di costo al variare di γ per i circuiti quantistici a 3 qubit.

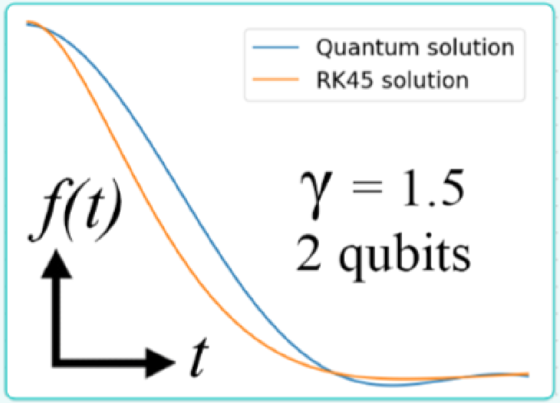
Con più gate dipendenti dal tempo, si riscontrano dei risultati migliori

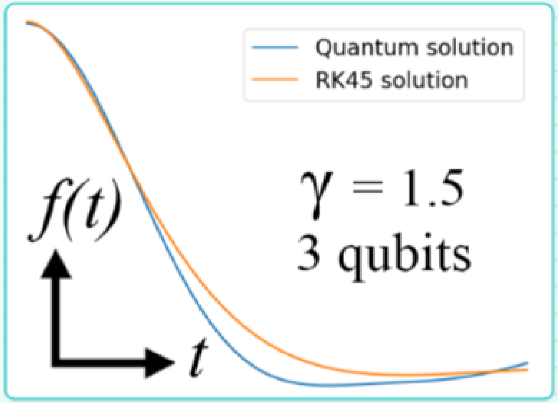
Andamento all'aumentare del numero di qubit

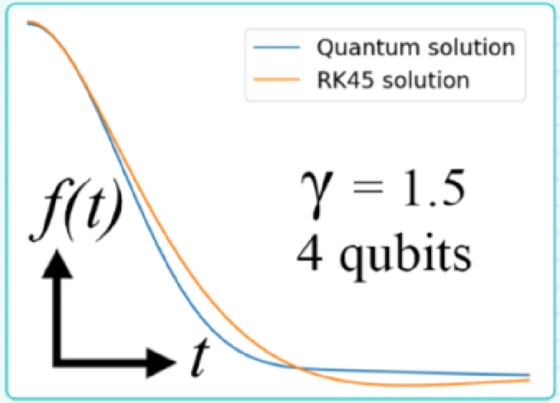


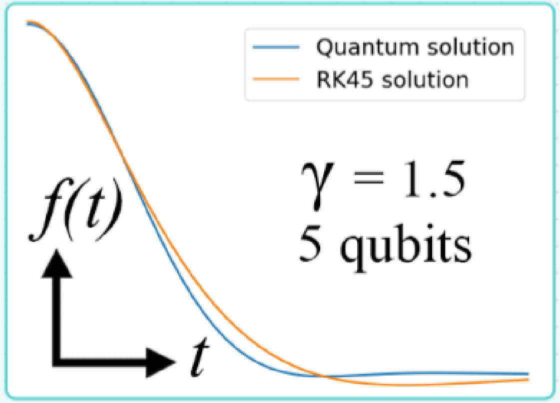


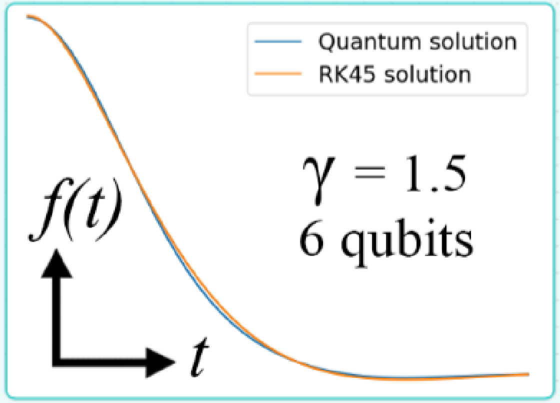
$$\mathrm{R_Y}(\mathrm{t}, \theta) + CR_Y(t, \theta)$$


Quantum solution
RK45 solution
f(t)
t
γ = 1.5
2 qubits


Quantum solution
RK45 solution
f(t)
t
γ = 1.5
3 qubits

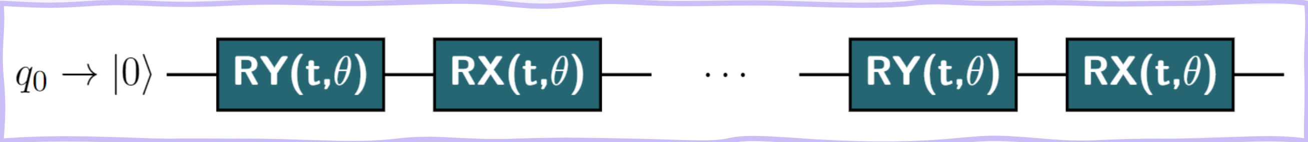

Quantum solution
RK45 solution
f(t)
t
γ = 1.5
4 qubits

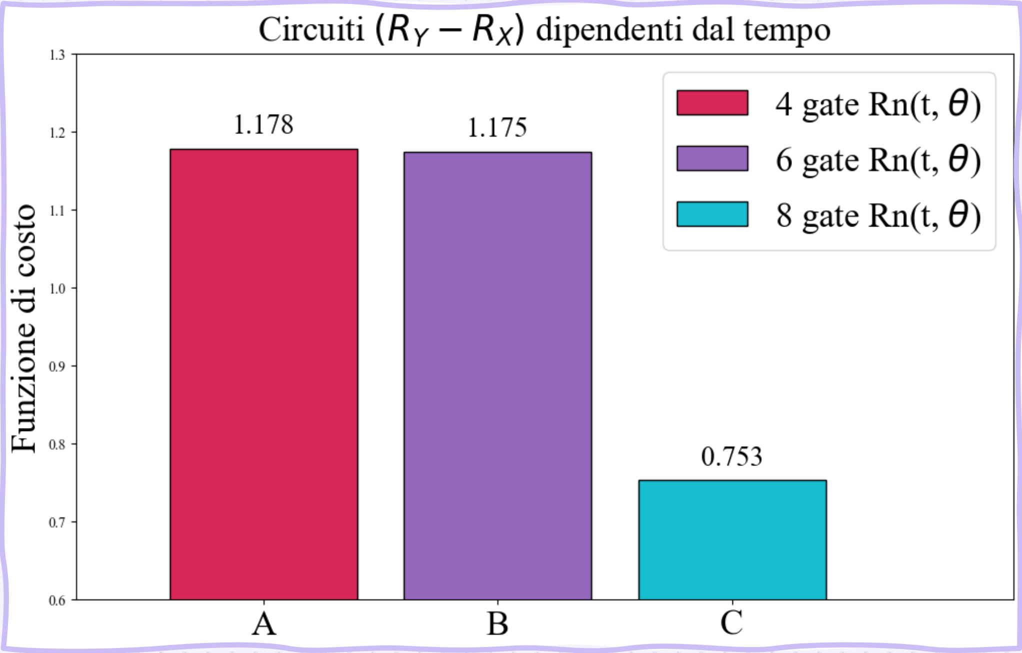

Quantum solution
RK45 solution
f(t)
t
γ = 1.5
5 qubits

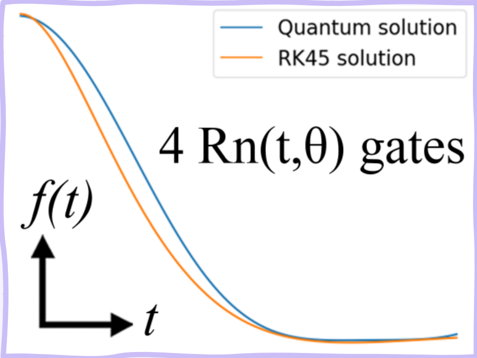

Quantum solution
RK45 solution
f(t)
t
γ = 1.5
6 qubits

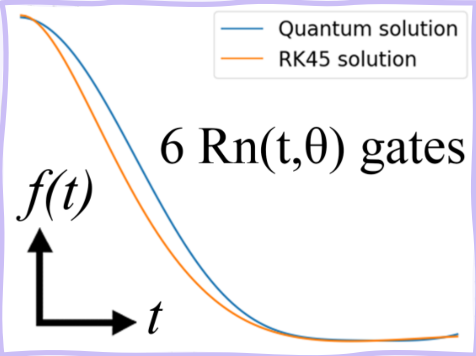
Variazione del numero di gate dipendenti dal tempo

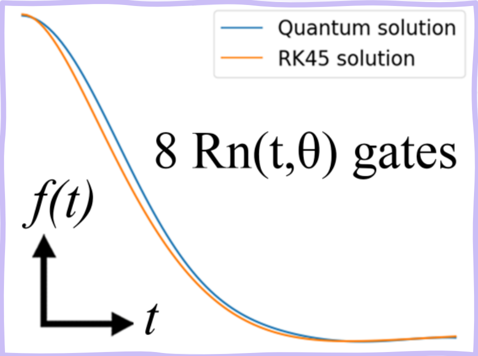
Sequenza di gate RY-RX su un **singolo qubit**







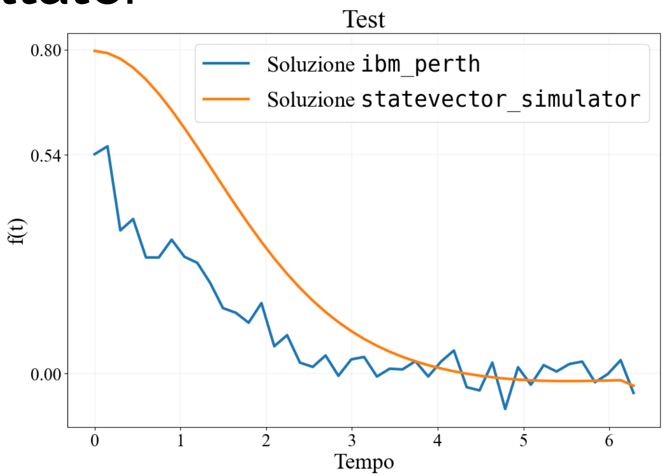




Test su backend quantistico reale

IBM Quantum Experience: piattaforma cloud sul quale è possible testare I dispositivi quantistici reali di IBM

Risultato:

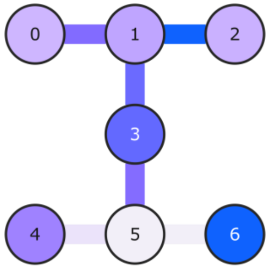


Caratteristiche backend utilizzato:

Backend: `ibm_perth (7 qubits)`

Gate nativi: `{CX, ID, RZ, SX, X}`

Connettività dei qubit:



Forte discrepanza tra simulazione e hardware reale

- Circuito non ottimizzato per lo specifico backend
- Errori dovuti al rumore

Considerazioni finali e prospettive future

La **Parameter-shift Rule** non si basa su incrementi finiti e fornisce un **risultato esatto della derivata**.

- Il metodo sviluppato **non rappresenta ancora un’alternativa valida** ai metodi classici;

- Sono **necessari ulteriori studi**, sia per lo sviluppo di un **algoritmo più accurato**, che per la **riduzione del rumore** nei backend sul quale implementare l’algoritmo.

Grazie per l’attenzione

Algoritmo di ottimizzazione

COBYLA (Constrained Optimization BY Linear Approximation)

- Metodo di ottimizzazione numerica per problemi vincolati;
- Approccio geometrico al problema, classificabile come un algoritmo del simplesso;
- **Contro:** Forte dipendenza dai parametri iniziali.