Sviluppo di un algoritmo variazionale per la dinamica dei sistemi quantistici

Francesco Paganelli

A.A. 2022/2023

Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di laurea triennale in Fisica

Relatore: Andrea Giachero

Correlatore: Stefano Barison

Introduzione

In questo elaborato:

- Implementazione di un algoritmo variazionale su computer quantistici.
- Studio della dinamica in condizioni ideali.
- Studio degli effetti del rumore sull'algoritmo.
- Applicazione di strategie per la mitigazione del rumore.

Qubit e circuiti quantistici

- Sovrapposizione di stati:

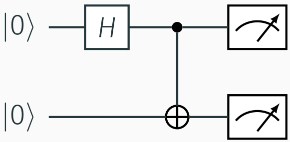
$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

- Quando si misura il qubit collassa:

$$0 \leftarrow P = |\alpha|^2$$

$$1 \leftarrow P = |\beta|^2$$

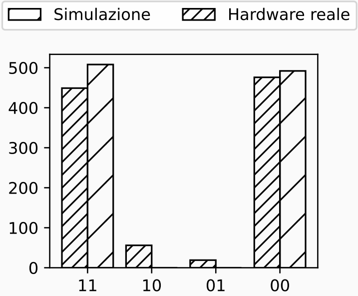
- Le operazioni sono compiute da gate, più gate formano un circuito:



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Noisy Intermediate-Scale Quantum devices (NISQ)

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$



Grande possibilità di errore:
quantum noise

$\Downarrow$

- Lunghezza dei circuiti limitata
- Pochi qubit (< 1000)

$\Downarrow$

No quantum advantage

Modelli di errore

Bit flip error. Scambio ampiezze tra $|0\rangle$ e $|1\rangle$ con probabilità p:

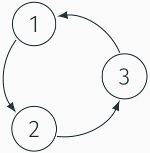
$$|0\rangle \mapsto |1\rangle$$
$$|1\rangle \mapsto |0\rangle$$

Amplitude damping error. Perdita di energia dei qubit:

$$|0\rangle \mapsto \text{ampiezza aumenta}$$
$$|1\rangle \mapsto \text{ampiezza dinimuisce}$$

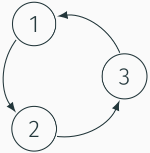
Variational Quantum Algorithms

Definizione di
una cost funtion



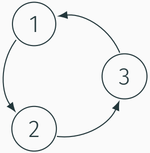
- Dipende da certi parametri.
- Contiene la soluzione del problema.
- Si calcola tramite QC.

Variational Quantum Algorithms



Definizione
di un ansatz

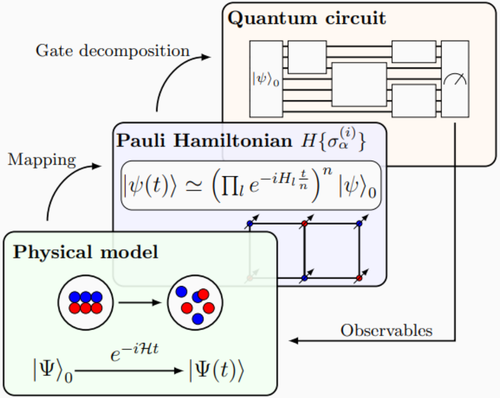
- Dipende da certi parametri.
- Approssima lo stato reale.
- Si prepara tramite QC.



Ottimizzazione semiclassica.

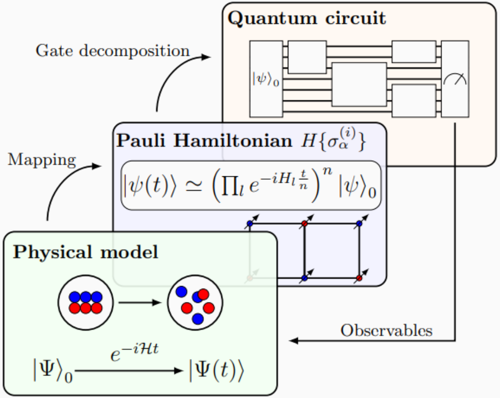
- Si cerca il minimo della cost function.
- Diversi tipi di ottimizzatori.
- Si ottimizza tramite un CC.

Universal Quantum Simulators



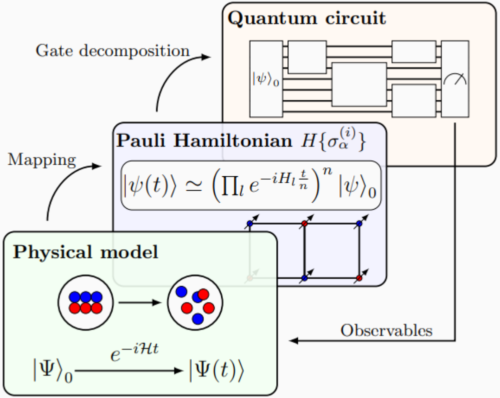
1. Hamiltoniana come matrici di Pauli e somma di Hamiltonane locali.

Universal Quantum Simulators



1. Hamiltoniana come matrici di Pauli e somma di Hamiltonane locali.
2. Decomposizione di Suzuki-Trotter.

$$\left(\prod_l e^{-iH_l t/n}\right)^n$$

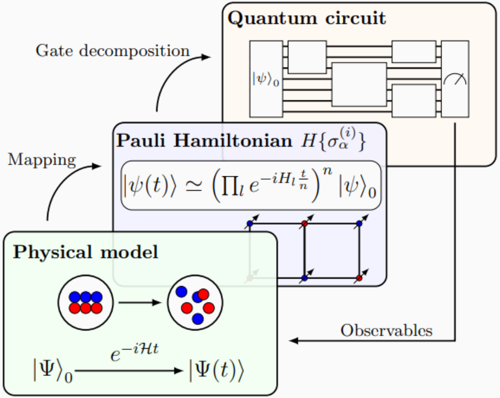


1. Hamiltoniana come matrici di Pauli e somma di Hamiltonane locali.
2. Decomposizione di Suzuki-Trotter.

$$\left(\prod_l e^{-iH_l t/n}\right)^n$$

3. Traduzione in circuito.

Universal Quantum Simulators



1. Hamiltoniana come matrici di Pauli e somma di Hamiltonane locali.
2. Decomposizione di Suzuki-Trotter.

$$\left(\prod_l e^{-iH_l t/n}\right)^n$$

3. Traduzione in circuito.
4. Evoluzione dello stato.

projected-Variational Quantum Dynamics (pVQD)

1. Ansatz che approssimi lo stato iniziale $|\psi\rangle = C(\theta)\,|0\rangle$

projected-Variational Quantum Dynamics (pVQD)

1. Ansatz che approssimi lo stato iniziale $|\psi\rangle = C(\theta)\,|0\rangle$
2. Evoluzione temporale $e^{-iH\delta t}C(\theta)\,|0\rangle$

projected-Variational Quantum Dynamics (pVQD)

1. Ansatz che approssimi lo stato iniziale $|\psi\rangle = C(\theta)\,|0\rangle$
2. Evoluzione temporale $e^{-iH\delta t}C(\theta)\,|0\rangle$
3. Calcolo della cost function

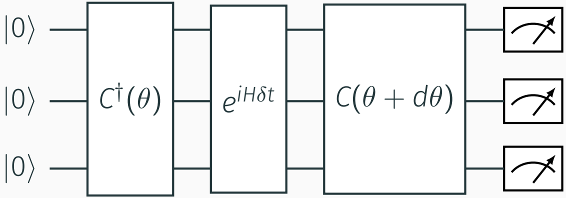
$$L(d\theta) = 1 - |\,\langle 0|C^{\dagger}(\theta)e^{iH\delta t}C(\theta + d\theta)|0\rangle\,|^2$$

projected-Variational Quantum Dynamics (pVQD)

1. Ansatz che approssimi lo stato iniziale $|\psi\rangle = C(\theta)\,|0\rangle$
2. Evoluzione temporale $e^{-iH\delta t}C(\theta)\,|0\rangle$
3. Calcolo della cost function

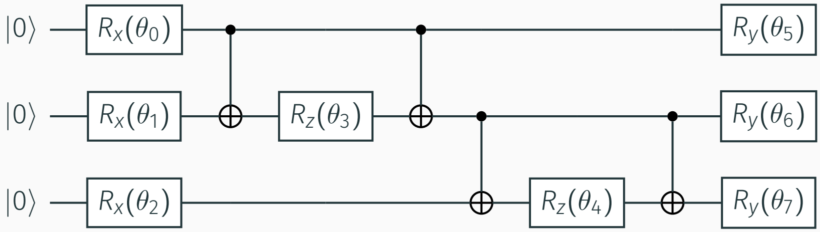
$$L(d\theta) = 1 - |\,\langle 0|C^{\dagger}(\theta)e^{iH\delta t}C(\theta + d\theta)|0\rangle\,|^2$$

4. Ottimizzazione dei parametri

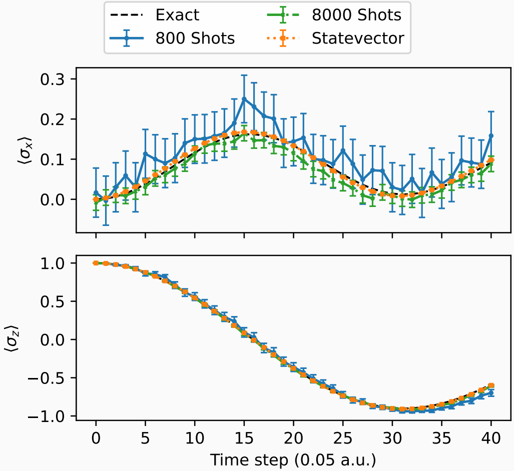


Transverse Field Ising Model

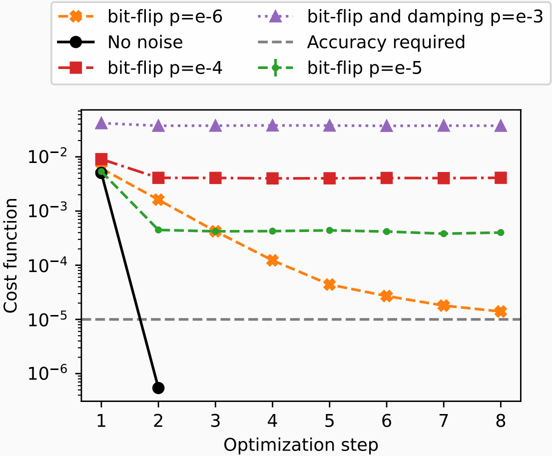
- Catena di spin.
- Interazione tra primi vicini.
- Spin parallelo a z.
- Campo magnetico lungo x.



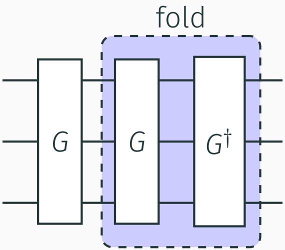
Risultati esatti

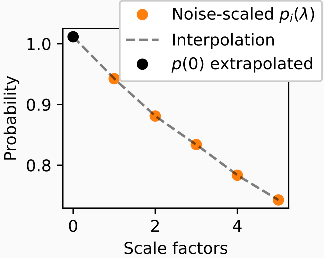


Risultati con rumore



Mitigazione degli errori: ZNE

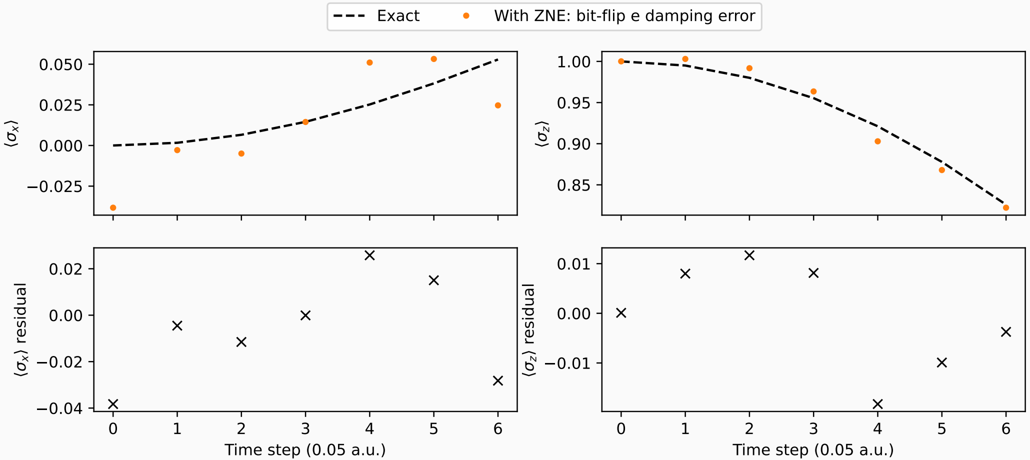




Riscalare il rumore.

Estrapolare il limite.

Risultati con ZNE



Conclusioni e prospettive future: esecuzione su hardware

- Considerazioni sui risultati:
  - Successo della simulazione ideale.
  - Circuiti più corti rispetto a trotterizzation.
  - ZNE mitiga con semplici modelli di rumore.
- Esecuzione su hardware reale:
  - Mitigazione: Probabilistic Error Cancellation, Readout Error Mitigation.
  - Diversi metodi per il calcolo della Cost Function L.
  - Ansatz e circuiti ad hoc per l'hardware.

Grazie per l’attenzione!

Trotterizzation

1. $H = H_l + H_l + H_l + \ldots$
2. $U = e^{-i\sum_l H_l t} \Rightarrow \left(\prod_l e^{-iH_l t/n}\right)^n$
3. $H_l = J\sum_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta \Rightarrow U_l = R_{\alpha\beta}(Jt/n)$

Example

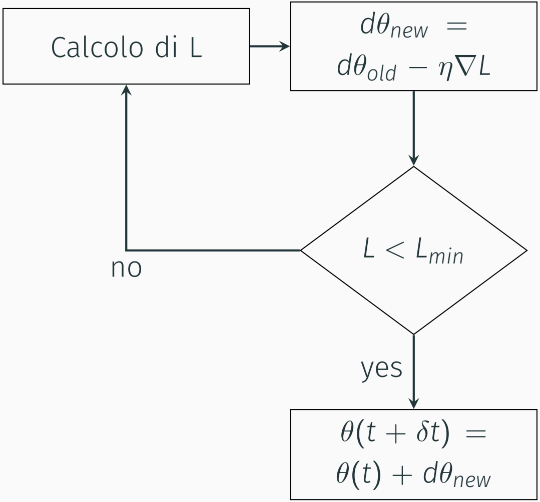
Hamiltoniana di Ising:

$$H = J\sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + h\sum_{i=0}^{N} \sigma_i^x$$

Trotterizzation:

$$U_{i,j} = e^{-iJ\sigma_i^z\sigma_j^z t/n} e^{-ih\sigma_i^x t/n} e^{-ih\sigma_j^x t/n} = R_{zz}^{i,j}(Jt/n) R_x^i(ht/n) R_x^j(ht/n)$$

Ottimizzazione dei parametri



Modelli di errore

Phase flip error. Scambio ampiezze tra $|+\rangle$ e $|-\rangle$ con probabilità p:

$$|+\rangle \mapsto |-\rangle$$
$$|-\rangle \mapsto |+\rangle$$

Errore di depolarizzazione. Perdita di tutte le informazioni:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \mapsto \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Phase damping error. Perdita di informazione senza perdita di energia.

Errori di misura. Misura di uno stato diverso da quello preparato.

$$A_{i,j} = P(i|j)$$

IBM Quantum Hardware: superconducting quantum computer

I qubit sono di tipo transmon:

- Quantum bit artificiali (più di due livelli)
- Isole: elettrodi superconduttori
- Josephson junction: si comporta come induttanza
- Spettro energetico anarmonico