

中图分类号: TN911.72; TN973.31

文献标志码: A

文章编号: 1674-2230(2021)02-0027-04

# 基于双共轭梯度法的波束形成滤波器系数求解算法

白尔太, 罗 昀, 陈国斌

(电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

**摘要:** 为了避免线性约束最小方差(LCMV)的波束形成算法中协方差矩阵的直接求逆问题, 提出一种双共轭梯度法(BICG)的求解算法。不同于经典的最小均方算法(LMS)和递推最小二乘算法(RLS), 该算法利用协方差矩阵的共轭对称性, 利用迭代法求解滤波器系数而避免直接求逆。分析得到该算法的计算复杂度比直接求逆法低, 并且每次迭代的计算量比LMS和RLS少。最后的仿真实验证明该算法在波束形成算法中具有较高的性能。

**关键词:** 波束形成; 双共轭梯度法; 滤波器

DOI: 10.3969/j.issn.1674-2230.2021.02.007

## An Algorithm of the Coefficient of Beam Forming Filter Based on Bi-Conjugate Gradient

BAI Gatai, LUO Yun, CHEN Guobing

(Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

**Abstract:** In order to avoid the large computation burden of the covariance matrix inverse in beam forming algorithm under linearly constrained minimum variance (LCMV), a bi-conjugate gradient (BICG) algorithm is proposed to solve covariance matrix inverse. Different from the classical least mean squares (LMS) and recursive least-squares (RLS), the property of conjugate symmetry of covariance matrix is used to solve filter coefficients by iterative method. The analysis shows that the computational complexity of the algorithm is lower than that of the direct method. And the computation amount of each iteration is less than that of LMS and RLS. Finally, simulation results show that the proposed algorithm has a high performance in beam forming.

**Key words:** beam forming; bi-conjugate gradient algorithm; filter

## 1 引言

波束形成广泛应用于目标定位、干扰抑制等领域<sup>[1-2]</sup>, 它是一种空间滤波算法, 其核心是通过某种最优准则实现权集的寻优, 实时地将权集调整到最佳位置处, 最后将主瓣输出在信号的来波方向, 以及抑制干扰信号, 通过这些方式, 天线可以有效接收所需信号。在常用的波束形成算法中, 基于线性约束最小方差(LCMV)是比较常用

的准则。为了避免直接求逆运算, 最小均方算法(LMS)<sup>[3]</sup>不需要计算有关的相关函数, 也不需要矩阵求逆运算, 且对信号的统计特性变化具有稳健性, 算法的显著特点是简单, 因而获得了广泛的应用。递推最小二乘(RLS)算法则通过递推方法完成矩阵求逆, 较最小二乘法更简单。文献[4-5]采用RLS算法来避开逆矩阵计算而降低了运算量, 但在快拍数较低时, 算法对噪声抑制效果

收稿日期: 2020-05-18; 修回日期: 2020-06-24

作者简介: 白尔太(1989—), 男, 博士, 工程师; 罗昀(1978—), 男, 硕士, 高级工程师; 陈国斌(1984—), 男, 硕士, 高级工程师。

Copyright © 2021, China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

较差, 同为迭代计算最优权矢量的 LMS 算法, 其收敛速度虽然较 RLS 算法慢, 但是其计算复杂度要低得多。

本文提出了一种直接求滤波器权值系数的方法, 该方法不同于 LMS 和 RLS 算法, 是一种避免直接求逆的迭代法, 它具有非常快的收敛速度和较小的稳态误差, 为波束形成算法在工程中应用提供了强大的支撑。

## 2 波束形成信号模型及相关算法

假设  $M$  元均匀间隔直线阵, 设有 1 个窄带远场信号和  $P$  个干扰信号入射到该阵列, 期望信号的方向为  $\theta_0$ , 干扰信号入射方向分别为  $\theta_i (1 \leq i \leq P)$ 。阵列间距  $d = \lambda/2$ ,  $\lambda$  为波长, 则第  $n$  个阵元接收到的信号为:

$$x_n(t) = s(t - \tau_n(\theta_0)) + \sum_{k=1}^P s_k(t - \tau_n(\theta_k)) + v_n(t) \quad (1)$$

式中:  $n=1, 2, \dots, M$ ,  $s(t)$  为期望信号,  $s_k(t)$  是第  $k$  个干扰信号,  $v_n(t)$  是第  $n$  个阵元接收到的噪声,  $\tau_n(\theta_0)$  是期望信号和干扰信号传播到第  $n$  个阵元的延时, 因此阵列接收矢量为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  是阵列接收数据,  $\mathbf{A}$  是阵列导向矢量,  $\mathbf{s}(t)$  是入射信号,  $\mathbf{v}(t)$  是阵列噪声。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= [s_0(t), s_2(t), \dots, s_P(t)]^T \\ \mathbf{v}(t) &= [v_0(t), v_2(t), \dots, v_M(t)]^T \\ \mathbf{A} &= [\boldsymbol{\alpha}(\theta_0), \boldsymbol{\alpha}(\theta_1), \dots, \boldsymbol{\alpha}(\theta_P)]^T \end{aligned}$$

式中:

$$\boldsymbol{\alpha}(\theta_i) = [1, \dots, \exp(-j2\pi \frac{d \sin \theta_i}{\lambda} (M-1))] \quad (3)$$

在实际情况中, 阵列接收信号的协方差矩阵是通过接收快拍数据估计出来的, 设定快拍数为  $L$ , 则阵列协方差矩阵的估计值为<sup>[6]</sup>:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^H(i) \quad (4)$$

式中:  $(\cdot)^H$  为共轭转置。基于最小方差无失真响应准则进行波束形成的代价函数为:

$$\begin{cases} \min(\boldsymbol{\omega}^H \tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\omega}) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}^H \boldsymbol{\alpha}(\theta_0) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

则阵列的最优加权矢量为<sup>[5]</sup>:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{opt}} = \frac{\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \boldsymbol{\alpha}(\theta_0)}{\boldsymbol{\alpha}^H(\theta_0) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \boldsymbol{\alpha}(\theta_0)} \quad (6)$$

式中:  $(\cdot)^{-1}$  为求逆, 则波束形成期的阵列输出为:

$$y(t) = \boldsymbol{\omega}^H \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

式中:  $\{\cdot\}^*$  表示共轭,  $\{\cdot\}^H$  表示共轭转置。阵列方向图  $p(\theta)$  定义为:

$$p(\theta) = |\boldsymbol{\omega}^H \boldsymbol{\alpha}(\theta)| \quad (8)$$

在工程应用中, 公式 (6) 涉及到矩阵求逆运算, 求逆计算复杂度为矩阵维度的三次方。现有的解决方法为: LMS 算法<sup>[3]</sup>、RLS 方法<sup>[4-5]</sup>和矩阵分解等方法进行的直接矩阵求逆法。这三种算法是通过多个距离门数据逐渐迭代得到滤波器系数。但 LMS 算法的收敛性与步长成比例, 如果步长太大, LMS 算法可能达不到预期的解决效果。但如果步长太小, 就会导致过阻尼情况, 难以跟踪关注的信号。RLS 算法的优点是收敛速度快, 但每次迭代依然需要很大的计算量。

## 3 基于双共轭梯度法的快速算法

### 3.1 BICG 算法

复线性方程组的迭代解法已成为求解大型复线性方程组的主要方法, 但许多适用于实线性方程组的迭代方法, 如共轭梯度法, 对于复线性方程组求解效果并不理想。于是, 有学者提出用双共轭梯度法 (BICG) 求解一般的复线性方程组<sup>[7]</sup>, BICG 算法的主要优点在于: 计算量少, 收敛速度快, 而且下降的速度很快。针对一个对称复线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 通过 BICG 算法求解的步骤如下:

步骤一: 输入复矩阵  $\mathbf{A}$ , 右端向量  $\mathbf{b}$  和初始值

$\mathbf{x}_0$ 。

步骤二: 给出允许误差  $\varepsilon$ , 计算  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$ , 取

$$\hat{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{d}_0^*, \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0, \hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{\mathbf{d}}_0。$$

步骤三: 对于  $i=1, 2, \dots$ , 计算:

步骤 1:

输入复矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$ , 右端向量  $\boldsymbol{\alpha}(\theta_0)$  和初始值

$$\boldsymbol{\omega}_0, \text{ 给出容差 } \varepsilon, \text{ 计算 } \mathbf{d}_0 = \boldsymbol{\alpha}(\theta_0) - \tilde{\mathbf{R}}\boldsymbol{\omega}_0, \text{ 取 } \hat{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{d}_0^*, \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0, \hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{\mathbf{d}}_0;$$

步骤 2:

对于  $i=1, 2, \dots$ , 计算:

$$\alpha_i = \langle \hat{\mathbf{d}}_i, \mathbf{d}_i \rangle / \langle \hat{\mathbf{p}}_i, \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{p}_i \rangle, \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i,$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i - \alpha_i \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{p}_i$$

$$\hat{d}_{i+1} = \hat{d}_i - \alpha_i^* \hat{R} \hat{p}_i, \beta_i = \langle \hat{d}_{i+1}, \hat{d}_{i+1} \rangle / \langle \hat{d}_i, \hat{d}_i \rangle,$$

$$\hat{d}_i \rangle \hat{p}_{i+1} = \hat{d}_{i+1} + \beta_i \hat{p}_i, \hat{p}_{i+1} = \hat{d}_{i+1} + \beta_i^* \hat{p}_i$$

步骤 3:

如果  $\|\hat{p}_{i+1}\| / \|\hat{b}\| < \varepsilon$ , 则输出为  $\omega_{i+1}$ , 结束;

否则  $i = i + 1$  转到步骤 2。

$$\alpha_i = \frac{\langle \hat{d}_i, \hat{d}_i \rangle}{\langle \hat{p}_i, A \hat{p}_i \rangle}, \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \hat{p}_i, \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i - \alpha_i A \hat{p}_i$$

$$\hat{d}_{i+1} = \hat{d}_i - \alpha_i^* A^* \hat{p}_i, \beta_i = \frac{\langle \hat{d}_{i+1}, \hat{d}_{i+1} \rangle}{\langle \hat{d}_i, \hat{d}_i \rangle}$$

$$\hat{p}_{i+1} = \hat{d}_{i+1} + \beta_i \hat{p}_i, \hat{p}_{i+1} = \hat{d}_{i+1} + \beta_i^* \hat{p}_i.$$

步骤四: 如果  $\|\hat{p}_{i+1}\| / \|\hat{b}\| < \varepsilon$  为容差, 则输出为  $\omega_{i+1}$ , 结束; 否则  $i = i + 1$  转到步骤二。

注:  $\|\cdot\|$  表示向量的 2 范数,  $(\cdot)^*$  表示共轭,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示复内积。

### 3.2 BICG-LCMV 算法

波束形成滤波器系数是通过公式  $\omega_{\text{opt}} = \tilde{R}^{-1} \cdot \alpha(\theta_0)$  得到的, 为了避免协方差矩阵  $\tilde{R}$  直接求逆, 将求解滤波器最优系数  $\omega_{\text{opt}}$  的过程转化为求解如下复线性方程组的过程:

$$\tilde{R} \omega = \alpha(\theta_0) \quad (8)$$

杂波协方差矩阵  $\tilde{R}$  是一个复共轭对称矩阵, 可以用双共轭梯度法进行求解。因此得到了双共轭梯度法的波束形成滤波器系数求解算法如表格中的算法一所示。

### 3.3 计算复杂度对比

因为三种算法都是迭代法, 可以对这三种算法每次迭代所产生的计算量进行统计, 统计结果如表 1 所示, 可以看出三种算法具有同样的计算复杂度, 可以看出 BICG 算法具有更少的复数运算量。

表 1 计算量对比

计算量	复数乘法量	复数加法量	复杂度
LMS	$3N^2 + 7N + 4$	$2N^2 + 3N - 1$	$O(N^2)$
RLS	$4N^2 + 5N + 6$	$3N^2 + 2N - 3$	$O(N^2)$
BICG	$2N^2 + 8N + 7$	$2N^2 + 7N - 4$	$O(N^2)$

## 4 仿真分析

本节用仿真实验比较 SMI 算法、BICG 算法、LMS 算法和 RLS 算法在估计波束形成滤波器系

数上的性能。设阵列模型为一维阵, 采样数为 2000, 信号入射角为  $10^\circ$ , 干扰入射角为  $-40^\circ$ 。三个算法的容差都取为:  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ 。

### 4.1 波束显示

图 1、图 2、图 3 和图 4 分别给出了 SMI 算法, RLS 算法, LMS 算法和 BICG 算法对应的波束形成的零陷图, 取阵元数为 16, 可以看出 SMI 算法和 BICG 算法具有同样的零陷性能, LMS 算法性能略优于 RLS 算法。SMI 算法和 BICG 算法的零陷深度最深, 因此其效果优于 LMS 算法和 RLS 算法。

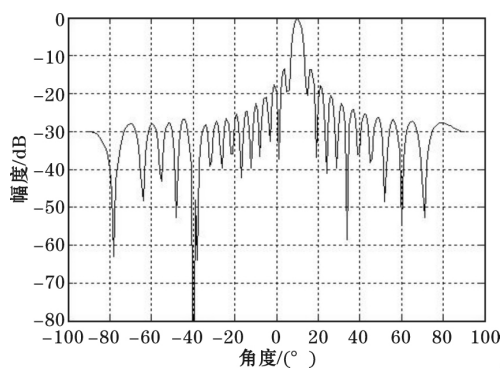


图 1 SMI 算法效果显示图

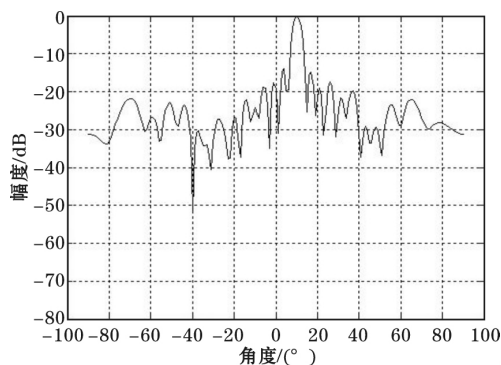


图 2 RLS 算法效果显示图

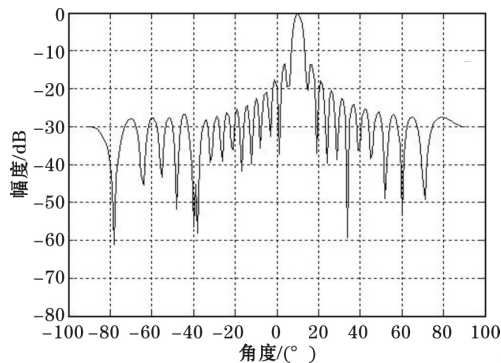


图 3 LMS 算法效果显示图

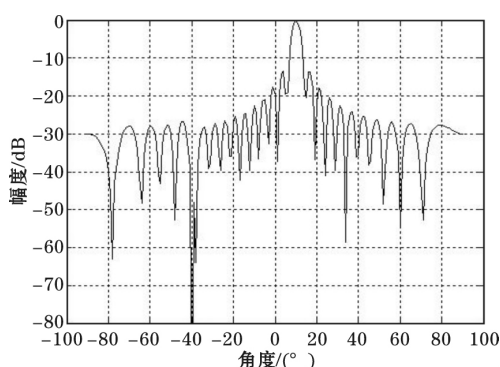


图4 BICG 算法效果显示图

## 4.2 运行时间对比

比较 SMI 算法, LMS 算法, RLS 算法和 BICG 算法随着阵列维度增加时的运算时间变化, 时间用 MATLAB 统计, 其结果显示在图 5 和图 6 中。从图 5 可以看到, 随着阵列数的增加, 三个算法的计算量指数增加, SMI 算法的增长速度最快, 在阵列数为 500 时, 已经远远超出了其他三个算法, 而其他三个算法都在 0.5 s 以内。同时也可以看出 LMS 算法和 BICG 算法比 RLS 算法花费很少的时间, 而 BICG 算法又比 LMS 算法花费更好的时间。综合分析得到, BICG 能以极小的时间计算出波束形成滤波器的系数。

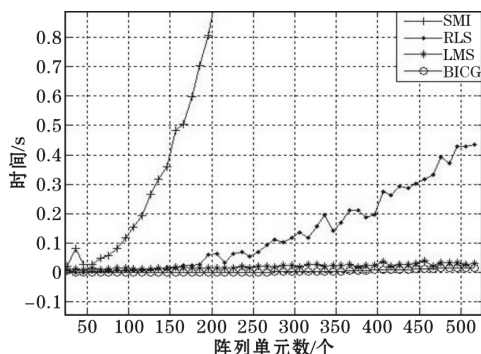


图5 算法运算时间对比

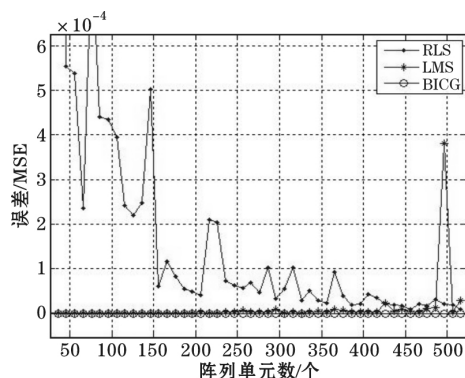


图6 算法运算误差对比

## 4.3 运算误差对比

以 SMI 算法得到的结果为参考估计均方误差, 其结果显示如图 6。可看出 RLS 算法的误差最大, LMS 和 BICG 的误差最小, BICG 的误差略小于 LMS 算法, 但 BICG 算法的鲁棒性比 LMS 算法好, 因此相比与 LMS 算法, BICG 算法的误差更稳定。

综合可以得到, BICG 算法能在较高精度的条件下, 比 LMS 算法和 RLS 算法花费更少的时间, 因此 BICG 算法是求解波束形成滤波器系数的合适算法。

## 5 结束语

本文提出了基于双共轭梯度法 (BICG) 的波束形成滤波器系数求解算法, 这种算法避开求逆过程, 只需要很少次迭代的过程中就能得到滤波器系数, 分析得到该算法比经典的 RLS 算法和 LMS 算法具有更少的计算量。仿真结果显示, BICG 算法能在极少时间内获得高精度的自适应滤波器系数, 具有收敛速度快、计算复杂度低和有稳定鲁棒性的性能。

## 参考文献:

- [1] IO K W. Adaptive Array Processing for Wide-Band Active Sonars [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2004, 29(3): 837-846.
- [2] 刘广钟, 夏晓丽. 水声通信中 RLS-LCMV 波束形成算法的研究[J]. 现代电子技术, 2011, 34(21): 89-91.
- [3] SUN E C, LI Y H, ZHANG D Y. Adaptive Variable-Step Size LMS Filtering Algorithm and Its Analysis [J]. Journal of System Simulation, 2007, 19(14): 3172-3175.
- [4] LI Z L, HAN Z R, DENG L G. Research on An New RLS-LCMV Beamforming Algorithm With Robustness [C]// 4th IEEE International Conference on Wireless Computations, Networking and Mobile Computing, Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2008: 1-3.
- [5] 刘广钟, 夏晓丽. 水声通信中 RLS-LCMV 波束形成算法的研究[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(3): 449-452.
- [6] REED I S, MALLETT J D. Rapid Convergence Rate in Adaptive Arrays [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronics Systems, 1974, 10(6): 853-863.
- [7] 张永杰, 孙秦. 大型复线性方程组预处理双共轭梯度法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(36): 19-20.