数据科学与大数据技术的数学基础

第十二讲

计算机学院
余皓然

2024/5/30

课程内容

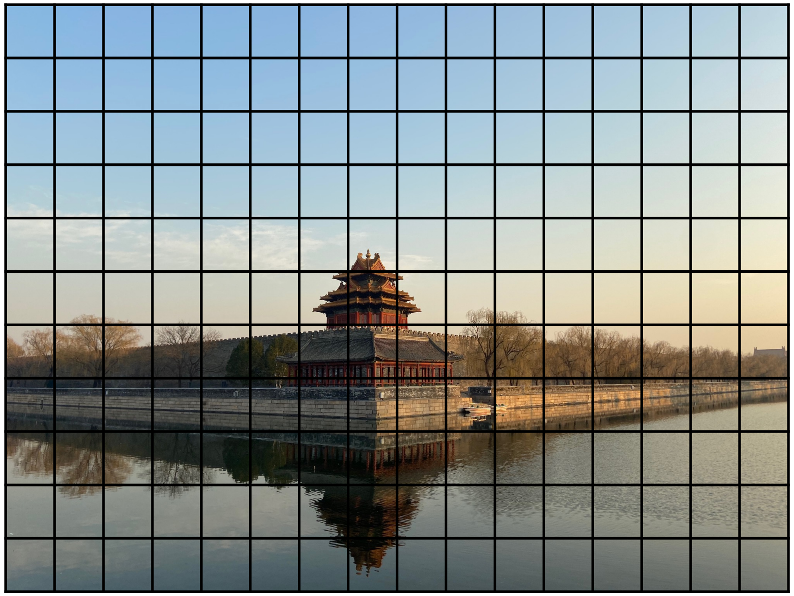
Part1 随机化方法
一致性哈希 布隆过滤器 CM Sketch方法 最小哈希 欧氏距离下的相似搜索 Jaccard相似度下的相似搜索
Part2 谱分析方法
主成分分析 奇异值分解 谱图论
Part3 最优化方法
压缩感知

压缩感知

数据的稀疏性

压缩感知

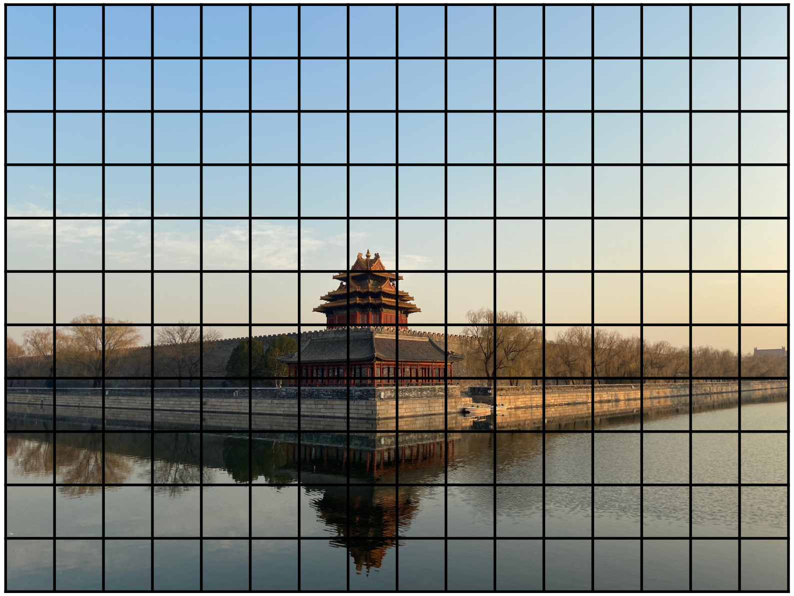
压缩感知



（想象上图有上千万个方块）

相机在拍照时，是否一定要感知并存储每一个方块的信息?

压缩感知



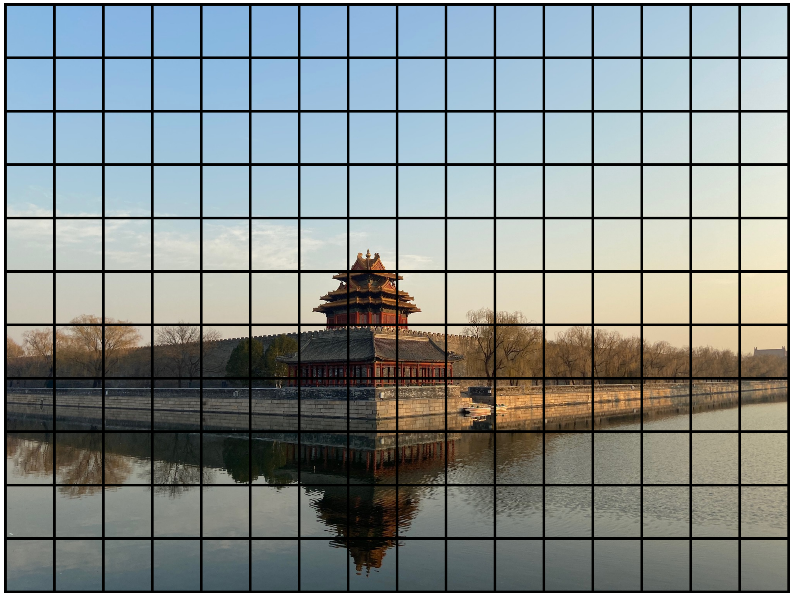
（想象上图有上千万个方块）

相机在拍照时，是否一定要感知并存储每一个方块的信息?

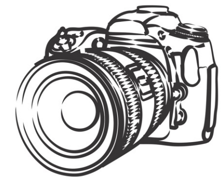
可以仅感知并存储部分信息，之后还原出近似图像

优点：节省相机的电量及内存

压缩感知



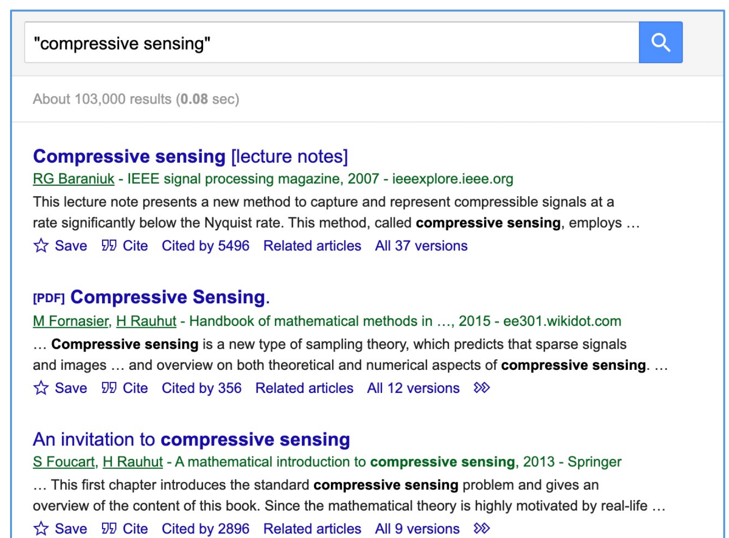
（想象上图有上千万个方块）



相机在拍照时，是否一定要感知并存储每一个方块的信息?

可以仅感知并存储部分信息，之后还原出近似图像

优点：节省相机的电量及内存



"compressive sensing"

About 103,000 results (**0.08** sec)

Compressive sensing [lecture notes]
RG Baraniuk - IEEE signal processing magazine, 2007 - ieeexplore.ieee.org
This lecture note presents a new method to capture and represent compressible signals at a rate significantly below the Nyquist rate. This method, called **compressive sensing**, employs …
Save Cite Cited by 5496 Related articles All 37 versions

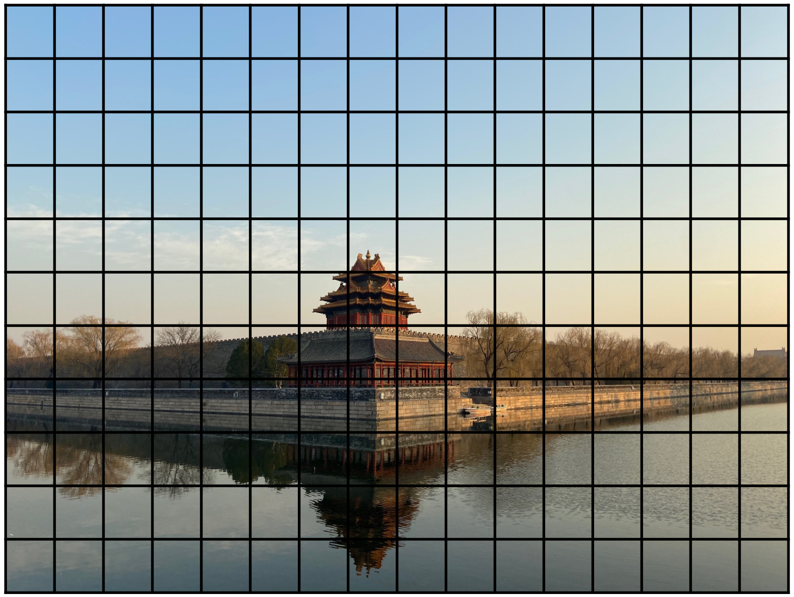
[PDF] **Compressive Sensing**.
M Fornasier, H Rauhut - Handbook of mathematical methods in …, 2015 - ee301.wikidot.com
… **Compressive sensing** is a new type of sampling theory, which predicts that sparse signals and images … and overview on both theoretical and numerical aspects of **compressive sensing**. …
Save Cite Cited by 356 Related articles All 12 versions

An invitation to **compressive sensing**
S Foucart, H Rauhut - A mathematical introduction to **compressive sensing**, 2013 - Springer
… This first chapter introduces the standard **compressive sensing** problem and gives an overview of the content of this book. Since the mathematical theory is highly motivated by real-life …
Save Cite Cited by 2896 Related articles All 9 versions

例子：单像素相机

主要技术：压缩感知（compressive sensing）

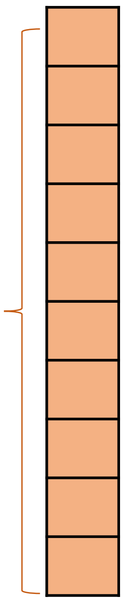
稀疏性



（想象上图有上千万个方块）

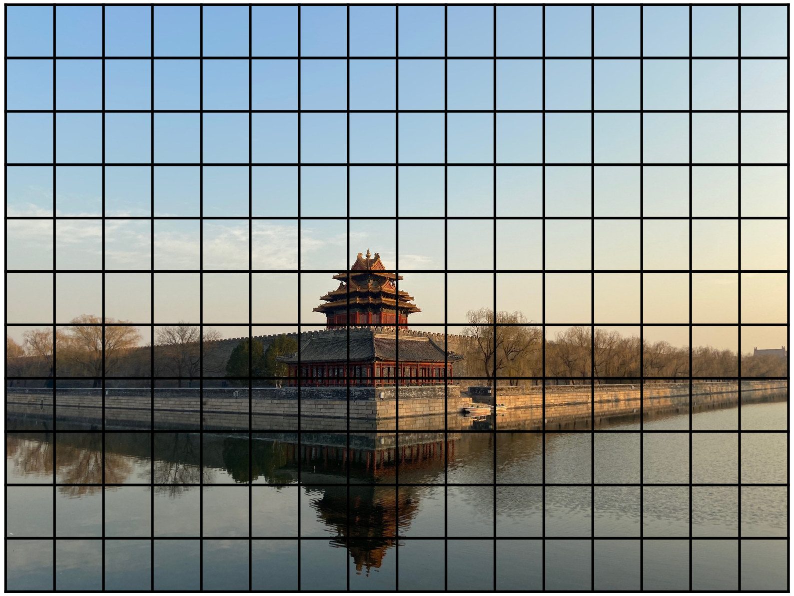
假设原画面可以用向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{10^7}$表示

10^7个元素



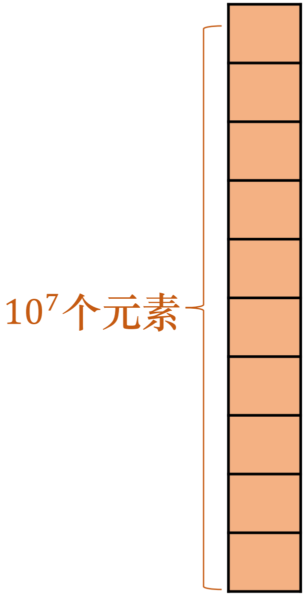
$10^7 \times 1$向量 $\boldsymbol{x}_i$

稀疏性



（想象上图有上千万个方块）

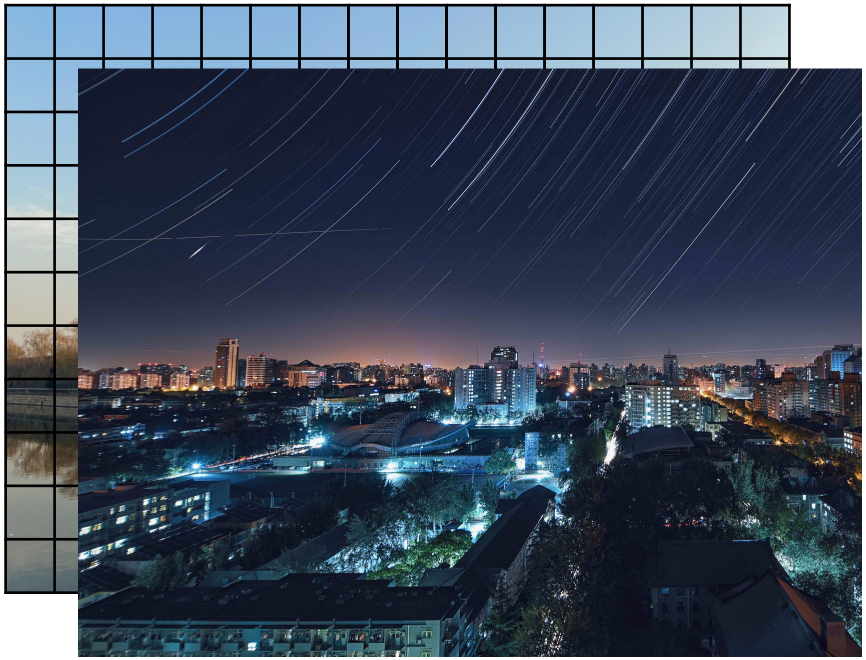
假设原画面可以用向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{10^7}$表示

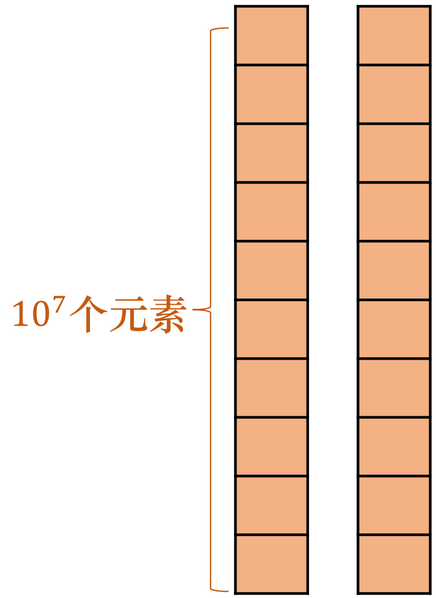


$10^7 \times 1$向量 $\boldsymbol{x}_i$

世界上任何一张千万像素的画面都可以用一个$10^7 \times 1$的向量表示

稀疏性

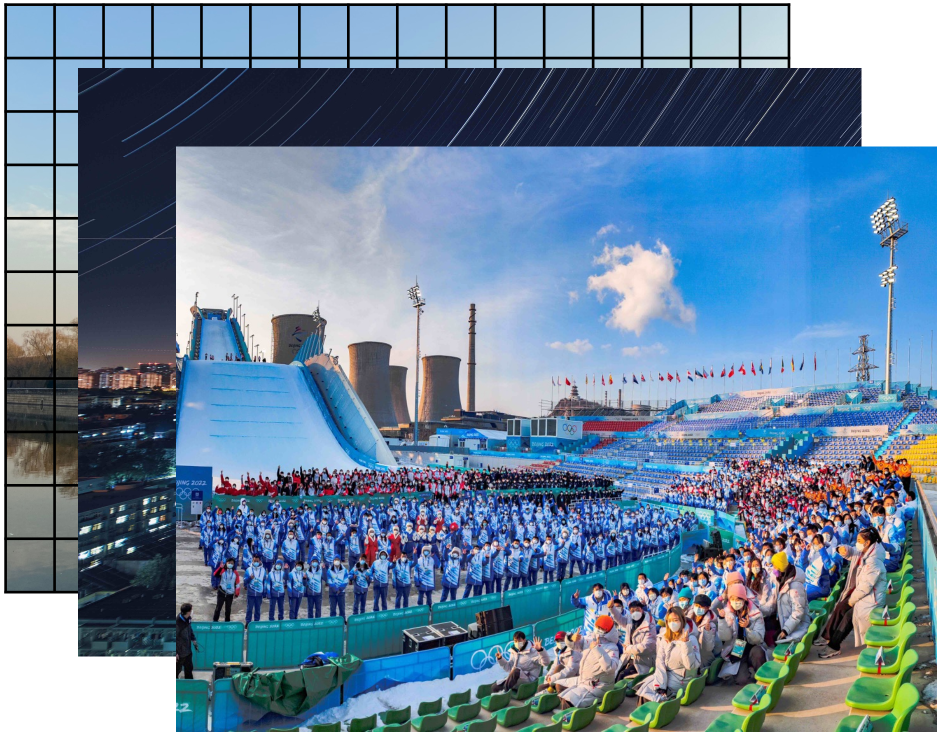


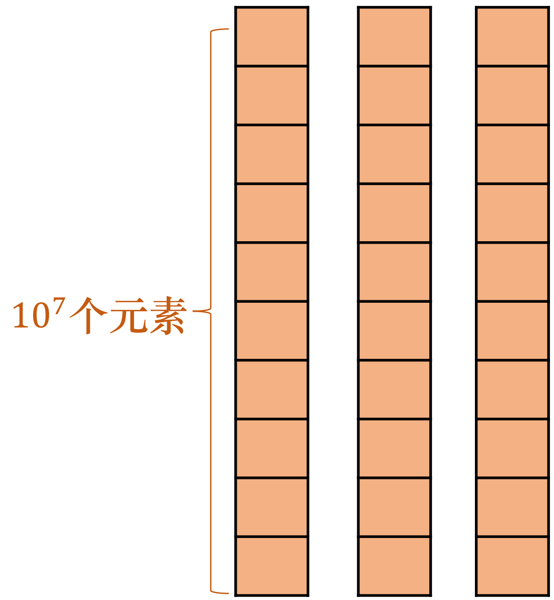


元素值不同

世界上任何一张千万像素的画面都可以用一个$10^7\times 1$的向量表示

稀疏性



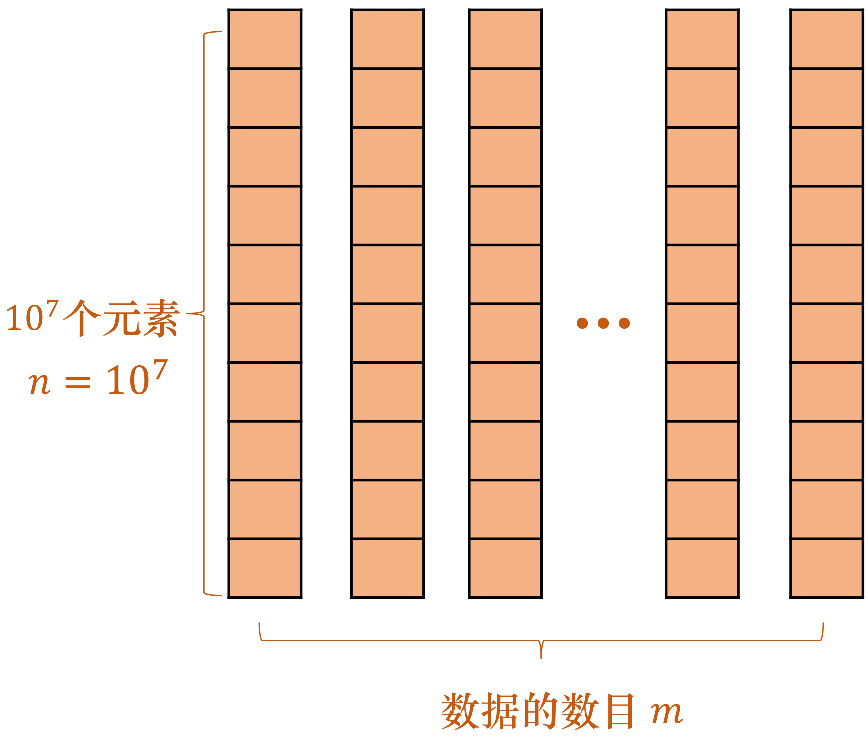


元素值不同

世界上任何一张千万像素的画面都可以用一个$10^7\times1$的向量表示

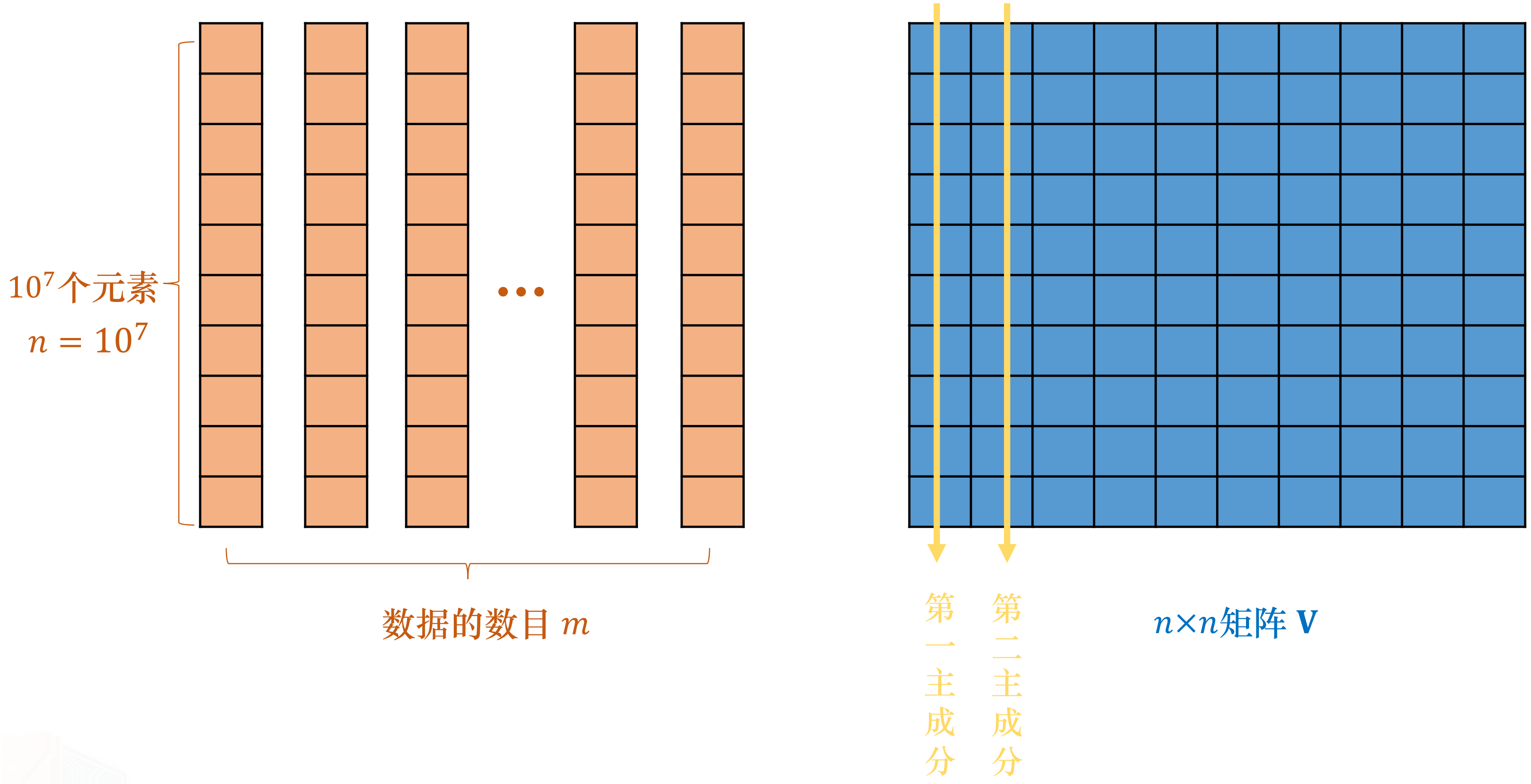
稀疏性

如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、找全n个主成分：



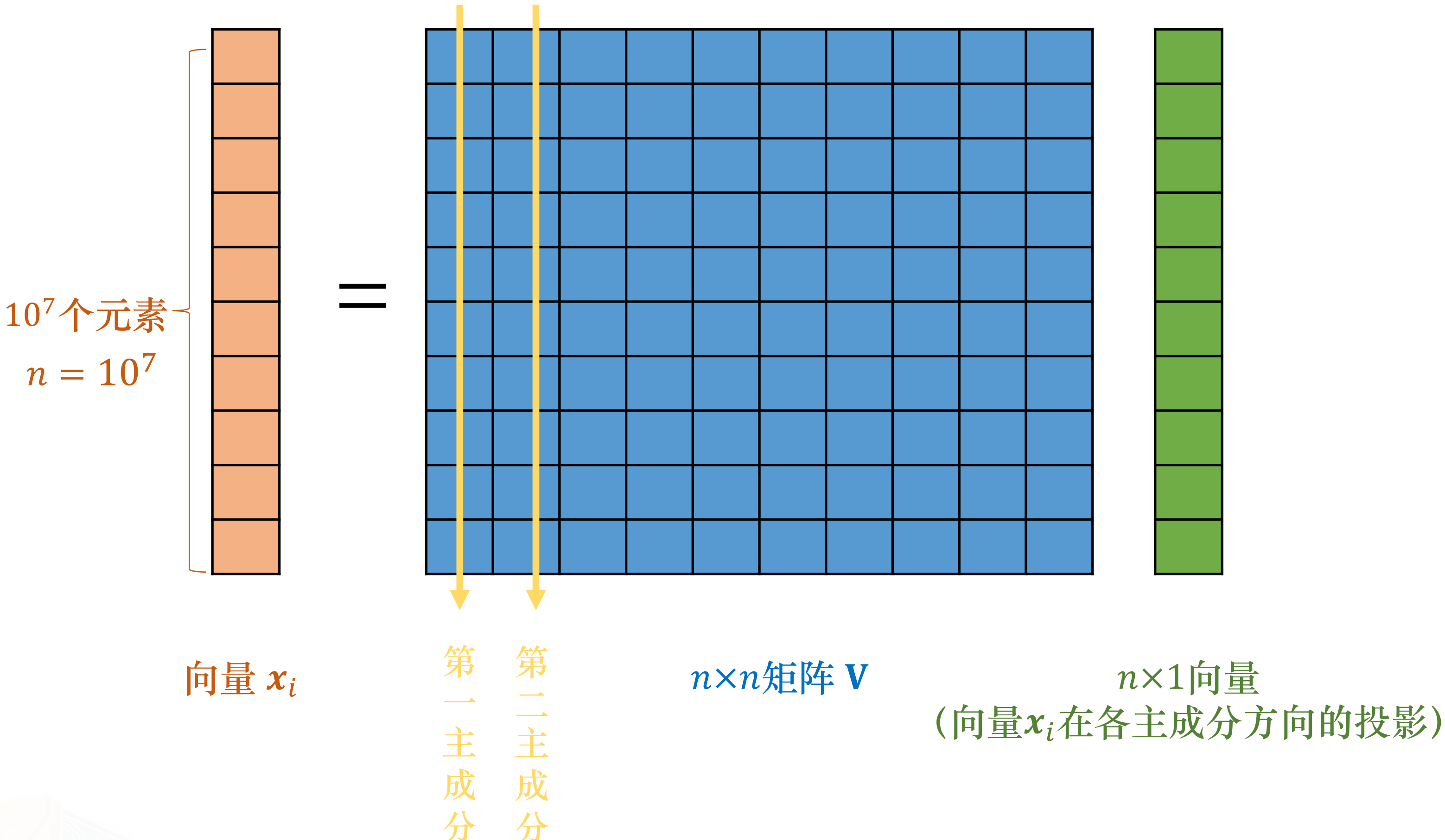
稀疏性

如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、找全n个主成分：



稀疏性

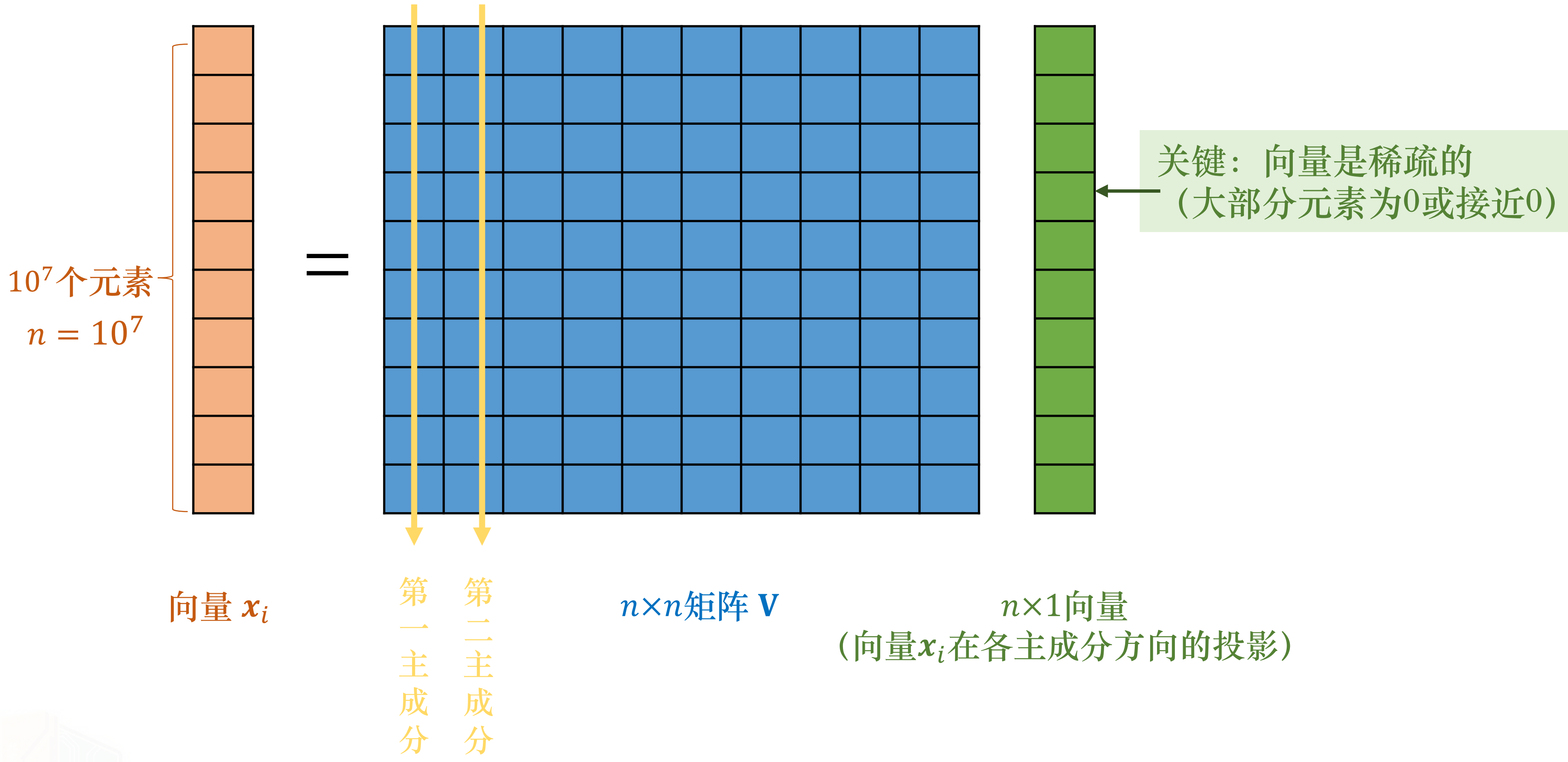
如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、找全n个主成分：



注意上式是等式

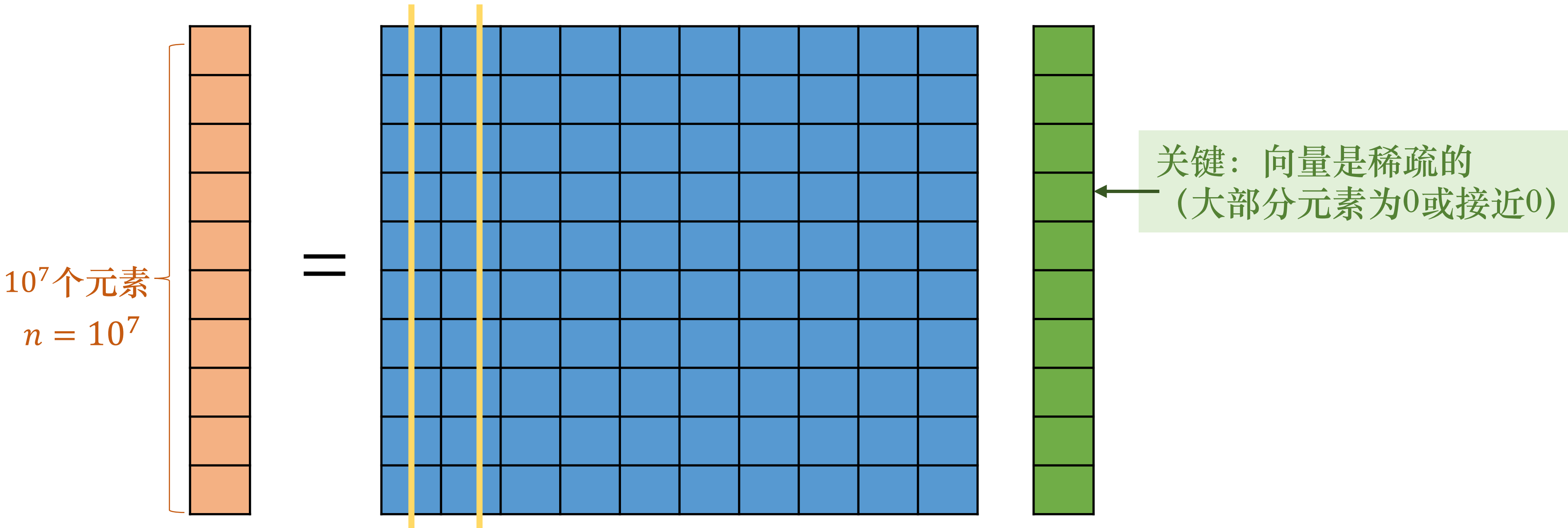
稀疏性

如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、找全n个主成分：



稀疏性

如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、找全n个主成分：



$n \times n$矩阵 $\mathbf{V}$

$n \times 1$向量

（向量$\boldsymbol{x}_i$在各主成分方向的投影）

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \boldsymbol{v}_j$$

稀疏性

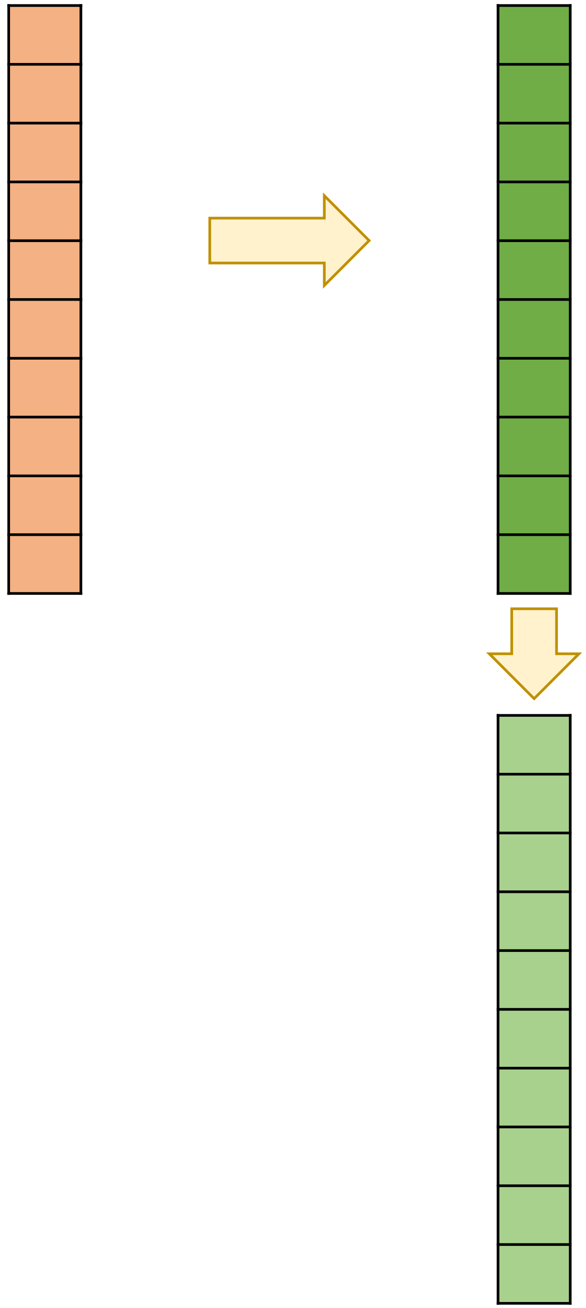
利用稀疏性进行数据压缩：

（非压缩感知）

$n\times1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

$n\times1$系数向量

注意：不是向量 $\boldsymbol{x}_i$有稀疏性



向量是稀疏的（大部分元素为0或接近0）

将接近0的元素置0，便于存储

稀疏性

利用稀疏性进行数据压缩：

（非压缩感知）

$n\times1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

$n\times1$系数向量

向量是稀疏的（大部分元素为0或接近0）

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\boldsymbol{v}_j$$

将接近0的元素置0，便于存储

得到 $\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a_{ij}}\,\boldsymbol{v}_j$

需读取图片时，从存储的向量还原图片，得到近似图片

可参考用SVD做图片压缩的实验

$n\times1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

$n\times1$系数向量

稀疏性

利用稀疏性进行数据压缩：

（非压缩感知）

如何找到n个主成分

向量是稀疏的（大部分元素为0或接近0）

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\boldsymbol{v}_j$$

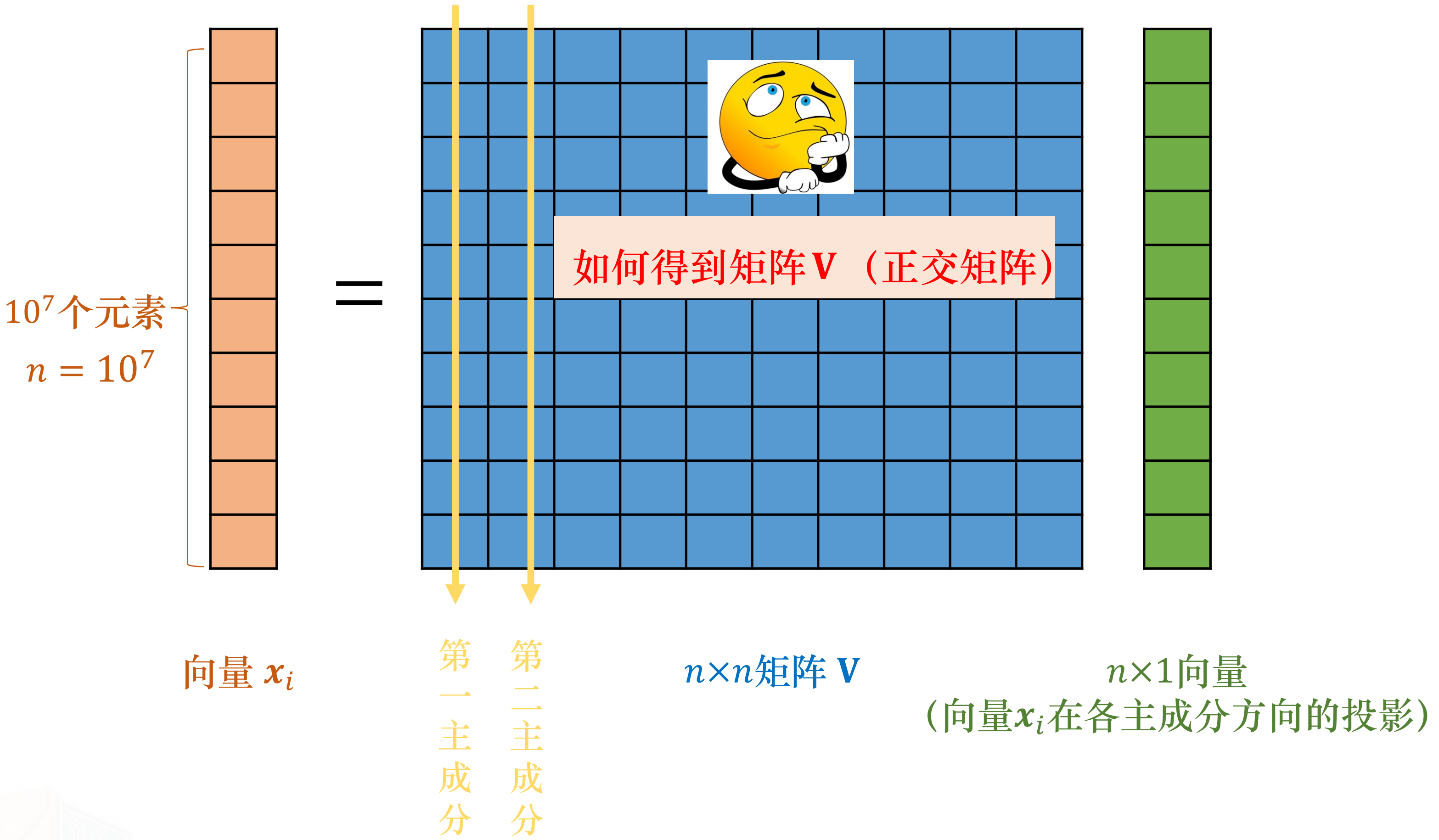
将接近0的元素置0，便于存储

得到 $\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a_{ij}}\,\boldsymbol{v}_j$

需读取图片时，从存储的向量还原图片，得到近似图片

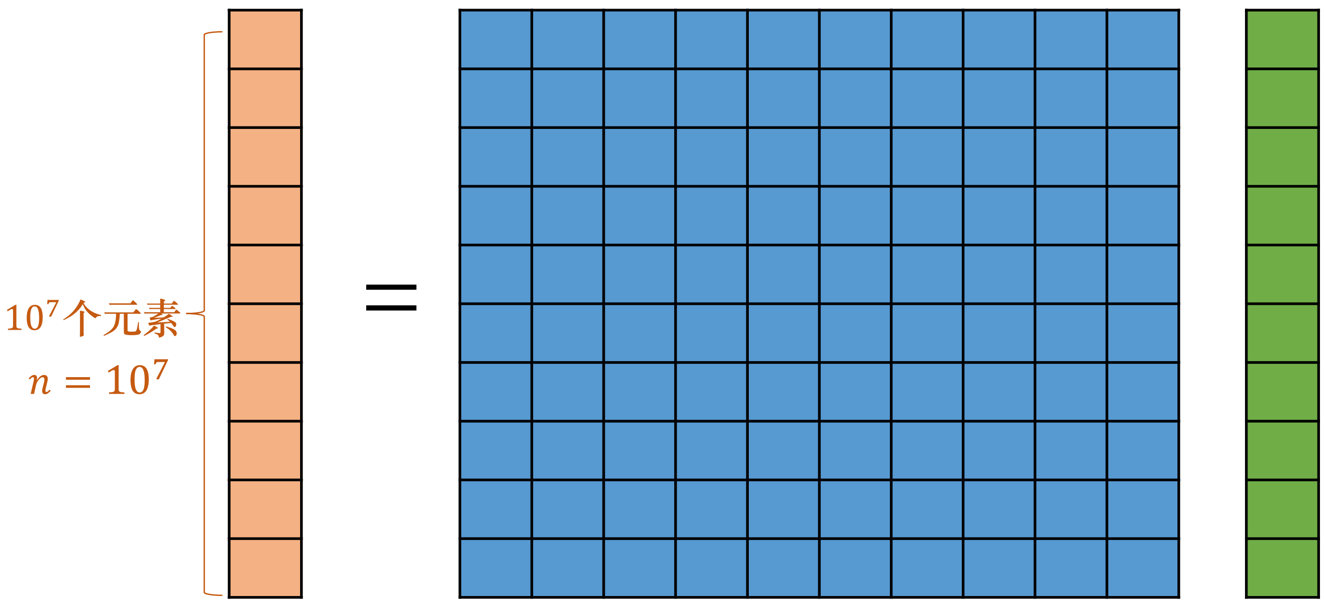
稀疏性

如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、找全n个主成分：



稀疏性

如果把世界上所有可能出现的千万像素画面汇集起来，做主成分分析、**找全n个主成分：**



向量 $\boldsymbol{x}_i$

$n\times n$矩阵 $\mathbf{V}$

$n\times 1$向量

（向量$\boldsymbol{x}_i$在各主成分方向的投影）

可以由傅立叶变换得到正交矩阵V（前面介绍主成分分析仅为帮助理解）

* 傅立叶变换可在《数字图像处理》等课程中学习

稀疏性

$n=8$时离散傅立叶变换示例

$$y = F_8 x = \begin{bmatrix} \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 \\ \omega_8^0 & \omega_8^1 & \omega_8^2 & \omega_8^3 & \omega_8^4 & \omega_8^5 & \omega_8^6 & \omega_8^7 \\ \omega_8^0 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & \omega_8^8 & \omega_8^{10} & \omega_8^{12} & \omega_8^{14} \\ \omega_8^0 & \omega_8^3 & \omega_8^6 & \omega_8^9 & \omega_8^{12} & \omega_8^{15} & \omega_8^{18} & \omega_8^{21} \\ \omega_8^0 & \omega_8^4 & \omega_8^8 & \omega_8^{12} & \omega_8^{16} & \omega_8^{20} & \omega_8^{24} & \omega_8^{28} \\ \omega_8^0 & \omega_8^5 & \omega_8^{10} & \omega_8^{15} & \omega_8^{20} & \omega_8^{25} & \omega_8^{30} & \omega_8^{35} \\ \omega_8^0 & \omega_8^6 & \omega_8^{12} & \omega_8^{18} & \omega_8^{24} & \omega_8^{30} & \omega_8^{36} & \omega_8^{42} \\ \omega_8^0 & \omega_8^7 & \omega_8^{14} & \omega_8^{21} & \omega_8^{28} & \omega_8^{35} & \omega_8^{42} & \omega_8^{49} \end{bmatrix} x$$

$$\omega_8 = \cos(2\pi/8) - i \cdot \sin(2\pi/8)$$

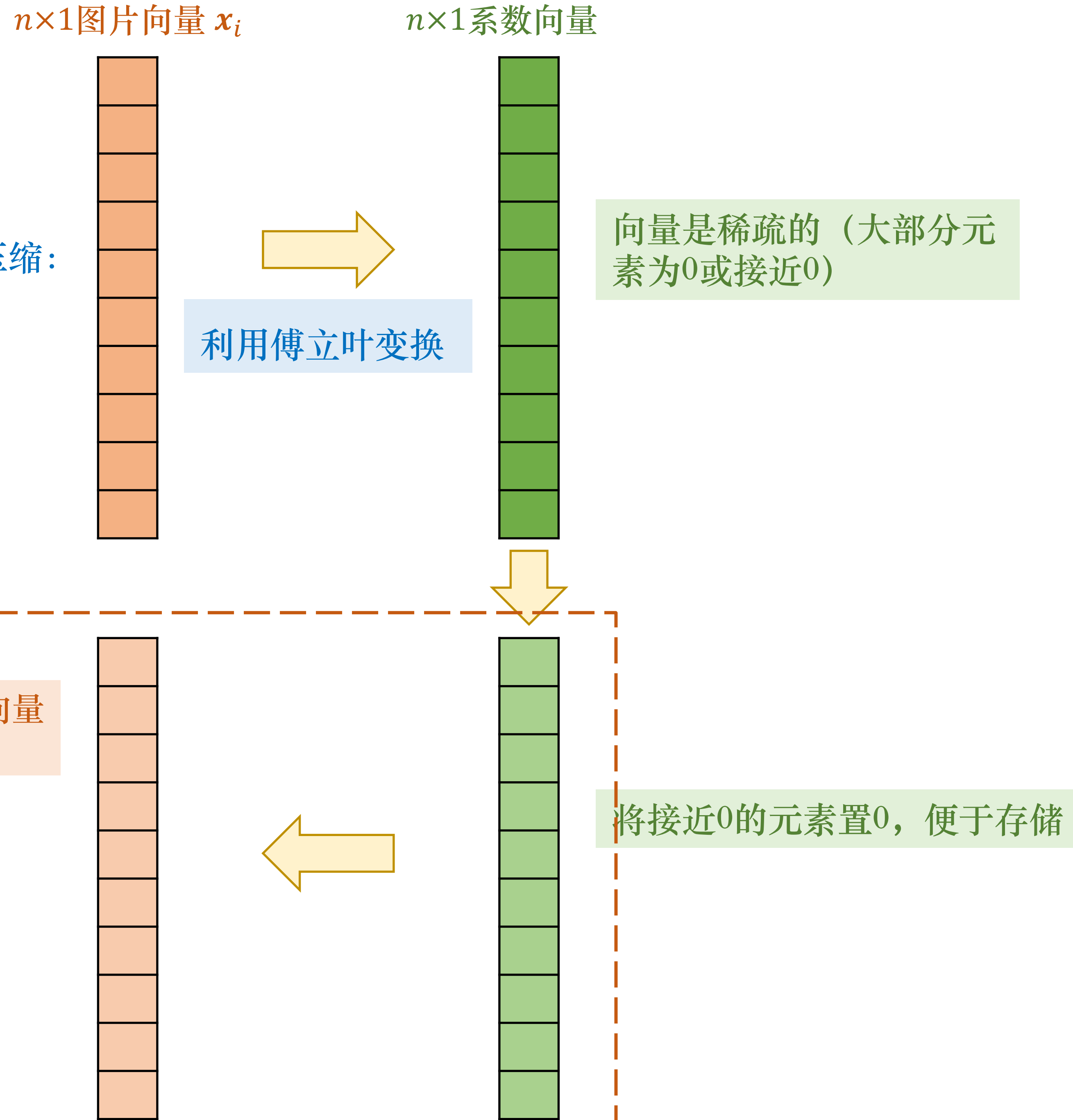
$$\boxed{F_n^H F_n = n I_n}$$

矩阵元素为复数，定义正交的时候要考虑共轭转置而不仅仅是转置

例子取自Charles Van Loan <Cornell CS5220: The FFT via Matrix Factorizations>

稀疏性

利用稀疏性进行数据压缩:



需读取图片时，从存储的向量还原图片，得到近似图片

稀疏性

```
A=imread('CSexample','jpeg');
Abw=rgb2gray(A);
imwrite(uint8(Abw),'originalgray.jpg');
```

将原图转化为灰度图（每个像素0～255）

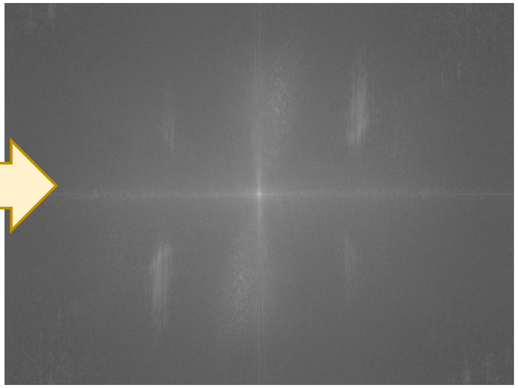
Abw是3024×4032矩阵（可以看作12192768维向量）

稀疏性

```
A=imread('CSexample','jpeg');
Abw=rgb2gray(A);

At=fft2(Abw);

F=log(abs(fftshift(At))+1);
FFF=mat2gray(F);
maxFFF = max(FFF(:));
minFFF = min(FFF(:));
FFFM   = (FFF - minFFF) / (maxFFF - minFFF)*255;
imwrite(uint8(FFFM),'Ftransform.jpg');
```



对3024×4032（复数）矩阵At作可视化
（稀疏：大部分接近黑色）

代码修改自Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz
<Data Driven Science & Engineering - Machine Learning, Dynamical Systems, and Control>

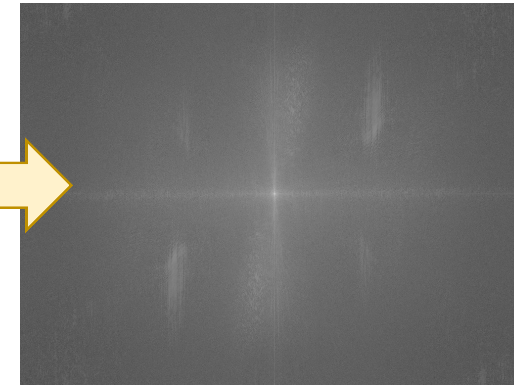
稀疏性

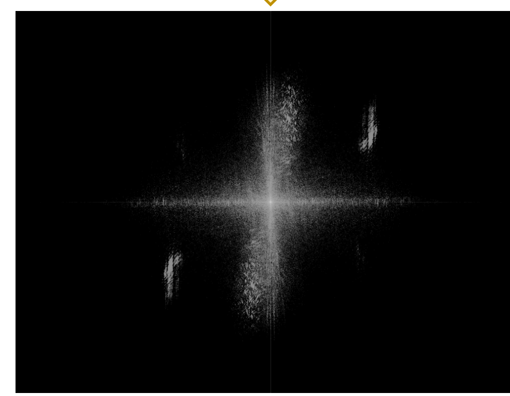
```
A=imread('CSexample','jpeg');
Abw=rgb2gray(A);

At=fft2(Abw);

Bt = sort(abs(At(:)));
keep = 0.05;
thresh = Bt(floor((1-keep)*length(Bt)));
ind = abs(At)>thresh;
Atlow = At.*ind;

Flow=log(abs(fftshift(Atlow))+1);
FFFlow=mat2gray(Flow);
maxFFFlow = max(FFFlow(:));
minFFFlow = min(FFFlow(:));
FFFMlow   = (FFFlow - minFFFlow) / (maxFFFlow -
minFFFlow)*255;
imwrite(uint8(FFFMlow),'Ftransformcompressed.jpg');
```





对矩阵At将较小的95%的元素置0（黑色），得到矩阵Atlow并可视化

代码修改自Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz
<Data Driven Science & Engineering - Machine Learning, Dynamical Systems, and Control>

稀疏性

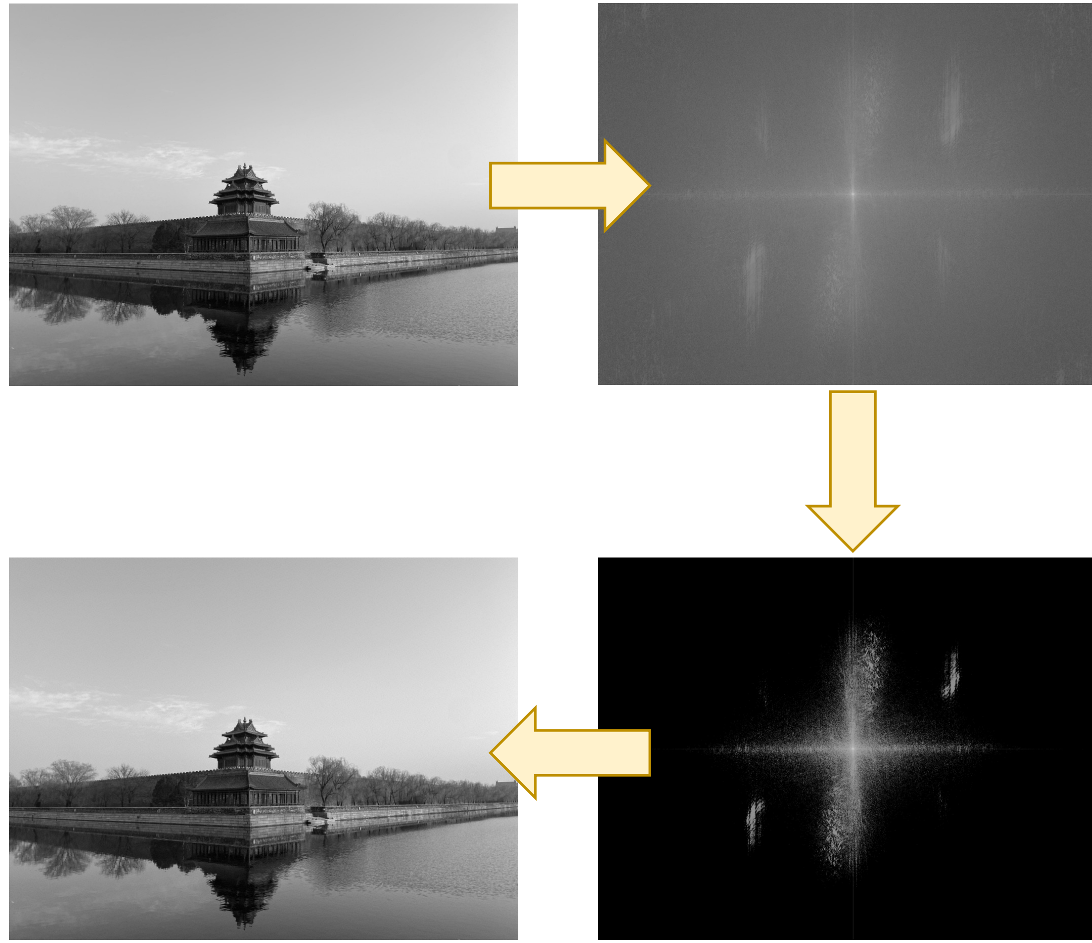
```
A=imread('CSexample','jpeg');
Abw=rgb2gray(A);

At=fft2(Abw);

Bt = sort(abs(At(:)));
keep = 0.05;
thresh = Bt(floor((1-keep)*length(Bt)));
ind = abs(At)>thresh;
Atlow = At.*ind;



Alow=uint8(ifft2(Atlow));
imwrite(uint8(Alow),'compressedgray.jpg');
```



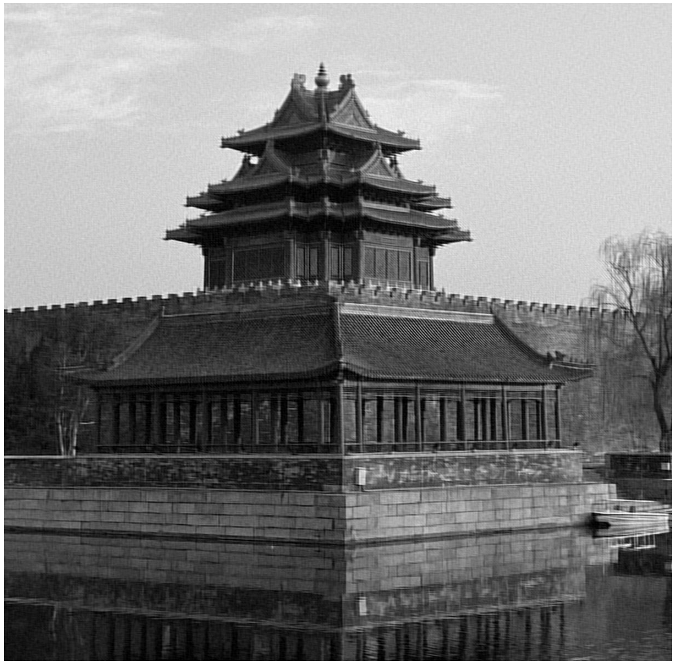
从矩阵Atlow近似还原图片

代码修改自Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz
<Data Driven Science & Engineering - Machine Learning, Dynamical Systems, and Control>

稀疏性


对比原图和近似图

稀疏性

放大对比原图和近似图

稀疏性

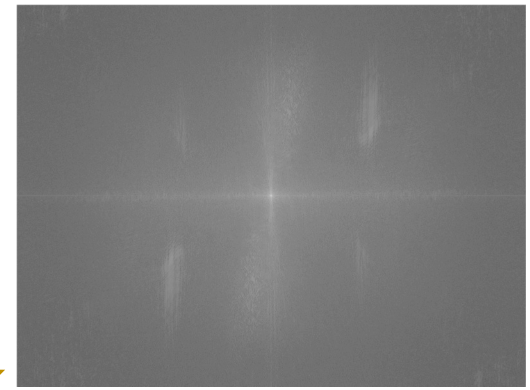
利用稀疏性进行数据压缩：

$n\times 1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

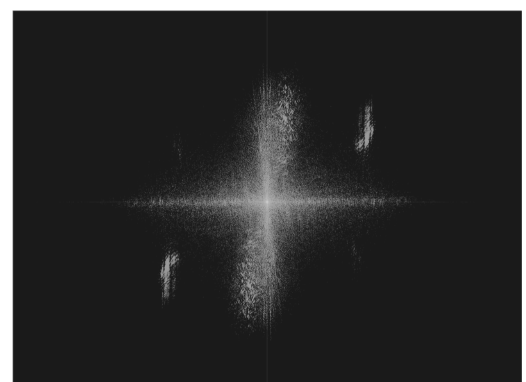
利用傅立叶变换

$n\times 1$系数向量

向量是稀疏的（大部分元素为0或接近0）



将较小元素置0，便于存储



稀疏性

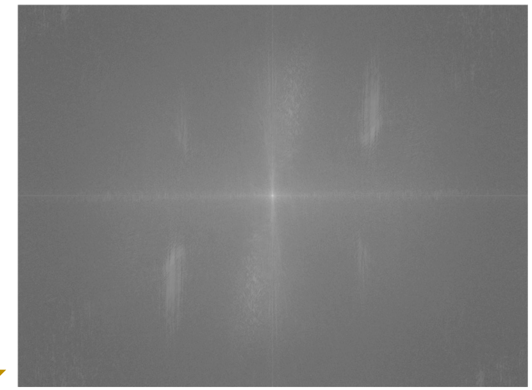
利用稀疏性进行数据压缩：

$n\times1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

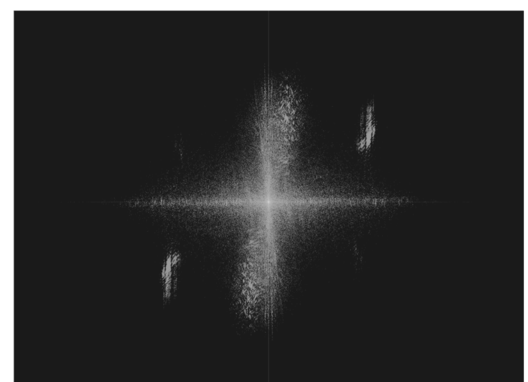
利用傅立叶变换

$n\times1$系数向量

向量是稀疏的（大部分元素为0或接近0）



将较小元素置0，便于存储



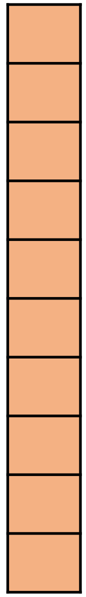
以上流程：

先对画面进行完全感知，得到系数向量后再压缩

稀疏性

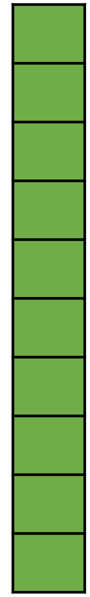
利用稀疏性进行数据压缩:

$n\times1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

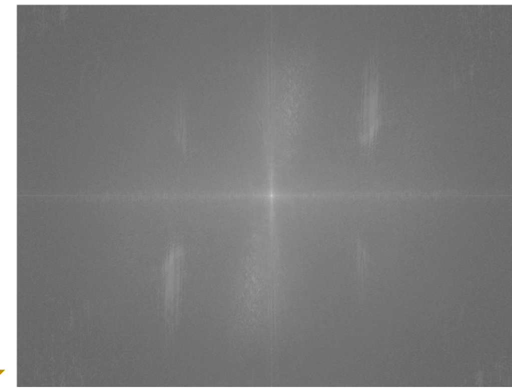


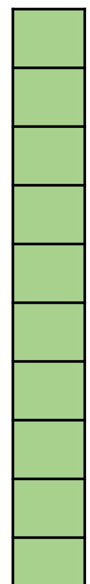
利用傅立叶变换

$n\times1$系数向量

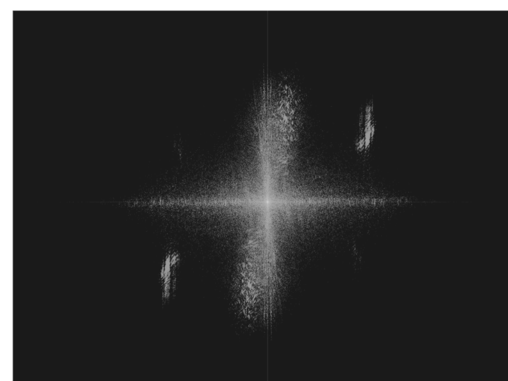


向量是稀疏的（大部分元素为0或接近0）





将较小元素置0，便于存储



以上流程:

先对画面进行完全感知，得到系数向量后再压缩

压缩感知:

在对画面进行感知的时候即进行压缩（直接在感知环节减少感知设备存储的信息量）

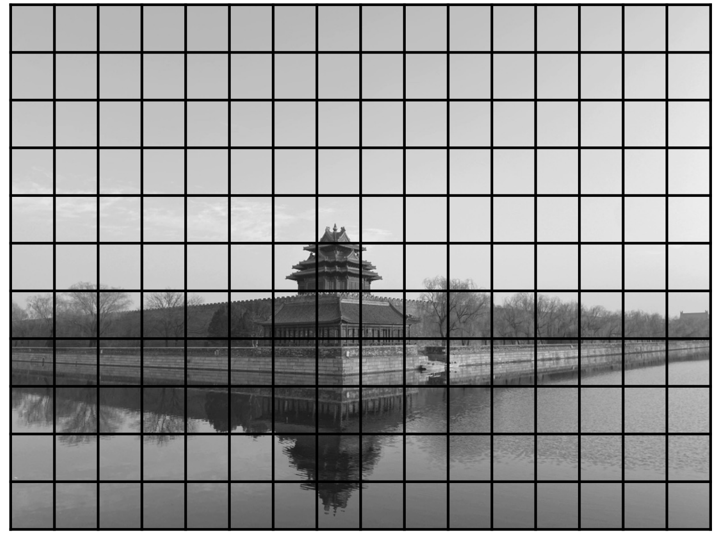
压缩感知

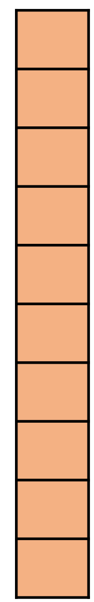
压缩感知的思想

压缩感知

原画面

（想象下图有上千万个方块）



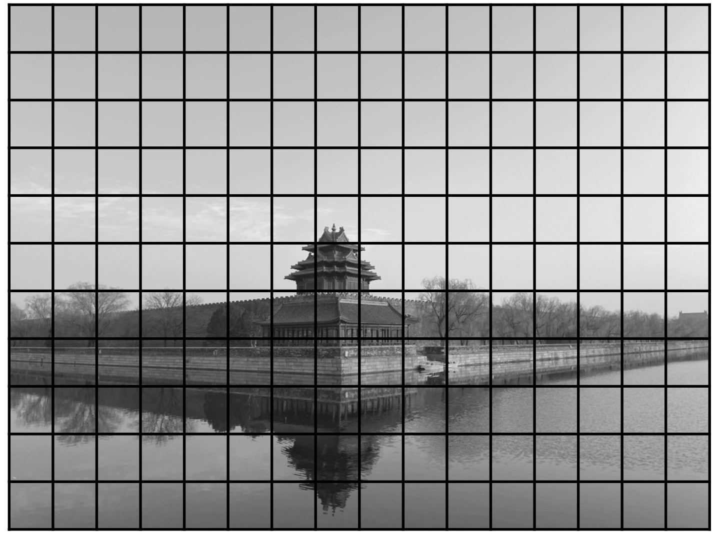


$n\times1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

压缩感知

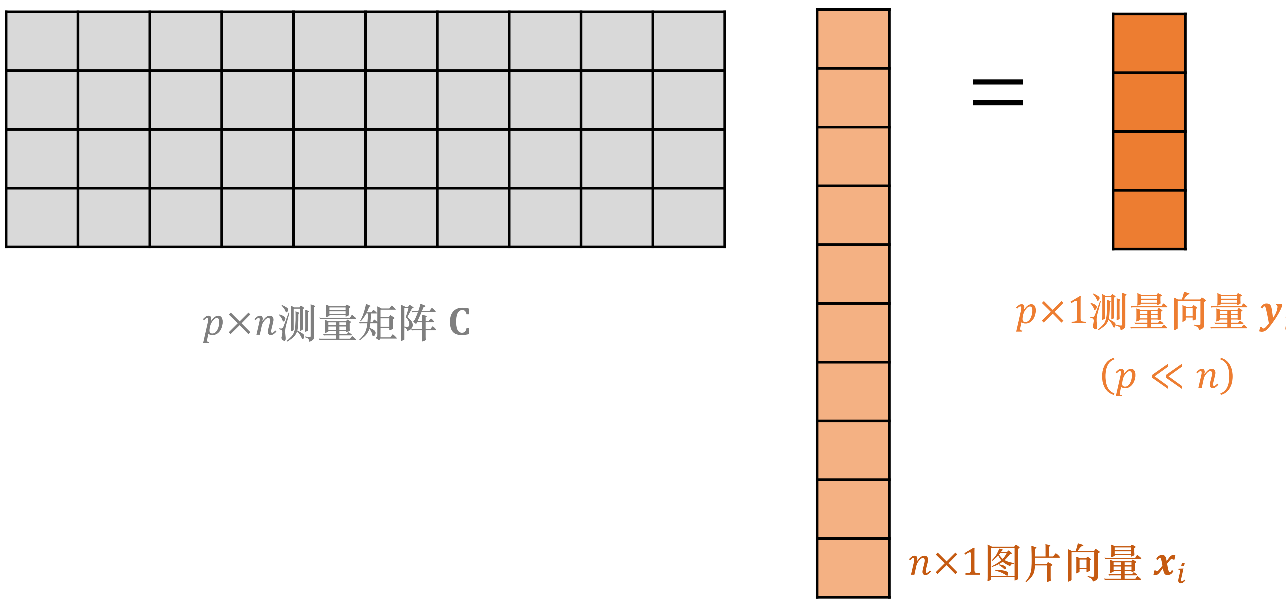
原画面

（想象下图有上千万个方块）



相机感知过程

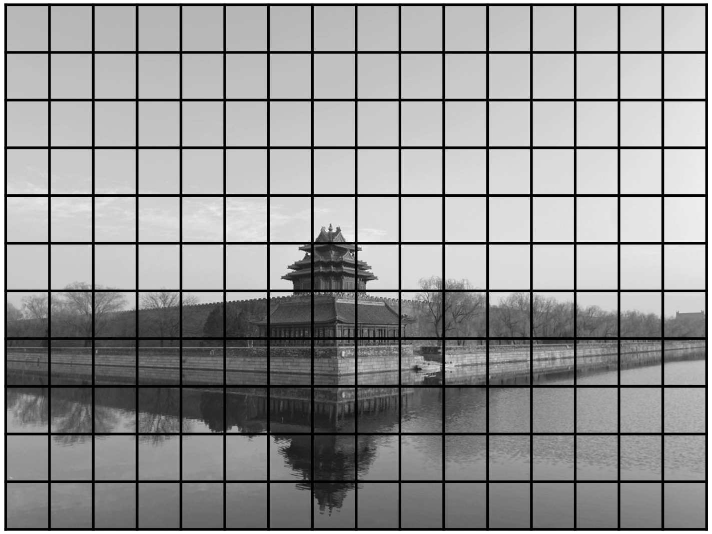
相机存储信息



压缩感知

原画面

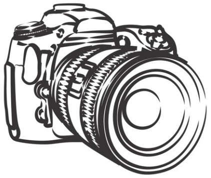
（想象下图有上千万个方块）



例

相机存储信息

相机感知过程



1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

$10^6 \times 10^7$测量矩阵 $\mathbf{C}$

$10^6 \times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}_i$

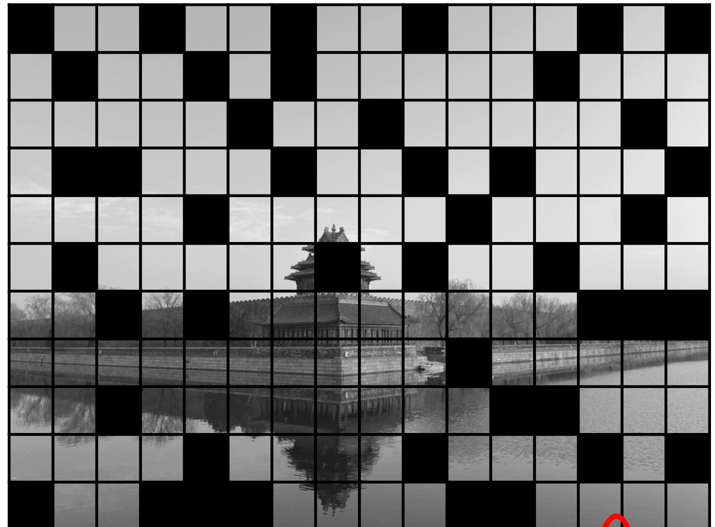
$10^7 \times 1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

* 不是从原画面的10^7个像素随机取10^6个得到测量向量

压缩感知

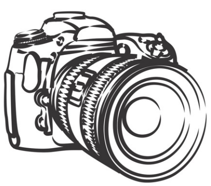
原画面

（想象下图有上千万个方块）



例

相机感知过程



1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

$10^6 \times 10^7$测量矩阵 **C**

=

相机存储信息

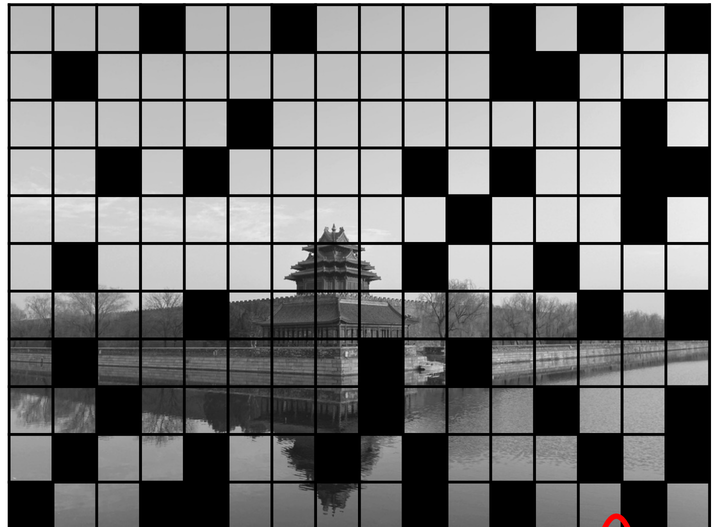
$10^6 \times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}_i$

$10^7 \times 1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

压缩感知

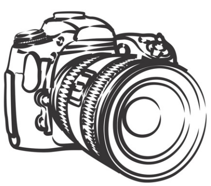
原画面

（想象下图有上千万个方块）



例

相机感知过程



1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

$10^6 \times 10^7$测量矩阵 $\mathbf{C}$

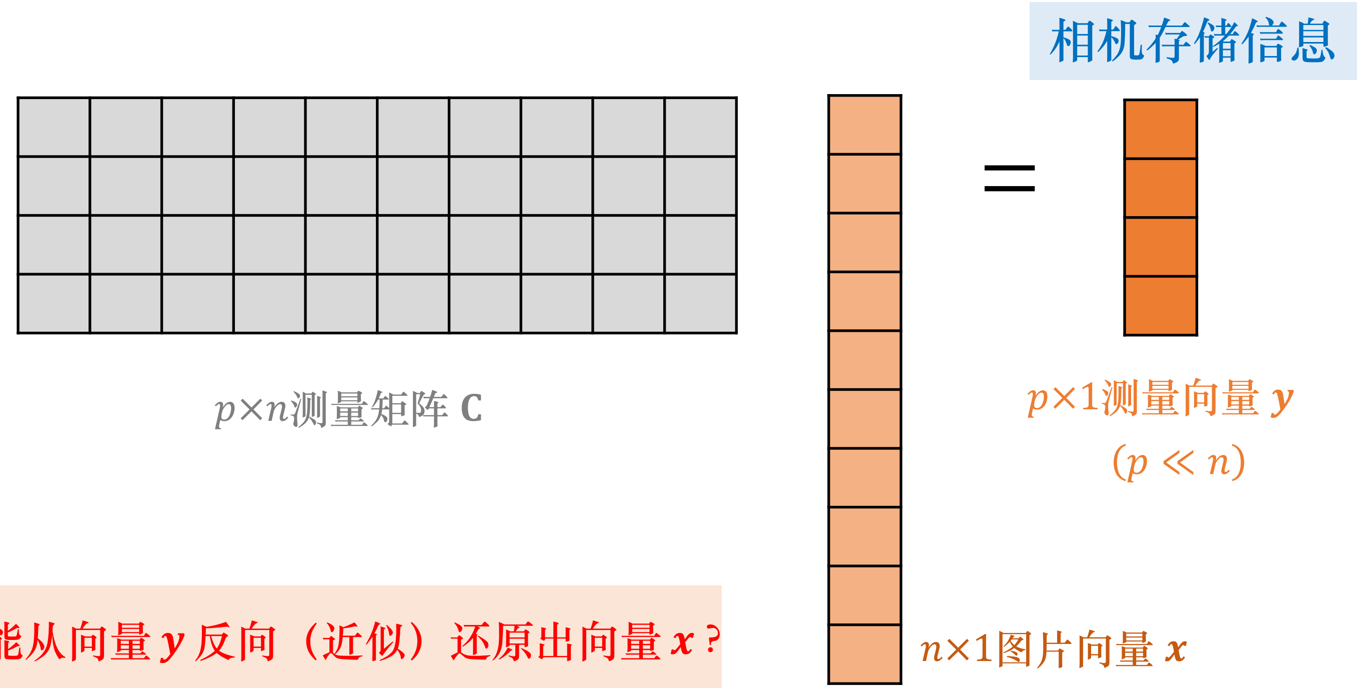
$10^7 \times 1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

=

相机存储信息

$10^6 \times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}_i$

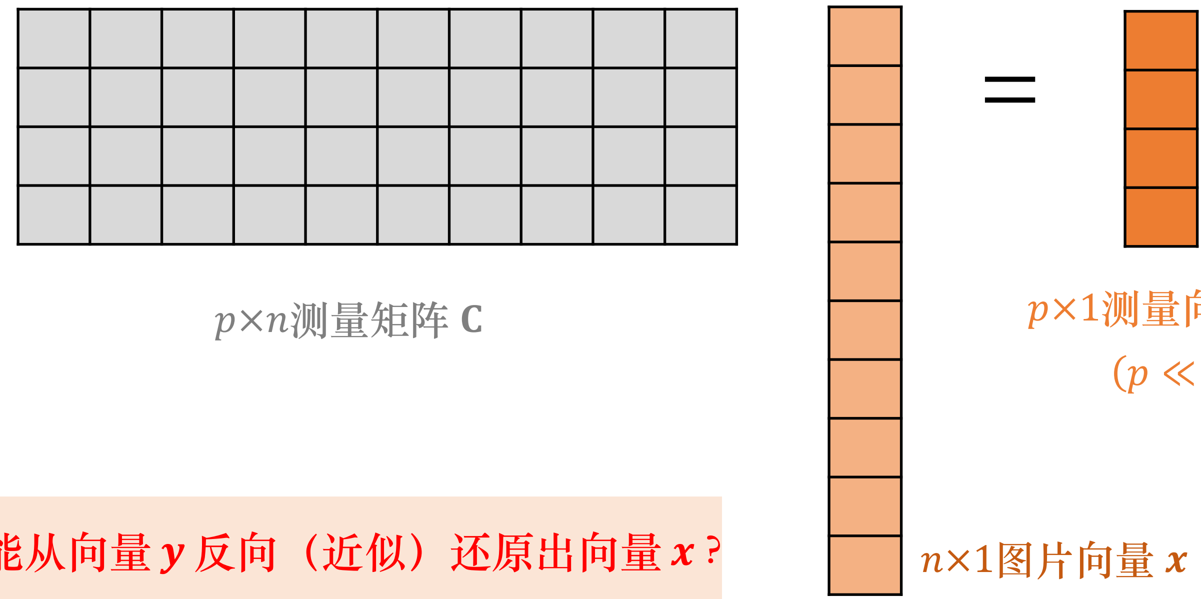
压缩感知



如何能从向量 $\boldsymbol{y}$ 反向（近似）还原出向量 $\boldsymbol{x}$？
（测量矩阵C已知）

压缩感知

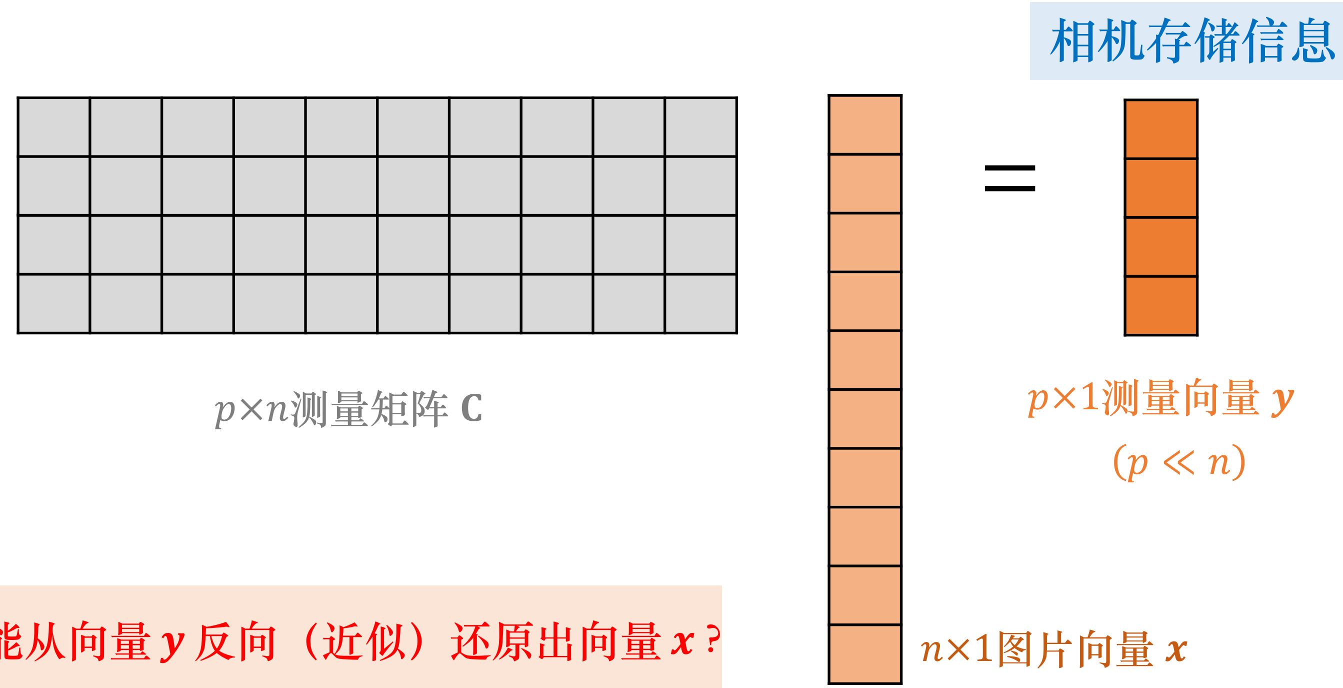
相机存储信息



如何能从向量 $\boldsymbol{y}$ 反向（近似）还原出向量 $\boldsymbol{x}$？（测量矩阵C已知）

将$\boldsymbol{x}$视作未知量，线性方程组$\mathbf{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$有 个等式、 个未知变量

压缩感知



如何能从向量 $\boldsymbol{y}$ 反向（近似）还原出向量 $\boldsymbol{x}$？
（测量矩阵C已知）

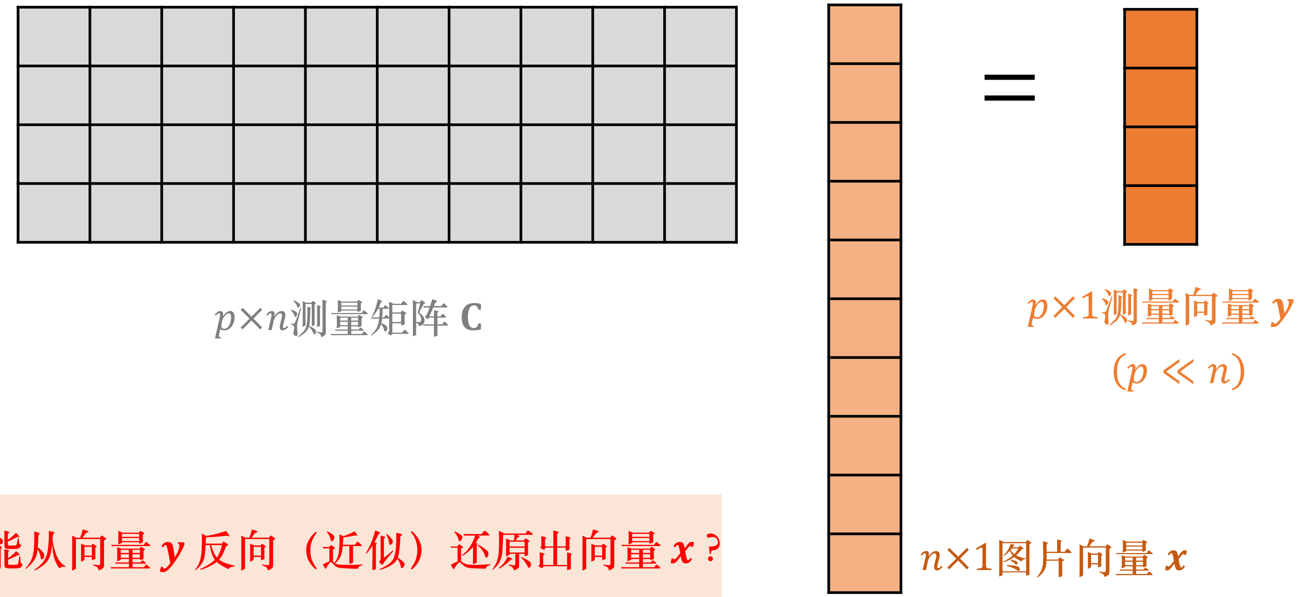
将$\boldsymbol{x}$视作未知量，线性方程组$\mathbf{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$有$p$个等式、$n$个未知变量。由$p \ll n$，方程组通常有无穷多解

例

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 5.5 \\ -x_2 + x_3 &= 0.5 \end{aligned}$$

压缩感知

相机存储信息



如何能从向量 $\boldsymbol{y}$ 反向（近似）还原出向量 $\boldsymbol{x}$？（测量矩阵$\mathbf{C}$已知）

将$\boldsymbol{x}$视作未知量，线性方程组$\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$有$p$个等式、$n$个未知变量。由$p \ll n$，方程组通常有无穷多解

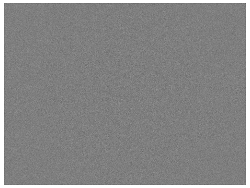
例

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 5.5 \\ -x_2 + x_3 &= 0.5 \end{aligned}$$

图片向量$\boldsymbol{x}$有特殊性：利用（由傅立叶变换定义的）正交矩阵对其展开，系数向量有稀疏性

压缩感知

将$\boldsymbol{x}$视作未知量，线性方程组$\mathbf{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$有$p$个等式、$n$个未知变量。由$p \ll n$，方程组通常有无穷多解

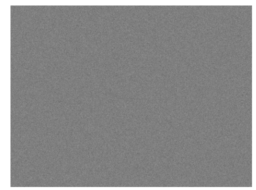


所有$10^7\times1$向量对应的画面的集合
（包含大量无意义的噪声画面）

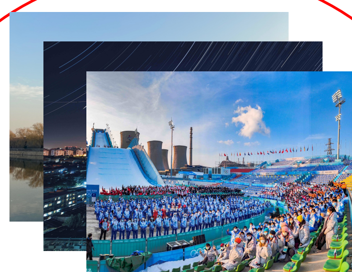
所有世界上可能存在的画面的集合
（有结构、有特征）

压缩感知

将$\boldsymbol{x}$视作未知量，线性方程组$\mathbf{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$有$p$个等式、$n$个未知变量。由$p \ll n$，方程组通常有无穷多解



所有$10^7 \times 1$向量对应的画面的集合
（包含大量无意义的噪声画面）



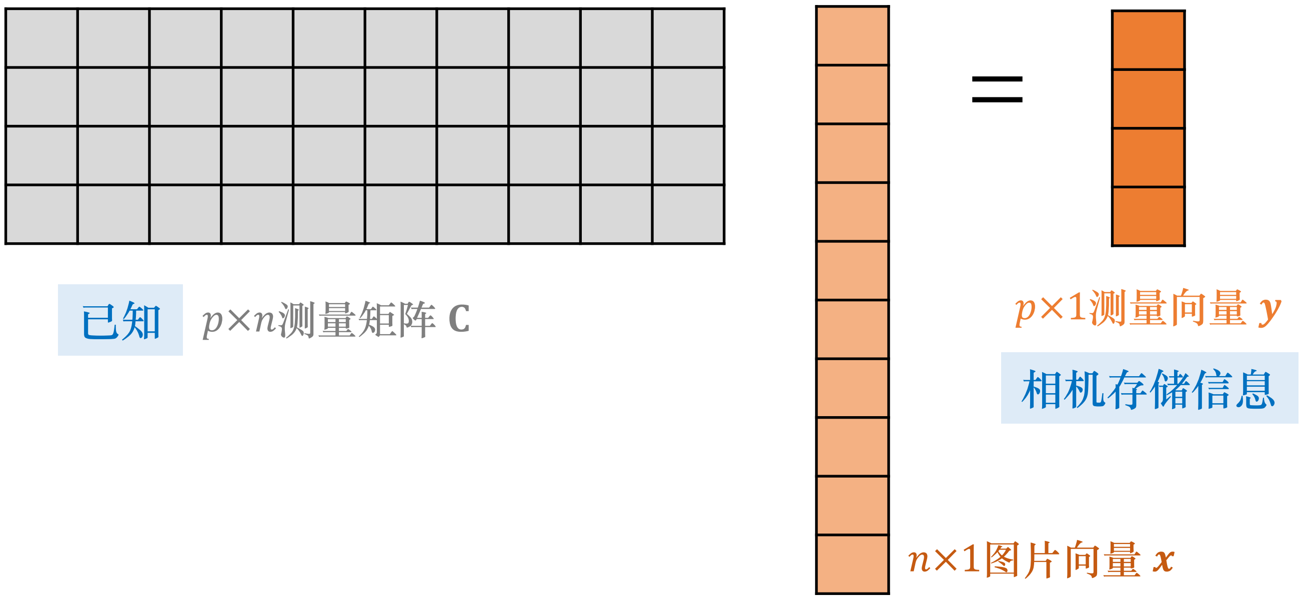
所有世界上可能存在的画面的集合
（有结构、有特征）

利用（由傅立叶变换定义的）正交矩阵对它们展开，系数向量有稀疏性

只需要寻找系数向量有稀疏性的解$\boldsymbol{x}$

压缩感知

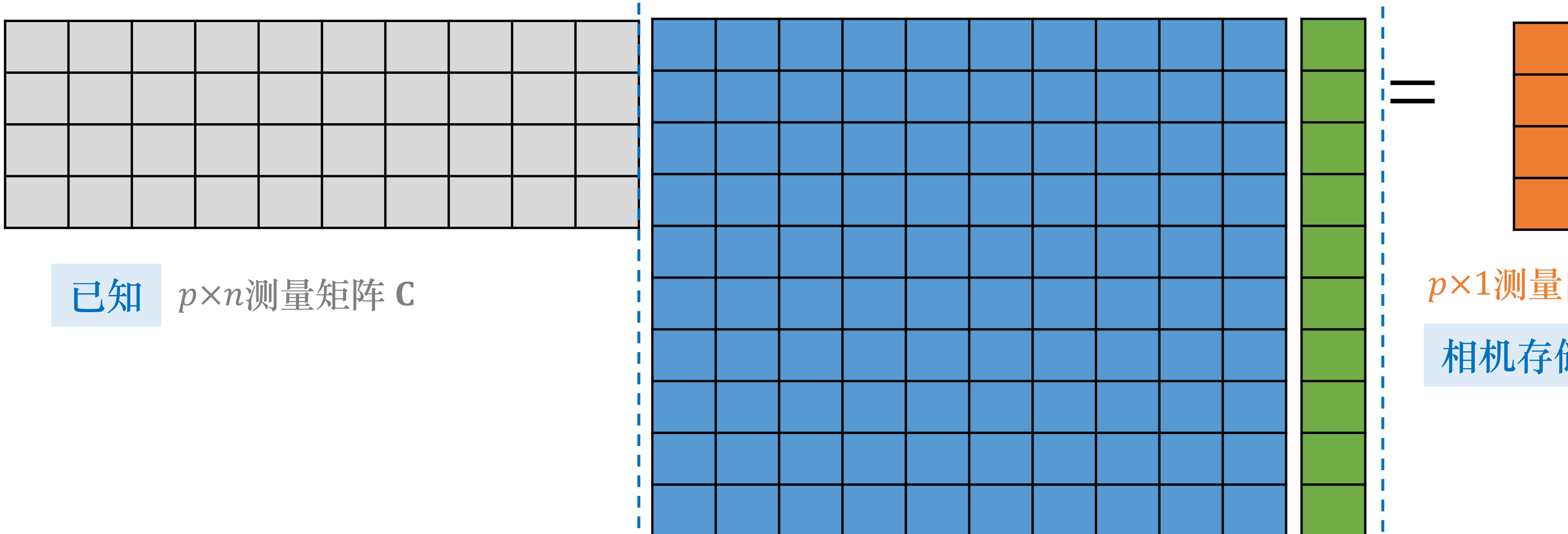
将$\boldsymbol{x}$视作未知量，求解$\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$



压缩感知

将$\boldsymbol{s}$视作未知量，求解$\mathbf{C}\mathbf{V}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{y}$

把$\boldsymbol{x}$改写成$\mathbf{V}\boldsymbol{s}$



已知 $p \times n$测量矩阵 $\mathbf{C}$

$p \times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}$

相机存储信息

已知 $n \times n$矩阵 $\mathbf{V}$

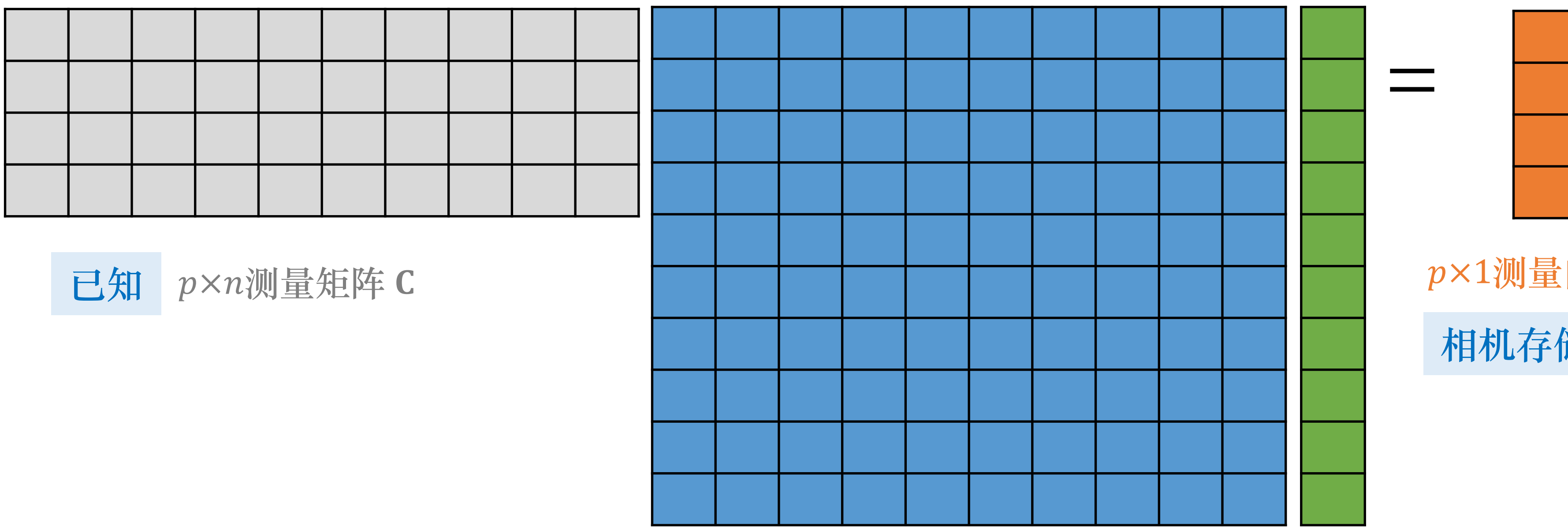
$n \times 1$稀疏向量 $\boldsymbol{s}$
（向量$\boldsymbol{x}$在$\mathbf{V}$各列向量方向的投影）
（sparse vector）

压缩感知

将$\boldsymbol{s}$视作未知量，求解

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0 \quad \text{s.t.}\ \mathbf{CV}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{y}$$

（$\|\cdot\|_0$意为计算向量非零元素的个数）



已知 $p\times n$测量矩阵 $\mathbf{C}$

$p\times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}$

相机存储信息

已知 $n\times n$矩阵 $\mathbf{V}$

$n\times 1$稀疏向量 $\boldsymbol{s}$
（向量$\boldsymbol{x}$在$\mathbf{V}$各列向量方向的投影）
（sparse vector）

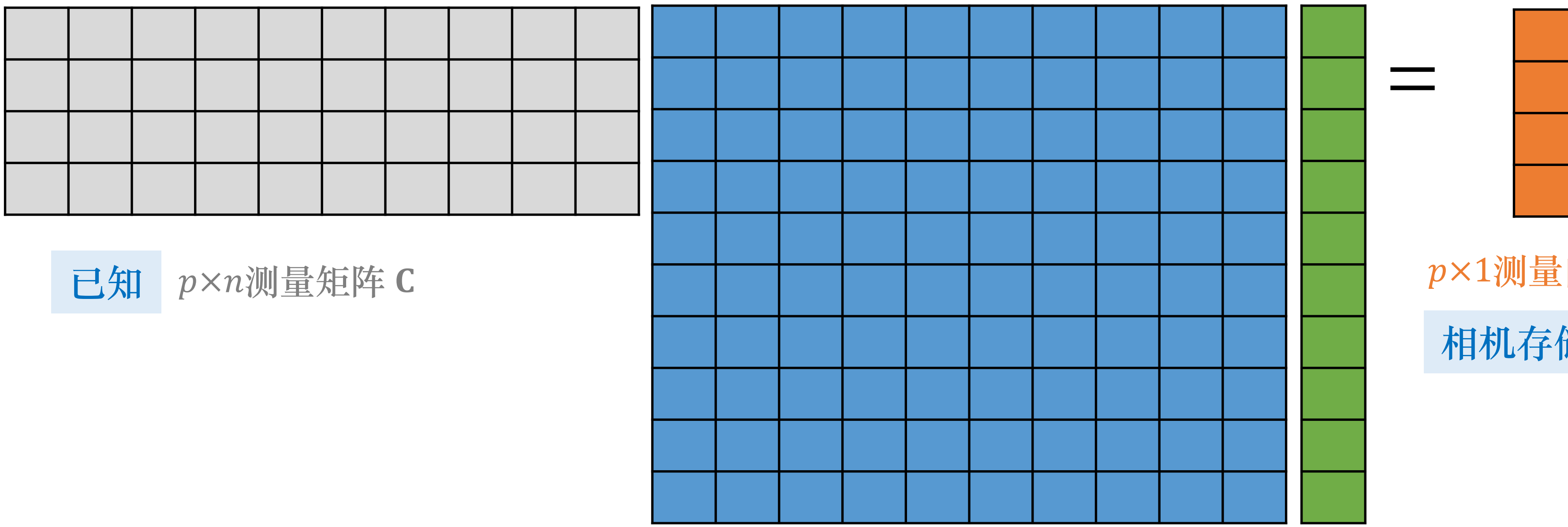
压缩感知

思想：在所有满足线性方程组约束的图片向量中，寻找对应稀疏向量“最稀疏”的图片，即“最具有结构性”的图片

将$\boldsymbol{s}$视作未知量，求解

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0 \quad \text{s.t.}\ \mathbf{CV}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{y}$$

（$\|\cdot\|_0$意为计算向量非零元素的个数）



已知 $p\times n$测量矩阵 $\mathbf{C}$

$p\times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}$

相机存储信息

已知 $n\times n$矩阵 $\mathbf{V}$

$n\times 1$稀疏向量 $\boldsymbol{s}$

（向量$\boldsymbol{x}$在$\mathbf{V}$各列向量方向的投影）

（sparse vector）

压缩感知

压缩感知中的信号恢复问题（Signal Recovery Problem in Compressive Sensing）

给定$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$、$n\times n$矩阵$\mathbf{V}$、$p\times 1$测量向量$\boldsymbol{y}$，求解：

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{CV}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}.$$

$\|\boldsymbol{s}\|_0$为$n\times 1$稀疏向量$\boldsymbol{s}$的非零元素个数。

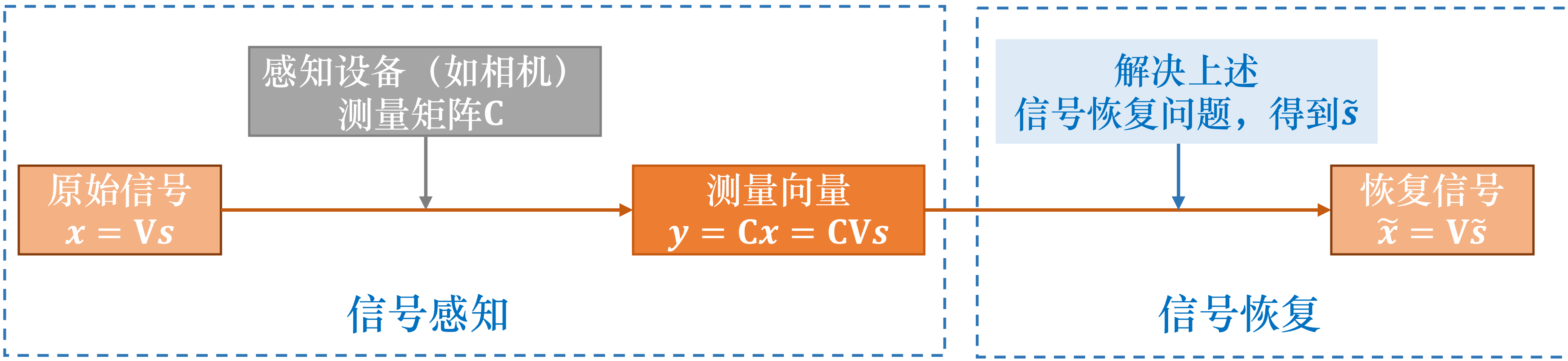
压缩感知

压缩感知中的信号恢复问题（Signal Recovery Problem in Compressive Sensing）

给定$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$、$n\times n$矩阵$\mathbf{V}$、$p\times 1$测量向量$\boldsymbol{y}$，求解：

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{CV}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}.$$

$\|\boldsymbol{s}\|_0$为$n\times 1$稀疏向量$\boldsymbol{s}$的非零元素个数。



压缩感知

有限等距性质

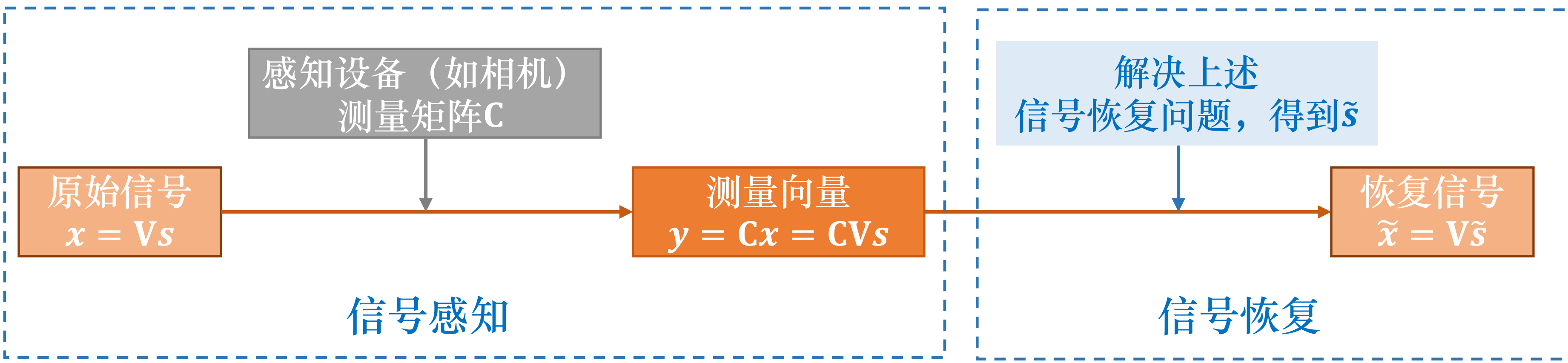
压缩感知

压缩感知中的信号恢复问题（Signal Recovery Problem in Compressive Sensing）

给定$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$、$n\times n$矩阵$\mathbf{V}$、$p\times 1$测量向量$\boldsymbol{y}$，求解：

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{CV}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}.$$

$\|\boldsymbol{s}\|_0$为$n\times 1$稀疏向量$\boldsymbol{s}$的非零元素个数。



（1）恢复信号$\tilde{\boldsymbol{x}}$能否有效地还原原始信号$\boldsymbol{x}$?
（2）如何解决信号恢复的最优化问题?

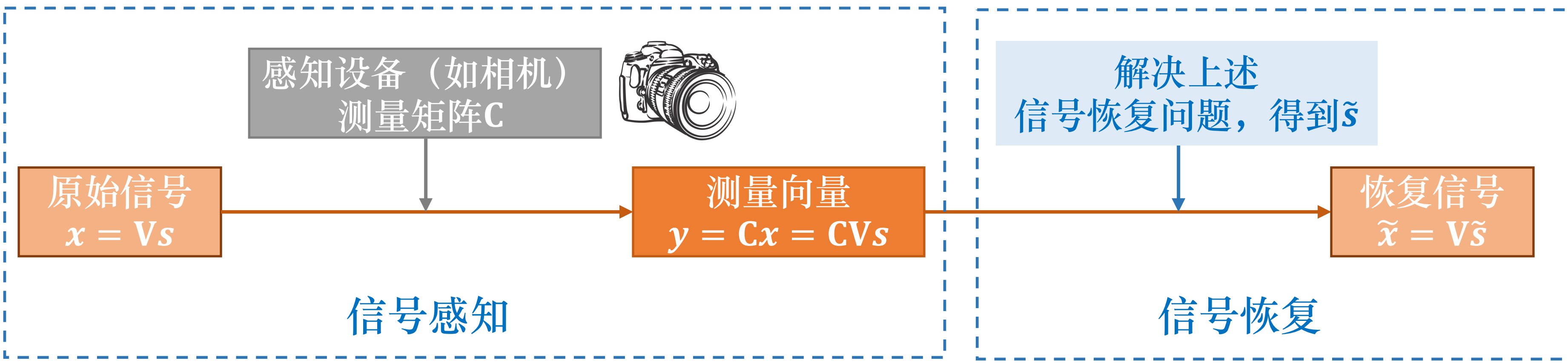
压缩感知

压缩感知中的信号恢复问题（Signal Recovery Problem in Compressive Sensing）

给定$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$、$n\times n$矩阵$\mathbf{V}$、$p\times 1$测量向量$\boldsymbol{y}$，求解：

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{CV}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}.$$

$\|\boldsymbol{s}\|_0$为$n\times 1$稀疏向量$\boldsymbol{s}$的非零元素个数。



（1）恢复信号$\tilde{\boldsymbol{x}}$能否有效地还原原始信号$\boldsymbol{x}$?

$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$的选择很重要，例如，若$\mathbf{C}$的所有元素为0，不可能还原出原信号$\boldsymbol{x}$

压缩感知

压缩感知中的信号恢复问题（Signal Recovery Problem in Compressive Sensing）

给定$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$、$n\times n$矩阵$\mathbf{V}$、$p\times 1$测量向量$\boldsymbol{y}$，求解：

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{CV}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}.$$

$\|\boldsymbol{s}\|_0$为$n\times 1$稀疏向量$\boldsymbol{s}$的非零元素个数。

感知设备（如相机）
测量矩阵$\mathbf{C}$

原始信号
$\boldsymbol{x}=\mathbf{V}\boldsymbol{s}$

测量向量
$\boldsymbol{y}=\mathbf{C}\boldsymbol{x}=\mathbf{CV}\boldsymbol{s}$

信号感知

解决上述
信号恢复问题，得到$\tilde{\boldsymbol{s}}$

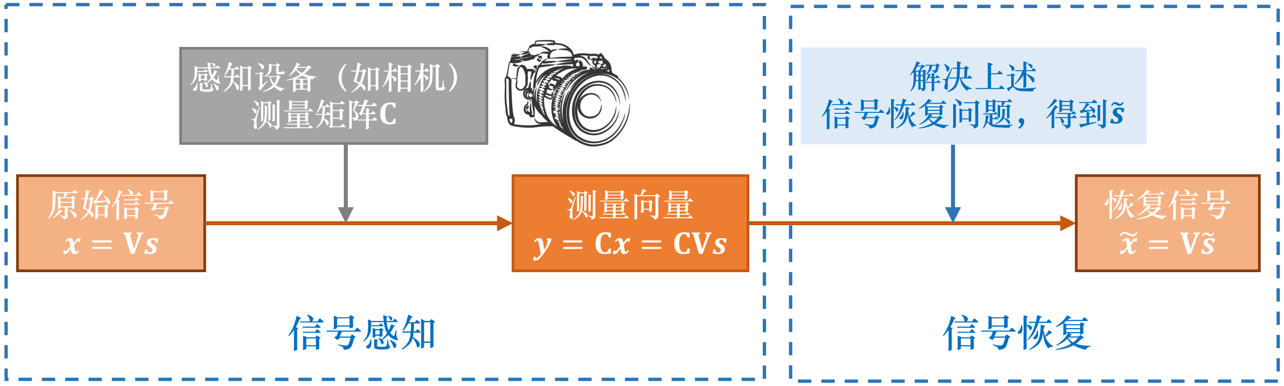
恢复信号
$\tilde{\boldsymbol{x}}=\mathbf{V}\tilde{\boldsymbol{s}}$

信号恢复

（1）恢复信号$\tilde{\boldsymbol{x}}$能否有效地还原原始信号$\boldsymbol{x}$?

在$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$满足什么条件时，$\tilde{\boldsymbol{x}}$可以有效地还原$\boldsymbol{x}$?

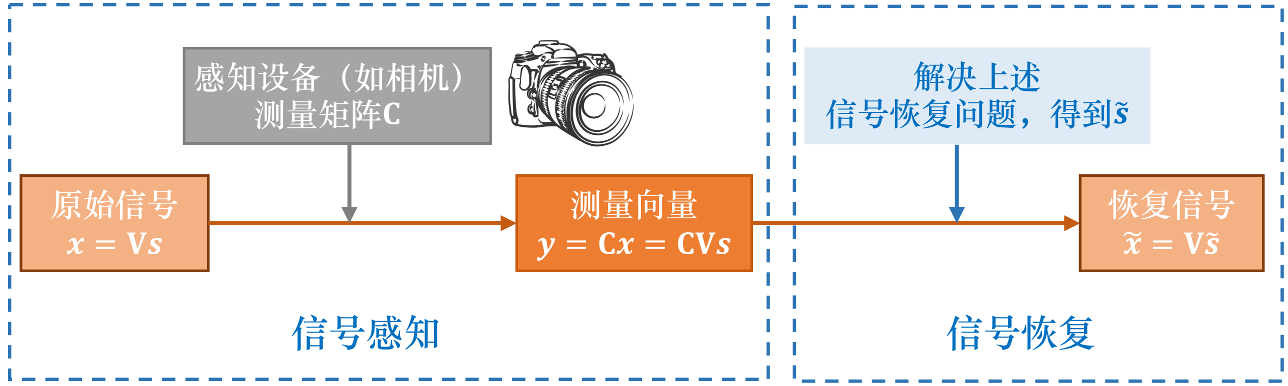
压缩感知



在$p\times n$测量矩阵**C**满足什么条件时，$\tilde{x}$可以有效地还原x?

矩阵C与矩阵V的乘积CV要能近似保护稀疏向量s在压缩前后的模

压缩感知



在$p \times n$测量矩阵$\mathbf{C}$满足什么条件时，$\tilde{\boldsymbol{x}}$可以有效地还原$\boldsymbol{x}$?

矩阵$\mathbf{C}$与矩阵$\mathbf{V}$的乘积$\mathbf{CV}$要能近似保护稀疏向量$\boldsymbol{s}$在压缩前后的模，即需满足如下性质：

有限等距性质（Restricted Isometry Property (RIP)）

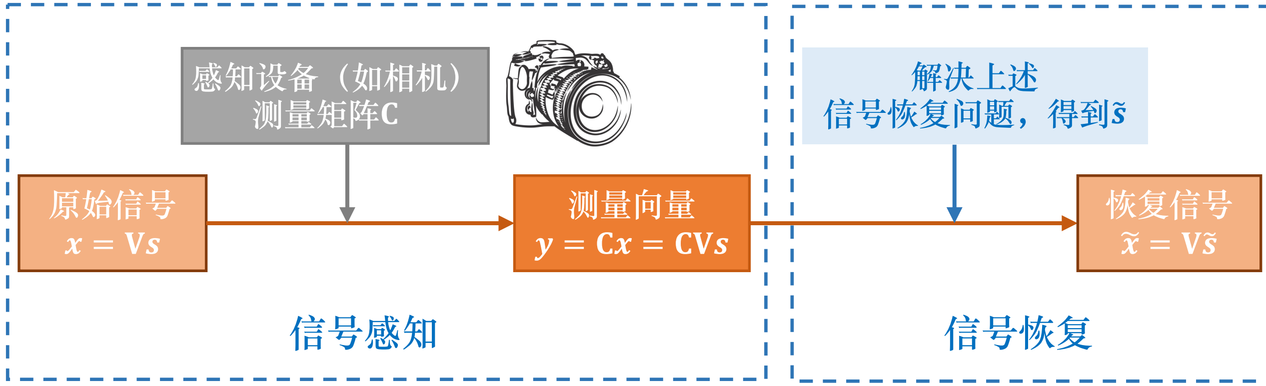
对于任意稀疏度为K的向量$\boldsymbol{s}$及给定$\delta_K > 0$，矩阵$\mathbf{CV}$满足：

$$(1-\delta_K)\|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leq \|\mathbf{CV}\boldsymbol{s}\|_2^2 \leq (1+\delta_K)\|\boldsymbol{s}\|_2^2.$$

* **向量$\boldsymbol{s}$的稀疏度为K：向量$\boldsymbol{s}$最多有K个非零元素**

（和第五讲JL转换中JL引理的形式有类似之处）

压缩感知



在$p \times n$测量矩阵$\mathbf{C}$满足什么条件时，$\tilde{x}$可以有效地还原x?

矩阵$\mathbf{C}$与矩阵$\mathbf{V}$的乘积$\mathbf{CV}$要能近似保护稀疏向量s在压缩前后的模，即需满足如下性质：

有限等距性质（Restricted Isometry Property (RIP)）

对于任意稀疏度为K的向量s及给定$\delta_K > 0$，矩阵$\mathbf{CV}$满足：

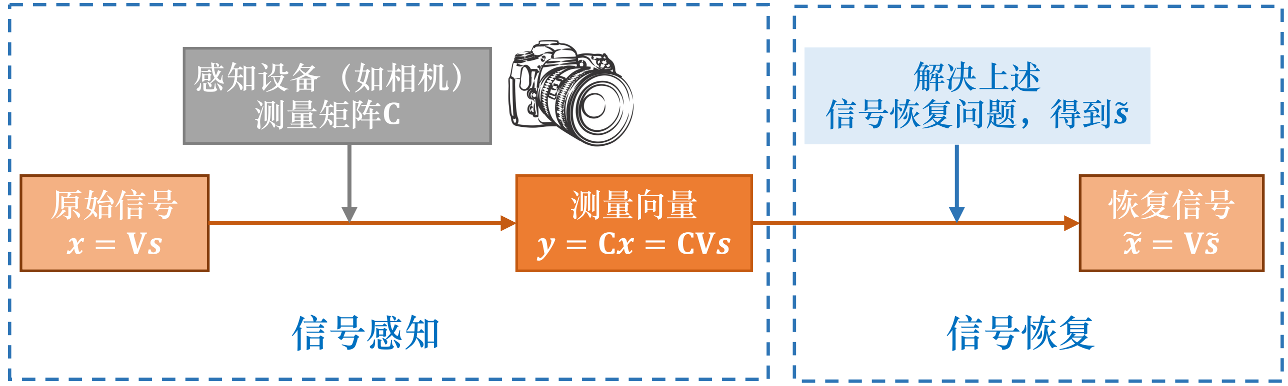
$$(1-\delta_K)\|s\|_2^2 \le \|\mathbf{CV}s\|_2^2 \le (1+\delta_K)\|s\|_2^2.$$

* 向量s的稀疏度为K：向量s最多有K个非零元素

若 $\delta_K = 0$，对应$\|\mathbf{CV}s\|_2^2 = \|s\|_2^2$。此时要求矩阵$\mathbf{CV}$是正交矩阵

故相比“CV是正交矩阵”这一条件，RIP可看作更宽松的条件

压缩感知



在$p \times n$测量矩阵$\mathbf{C}$满足什么条件时，$\tilde{\boldsymbol{x}}$可以有效地还原$\boldsymbol{x}$?

矩阵C与矩阵V的乘积CV要能近似保护稀疏向量$\boldsymbol{s}$在压缩前后的模，即需满足如下性质：

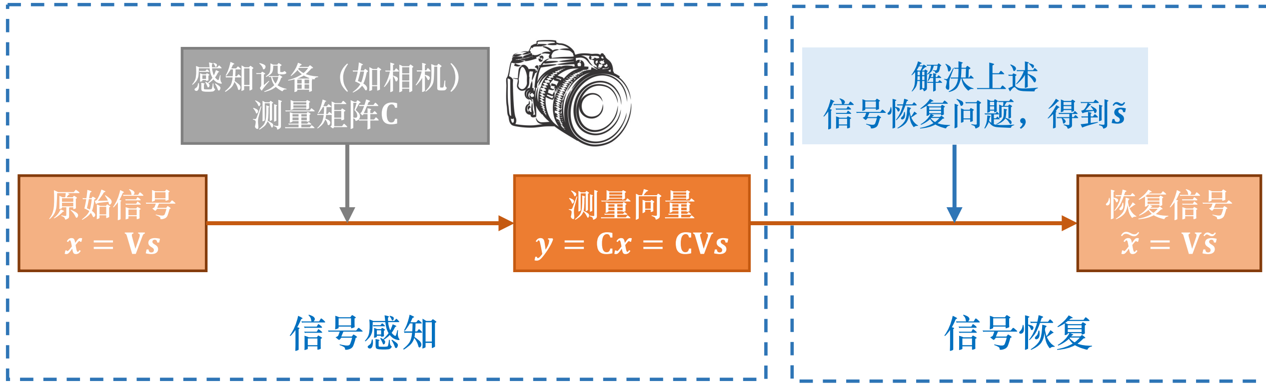
有限等距性质（Restricted Isometry Property (RIP)）

对于任意稀疏度为K的向量$\boldsymbol{s}$及给定$\delta_K > 0$，矩阵CV满足：

$$(1-\delta_K)\|\boldsymbol{s}\|_2^2 \le \|\mathbf{C}\mathbf{V}\boldsymbol{s}\|_2^2 \le (1+\delta_K)\|\boldsymbol{s}\|_2^2.$$

什么样的测量矩阵C可以令CV满足上述有限等距性质?

压缩感知



在$p \times n$测量矩阵$\mathbf{C}$满足什么条件时，$\tilde{\boldsymbol{x}}$可以有效地还原$\boldsymbol{x}$?

矩阵$\mathbf{C}$与矩阵$\mathbf{V}$的乘积$\mathbf{C}\mathbf{V}$要能近似保护稀疏向量$\boldsymbol{s}$在压缩前后的模，即需满足如下性质：

有限等距性质（Restricted Isometry Property (RIP)）

对于任意稀疏度为K的向量$\boldsymbol{s}$及给定$\delta_K > 0$，矩阵$\mathbf{C}\mathbf{V}$满足：

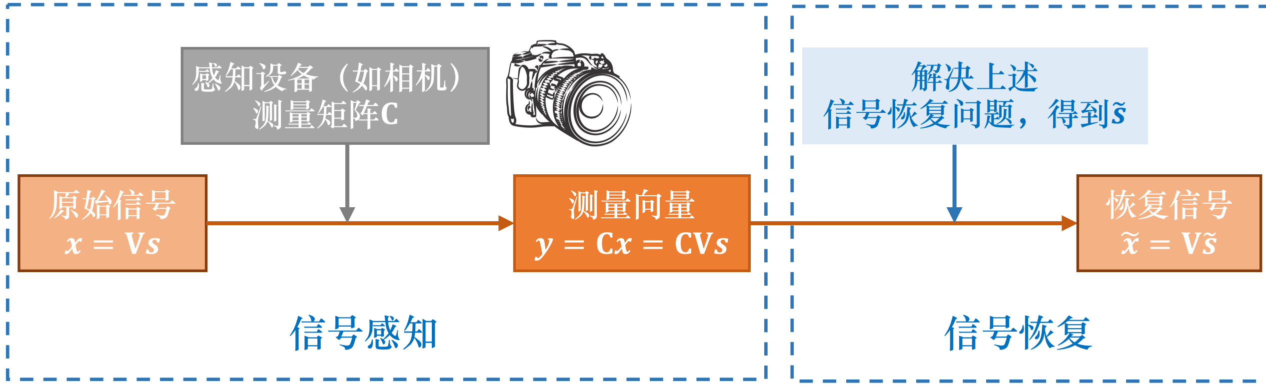
$$(1-\delta_K)\|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leq \|\mathbf{C}\mathbf{V}\boldsymbol{s}\|_2^2 \leq (1+\delta_K)\|\boldsymbol{s}\|_2^2.$$

什么样的测量矩阵$\mathbf{C}$可以令$\mathbf{C}\mathbf{V}$满足上述有限等距性质?

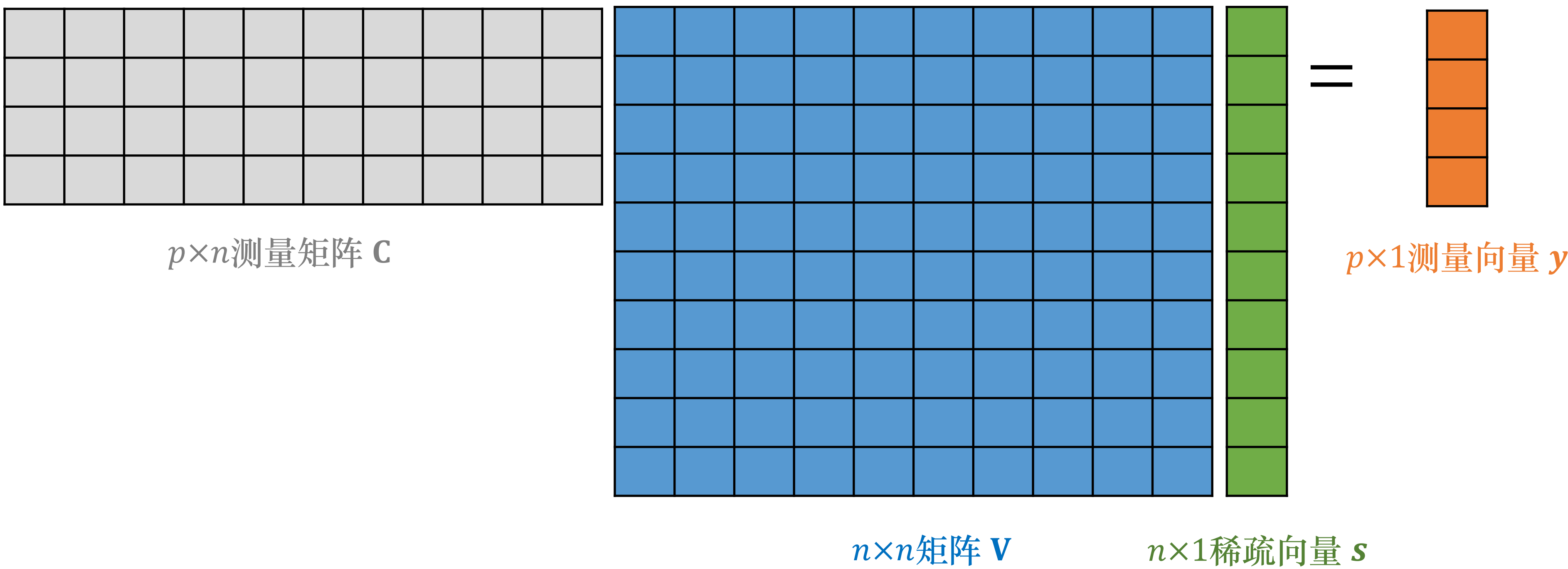
（1）矩阵$\mathbf{C}$的行向量数目不能太少

（2）矩阵$\mathbf{C}$的各行向量不能与矩阵$\mathbf{V}$的各列向量相似

压缩感知

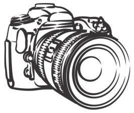


（1）矩阵C的行向量数目不能太少



压缩感知

感知设备（如相机）
测量矩阵C



原始信号
$x = \mathbf{V}s$

测量向量
$y = \mathbf{C}x = \mathbf{CV}s$

信号感知

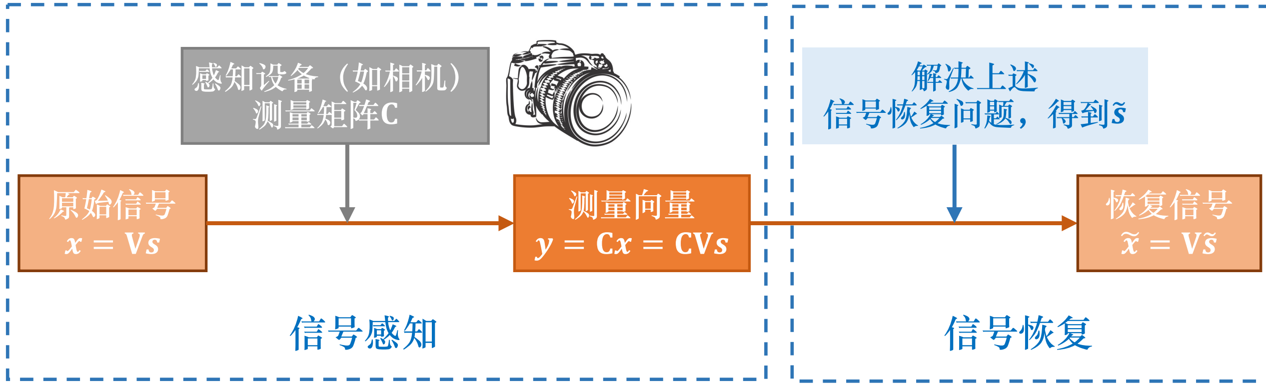
解决上述
信号恢复问题，得到$\tilde{s}$

恢复信号
$\tilde{x} = \mathbf{V}\tilde{s}$

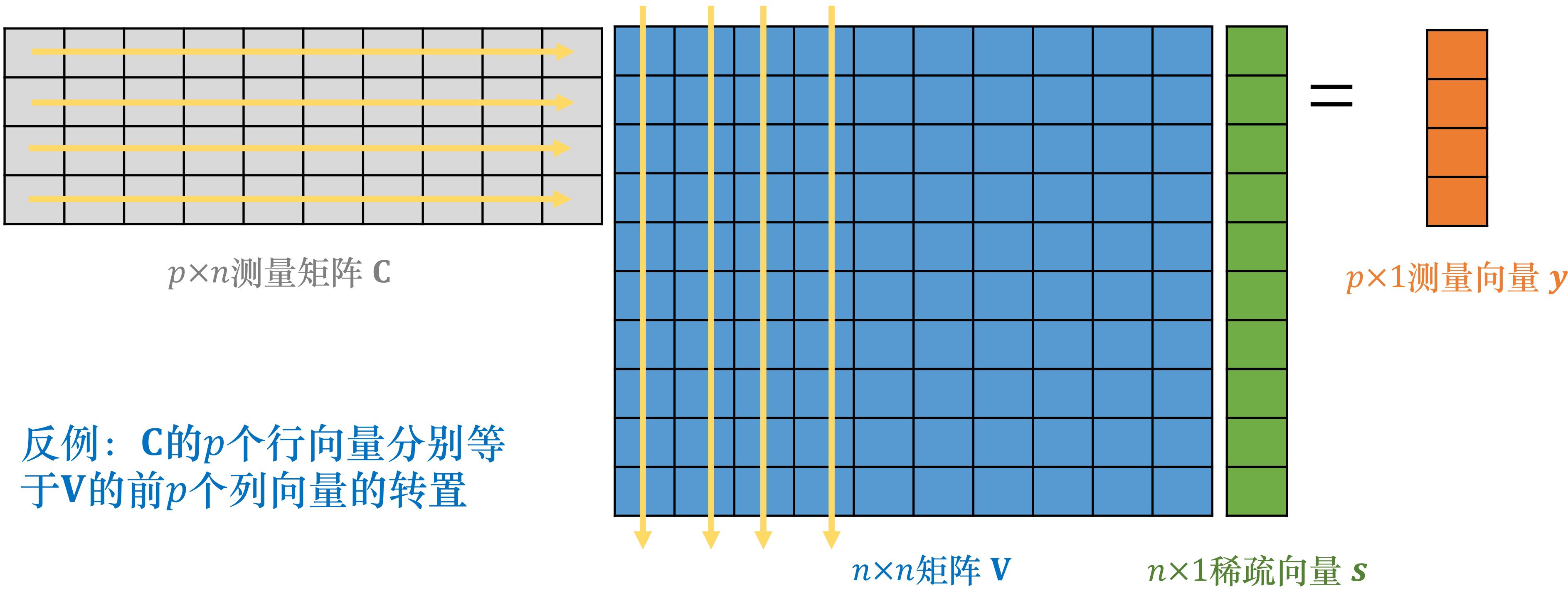
信号恢复

（2）矩阵C的各行向量不能与矩阵V的各列向量相似

压缩感知

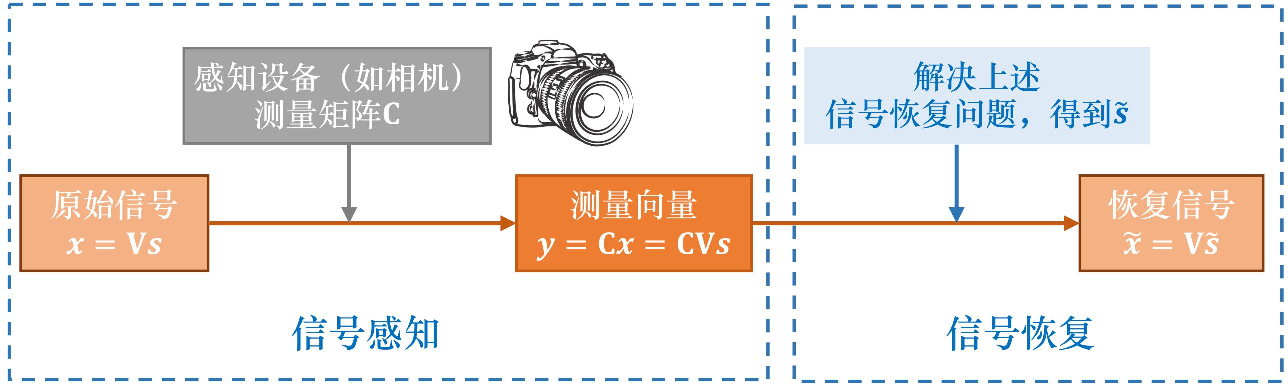


（2）矩阵C的各行向量不能与矩阵V的各列向量相似



反例：C的p个行向量分别等于V的前p个列向量的转置

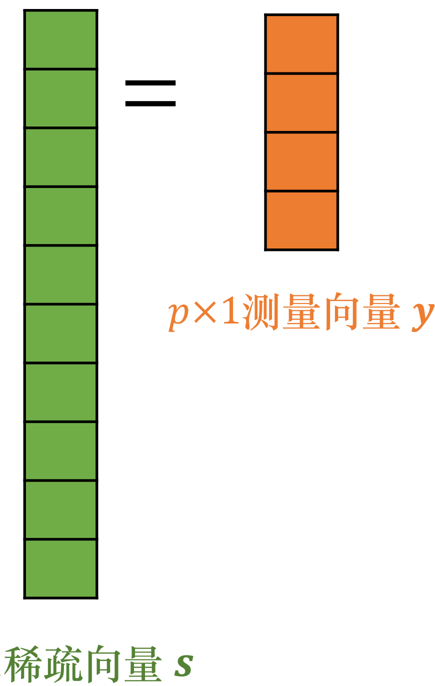
压缩感知



（2）矩阵C的各行向量不能与矩阵V的各列向量相似

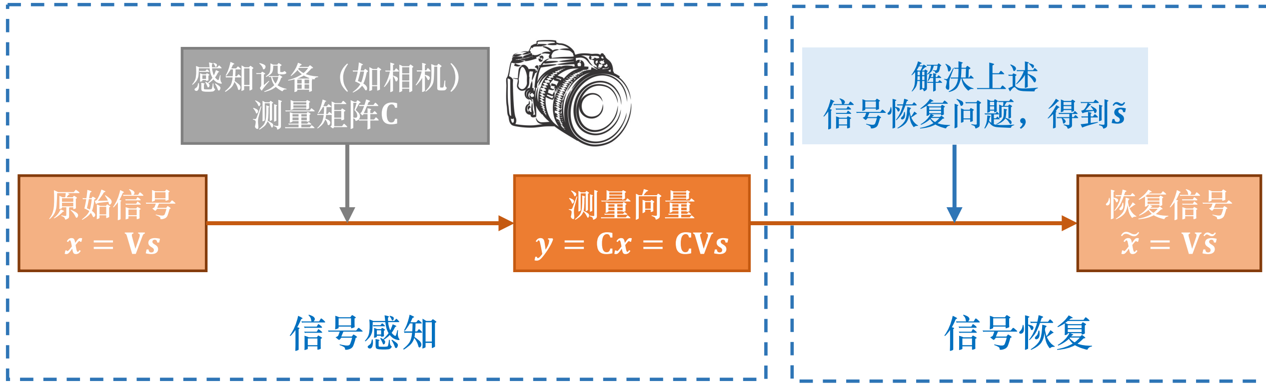
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

$p \times n$矩阵 **CV**



反例：**C**的p个行向量分别等于**V**的前p个列向量的转置

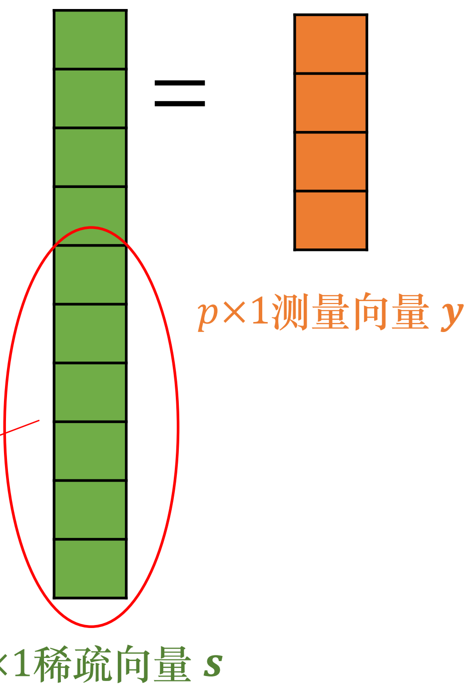
压缩感知



（2）矩阵C的各行向量不能与矩阵V的各列向量相似

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

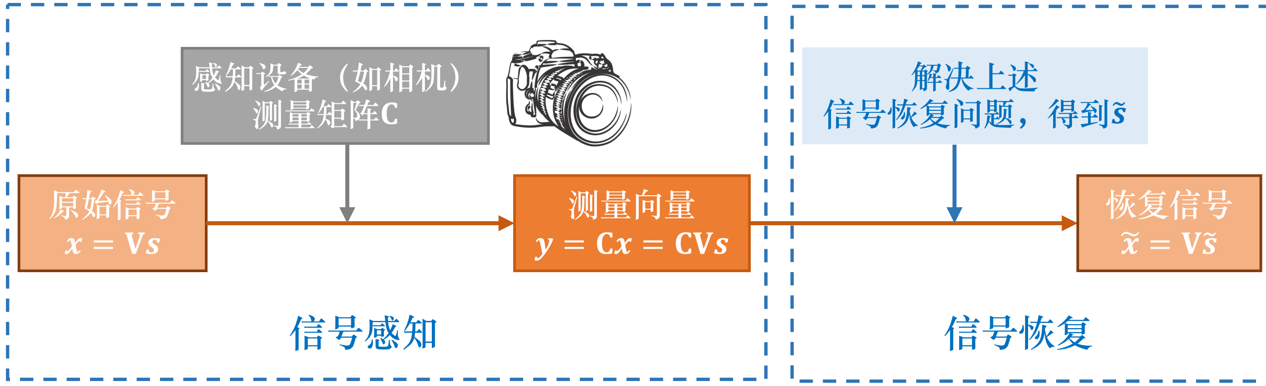
$p \times n$矩阵 **CV**



信息全部丢失

反例：**C**的p个行向量分别等于**V**的前p个列向量的转置

压缩感知



（1）矩阵C的行向量数目不能太少
（2）矩阵C的各行向量不能与矩阵V的各列向量相似

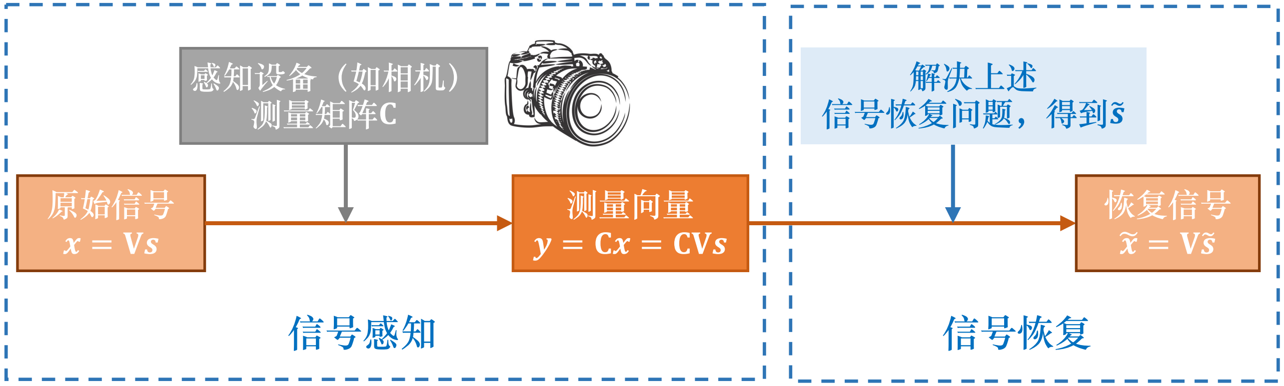
满足要求的$p \times n$测量矩阵C：

（1）$p \approx O\left(K \log\left(\frac{n}{K}\right)\right)$　　K是稀疏向量s的稀疏度

（2）所有元素分别独立依据标准正态分布$\mathcal{N}(0,1)$取值

在数学上可以严格证明，根据以上规则选取测量矩阵C时，以较大概率，恢复信号$\tilde{x}$可以很好地近似原始信号x

压缩感知



（1）矩阵**C**的行向量数目不能太少
（2）矩阵**C**的各行向量不能与矩阵**V**的各列向量相似

满足要求的$p \times n$测量矩阵**C**：

（1）$p \approx O\left(K\log\left(\frac{n}{K}\right)\right)$　　K是稀疏向量$\boldsymbol{s}$的稀疏度

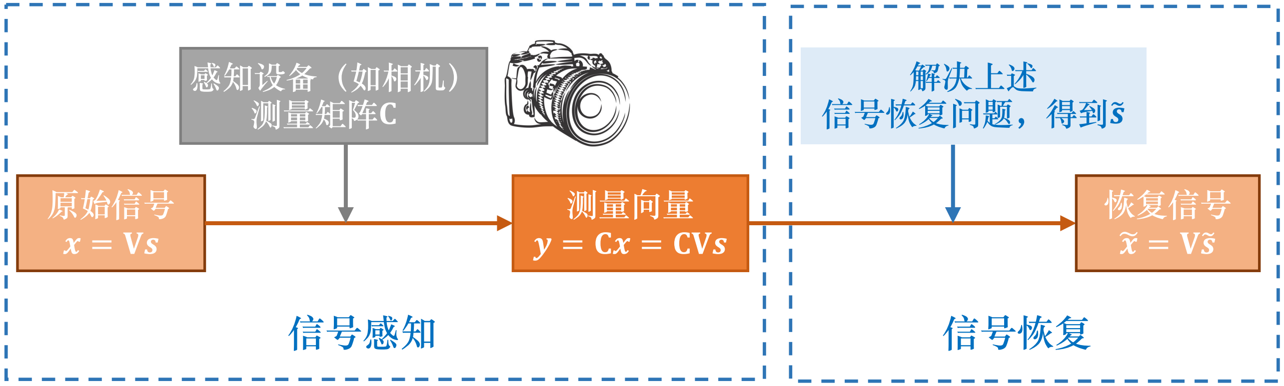
（2）所有元素分别独立依据标准正态分布$\mathcal{N}(0,1)$取值

例：若原图像素为1024×768($n = 786432$)，稀疏向量的稀疏度K为40000

实际需要的p约为$\underbrace{3}_{\text{常数}}\times K\log\left(\frac{n}{K}\right) \approx 350000$（即实际存储像素数目约为原来的45%）

数值例子取自Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz
<Data Driven Science & Engineering - Machine Learning, Dynamical Systems, and Control>

压缩感知



（1）矩阵C的行向量数目不能太少
（2）矩阵C的各行向量不能与矩阵V的各列向量相似

满足要求的$p \times n$测量矩阵C：

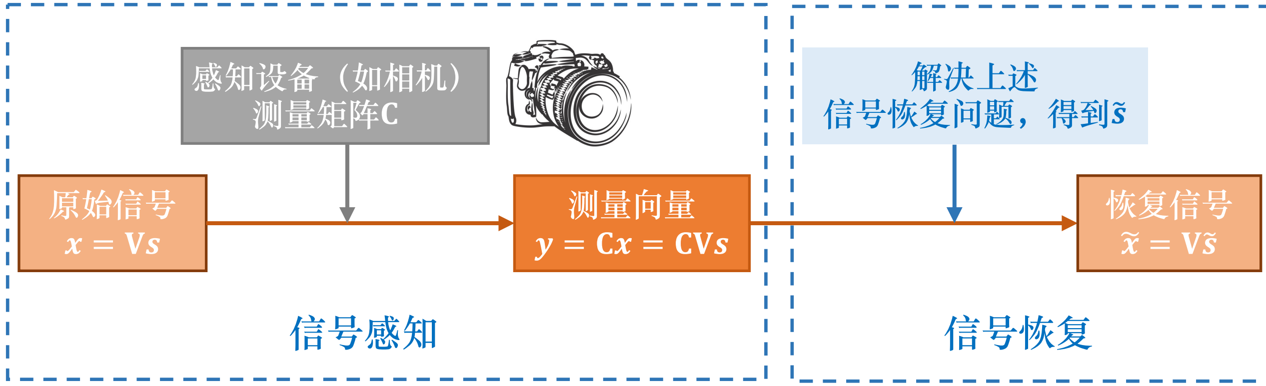
（1）$p \approx O\left(K \log\left(\frac{n}{K}\right)\right)$ 　　K是稀疏向量s的稀疏度

（2）所有元素分别独立依据标准正态分布$\mathcal{N}(0,1)$取值

在实际中，感知设备（如相机）很难实现令C的各元素按标准正态分布取值。

通常令C的各元素随机（如按伯努利分布）从$\{0,1\}$取值

压缩感知



（1）矩阵**C**的行向量数目不能太少
（2）矩阵**C**的各行向量不能与矩阵**V**的各列向量相似

满足要求的$p\times n$测量矩阵**C**：

（1）$p \approx O\left(K\log\left(\frac{n}{K}\right)\right)$　　K是稀疏向量$\boldsymbol{s}$的稀疏度

（2）所有元素分别独立依据标准正态分布$\mathcal{N}(0,1)$取值

在实际中，感知设备（如相机）很难实现令**C**的各元素按标准正态分布取值。

通常令**C**的各元素随机（如按伯努利分布）从{0,1}取值

$p\times n$测量矩阵 **C**

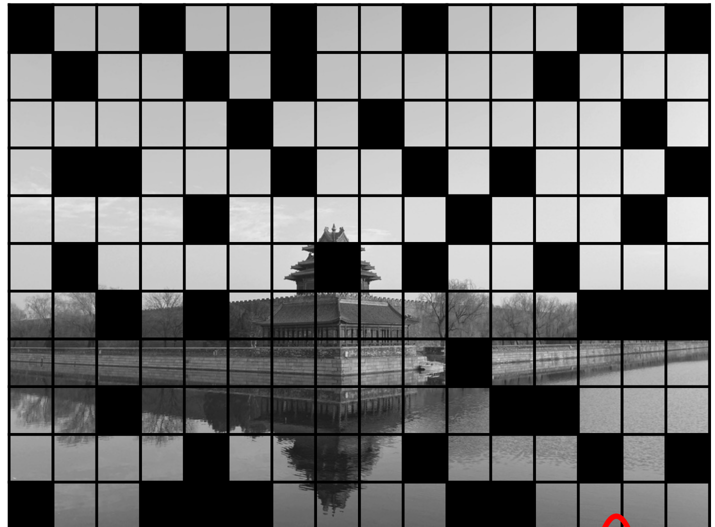
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

压缩感知

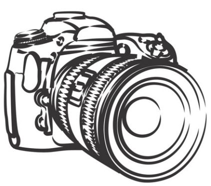
回顾

原画面

（想象下图有上千万个方块）



相机感知过程



1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

$10^6 \times 10^7$测量矩阵 $\mathbf{C}$

$10^7 \times 1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

=

相机存储信息

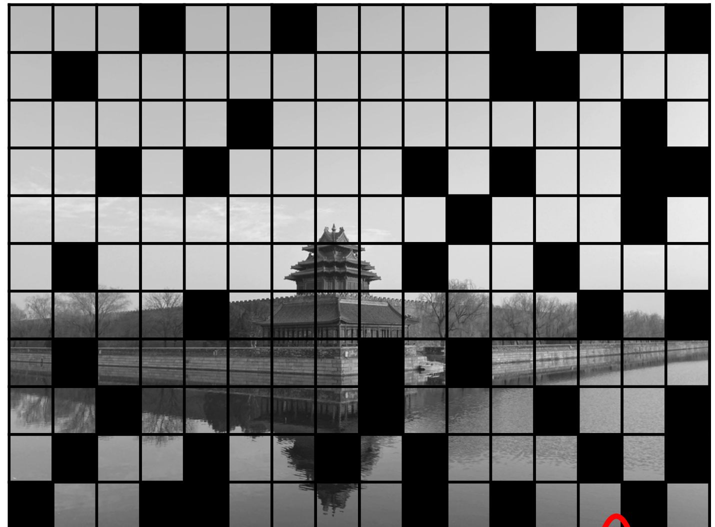
$10^6 \times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}_i$

压缩感知

回顾

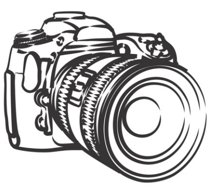
原画面

（想象下图有上千万个方块）



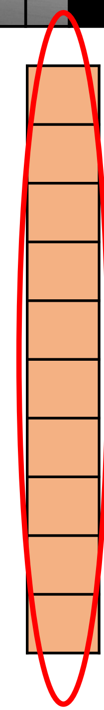
相机存储信息

相机感知过程

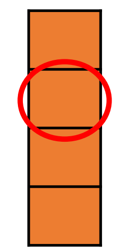


1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

$10^6 \times 10^7$测量矩阵 $\mathbf{C}$



=



$10^6 \times 1$测量向量 $\boldsymbol{y}_i$

$10^7 \times 1$图片向量 $\boldsymbol{x}_i$

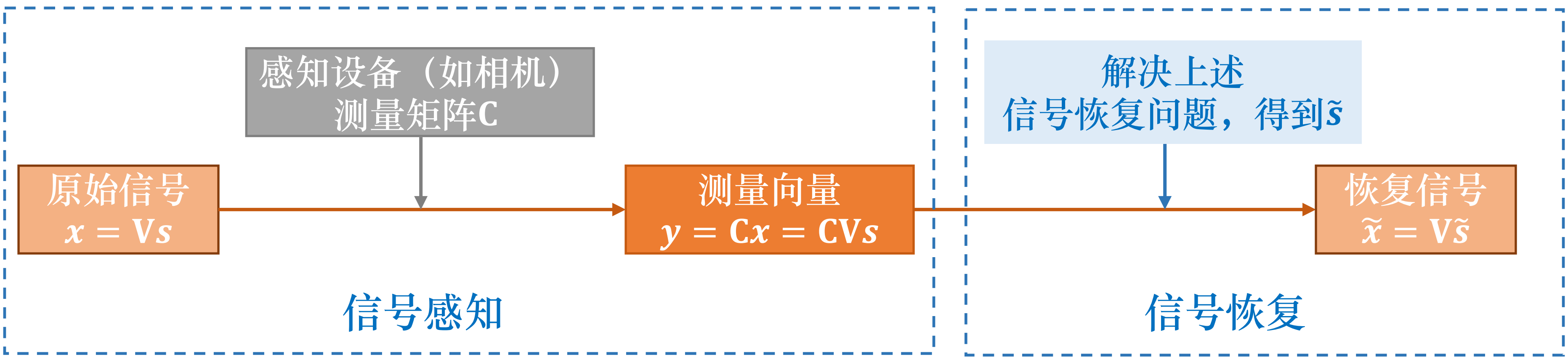
压缩感知

压缩感知中的信号恢复问题（Signal Recovery Problem in Compressive Sensing）

给定$p\times n$测量矩阵$\mathbf{C}$、$n\times n$矩阵$\mathbf{V}$、$p\times 1$测量向量$\boldsymbol{y}$，求解：

$$\min \|\boldsymbol{s}\|_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{CV}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}.$$

$\|\boldsymbol{s}\|_0$为$n\times 1$稀疏向量$\boldsymbol{s}$的非零元素个数。



（1）恢复信号$\tilde{\boldsymbol{x}}$能否有效地还原原始信号$\boldsymbol{x}$? ✓

（2）如何解决信号恢复的最优化问题?

压缩感知

主要学术工作发表于2005年左右

Decoding by linear programming
EJ Candes, T Tao - IEEE transactions on information theory, 2005 - ieeexplore.ieee.org
This paper considers a natural error correcting problem with real valued input/output. We wish to recover an input vector f/spl isin/R/sup n/from corrupted measurements y= Af+ e …
☆ Save 99 Cite Cited by 8192 Related articles

Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?
EJ Candes, T Tao - IEEE transactions on information theory, 2006 - ieeexplore.ieee.org
Suppose we are given a vector f in a class FsubeRopf N, eg, a class of digital signals or digital images. How many linear measurements do we need to make about f to be able to …
☆ Save 99 Cite Cited by 8132 Related articles

Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements
EJ Candes, JK Romberg, T Tao - Communications on Pure and …, 2006 - Wiley Online Library
Suppose we wish to recover a vector x0∈ $\mathbb{R}m$ (eg, a digital signal or image) from incomplete and contaminated observations y= A x0+ e; A is an n× m matrix with far fewer rows than columns (n≪ m) and e is an error term. Is it possible to recover x0 accurately based on the data y? To recover x0, we consider the solution x# to the ℓ1-regularization problem\rm\min\;| x ‖ _\ell_1\rm subject\; to\; ‖ Ax-y ‖ _\ell_2 ≤ ϵ, where ϵ is the size of the error term e. We show that if A obeys a uniform uncertainty principle (with unit-normed …
☆ Save 99 Cite Cited by 8139 Related articles All 28 versions

Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information
EJ Candès, J Romberg, T Tao - IEEE Transactions on …, 2006 - ieeexplore.ieee.org
This paper considers the model problem of reconstructing an object from incomplete frequency samples. Consider a discrete-time signal f/spl isin/C/sup N/and a randomly chosen set of frequencies/spl Omega/. Is it possible to reconstruct f from the partial knowledge of its Fourier coefficients on the set/spl Omega/? A typical result of this paper is as follows. Suppose that f is a superposition of| T| spikes f (t)=/spl sigma//sub/spl tau//spl isin/T/f (/spl tau/)/spl delta/(t-/spl tau/) obeying| T|/spl les/C/sub M//spl middot/(log N)/sup …
☆ Save 99 Cite Cited by 17967 Related articles All 32 versions

压缩感知

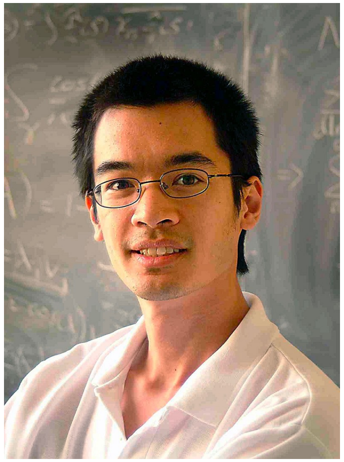
主要学术工作发表于2005年左右

Decoding by linear programming
EJ Candes, T Tao - IEEE transactions on information theory, 2005 - ieeexplore.ieee.org
This paper considers a natural error correcting problem with real valued input/output. We wish to recover an input vector f/spl isin/R/sup n/from corrupted measurements y= Af+ e …
☆ Save 99 Cite Cited by 8192 Related articles

Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?
EJ Candes, T Tao - IEEE transactions on information theory, 2006 - ieeexplore.ieee.org
Suppose we are given a vector f in a class FsubeRopf N, eg, a class of digital signals or digital images. How many linear measurements do we need to make about f to be able to …
☆ Save 99 Cite Cited by 8132 Related articles

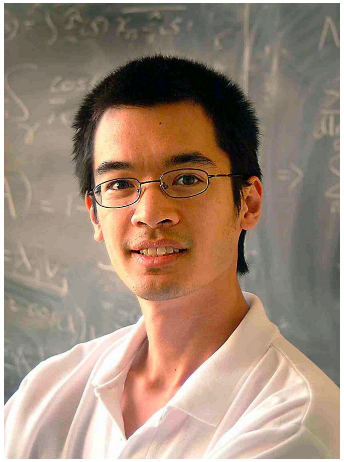
Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements
EJ Candes, JK Romberg, T Tao - Communications on Pure and …, 2006 - Wiley Online Library
Suppose we wish to recover a vector x0∈ $\mathbb{R}m$ (eg, a digital signal or image) from incomplete and contaminated observations y= A x0+ e; A is an n× m matrix with far fewer rows than columns ($n \ll m$) and e is an error term. Is it possible to recover x0 accurately based on the data y? To recover x0, we consider the solution x# to the ℓ1-regularization problem\rm\min\;| x ‖ _\ell_1\rm subject\; to\; ‖ Ax-y ‖ _\ell_2 ≤ ϵ, where ϵ is the size of the error term e. We show that if A obeys a uniform uncertainty principle (with unit-normed …
☆ Save 99 Cite Cited by 8139 Related articles All 28 versions

Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information
EJ Candès, J Romberg, T Tao - IEEE Transactions on …, 2006 - ieeexplore.ieee.org
This paper considers the model problem of reconstructing an object from incomplete frequency samples. Consider a discrete-time signal f/spl isin/C/sup N/and a randomly chosen set of frequencies/spl Omega/. Is it possible to reconstruct f from the partial knowledge of its Fourier coefficients on the set/spl Omega/? A typical result of this paper is as follows. Suppose that f is a superposition of| T| spikes f (t)=/spl sigma//sub/spl tau//spl isin/T/f (/spl tau/)/spl delta/(t-/spl tau/) obeying| T|/spl les/C/sub M//spl middot/(log N)/sup …
☆ Save 99 Cite Cited by 17967 Related articles All 32 versions



陶哲轩

压缩感知



陶哲轩

- ❑ 1975年生于澳大利亚（华裔）
- ❑ 9岁开始学习本科数学课程
- ❑ 11岁、12岁、13岁参加国际数学奥赛获铜、银、金牌（分别保持最年轻获奖记录至今）
- ❑ 21岁于Princeton获博士学位，并入职UCLA
- ❑ 24岁晋升UCLA正教授（保持UCLA最年轻正教授记录至今）
- ❑ 31岁获菲尔兹奖（1936年成立至今共60位获奖者）

Known for

Green–Tao theorem
Erdős discrepancy problem
Compressed sensing
Tao's inequality
Kakeya conjecture
Bounding the de Bruijn–Newman constant
Horn conjecture
Cramer conjecture
Collatz conjecture
Chowla conjecture
Navier–Stokes existence and smoothness
Uncountable Moore–Schmidt theorem
Sendov's conjecture
Singmaster's conjecture

信息及图片主要来自Wikipedia <Terence Tao>

压缩感知

陶哲轩大师课（分享数学思维）

https://www.bilibili.com/video/BV1wa41187Wf?p=8

硬币问题

本硬币问题与视频中提及的12硬币问题不完全相同

【简单版本】有7个硬币、其中有1个假币重量与其它的不一样（不知道更轻还是更重）。

现有一个精确的电子秤，已知真币的重量（如17克），如何仅使用3次电子秤就找出假币?

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自
K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

本硬币问题与视频中提及的12硬币问题不完全相同

【简单版本】有7个硬币、其中有1个假币重量与其它的不一样（不知道更轻还是更重）。

现有一个精确的电子秤，已知真币的重量（如17克），如何仅使用3次电子秤就找出假币?

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自

K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

本硬币问题与视频中提及的12硬币问题不完全相同

【简单版本】有7个硬币、其中有1个假币重量与其它的不一样（不知道更轻还是更重）。

现有一个精确的电子秤，已知真币的重量（如17克），如何仅使用3次电子秤就找出假币?

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例：如果前两次秤显示异常（不等于4×17克）、第三次正常，说明假币是3号币

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自

K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

本硬币问题与视频中提及的12硬币问题不完全相同

【简单版本】有7个硬币、其中有1个假币重量与其它的不一样（不知道更轻还是更重）。

现有一个精确的电子秤，已知真币的重量（如17克），如何仅使用3次电子秤就找出假币?

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

7×1向量$\boldsymbol{x}$

有且仅有一个元素为1（假币）

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自

K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

本硬币问题与视频中提及的12硬币问题不完全相同

【简单版本】有7个硬币、其中有1个假币重量与其它的不一样（不知道更轻还是更重）。

现有一个精确的电子秤，已知真币的重量（如17克），如何仅使用3次电子秤就找出假币?

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

用1表示异常
用0表示正常

7×1向量$\boldsymbol{x}$

有且仅有一个元素为1（假币）

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自
K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

本硬币问题与视频中提及的12硬币问题不完全相同

【简单版本】有7个硬币、其中有1个假币重量与其它的不一样（不知道更轻还是更重）。

现有一个精确的电子秤，已知真币的重量（如17克），如何仅使用3次电子秤就找出假币？

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

用1表示异常
用0表示正常

7×1向量$\boldsymbol{x}$

有且仅有一个元素为1（假币）

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自
K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

【进阶版本】有100个硬币、含少量假币（假币数目未知，不同假币重量可能不同，可能比真币更重或更轻）。已知真币的重量（如17克），如何通过p次电子秤，估测哪些币是假币且分别比真币轻/重多少?

本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自
K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

【进阶版本】有100个硬币、含少量假币（假币数目未知，不同假币重量可能不同，可能比真币更重或更轻）。已知真币的重量（如17克），如何通过p次电子秤，估测哪些币是假币且分别比真币轻/重多少?

用100×1向量$\boldsymbol{x}$表示各币重量与真币重量17克的偏差，即$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{100}$

假设求得$x_4 = -0.17, x_{20} = 0.20$且其余$x_i$为0，说明第4号币、第20号币为假币且偏差为所得值

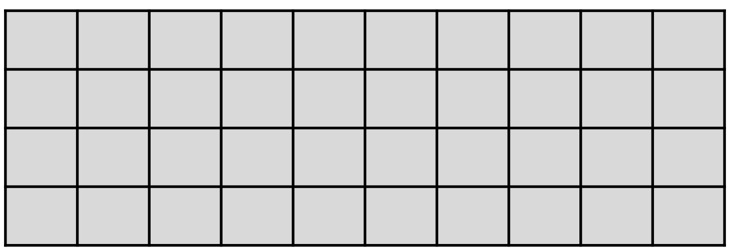
本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自
K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

【进阶版本】有100个硬币、含少量假币（**假币数目未知，不同假币重量可能不同，可能比真币更重或更轻**）。已知真币的重量（如17克），如何通过p次电子秤，估测哪些币是假币且分别比真币轻/重多少?

用100×1向量$\boldsymbol{x}$表示各币重量与真币重量17克的偏差，即$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{100}$

假设求得$x_4=-0.17, x_{20}=0.20$且其余x_i为0，说明第4号币、第20号币为假币且偏差为所得值



$p\times100$ 矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$

（值为1或0，对应是否在该次秤重中把相应币加入）

可自行设计的“测量矩阵”

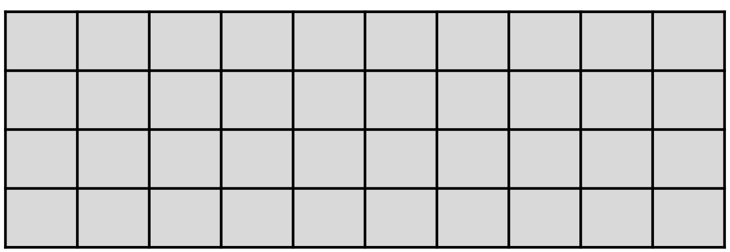
本页内容（硬币问题与压缩感知的关联）修改自
K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing>

硬币问题

【进阶版本】有100个硬币、含少量假币（**假币数目未知，不同假币重量可能不同，可能比真币更重或更轻**）。已知真币的重量（如17克），如何通过p次电子秤，估测哪些币是假币且分别比真币轻/重多少?

用100×1向量$\boldsymbol{x}$表示各币重量与真币重量17克的偏差，即$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{100}$

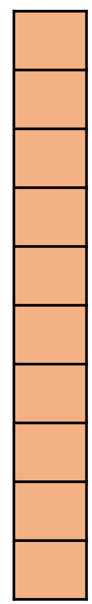
假设求得$x_4=-0.17, x_{20}=0.20$且其余x_i为0，说明第4号币、第20号币为假币且偏差为所得值



$p\times100$ 矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$

（值为1或0，对应是否在该次秤重中把相应币加入）

可自行设计的“测量矩阵”



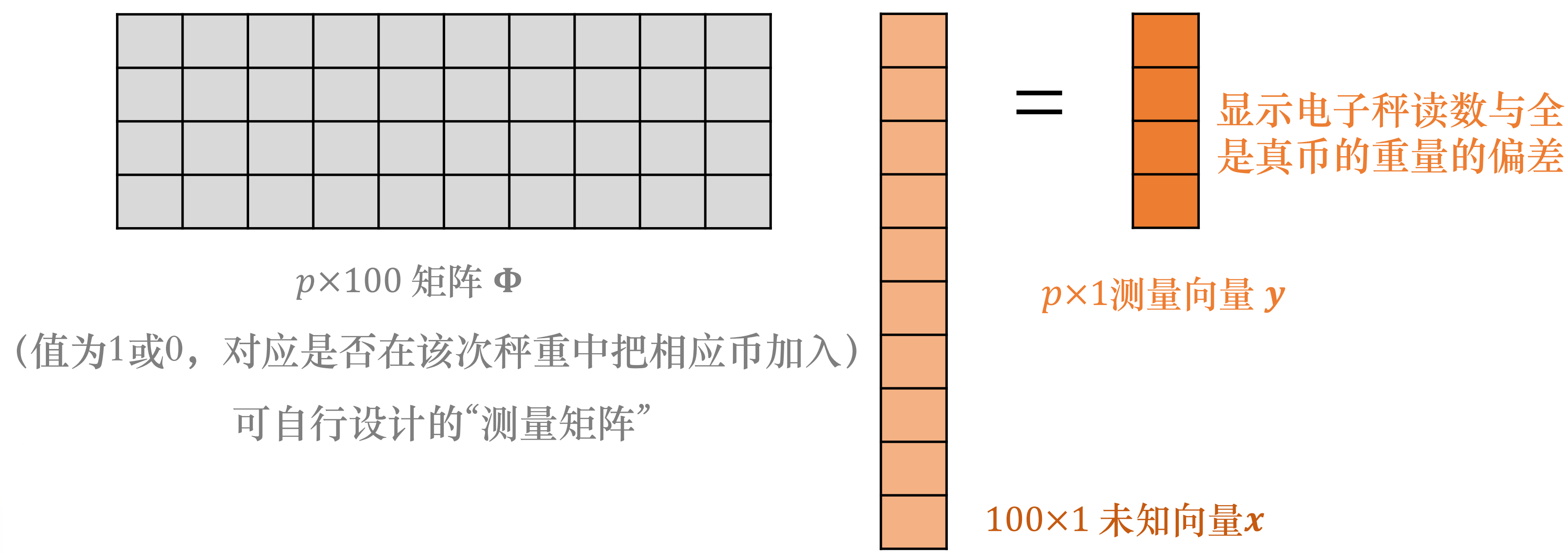
100×1 未知向量$\boldsymbol{x}$

硬币问题

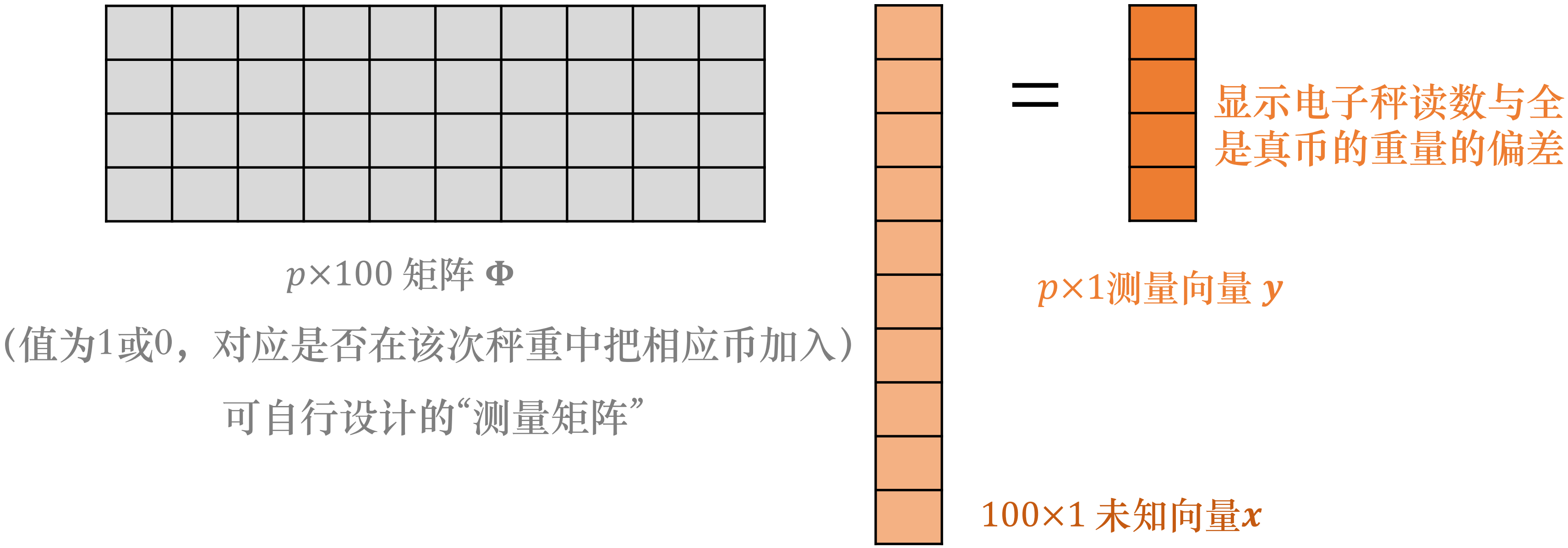
【进阶版本】有100个硬币、含少量假币（**假币数目未知，不同假币重量可能不同，可能比真币更重或更轻**）。已知真币的重量（如17克），如何通过p次电子秤，估测哪些币是假币且分别比真币轻/重多少?

用100×1向量$\boldsymbol{x}$表示各币重量与真币重量17克的偏差，即$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{100}$

假设求得$x_4=-0.17, x_{20}=0.20$且其余x_i为0，说明第4号币、第20号币为假币且偏差为所得值



硬币问题

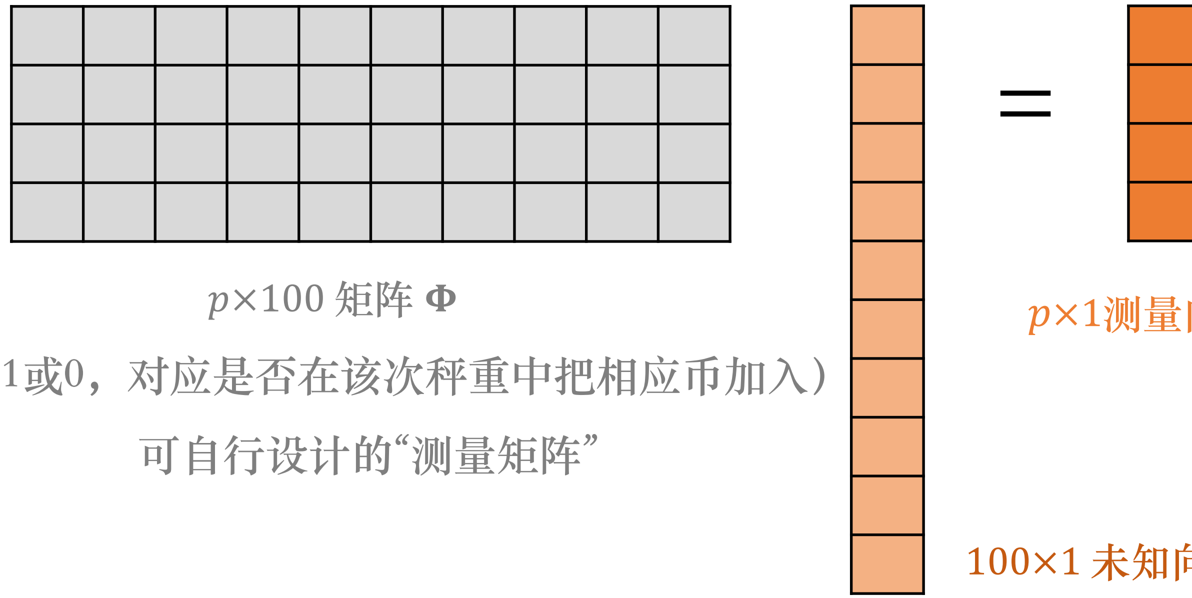


可以视作简化版的压缩感知问题：

（1）如何设计测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$?

（2）如何还原向量$\boldsymbol{x}$?

硬币问题



可以视作简化版的压缩感知问题：

（1）如何设计测量矩阵$\mathbf{\Phi}$：独立随机从{0,1}中取值

（2）如何还原向量$\boldsymbol{x}$：求解最优化问题

$$\min \|\boldsymbol{x}\|_0 \quad \text{s.t.}\ \mathbf{\Phi}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

因假币较少，故$\boldsymbol{x}$是稀疏向量

本讲小结

- 信号的稀疏性
- 压缩感知的思想、有限等距性质

主要参考资料

Tim Roughgarden and Gregory Valiant <CS 168 - The Modern Algorithmic Toolbox> Lecture Notes

Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz <Data Driven Science & Engineering - Machine Learning, Dynamical Systems, and Control> Book

B站WOW大师课 <【大师课】数学天才 陶哲轩Terence Tao 不再恐惧数学 学会新思维>

K. Bryan, T. Leise <Making do with less: An introduction to compressed sensing> Paper

Charles Van Loan <Cornell CS5220: The FFT via Matrix Factorizations> Slides

谢谢！