



全国高等学校自动化专业系列教材  
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程配套教材

Exercises for Fundamentals of Control Engineering

# 工程控制基础 习题解答

杨 明 翁正新 编著  
Yang Ming Weng Zhengxin

田作华 韩正之 主审  
Tian Zuohua Han Zhengzhi



清华大学出版社



全国高等学校自动化专业系列教材  
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程配套教材

Exercises for Fundamentals of Control Engineering

# 工程控制基础 习题解答

杨 明 翁正新 编著

Yang Ming Weng Zhengxin

清华大学出版社

## 内 容 简 介

本书是与上海交通大学国家精品课程“自动控制原理”主讲教材《工程控制基础》配套的学习辅导书和辅助教学用书。本书以国家精品教材《工程控制基础》为主线,参考教育部高等学校自动化类专业教学指导委员会对与“自动控制原理”课程相关的知识领域、知识单元、知识点的要求,本着“加强基础、削枝强干、注重应用、逐步更新”的原则,力图通过教材的要点提示和典型例题的分析求解,为广大读者学习此课程提供必须掌握的基础理论和基本方法。

本书可作为高等学校工科各专业,如电子信息类、机械工程类、电气工程类、仪器仪表类、工程物理类等专业本科生学习控制理论的辅导书,也可供相关领域专业技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

工程控制基础习题解答/杨明,翁正新编著. —北京: 清华大学出版社, 2015

全国高等学校自动化专业系列教材

ISBN 978-7-302-38434-2

I. ①工… II. ①杨… ②翁… III. ①工程控制论—高等学校—题解 IV. ①TB114. 2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 260761 号

责任编辑: 王一玲

封面设计: 傅瑞学

责任校对: 白 蕾

责任印制: 宋 林

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈: 010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者: 北京密云胶印厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 175mm×245mm

印 张: 17.5

字 数: 359 千字

版 次: 2015 年 6 月第 1 版

印 次: 2015 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 1~1500

定 价: 39.00 元

---

产品编号: 057859-01

# 出版说明

《全国高等学校自动化专业系列教材》



为适应我国对高等学校自动化专业人才培养的需要,配合各高校教学改革的进程,创建一套符合自动化专业培养目标和教学改革要求的新型自动化专业系列教材,“教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会”(简称“教指委”)联合了“中国自动化学会教育工作委员会”、“中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会”、“中国系统仿真学会教育工作委员会”和“中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科委员会”四个委员会,以教学创新为指导思想,以教材带动教学改革为方针,设立专项资助基金,采用全国公开招标方式,组织编写出版了一套自动化专业系列教材——《全国高等学校自动化专业系列教材》。

本系列教材主要面向本科生,同时兼顾研究生;覆盖面包括专业基础课、专业核心课、专业选修课、实践环节课和专业综合训练课;重点突出自动化专业基础理论和前沿技术;以文字教材为主,适当包括多媒体教材;以主教材为主,适当包括习题集、实验指导书、教师参考书、多媒体课件、网络课程脚本等辅助教材;力求做到符合自动化专业培养目标、反映自动化专业教育改革方向、满足自动化专业教学需要;努力创造使之成为具有先进性、创新性、适用性和系统性的特色品牌教材。

本系列教材在“教指委”的领导下,从2004年起,通过招标机制,计划用3~4年时间出版50本左右教材,2006年开始陆续出版问世。为满足多层次、多类型的教学需求,同类教材可能出版多种版本。

本系列教材的主要读者群是自动化专业及相关专业的大学生和研究生,以及相关领域和部门的科学工作者和工程技术人员。我们希望本系列教材既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和适于教学的教材或参考书,也能为广大科学工作者和工程技术人员的知识更新与继续学习提供适合的参考资料。感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持,并欢迎提出批评和意见。

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

2005年10月于北京

# 《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

顾问 (按姓氏笔画):

王行愚(华东理工大学)	冯纯伯(东南大学)
孙优贤(浙江大学)	吴启迪(同济大学)
张嗣瀛(东北大学)	陈伯时(上海大学)
陈翰馥(中国科学院)	郑大钟(清华大学)
郑南宁(西安交通大学)	韩崇昭(西安交通大学)

主任委员: 吴 澄(清华大学)

副主任委员: 赵光宙(浙江大学) 萧德云(清华大学)

委员 (按姓氏笔画):

王 雄(清华大学)	方华京(华中科技大学)
史 震(哈尔滨工程大学)	田作华(上海交通大学)
卢京潮(西北工业大学)	孙鹤旭(河北工业大学)
刘建昌(东北大学)	吴 刚(中国科技大学)
吴成东(沈阳建筑工程学院)	吴爱国(天津大学)
陈庆伟(南京理工大学)	陈兴林(哈尔滨工业大学)
郑志强(国防科技大学)	赵 曜(四川大学)
段其昌(重庆大学)	程 鹏(北京航空航天大学)
谢克明(太原理工大学)	韩九强(西安交通大学)
褚 健(浙江大学)	蔡鸿程(清华大学出版社)
廖晓钟(北京理工大学)	戴先中(东南大学)

工作小组(组长): 萧德云(清华大学)

(成员): 陈伯时(上海大学) 郑大钟(清华大学)  
田作华(上海交通大学) 赵光宙(浙江大学)  
韩九强(西安交通大学) 陈兴林(哈尔滨工业大学)  
陈庆伟(南京理工大学)

(助理): 郭晓华(清华大学)

责任编辑: 王一玲(清华大学出版社)

# 序

## FOREWORD

自动化学科有着光荣的历史和重要的地位,20世纪50年代我国政府就十分重视自动化学科的发展和自动化专业人才的培养。五十多年来,自动化科学技术在众多领域发挥了重大作用,如航空、航天等,“两弹一星”的伟大工程就包含了许多自动化科学技术的成果。自动化科学技术也改变了我国工业整体的面貌,不论是石油化工、电力、钢铁,还是轻工、建材、医药等领域都要用到自动化手段,在国防工业中自动化的作用更是巨大的。现在,世界上有很多非常活跃的领域都离不开自动化技术,比如机器人、月球车等。另外,自动化学科对一些交叉学科的发展同样起到了积极的促进作用,例如网络控制、量子控制、流媒体控制、生物信息学、系统生物学等学科就是在系统论、控制论、信息论的影响下得到不断的发展。在整个世界已经进入信息时代的背景下,中国要完成工业化任务还很重,或者说我们正处在后工业化的阶段。因此,国家提出走新型工业化的道路和“信息化带动工业化,工业化促进信息化”的科学发展观,这对自动化科学技术的发展是一个前所未有的战略机遇。

机遇难得,人才更难得。要发展自动化学科,人才是基础、是关键。高等学校是人才培养的基地,或者说人才培养是高等学校的根本。作为高等学校的领导和教师始终要把人才培养放在第一位,具体对自动化系或自动化学院的领导和教师来说,要时刻想着为国家关键行业和战线培养和输送优秀的自动化技术人才。

影响人才培养的因素很多,涉及教学改革的方方面面,包括如何拓宽专业口径、优化教学计划、增强教学柔性、强化通识教育、提高知识起点、降低专业重心、加强基础知识、强调专业实践等,其中构建融会贯通、紧密配合、有机联系的课程体系,编写有利于促进学生个性发展、培养学生创新能力的教材尤为重要。清华大学吴澄院士领导的《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会,根据自动化学科对自动化技术人才素质与能力的需求,充分吸取国外自动化教材的优势与特点,在全国范围内,以招标方式,组织编写了这套自动化专业系列教材,这对推动高等学校自动化专业发展与人才培养具有重要的意义。这套系列教材的建设有新思路、新机制,适应了高等学校教学改革与发展的新形势,立足创建精品教材,重视实

践性环节在人才培养中的作用,采用了竞争机制,以激励和推动教材建设。在此,我谨向参与本系列教材规划、组织、编写的老师致以诚挚的感谢,并希望该系列教材在全国高等学校自动化专业人才培养中发挥应有的作用。

吳啓迪 教授

2005年10月于教育部

# 序

## FOREWORD >>>

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会在对国内外部分大学有关自动化专业的教材做深入调研的基础上,广泛听取了各方面的意见,以招标方式,组织编写了一套面向全国本科生(兼顾研究生)、体现自动化专业教材整体规划和课程体系、强调专业基础和理论联系实际的系列教材,自2006年起将陆续面世。全套系列教材共50多本,涵盖了自动化学科的主要知识领域,大部分教材都配置了包括电子教案、多媒体课件、习题辅导、课程实验指导书等立体化教材配件。此外,为强调落实“加强实践教育,培养创新人才”的教学改革思想,还特别规划了一组专业实验教程,包括《自动控制原理实验教程》、《运动控制实验教程》、《过程控制实验教程》、《检测技术实验教程》和《计算机控制系统实验教程》等。

自动化科学技术是一门应用性很强的学科,面对的是各种各样错综复杂的系统,控制对象可能是确定性的,也可能是随机性的;控制方法可能是常规控制,也可能需要优化控制。这样的学科专业人才应该具有什么样的知识结构,又应该如何通过专业教材来体现,这正是“系列教材编审委员会”规划系列教材时所面临的问题。为此,设立了《自动化专业课程体系结构研究》专项研究课题,成立了由清华大学萧德云教授负责,包括清华大学、上海交通大学、西安交通大学和东北大学等多所院校参与的联合研究小组,对自动化专业课程体系结构进行深入的研究,提出了按“控制理论与工程、控制系统与技术、系统理论与工程、信息处理与分析、计算机与网络、软件基础与工程、专业课程实验”等知识板块构建的课程体系结构。以此为基础,组织规划了一套涵盖几十门自动化专业基础课程和专业课程的系列教材。从基础理论到控制技术,从系统理论到工程实践,从计算机技术到信号处理,从设计分析到课程实验,涉及的知识单元多达数百个、知识点几千个,介入的学校50多所,参与的教授120多人,是一项庞大的系统工程。从编制招标要求、公布招标公告,到组织投标和评审,最后商定教材大纲,凝聚着全国百余位教授的心血,为的是编写出版一套具有一定规模、富有特色的、既考虑研究型大学又考虑应用型大学的自动化专业创新型系列教材。

然而,如何进一步构建完善的自动化专业教材体系结构?如何建设基础知识与最新知识有机融合的教材?如何充分利用现代技术,适应现代大学生的接受习惯,改变教材单一形态,建设数字化、电子化、网络化等多元

形态、开放性的“广义教材”？等等，这些都还有待我们进行更深入的研究。

本套系列教材的出版，对更新自动化专业的知识体系、改善教学条件、创造个性化的教学环境，一定会起到积极的作用。但是由于受各方面条件所限，本套教材从整体结构到每本书的知识组成都可能存在许多不当甚至谬误之处，还望使用本套教材的广大教师、学生及各界人士不吝批评指正。

吴衍院士

2005年10月于清华大学

尊敬的吴衍院士：感谢您百忙之中抽空阅读《工程控制基础》一书。本书是本人在清华大学完成的博士论文，主要研究内容是“基于时变参数的非线性系统辨识”。书中有关时变参数辨识部分，本人参考了您的《工程控制基础》，并在此基础上做了大量的工作。本人在书中引用了您的部分观点，特此向您表示感谢！

本人在撰写博士学位论文时，参考了吴衍院士的《工程控制基础》，并在此基础上做了大量的工作。本人在书中引用了您的部分观点，特此向您表示感谢！

本人在撰写博士学位论文时，参考了吴衍院士的《工程控制基础》，并在此基础上做了大量的工作。本人在书中引用了您的部分观点，特此向您表示感谢！



本书是上海交通大学国家精品课程“自动控制原理”主讲教材《工程控制基础》的指导性、教学用书，供教师和学生使用。《工程控制基础》是国家“十一五”规划教材，教育部自动化教学指导委员会推荐教材。该出自2006年出版以来，受到广大读者的厚爱，并于2008年被评为国家级精品教材。使用过程中，不少兄弟院校来函来电，希望能尽早出版与此教材相配套的教学指导和习题解答。经课程组老师多次协商，决定以国家精品教材为主线，参考教育部教指委对“自动控制原理”课程相关的知识领域、知识单元、知识点的要求，本着“加强基础、削枝强干、注重应用、逐步更新”的原则，编写了这本指导书，力图通过教材的要点提示和典型题例的分析求解，为广大读者掌握本课程的基础理论和基本方法提供方便。

为了进一步加深对课程的理解，我们将习题分为四种类型：基本题、深入题、实际题和MATLAB题，分别作为基本要求、进一步掌握和学会用现代计算手段分析控制系统的训练要求。力求做到：

- (1) 在指导思想上，强调与信息技术结合；
- (2) 在内容安排上，坚持“加强基础，削枝强干”；
- (3) 在体系结构上，理清“三纵三横”。“三纵”指系统的“三域”模型（时域、复域、频域），“三横”指基于“三域”的控制系统“三性”（稳定性、动态特性、稳态特性）分析。

考虑到面上的需求，本书的选题比较侧重于基本训练，同时考虑到部分同学报考硕士研究生，选题还参考了相关学校的研究生入学试卷，扩大了本书的适用面。这对教师上课、同学自学和报考研究生都是有益的。

上海交通大学国家精品课程“自动控制原理”课程组的全体老师都参加了本教材编写。这里我们要特别感谢清华大学出版社的王一玲编辑，她为本教材的编写、协调付出了大量的心血。此外，杨博、赖晓阳、鲍其莲、王伟、李亮、唐卫、黄睿、马力伟、叶琳、夏尚、华山、刘义成、汪浩、颜秉勇、冯祖莹、冯军等同志为本书做了大量的工作，在此我们一并深表谢意。

鉴于作者的能力水平所限，本书的内容和选题方面难免存在错误和不足之处，恳请广大读者批评指正。

编 者

2015年1月于上海

# 目录

## CONTENTS



<b>第1章 导论</b>	1
要点提示	1
1.1 自动控制系统的根本原理和组成	1
1.2 控制系统的分类	2
习题解答	2
<b>第2章 控制系统的数学模型</b>	10
要点提示	10
2.1 控制系统的时域数学模型——微分方程	10
2.2 控制系统的复域数学模型——传递函数	10
2.3 控制系统的频域数学模型——频率特性	12
2.4 控制系统的方块图	12
2.5 信号流图	14
习题解答	15
<b>第3章 自动控制系统的时域分析</b>	29
要点提示	29
3.1 控制系统的稳定性分析	29
3.2 控制系统的稳态特性——稳态误差分析	30
3.2.1 稳态误差定义	30
3.2.2 稳态误差系数和稳态误差计算	30
3.2.3 几点结论	30
3.3 控制系统的动态特性——动态响应分析	31
3.3.1 控制系统动态响应指标	31
3.3.2 一阶系统的单位阶跃响应	31
3.3.3 二阶系统的单位阶跃响应	32
3.3.4 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应主要指标	32
3.3.5 高阶系统的动态响应	32
3.3.6 主导极点、偶极子和附加零极点	33
习题解答	33

第 4 章 根轨迹法 .....	67
要点提示 .....	67
4.1 根轨迹的幅值条件和相角条件 .....	67
4.2 绘制根轨迹的基本规则 .....	68
习题解答 .....	68
第 5 章 线性系统的频域分析——频率响应法 .....	116
要点提示 .....	116
5.1 频率特性 .....	116
5.2 频率特性图 .....	116
5.2.1 奈奎斯特(Nyquist)图 .....	116
5.2.2 伯德(Bode)图 .....	117
5.2.3 尼科尔斯(Nichols)图 .....	117
5.3 最小相位系统和非最小相位系统 .....	117
5.4 频域中的稳定性判据 .....	117
5.4.1 奈氏稳定性判据 .....	117
5.4.2 增益裕度 GM .....	118
5.4.3 相位裕度 $\gamma$ .....	118
5.5 基于闭环频率特性的系统动态性能分析 .....	118
习题解答 .....	118
第 6 章 线性控制系统的应用 .....	166
要点提示 .....	166
6.1 常见的几种校正装置连接方式 .....	166
6.2 不同域中系统动态性能指标的相互关系 .....	167
6.3 串联超前校正 .....	167
6.3.1 伯德图法 .....	167
6.3.2 根轨迹法 .....	168
6.4 串联滞后校正 .....	169
6.4.1 伯德图法 .....	169
6.4.2 根轨迹法 .....	169
6.5 串联超前-滞后校正 .....	171
6.6 局部反馈校正 .....	172
6.7 PID 控制器 .....	173
6.8 前馈补偿与复合控制 .....	173
6.8.1 按输入补偿的复合控制系统 .....	174

6.8.2 按扰动补偿的复合控制系统 .....	174
习题解答 .....	175
<b>第7章 非线性反馈控制系统 .....</b>	<b>227</b>
要点提示 .....	227
7.1 非线性控制系统的概述 .....	227
7.2 描述函数法 .....	228
7.2.1 描述函数 .....	228
7.2.2 描述函数分析 .....	230
7.3 相平面法 .....	231
7.3.1 相轨迹的基本概念 .....	231
7.3.2 奇点和极限环 .....	231
7.3.3 相轨迹的绘制 .....	233
7.3.4 非线性系统的相平面分析 .....	234
习题解答 .....	234
<b>第8章 计算机控制系统 .....</b>	<b>245</b>
要点提示 .....	245
8.1 计算机控制系统的硬件组成 .....	245
8.2 采样与恢复 .....	245
8.2.1 采样过程 .....	245
8.2.2 采样定理 .....	245
8.2.3 信号恢复 .....	246
8.3 $z$ 变换 .....	246
8.3.1 $z$ 变换的定义 .....	246
8.3.2 $z$ 变换的基本性质 .....	246
8.3.3 $z$ 变换的求法 .....	247
8.3.4 $z$ 反变换的求法 .....	247
8.4 脉冲传递函数 .....	247
8.4.1 数字部分的脉冲传递函数 .....	248
8.4.2 连续部分的脉冲传递函数 .....	248
8.4.3 闭环脉冲传递函数 .....	248
8.5 离散控制系统的性能分析 .....	248
8.5.1 离散控制系统的稳定性分析 .....	248
8.5.2 离散控制系统的动态性能和稳态性能分析 .....	249
8.6 数字控制器的设计 .....	249
习题解答 .....	249

# 第1章

## 导论

### 要点提示

自动化是工业现代化的基础。自动化水平是反映现代化程度的重要标志之一。

自动控制——指在脱离人的直接干预,利用控制装置使被控对象的某些指标(如温度、压力、PH 值等)按照预先设计的规律运行。

自动控制系统——指完成自动控制的一个整体。

本章主要介绍一般自动控制系统的工作原理、组成、分类及常规的研究手段。

### 1.1 自动控制系统的根本原理和组成

典型的闭环系统结构框图一般具有如图 1-1 所示的形式。

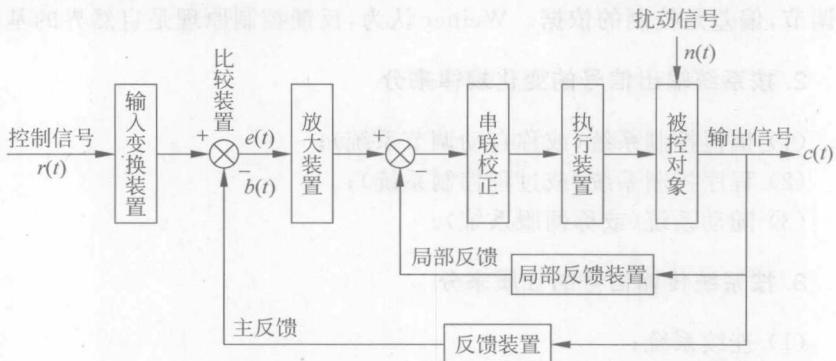


图 1-1 典型闭环控制系统的组成框图

**输入信号  $r(t)$  与输入变换元件** 输入到系统中控制输出量变化的信号称为输入信号  $r(t)$ (又称给定量或控制量),它通过输入变换装置转换成比较装置要求的物理量。

**反馈装置与反馈信号  $b(t)$**  用来测量被控量并按特定的函数关系反馈到系统输入端的器件称为反馈(检测)装置,反馈装置的输出叫反馈信号。用来减小误差的反馈为负反馈,由它和输入产生误差信号。

**比较装置与误差信号  $e(t)$**  比较装置是把输入信号与反馈信号相减,其输出为误差信号,简称为误差。

**放大装置** 比较装置给出的信号通常很小,必须将它进行放大(包括幅值和功率等)。常用的有电子放大器、液压放大器等。

**执行装置** 能产生驱动被控对象的信号,以改变系统输出,常用的有直流伺服电机等。

**校正装置** 它是为了改善系统的性能而引入的。串联校正装置是串接在系统前向通道中的校正装置,而在系统局部反馈回路内接入的反馈装置称为反馈校正装置。

**被控对象与输出信号  $c(t)$**  被控对象即系统要求控制的对象,其输出量为系统的输出信号,又称为被控制量。

**扰动信号  $n(t)$**  除输入信号外,影响系统输出的其他输入统称为扰动信号。扰动信号通常是不能量测和控制的。

## 1.2 控制系统的分类

控制系统种类很多,有不同的分类方法,这里介绍三种常见的分类。

### 1. 按信号的传递路径来分

- (1) 开环控制系统;
- (2) 闭环控制系统。

反馈控制原理检测偏差、利用偏差、消除偏差。闭环控制系统根据反馈原理进行调节,偏差是控制的依据。Weiner 认为,反馈控制原理是自然界的基本规律之一。

### 2. 按系统输出信号的变化规律来分

- (1) 恒值控制系统(或称自动调节系统);
- (2) 程序控制系统(或过程控制系统);
- (3) 随动系统(或称伺服系统)。

### 3. 按系统传输信号的性质来分

- (1) 连续系统;
- (2) 离散系统。

## 习题解答

### A 基本题

**A1-1** 什么是反馈? 什么是正反馈和负反馈? 为消除系统误差,为什么工程上反馈控制必须是负反馈?

**解** 根据结果来改变控制的称为反馈。反馈的特点是存在从结果(输出)到原因(输入)的信息通道,测量装置将测量到的输出信号的全部或一部分返回输入端。在工程控制系统中,由测量装置量测输出情况,将它与理想目标进行比较,产生偏差,利用偏差来消除偏差。

**正反馈和负反馈** 反馈元件的输出叫反馈信号,根据反馈信号的极性,又把反馈信号与输入信号同极性的反馈叫正反馈,反极性的反馈叫负反馈。

社会系统经常采用正反馈,如果一项政策、措施产生的效果好,就加强,效果不好就取消,这就是正反馈。

工程系统通常采用负反馈,这是因为工程上的控制装置常常是用来保障被控对象按照预定的规律运行的,由于外界扰动和系统参数变化等因素会导致对象输出与目标值之间产生误差,工程控制的目标就是克服这种偏差,因此工程上反馈控制必须是负反馈。

**A1-2** 人在平时生活中做的许多事情,如走路、取物、吃食物、阅读、清扫等都带有反馈控制作用,试举例,并用框图说明其反馈工作原理。

**解** 日常生活中,人们朝一个预定目标的行走便带有负反馈控制作用。首先,人会根据自己的目的地设定一条行走的路线,然后沿着设定的路线行走,但在行走的过程中可能会受到一些干扰(如路线中某一段路上有障碍物挡住了路线)而偏离了设定的路线,人通过感官感觉偏离了预定路线,就将偏差送给人的大脑,大脑会控制人的脚朝着减小偏差的方向行走。这便是一个典型的负反馈控制系统。其框图如图 1-2 所示。

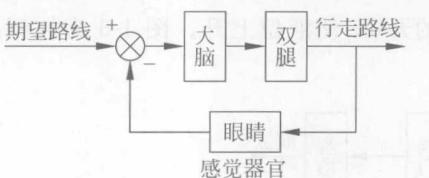


图 1-2 人的反馈控制系统框图



图 1-3 电视机频道控制系统框图

**A1-3** 现在家电设备在人们日常生活中已经十分普及。试从家电中举几个开环和闭环控制系统的例子,说明它们的工作原理,并画出其框图。

**解 开环控制系统** 电视机的频道控制是一个开环控制系统,人根据自己的喜好通过电视机的遥控器(或电视机面板上的控制器)选择对应的频道,控制器发出控制命令使电视机切换到对应的频道。其框图如图 1-3 所示。

**闭环控制系统** 家用空调的温度控制是一个闭环控制系统。开始人设定期望的温度,通过电子线路将这一信号传给控制器,控制器发送命令给执行机构(如空气压缩机,风扇等)使它们动作,传感器检测室内的温度,这个温度与设定温度相比较得出差值,控制器根据差值来操纵执行机构。其框图如图 1-4 所示。

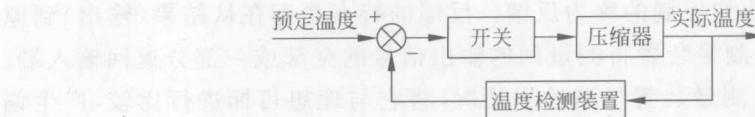


图 1-4 空调温度控制系统框图

**A1-4** 在日常也有许多人参与系统的控制。图 1-5 是一个液位控制系统，其输出管路是一直开启的，控制目标是保持容器中的液位为恒值，液位由仪表中读出。

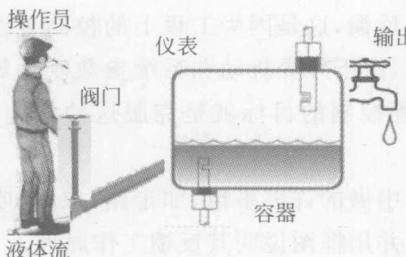


图 1-5 液位控制系统示意图

- (1) 说明系统的工作原理，画出其框图，并指出系统的测量装置与执行装置；
- (2) 配上适当的元器件，将系统改为自动控制系统，并说明其工作原理，画出系统框图，指出输入量、输出量、被测量和控制器。

解 (1) 系统要求液位有一个设定值，仪表测得液位的实际值，操作员将实际值与设定值相比较，如果实际值比设定值大，操作员就减小阀门的开度，使液位下降；如果实际值比设定值小，操作员就增大阀门的开度，使液位上升。图 1-6 为控制系统框图，

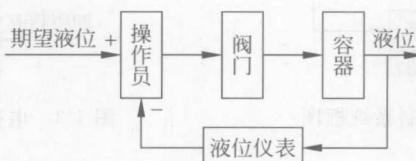


图 1-6 液位控制系统框图

其中测量装置为仪表，执行装置为阀门。(应该将操作员放在比较器的位置上)

- (2) 略。

**A1-5** 试绘制图 1-7 随动系统的方框图。如果系统的反馈变成正反馈，会产生什么后果？

解 随动系统的方框图如图 1-8 所示。

如果系统的反馈变成正反馈，无法得到发信器的转角  $\theta_r$  与收信器的转角  $\theta_c$  的角偏差  $\theta = \theta_r - \theta_c$ ，得到的是  $\theta = \theta_r + \theta_c$ ，无法根据这个信号实现角度跟踪。

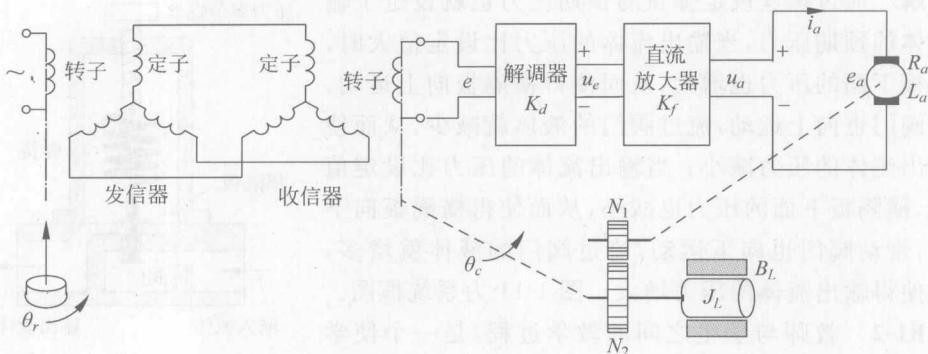


图 1-7 随动系统原理图

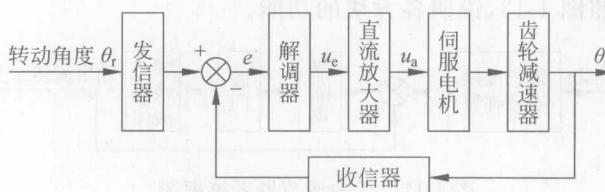


图 1-8 随动系统框图

**A1-6** 试绘制图 1-13 离心调速器的方框图,如果将从导向阀通向伺服阀的两根管路对调,将会产生什么后果?改变飞球的旋转方向,会产生相同的结果吗?

解 离心调速器的方框图如图 1-9 所示。

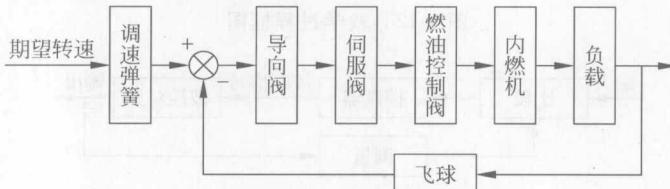


图 1-9 离心调速器系统框图

如果将从导向阀通向伺服阀的两根管路对调,当负载转速降低时,燃油控制阀朝着开度减小的方向转动,内燃机转速进一步减小,即产生了正反馈,系统不稳定。改变飞球的旋转方向,不会产生任何影响。

## B 实践题

**B1-1** 图 1-10 是压力调节器的原理图。通过压力调节器的流体由阀门控制,而阀门是由横隔板来操纵的,作用在其上下两边的压力差使横隔板向上或向下运动,弹簧的预期压力可以通过压力调节螺丝设定。这是一个以输出流体压力为控制对象的自动控制系统,试分析其工作原理,并画出系统的框图。

**解** 通过螺丝设定弹簧的预期压力也就设定了输出流体的预期压力,当输出流体的压力比设定值大时,横隔板下面的压力也增大,从而使得横隔板向上运动,带动阀门也向上运动,流过阀门的液体就减少,从而使得输出流体的压力减小;当输出流体的压力比设定值小时,横隔板下面的压力也减小,从而使得横隔板向下运动,带动阀门也向下运动,流过阀门的液体就增多,从而使得输出流体的压力增大。图 1-11 为系统框图。

**B1-2** 教师与学生之间的教学过程,是一个使学生根据教学大纲要求掌握知识的过程,实际上是一个使系统误差趋于最小的反馈控制过程。试绘制教学过程的方框图,并对照图 1-13,说明各方块的功能。

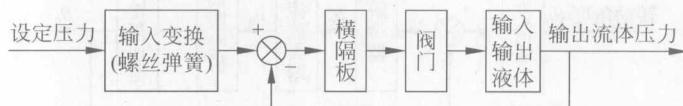


图 1-11 压力调节器系统框图

**解** 教学过程的方框图如图 1-12 所示。



图 1-12 教学过程框图



图 1-13 控制系统框图

教学大纲就是输入,即设定的目标,老师就相当于一个控制器,向学生发送控制信号,学生即为被控对象,输出即为学生学到的知识,考试相当于一种传感器,检测学生学到的知识,比较器将教学大纲要求学生掌握的知识与学生实际学到的知识进行比较,老师根据比较结果来调整教学过程。

**B1-3** 图 1-14 是补偿直流电机负载扰动的恒速调节系统。

(1) 试分析系统补偿直流电机负载扰动的工作原理(当由于电机负载增大使转速降低,系统如何使转速恢复);

(2) 为达到补偿目的,电压放大的输出极性应当是怎样的?为什么?

**解** (1) 当电机负载增大时转速降低,反电势减小,电枢电流增大,反馈电压增大且与给定电压的极性相同,导致作用在电枢两端的电压增大,转速上升,直到转速恢复。

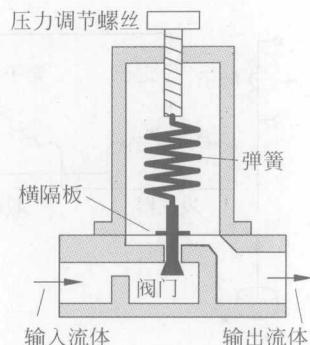


图 1-10 压力调节器原理图

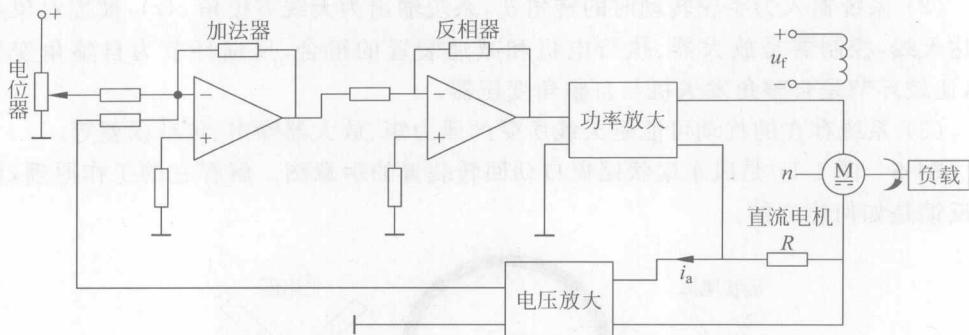


图 1-14 补偿电机负载扰动的恒速调节系统

(2) 应该与给定电压的极性相同。原因参见(1)。

**B1-4** 图 1-15 是雷达天线方位随动系统机电连接图。

(1) 画出系统的方框图；

(2) 系统的输入、输出、被控对象、控制器、反馈环节、比较环节分别是什么？

(3) 列举被控对象可能存在扰动的因素。

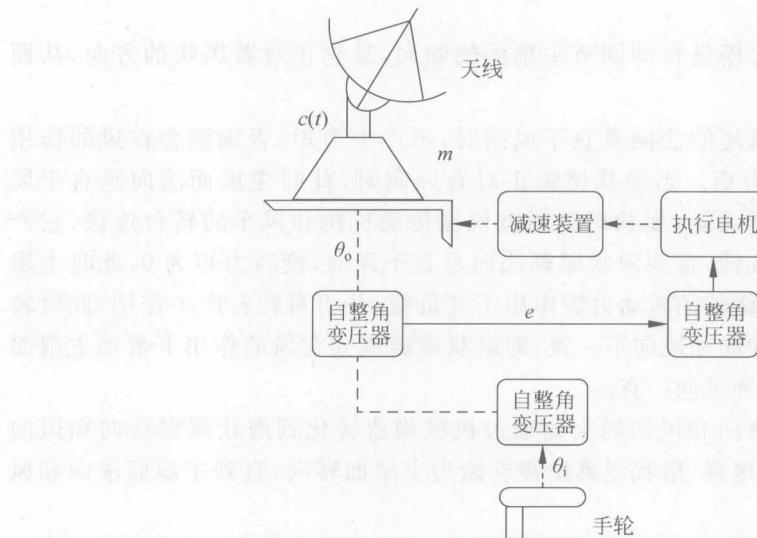


图 1-15 雷达天线方位随动系统机电连接图

解 (1) 系统方框图如图 1-16 所示。

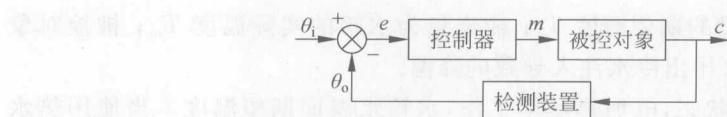


图 1-16 雷达天线方位随动系统框图

(2) 系统输入为手轮转动时的转角  $\theta_0$ , 系统输出为天线方位角  $c(t)$ , 被控对象是雷达天线, 控制器是放大器、执行电机和减速装置的组合, 反馈环节为自整角变压器, 比较环节是自整角发送机与自整角变压器。

(3) 系统存在的扰动可能是天线所受的风力矩、放大器噪声、传动误差等。

**B1-5** 图 1-17 是风车扇状尾翼自动回转装置的示意图。解释它的工作原理, 说明反馈是如何建立的。

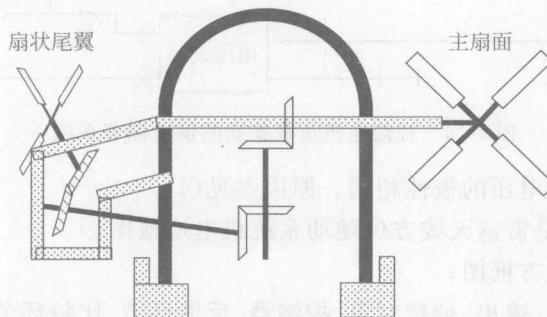


图 1-17 风车扇状尾翼自动回转装置示意图

解

自动回转装置的作用是自动调节主扇面的朝向, 是它正对着风吹的方向, 从而产生最大的旋转力矩。

当主扇面或者扇状尾的法向垂直于风向时, 不产生力矩, 否则就会在风的作用下产生绕着轴的旋转力矩。当扇状尾翼正对着风向时(此时主扇面法向垂直于风向), 扇状尾翼产生旋转力矩, 扇状尾翼通过机械传动机构和风车的转台连接, 它产生的旋转力矩使转台旋转, 直到扇状尾翼法向垂直于风向, 旋转力矩为 0, 此时主扇面正对风向, 而主扇面绕轴的转动力矩作用于其负载, 并不对转台产生作用, 此时转台静止。一旦主扇面法向和风向不一致, 即扇状尾翼就会在风的作用下带动主扇面转向, 直到主扇面法向和风向一致。

建立反馈主扇面法向和风向的夹角通过机械构造转化到扇状尾翼法向和风向的夹角, 风作用于扇状尾翼, 扇状尾翼旋转反馈为主扇面转向, 直到主扇面法向和风向的夹角为 0。

**B1-6** 图 1-18 是热水电加热器系统示意图。由温控开关接通或断开电加热器的电源来控制温度。当使用热水时, 热水流出, 冷水补入。请解释系统工作原理并画出系统原理方框图。

解 系统输入为预设的期望温度  $T_d$ ; 输出量为水箱的实际温度  $T_m$ ; 被控对象为水箱; 扰动信号是热水排出冷水注入导致的降温。

当  $T_d = T_m$  时, 平衡状态, 电加热器不工作, 水箱水温即期望温度。当使用热水时,  $T_m < T_d$ , 温差信号经过转换变成电信号驱动温控开关工作, 开关接通电源, 开始加热, 使水箱中的水升温, 直到  $T_d = T_m$ , 停止加热。系统原理方框图如图 1-19 所示。

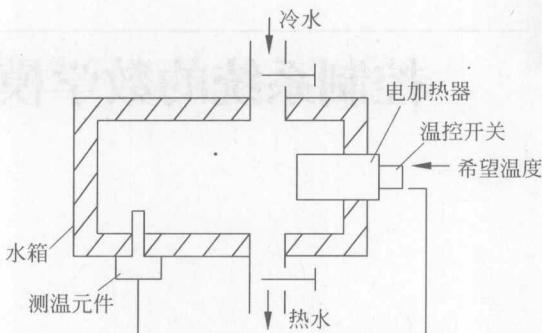


图 1-18 电加热系统示意图



图 1-19 电加热系统原理方框图

## 要点提示

本章主要介绍控制理论中采用的三种数学模型：时域模型、复域模型和频域模型，此外还介绍了方块图及其简化方法、信号流图及梅逊公式。

## 2.1 控制系统的时域数学模型——微分方程

系统的行为用如下的线性微分方程来描述

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

式中， $r(t)$ 为输入； $c(t)$ 为输出； $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 与  $b_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 为实数并且  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ ，那么这个微分方程就是系统的微分方程模型，其中微分方程的阶  $n$  也称为系统的阶。

微分方程模型通常是根据定律和经验来建立的，当  $n$  大于 2 时，直接求解这样的微分方程是很困难的。

## 2.2 控制系统的复域数学模型——传递函数

### 1. 传递函数定义

**定义** 线性定常系统在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，称为系统的传递函数，记为  $G(s)$ ，即  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ ，其中  $C(s)$  和  $R(s)$  分别是输出  $c(t)$  和输入  $r(t)$  的拉氏变换。

对式(2-1)两边在零初始条件下取拉氏变换得

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s) \end{aligned} \quad (2-2)$$

式中,  $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$ ,  $\mathcal{L}[c(t)] = C(s)$ 。由此可知, 传递函数由系统的本身特性决定, 而与输入无关。

传递函数有三种不同形式的表达式:

(1) 一般表达式

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2-3)$$

(2) 零、极点表达式

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_r (s + z_1)(s + z_2) + \dots + (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) + \dots + (s + p_n)} \quad (2-4)$$

式中,  $-z_i (i=1, 2, \dots, m)$  为系统的零点,  $-p_j (j=1, 2, \dots, n)$  为系统的极点。 $-z_j$  和  $-p_j$  可以是实数或复数, 但复数必定是共轭出现。 $K_r$  为增益因子。

(3) 时间常数表达式(又叫典型环节表达式)

此时, 因子的常数项为 1

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\bar{\tau}_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} [\bar{T}_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1]}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} [T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1]} \quad (2-5)$$

式中,  $K$  为系统的稳态增益;  $m_1 + 2m_2 = m$ ;  $v + n_1 + 2n_2 = n$ , 其中  $|\zeta_k| < 1$ ,  $|\zeta_l| < 1$ 。

$$K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^{n-v} p_i} \quad (2-6)$$

线性定常系统通常都可看成是由一些典型环节组成, 常见的典型环节主要有以下六种, 即比例环节、微分环节、积分环节、惯性环节、振荡环节和延迟环节。具体如下:

比例环节

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \quad (2-7)$$

微分环节有三种, 即理想微分环节、一阶微分环节和二阶微分环节。

理想微分环节

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = s \quad (2-8)$$

一阶微分环节

$$G(s) = Ts + 1 \quad (2-9)$$

二阶微分环节

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1 \quad (2-10)$$

积分环节

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (2-11)$$

惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2-12)$$

振荡环节

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-13)$$

延迟环节

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (2-14)$$

## 2. 传递函数性质

对于传递函数需要强调：

(1) 传递函数的概念只适用于线性定常系统, 是一种在复域中描述其运动特性的数学模型。虽然它是通过输入输出定义的, 但是它只与系统的结构参数有关, 与系统的输入无关。

(2) 传递函数只描述系统本身固有的属性(动、静态特性), 而不能表明系统的物理结构, 不同的物理系统, 可以具有相同形式的传递函数;

(3) 由拉氏变换的知识可知, 在零初始条件下, 利用微分算子  $s = \frac{d}{dt}$  可以直接实现传递函数与微分方程之间的相互转换。

(4) 传递函数可以通过实验测试系统的输入与输出关系来确定。

传递函数是自动控制理论中最基本的数学模型。

## 2.3 控制系统的频域数学模型——频率特性

将传递函数中的复变量  $s$  用纯虚数  $j\omega$  代替, 则称  $G(j\omega)$  为系统的频率特性, 其中  $\omega$  称为角频率, 简称频率。

## 2.4 控制系统的方块图

### 1. 方块图定义

控制系统方块图是系统各环节特性(结构、参数)和信号流向的图示法, 是系统的一种图模型。图中箭线表示信号, 方框表示环节。例如, 定义传递函数  $G(s)$  的等式  $C(s) = G(s)R(s)$  可以用方块图表示如图 2-1 所示。

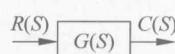


图 2-1 传递函数方块图

## 2. 方块图的基本运算法则

(1) 串联 当传递函数分别为  $G_1(s), G_2(s) \dots G_n(s)$  的多个环节串联时, 其等效传递函数是

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \dots G_n(s) \quad (2-15)$$

结论: 多个环节串联后其总的传递函数等于每个环节传递函数的乘积

(2) 并联 当传递函数分别为  $G_1(s), G_2(s) \dots G_n(s)$  的多个环节并联时, 其等效传递函数为

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s) \quad (2-16)$$

结论: 多个环节并联后的传递函数等于所有并联环节传递函数之和。

(3) 反馈

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-17)$$

系统简化应遵循保持简化前后系统的传递函数不变的原则。

## 3. 系统常用的传递函数

(1) 前向传递函数 沿着前向通路输入到输出的传递函数, 记成  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ 。对于图 2-2 所示系统, 有:

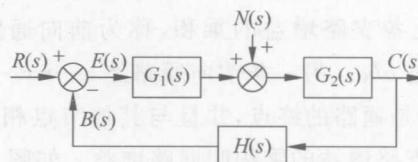


图 2-2 控制系统方块图基本形式

(2) 开环传递函数 主反馈信号  $B(s)$  与误差信号  $E(s)$  之比, 即

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) = G(s)H(s) \quad (2-18)$$

(3) 闭环传递函数 输出信号  $C(s)$  与输入信号  $R(s)$  之比, 即

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-19)$$

(4) 误差传递函数 误差信号  $E(s)$  与输入信号  $R(s)$  之比, 即

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-20)$$

(5) 扰动传递函数 输出信号  $C(s)$  与扰动信号  $N(s)$  之比, 即

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-21)$$

(6) 误差对扰动传递函数误差信号  $E(s)$  与扰动信号  $R(s)$  之比, 即

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-22)$$

## 2.5 信号流图

控制系统另一种图模型是系统的信号流图, 信号流图的优点是可以利用梅逊增益公式直接计算系统的传递函数。图 2-3 为一个系统的信号流图。

### 1. 信号流图的几个定义

输入节点(或称源点) 只有输出支路的节点, 如  $x_1, x_5$ ;

输出节点(或称阱点、沟点) 只有输入支路的节点, 如  $x_4$ ;

混合节点 既有输出支路, 又有输入支路的节点, 如  $x_2, x_3$ ;

传输 两个节点之间的增益叫传输, 如  $x_1$  与  $x_2$  之间的增益为  $a$ , 则传输为  $a$ 。

前向通路 信号由输入节点到输出节点传递时, 每个节点只通过一次的通路称为前向通路。前向通路上各支路增益的乘积, 称为前向通路总增益。如前向通路  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ , 其总增益  $abc$ 。另一条前向通路是  $x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ , 其总增益为  $fc$ 。

回路 通路的起点也是通路的终点, 并且与其他节点相交不多于一次的闭合通路叫回路。回路中, 所有支路增益的乘积叫回路增益。如图 2-3 中有两个回路, 一个是  $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ , 其回路增益为  $be$ , 另一个回路是  $x_2 \rightarrow x_2$ , 又叫自回路, 其增益为  $d$ 。

不接触回路 指相互间没有公共节点的回路。信号流图中, 可以有多个互不接触回路。在图 2-3 中没有互不接触回路。

### 2. 梅逊(Mason)公式

利用梅逊公式可以方便地计算输入与输出两个节点间的总增益  $P$

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^l P_i \Delta_i \quad (2-23)$$

式中,  $P_i$  为第  $i$  条前向通路的增益;  $l$  为前向通路数;  $\Delta_i$  为除去第  $i$  条前向通路后的  $\Delta$  值

$$\Delta = 1 - \sum_m L_{m1} + \sum_m L_{m2} - \sum_m L_{m3} + \dots \quad (2-24)$$

式(2-24)为系统特征多项式,  $\Delta=0$  是系统的特征方程, 式中  $L_{m1}$  为各个回路的增益,  $L_{m2}$  是两两不相交回路增益之积,  $L_{m3}$  是三个两两不相交回路增益之积。

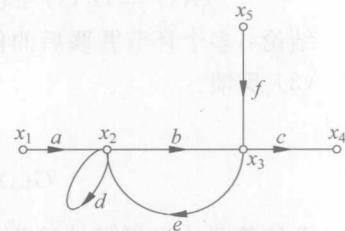


图 2-3 某系统的信号流图

## 习题解答

### A 基本题

**A2-1** 求下列系统的传递函数。式中  $r(t)$  为系统输入,  $c(t)$  为系统输出:

$$(1) \frac{d^3c(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = 3\frac{dr(t)}{dt} + r(t);$$

$$(2) \frac{d^3c(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t-2)。$$

解 (1)  $(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)C(s) = (3s + 1)R(s)$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s+1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

(2)  $(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)C(s) = e^{-2s}R(s)$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{e^{-2s}}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

**A2-2** 试绘制下列代数方程的信号流图:

$$(1) \begin{cases} x_2 = ax_1 + ix_3 + jx_6 \\ x_3 = bx_2 \\ x_4 = fx_1 + cx_3 - gx_5; \\ x_5 = dx_4 \\ x_6 = ex_5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_2 = ax_1 + gx_2 + jx_3 \\ x_3 = bx_2 + x_3 \\ x_4 = fx_1 + cx_2 - gx_3. \\ x_5 = dx_4 \\ x_6 = x_5 \end{cases}$$

解 (1) 所得信号流图如图 2-4 所示。

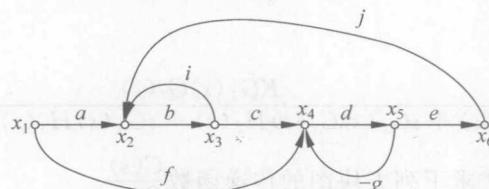


图 2-4 题 A2-2(1)信号流图

(2) 所得信号流图如图 2-5 所示。

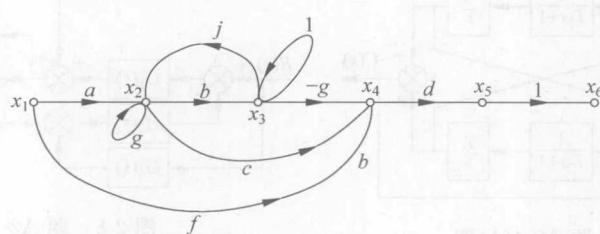


图 2-5 图题 A2-2(2)信号流图

A2-3 求图 2-6 信号流图的传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

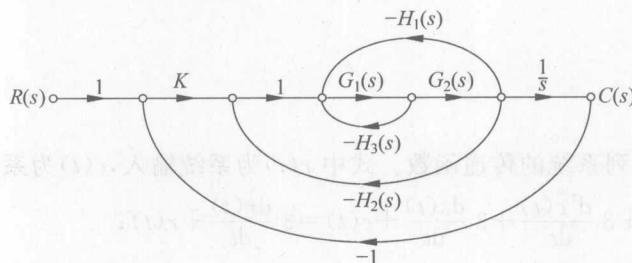


图 2-6 题 A2-3 信号流图

解 这个系统只有一个前向通道, 而有四个回路  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  和  $L_4$ , 没有两个及两个以上互不接触回路。回路是

$$L_1 = -\frac{KG_1(s)G_2(s)}{s}$$

$$L_2 = -G_1(s)G_2(s)H_2(s)$$

$$L_3 = -G_1(s)H_3(s)$$

$$L_4 = -G_1(s)G_2(s)H_1(s)$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 1 + \frac{KG_1(s)G_2(s)}{s} + G_1(s)G_2(s)H_2(s) + G_1(s)H_3(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)$$

前向通路只有一条, 即

$$P_1 = \frac{KG_1(s)G_2(s)}{s} \quad \Delta_1 = 1$$

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG_1(s)G_2(s)}{s + KG_1(s)G_2(s) + sG_1(s)G_2(s)H_2(s) + sG_1(s)H_3(s) + sG_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

A2-4 用梅逊公式求下列方块图的传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

(1) 如图 2-7 所示。

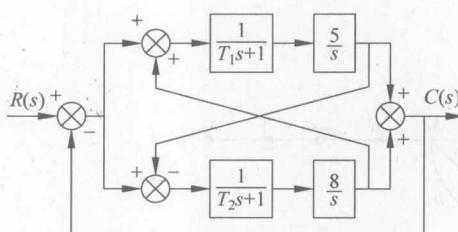


图 2-7 题 A2-4(1)图

(2) 如图 2-8 所示。

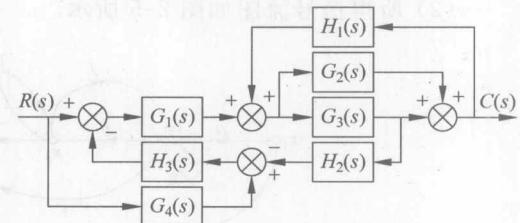


图 2-8 题 A2-4(2)图

解 (1) 所得信号流图(见图 2-9)

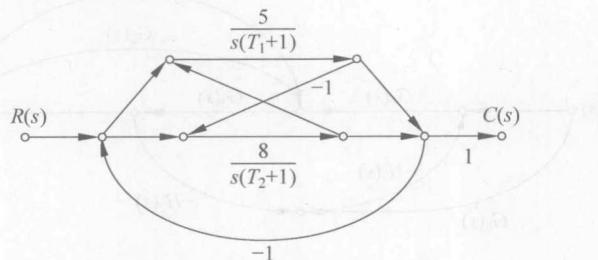


图 2-9 题 A2-4(1)信号流图

这个系统有 4 条前向通道, 5 个回路, 没有两个及以上互不接触回路。回路有

$$L_1 = -\frac{5}{s(T_1 s + 1)}$$

$$L_2 = -\frac{8}{s(T_2 s + 1)}$$

$$L_3 = -\frac{40}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$L_4 = \frac{40}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$L_5 = -\frac{40}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

前向通路有四条, 即

$$P_1 = \frac{5}{s(T_1 s + 1)}, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = \frac{8}{s(T_2 s + 1)}, \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = -\frac{40}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \Delta_3 = 1$$

$$P_4 = \frac{40}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \Delta_4 = 1$$

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s(T_2 s + 1) + 8s(T_1 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + 5s(T_2 s + 1) + 8s(T_1 s + 1) + 40}$$

(2) 所得信号流图(见图 2-10)

这个系统有 3 个回路, 没有两个及以上互不接触回路, 即

$$L_1 = G_3(s)H_1(s)$$

$$L_2 = G_2(s)H_1(s)$$

$$L_3 = G_1(s)G_3(s)H_2(s)H_3(s)$$

$$\Delta = 1 - G_3(s)H_1(s) - G_2(s)H_1(s) - G_1(s)G_3(s)H_2(s)H_3(s)$$

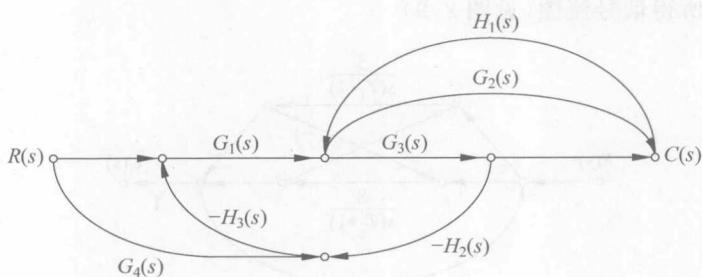


图 2-10 题 A2-4(2)信号流图

前向通路有四条,即

$$P_1 = G_1(s)G_2(s) \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1(s)G_3(s) \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = -G_1(s)G_3(s)G_4(s)H_3(s), \quad \Delta_3 = 1$$

$$P_4 = -G_1(s)G_2(s)G_4(s)H_3(s), \quad \Delta_4 = 1$$

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_3(s) - G_1(s)G_3(s)G_4(s)H_3(s) - G_1(s)G_2(s)G_4(s)H_3(s)}{1 - G_3(s)H_1(s) - G_2(s)H_1(s) - G_1(s)G_3(s)H_2(s)H_3(s)}$$

**A2-5** 某平台的位置控制系统的微分方程组为

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + 2 \frac{dp}{dt} + 4p = \theta$$

$$u_1 = r - p$$

$$u_2 = 7u_1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.6u_2$$

上式中,  $r(t)$  是平台的预期位置;  $p(t)$  是平台的实际位置;  $u_1(t)$  是放大器的输入电压;  $u_2(t)$  是放大器的输出电压;  $\theta(t)$  是电动机的转角。

试画出该系统的方块图和信号流图, 确定各方块的传递函数, 并计算系统的传递函数  $P(s)/R(s)$ 。

解 方块图如图 2-11 所示。

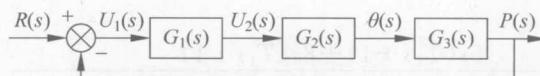


图 2-11 题 A2-5 方块图

$$\text{其中}, G_1(s) = 7, G_2(s) = \frac{0.6}{s}, G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4}.$$

信号流图如图 2-12 所示。

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4.2}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4.2}$$

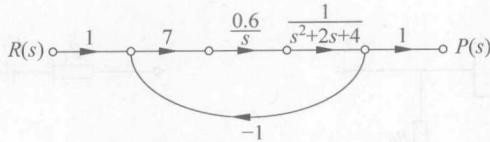


图 2-12 题 A2-5 信号流图

**A2-6** 某热敏电阻的阻值与温度的关系由右式描述:  $R = R_0 e^{-0.1T}$ , 式中,  $R_0 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R$  为电阻阻值,  $T$  是绝对温度。热敏电阻工作在  $T=20\text{K}$  附近, 并且温度扰动很小。试求电阻在工作点附近的线性化模型。

解 根据线性化原则, 系统的线性化模型为

$$R = R_0 e^{-0.1 \times 20} + R_0 e^{-0.1 \times 20} \times (-0.1) \times (T - 20) = R_0 e^{-2} - 0.1 R_0 e^{-2} (T - 20)$$

**A2-7** 汽车悬浮系统的简化模型如图 2-13(a)所示。汽车行驶时轮子的垂直位移作为一个激励作用在汽车的悬浮系统上。图 2-13(b)是简化的悬浮系统模型, 系统的输入是  $P$  点(车轮)的位移  $x_i$ , 车体的垂直运动  $x_o$  为系统的输出。求系统的传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ 。

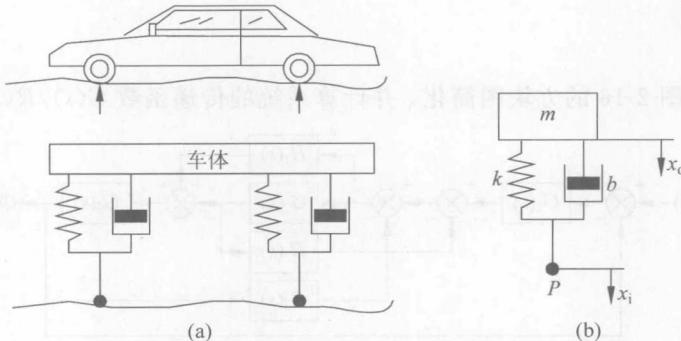


图 2-13 题 A2-7 汽车悬浮系统模型

解 由牛顿定理可得

$$k(x_i - x_o) + b \frac{d(x_i - x_o)}{dt} = m \frac{d^2 x_o}{dt^2}$$

$$\frac{X_o}{X_i} = \frac{k + bs}{ms^2 + bs + k}$$

**A2-8** 试求图 2-14 所示电路的传递函数  $E_o(s)/E_i(s)$ 。

解 由电路知识可得

$$\begin{aligned} \frac{E_o}{E_i} &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1 * \frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s + (R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} \\ &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1} \end{aligned}$$

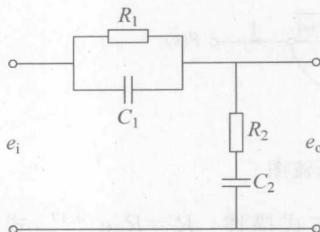


图 2-14 题 A2-8 图

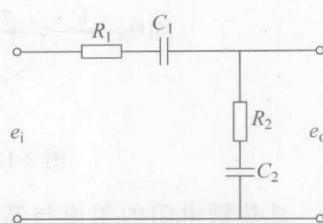


图 2-15 题 A2-9 图

**A2-9** 试求图 2-15 所示电路的传递函数  $E_o(s)/E_i(s)$ 。

解 由电路学定律可得

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{C_1 R_2 C_2 s + C_1}{C_1 C_2 (R_2 + R_1) s + C_1 + C_2}$$

## B 深入题

**B2-1** 将图 2-16 的方块图简化，并计算系统的传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

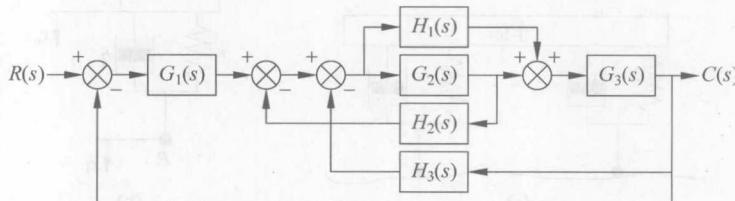


图 2-16 题 B2-1 方块图

解

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1 + G_3 H_1 H_3}$$

**B2-2** 图 2-17 是某个消除扰动影响的前馈控制系统的方块图。

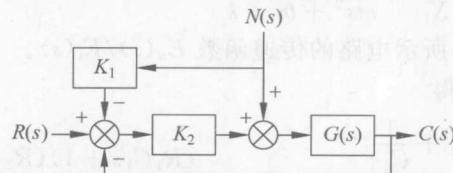


图 2-17 题 B2-2 前馈系统方块图

设  $R(s)=0$ , 通过适当选择  $K_1$  和  $K_2$ , 便可使由扰动引起的输出为零。假设扰动为单

位阶跃函数  $N(s)=\frac{1}{s}$ , 选择  $K_1$  和  $K_2$ , 使当  $R(s)=0$  时, 由  $N(s)$  引起的输出  $C(s)=0$ 。

解 由系统方块图可以得到当  $R(s)=0$  时系统输出的表达式

$$C(s) = \frac{G(s)(1-K_1K_2)}{1+G(s)K_2}N(s)$$

当  $K_1K_2=1$  时,  $\frac{C(s)}{N(s)}=0$ 。所以当  $R(s)=0$  时,  $C(s)=0$ 。

**B2-3** 试求图 2-18 所示各系统的传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ ,  $x_i$  为系统的输入位移,  $x_o$  为系统的输出位移。

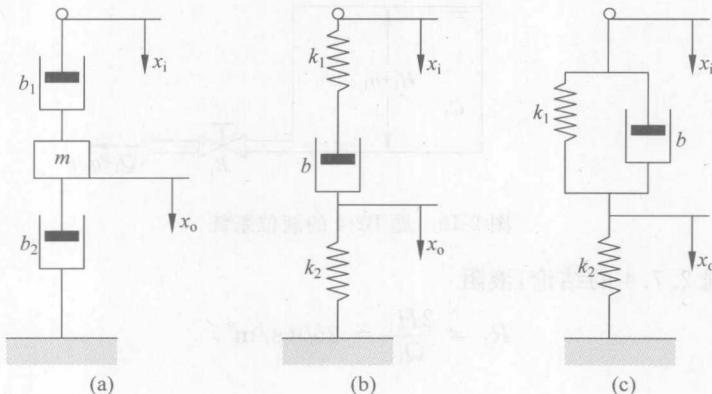


图 2-18 题 B2-3 机械系统

解 (1) 设系统开始是平衡的。由牛顿第二运动定律, 可得

$$b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) - b_2\dot{x}_o = m\ddot{x}_o$$

将上式进行拉氏变换, 并整理(初始条件全部为零)得

$$[ms^2 + (b_1 + b_2)s]X_o(s) = b_1sX_i(s)$$

于是传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_1}{ms + b_1 + b_2}$$

(2) 其上半部弹簧与阻尼器之间, 取辅助点 A, 并设 A 点位移为  $x$ , 方向朝下; 而在其下半部  $x_o$  引出点取为辅助点 B。则由弹簧力与阻尼力平衡的原则, 从 A 和 B 两点可以分别列出如下原始方程

$$K_1(x_i - x) = b(\dot{x} - \dot{x}_o)$$

$$K_2x_o = b(\dot{x} - \dot{x}_o)$$

消去中间变量  $x$ , 可得系统微分方程

$$b(K_1 + K_2)\dot{x}_o + K_1K_2x_o = K_1b\dot{x}_i$$

对上式取拉氏变换(初始条件为零), 得系统传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bK_1s}{b(K_1 + K_2)s + K_1K_2}$$

(3) 以  $x_o$  的引出点作为辅助点, 根据力的平衡原则, 可列出如下方程

$$K_1(x_i - x_o) + b(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = K_2x_o$$

对上式进行拉氏变换(初始条件为零), 得系统传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + K_1}{bs + (K_1 + K_2)}$$

**B2-4** 图 2-19 的液位系统, 设  $H_1 = 5\text{m}$ ,  $Q_1 = 0.04\text{m}^3/\text{s}$ ,  $C_1 = 5\text{m}^2$ , 试求系统在工作点的时间常数。

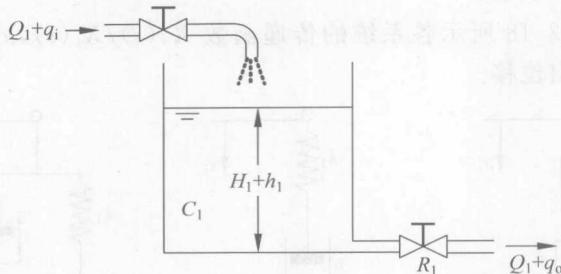


图 2-19 题 B2-4 的液位系统

解 根据 2.7.4 的结论, 液阻

$$R_1 = \frac{2H_1}{Q_1} = 250(\text{s}/\text{m}^2)$$

传递函数

$$G(s) = \frac{\frac{1}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1},$$

因此时间常数  $T = R_1 C_1 = 250 \times 5 = 1250(\text{s})$ 。

**B2-5** 求图 2-20 信号流图所示系统的下列传递函数:

$$(1) W_1(s) = \frac{C_1(s)}{R_1(s)} \quad (2) W_2(s) = \frac{C_1(s)}{R_2(s)} \quad (3) W_3(s) = \frac{C_2(s)}{R_1(s)}$$

$$(4) W_4(s) = \frac{C_2(s)}{R_2(s)}$$

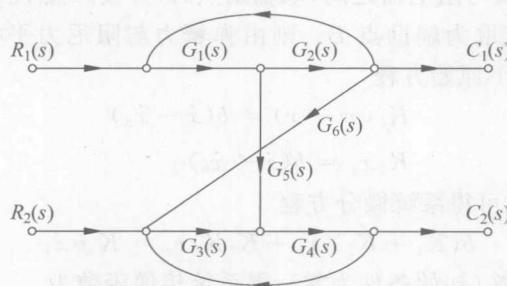


图 2-20 题 B2-5 系统的信号流图

解 有 2 个单独回路, 即  $L_1 = G_1(s)G_2(s)$ ,  $L_2 = G_3(s)G_4(s)$ , 且为不接触回路。

$$\Delta = 1 - G_1(s)G_2(s) - G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

(1) 从  $R_1$  到  $C_1$  只有一条前向通道, 即

$$P_1 = G_1(s)G_2(s), \quad \Delta_1 = 1 - G_3(s)G_4(s)$$

根据梅逊增益公式,可得

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)(1 - G_3(s)G_4(s))}{1 - G_1(s)G_2(s) - G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

(2) 从  $R_2$  到  $C_1$  没有前向通道,因此

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)} = 0$$

(3) 从  $R_1$  到  $C_2$  有两条前向通道,即

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s), \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1(s)G_4(s)G_5(s), \quad \Delta_2 = 1$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s) + G_1(s)G_4(s)G_5(s)}{1 - G_1(s)G_2(s) - G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

(4) 从  $R_2$  到  $C_2$  有一个前向通道

$$P_1 = G_3(s)G_4(s), \quad \Delta_1 = 1 - G_1(s)G_2(s)$$

根据梅逊增益公式,可得

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_3(s)G_4(s)(1 - G_1(s)G_2(s))}{1 - G_1(s)G_2(s) - G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)} = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 - G_3(s)G_4(s)}$$

**B2-6** 已知控制系统方块图如图 2-21 所示,试求:

$$(1) \frac{Y(s)}{U(s)};$$

(2)  $Y(s)$  在所有输入下的表达式。

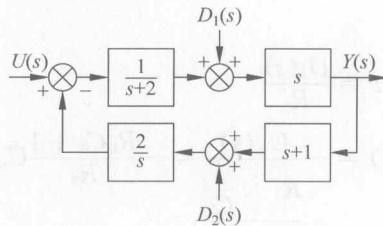


图 2-21 题 B2-6 系统方块图

解 (1) 令  $D_1(s) = D_2(s) = 0$

$$\text{则 } \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{s+2} \times s}{1 + \frac{1}{s+2} \times s \times \frac{2}{s} \times (s+1)} = \frac{s}{3s+4}$$

(2) 当所有输入作用时,输出为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+2} \times s}{1 + \frac{2}{s} \times (s+1) \times \frac{1}{s+2} \times s} U(s) + \frac{s}{1 + \frac{2}{s} \times (s+1) \times \frac{1}{s+2} \times s} D_1(s) \\ &\quad + \frac{-\frac{2}{s+2}}{1 + \frac{2}{s} \times (s+1) \times \frac{1}{s+2} \times s} D_2(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1 + \frac{2}{s} \times (s+1) \times \frac{1}{s+2} \times s} \left( \frac{s}{s+2} U(s) + sD_1(s) - (s+1)D_2(s) \right) \\
 &= \frac{s+2}{3s+4} \left( \frac{s}{s+2} U(s) + sD_1(s) - \frac{2}{s+2} D_2(s) \right) \\
 &= \frac{s}{3s+4} U(s) + \frac{s(s+2)}{3s+4} D_1(s) - \frac{2}{3s+4} D_2(s)
 \end{aligned}$$

## C 实践题

**C2-1** 图 2-22 所示的运算放大器电路, 假定是理想放大器(即运算放大器的开环增益为 $\infty$ ), 电路参数为  $R_1=R_2=100\text{k}\Omega$ ,  $C=1\mu\text{F}$ , 试推导电路的传递函数  $U_o(s)/U_i(s)$ 。

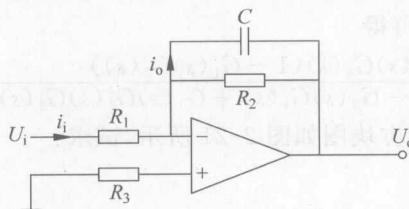


图 2-22 题 C2-1 运算放大器电路

解 因为

$$\begin{aligned}
 I_i(s) &= \frac{U_i(s)}{R_1} \\
 I_o(s) &= -\frac{U_o(s)}{R_2 \times \frac{1}{Cs}} = -\frac{R_2 Cs + 1}{R_2} U_o(s) \\
 &\quad \frac{1}{R_2 + \frac{1}{Cs}}
 \end{aligned}$$

显然  $I_i(s)=I_o(s)$ , 所以此电路的传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1(R_2 Cs + 1)}$$

**C2-2** 图 2-23 是一个电子控制器, 试推导它的传递函数  $U_o(s)/U_i(s)$ 。

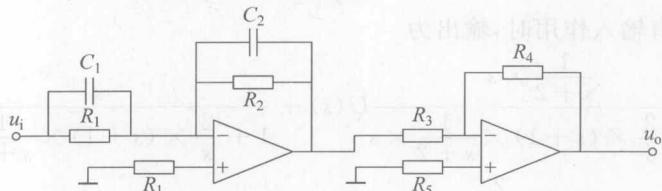


图 2-23 题 C2-2 电子 PID(比例-积分-微分)控制器

解 设第一个运算放大器输出电压为  $U_r$  因为

$$\frac{\frac{U_i(s)}{R_1 \times \frac{1}{sC_1}} = -\frac{U_r(s)}{R_2 \times \frac{1}{sC_2}}}{R_1 + \frac{1}{sC_1} = R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

$$\frac{U_r(s)}{R_3} = -\frac{U_o(s)}{R_4}$$

消去  $U_r(s)$ , 整理得控制器的传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 R_4 (sR_1 C_1 + 1)}{R_1 R_3 (sR_2 C_2 + 1)}$$

**C2-3** 图 2-24 是发电机-电动机控制系统,  $\theta_d(t)$  是电动机的转角,  $\theta_L(t)$  是负载的转角,  $u_f(t)$  是发电机的励磁电压。发电机以恒速运转, 电动机及负载的总转动惯量为  $J_m$ , 电动机轴上的摩擦系数为  $b_m$ ,  $i$  为传动比, 假定发电机的电压  $u_g$  与励磁电流  $i_f$  成比例, 试推导系统的传递函数  $\Theta_L(s)/U_f(s)$ 。

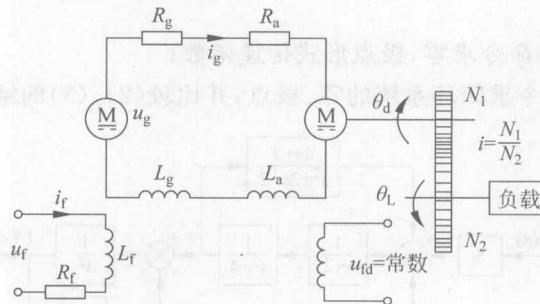


图 2-24 题 C2-3 发电机-电动机控制系统

解 发电机励磁回路电压平衡方程

$$U_f(s) = I_f(s)(R_f + sL_f)$$

发电机输出电压与励磁回路电流成正比, 即

$$U_g(s) = kI_f(s)$$

发电机输出回路电压平衡方程

$$U_g(s) = I_g(s)[(R_a + R_g) + s(L_a + L_g)] + E_a$$

电动机反电势

$$E_a = C_e W_d(s)$$

上式中,  $W_d(s)$  为电动机转速;  $C_e$  为电动势常数。

电动机转速与负载转速的关系

$$\Theta_d(s) = \frac{N_2}{N_1} \Theta_L(s)$$

电动机输出转矩平衡方程

$$b_m W_d(s) + J_m s W_d(s) = M_m(s) - M_L(s)$$

上式中,  $M_m(s)$  为电动机电磁转矩;  $M_L(s)$  为负载转矩。

## 电机转速与转角关系

$$W_d(s) = s\Theta_d(s)$$

## 电动机电磁转矩

$$M_m(s) = C_m I_g(s)$$

其中,  $C_m$  为转矩常数。

化简后得到该系统的传递函数为

$$\frac{\Theta_L(s)}{U_f(s)} = \frac{KC_m N_1}{N_2 s(L_f s + R_f) [(R_a + R_g) + (L_a + L_g)s] (b_m + sJ_m) + C_e C_m]$$

## D MATLAB 题

## D2-1 考虑图 2-25 之系统:

- (1) 用 MATLAB 的 series、parallel、feedback 和 cloop 命令求系统的传递函数  $C(s)/R(s)$ ;
- (2) 用模型转换命令求零、极点形式传递函数;
- (3) 用 roots 命令求闭环系统的零、极点, 并比较(2)、(3)的结果。

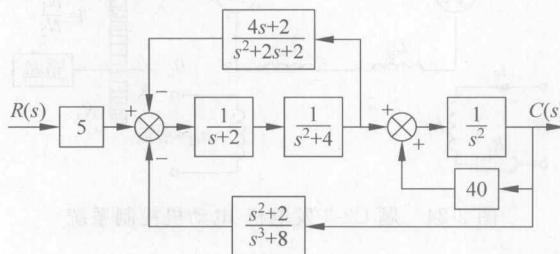


图 2-25 题 D2-1 方块图

## 解 (1) 基本程序

```

G11 = tf(1,[1 2]);
% 传递函数  $G_{11} = \frac{1}{s+2}$ 

G12 = tf(1,[1 0 4]);
% 传递函数  $G_{12} = \frac{1}{s^2+4}$ 

G13 = series(G11,G12);
% 传递函数  $G_{12} = \frac{1}{s^2+4} * \frac{1}{s+2}$ 

H1 = tf([4 2],[1 2 2]);
% 反馈传递函数  $H = \frac{4s+2}{s^2+2s+2}$ 

G1 = feedback(G13,H1);
% 求出第一个环闭环传递函数 G1

G21 = tf(1,conv([1 0],[1 0]));
% 传递函数  $G_{21} = \frac{1}{s^2}$ 

H2 = 40;
% 反馈传递函数  $H = 40$ 

G2 = feedback(G21,H2,1);
% 求出第二个环闭环传递函数 G2

G12 = series(G1,G2);
% 系统前向传递函数  $G_{12} = G1 * G2$ 

H3 = tf([1 0 2],[1 0 0 8]);
% 系统反馈传递函数  $H_3 = \frac{s^2+2}{s^3+8}$ 

```

```

G = feedback(G12, H3); % 求出系统传递函数 G
GG = 5 * G;
% 整个系统传递函数 GG 为 G 乘以 5, 在命令窗口键入 GG, 然后回车可以得到整个系统传递函
数 C(S)/R(S)。
End

```

运行后可以得到

```

Transfer function:
5 s^5 + 10 s^4 + 10 s^3 + 40 s^2 + 80 s + 80
-----
```

```
s^10 + 4s^9 - 30s^8 - 132s^7 - 340s^6 - 1022s^5 - 2239s^4 - 3694s^3 - 6252s^2 - 8956s - 5756
```

(2) 利用如下命令可以实现模型的转换

```

num = [5 10 10 40 80 80];
den = [14 - 30 - 132 - 340 - 1022 - 2239 - 3694 - 6252 - 8956 - 5756];
[z, p, k] = tf2zp(num, den)
End

```

运行后得到结果为

```
z =
```

```

1.0000 + 1.7321i
1.0000 - 1.7321i
-2.0000
-1.0000 + 1.0000i
-1.0000 - 1.0000i

```

```
p =
```

```

6.3245
-6.3245
0.9998 + 1.7316i
0.9998 - 1.7316i
0.1422 + 2.0250i
0.1422 - 2.0250i
-1.3988 + 0.9919i
-1.3988 - 0.9919i
-2.0046
-1.4818

```

```
k = 5
```

(3) 利用如下命令分别求出零点和极点

运行命令 roots (GG, den {1}) 后得到

```
ans =
```

```
6.3245
- 6.3245
0.9998 + 1.7316i
0.9998 - 1.7316i
0.1422 + 2.0250i
0.1422 - 2.0250i
- 1.3988 + 0.9919i
- 1.3988 - 0.9919i
- 2.0046
- 1.4818
```

运行命令 roots (GG, num {1}) 后得到

```
1.0000 + 1.7321i
1.0000 - 1.7321i
- 2.0000
- 1.0000 + 1.0000i
- 1.0000 - 1.0000i
```

由(2)及(3)可见,用 roots 函数与模型转换后所得到的结果相同。

# 第3章

## 自动控制系统的时域分析

### 要点提示

线性定常系统的时域分析是经典控制理论的基础,它包括分析系统的稳定性、稳态特性和动态特性。

### 3.1 控制系统的稳定性分析

平衡状态:用 $c(t)$ 表示系统的输出,如果 $\dot{c}(t)=\ddot{c}(t)=\dots=0$ ,则称系统处于平衡状态,总可以通过坐标系统的平移,使在平衡状态时 $c(0)=0$ 。

系统在平衡状态受到扰动,使被输出量 $c(t)$ 偏离平衡状态;扰动消失后,如果经过一段时间,系统又回到原先的平衡状态,则称系统是渐近稳定,也称是稳定的。

线性定常系统稳定的充分必要条件是:系统特征方程所有根都具有负实部,即系统的所有极点都位于开的左半 $s$ 平面(即不包含虚轴的左半平面)。

#### 劳斯(Routh)稳定性判据

劳斯判据是一种根据系统特征方程的系数来判别系统稳定性的代数判据。

(1) 构建劳斯表将给定的特征方程式系数按规则要求排在劳斯表前两行,计算劳斯表其他各行系数。劳斯稳定性判据:系统稳定的充分必要条件是劳斯表首列系数非零且不改变符号。

(2) 如果劳斯表中第一列元素皆非零,则元素符号变化的次数等于特征方程具有正实部根的数目。

(3) 如果劳斯表中某行第一列元素为零,此行其余项不全为零。此时可用一个任意小的正数 $\epsilon$ 代替零,然后按规则继续完成劳斯表中其他系数的计算。如果 $\epsilon$ 上面元素符号与下面元素符号相反,表明有一个符号变化。

(4) 在劳斯表元素计算过程中,如果出现某一行元素全为零,说明特征方程在 $s$ 平面上存在关于 $s$ 平面原点对称的根,即 $a+jb$ 和 $-a-jb$ 同时为根。此时,可用全零行上面一行的元素构造一个辅助方程,利用辅助方

程对  $s$  求导后得到的方程系数代替全零行的元素, 然后再按规则完成劳斯表的计算。所有那些关于原点对称的根都可由辅助方程求得。

## 3.2 控制系统的稳态特性——稳态误差分析

### 3.2.1 稳态误差定义

控制系统的误差有两种定义方法:

从输出端定义 系统输出量的希望值与实际值之差,但在实际中此差值信号常常无法测量,一般只有数学意义。

从输入端定义 系统的输入信号与主反馈信号之差,此信号在实际中可测量,所以具有一定的物理意义。

### 3.2.2 稳态误差系数和稳态误差计算

系统稳态误差与稳态误差系数、系统开环增益、系统类型及输入信号之间的关系如表 3-1 所示。根据此表可以计算不同类型的系统在一些输入信号之下的终值稳态误差。

表 3-1 稳态误差与系统结构参数、输入信号特性之间关系一览表

类型	稳态误差系数			阶跃输入 $r(t) = R \cdot 1(t)$	速度输入 $r(t) = Rt$	加速度输入 $r(t) = \frac{1}{2}Rt^2$
$v$	$K_p$	$K_v$	$K_a$	位置误差 $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	$K$	0	0	$\frac{R}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{R}{K}$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{R}{K}$

### 3.2.3 几点结论

(1) 系统的稳态误差只有对稳定的系统才有意义。

(2) 系统的稳态误差与系统的结构参数和输入信号的特征有关。这里系统的结构是指开环系统中积分器(即零极点)的数量,并据此将系统分为 0 型、I 型、II 型系统;系统的参数是指系统的开环增益;输入信号的特征主要指输入信号拉氏变换式中包含的积分器数量,分别以单位阶跃信号、速度信号和加速度信号作为典型的输入信号。还需指出,开环增益和输入信号的幅值只影响稳态误差的大小,而不决定

稳态误差的存在与否。

(3) 只有对输入端定义的误差才能利用稳态误差系统来求取稳态误差,否则要用拉普拉斯终值定理来求取。

### 3.3 控制系统的动态特性——动态响应分析

#### 3.3.1 控制系统动态响应指标

系统的动态性能指标是根据系统的单位阶次响应曲线定义的。由图 3-1 所示响应曲线可以定义如下动态性能指标:

$$(1) \text{最大超调量 } M_p, M_p = \frac{c_{\max} - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%.$$

$$(2) \text{峰值时间 } t_p, c(t_p) = c_{\max}(t).$$

(3) 调整时间  $t_s$  对于给定的  $\Delta$ , (通常取  $\Delta=2\%, 5\%$ ) 当  $t > t_s$  时  $|c(t) - c(\infty)| < \Delta$ .

$$(4) \text{上升时间 } t_r, \min\{t; c(t) = c(\infty)\}.$$

$$(5) \text{延迟时间 } t_d, \min\left\{t; c(t) = \frac{1}{2}c(\infty)\right\}.$$

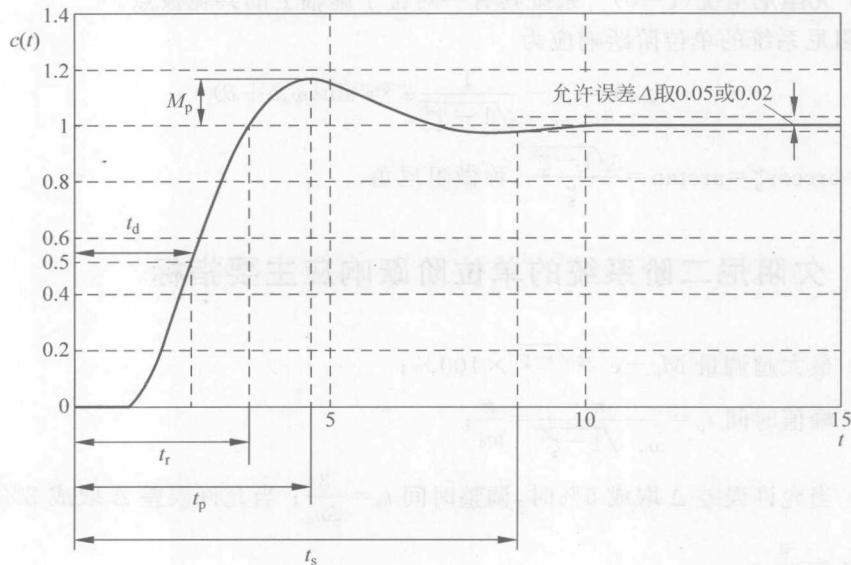


图 3-1 系统典型的动态响应曲线

#### 3.3.2 一阶系统的单位阶跃响应

一阶系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0$$

当允许误差  $\Delta$  取成 5% 时, 调整时间  $t_s$  取成  $3T$ ; 当允许误差  $\Delta$  取成 2% 时, 调整时间  $t_s$  取成  $4T$ 。

### 3.3.3 二阶系统的单位阶跃响应

系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中,  $\zeta$  是系统的阻尼比,  $\omega_n = \frac{1}{T}$  为无阻尼振荡角频率(或/自然振荡角频率)。

- (1) 欠阻尼情况 ( $0 < \zeta < 1$ ) 系统的两个极点(特征根)是一对共轭复数, 这时称  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  为阻尼振荡角频率。
- (2) 临界阻尼情况 ( $\zeta = 1$ ) 系统有一对相等的、位于负实轴上的实极点。
- (3) 过阻尼情况 ( $\zeta > 1$ ) 系统有两个不等的位于负实轴上的实极点。
- (4) 无阻尼情况 ( $\zeta = 0$ ) 系统具有一对位于虚轴上的共轭极点。

欠阻尼系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

式中  $\theta = \arccos \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ , 称做阻尼角。

### 3.3.4 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应主要指标

- (1) 最大超调量  $M_p = e^{-\pi\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$ ;
- (2) 峰值时间  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$ ;
- (3) 当允许误差  $\Delta$  取成 5% 时, 调整时间  $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ ; 当允许误差  $\Delta$  取成 2% 时, 调整时间  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ ;
- (4) 上升时间  $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ .

### 3.3.5 高阶系统的动态响应

一般将 3 阶以上的系统称为高阶系统, 严格地说, 实际的控制系统大多是高阶的。

若系统是稳定的,则高阶系统单位阶跃响应的稳态响应是  $c(\infty)=K$ , 动态响应是一些指数函数和衰减的正弦函数的线性组合。

### 3.3.6 主导极点、偶极子和附加零极点

#### 1. 主导极点

指对系统响应起主导作用的极点。

高阶系统距虚轴最近的极点比其他极点距虚轴的距离小 5 倍以上,而且这个(对)极点附近没有零点,那么距虚轴最近的极点对系统响应将起主导作用,这一个(对)极点叫做系统的主导极点。主导极点通常是一对共轭复极点。

#### 2. 偶极子

如果一个极点和一个零点相对贴近,则称它们为一对偶极子。如果极点和零点之间距离小于它们与主导极点之间距离的  $1/10$ ,也可当作偶极子处理。

## 习题解答

### A 基本题

**A3-1** 如图 3-2 系统,用劳斯判据判别系统的稳定性。若不稳定,确定有几个根在右半  $s$  平面。

$$(1) G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}, H(s) = 1;$$

$$(2) G(s) = \frac{1}{(s-1)}, H(s) = \frac{s-1}{s+1};$$

$$(3) G(s) = \frac{12}{s(s+1)}, H(s) = \frac{1}{s+3}.$$

解 (1) 已知  $G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}$ ,  $H(s) = 1$ 。系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{2s^3 + s^2 - 3s + 10}$$

系统的闭环特征方程为

$$2s^3 + s^2 - 3s + 10 = 0$$

系统的劳斯表为

$s^3$	2	-3
$s^2$	1	10
$s^1$	-23	
$s^0$	10	

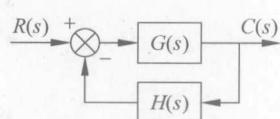


图 3-2 题 A3-1 的系统方块图

从劳斯表上可以看出首列元素变号两次,所以闭环系统不稳定,有两个根在  $s$  右

半平面。

(2) 已知  $G(s) = \frac{1}{(s-1)}$ ,  $H(s) = \frac{s-1}{s+1}$ 。系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2}$$

系统的闭环特征方程

$$s^2 + s - 2 = 0$$

系统的劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & -2 \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & -2 \end{array}$$

从劳斯表上可以看出首列元素变号一次,所以闭环系统不稳定,有一个根在  $s$  右半平面。

(3) 已知  $G(s) = \frac{12}{s(s+1)}$ ,  $H(s) = \frac{1}{s+3}$ 。系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{12s+3}{s^3+4s^2+3s+12}$$

系统的闭环特征方程

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 12 = 0$$

系统的劳斯表就是

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 4 & 12 & \rightarrow 4s^2 + 12 = 0 \\ s^1 & 0 & & \\ s^0 & 8 & & \\ & 12 & & \end{array}$$

从劳斯表上可以看出有全零行存在,但是首列元素不变号,所以系统有两个根在虚轴上,没有根位于  $s$  右半平面,闭环系统是临界稳定的。

**A3-2 确定使下列系统稳定的  $K$  值范围:**

$$(1) s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K = 0;$$

$$(2) 0.1s^3 + s^2 + s + K = 0.$$

解 (1) 已知系统的特征方程是

$$s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K = 0$$

系统的劳斯表就是

$$\begin{array}{ccccc} s^4 & 1 & 10 & K & \\ s^3 & 22 & 2 & 0 & \\ s^2 & \frac{109}{11} & K & & \\ s^1 & \frac{(218-22K)}{109/11} & & & \\ s^0 & & & & \end{array}$$

$$\frac{\left(\frac{218}{11}-22K\right)}{109/11}$$

如果系统是稳定的，则在劳斯表中首列不变号，且没有全零行。所以

$$\begin{cases} \frac{218}{11} - 22K > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

即使闭环稳定的  $K$  取值范围是  $\frac{109}{121} > K > 0$ 。

(2) 已知系统的特征方程是

$$0.1s^3 + s^2 + s + K = 0$$

系统的劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 0.1 & 1 & \\ s^2 & 1 & K & \\ s^1 & 1 - 0.1K & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

如果系统是稳定的，则在劳斯表中首列不变号，且没有全零行。所以

$$\begin{cases} 1 - 0.1K > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

即使闭环稳定的  $K$  的取值范围是  $10 > K > 0$ 。

**A3-3** 试确定下列单位反馈系统的位置误差系数  $K_p$ ，速度误差系数  $K_v$  和加速度误差系数  $K_a$  ( $G(s)$  为开环传递函数)。

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2 + 2s + 10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\text{解 } (1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

直接验证闭环系统是稳定的。系统为 I 型，位置误差系数  $K_p = 25$ ，速度误差系数  $K_v = 0$ ，加速度误差系数  $K_a = 0$ 。

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

当  $0 < K < 800$  时，闭环系统稳定。系统为 II 型，稳定时，系统的位置误差系数  $K_p = \infty$ ，速度误差系数  $K_v = \frac{K}{200}$ ，加速度误差系数  $K_a = 0$ 。

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2 + 2s + 10)}$$

当  $K > 0$  时闭环系统稳定，系统为 III 型，稳定时，位置误差系数  $K_p = \infty$ ，速度误

差系数  $K_v = \infty$ , 加速度误差系数  $K_a = \frac{K}{10}$ 。

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

系统临界稳定。系统为 I 型, 位置误差系数  $K_p = \infty$ , 速度误差系数  $K_v = 3$ , 加速度误差系数  $K_a = 0$ 。这些误差系数只是形式上的定义, 不能用于求稳态误差。

**A3-4** 试画出满足下列要求的共轭复极点在  $s$  平面上的分布范围。

$$(1) \zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$$

$$(2) 0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$$

$$(3) 0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$$

解 (1) 当  $\zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$  时, 极点在  $s$  平面上的分布范围如下图中阴影部分所示。

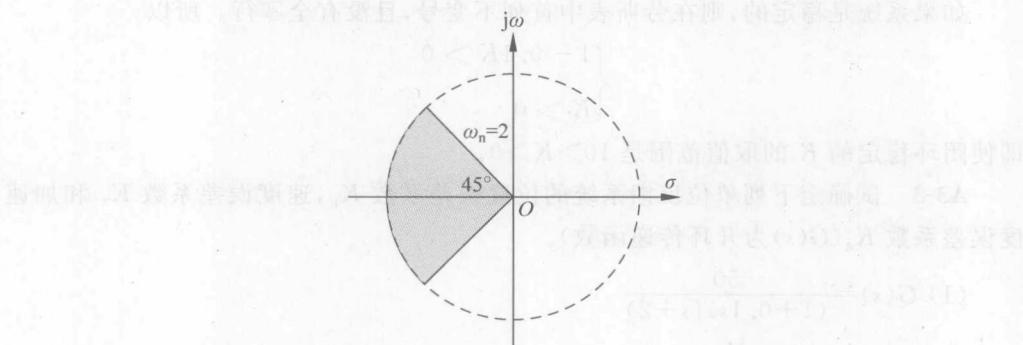


图 3-3(a) 当  $\zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$  时, 极点在  $s$  平面上的分布范围

(2)  $0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$  时, 共轭复极点在  $s$  平面上的分布范围如下图所示。

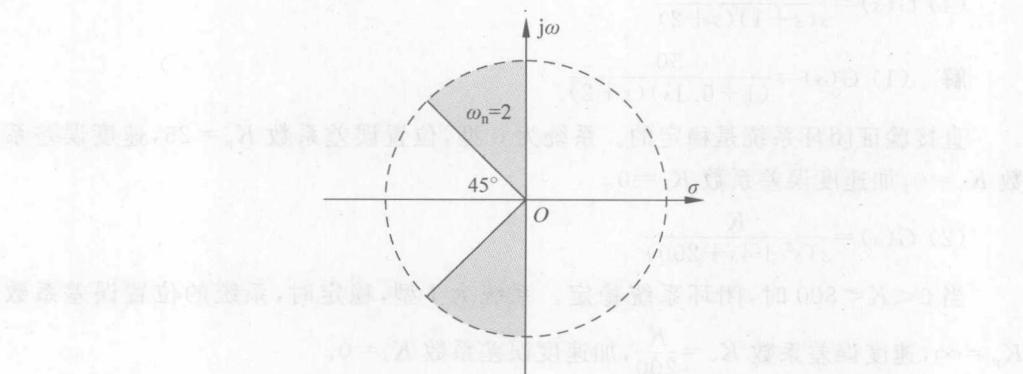


图 3-3(b) 当  $0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$  时, 极点在  $s$  平面上的分布范围

(3)  $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$  时, 共轭复极点在  $s$  平面上的分布范围如下图所示。

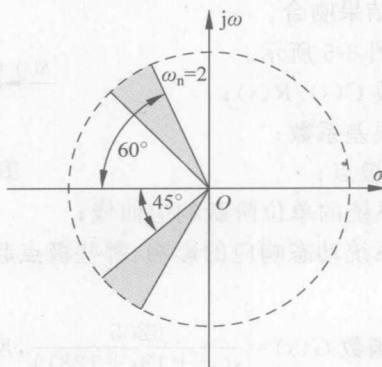


图 3-3(c) 当  $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$  时, 极点在  $s$  平面上的分布范围

**A3-5** 用劳斯判据判定题 D2-1 系统的稳定性, 并判断在右半  $s$  平面上的根数。将结果与题 D2-1 的结果进行比较。

解 经如图 3-4 所示方框图运算, 系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{5s^5 + 10s^4 + 10s^3 + 40s^2 + 80s + 80}{s^{10} + 4s^9 - 30s^8 - 132s^7 - 340s^6 - 1022s^5 - 2239s^4 - 3694s^3 - 6252s^2 - 8956s - 5756}$$

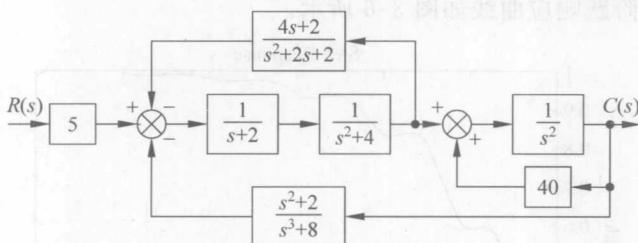


图 3-4 题 D2-1 方框图

系统的劳斯表可以表示为

$s^{10}$	1	-30	-340	-2239	-6252	-5756
$s^9$	4	-132	-1022	-3694	-8956	
$s^8$	3	-84.5	-1315.5	-4013	-5756	
$s^7$	-19.33	732	1656.67	-1281.33		
$s^6$	29.1	-1058.4	-4211.9	-5756		
$s^5$	28.95	-1141.1	-5104.8			
$s^4$	88.6	919.35	-5756			
$s^3$	-1441.5	-3224				
$s^2$	721.2	-5756				
$s^1$	-14728.8					
$s^0$	-5756					

注意到系统的劳斯表的首列变号 5 次, 所以系统是不稳定的, 系统有 5 个根位于右半  $s$  平面, 与题 D2-1 的结果吻合。

**A3-6** 某闭环系统如图 3-5 所示。

(1) 求系统的传递函数  $C(s)/R(s)$ ;

(2) 计算系统的稳态误差系数;

(3) 求闭环系统的零、极点;

(4) 用 MATLAB 求系统的单位阶跃响应曲线;

(5) 讨论闭环极点对系统动态响应的影响, 哪些极点起主导作用, 哪些极点有重要影响。

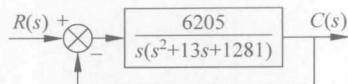


图 3-5 题 A3-6 闭环系统

解 系统中开环传递函数  $G(s) = \frac{6205}{s(s^2 + 13s + 1281)}$ , 反馈传递函数  $H(s) = 1$ 。

$$(1) \text{ 系统的闭环传递函数 } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{6205}{s^3 + 13s^2 + 1281s + 6205}.$$

(2) 直接验证闭环系统是稳定的。系统的稳态误差系数: 位置误差系数  $K_p = \infty$ , 速度误差系数  $K_v = 4.84$ , 加速度误差系数  $K_a = 0$ 。

$$(3) \text{ 由系统的闭环传递函数 } M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{6205}{s^3 + 13s^2 + 1281s + 6205}.$$

闭环系统不存在零点, 极点为  $s_1 = -5, s_2 = -4 + 35j, s_3 = -4 - 35j$ 。

(4) 系统的阶跃响应曲线如图 3-6 所示。

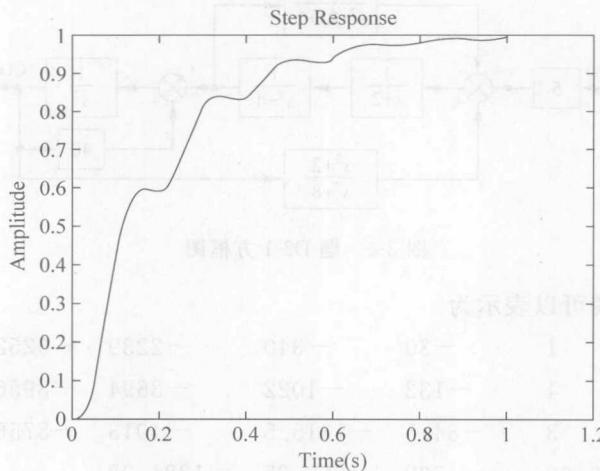


图 3-6 系统的阶跃响应曲线

(5) 系统的闭环极点对于系统的阶跃响应的影响分析系统的三个极点  $s_1 = -5, s_2 = -4 + 35j, s_3 = -4 - 35j$  比较接近, 没有主导极点, 因此阶跃响应与典型二阶系统有较大的区别。

**A3-7** 某反馈系统如图 3-7 所示。

(1) 选择  $K_1, K_2$ , 使系统的  $\zeta = 0.707, \omega_n = 2\text{rad/s}$ ;

(2) 选择  $K_1, K_2$ , 使系统有两个相等的实根  $s = -10$ ;

(3) 分别求(1)、(2)两种情况下, 系统的超调量  $M_p$ , 调整时间  $t_s$  和上升时间  $t_r$ 。

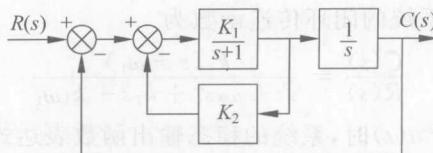


图 3-7 题 A3-7 系统图

不解方程求解 10-9 一阶系统中，当输入为单位脉冲时，输出为

解 视系统为单位反馈，其等效开环传递函数为  $G(s) = \frac{K_1}{s(s+1+K_1K_2)}$ ，闭环传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1}$ 。

(1) 若系统的  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 2\text{rad/s}$ , 则期望的系统的闭环特征方程就是

$$f^*(s) = s^2 + 2\sqrt{2}s + 4$$

系统的闭环特征方程是

$$f(s) = s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1$$

比较对应项的系数得出参数  $K_1 = 4$ ;  $K_2 = (2\sqrt{2}-1)/4 = 0.457$ 。

(2) 若系统有两个相等的实根  $s = -10$ , 则期望的系统的闭环特征方程就是

$$f^*(s) = s^2 + 20s + 100$$

系统的闭环特征方程是

$$f(s) = s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1$$

根据对应项的系数相同的关系得出参数  $K_1 = 100$ ;  $K_2 = 0.19$ 。

(3) 在情况(1)下, 最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 4.3\%$$

上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \arccos^{-1}\xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.667\text{s}$$

调整时间

$$t_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 2.12\text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

在情况(2)下, 系统的  $\xi = 1$ , 最大超调量

$$M_p = 0$$

上升时间

$$1 - e^{-\omega_n t_1} (1 + \omega_n t_1) = 0.1$$

为超越方程, 无法解, 要用 MATLAB 解。

$$1 - e^{-\omega_n t_2} (1 + \omega_n t_2) = 0.9$$

$$t_r = t_2 - t_1 = 0.39 - 0.055 = 0.335\text{s}$$

调整时间

$$e^{-\omega_n t_s} (1 + \omega_n t_s) = 0.05$$

$$t_s \approx 0.48\text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

**A3-8** 某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1}$$

试求输入为  $r(t) = t^2 u(t)$  时, 系统的稳态输出函数表达式。

解

(1) 先判定稳定性。由系统特征方程  $s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1 = 0$ , 可列写劳斯表如下

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & k_1 \\ s^2 & \omega_2 & k_1 \omega_1 \\ s^1 & \frac{k_1(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_2} & \\ s^0 & k_1 \omega_1 & \end{array}$$

由劳斯稳定判据, 可得系统的稳定条件为

$$\begin{cases} \omega_2 > 0 \\ k_1(\omega_2 - \omega_1) > 0 \\ k_1 \omega_1 > 0 \quad \text{即 } k_1 > 0 \quad \omega_2 > \omega_1 > 0 \end{cases}$$

(2) 因为该单位反馈闭环系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1(s_1 + \omega_1)}{s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

其中  $H(s) = 1$ , 所以系统开环传递函数  $G(s)H(s) = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^2(s + \omega_2)}$  为 II 型系统, 得稳态

加速度误差系数

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_1 \omega_1}{s + \omega_2} = \frac{k_1 \omega_1}{\omega_2}$$

所以对于输入  $r(t) = t^2 u(t)$ , 系统稳态误差为

$$e_{ssn}(\infty) = \frac{2}{K_a} = \frac{2\omega_2}{k_1 \omega_1}$$

所以系统在满足条件(1)时的稳态输出为  $c(t) = t^2 u(t) - \frac{2\omega_2}{k_1 \omega_1}$ 。

**A3-9** 求满足下列各项指标的共轭复极点在  $s$  平面上配置的区域

$$\zeta = 0.5, \quad \omega_n \leqslant 3 \text{ rad/s}, \quad t_r \leqslant 1 \text{ s}$$

解 系统的性能指标  $\zeta = 0.5, \omega_n \leqslant 3, t_r \leqslant 1 \text{ s}$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \leqslant 1$$

即是

$$\frac{\pi - \arccos 0.5}{\omega_n \sqrt{1 - 0.5^2}} \leqslant 1$$

得到

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \leqslant \omega_n \leqslant 3$$

所以系统的极点在  $s$  平面上配置的区域如图 3-8 所示。

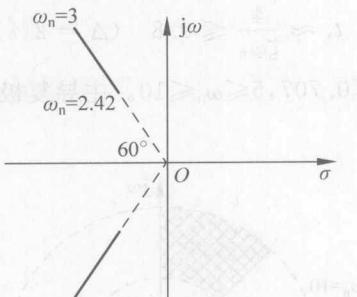


图 3-8 极点在  $s$  平面上的配置区域

**A3-10** 某系统有一对共轭主导复极点。根据下列指标要求，分别画出主导复极点在  $s$  平面上的分布区域：

- (1)  $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \geq 10 \text{ rad/s};$
- (2)  $\zeta \leq 0.707, 5 \text{ rad/s} \leq \omega_n \leq 10 \text{ rad/s};$
- (3)  $0.8 \geq \zeta \geq 0.707, \omega_n \geq 10 \text{ rad/s};$
- (4)  $\zeta \geq 0.6, \omega_n \leq 6 \text{ rad/s};$
- (5)  $\zeta \geq 0.9, \omega_n \leq 0.1 \text{ rad/s}.$

并计算满足各指标时，系统的超调量  $M_p$  和按 2% 准则的调整时间  $t_s$ 。

解 (1) 系统的性能指标  $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \geq 10$ 。主导复极点在  $s$  平面上的分布区域如图 3-9 所示。

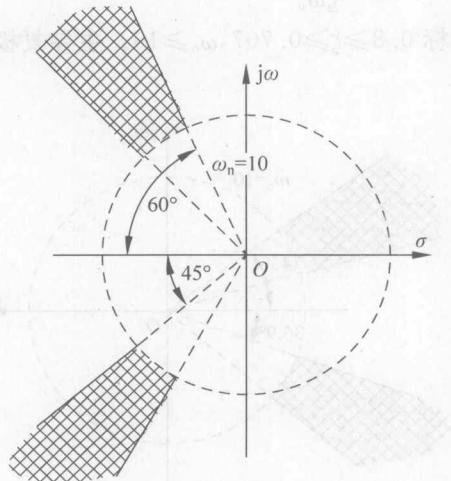


图 3-9 主导复极点在  $s$  平面上的分布区域

最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

$$16.3\% \geq M_p \geq 4.3\%$$

## 调整时间

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leqslant 0.8 \quad (\Delta = 2\%)$$

(2) 系统的性能指标  $\zeta \leqslant 0.707, \omega_n \leqslant 10$ 。主导复极点在  $s$  平面上的分布区域如图 3-10 所示。

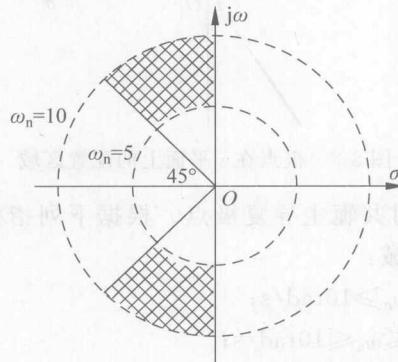


图 3-10 主导复极点在  $s$  平面上的分布区域

## 最大超调量

$$M_p = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \geqslant 4.3\%$$

## 调整时间

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \geqslant 0.57 \quad (\Delta = 2\%)$$

(3) 系统的性能指标  $0.8 \geqslant \zeta \geqslant 0.707, \omega_n \geqslant 10$ 。主导复极点在  $s$  平面上的分布区域如图 3-11 所示。

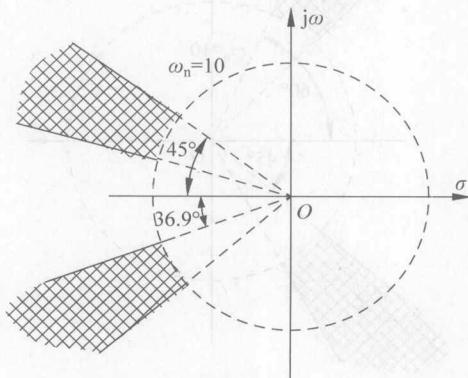
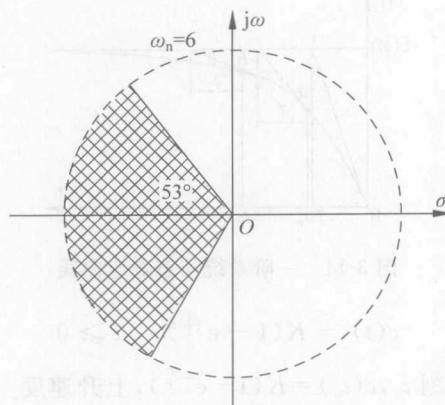


图 3-11 主导复极点在  $s$  平面上的分布区域

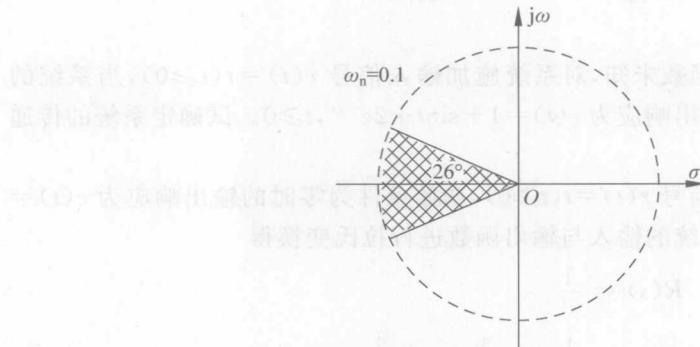
$$4.3\% > M_p > 1.52\%; \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leqslant 0.57, (\Delta = 2\%).$$

(4) 系统的性能指标  $\zeta \geqslant 0.6, \omega_n \leqslant 6$ 。主导复极点在  $s$  平面上的分布区域如图 3-12 所示。

图 3-12 主导复极点在  $s$  平面上的分布区域

$9.5\% \geq M_p$ ；无法确定调节时间范围。

(5) 系统的性能指标  $\zeta \geq 0.9, \omega_n \leq 0.1$ 。主导复极点在  $s$  平面上的分布区域如图 3-13 所示。

图 3-13 主导复极点在  $s$  平面上的分布区域

$0.15\% \geq M_p$ ；无法确定调节时间范围。

## B 深入题

**B3-1** 试证明在一阶系统动态响应曲线上任意点起，以该点的上升速度上升，达到  $c(\infty)$  所需的时间都是  $T$ 。如图 3-14 所示，自原点 0,  $a$  点,  $b$  点起，保持各点的上升速度  $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_a}, \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_b}$ ，上升到  $c(\infty)$  所需的时间都是  $T$ 。

解 一阶系统的传递函数为  $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts+1}$ ，其单位阶跃响应为

$$C(s) = M(s)R(s) = \frac{K}{Ts+1} \times \frac{1}{s}$$

用拉氏反变换，得

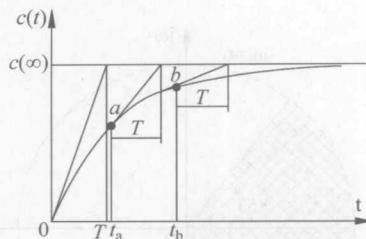


图 3-14 一阶系统动态响应曲线

$$c(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

$c(\infty) = K$ 。又在任意时刻  $t_0$ ,  $c(t_0) = K(1 - e^{-\frac{t_0}{T}})$ , 上升速度

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t_0}{T}}$$

于是在系统的响应曲线上, 从  $t_0$  以该点的上升速度上升到  $C(\infty)=K$  的时间  $\Delta t$  为

$$\Delta t = \frac{c(\infty) - c(t_0)}{\frac{dc(t_0)}{dt}} = \frac{K - K(1 - e^{-\frac{t_0}{T}})}{\frac{K}{T} e^{-\frac{t_0}{T}}} = T$$

这就证明了命题。

**B3-2** 某系统的传递函数未知, 对系统施加输入信号  $r(t) = t(t \geq 0)$ , 当系统的初始条件为零时, 系统的输出响应为  $c(t) = 1 + \sin t + 2e^{-2t}, t \geq 0$ 。试确定系统的传递函数。

解 已知系统的输入信号  $r(t) = t(t \geq 0)$ , 初始条件为零时的输出响应为  $c(t) = 1 + \sin t + 2e^{-2t}, t \geq 0$ 。对系统的输入与输出函数进行拉氏变换得

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s + 2}$$

所以系统的传递函数就是

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s + 2}}{\frac{1}{s^2}} = 3s - 3 + \frac{8s^2 - s + 6}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

**B3-3** 试证明图 3-15 系统, 由扰动  $N(s)$  引起的系统稳态误差为

$$e_{ssN} = \lim_{s \rightarrow 0} E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} N(s) \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

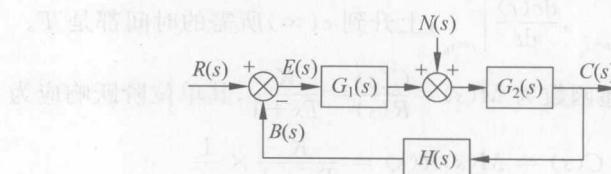


图 3-15 题 B3-2 系统方块图

解 考虑扰动  $N(s)$  产生的误差  $E(s)$ , 令  $R(s)=0$ 。

系统误差与扰动输入之间的传递函数为

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$E_N(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

所以当系统稳定时, 用终值定理, 由扰动  $N(s)$  引起的系统稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

命题获证。

**B3-4** 某系统的方块图如图 3-16 所示。

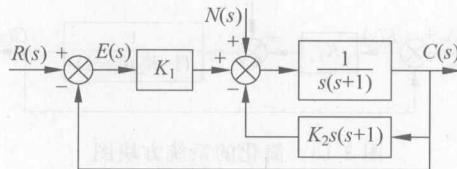


图 3-16 题 B3-4 系统方块图

试求:

- (1) 系统的稳态误差系数:  $K_p, K_v, K_a$ ;
- (2) 由单位阶跃扰动引起的稳态误差  $e_{ssn}$ ;
- (3) 系统的阻尼比  $\zeta$  与无阻尼振荡角频率  $\omega_n$ ;
- (4) 选择  $K_1, K_2$ , 使系统单位阶跃响应的超调量  $M_p \leqslant 5\%$ 。

解

系统的方块图可以简化为图 3-17。

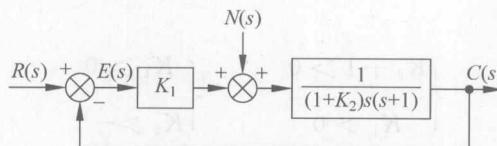


图 3-17 简化的系统方块图

(1) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{(K_2 + 1)s(s + 1)}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K_1}{(K_2 + 1)s^2 + (K_2 + 1)s + K_1}$$

劳斯表如下

$s^2$	$K_2 + 1$	$K_1$
$s^1$	$K_2 + 1$	
$s^0$		$K_1$

由劳斯判据易知

$$\begin{cases} K_2 + 1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 > -1 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$

系统为 I 型系统, 则

$$K_p = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K_1}{K_2 + 1}$$

$$K_a = 0$$

(2) 求稳态误差先判定系统稳定。原系统方块图化为如图 3-18 所示。

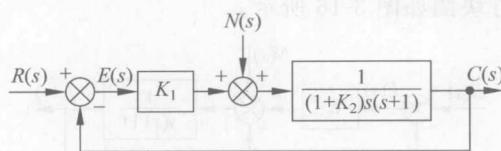


图 3-18 简化的系统方块图

令  $R(s)=0$ , 得

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{(1+K_2)s(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}} = \frac{1}{(1+K_2)s^2 + (1+K_2)s + K_1}$$

由系统特征方程可排出劳斯表如下

$$\begin{array}{ccc} S^2 & K_2 + 1 & K_1 \\ S^1 & K_2 + 1 & \\ S^0 & K_1 & \end{array}$$

稳定条件为:

$$\begin{cases} K_2 + 1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 > 0 \\ K_2 > -1 \end{cases}$$

在满足上述稳定条件下, 单位阶跃扰动引起的误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} \cdot E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cdot \frac{E_N(s)}{N(s)} \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+K_2)s(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{K_1}$$

所以系统稳定条件下单位阶跃扰动引起的稳态误差  $e_{ssn}$  为  $-\frac{1}{K_1}$ 。

(3) 由闭环传递函数可知

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{K_1}{K_2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{K_2 + 1}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_2 + 1}{K_1}} \end{cases}$$

(4) 令  $N(s)=0$ , 系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}} = \frac{\frac{K_1}{1+K_2}}{s^2 + s + \frac{K_1}{1+K_2}}$$

对此二阶系统传递函数标准形式  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{K_1}{1+K_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{1+K_2}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+K_2}{K_1}} \end{cases}$$

二阶系统单位阶跃响应超调量  $M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$ , 要使系统超调量  $M_p \leq 5\%$ , 即

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \leq 5\% \Rightarrow \zeta \geq \frac{\ln 20}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 20)^2}}$$

即

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+K_2}{K_1}} \geq \frac{\ln 20}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 20)^2}} \Rightarrow \frac{1+K_2}{K_1} \geq \frac{4(\ln 20)^2}{\pi^2 + (\ln 20)^2} \quad ①$$

另外, 系统必须满足稳定条件由特征方程  $s^2 + s + \frac{K_1}{1+K_2} = 0$  得

$$\frac{K_1}{1+K_2} > 0 \quad ②$$

由①、②知,  $K_1, K_2$  必须满足

$$\frac{1+K_2}{K_1} \geq \frac{4(\ln 20)^2}{\pi^2 + (\ln 20)^2}$$

**B3-5** 太空望远镜指向系统的简化方块图如图 3-19 所示。

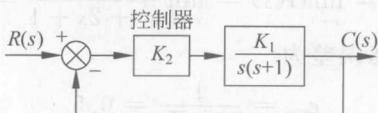


图 3-19 太空望远镜指向控制系统

(1) 选择  $K_1$  和  $K_2$ , 使系统单位阶跃响应的超调量  $M_p \leq 5\%$ ;

(2) 计算该系统单位阶跃响应和单位速度响应的稳态误差。

解 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 K_2}{s(s+1)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_1 K_2}{s^2 + s + K_1 K_2}$$

若期望系统的单位阶跃响应的超调量  $M_p \leq 5\%$ , 即

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \leq 5\%$$

得到  $\zeta \geq 0.7$ , 所以  $K_1 K_2 = 0.5$ , 满足此条件的  $K$  值都满足超调量要求。

由于系统是 I 型系统, 所以系统单位阶跃响应的稳态误差为零, 单位速度响应的稳态误差为  $\frac{1}{K_1 K_2}$

## C 实践题

**C3-1** 电枢控制直流电动机可以看成是速度控制系统, 反电势是系统的反馈信号。

(1) 按照第 2 章给出的电枢控制电动机的方程式(2-78)~式(2-81), 画出系统的方块图;

(2) 假定  $R_a, L_a, J, b, K_t$  和  $K_e$  皆等于 1, 当以阶跃指令改变电枢电压  $u_a$  来改变电机的转速后, 计算系统的稳态误差;

(3) 为使系统阶跃响应的超调量  $M_p \leq 10\%$ , 系统的反馈增益  $K_e$  应当多大?

解 (1) 系统的方块图如图 3-20 所示。

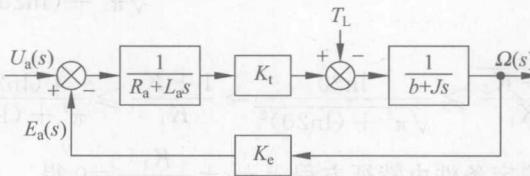


图 3-20 系统的方块图

(2) 假定,  $L_a, J, b, K_t, K_e$  皆等于 1, 则系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

系统的稳态位置误差系数为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = 1$$

系统的单位阶跃响应的稳态误差为

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.5$$

(3) 系统的闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + K_e + 1}$$

系统阶跃响应的超调量  $M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \leq 10\%$ , 计算得到

$$\xi \geq 0.59$$

所以  $K_e \leq 1.87$ 。

**C3-2** 图 3-21 中的三个 RC 网络分别是相位超前校正网络(a)、相位滞后校正网络(b)和相位超前-滞后校正网络(c), 它们在控制系统的分析与设计中是十分有用的。

(1) 分别推导它们的传递函数;

(2) 假定  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega, C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$ , 分别画出它们的零、极点在  $s$  平面上的位置;

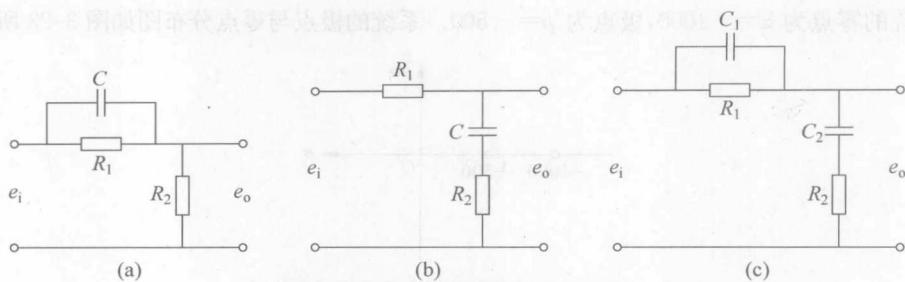


图 3-21 三种校正 RC 网络

(3) 分别求输入  $E_i(s) = \frac{1}{s}$  时, 网络的输出响应  $e_o(t)$  曲线。

解 (1) 系统(a)的传递函数为

$$G_a(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_1 R_2 C s + R_2}{R_1 R_2 C s + R_2 + R_1}$$

系统(b)的传递函数为

$$G_b(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2 C s + 1}{(R_1 + R_2) C s + 1}$$

系统(c)的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{R_1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

(2) 若系统参数为  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$ , 则

$$G_a(s) = \frac{R_1 R_2 C s + R_2}{R_1 R_2 C s + R_2 + R_1} = \frac{s + 1000}{s + 2000}$$

可得系统零点为  $z = -1000$ , 极点为  $p = -2000$ 。系统的极点与零点分布图如图 3-22 所示。

$$G_b(s) = \frac{R_2 C s + 1}{(R_1 + R_2) C s + 1} = \frac{0.001 s + 1}{0.002 s + 1}$$

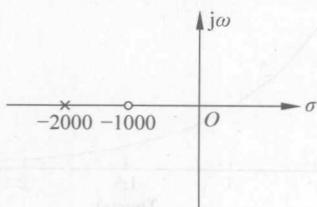


图 3-22 零点、极点分布图

则系统的零点为  $z = -1000$ , 极点为  $p = -500$ 。系统的极点与零点分布图如图 3-23 所示。

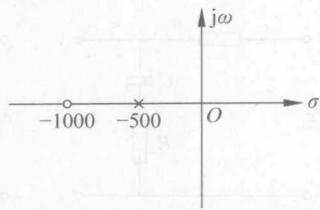


图 3-23 系统的零点、极点分布图

$$G_c(s) = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} = \frac{(s + 1000)^2}{s^2 + 3000s + 1000000}$$

则系统的零点为  $z_1 = -1000, z_2 = -1000$ , 极点为  $p_1 = -2618, p_2 = -382$ 。系统的极点与零点分布图如图 3-24 所示。

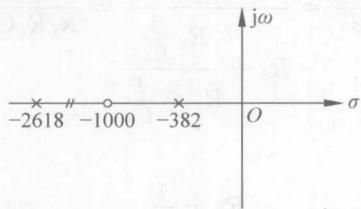


图 3-24 系统的零点、极点分布图

(3) 求输入  $E_i(s) = \frac{1}{s}$  时, 各个系统的输出响应曲线。

$$G_a(s) = \frac{s + 1000}{s + 2000}$$

响应曲线如图 3-25 所示。

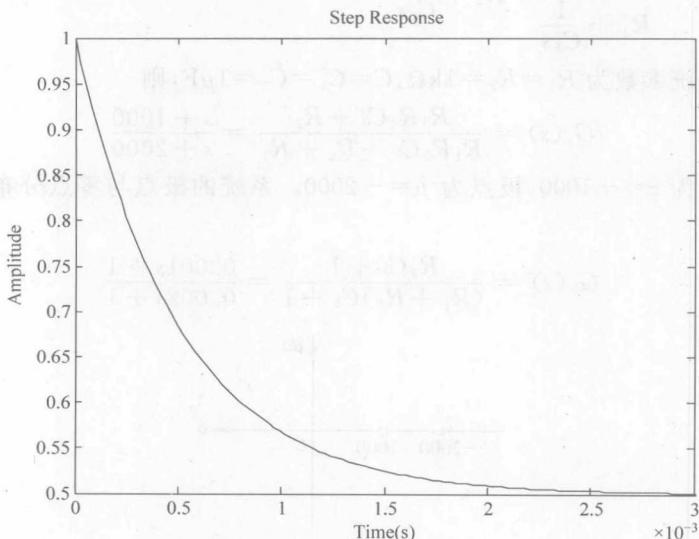


图 3-25 响应曲线图

$$G_b(s) = \frac{0.001s + 1}{0.002s + 1}$$

响应曲线如图 3-26 所示。

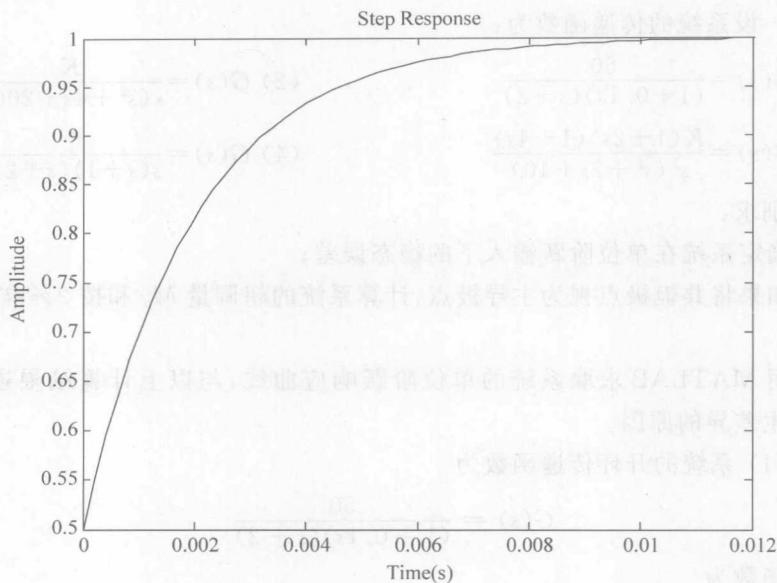


图 3-26 响应曲线图

$$G_c(s) = \frac{(s + 1000)^2}{s^2 + 3000s + 1000000}$$

响应曲线如图 3-27 所示。

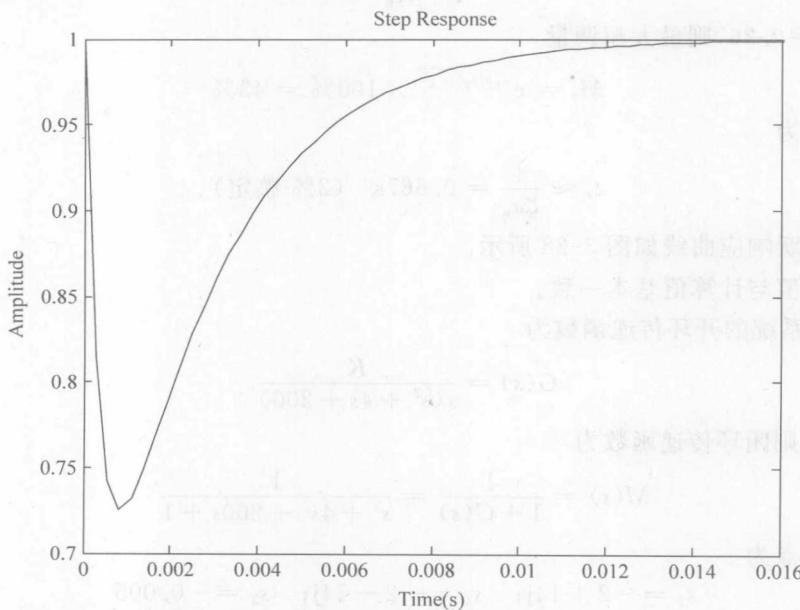


图 3-27 响应曲线图

## D MATLAB 题

**D3-1** 设系统的传递函数为：

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

试分别求：

(1) 确定系统在单位阶跃输入下的稳态误差；

(2) 如果将其轭极点视为主导极点，计算系统的超调量  $M_p$  和按 2% 准则的调整时间  $t_s$ ；

(3) 用 MATLAB 求取系统的单位阶跃响应曲线，与以上计算结果进行比较。并讨论产生差异的原因。

解 (1) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{500}{s^2 + 12s + 520}$$

系统为 0 型系统，位置误差系数  $K_p = 25$ ，单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0.038$$

系统的  $\xi = 0.26$ ，则最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 43\%$$

调整时间为

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.667s \quad (2\% \text{ 整定})$$

系统的阶跃响应曲线如图 3-28 所示。

实际值与计算值基本一致。

(2) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

设  $K=1$ ，则闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 200s + 1}$$

系统的极点为

$$s_1 = -2 + 14j; \quad s_2 = -2 - 14j; \quad s_3 = -0.005$$

系统为 1 型系统，单位阶跃输入的稳态误差为 0，系统的阶跃响应曲线如图 3-29 所示。

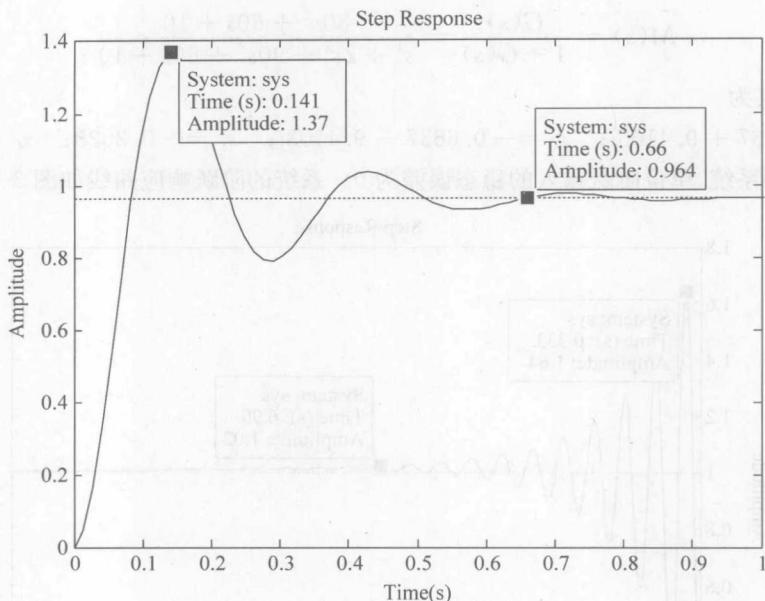


图 3-28 系统的阶跃响应曲线图

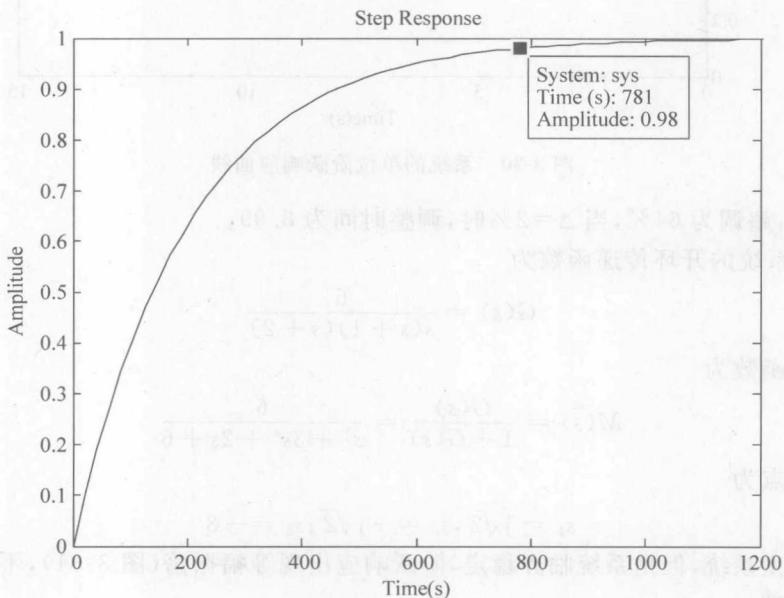


图 3-29 系统的阶跃响应曲线图

可见，系统的阶跃响应是单调的，没有超调。当  $\Delta=2\%$  时，调整时间为 781。

(3) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2 + 2s + 10)}, \quad \text{设 } K = 10$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{80s^2 + 60s + 10}{s^4 + 2s^3 + 90s^2 + 60s + 10}$$

系统的极点为

$$s_1 = -0.6637 + 9.4103j; \quad s_2 = -0.6637 - 9.4103j; \quad s_3 = -0.3628; \quad s_4 = -0.3097$$

系统为 2 型系统,单位阶跃输入的稳态误差为 0。系统的阶跃响应曲线如图 3-30 所示。

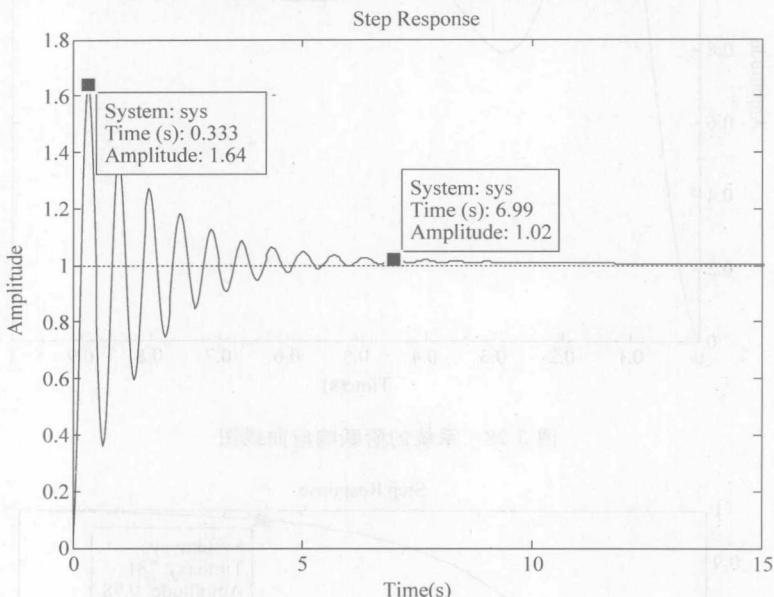


图 3-30 系统的单位阶跃响应曲线

可见,超调为 64%,当  $\Delta=2\%$  时,调整时间为 8.99。

(4) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{6}{s^3 + 3s^2 + 2s + 6}$$

系统的极点为

$$s_1 = j\sqrt{2}, \quad s_2 = -j\sqrt{2}; \quad s_3 = -3$$

系统为 1 型系统,但是系统临界稳定,阶跃响应出现等幅振荡(图 3-31),不稳态不能用终值定理。

**D3-2** 某控制系统如图 3-32 所示。控制器是 PI 调节器,它的零点可改变系统的稳态和动态特性,零点可通过调节器的参数来改变。

(1) PI 调节器对系统稳态误差的影响:计算  $a=0$  和  $a>0$  时,系统单位阶跃响应的稳态误差;

(2) 计算  $a=0, a=10$  和  $a=100$  时,系统的单位阶跃响应曲线,分析  $a$  对动态响应的影响;

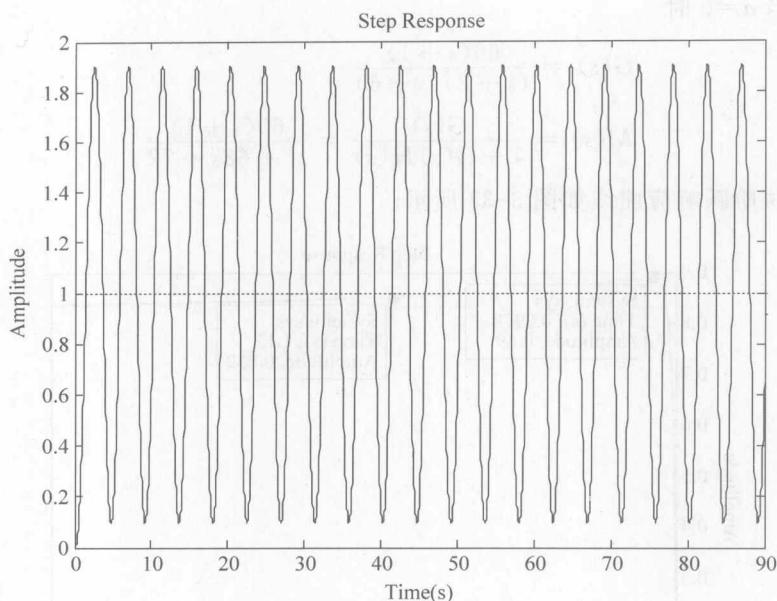


图 3-31 系统的阶跃响应曲线图

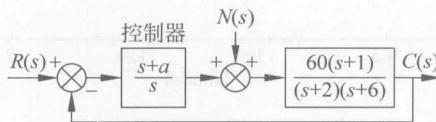


图 3-32 含 PI 调节器的控制系统

(3) 计算  $a=0$ ,  $a=10$  和  $a=100$  时, 系统对单位阶跃扰动 ( $N(s)=1/s$ ) 的响应曲线, 分析  $a$  对系统抗干扰性能的影响。

(4) 你能解释上述计算结果的物理意义吗?

解 系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{(s+a)}{s} \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$ 。

(1) 当  $a=0$  时,  $G(s) = \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$ , 系统为 0 型系统, 位置误差系数  $K_p=5$ , 单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p} = 0.167$$

当  $a>0$  时,  $G(s) = \frac{(s+a)}{s} \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$ , 系统为 I 型系统, 位置误差系数

$K_p=\infty$ , 单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

可见 PI 调节器可以改善系统的稳态性能。

(2) 当  $a=0$  时

$$G(s) = \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{60(s+1)}{s^2 + 68s + 72}$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3-33 所示。

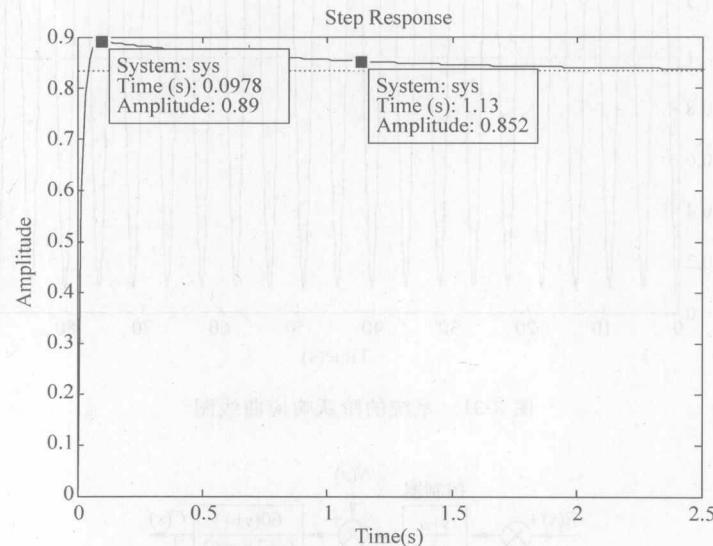


图 3-33 单位阶跃响应

当  $a=10$  时

$$G(s) = \frac{60(s+1)(s+10)}{s(s+2)(s+6)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{60s^2 + 660s + 600}{s^3 + 68s^2 + 672s + 600}$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3-34 所示。

当  $a=100$  时

$$G(s) = \frac{60(s+1)(s+100)}{s(s+2)(s+6)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{60s^2 + 6060s + 6000}{s^3 + 68s^2 + 6072s + 6000}$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3-35 所示。

可见,随着  $a$  值的增大,系统的稳定性变差,调整时间变长。

(3) 系统扰动的传递函数

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}}{1+\frac{(s+a)}{s} \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}}$$

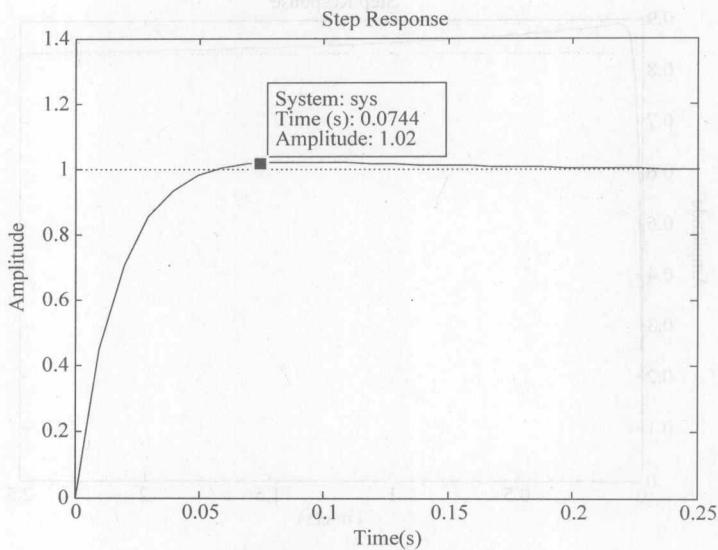


图 3-34 单位阶跃响应

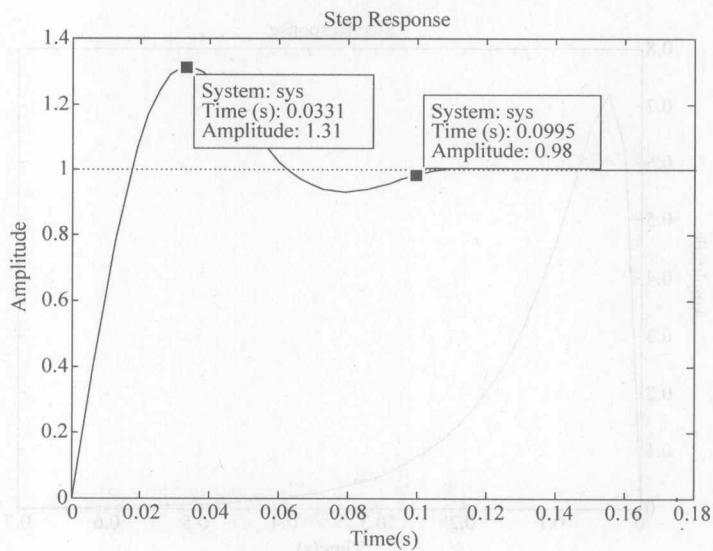


图 3-35 单位阶跃响应

当  $\alpha=0$  时

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{60(s+1)}{s^2 + 68s + 72}$$

单位阶跃扰动( $N(s)=1/s$ )的响应曲线如图 3-36 所示。

当  $\alpha=10$  时

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{60s(s+1)}{s^3 + 68s^2 + 672s + 600}$$

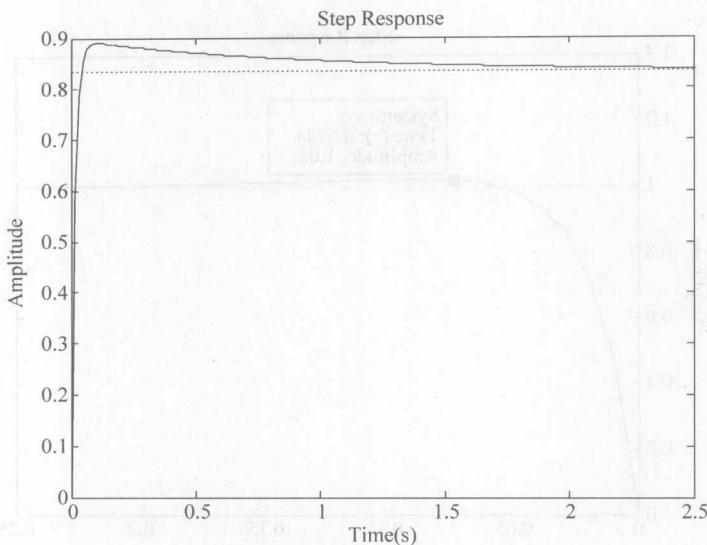


图 3-36 单位阶跃响应

单位阶跃扰动( $N(s)=1/s$ )的响应曲线如图 3-37 所示。

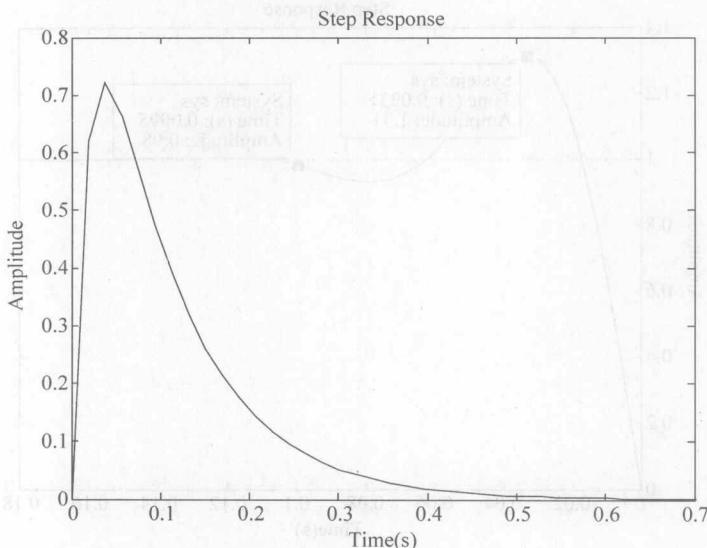


图 3-37 单位阶跃响应

当  $a=100$  时

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{60s(s+1)}{s^3 + 68s^2 + 6072s + 6000}$$

单位阶跃扰动( $N(s)=1/s$ )的响应曲线如图 3-38 所示。

可见,  $a$  值增大, 系统的抗干扰能力增强。

(4) 系统的抗干扰能力取决于扰动作用点之前的前向通道中的积分器个数和增益。

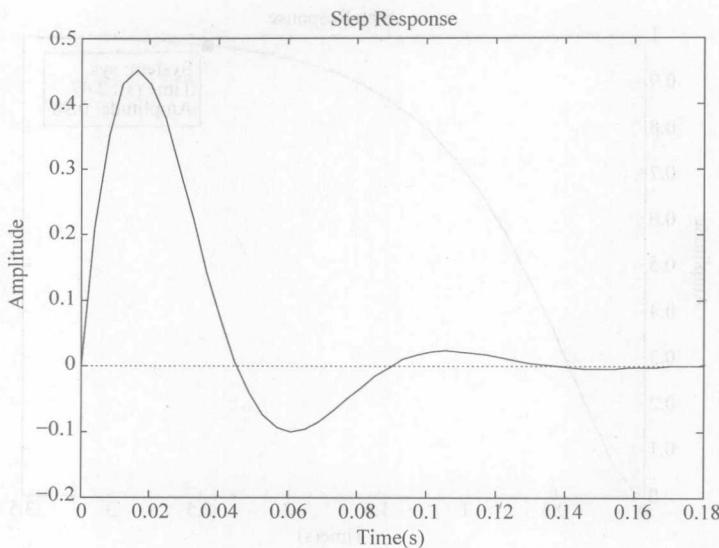


图 3-38 单位阶跃扰动的响应

**D3-3 已知闭环系统的传递函数**

$$G(s) = \frac{6}{(s^2 + 5s + 6)}$$

- (1) 用解析法计算系统的单位阶跃响应；
- (2) 用 step 命令求系统的单位阶跃响应曲线；
- (3) 比较(1)、(2)的计算结果(超调量  $M_p$  和按 2% 准则的调整时间  $t_s$ )。

解 闭环系统的传递函数  $G(s) = \frac{6}{(s^2 + 5s + 6)}$ , 系统的输入单位阶跃信号

$r(t) = u(t)$ ,  $R(s) = \frac{1}{s}$ , 则系统的输出为

$$C(s) = \frac{6}{(s^2 + 5s + 6)} \cdot \frac{1}{s}$$

进行拉氏反变换得

$$c(t) = 1 + 6 \left( \frac{e^{-3t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{2} \right)$$

系统的超调量为

$$M_p = 0\%$$

系统的调整时间

$$t_s \approx 2.47s, \quad \Delta = 2\%$$

系统的单位阶跃响应如图 3-39 所示。

**D3-4** 用 MATLAB 的 lsim 命令, 求以下单位负反馈系统对单位加速度输入  $\left(R(s) = \frac{1}{s^2}\right)$  的响应, 并求系统的稳态误差。

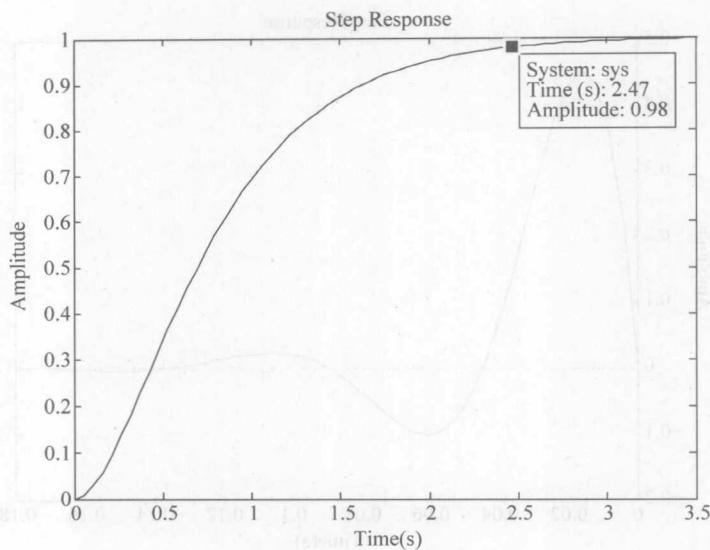


图 3-39 单位阶跃响应

$$(1) G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

解 使用 lsim 命令求系统速度输入  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  的响应, 三个系统分别如下:

(1)

```

num = [2];
den = [1 2 4];
% h = tf(num, den);           % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
u = t;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0) % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')

```

得系统的响应曲线如图 3-40 所示。

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2 + 2s + 2}}{1 + \frac{2}{s^2 + 2s + 2}} = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}$$

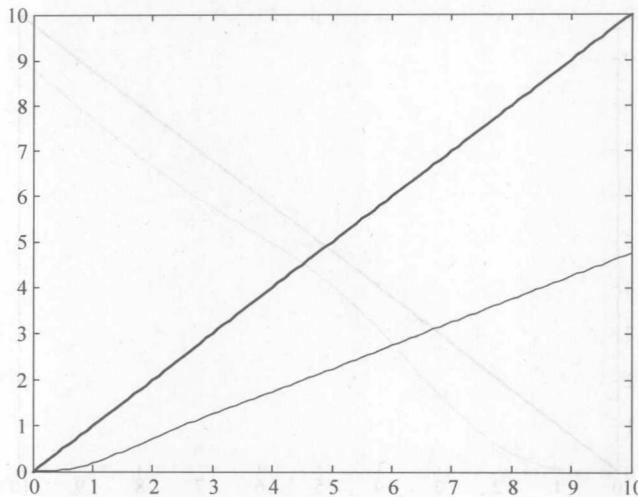


图 3-40 系统的响应曲线

由特征方程  $s^2 + 2s + 4 = 0$  可知系统稳定。

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

则系统的稳态误差为

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = \infty$$

(2)

```

num = [2];
den = [1 2 2];
% h = tf(num, den); % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
u = t;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0 0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0); % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')

```

得系统的响应曲线如图 3-41 所示。

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

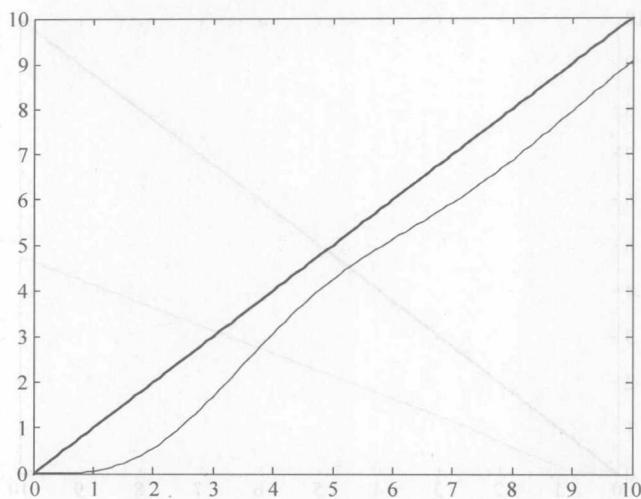


图 3-41 系统的响应曲线

由特征方程  $s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$  可排出劳斯表

$S^3$	1	2
$S^2$	2	2
$S^1$	1	
$S^0$	2	

由劳斯表可知系统稳定。则

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 1$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

于是得到系统的稳态误差为

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = 1$$

(3)

```

num = [ 2 ];
den = [ 1 2 2 0 2 ];
% h = tf(num, den); % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:100;
u = t;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [ 0 0 0 0 ];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0) % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')

```

得系统的响应曲线如图 3-42 所示。

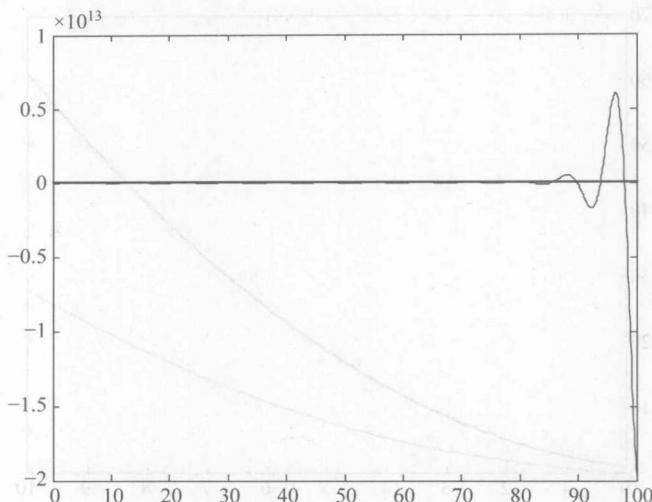


图 3-42 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2}$$

由特征方程缺项可知系统不稳定,故不存在稳态误差。

**D3-5** 用 MATLAB 的 lsim 命令,求输入为  $u(t) + tu(t) + \frac{1}{2}t^2 u(t)$  时,题 D3-4

系统的响应曲线,并求系统的稳态误差。

解 (1)

```

num = [2];
den = [1 2 4];
% h = tf(num, den);           % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
[rt, lt] = size(t);
for i = 1:1:lt
    tt(i) = t(i) * t(i);
end
u = 1 + t + 0.5 * tt;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0)      % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')

```

得系统的响应曲线如图 3-43 所示。

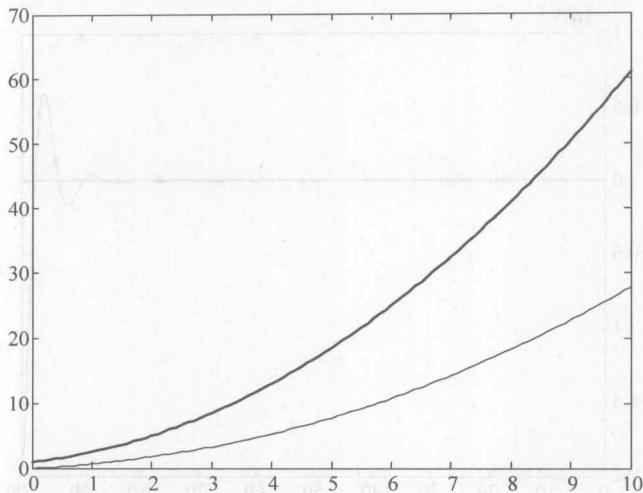


图 3-43 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2 + 2s + 2}}{1 + \frac{2}{s^2 + 2s + 2}} = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}$$

由特征方程  $s^2 + 2s + 4 = 0$  可知系统稳定。故

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

所以系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} + e_{ssa} = \frac{1}{1+k_p} + \frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_a} = \infty$$

(2)

```

num = [2];
den = [1 2 2 2];
% h = tf(num, den); % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:50;
[rt, lt] = size(t);
for i = 1:1:lt
    tt(i) = t(i) * t(i);
end
u = 1 + t + 0.5 * tt;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);

```

```
x0 = [0 0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0) % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')
```

得系统的响应曲线如图 3-44 所示。

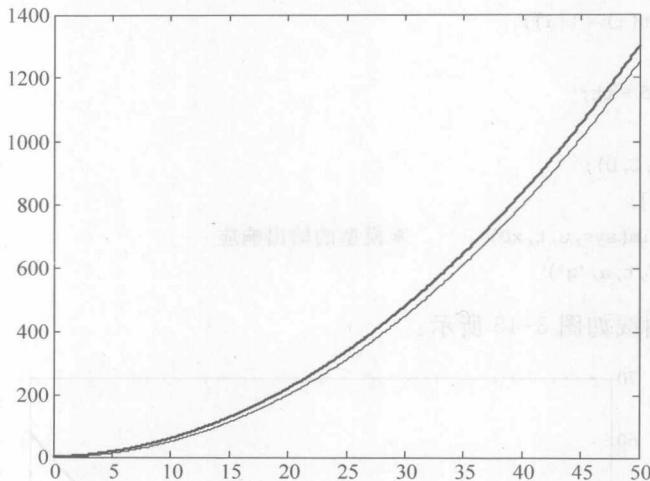


图 3-44 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

由特征方程  $s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$  可排出劳斯表

s3	1	2
s2	2	2
s1	1	
s0	2	

由劳斯表可知系统稳定。故

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 1$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

则系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} + e_{ssa} = \frac{1}{1+k_p} + \frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_a} = \infty$$

(3)

```
num = [2];
den = [1 2 2 0 2];
```

```
% h = tf(num,den); % 获得传递函数
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
[rt,lt] = size(t);
for i = 1:1:lt
    tt(i) = t(i) * t(i);
end
u = 1 + t + 0.5 * tt;
x = u;
sys = ss(A,B,C,D);
x0 = [0 0 0 0];
[y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0); % 模型的输出响应
plot(t,y,'b',t,u,'g')
```

得系统的响应曲线如图 3-45 所示。

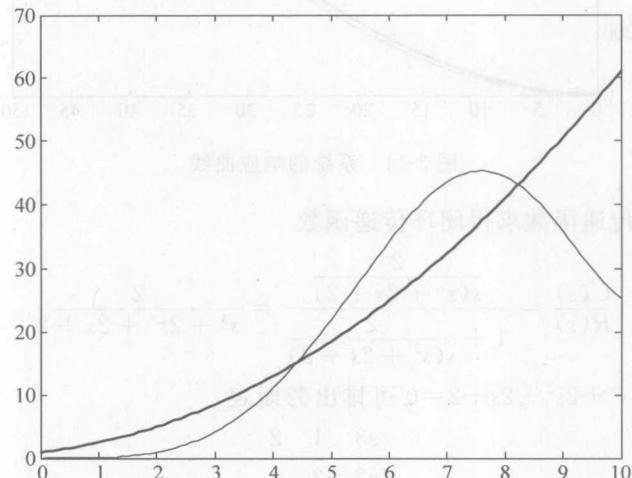


图 3-45 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2}$$

由特征方程缺项可知系统不稳定,故不存在稳态误差。

# 第4章

## 根轨迹法

### 要点提示

根轨迹法是线性控制系统分析和设计的一种方法,它描绘了当开环增益变化时,闭环系统极点在  $s$  平面上变化的轨迹。在绘制根轨迹时,我们总假定开环的零极点是已知的。

## 4.1 根轨迹的幅值条件和相角条件

闭环控制系统的方块图如图 4-1 所示。其闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4-1)$$

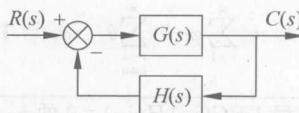


图 4-1 闭环系统方块图

将开环传递函数写成

$$G(s)H(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = K_r G_k(s) H_k(s) = K_r \frac{Z(s)}{P(s)}$$

则式(4-1)的分母可表示为

$$1 + K_r C_k(s) H_k(s) = 0 \quad (4-2)$$

式(4-2)等价于  $|G_k(s) H_k(s)| = K_r^{-1}$  和  $\angle G_k(s) H_k(s) = (2\lambda + 1)\pi$ , 前者称为根轨迹的幅值条件,后者称为根轨迹的相角条件。注意后者不含变量  $K_r$ ,根轨迹是根据相角条件绘制的。

以  $K_r$  为变量,当  $K_r$  自 0 增大到  $\infty$ ,闭环系统特征根的轨迹,就是根轨迹。本书只讨论  $K_r \geq 0$  的根轨迹。

## 4.2 绘制根轨迹的基本规则

表 4-1 给出了绘制根轨迹的规则。

表 4-1 根轨迹绘制规则汇总

序	内 容	规 则
1	起点 终点	超始于开环极点,终止于开环传零点(包括无限零点)
2	分支数	等于开环传递函数的极点数( $n \geq m$ )
3	对称性	对称于实轴
4	渐近线	相交于实轴上的同一点 坐标为 $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n-m}$ 倾角为 $\varphi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{n-m}, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
5	实 轴 上 分 布	实轴的某一区间内存在根轨迹,则其右边开环传递函数的实零点、实极点数之和必为奇数
6	分离(会合点)	实轴上的分离(会合)点——(必要条件) $P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = 0$
7	出射角 入射角	复极点处的出射角 $\theta_a = 180^\circ(2k+1) + \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq a}}^n \theta_j$ 复零点处的入射角 $\varphi_b = 180^\circ(2k+1) + \sum_{j=1}^n \theta_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq b}}^m \varphi_i$
8	虚轴交点	(1) 满足特征方程 $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$ 的 $j\omega$ 值 (2) 由劳斯阵列求得(及相应的 $K_r$ 值)
9	$K_r$ 计算	根轨迹上任一点 $s_x$ 处的 $K_r$ $K_r = \frac{1}{ G_k(s_x)H_k(s_x) } = \frac{\text{开环极点至向量 } s_x \text{ 长度的乘积}}{\text{开环零点至向量 } s_x \text{ 长度的乘积}} = \frac{\prod_{j=1}^n  s_x + p_j }{\prod_{i=1}^m  s_x + z_i }$

## 习题解答

### A 一般题

- A4-1** 已知单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K_r(s+1)}{s^2(s+a)}$ , 分别画出  $a=5, a=9, a=10$  的根轨迹草图, 并计算根轨迹在实轴上的分离点(或会合点), 根轨迹渐近线与实轴的夹角和交点。

解 1) 当  $a=5$  时:

(1) 根轨迹有 3 条分支;

(2) 根轨迹的起点分别是  $p_1=0, p_2=0, p_3=-5$ , 终点为一条终止于  $z_1=-1$ , 另两条趋向无穷远。

(3) 实轴上根轨迹为  $[-5, -1]$ 。

(4) 渐近线: 渐近线和实轴的夹角是

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3-1}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-5) - (-1)}{2} = -2$$

(5) 根轨迹的分离点(会合点)

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^3 + 8s^2 + 10s) = 0$$

解得  $s_1=0, s_{2,3}=-2 \pm j$ , 将这些根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 有  $s_1=0$  时,  $K_r=0, s_{2,3}=-2 \pm j$  时,  $K_r$  为负值, 故根轨迹的分离点为  $s_1=0$ , 相应的根轨迹如图 4-2 所示。

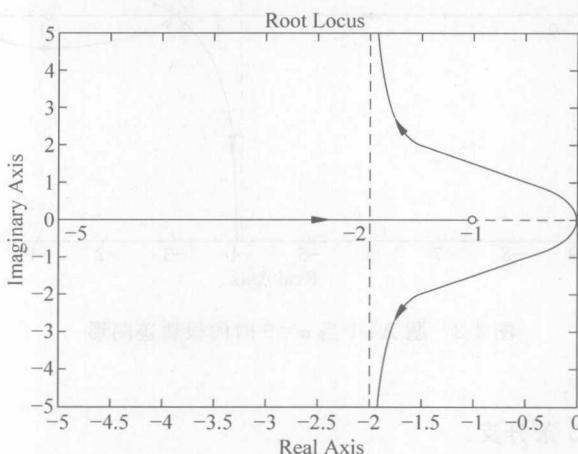


图 4-2 题 A4-1 当  $a=5$  时的根轨迹图形

2) 当  $a=9$  时:

(1) 根轨迹有 3 条分支。

(2) 根轨迹的起点分别是  $p_1=0, p_2=0, p_3=-9$ ; 终点, 一条终止于  $z_1=-1$ , 另两条趋向无穷远。

(3) 实轴上的根轨迹为  $[-9, -1]$ 。

(4) 渐近线: 渐近线和实轴的夹角是

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3 - 1}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为  $\sigma = \frac{(-9) - (-1)}{2} = -4$ 。

(5) 根轨迹的分离点(会合点)

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^3 + 12s^2 + 18s) = 0$$

解得  $s_1 = 0, s_2 = -3$ , 将其代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 有  $s_1 = 0$  时,  $K_r = 0$ ,  $s_2 = -3$  时,  $K_r = 27$ , 则根轨迹的分离点为  $s_1 = 0$ , 会合点为  $s_2 = -3$ , 相应的根轨迹如图 4-3 所示。

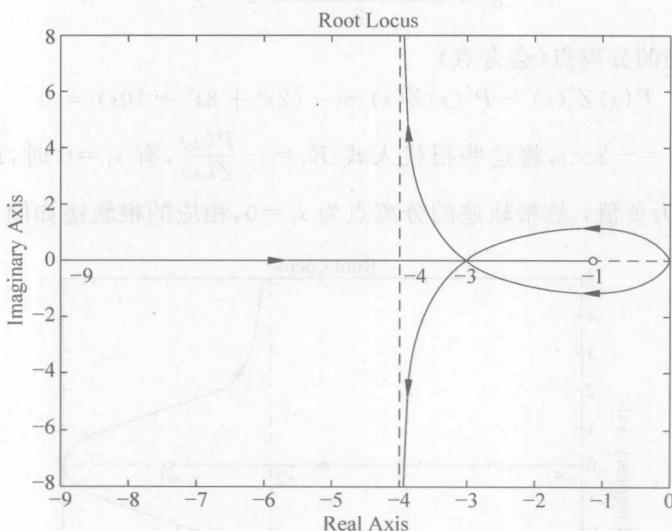


图 4-3 题 A4-1 当  $a=9$  时的根轨迹图形

3) 当  $a=10$  时:

(1) 根轨迹有 3 条分支。

(2) 根轨迹的起点分别是  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = -10$ ; 终点为一条终止于  $z_1 = -1$ , 另两条趋向无穷远。

(3) 实轴上的根轨迹为  $[-10, -1]$ 。

(4) 渐近线: 渐近线和实轴的夹角是

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3 - 1}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

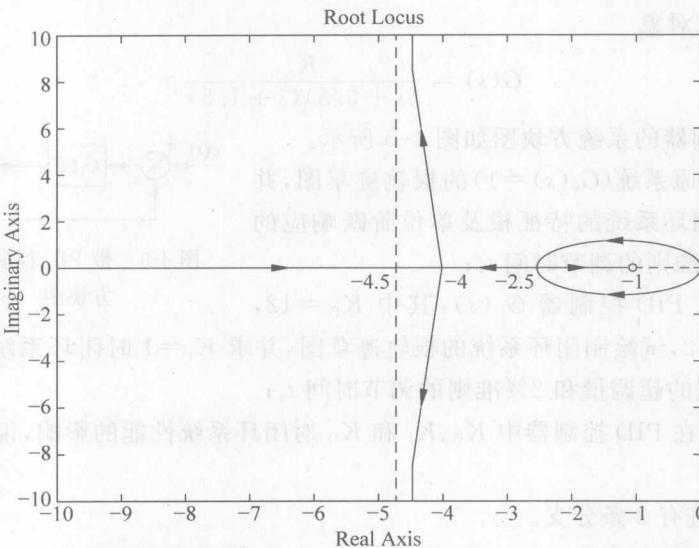
$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为  $\sigma = \frac{(-10) - (-1)}{2} = -4.5$ 。

## (5) 根轨迹的分离点(会合点)

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^3 + 13s^2 + 20s) = 0$$

解得  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -2.5$ ,  $s_3 = -4$ 。将其代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 有  $s_1 = 0$  时,  $K_r = 0$ ,  $s_2 = -2.5$ ,  $s_3 = -4$  时,  $K_r$  均取正值, 根轨迹的分离点为  $s_1 = 0$ ,  $s_3 = -4$ ; 会合点为  $s_2 = -2.5$ , 相应的根轨迹如图 4-4 所示。

图 4-4 题 A4-1 当  $\alpha=10$  时的根轨迹图形

**A4-2** 在工业过程控制中广泛应用 PID 控制器, 这种控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

式中,  $K_p$  为比例增益;  $K_i$  为积分增益;  $K_d$  为微分增益。假设控制器的输入信号为  $e(t)$ , 输出信号为  $u(t)$ , 则

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

即控制器的输出中含有输入信号的比例、积分和微分项, 故称为 PID 控制器。

若  $K_d = 0$ , 就是比例加积分(PI)控制器

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

若  $K_i = 0$ , 就是比例加微分(PD)控制器

$$G_c(s) = K_p + K_d s$$

PID 控制器为过程控制提供了一种便于调节的通用控制器, 对于不同控制对象, 设定不同的比例增益  $K_p$ 、积分增益  $K_i$  和微分增益  $K_d$ , 便可获得良好的控制效果。PID 控制器  $G_c(s)$  可改写为

$$G_c(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

或

$$G_c(s) = \frac{K_D(s^2 + \alpha s + \beta)}{s}$$

式中,  $\alpha = \frac{K_P}{K_D}$ ,  $\beta = \frac{K_I}{K_D}$ 。

考虑控制对象

$$G(s) = \frac{K_r}{(s + 0.5)(s + 1.5)}$$

应用 PID 控制器的系统方块图如图 4-5 所示。

(1) 绘制原系统( $G_c(s)=1$ )的根轨迹草图, 并求  $K_r=1$  时闭环系统的特征根及单位阶跃响应的超调量和 2% 准则的调节时间  $t_s$ ;

(2) 引入 PID 控制器  $G_c(s)$ , 其中  $K_p=12$ ,  $K_I=20$ ,  $K_D=2$ , 试绘制闭环系统的根轨迹草图, 并求  $K_r=1$  时闭环系统的特征根及单位阶跃响应的超调量和 2% 准则的调节时间  $t_s$ ;

(3) 讨论在 PID 控制器中  $K_p$ 、 $K_I$  和  $K_D$  对闭环系统性能的影响, 说明其原理。

解 (1)

① 根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹的起点为  $p_1 = -0.5$ ,  $p_2 = -1.5$ , 终点为无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹为  $[-1.5, -0.5]$ 。

④ 渐近线和实轴的夹角

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma = \frac{(-1.5) + (-0.5)}{2} = -1$$

⑤ 根轨迹的分离点(会合点); 由

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s + 2) = 0$$

得到  $s_1 = -1$ 。

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 得到  $s_1 = -1$  时,  $K_r = 0.25$ , 根轨迹的分离点为  $s_1 = -1$ 。

⑥ 原系统的根轨迹图如图 4-6 所示。

$K_r=1$  时系统的特征方程为

$$s^2 + 2s + 1.75 = 0$$

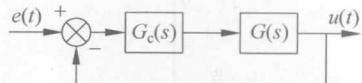


图 4-5 带 PID 控制器的系统

方块图

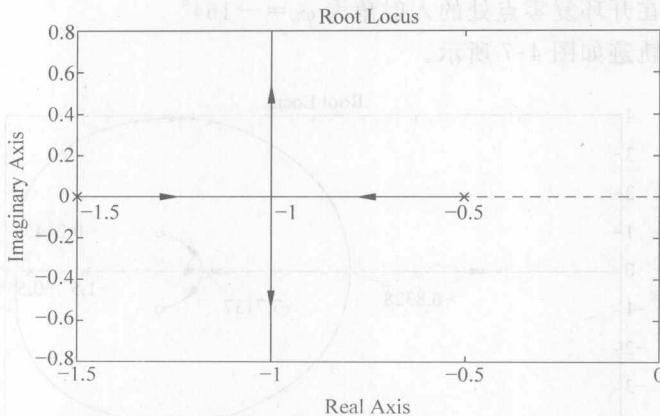


图 4-6 原系统的根轨迹

求得闭环系统的特征根为  $-1.0000 \pm 0.8660j$ , 即  $\zeta\omega_n=1, \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=0.866$ , 可得

$$\omega_n = 1.323, \quad \zeta = 0.756$$

于是单位阶跃响应的超调量为  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 2.65\%$ 。

$$2\% \text{ 误差准则的调整时间 } t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4s$$

(2) 引入 PID 控制器后, 系统的开环传递函数变为

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_r(2s^2 + 12s + 20)}{s(s+0.5)(s+1.5)}$$

① 根轨迹有 3 条分支

② 根轨迹的起点为  $p_1=0, p_2=-0.5, p_3=-1.5$ , 有两条根轨迹终止于  $z_{1,2} = -3 \pm j$ , 一条趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-0.5, 0]$  和  $(-\infty, -1.5]$  段。

④ 渐近线和实轴的夹角

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{1}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \pi$$

⑤ 根轨迹的分离点和会合点, 解方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^4 + 24s^3 + 82s^2 + 80s + 15) = 0$$

得方程根为

$$s_1 = -6.8328, \quad s_2 = -3.7137$$

$$s_3 = -1.2090, \quad s_4 = -0.2445$$

将上述根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 当  $s_1 = -6.8328, s_2 = -3.7137, s_4 = -0.2445$  时,

$K_r$  取正值,  $s_3 = -1.2090$  不在根轨迹上, 根轨迹的分离点为  $s_2 = -3.7137, s_4 = -0.2445$ , 会合点为  $s_1 = -6.8328$ 。

⑥ 根轨迹在开环复零点处的入射角为  $\varphi_b = -164^\circ$

⑦ 系统根轨迹如图 4-7 所示。

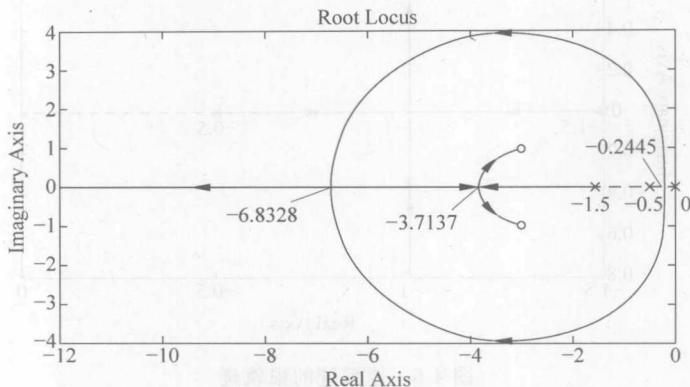


图 4-7 引入 PID 控制器后系统的根轨迹

当  $K_r=1$  时该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{2s^2 + 12s + 20}{s^3 + 4s^2 + 12.75s + 20}$$

闭环系统的特征根为

$-0.8664 \pm 2.8409j, -2.2672$ 。利用 MATLAB 可得系统的单位阶跃响应如图 4-8 所示。

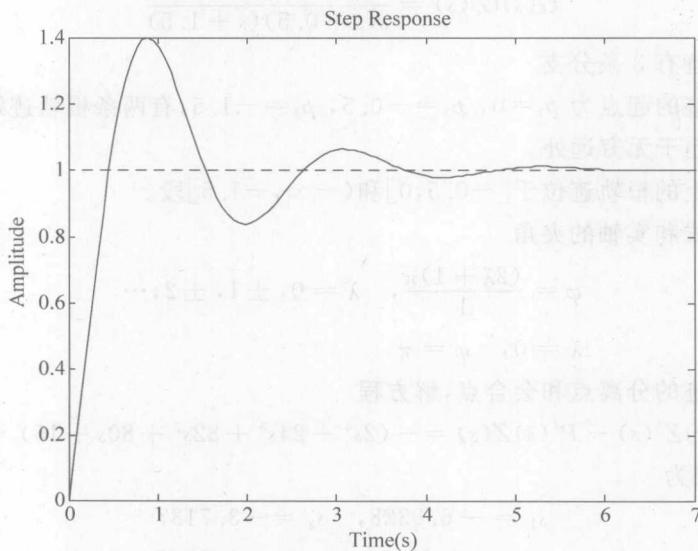


图 4-8 系统的单位阶跃响应

由上图可知,超调量  $M_p = 39.8\%$ , 2% 准则调整时间  $t_s = 4.38s$ 。

(3) 引入 PID 控制后

比例(P)控制：控制器的输出与输入误差信号成比例关系。系统一旦出现偏差，

比例调节立即产生调节作用以减少偏差。通过改变开环增益大小调整系统输出动态响应性能,即比例作用大,可以加快调节,降低稳态误差。但比例过大,系统稳定性下降,容易造成系统不稳定。由于调节方法单一,故往往不能同时满足控制系统静态和动态的要求。

**积分(I)控制:** 积分控制器的引入增加了系统的型号数,控制器的输出与输入误差信号的积分成正比关系,有利于消除系统的稳态误差,提高无差度。只要有误差存在,积分调节就不断进行,直至无差,积分调节停止,积分调节输出保持常值。积分作用的强弱取决于积分增益  $K_I$  值,  $K_I$  越大, 积分作用就越强。反之  $K_I$  越小则积分作用越弱,加入积分调节会使系统稳定性下降,动态响应变慢。所以,积分作用常与另两种控制规律结合,组成 PI 调节器或者 PID 调节器以满足系统性能指标的综合要求。从频率特性角度来看,积分或 PI 控制实质上相当于滞后校正作用。

**微分(D)控制:** 在微分控制中,控制器的输出与输入误差信号的微分成正比关系。微分作用反映系统偏差信号的变化率,能“预见”偏差变化的趋势,因此能产生超前的控制作用,在偏差还没有形成之前,已被微分调节作用消除。因此,可以显著改善系统的动态性能。微分增益  $K_D$  选择合适的情况下,能够有效降低超调,减小调节时间。应注意的是,微分作用对噪声干扰有放大作用,因此过强地加微分调节,对系统抗干扰不利。此外,微分反映的是变化率,而当输入没有变化时,微分作用输出为零。微分作用不能单独作用,需要与另外两种调节规律相结合,组成 PD 或 PID 控制器。D 或 PD 控制是通过提供具有超前相位的频率特性,以改善系统的稳定性和动态性能。

实际控制过程中,并非 P、I、D 三种控制规律都同时采用,而往往要根据系统性能指标的具体要求采用不同组合校正方式,如 PI、PD、PID 等。

从根轨迹的角度看,在串联了 PID 控制后,开环在原点增加了一个极点,提高了系统的型号,有利于改善系统的稳态性能;同时还增加了两个开环的零点  $\frac{-K_P \pm \sqrt{K_P^2 - 4K_D K_I}}{2K_D}$ 。根轨迹存在如图 4-9 所示的几种变形。

**A4-3 已知负反馈系统的开环传递函数为**

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

绘出系统的根轨迹图,并求根轨迹在实轴上的分离点和根轨迹的渐近线。

**解 (1) 根轨迹有 4 条分支。**

(2) 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_{3,4} = -1 \pm j$ , 开环无有限零点。

(3) 实轴上的根轨迹是  $[-2, 0]$  区间。

(4) 渐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{4}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}; \quad \lambda = 3, \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

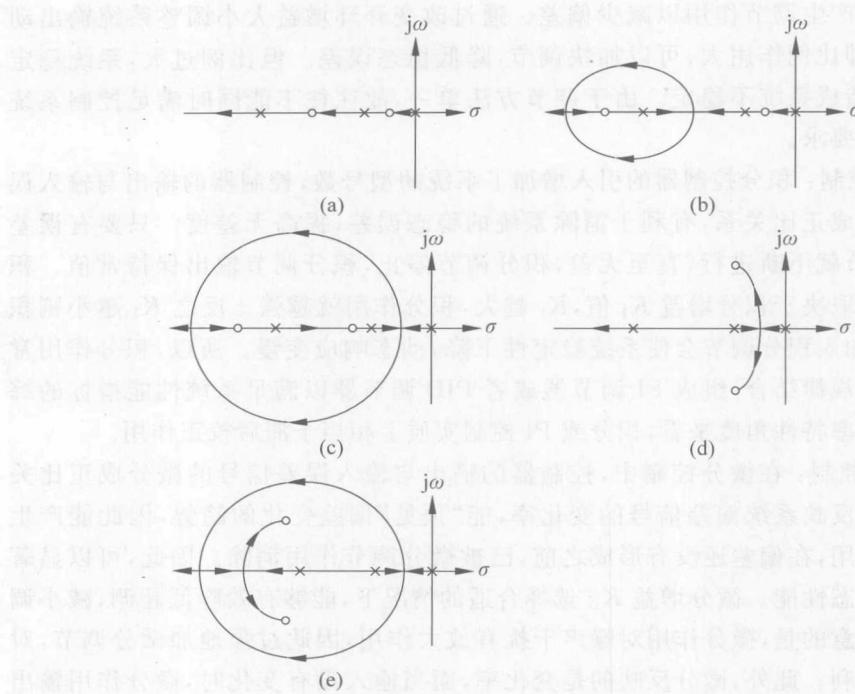


图 4-9 题 A4-2 的根轨迹的几种变形

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{0 + (-2) + (-1+j) + (-1-j)}{4} = -1$$

(5) 根轨迹的分离点。由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(4s^3 + 12s^2 + 12s + 4) = 0$$

解得该方程的根为  $s_{1,2,3} = -1$ 。将  $s = -1$  代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 得  $K_r = 1$ , 根轨

迹的分离点为  $s = -1$ 。

(6) 根轨迹与虚轴的交点。闭环的特征方程是  $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K_r = 0$ , 用 Routh 判据得到

$s^4$	1	6	$K_r$
$s^3$	4	4	(约去 4)
$s^2$	5	$K_r$	
$s$	$5 - K_r$		(乘以 5)
$s^0$	$K_r$		

当  $K_r = 5$  时临界稳定, 由上行辅助方程得根轨迹与虚轴的交点为  $s_{1,2} = \pm j$ 。

(7) 复极点处的出射角为

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 45^\circ = -90^\circ$$

(8) 系统的根轨迹如图 4-10 所示。

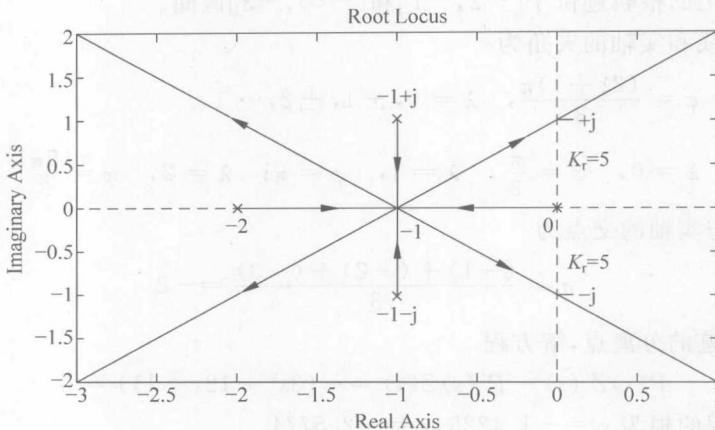


图 4-10 题 A4-3 的根轨迹

**A4-4** 求上题闭环系统的重极点及相应的系统增益  $K_r$ 。

解 闭环系统的重极点就是根轨迹的交点, 即分离点和会合点, 由上题的根轨迹可知, 闭环系统的重极点是  $-1$ , 那是 4 重极点。此时  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)} = 1$ 。

**A4-5** 绘制下列开环传递函数的根轨迹草图。

$$(1) G(s) = \frac{K_r}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

解 此题与 A4-3 的根轨迹相同, 步骤详见 A4-3, 根轨迹如图 4-11 所示。

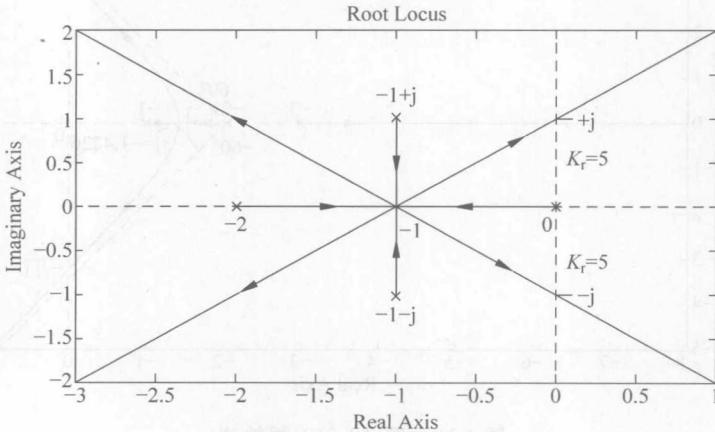


图 4-11 题 A4-5(1)根轨迹

$$(2) G(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

解 ① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_3 = -3$ , 终止于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于 $[-2, -1]$ 和 $(-\infty, -3]$ 区间。

④ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

漐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-1) + (-2) + (-3)}{3} = -2$$

⑤ 根轨迹的分离点,解方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(3s^2 + 12s + 11) = 0$$

得该方程的根为 $s_1 = -1.4226, s_2 = -2.5774$ 。

将上述方程的根代入式 $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 有 $s_1 = -1.4226$ 时, $K_r$ 取正值, $s_2 = -2.5774$ 不在根轨迹上,故根轨迹的分离点为 $s_1 = -1.4226$ 。

⑥ 根轨迹与虚轴的交点:由特征方程 $1 + G(j\omega) = 0$ 。解得根轨迹与虚轴的交点 $\omega = \pm \sqrt{11}$ 。

⑦ 根轨迹图形如图 4-12 所示。

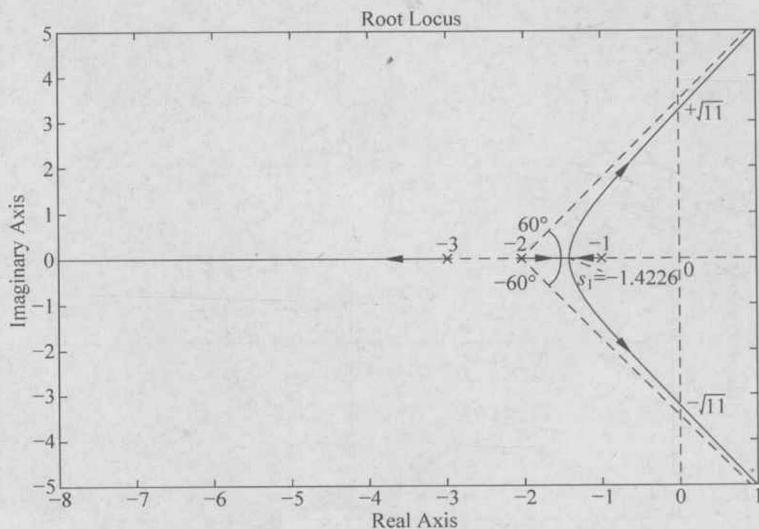


图 4-12 题 A4-5(2)根轨迹

$$(3) G(s) = \frac{K_r(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

解 ① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -3$ 。

终点为一条终止于 $z_1 = -2$ , 两条趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于 $[-1, 0]$ 和 $[-3, -2]$ 区间。

④ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2};$$

⑤ 漐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-1) + (-3) - (-2)}{2} = -1$$

⑥ 根轨迹的分离点,解方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^3 + 10s^2 + 16s + 6) = 0$$

得该方程的根为 $s_1 = -0.5344, s_{2,3} = -2.2328 \pm 0.7926j$ 。将以上方程的根代入式

$K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 只有 $s_1 = -0.5344$ 时,  $K_r$  取正值, 故根轨迹的分离点为 $s_1 = -0.5344$ 。

⑦ 根轨迹图形如图 4-13 所示。

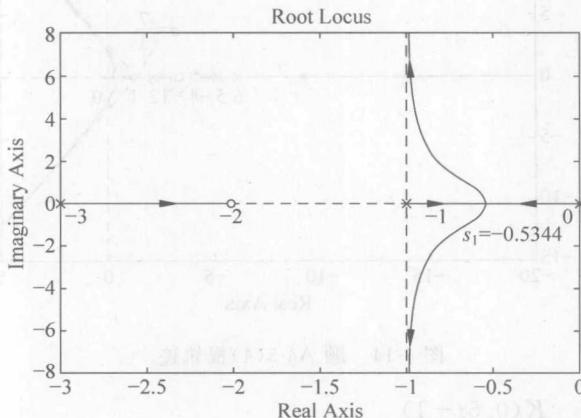


图 4-13 题 A4-5(3)根轨迹

$$(4) G(s) = \frac{K_r(s+3)(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)(s+6)}$$

解 ① 根轨迹有 5 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2, p_4 = -5, p_5 = -6$ ; 其中两条终止于  $z_1 = -3, z_2 = -4$ , 三条趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于 $[-1, 0]$ , $[-3, -2]$ , $[-5, -4]$ 和 $(-\infty, -6]$ 区间。

④ 漫近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3};$$

⑤ 漐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-1) + (-2) + (-5) + (-6) - (-3) - (-4)}{3} = -\frac{7}{3}$$

⑥ 根轨迹的分离点,由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(3s^6 + 56s^5 + 419s^4 + 1582s^3 + 3064s^2 + 2688s + 720) = 0$$

解得该方程的根为  $s_1 = -0.4539$ ,  $s_2 = -1.6427$ ,  $s_3 = -3.4578$ ,  $s_4 = -5.4506$ ,

$s_{5,6} = -3.8309 \pm 1.5508j$ 。将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 只有当  $s_1 = -0.4539$

时,  $K_r$  取正值, 其他值时,  $K_r$  取负值, 故根轨迹的分离点为  $s_1 = -0.4539$ 。

⑦ 将  $s = j\omega$  代入特征方程  $1 + G(j\omega) = 0$ , 解得根轨迹与虚轴的交点  $\omega_{1,2} = \pm 2.06$ 。

⑧ 根轨迹图形如图 4-14 所示。

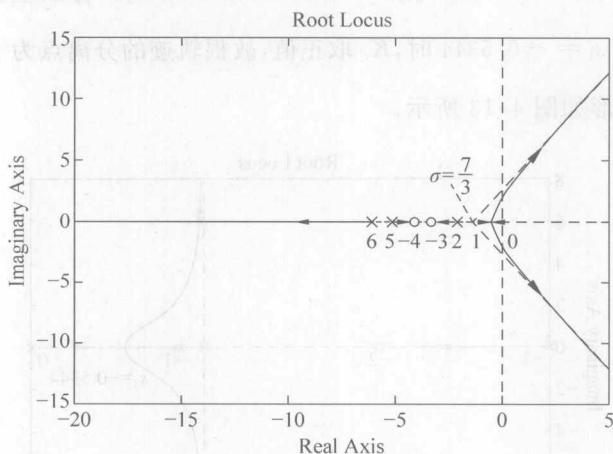


图 4-14 题 A4-5(4)根轨迹

$$(5) G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s^2(0.25s+1)(0.1s+1)}$$

解 ① 根轨迹有 4 条分支。

② 根轨迹的起点为  $p_{1,2} = 0$ ,  $p_3 = -4$ ,  $p_4 = -10$ ; 终点中一条终止于有限零点  $z_1 = -2$ , 三条趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-4, -2]$  和  $(-\infty, -10]$  区间。

④ 漉近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-4) + (-10) - (-2)}{3} = -4$$

⑤ 根轨迹的分离点,由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(0.0375s^4 + 0.45s^3 + 1.55s^2 + 2s) = 0$$

解得该方程的根为  $s_1 = 0, s_2 = -7.3771, s_{3,4} = -2.3115 \pm 1.3736j$ 。

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 只有  $s_1 = 0$  时,  $K_r = 0$ , 其他值时,  $K_r$  取负

值,故根轨迹的分离点为  $s_1 = 0$ 。

⑥ 将  $s = j\omega$  代入特征方程  $1 + G(s) = 0$ , 解得与虚轴的交点  $\omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$ 。

⑦ 根轨迹图形如图 4-15 所示。

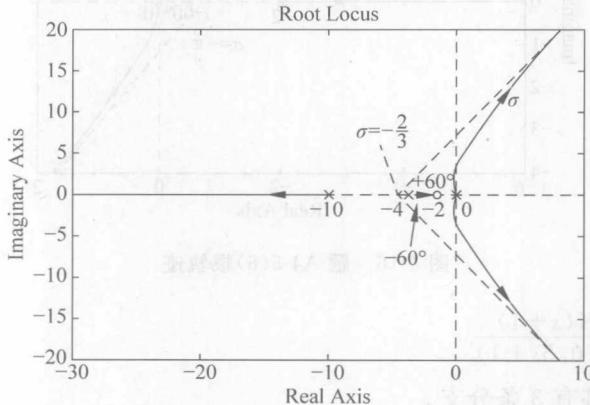


图 4-15 题 A4-5(5)根轨迹

$$(6) G(s) = \frac{K}{s^2(0.5s+1)}$$

解 ① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2} = 0, p_3 = -2$ ; 终点为无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $(-\infty, -2]$  段。

④ 渐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-2)}{3} = -\frac{2}{3}$$

⑤ 根轨迹的分离点,由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(1.5s^2 + 2s) = 0$$

解得该方程的根为  $s_1 = 0, s_2 = -4/3$ 。

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 只有  $s_1 = 0$  时,  $K_r = 0, s_2 = -4/3$  不在实轴

根轨迹上,所以  $s_1=0$  是根轨迹的分离点。

⑥ 根轨迹与虚轴的交点在原点处。

⑦ 根轨迹图形如图 4-16 所示。

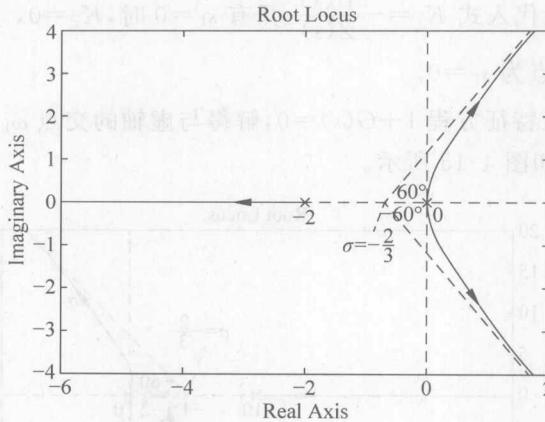


图 4-16 题 A4-5(6)根轨迹

$$(7) G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.5s+1)}$$

解 ① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2}=0$ ,  $p_3=-2$ ; 一条终止于有限开环零点  $z_1=-1$ , 两条终止于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-2, -1]$  段。

④ 渐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-2) - (-1)}{2} = -0.5$$

⑤ 根轨迹的分离点,由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(s^3 + 2.5s^2 + 2s) = 0$$

解得该方程的根为  $s_1=0$ ,  $s_{2,3} = -1.2500 \pm 0.6614j$ 。

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 只有  $s_1=0$  时,  $K_r=0$ , 其他值时,  $K_r$  取负值, 故根轨迹的分离点为  $s_1=0$ 。

⑥ 根轨迹与虚轴的交点在原点处。

⑦ 根轨迹图形如图 4-17 所示。

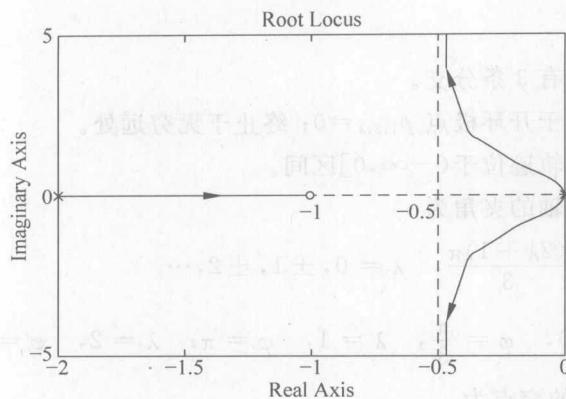


图 4-17 题 A4-5(7)根轨迹

$$(8) G(s) = \frac{K}{s^2}$$

解 ① 根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2} = 0$ ；终点为无穷远处。

③ 实轴上没有根轨迹。

④ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{0+0}{2} = 0$$

⑤ 根轨迹图形如图 4-18 所示。

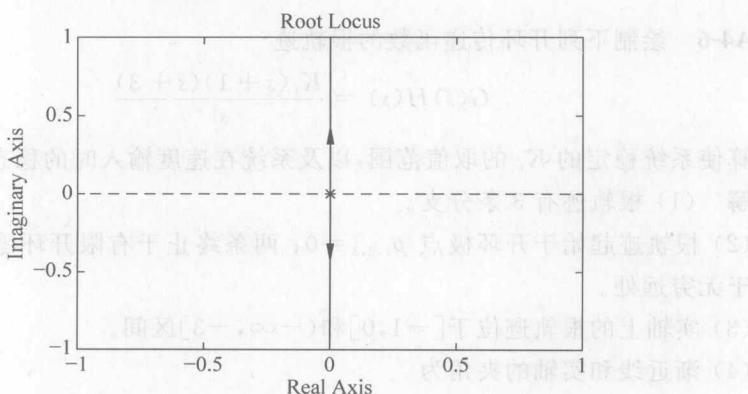


图 4-18 题 A4-5(8)根轨迹

$$(9) G(s) = \frac{K}{s^3}$$

解 ① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2,3} = 0$ ；终止于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $(-\infty, 0]$  区间。

④ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

漐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{0+0+0}{3} = 0$$

⑤ 根轨迹图形如图 4-19 所示。

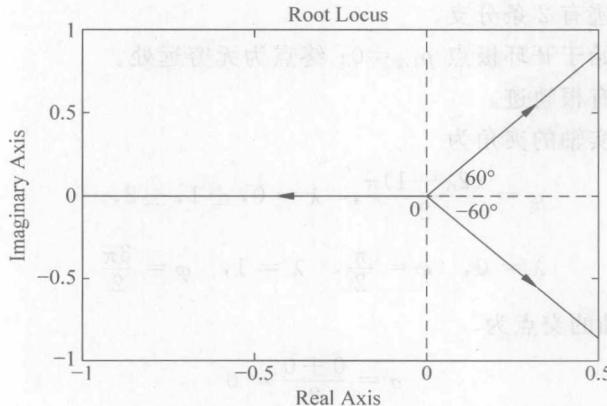


图 4-19 题 A4-5(9)根轨迹

**A4-6** 绘制下列开环传递函数的根轨迹

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+1)(s+3)}{s^3}$$

并计算使系统稳定的  $K_r$  的取值范围，以及系统在速度输入时的稳态误差  $e_{ss}$ 。

解 (1) 根轨迹有 3 条分支。

(2) 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2,3} = 0$ ；两条终止于有限开环零点  $-1$  和  $-3$ ，一条趋于无穷远处。

(3) 实轴上的根轨迹位于  $[-1, 0]$  和  $(-\infty, -3]$  区间。

(4) 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3-2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \pi$$

即渐近线为实轴。

(5) 根轨迹的分离点,由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(s^4 + 8s^3 + 9s^2) = 0$$

解得该方程的根为

$$s_{1,2} = 0, \quad s_3 = -6.6458, \quad s_4 = -1.3542$$

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,  $s_{1,2} = 0$  时,  $K_r = 0$ ,  $s_3 = -6.6458$  时,  $K_r = 14.3$ ,  $s_4 = -1.3542$  不在根轨迹上,故根轨迹的分离点为  $s_1 = 0$ ,会合点为  $s_3 = -6.6458$ 。

(6) 将  $s = j\omega$  代入特征方程有  $1 + G(j\omega)H(j\omega) = (j\omega)^3 + K_r(j\omega + 1)(j\omega + 3) = 0$ , 解得与虚轴的交点  $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ ,  $\omega_3 = 0$ , 对应  $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{3}$  时  $K_r = 0.75$ ; 当  $\omega_3 = 0$  时  $K_r = 0$ 。

(7) 根轨迹图形如图 4-20 所示。

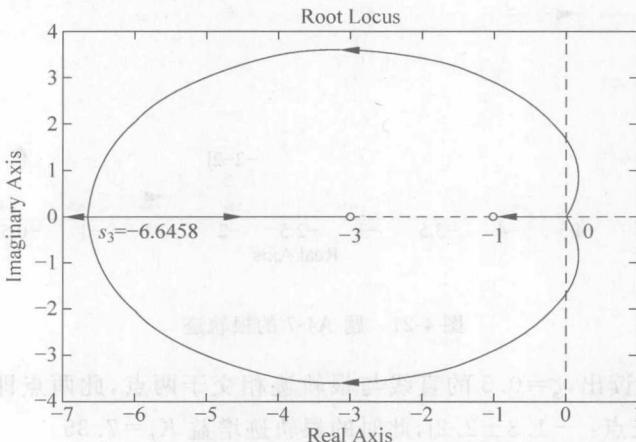


图 4-20 题 A4-6 的根轨迹

由根轨迹图可以看出,  $K_r > 0.75$  时特征根全在左半平面, 系统稳定。

该系统为 III 型系统, 故速度输入时的稳态误差  $e_{ss} = 0$ 。

**A4-7** 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r(s^2 + 4s + 8)}{s^2(s + 4)}$$

用根轨迹法证明: 若系统期望主导极点的阻尼比  $\zeta = 0.5$ , 则满足要求的  $K_r = 7.35$  及主导极点为  $s = -1.3 \pm 2.2j$ 。

解 先作出根轨迹图形。

(1) 根轨迹有 3 条分支。

(2) 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2} = 0, p_3 = -4$ ; 两条终止于有限开环零点  $z_{1,2} = -2 \pm 2j$ , 一条趋于无穷远处。

(3) 实轴上的根轨迹位于  $(-\infty, -4]$  区间。

(4) 漐近线为负实轴。

(5) 根轨迹的分离点,有方程式

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 64s) = 0$$

求解上式得  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -2.4136$ ,  $s_{3,4} = -2.7932 \pm 4.3261$ 。显然根轨迹的分离点为  $s_1 = 0$ 。

(6) 复零点处的入射角为  $\varphi = 45^\circ$

(7) 根轨迹如图 4-21 所示,在根轨迹图形上绘制连续根轨迹的等  $\zeta$  线。

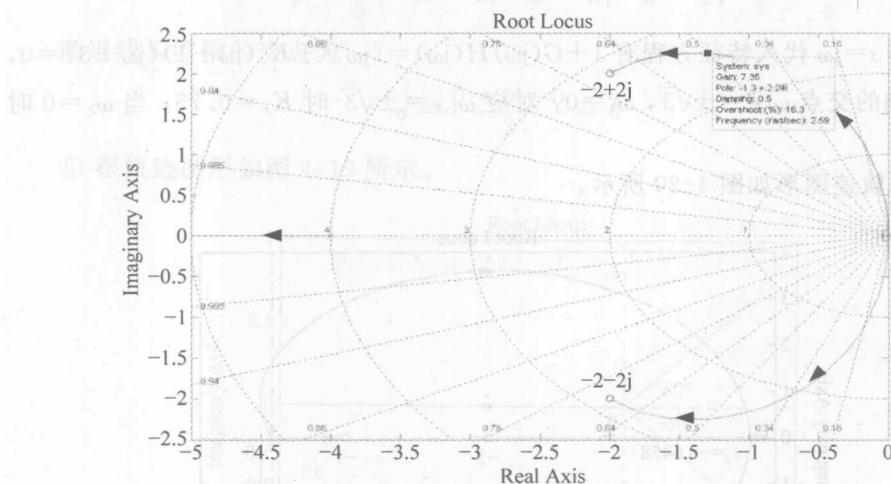


图 4-21 题 A4-7 的根轨迹

从图中可以读出,  $\zeta = 0.5$  的直线与根轨迹相交于两点,此两点即是满足阻尼比  $\zeta = 0.5$  的主导极点:  $-1.3 \pm 2.2j$ ,此时的根轨迹增益  $K_r = 7.35$ 。

**A4-8** 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r(s+1.5)}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+8)}$$

(1) 绘制根轨迹草图;

(2) 求  $K_r$  等于 400, 500, 600 时闭环系统的特征根;

(3) 若取其复极点为主导极点,求上述三种  $K_r$  下,阶跃响应的超调量;

(4) 求准确的阶跃响应时的超调量,与(3)的结果作比较。

解 (1)

① 根轨迹有 4 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_3 = -4$ ,  $p_4 = -8$ ;一条终止于有限开环零点  $z_1 = -1.5$ ,三条趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-1.5, -1]$ ,  $[-4, -2]$  和  $(-\infty, -8]$  区间。

④ 漉近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-1) + (-2) + (-4) + (-8) - (-1.5)}{3} = -4.5$$

⑤ 根轨迹的分离点,由方程

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(3s^4 + 36s^3 + 137.5s^2 + 210s + 116) = 0$$

解得该方程的根为  $s_1 = -2.8053, s_2 = -6.4001, s_{3,4} = -1.3973 \pm 0.4485j$ 。

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,  $s_1 = -2.8053$  时,  $K_r = 6.94$ , 在  $s_2 = -6.4001, s_{3,4} = -1.3973 \pm 0.4485j$  处,  $K_r$  取负值, 故根轨迹的分离点为  $s_1 = -2.8053$ 。

⑥ 将  $s = j\omega$  代入特征方程得

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = (j\omega)^4 + 15(j\omega)^3 + 70(j\omega)^2 + (120 + K_r)j\omega + (64 + 1.5K_r) = 0$$

解得与虚轴的交点  $\omega = \pm 7.06$ , 此时  $K_r = 627.7$ 。

⑦ 根轨迹图形如图 4-22 所示。

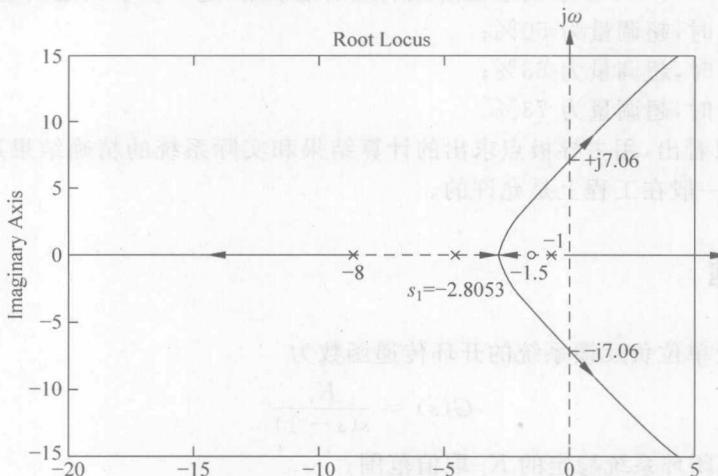


图 4-22 题 A4-8 根轨迹

(2)  $K_r = 400$  时闭环系统特征方程为

$$s^4 + 15s^3 + 70s^2 + 520s + 664 = 0$$

特征根为

$$-12.3885, -1.4898, -0.5608 \pm 5.9718j$$

$K_r = 500$  时闭环系统特征方程为

$$s^4 + 15s^3 + 70s^2 + 620s + 814 = 0$$

特征根为

$$-12.9189, -1.4918, -0.2946 \pm 6.4922j$$

$K_r=600$  时闭环系统特征方程为

$$s^4 + 15s^3 + 70s^2 + 720s + 964 = 0$$

特征根为

$$-13.3868, -1.4932, -0.0600 \pm 6.9442j$$

(3) 以复极点为主导极点, 当  $K_r=400$  时, 主导极点为  $-0.5608 \pm 5.9718j$ , 则

$$\tan\theta = \frac{5.9718}{0.5608} = 10.6487, \quad \zeta = \cos\theta = 0.0935$$

此时的超调量为  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 74.5\%$

当  $K_r=500$  时, 主导极点为  $-0.2946 \pm 6.4922j$

$$\tan\theta = \frac{6.4922}{0.2946} = 22.0373, \quad \zeta = \cos\theta = 0.0453$$

此时的超调量为  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 86.7\%$

当  $K_r=600$  时, 主导极点为  $-0.0600 \pm 6.9442j$

$$\tan\theta = \frac{6.9442}{0.0600} = 115.7367, \quad \zeta = \cos\theta = 0.0086$$

此时超调量为  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 97.32\%$

(4) 利用 MATLAB 求出系统阶跃响应的准确解, 进一步求出超调量。

$K_r=400$  时, 超调量为 50%;

$K_r=500$  时, 超调量为 63%;

$K_r=600$  时, 超调量为 73%。

由此可以看出, 用主导极点求出的计算结果和实际系统的精确结果还是有差别的, 这种差别一般在工程上是允许的。

## B 深入题

**B4-1** 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s-1)}$$

(1) 求使闭环系统稳定的  $K_r$  取值范围;

(2) 在前向通道串联一控制器  $G_c(s)$ , 其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(s+2)}{s(s+p)}$$

若  $p=20$ , 再求系统稳定的  $K_r$  取值范围;

(3) 设  $K_r=10$ , 绘制  $p$  自 0 变到  $\infty$  时, 系统的根轨迹图;

(4) 讨论  $G_c(s)$  的零、极点的位置对系统性能的影响。

解 (1) 该闭环系统的特征方程为  $s^2 - s + K_r = 0$ , 由劳斯判据稳定性的必要条件知道, 无论  $K_r$  取何值, 系统始终不稳定。

(2) 系统串联控制器  $G_c(s)$  后, 闭环系统的特征方程为  $s^4 + 19s^3 - 20s^2 + K_r s + 2K_r = 0$ , 由劳斯判据稳定性的必要条件知道, 无论  $K_r$  取何值, 系统始终不稳定。

(3) 当  $K_r = 10$  时, 串联控制器后系统的开环传递函数为  $G(s)G_c(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s-1)(s+p)}$ , 闭环特征方程式为

$$s^4 + (p-1)s^3 - ps^2 + 10s + 20 = 0$$

整理上式可得

$$\frac{p(s^3 - s^2)}{s^4 - s^3 + 10s + 20} + 1 = 0$$

所以等效系统的开环传递函数为

$$\frac{p(s^3 - s^2)}{s^4 - s^3 + 10s + 20}$$

① 根轨迹有 4 条分支。

② 根轨迹起始于系统的开环极点  $p_{1,2} = 1.8581 \pm 1.9834j$ ,  $p_{3,4} = -1.3581 \pm 0.9291j$ ; 终止于有限开环零点  $z_{1,2} = 0$ ,  $z_3 = 1$  和无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $(-\infty, 1]$ 。

④ 漐近线为负实轴。

⑤ 根轨迹的分离点, 由  $\frac{dk(s)}{ds}$  公式可得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(s^6 - 2s^5 + s^4 - 20s^3 - 50s^2 + 40s) = 0$$

该方程的根为  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1.9317$ ,  $s_3 = 0.6379$ ,  $s_4 = 3.8190$ ,  $s_{5,6} = -0.2626 \pm 2.9036j$ , 将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 当  $s_2 = -1.9317$ ,  $s_3 = 0.6379$  时,  $K_r$  取正值, 取其他值时,  $K_r$  为负值, 故根轨迹的会合点为,  $s_2 = -1.9317$ ,  $s_3 = 0.6379$ 。

⑥ 复开环极点  $1.8581 + 1.9834j$  的出射角为

$$\begin{aligned}\theta_{p1} &= (2k+1)\pi + \angle(p_1 - z_1) + \angle(p_1 - z_2) + \angle(p_1 - z_3) \\ &\quad - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) - \angle(p_1 - p_4) \\ &= (2k+1)\pi + 46.87^\circ + 46.87^\circ + 66.60^\circ - 90^\circ - 18.15^\circ - 42.16^\circ \\ &= 190.03^\circ\end{aligned}$$

故在复开环极点  $1.8581 - 1.9834j$  处的出射角为  $-190.03^\circ$ 。

复开环极点  $-1.3581 + 0.9291j$  的出射角为

$$\begin{aligned}\theta_{p3} &= (2k+1)\pi + \angle(p_3 - z_1) + \angle(p_3 - z_2) + \angle(p_3 - z_3) \\ &\quad - \angle(p_3 - p_1) - \angle(p_3 - p_2) - \angle(p_3 - p_4) \\ &= (2k+1)\pi + 145.62^\circ + 145.62^\circ + 158.50^\circ - (-161.85^\circ) - 137.84^\circ - 90^\circ \\ &= 203.75^\circ\end{aligned}$$

故在复开环极点  $-1.3581 - 0.9291j$  处的出射角为  $-203.75^\circ$ 。

⑦ 根轨迹图如图 4-23 所示。

(4)  $G_c(s)$  的零、极点的引入, 相当于增加了系统开环传递函数的零、极点。一般来说, 增加系统开环传递函数的极点, 会使原来系统的根轨迹向右移动, 使系统的稳定性下降, 动态性能变差; 增加系统开环传递函数的零点会使原来系统的根轨迹向左移动, 会增强系统的稳定性, 对改善系统的动态特性有利。

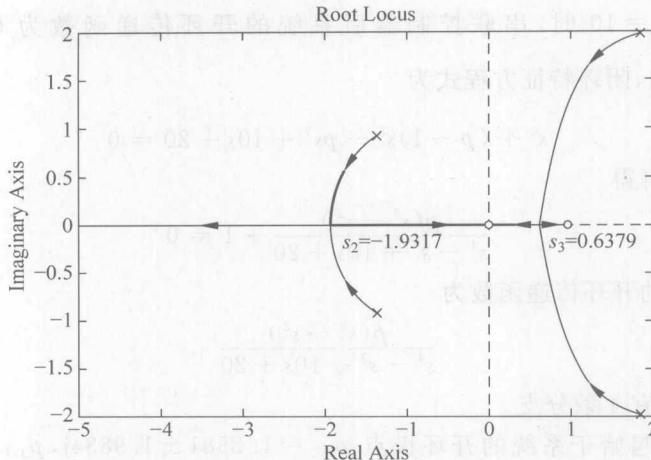


图 4-23 题 B4-1 根轨迹

**B4-2** 对于如图 4-24 所示的系统：

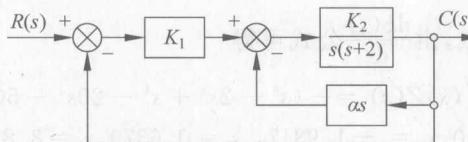


图 4-24 题 B4-2 系统

- (1) 绘制  $\alpha=0$  时的根轨迹图；
- (2) 绘制  $K_1=5, K_2=2$  时,  $0 \leq \alpha \leq \infty$  的根轨迹；
- (3) 求(2)题临界稳定时的  $\alpha$  值；
- (4) 讨论局部反馈  $\alpha s$  对系统性能的影响。

解 (1)  $\alpha=0$  时, 开环传递函数为

$$G = \frac{K_1 K_2}{s(s+2)} = \frac{K_r}{s(s+2)}$$

根轨迹图如图 4-25 所示。

(2)  $K_1=5, K_2=2$  时, 系统的开环传递函数为

$$\frac{10}{s^2 + (2\alpha + 2)s}$$

闭环特征方程

$$s^2 + (2\alpha + 2)s + 10 = 0, \quad \frac{2\alpha s}{s^2 + 2s + 10} + 1 = 0$$

所以等效开环传递函数为

$$\frac{2\alpha s}{s^2 + 2s + 10}$$

① 等效系统的根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2} = -1 \pm 3j$ , 一条根轨迹终止于开环零点  $z_1 = 0$ ; 另一条根轨迹趋于无穷远处。

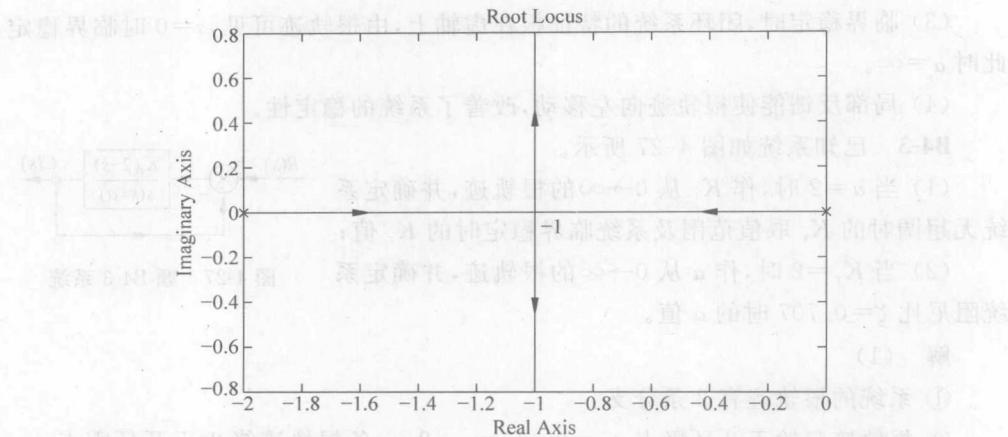


图 4-25 题 4-2(1)的根轨迹

③ 实轴上的根轨迹 $(-\infty, 0]$ 。

④ 漐近线是负实轴。

⑤ 由  $\frac{dK_r}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -2s^2 + 20s = 0$$

该方程的根为  $s_{1,2} = \pm \sqrt{10}$ , 将其代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 当  $s_1 = -3.16$  时,  $K_r$  取正值,  $s_2 = 3.16$  不在根轨迹上, 故根轨迹的会合点为  $s_1 = -3.16$ 。

⑥ 复开环极点  $p_1 = -1 + 3j$  的出射角为

$$\begin{aligned}\theta_{p_1} &= (2k+1)\pi + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) \\ &= (2k+1)\pi + 108.43^\circ - 90^\circ \\ &= 198.43^\circ \quad (k=0)\end{aligned}$$

类似地, 开环极点  $p_1 = -1 - 3j$  的出射角为  $-198.43^\circ$ 。

⑦ 当  $0 \leq \alpha < \infty$  时, 根轨迹图如图 4-26 所示。

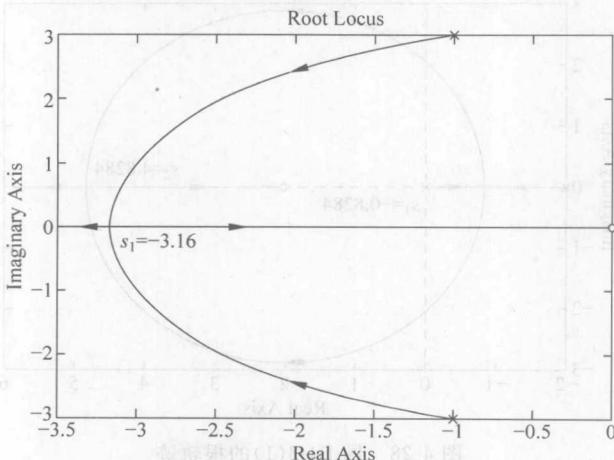


图 4-26 题 B4-2(2)的根轨迹

(3) 临界稳定时,闭环系统的特征根在虚轴上,由根轨迹可见,  $s=0$  时临界稳定,此时  $\alpha=\infty$ 。

(4) 局部反馈能使根轨迹向左移动,改善了系统的稳定性。

**B4-3** 已知系统如图 4-27 所示。

(1) 当  $a=2$  时,作  $K_r$  从  $0 \rightarrow \infty$  的根轨迹,并确定系统无超调时的  $K_r$  取值范围及系统临界稳定时的  $K_r$  值;

(2) 当  $K_r=2$  时,作  $a$  从  $0 \rightarrow \infty$  的根轨迹,并确定系统阻尼比  $\zeta=0.707$  时的  $a$  值。

解 (1)

① 系统的根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1=0, p_2=-2$ ,一条根轨迹终止于开环零点  $z_1=2$ ;另一条根轨迹趋于无穷远处。

③ 由于开环传递函数分子多项式最高项系数为负,这是一个补根轨迹问题。所以实轴上的根轨迹,其右边实轴上的零点和极点之和为偶数,实轴上的根轨迹位于  $[-2, 0]$  和  $[2, +\infty)$  区间。

④ 求根轨迹的分离点和汇合点,由  $\frac{dK_r}{ds}=0$  有

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = s^2 - 4s - 4 = 0$$

该方程的根为  $s_1 = -0.8284, s_2 = 4.8284$ , 将其代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 当  $s_1 = -0.8284$  时,  $K_r = 0.343, s_2 = 4.8284$  时,  $K_r = 11.66$ , 故根轨迹的分离点为  $s_1 = -0.8284$ ,会合点为  $s_2 = 4.8284$ 。

⑤ 根轨迹与虚轴的交点:将  $s=j\omega$  代入特征方程  $1+G(j\omega)=0$ ,解得与虚轴的交点  $\omega_{1,2}=\pm 2$ ,此时  $K_r=2$ 。

⑥ 根轨迹图形如图 4-28 所示。

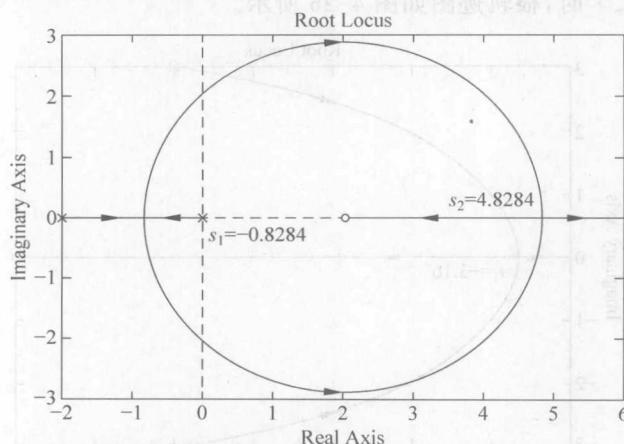


图 4-28 题 B4-3(1) 的根轨迹

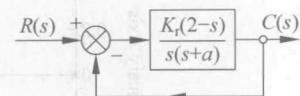


图 4-27 题 B4-3 系统

当系统的特征根为实数时,输出响应无振荡,此时无超调;特征根位于右半平面时,输出响应无界。综上,无超调时,  $K_r$  的取值范围是  $(0, 0.343]$ ; 系统临界稳定时,  $K_r = 2$ 。

(2)  $K_r = 2$  时,系统特征方程为

$$s^2 + as + 4 - 2s = 0$$

等效开环传递函数为

$$\frac{as}{s^2 - 2s + 4}$$

① 系统的根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2} = 1 \pm 1.732j$ 。一条根轨迹终止于开环零点  $z_1 = 0$ , 另一条根轨迹趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $(-\infty, 0]$  区间。

④ 渐近线为负实轴。

⑤ 求根轨迹的会合点,由  $\frac{dK_r}{ds} = 0$ , 得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -s^2 + 4 = 0$$

该方程的根为  $s_1 = 2$ ,  $s_2 = -2$ , 将其代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,  $s_1 = -2$  时,  $K_r = 6$ ,  $s_2 = 2$

不在根轨迹上,故根轨迹会合点为  $s_1 = -2$ 。

⑥ 求根轨迹与虚轴的交点,将  $s = j\omega$  代入特征方程  $1 + G(j\omega) = 0$ 。解得  $\omega_{1,2} = \pm 2$ ,  $\omega_3 = 0$ 。

⑦ 复极点处的出射角为  $\theta = 180^\circ + 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$ 。

⑧ 根轨迹图形如图 4-29 所示。

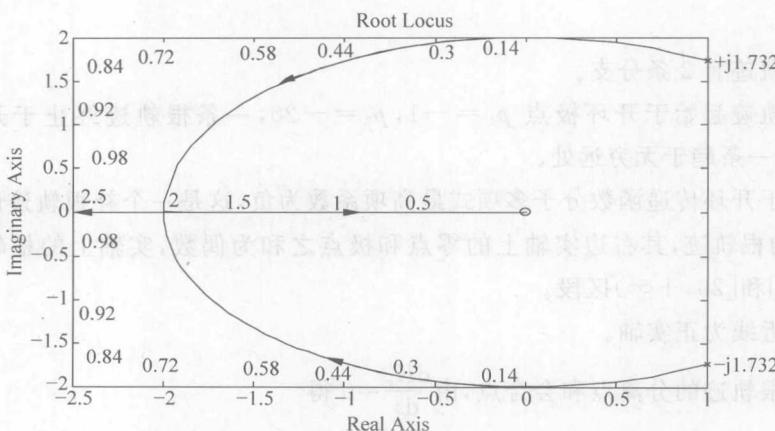


图 4-29 题 B4-3(2) 的根轨迹

在图中作出等  $\zeta$  曲线,与根轨迹相交的点就是所求点,此时的  $a = 4.82$ 。

**B4-4** 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{s+1}$$

(1) 证明:  $e^{-sT}$  的近似表达式为

$$e^{-sT} \cong \frac{\frac{2}{T} - s}{\frac{2}{T} + s}$$

(2) 设  $T=0.1s$ , 则

$$e^{-0.1s} \cong \frac{20-s}{20+s}$$

$$G(s) \cong \frac{K(20-s)}{(s+1)(s+20)}$$

绘制  $K$  从  $0 \rightarrow \infty$  的根轨迹, 并确定使系统稳定的  $K$  值范围。

$$\text{解 } (1) \text{ 证明: } e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}}$$

分子和分母分别做级数展开, 得

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}} = \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{1}{2!}\left(\frac{T}{2}s\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{T}{2}s\right)^3 + \dots}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{1}{2!}\left(\frac{T}{2}s\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{T}{2}s\right)^3 + \dots}$$

取上式的一次近似, 得

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} = \frac{\frac{2}{T} - s}{\frac{2}{T} + s}$$

证毕。

(2)

① 根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = -1, p_2 = -20$ , 一条根轨迹终止于开环零点  $z_1 = 20$ ; 另一条趋于无穷远处。

③ 由于开环传递函数分子多项式最高项系数为负, 这是一个补根轨迹问题。所以实轴上的根轨迹, 其右边实轴上的零点和极点之和为偶数, 实轴上的根轨迹位于  $[-20, -1]$  和  $[20, +\infty)$  区段。

④ 滚近线为正实轴。

⑤ 求根轨迹的分离点和会合点, 由  $\frac{dK_r}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = s^2 - 40s - 440 = 0$$

该方程的根为  $s_1 = -8.98, s_2 = 48.98$ , 将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,  $K_r$  都为正值, 故根轨迹的分离点为  $s_1 = -8.98$ , 会合点为  $s_2 = 48.98$ 。

⑥ 求根轨迹与虚轴的交点, 将  $s = j\omega$  代入特征方程  $1 + G(j\omega) = 0$ , 解得  $\omega_{1,2} = \pm 20.98$ , 此时  $K_r = 21$ 。

⑦ 根轨迹图形如图 4-30 所示。

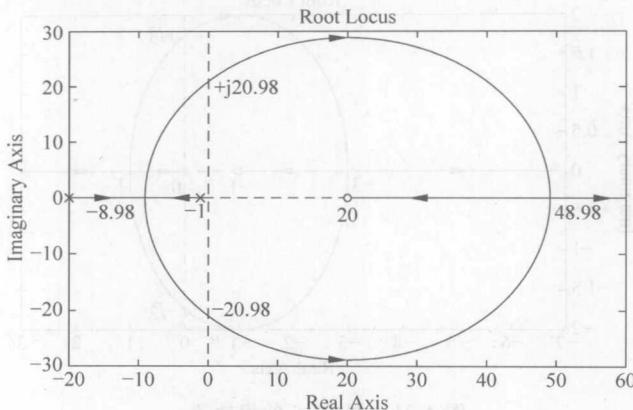


图 4-30 题 B4-4 的根轨迹

从根轨迹图可以得到, 当  $0 < K_r < 21$  时, 系统稳定。

**B4-5** 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r(s+1)}{s(s-3)}$$

- (1) 绘制  $K_r$  自  $0 \rightarrow \infty$  的根轨迹, 并由根轨迹求使系统稳定的  $K_r$  值范围;
- (2) 设  $K_r = 5$ , 按主导极点计算系统单位阶跃响应的超调量和按 2% 准则的调整时间;
- (3) 由系统实际的单位阶跃响应求超调量和调整时间, 并与(2)的结果进行比较, 说明原因。

解 (1)

- ① 根轨迹有 2 条分支。
- ② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = 0, p_2 = 3$ 。一条根轨迹终止于开环零点  $z_1 = -1$ ; 另一条根轨迹趋于无穷远处。
- ③ 实轴上的根轨迹位于  $[0, 3]$  和  $(-\infty, -1]$  区段。
- ④ 渐近线为负实轴。

⑤ 求根轨迹的分离点, 由  $\frac{dK_r}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -s^2 - 2s + 3 = 0$$

该方程的根为  $s_1 = 1, s_2 = -3$ , 将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,  $K_r$  都为正值,

所以根轨迹的分离点为  $s_1 = 1$ , 会合点为  $s_2 = -3$ 。

⑥ 求根轨迹与虚轴的交点, 将  $s = j\omega$  代入特征方程  $1 + G(j\omega) = 0$ , 解得  $\omega_0 = 0$ ,

$\omega_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ , 此时  $K_r$  分别为 0 和 3。

(7) 根轨迹图形如图 4-31 所示。

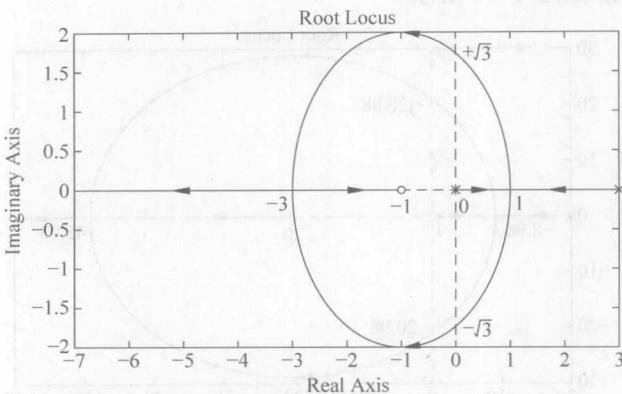


图 4-31 题 B4-5 的根轨迹

从根轨迹图可以得出, 当  $K_r > 3$  时, 特征根都在左半平面, 系统稳定。

(2)  $K_r = 5$  时, 系统的特征方程为

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

主导极点为  $-1 \pm 2j$ ,  $\omega_n = \sqrt{5}$ ,  $\zeta \omega_n = 1$ , 所以  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 。超调量

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 20.8\%$$

调整时间

$$t = 4s (\Delta = 2\%)$$

(3) 利用 MATLAB 可得系统实际的阶跃响应超调量为 90.7%, 调整时间为 4.5s。因为该系统中实零点与复极点的实部数值相当, 对系统动态响应有较大影响。高阶系统没有零点, 且距离虚轴最近的极点比其他极点距虚轴的距离小 5 倍以上时, 采用主导极点比较准确。

## C 实践题

**C4-1** 在控制系统设计中, 常用校正装置来改善系统的性能。串联校正装置有三种类型: 超前校正装置、滞后校正装置和超前-滞后校正装置。它们是用 RC 网络或由运算放大器和电阻电容组成的电子电路构成。通常是在前向通道中与控制对象串联, 如图 4-32 所示。

超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$$

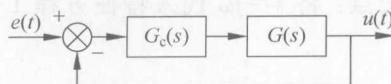


图 4-32 串联校正装置在系统中的连接

式中,  $\alpha > 1$ 。超前校正可以提高系统的动态性能。

现有单位负反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+10)(s+25)}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图。若原闭环系统的超调量  $M_p = 60\%$ , 求原系统主导极点的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  以及根轨迹增益  $K_r$  和在单位速度输入  $r(t) = tu(t)$  时, 系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。

(2) 引入超前校正装置

$$G_c(s) = \frac{(s+3)}{(s+3.93)}$$

求引入超前校正装置后系统的特征根。

若以一对复根为主导极点, 求其阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  及超调量  $M_p$  和按 2% 误差准则的调整时间  $t_s$ 。

(3) 求系统准确的单位阶跃响应, 将实际的超调量  $M_p$  和按 2% 误差准则的调整时间  $t_s$  与前面计算结果进行比较, 并说明二者存在差别的原因。

解 (1)

- ① 根轨迹有 3 条分支。
- ② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = 0, p_2 = -10, p_3 = -25$ ; 终止于无穷远处。
- ③ 实轴上的根轨迹位于  $[-10, 0]$  和  $(-\infty, -25]$  区间;
- ④ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{3}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \pi; \quad \lambda = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-10) + (-25)}{3} = -\frac{35}{3}$$

⑤ 根轨迹的分离点: 由  $\frac{dK^*}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(3s^2 + 70s + 250) = 0$$

该方程的根为  $s_1 = -4.4018, s_2 = -18.9315$ 。将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,

只有  $s_1 = -4.4018$  时,  $K_r$  为正值,  $s_2 = -18.9315$  不在根轨迹上, 因此根轨迹的分离点为  $s_1 = -4.4018$ 。

⑥ 根轨迹与虚轴的交点：将  $s=j\omega$  代入特征方程  $1+G(j\omega)=0$ , 解得  $\omega_1=0$ ,  $\omega_{2,3}=\pm\sqrt{250}=\pm15.81$ 。

⑦ 根轨迹图形如图 4-33 所示。

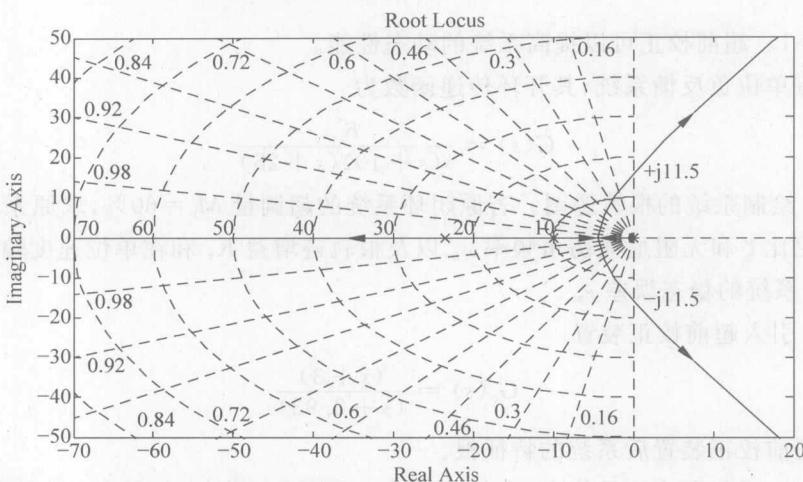


图 4-33 题 C4-1 根轨迹

$M_p=60\%$  时, 由  $M_p=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$  求得  $\zeta=0.161$ , 在根轨迹上可得出主导极点为  $-1.85 \pm 11.3j$ , 即  $\zeta\omega_n=1.85$ ,  $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=11.3$ , 可求  $\omega_n=11.5$ , 经幅值条件计算, 根轨迹增益  $K_r=4108.7$  或从根轨迹图读取根轨迹增益  $K_r=4140$ , 此时开环

$$\text{增益为 } K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} = \frac{4140}{10 \times 25} = 16.56.$$

该系统为 I 型系统, 单位速度输入下,  $e_{ss}=1/K=0.0603$ 。

(2) 引入超前校正后, 系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_r}{s(s+10)(s+25)} \cdot \frac{(s+3)}{(s+3.93)}$$

当  $K_r=4108.7$  时, 系统的特征多项式为

$$s^4 + 39s^3 + 388s^2 + 5122s + 12420 = 0$$

系统特征根为  $s_{1,2}=-2.3488 \pm 11.4368j$ ,  $s_3=-31.3479$ ,  $s_4=-2.8845$ 。

若以复根  $s_{1,2}=-2.3488 \pm 11.4368j$  为主导极点, 则  $\omega_n=11.7$ ,  $\zeta=0.2$ , 超调量

$$M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 52.7\%, 2\% \text{ 误差准则的调整时间 } t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.7s.$$

(3) 利用 MATLAB 可得系统准确的单位阶跃响应如图 4-34 所示。

实际超调量为 45%, 调整时间为 1.5s。可见用主导极点计算的结果和实际的结果有一定差别, 因为有另一个极点  $s_4=-2.8845$  对系统的影响也很大, 所以用主导极点计算会有偏差。

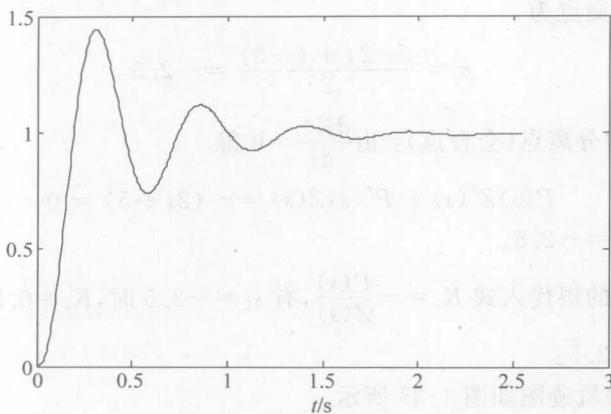


图 4-34 题 C4-1 单位阶跃响应

**C4-2** 为提高系统的控制精度(稳态性能),可采用滞后校正装置,其传递函数为

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

式中,  $\beta > 1$ 。考虑单位负反馈系统

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图,并求闭环系统的极点、阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  及超调量  $M_p$ 。

(2) 求系统的稳态误差系数  $K_p$ ,  $K_v$  和  $K_a$ 。

(3) 若希望将系统的稳态误差系数增大到原来的 10 倍,又不使闭环系统的主导极点有明显的变化,引入滞后校正装置

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

绘制校正后系统的根轨迹图,校正后闭环系统的极点是否发生变化,为什么?

(4) 求校正装置的  $K_c$ 。

(5) 若以闭环复极点为主导极点,求校正系统的单位阶跃响应。

(6) 求校正系统准确的单位阶跃响应,与(5)的结果进行比较,说明出现差别的原因。

解 (1)

① 系统有两条根轨迹分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -3$ , 终止于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-3, -2]$  区间。

④ 渐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-2) + (-3)}{2} = -2.5$$

⑤ 根轨迹的分离点(会合点): 由  $\frac{dK^*}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s + 5) = 0$$

该方程的根为  $s_1 = -2.5$ 。

将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ , 有  $s_1 = -2.5$  时,  $K_r = 0.25$ , 所以根轨迹的

分离点为  $s_1 = -2.5$ 。

⑥ 原系统根轨迹图如图 4-35 所示。

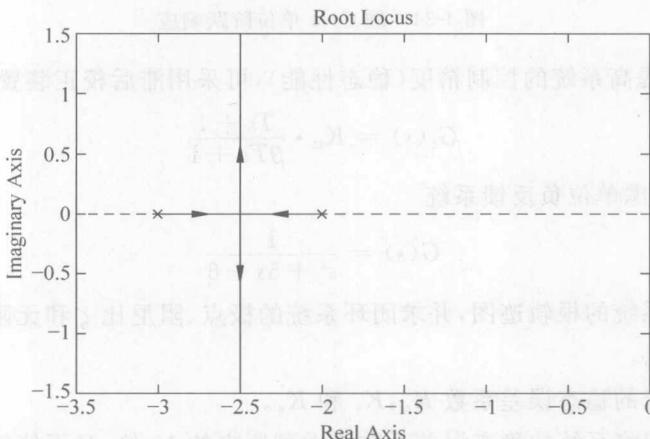


图 4-35 题 C4-2 原系统根轨迹

当  $K_r = 1$  时, 闭环系统的传递函数是

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 7}$$

所以闭环极点为  $-2.5 \pm 0.866j$ , 即  $\zeta\omega_n = 2.5, \omega_n = \sqrt{7} = 2.65, \zeta = 0.945$ , 求得

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 0.012\%$$

(2) 当  $K_r = 1$  时, 开环增益为  $1/6$ 。因为系统是零型系统, 故有

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = K = \frac{1}{6}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = 0$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = 0$$

(3) 校正后系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = K_c \cdot \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \cdot \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1 = -2, p_2 = -3, p_3 = -0.005$ , 一条根轨迹终止于开环零点  $z_1 = -0.05$ , 两条根轨迹趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-3, -2]$  和  $[-0.05, -0.005]$  区间。

④ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

漐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-2) + (-3) + (-0.05) - (-0.005)}{2} = -2.5225$$

⑤ 根轨迹的分离点: 由  $\frac{dK^*}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^3 + 5.155s^2 + 0.5005s + 0.2712) = 0$$

该方程的根为  $s_1 = -2.4991, s_{2,3} = -0.0392 \pm 0.2296j$ , 当  $s_{2,3} = -0.0392 \pm 0.2296j$  时, 对应的  $K_r$  为负值, 故根轨迹的分离点为  $s_1 = -2.4991$ 。

⑥ 校正后系统的根轨迹图如图 4-36 所示。

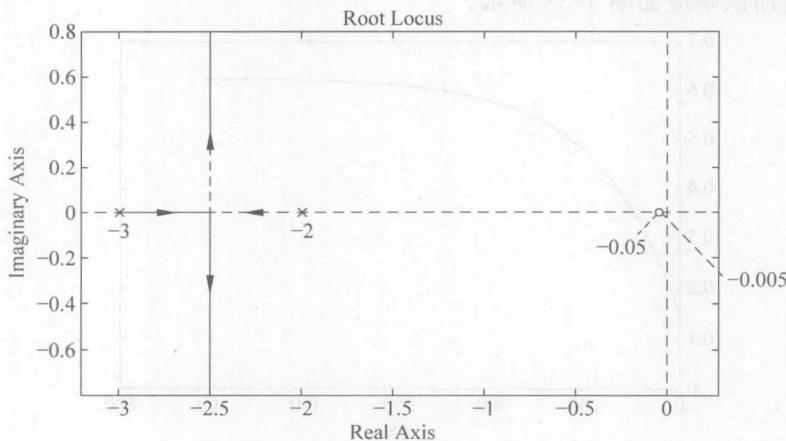


图 4-36 题 C4-2 校正后系统的根轨迹

比较校正前和校正后的根轨迹图可知, 校正后闭环系统的根轨迹几乎没有发生变化, 因为滞后环节加入的零点和极点相距很近, 构成了一对偶极子, 且远离其他的极点, 它们对系统的作用相互抵消, 故原系统的根轨迹形状几乎没有改变。

(4) 若  $K_c = 1$ , 可以保证校正后系统的开环增益提高了 10 倍, 即校正后系统的稳态误差系数增大到原来的 10 倍。

(5) 以(1)所求的共轭极点为主导极点, 可得到系统的闭环传递函数为

$$\Phi_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2 + 5s + 7}$$

其单位阶跃响应如图 4-37 所示。

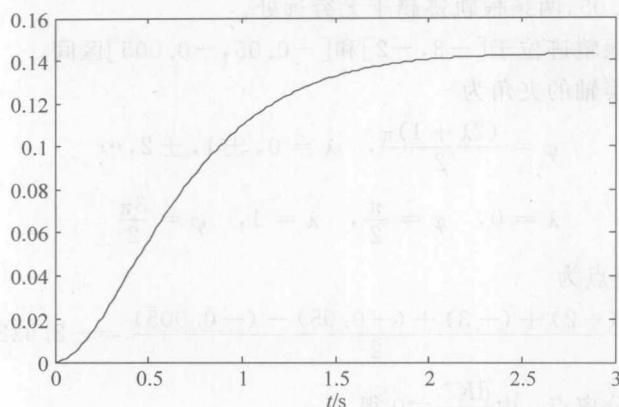


图 4-37 题 C4-2 校正系统近似的单位阶跃响应

(6) 校正后系统的闭环传递函数为

$$\Phi_2(s) = \frac{s + 0.05}{(s + 0.005) \cdot (s^2 + 5s + 6) + (s + 0.05)}$$

准确的单位阶跃响应如图 4-38 所示。

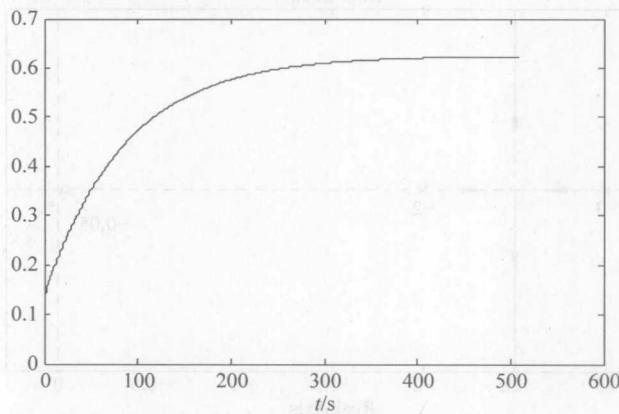


图 4-38 题 C4-2 校正系统准确的单位阶跃响应

可以看出，准确的单位阶跃响应曲线与主导极点的响应曲线相比，稳态偏差都很小，但是调整时间变得很长，这是由于准确系统中还存在两个很靠近虚轴的零点和极点，它们的存在使动态过程很慢。一般主导极点离虚轴越远，动态性能越好，离虚轴越近，动态性能越差。

**C4-3** 若既要改善系统的动态性能，又要提高系统的稳态性能，可以用超前滞后校正装置

$$G_c(s) = K_c \frac{(\alpha T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(\beta T_2 s + 1)}$$

式中,  $\alpha, \beta > 1$ 。现考虑单位负反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{3}{s(s+1)}$$

现要求既加大稳态误差系数, 又减小系统的超调量, 引入超前滞后校正装置

$$G_c(s) = \frac{(s+1)(s+0.1)}{(s+1.25)(s+0.008)}$$

- (1) 绘制原系统的根轨迹图, 并求闭环系统的极点以及阻尼比  $\zeta$ , 无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  和速度误差系数  $K_v$ ;
- (2) 求原系统的单位阶跃响应;
- (3) 绘制引入校正装置后系统的根轨迹图, 并求闭环系统的主导极点以及阻尼比  $\zeta$ , 无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  和速度误差系数  $K_v$ ;
- (4) 求校正后系统的单位阶跃响应, 并与(2)的结果进行比较, 说明校正装置的作用。

解 (1)

① 根轨迹有 2 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1=0, p_2=-1$ , 终止于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-1, 0]$  区间。

④ 分离点为 -0.5。

⑤ 漐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{-1+0}{2} = -0.5$$

⑥ 根轨迹如图 4-39 所示。

闭环系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{3}{s^2 + s + 3}$$

闭环极点为  $s_{1,2} = -0.5000 \pm 1.6583j$ , 无阻尼自然振荡频率  $\omega_n = \sqrt{3}$ 。由  $\zeta\omega_n = 0.5$ , 得到  $\zeta = 0.29$ , 由开环传递函数可求得速度误差系数  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = 3$ 。

(2) 利用 MATLAB 可得原系统的单位阶跃响应(如图 4-40 所示), 进一步可求得超调量  $M_p = 38.8\%$ , 调整时间为 7.87s。

(3) 引入校正后, 消去分子和分母的相同项  $(s+1)$  不影响根轨迹的形状, 系统开

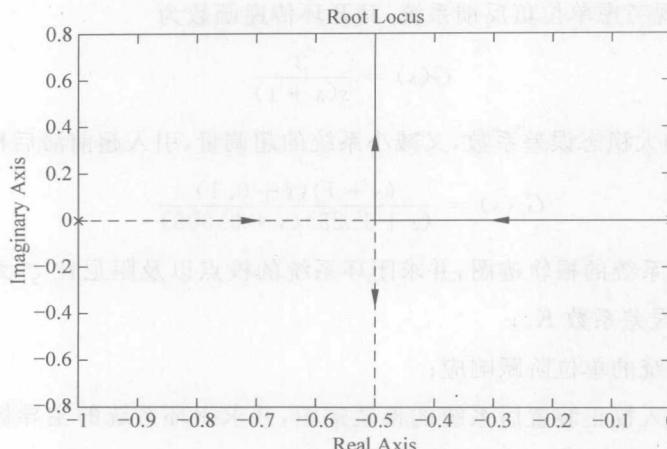


图 4-39 题 C4-3 原系统根轨迹

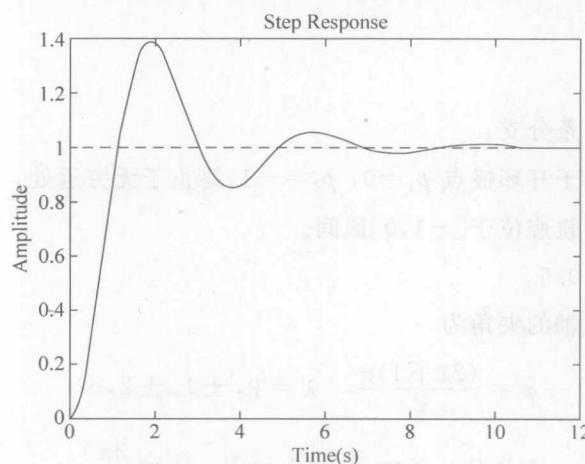


图 4-40 题 C4-3 原系统的单位阶跃响应

环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{3(s+0.1)}{s(s+1.25)(s+0.008)}$$

解：① 根轨迹有 3 条分支。

② 根轨迹起始于开环极点  $p_1=0$ ,  $p_2=-1.25$ ,  $p_3=-0.008$ ; 一条根轨迹终止于开环零点  $z_1=-0.1$  两条趋于无穷远处。

③ 实轴上的根轨迹位于  $[-0.008, 0]$  和  $[-1.25, -0.1]$  区间。

④ 渐近线和实轴的夹角为

$$\varphi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{2}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma = \frac{(-1.25) + (-0.008) - (-0.1)}{2} = -0.579$$

⑤ 根轨迹的分离点和汇合点,由  $\frac{dK^*}{ds} = 0$  得

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^3 + 1.558s^2 + 0.2516s + 0.001) = 0$$

该方程的根为  $s_1 = -0.0041$ ,  $s_2 = -0.5532$ ,  $s_3 = -0.2217$ , 将以上方程的根代入式  $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$ ,  $K_r$  都取正值,故根轨迹的分离点为  $-0.0041$  和  $-0.5532$ ,会合点为  $-0.2217$ 。

⑥ 根轨迹图形如图 4-41 所示。

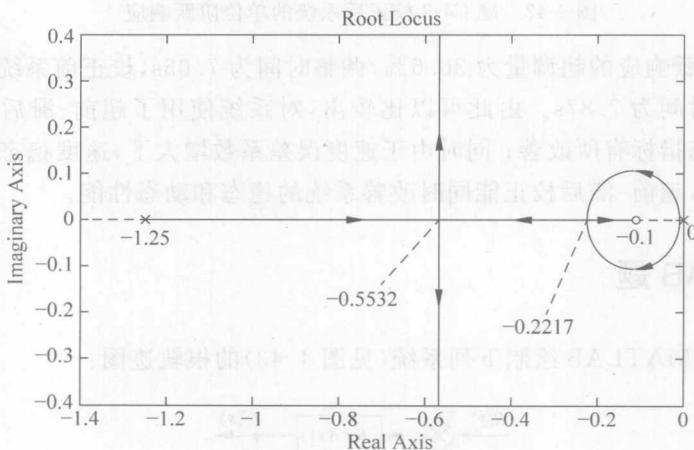


图 4-41 题 C4-3 校正后系统的根轨迹

闭环系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{3s + 0.3}{s^3 + 1.258s^2 + 3.01s + 0.3}$$

闭环极点为  $s_{1,2} = -0.5771 \pm j1.5991$ ,  $s_3 = -0.1038$ 。由于  $s_3 = -0.1038$  和系统零点  $s = -0.1$  非常接近,组成偶极子,因此系统可以近似为极点是  $s_{1,2} = -0.5771 \pm j1.5991$  的二阶系统。由此,有

$$\zeta \omega_n = 0.5771, \quad \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.5991$$

解得  $\zeta = 0.339$ ,  $\omega_n = 1.702$  速度误差系数  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = 30$ 。

(4) 利用 MATLAB 可得校正后系统的单位阶跃响应(如图 4-42 所示)。

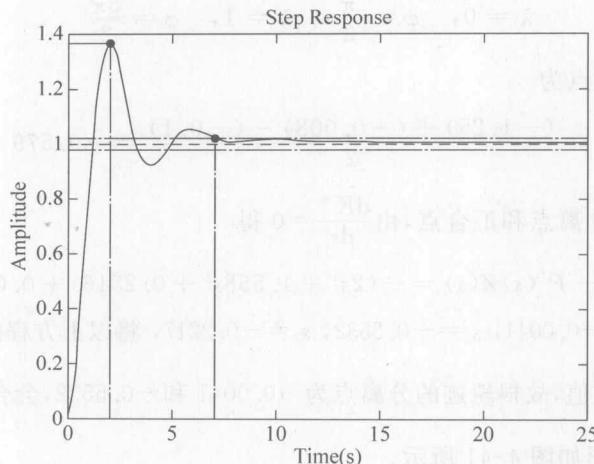


图 4-42 题 C4-3 校正后系统的单位阶跃响应

校正后阶跃响应的超调量为 36.6%，调整时间为 7.06s，校正前系统的超调量为 38.8%，调整时间为 7.87s。由此可以比较出，对系统使用了超前-滞后校正控制器后，系统的动态指标有所改善；同时由于速度误差系数增大了，速度稳态误差就减小了许多。因此，超前-滞后校正能同时改善系统的稳态和动态性能。

## D MATLAB 题

**D4-1** 用 MATLAB 绘制下列系统(见图 4-43)的根轨迹图：

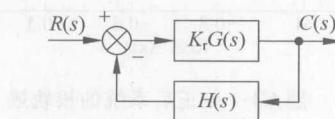


图 4-43 题 D4-1 系统图

$$(1) G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 5}, H(s) = 1;$$

$$(2) G(s) = \frac{s+10}{s^4 + 5s^3 + 2s + 1}, H(s) = s + 5;$$

$$(3) G(s) = \frac{s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 5s + 8}{s^6 + 6s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 2s^2 + 9s}, H(s) = 1;$$

$$(4) G(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2}, H(s) = 1;$$

$$(5) G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s + 5}, H(s) = 5s.$$

解 在 MATLAB 中调用命令 `rlocus` 绘制根轨迹图形如图 4-44～图 4-48 所示。

(1)

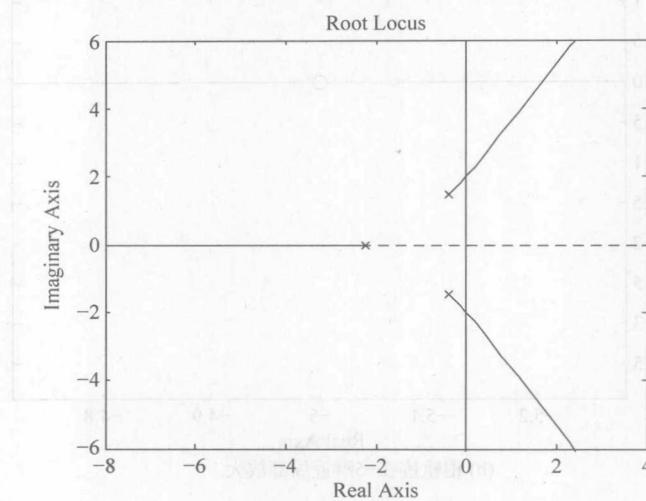
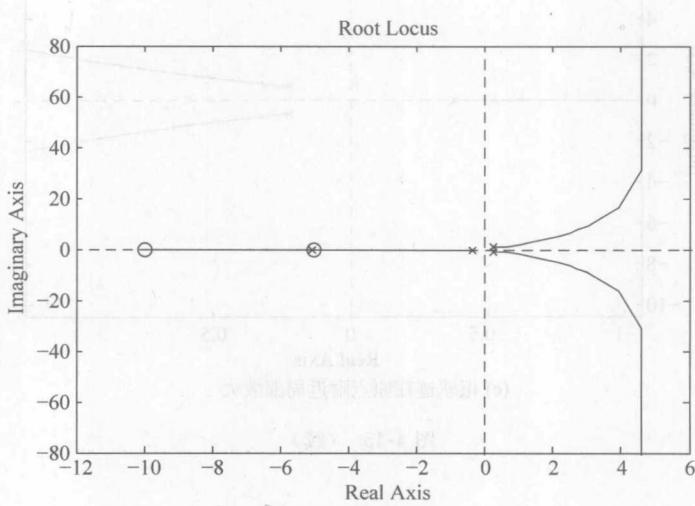


图 4-44 题 D4-1(1)的根轨迹

(2)



(a) 根轨迹全图

图 4-45 题 D4-1(2)的根轨迹

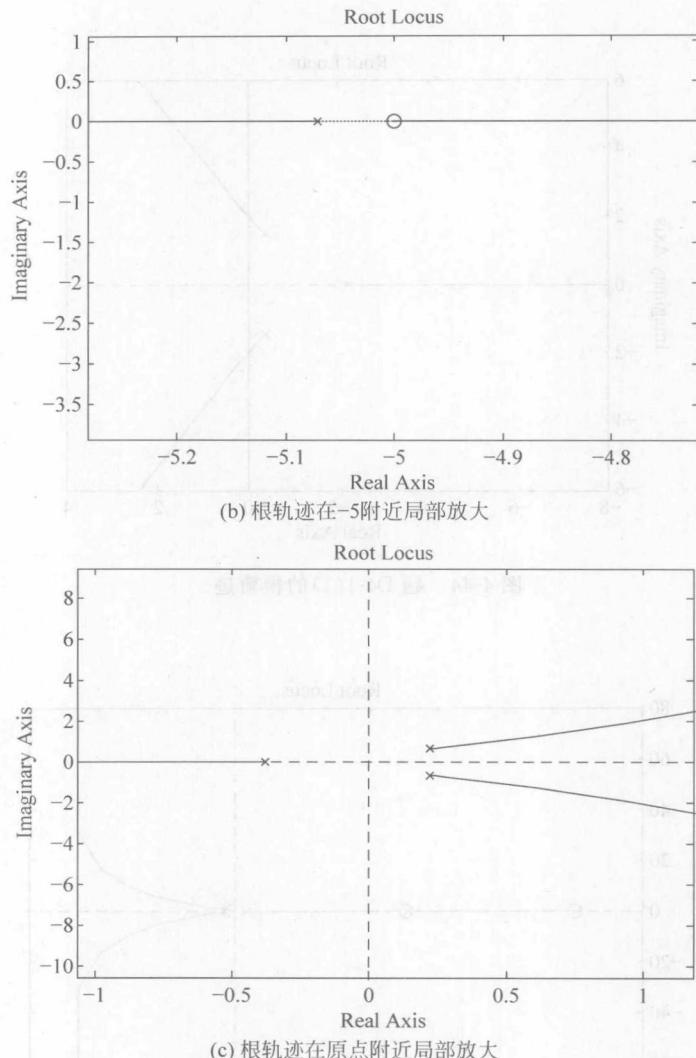


图 4-45 (续)

(3)

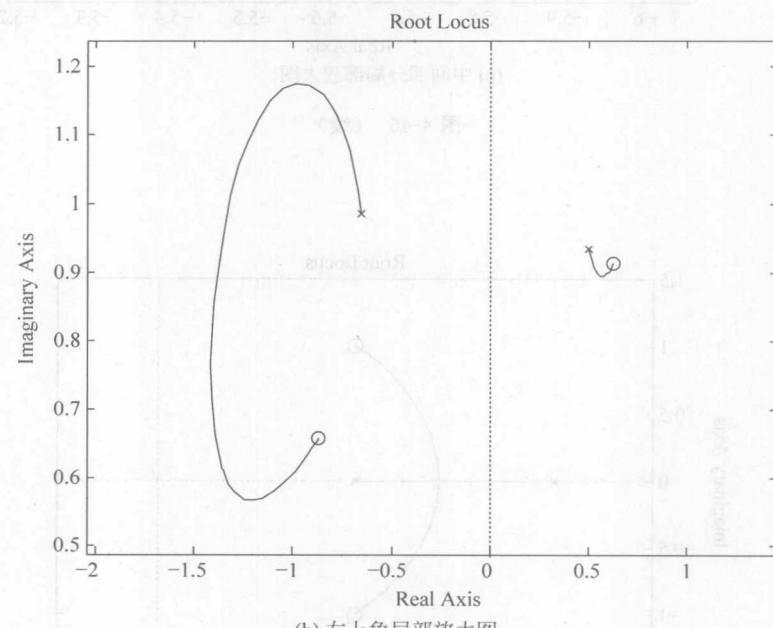
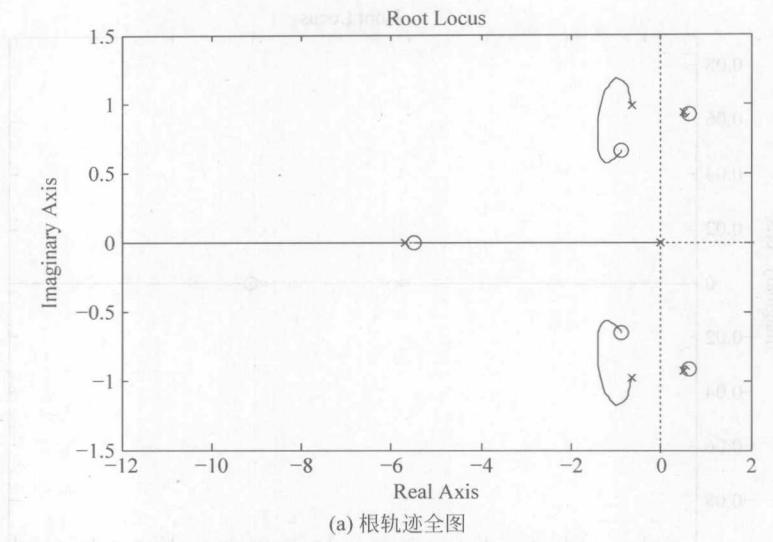
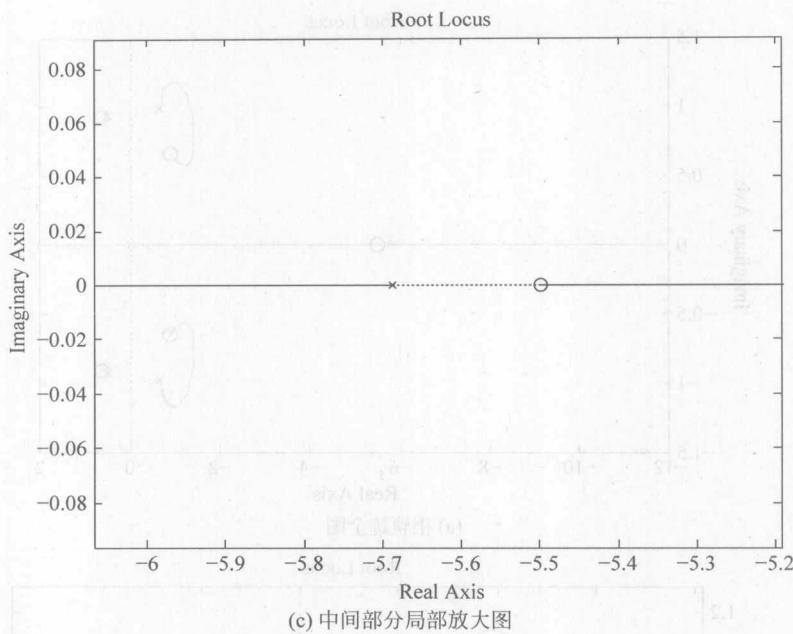


图 4-46 题 D4-1(3) 的根轨迹



(c) 中间部分局部放大图

图 4-46 (续)

(4)

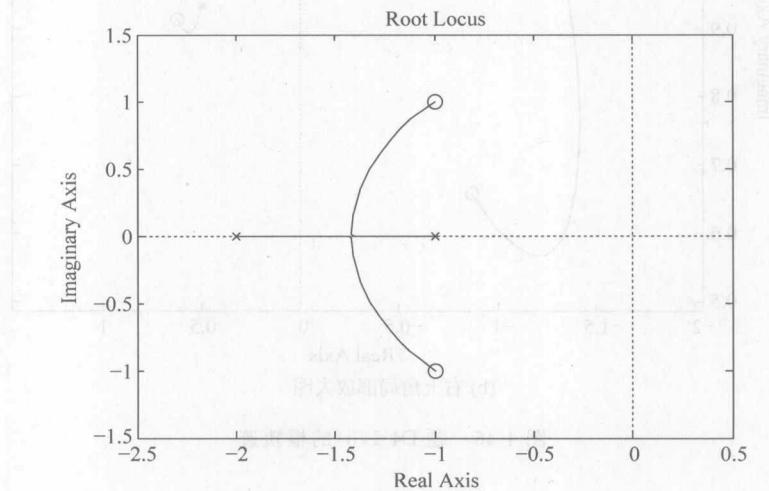


图 4-47 题 D4-1(4) 的根轨迹

(5)

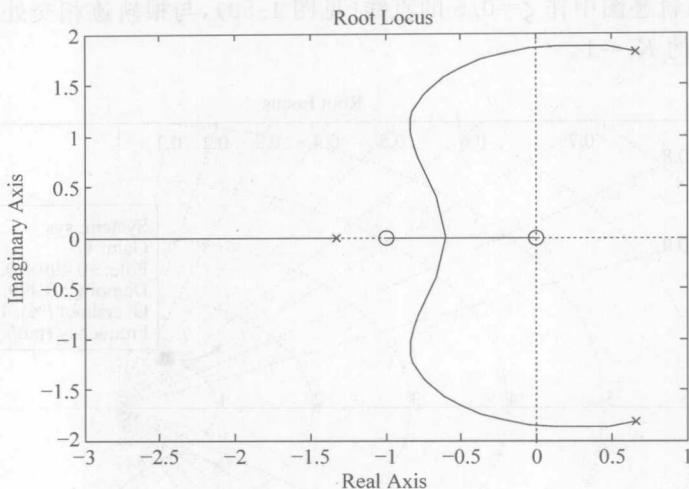


图 4-48 题 D4-1(5) 的根轨迹

**D4-2** 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

用 MATLAB 求：

- (1) 系统稳定的增益  $K_r$ ；
- (2) 闭环系统主导极点为  $\zeta=0.5$  时的增益  $K_r$ 。

解 (1) 系统的根轨迹如图 4-49 所示。

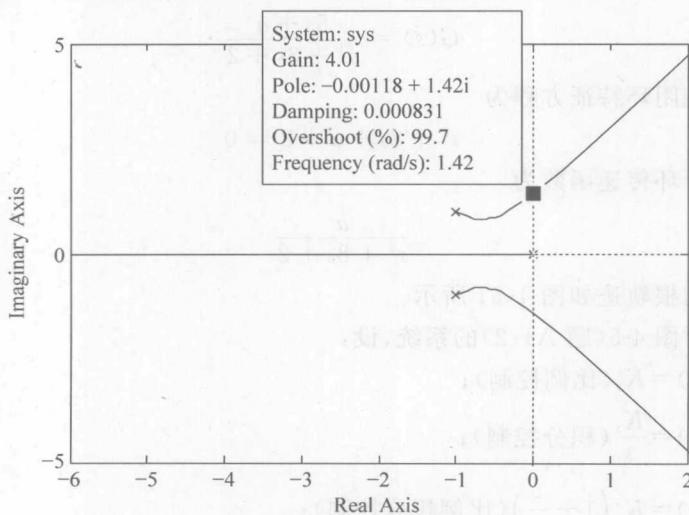


图 4-49 题 D4-2 的根轨迹

由根轨迹图读出根轨迹与虚轴的交点处  $K_r=4$ , 所以当  $0 < K_r < 4$  时系统稳定

(2) 在根轨迹图中作  $\zeta=0.5$  的直线(见图 4-50), 与根轨迹相交处就是系统的主导极点, 此处的  $K_r=1$ 。

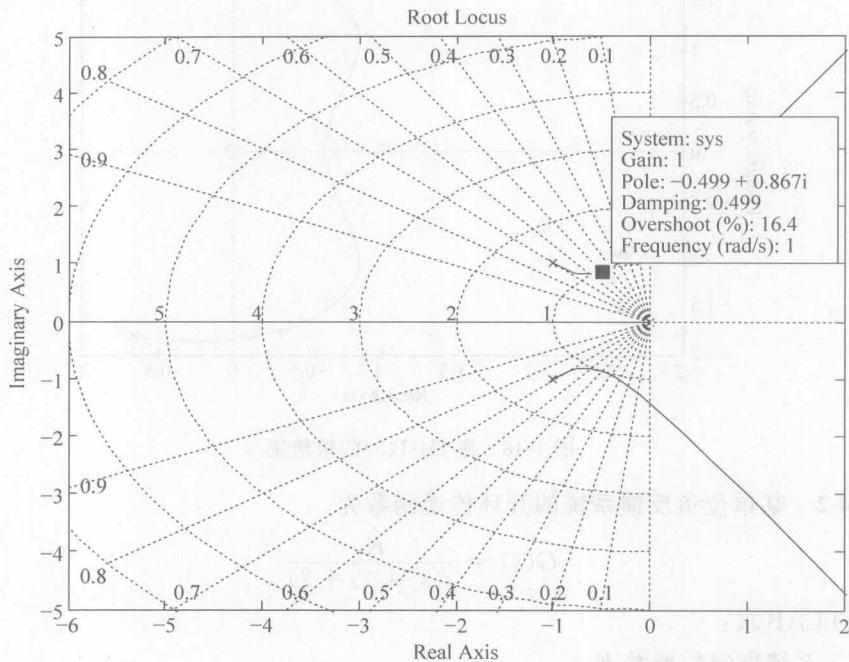


图 4-50 具有等阻尼线的根轨迹图

**D4-3** 用 MATLAB 求下列单位负反馈系统, 以  $a$  为变量的根轨迹图。

$$G(s) = \frac{5s+a}{s^2+3s+2}$$

解 系统闭环特征方程为

$$s^2 + 8s + a + 2 = 0$$

所以等效的开环传递函数为

$$\frac{a}{s^2 + 8s + 2}$$

以  $a$  为变量的根轨迹如图 4-51 所示。

**D4-4** 对图 4-5(题 A4-2)的系统, 设:

(1)  $G_c(s) = K_r$  (比例控制);

(2)  $G_c(s) = \frac{K_r}{s}$  (积分控制);

(3)  $G_c(s) = K_r \left(1 + \frac{1}{s}\right)$  (比例积分控制);

(4)  $G_c(s) = K_r(5+s)$  (比例微分控制)。

用 MATLAB 分别绘制 (1)~(4) 四种情况下,  $0 \leq K_r < \infty$  的根轨迹图; 求取

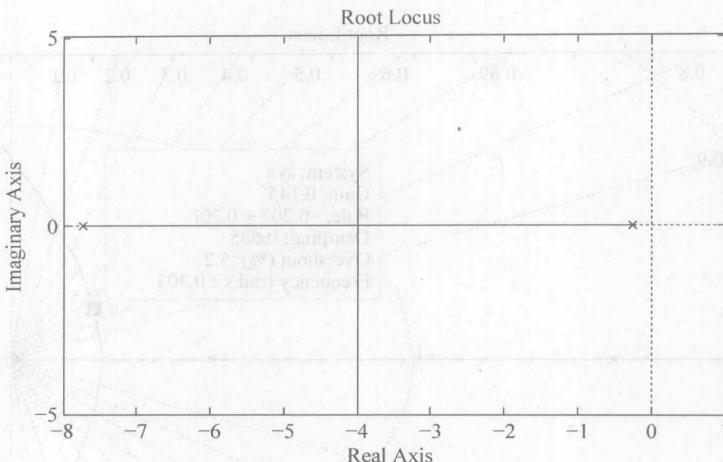


图 4-51 题 D4-3 的根轨迹

$M_p \leqslant 5\%$  的  $K_r$  值；比较四种控制下系统的稳态误差和瞬态响应指标，并讨论比例、积分和微分控制对系统性能的影响。

解 (1) 根轨迹图如图 4-52 所示。

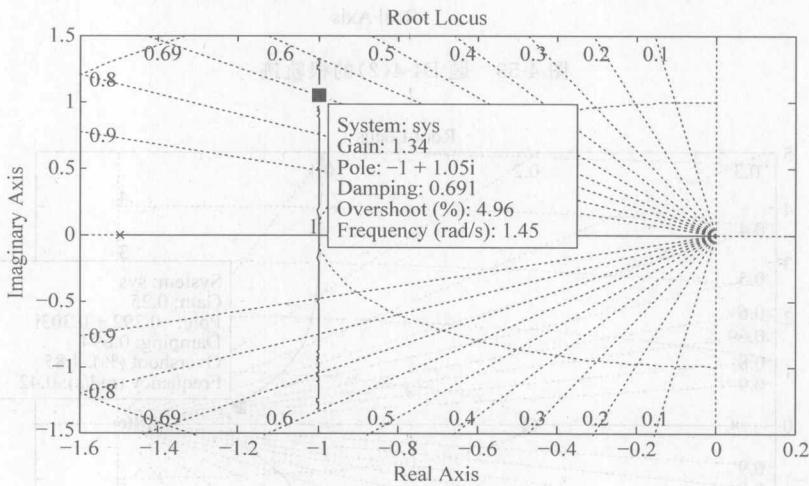


图 4-52 题 D4-4(1) 的根轨迹

由  $M_p \leqslant 5\%$  可知  $\zeta \geqslant 0.69$ , 相应的  $K_r \leqslant 1.34$ 。 $K_r = 1$  时, 利用 MATLAB 求出阶跃响应, 可得超调量  $M_p = 2.66\%$ , 调整时间为 4.3s, 位置误差系数为 4/3。

(2) 根轨迹如图 4-53 所示。

由  $M_p \leqslant 5\%$  可知  $\zeta \geqslant 0.69$ , 相应的  $K_r \leqslant 0.145$ 。 $K_r = 1$  时, 可求得  $M_p = 72.3\%$ , 调整时间为 65.9s, 位置误差系数为  $\infty$ , 即阶跃信号作用下稳态误差为 0。

(3) 根轨迹如图 4-54 所示。

由  $M_p \leqslant 5\%$  可知  $\zeta \geqslant 0.69$ , 相应的  $K_r \leqslant 0.25$ 。 $K_r = 1$  时, 同样可求得  $M_p = 26.7\%$ , 调整时间为 9.25s, 位置误差系数为  $\infty$ , 即阶跃信号作用下稳态误差为 0。

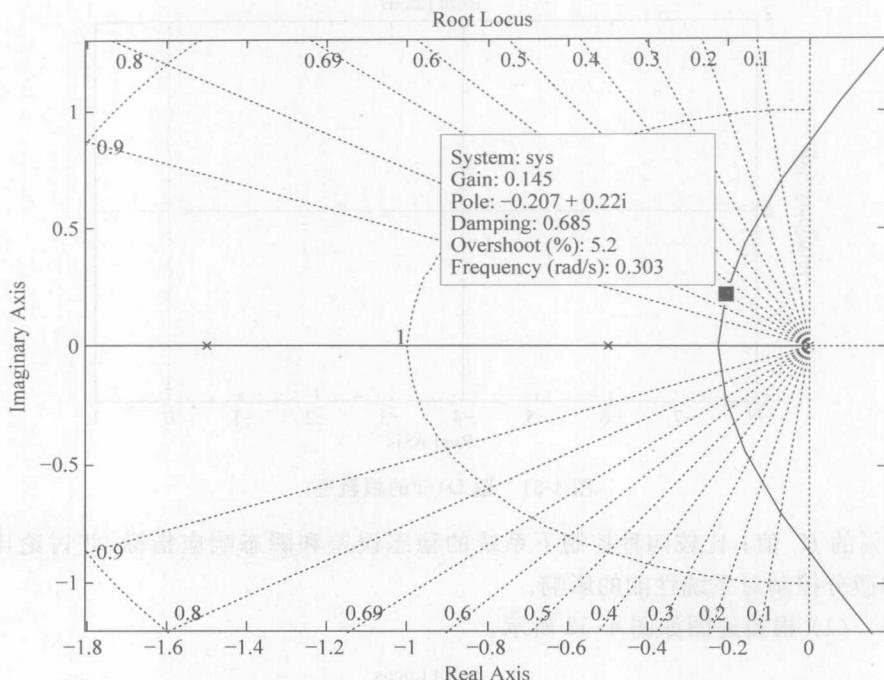


图 4-53 题 D4-4(2) 的根轨迹

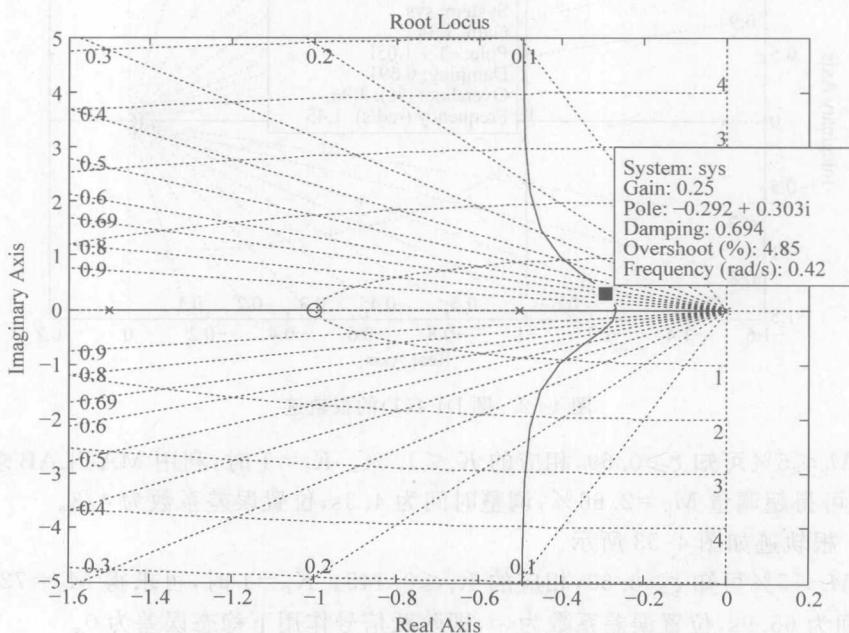


图 4-54 题 D4-4(3) 的根轨迹

(4) 根轨迹如图 4-55 所示。

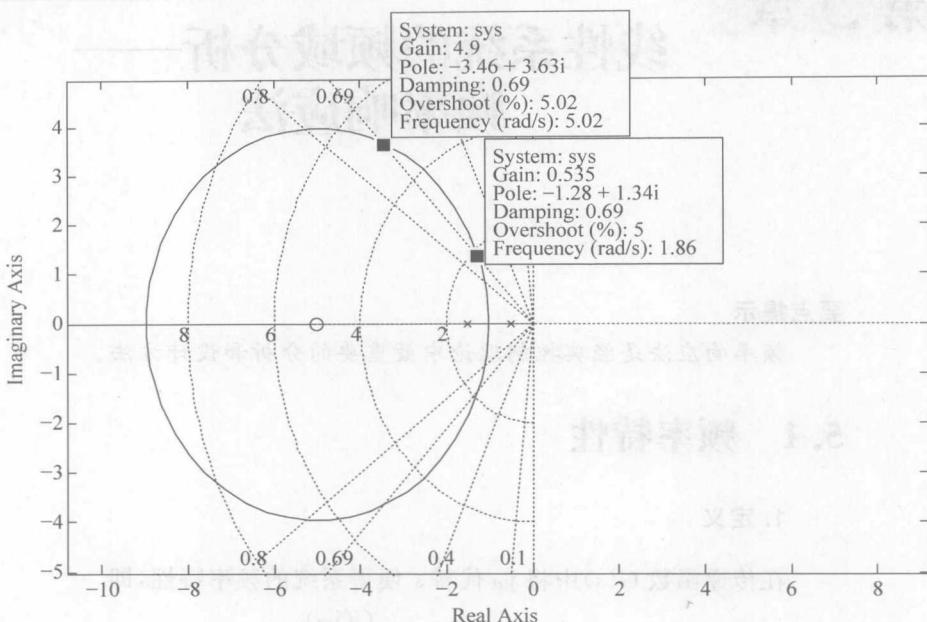


图 4-55 题 D4-4(4)的根轨迹

由  $M_p \leq 5\%$  可知  $\zeta \geq 0.69$ , 相应的  $K_r \leq 0.535$  或  $K_r \geq 4.9$ 。 $K_r = 1$  时, 可求得  $M_p = 9.47\%$ , 调整时间为 2.28s, 位置误差系数为  $20/3$ 。

由以上四种情况可以看出, 比例调节能调节系统的根轨迹增益; 积分使得根轨迹朝右偏, 闭环极点右移, 动态响应变差, 即超调量和调整时间均增加了, 但是系统的型号提高了, 跟踪能力提高了; 比例积分调节增加了开环一对零极点, 根轨迹渐近线左移, 系统稳定性可望改善, 而且系统的型号提高了, 也提高了跟踪能力; 而微分作用增加了系统的一个零点, 根轨迹左偏, 能改善系统的动态性能, 使系统响应变快, 但是系统型号未变, 跟踪能力没有改善。

# 第5章

## 线性系统的频域分析—— 频率响应法

### 要点提示

频率响应法是经典控制理论中最重要的分析和设计方法。

## 5.1 频率特性

### 1. 定义

在传递函数  $G(s)$  中将  $j\omega$  代替  $s$  便得系统的频率特性, 即

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$$

不管系统是否稳定, 总可以有它的频率特性。

### 2. 性质

(1) 频率特性是系统在频域中的一种数学模型, 它描述了系统的特性, 与外界因素无关。当系统结构参数确定之后, 系统的频率特性也随之确定。

(2) 对于稳定系统而言, 频率特性描述了系统对正弦输入的稳态响应。将  $G(j\omega)$  写成极坐标形式

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

并记  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  和  $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$ , 它们都是  $\omega$  的函数, 分别称做幅频特性和相频特性。当输入  $A \sin \omega t$  时, 系统的稳态输出  $c_{ss}(t) = AM(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$ 。

## 5.2 频率特性图

常用的频率特性图有以下三种: 奈奎斯特图、伯德图和尼科尔斯图。

### 5.2.1 奈奎斯特(Nyquist)图

奈奎斯特(Nyquist)图是以  $\omega$  为参数( $\omega \in [0, \infty)$ ), 系统的频率特性在

复平面中的图像称为 Nyquist 图。要准确绘制系统的奈氏曲线是一件比较麻烦的工作,不过在实践中,并不需要准确画出整条奈氏曲线,只要知道曲线的走向以及它和轴及单位圆的交点。

### 5.2.2 伯德(Bode)图

伯德图由对数幅频特性和对数相频特性两幅图组成,它们的横轴都是  $\log\omega$ ,幅频特性的纵轴是幅频值,以分贝为单位,即  $L(\omega) = 20\lg M(\omega)$ ; 相频特性的纵轴是相角,以度为单位。

### 5.2.3 尼科尔斯(Nichols)图

对数幅相特性图是画在以系统的对数幅值  $L(\omega)$  为纵坐标,相角  $\varphi(\omega)$  为横坐标,  $\omega$  为参数的图像,根据对数幅频特性和相频特性可以比较方便地画出对数幅相特性图。Nichols 图的主要应用是通过开环频率特性了解闭环频率特性。

## 5.3 最小相位系统和非最小相位系统

为了进一步说明开环幅频特性与相频特性之间的关系,我们引入最小相位系统的概念。

**定义:** 在右半  $s$  平面没有零点和极点,也没有延迟因子(环节)的系统,在经典控制理论中称为最小相位系统; 反之,为非最小相位系统。

最小相位系统有以下一些特征:

(1) 当  $\omega$  在  $[0, \infty)$  内变化时,最小相位系统对应的幅角变化范围最小。

(2) 当  $\omega \rightarrow \infty$  时,其相角等于  $-90^\circ \times (n - m)$ ,对数幅频特性曲线的斜率为  $-20 \times (n - m) \text{ dB/dec}$ 。有时用这一特性来判别一个系统是否为最小相位系统。

(3) 对数幅频特性与相频特性之间存在确定的对应关系。对于一个最小相位系统,我们若知道了其幅频特性,它的相频特性也就唯一地确定了。也就是说: 只要知道其幅频特性,就能写出此最小相位系统所对应的传递函数,就可以依据幅频特性对系统进行分析研究,而无须再画出相频特性。

## 5.4 频域中的稳定性判据

### 5.4.1 奈氏稳定性判据

$$N = Z - P \quad (5-1)$$

其中  $N$  是( $\omega$  自  $-\infty \rightarrow +\infty \rightarrow -\infty$ )  $G(j\omega)H(j\omega)$  包围  $(-1, j0)$  点的圈数,以顺时针为正,

逆时针为负;  $P$  是开环在右半复平面极点的个数,  $Z$  是闭环在右半复平面极点的个数。

闭环系统稳定的充分必要条件为  $Z=0$ , 即  $G(j\omega)H(j\omega)$  逆时针包围  $(-1, j0)$  点的圈数等于  $P$ 。

### 5.4.2 增益裕度 GM

**定义:** 在系统的相位剪切角频率  $\omega_g$  (此时  $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ ) 处开环频率特性  $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$  的倒数, 称为控制系统的增益裕度, 记作  $G_m$ , 即

$$G_m = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

增益裕度也可用  $G_m$  的对数  $GM$  表示, 即

$$GM = 20 \lg G_m = -20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| \text{ (dB)} \quad (5-2)$$

### 5.4.3 相位裕度 $\gamma$

**定义:** 在系统的增益剪切角频率  $\omega_c$  处 (此时  $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$ ),  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$  是系统的相位裕度。

## 5.5 基于闭环频率特性的系统动态性能分析

闭环系统的频域性能指标

谐振峰值  $M_r = \max |W(j\omega)|$ , 即闭环频率特性的最大幅频。达到谐振峰值的角频率  $\omega_r$  称为谐振频率。带宽  $\omega_b$  是指第一次下降到  $\frac{\sqrt{2}}{2} |W(0)|$  的频率, 其中  $|W(0)|$  用分贝做单位。

对于二阶系统  $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ , 有

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = |M(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_b = \omega_n [(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}]^{1/2}$$

由第一式可知在  $\zeta \geq 0.707$  时, 不会出现谐振峰值。

## 习题解答

### A 一般题

**A5-1** 绘制下列系统的对数幅频特性图和相频特性图, 并求增益剪切角频率  $\omega_c$

和相位剪切角频率  $\omega_g$ 。

$$(1) G(s) = \frac{1}{s(s+15)}$$

$$(2) G(s) = \frac{20}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(3) G(s) = \frac{36(s+2)}{s(s^2+6s+12)}$$

$$(4) G(s) = \frac{5}{s(0.01s^2+0.1s+1)}$$

$$(5) G(s) = \frac{40(s-10)}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(6) G(s) = \frac{40}{s(s-10)(s+20)}$$

解 (1)  $G(s) = \frac{1}{s(s+15)}$

手工绘图(渐近线),如图 5-1 所示。

$$G(s) = \frac{1}{15} \frac{1}{s(s/15+1)}, \quad 20\lg K = 20\lg\left(\frac{1}{15}\right) = -23.5 \text{ dB}$$

$$\lg \frac{1}{15\omega_c} = 0, \quad \omega_c = \frac{1}{15} = 0.0667 \text{ rad/s}$$

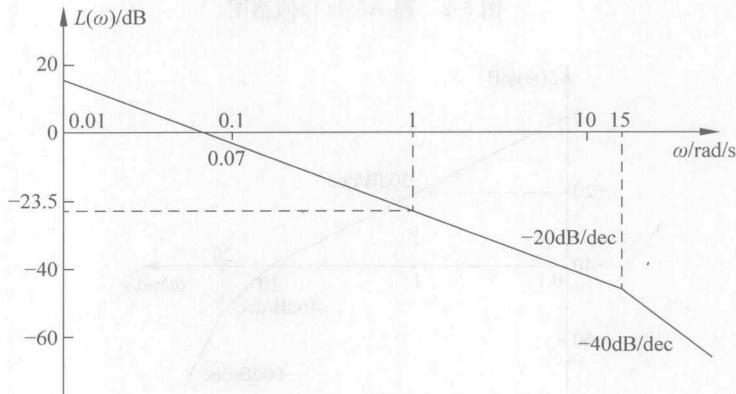


图 5-1 题 A5-1(1)幅频特性图

MATLAB 画图结果如下

$$\omega_c = 0.0667 \text{ rad/s} \quad \omega_g = \text{无穷大}$$

$$(2) G(s) = \frac{20}{s(s+10)(s+20)}$$

手工绘图(渐近线),如图 5-2 至图 5-4 所示。

$$G(s) = \frac{20}{s(s+10)(s+20)} = \frac{1}{10} \frac{1}{s(s/10+1)(s/20+1)} \quad 20\lg K = 20\lg \frac{1}{10} = -20 \text{ dB}$$

$$\lg \frac{1}{10\omega_c} = 0, \quad \omega_c = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ rad/s}$$

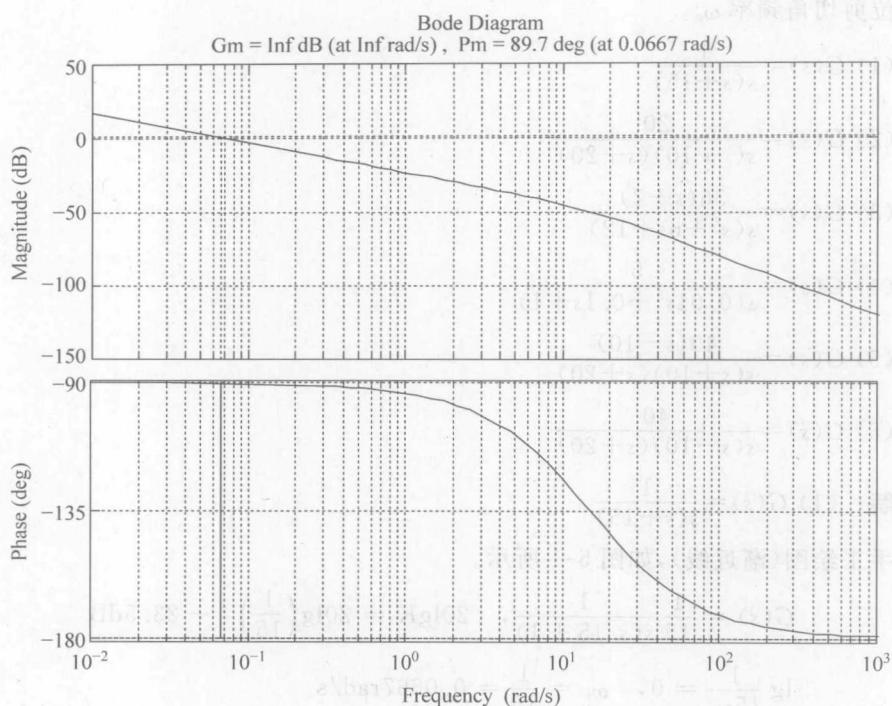


图 5-2 题 A5-1(1)伯德图

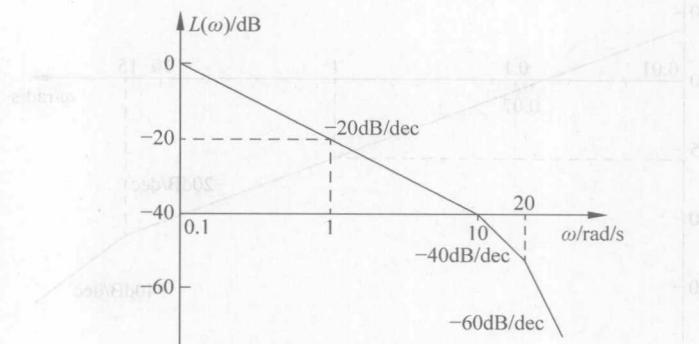


图 5-3 题 A5-1(2)幅频特性图

MATLAB 画图结果如下

$$\omega_g = 14.1 \text{ rad/s}; \quad \omega_c = 0.1 \text{ rad/s}$$

$$(3) G(s) = \frac{36(s+2)}{s(s^2 + 6s + 12)}$$

手工绘图(渐近线),如图 5-5 和图 5-6 所示。

$$G(s) = \frac{36(s+2)}{s(s^2 + 6s + 12)} = \frac{6(s/2 + 1)}{s\left(\left(\frac{s}{\sqrt{12}}\right)^2 + s/2 + 1\right)} = \frac{6(s/2 + 1)}{s\left(\left(\frac{s}{3.46}\right)^2 + s/2 + 1\right)}$$

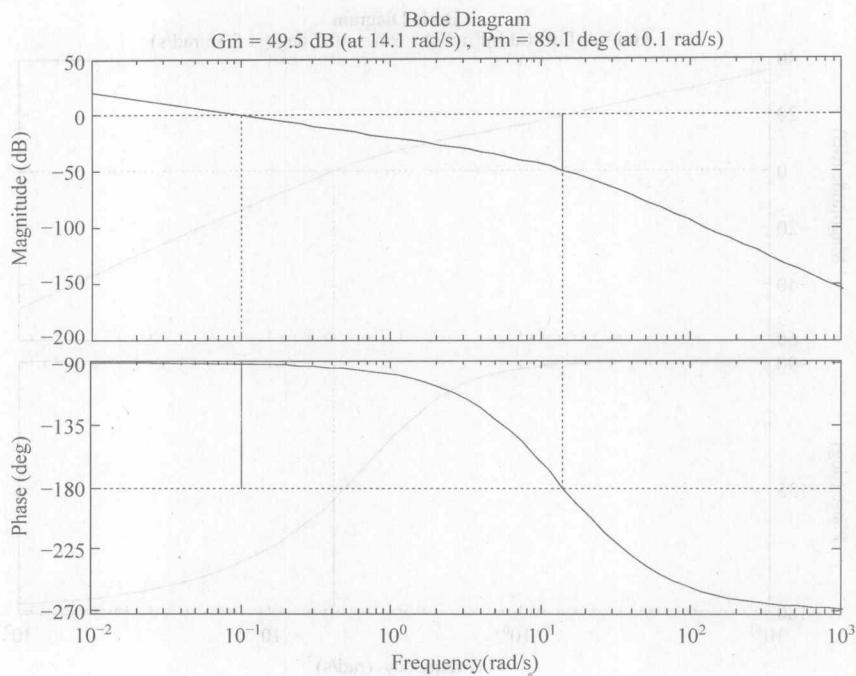


图 5-4 题 A5-1(2)伯德图

$$20\lg K = 20\lg(6) = 15.6 \text{ dB}$$

$$\lg \frac{\frac{6}{2} \omega_c}{\omega_c \cdot \frac{\omega_c^2}{12}} = 0, \quad \omega_c = 6 \text{ rad/s}$$

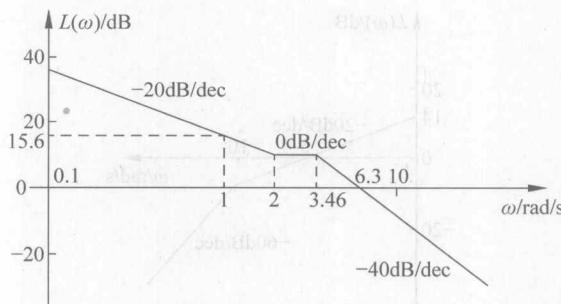


图 5-5 题 A5-1(3)幅频特性图

MATLAB 画图结果如下

$$\omega_g = \text{无穷大} \quad \omega_c = 5.65 \text{ rad/s}$$

$$(4) G(s) = \frac{5}{s(0.01s^2 + 0.1s + 1)}$$

手工绘图(渐近线),如图 5-6 和图 5-7 所示。

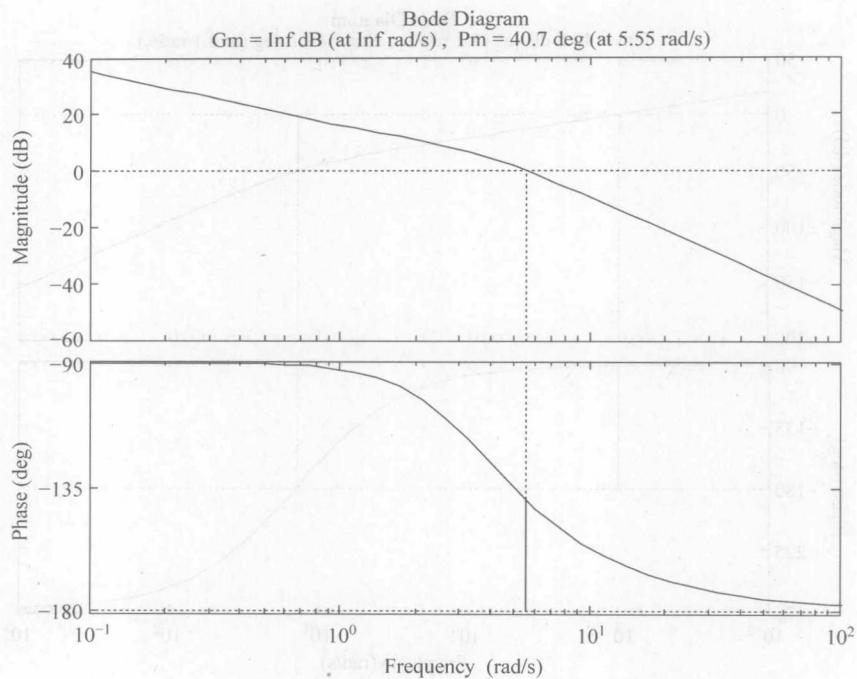


图 5-6 题 A5-1(3)伯德图

$$G(s) = \frac{5}{s(0.01s^2 + 0.1s + 1)} = \frac{5}{s\left(\left(\frac{s}{10}\right)^2 + s/10 + 1\right)}, \quad 20\lg K = 20\lg(5) = 14\text{dB},$$

$$\lg \frac{5}{\omega_c} = 0, \quad \omega_c = 5 \text{ rad/s}.$$

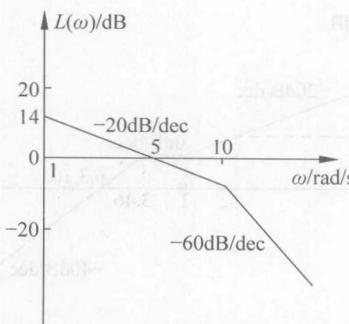


图 5-7 题 A5-1(4)幅频特性图

MATLAB 画图结果如下

$$\omega_g = 10 \text{ rad/s} \quad \omega_c = 5.65 \text{ rad/s}$$

$$(5) G(s) = \frac{40(s-10)}{s(s+10)(s+20)}$$

手工绘图(渐近线),如图 5-8 和图 5-9 所示。

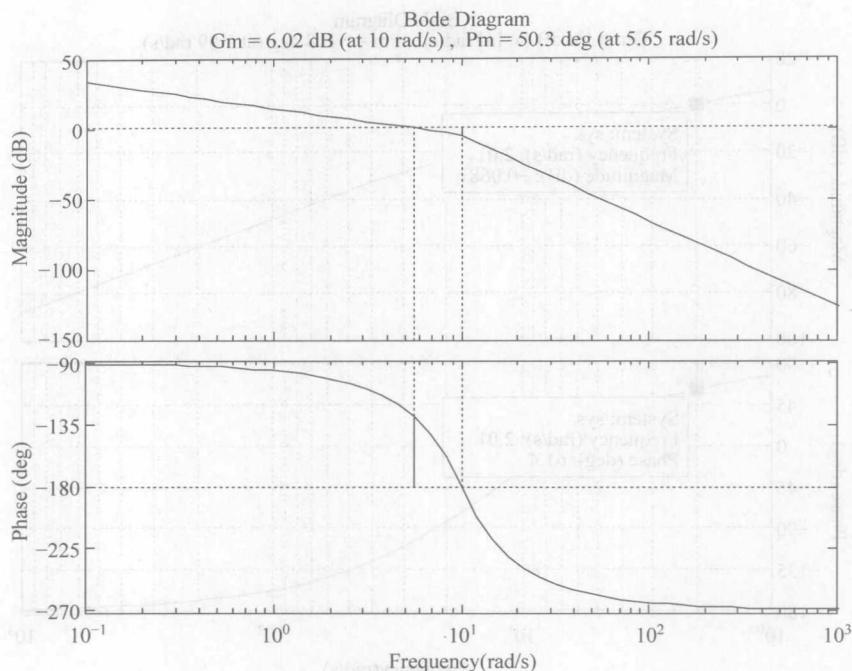


图 5-8 题 A5-1(4)伯德图

$$G(s) = \frac{40(s-10)}{s(s+10)(s+20)} = \frac{2(s/10-1)}{s(s/10+1)(s/20+1)}, \quad 20\lg K = 20\lg(2) = 6.0 \text{ dB}$$

$$\lg \frac{2}{\omega_c} = 0, \quad \omega_c = 2 \text{ rad/s}.$$

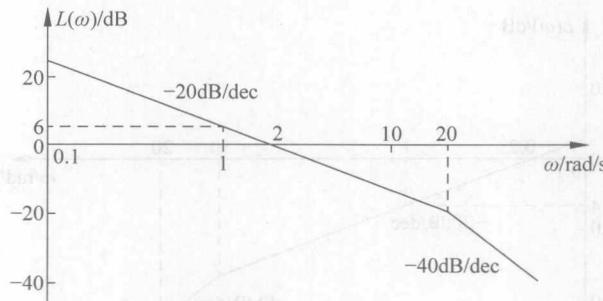


图 5-9 题 A5-1(5)幅频特性图

MATLAB 画图结果如下

$$\omega_g = 0 \quad \omega_c = 1.99 \text{ rad/s}$$

$$(6) G(s) = \frac{40}{s(s-10)(s+20)}$$

手工绘图(渐近线),如图 5-10 和图 5-11 所示。

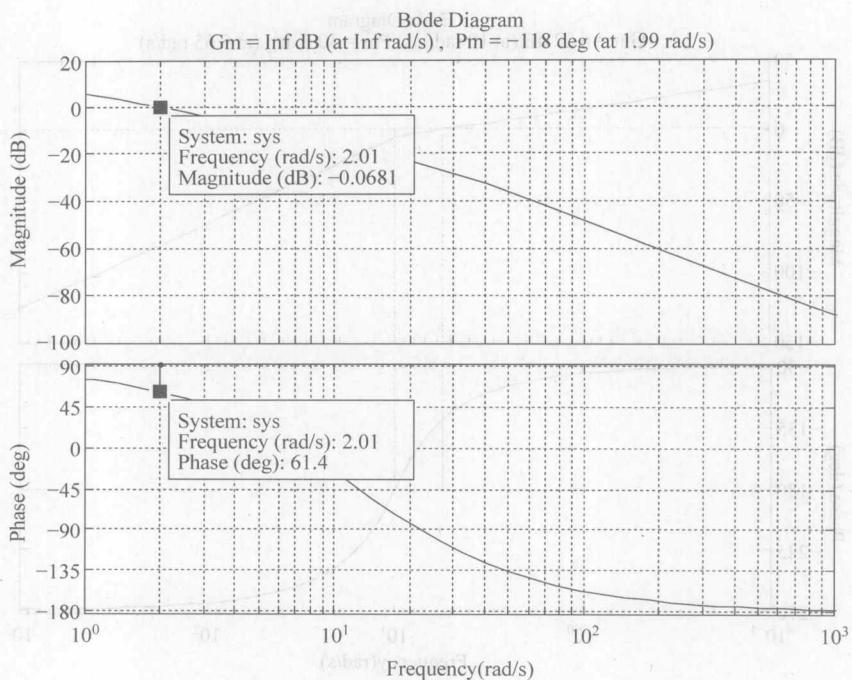


图 5-10 题 A5-1(5)伯德图

$$G(s) = \frac{40}{s(s-10)(s+20)} = \frac{0.2}{s(s/10-1)(s/20+1)}, \quad 20\lg K = 20\lg(0.2) = -14 \text{ dB}$$

$$\lg \frac{0.2}{\omega_c} = 0, \quad \omega_c = 0.2 \text{ rad/s.}$$

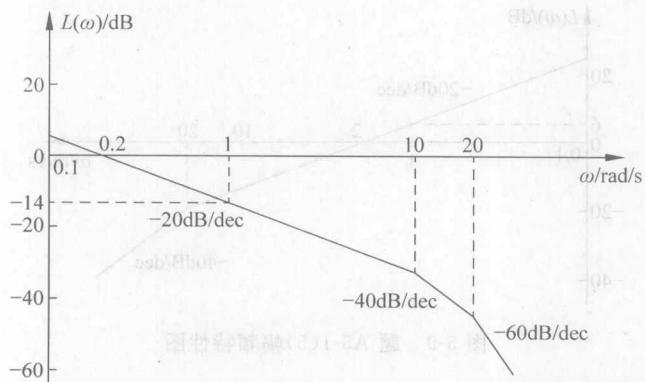


图 5-11 题 A5-1(6)幅频特性图

MATLAB 画图(见图 5-12)结果如下

$$\omega_g = 0 \quad \omega_c = 0.21 \text{ rad/s}$$

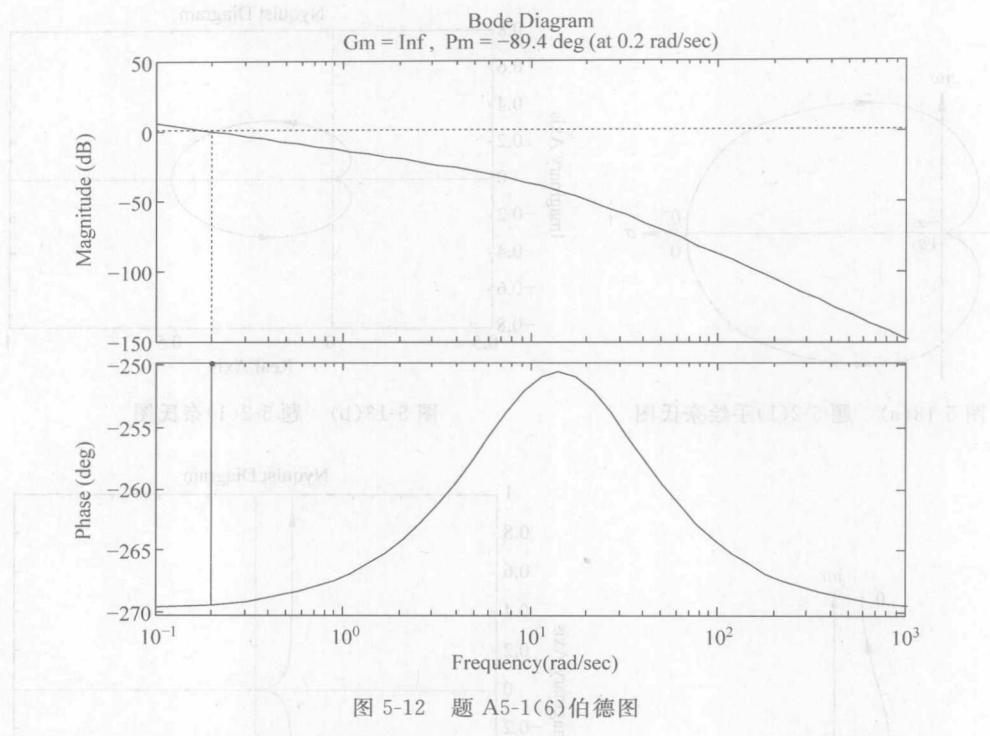


图 5-12 题 A5-1(6)伯德图

**A5-2** 绘制下列诸系统的奈氏图。

$$(1) G(s) = \frac{100}{(s+10)(s+20)}$$

$$(2) G(s) = \frac{100}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{10}{s^3(s+1)(s+2)}$$

$$(5) G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s-10)}$$

$$(6) G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)}$$

$$(7) G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+2)}$$

解 (1)  $G(s) = \frac{100}{(s+10)(s+20)}$ , 如图 5-13(a) 和图 5-13(b) 所示。

(2)  $G(s) = \frac{100}{s(s+10)(s+20)}$ , 如图 5-14(a) 和图 5-14(b) 所示。

(3)  $G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+10)}$ , 如图 5-15(a) 和图 5-15(b) 所示。

(4)  $G(s) = \frac{10}{s^3(s+1)(s+2)}$ , 如图 5-16(a) 和图 5-16(b) 所示。

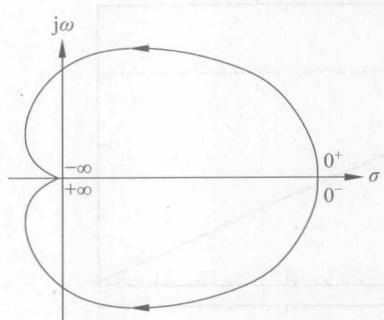


图 5-13(a) 题 5-2(1)手绘奈氏图

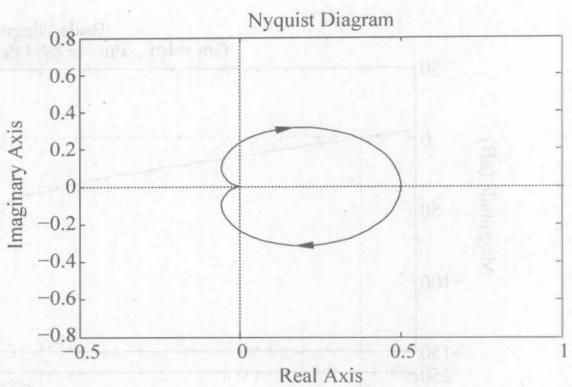


图 5-13(b) 题 5-2(1)奈氏图

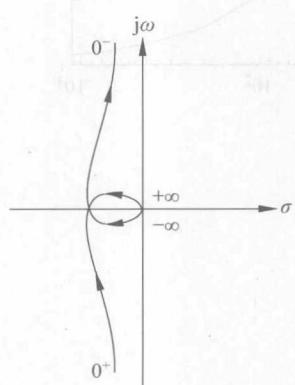


图 5-14(a) 题 5-2(2)手绘奈氏图

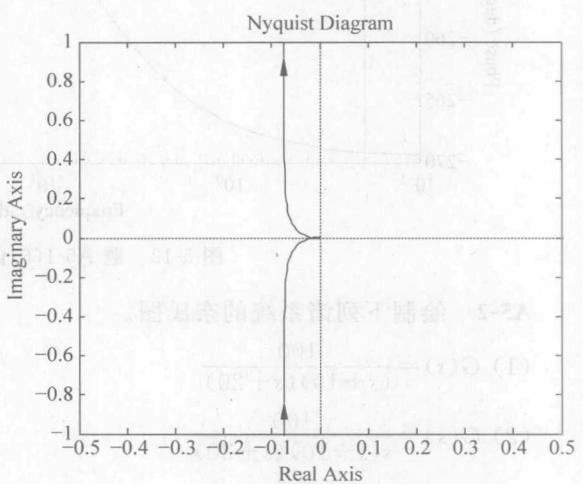


图 5-14(b) 题 5-2(2)奈氏图

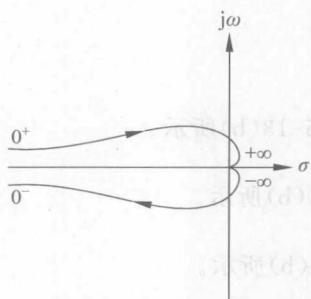


图 5-15(a) 题 5-2(3)手绘奈氏图

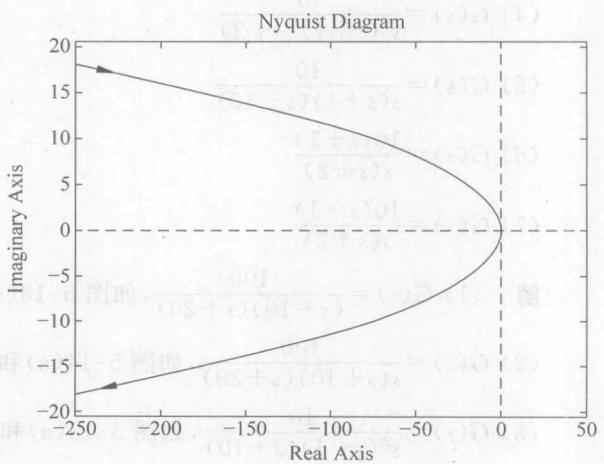


图 5-15(b) 题 5-2(3)奈氏图

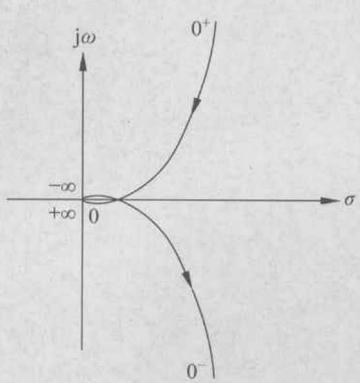


图 5-16(a) 题 5-2(4)手绘奈氏图

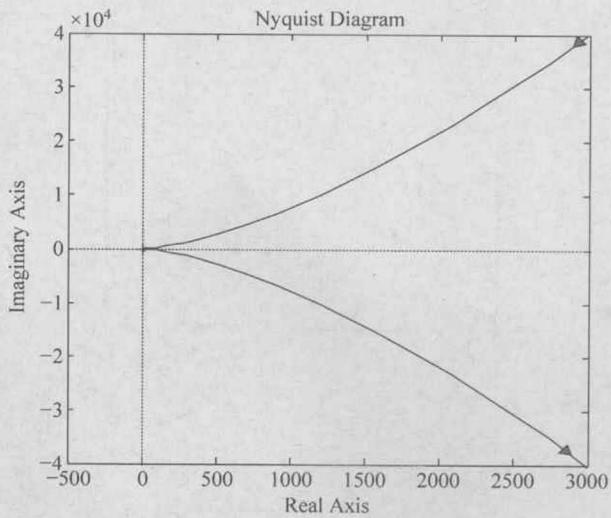


图 5-16(b) 题 5-2(4)奈氏图

(5)  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s-10)}$ , 如图 5-17(a) 和图 5-17(b) 所示。

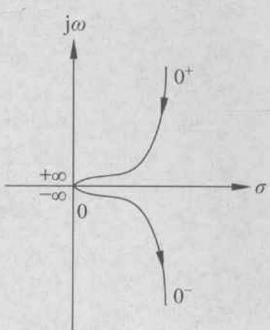


图 5-17(a) 题 5-2(5)手绘奈氏图

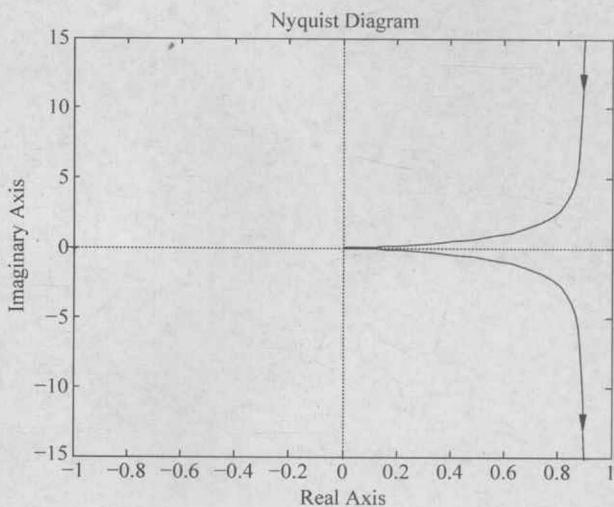


图 5-17(b) 题 5-2(5)奈氏图

(6)  $G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)}$ , 如图 5-18(a) 和图 5-18(b) 所示。

(7)  $G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+2)}$ , 如图 5-19(a) 和图 5-19(b) 所示。

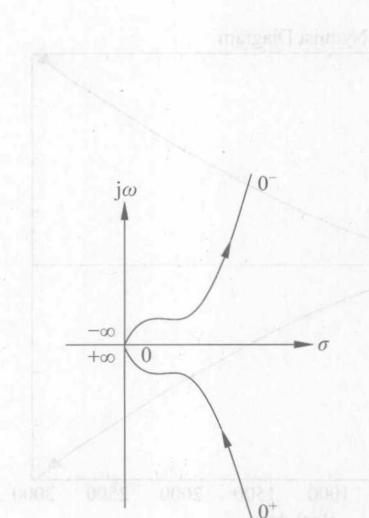


图 5-18(a) 题 5-2(6)手绘奈氏图

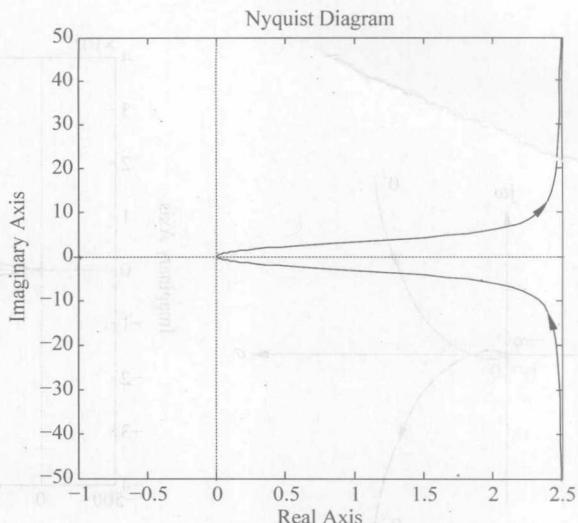


图 5-18(b) 题 5-2(6)奈氏图

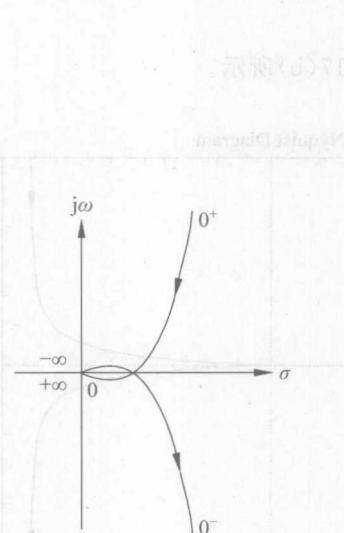


图 5-19(a) 题 5-2(7)手绘奈氏图

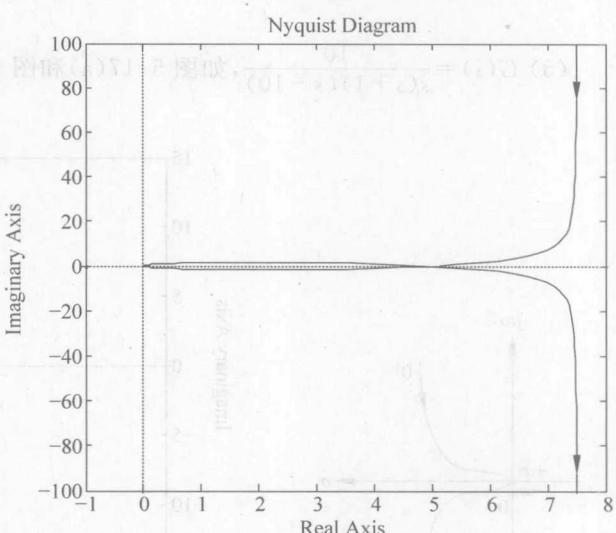


图 5-19(b) 题 5-2(7)奈氏图

**A5-3** 下列系统中,哪些系统是最小相位系统,哪些不是,为什么?

$$(1) G(s) = \frac{10}{s(s+5)(s+10)}$$

$$(2) G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+15)(s+30)}$$

$$(3) G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+15)(s-10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{100(s-1)(s+5)}{s(s+12)(s+10)(s^2+3s+3)}$$

$$(5) G(s) = \frac{100(s-1)(s+5)}{s(s+12)(s-10)(s^2-3s+3)}$$

$$(6) G(s) = \frac{100(s-1)}{s(s+15)(s-10)}$$

$$(7) G(s) = \frac{100e^{-s}}{s(s+10)}$$

解

最小相位系统：(1), (2)

非最小相位系统：(3), (4), (5), (6), (7)

**A5-4** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+8)(as+1)}{s(0.1s+1)(0.25s+1)(bs+1)}$$

其伯德图如图 5-20 所示。试依据图确定  $K$ ,  $a$  和  $b$  的数值。

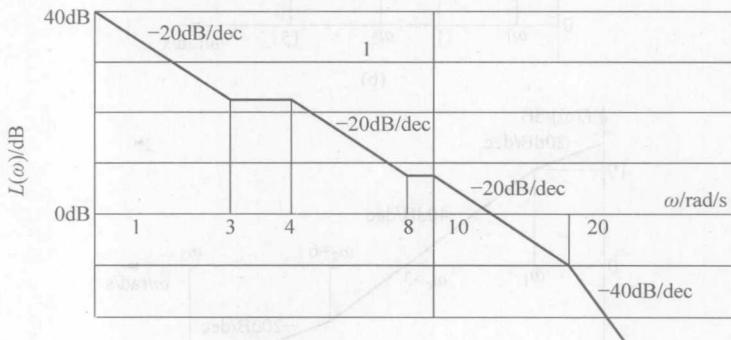


图 5-20 题 A5-4 伯德图

解 由图可知

$$1/a = 3, \quad a = 1/3; \quad 1/b = 20, \quad b = 1/20$$

将原式化为

$$G(s) = \frac{8K\left(\frac{1}{8}s+1\right)(as+1)}{s(0.1s+1)(0.25s+1)(bs+1)}$$

$$20\lg 8K = 40, \quad 8K = 100, \quad K = 12.5$$

**A5-5** 已知图 5-21 诸最小相位系统的伯德图,求:

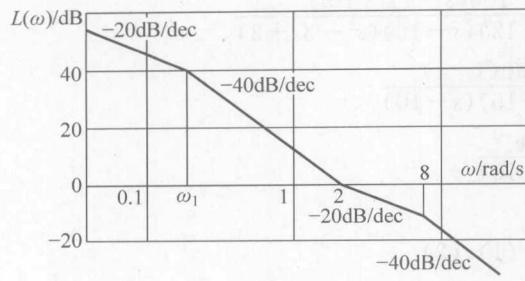
(1) 系统的传递函数;

(2) 系统的开环增益;

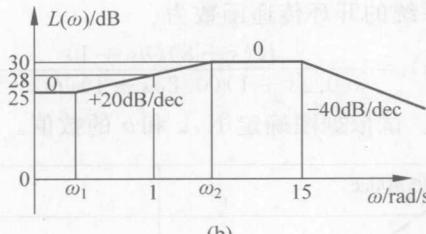
(3) 图中未标明数值的角频率;

(4) 系统的误差系数  $K_p, K_v, K_a$ 。

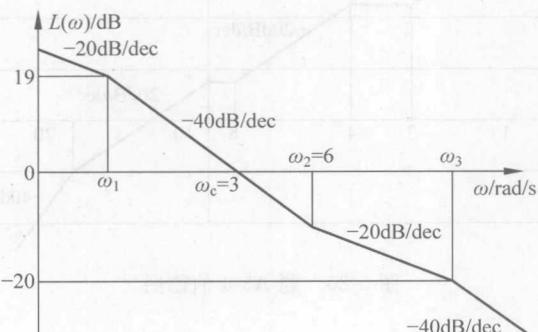
$$\text{解 } ① G(s) = \frac{K\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)(0.125s+1)}$$



(a)



(b)



(c)

图 5-21 题 A5-5 伯德图

$$\frac{L(2)-L(\omega_1)}{\lg 2 - \lg \omega_1} = -40, \quad \omega_1 = 0.2$$

$$20\lg K/\omega_1 = 40, \quad K = 20$$

$$G(s) = \frac{20 \left( \frac{1}{2}s + 1 \right)}{s(5s+1)(0.125s+1)} = \frac{16(s+2)}{s(s+0.2)(s+8)}$$

开环增益为 20,  $K_p$  = 无穷大,  $K_v = 20$ ,  $K_a = 0$ 。

$$\textcircled{2} G(s) = \frac{K \left( \frac{1}{\omega_1} s + 1 \right)}{\left( \frac{1}{\omega_2} s + 1 \right) \left( \frac{1}{15} s + 1 \right)^2}$$

$$20\lg K = 25, \quad K = 17.78$$

$$\frac{L(1)-L(\omega_1)}{\lg 1 - \lg \omega_1} = 20, \quad \omega_1 = 0.71$$

$$\frac{L(\omega_2) - L(1)}{\lg \omega_2 - \lg 1} = 20, \quad \omega_2 = 1.26$$

$$K_p = 17.78, \quad K_v = 0, \quad K_a = 0, \quad \omega_3 = 15$$

$$③ G(s) = \frac{K \left( \frac{1}{\omega_2} + 1 \right)}{s \left( \frac{1}{\omega_1} s + 1 \right) \left( \frac{1}{\omega_3} s + 1 \right)}$$

解法 1：

$$\frac{L(3) - L(\omega_1)}{\lg 3 - \lg \omega_1} = -40, \quad \omega_1 = 1$$

$$20 \lg K / \omega_1 = 19, \quad K = 8.9$$

$$\frac{L(\omega_2) - L(\omega_c)}{\lg \omega_2 - \lg \omega_c} = -40, \quad L(\omega_2) = -40 \lg 2$$

$$\frac{L(\omega_3) - L(\omega_2)}{\lg \omega_3 - \lg \omega_2} = -20, \quad \omega_3 = 15.$$

解法 2：

据图有

$$\begin{cases} 20 \lg \frac{K}{\omega_1} = 19 \\ 20 \lg \frac{K}{\omega_c} = 0 \\ 20 \lg \frac{K}{\omega_2} = -20 \\ 20 \lg \frac{K}{\omega_3} = -40 \end{cases}$$

其中  $\omega_c = 3, \omega_2 = 6$ ; 解此方程组得到  $\begin{cases} K = 8.96 \\ \omega_1 = 1.01 \\ \omega_3 = 14.93 \end{cases}$

$$K_p = \text{无穷大}, \quad K_v = 8.9, \quad K_a = 0$$

**A5-6** 绘制题 A5-1 各系统的尼科尔斯图。

解 绘制题 A5-1 各系统的尼科尔斯图。

(1) 题 A5-1(1)尼科尔斯图如图 5-22 所示。

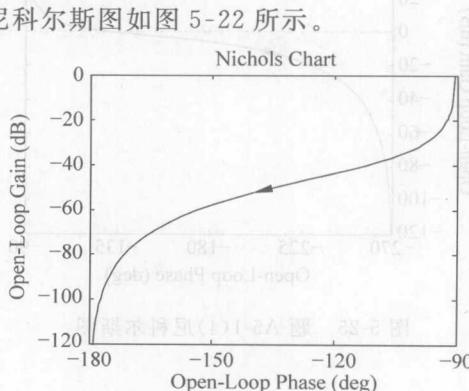


图 5-22 题 A5-1(1)尼科尔斯图

(2) 题 A5-1(2)尼科尔斯图如图 5-23 所示。

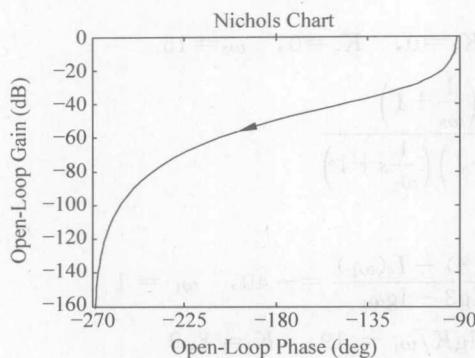


图 5-23 题 A5-1(2)尼科尔斯图

(3) 题 A5-1(3)尼科尔斯图如图 5-24 所示。

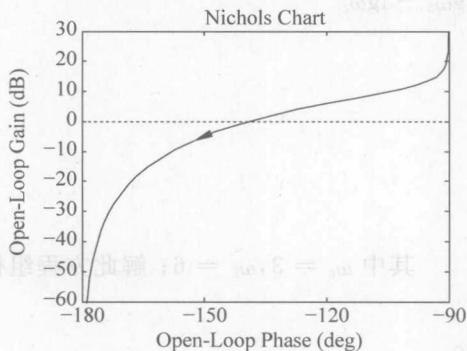


图 5-24 题 A5-1(3)尼科尔斯图

(4) 题 A5-1(4)尼科尔斯图如图 5-25 所示。

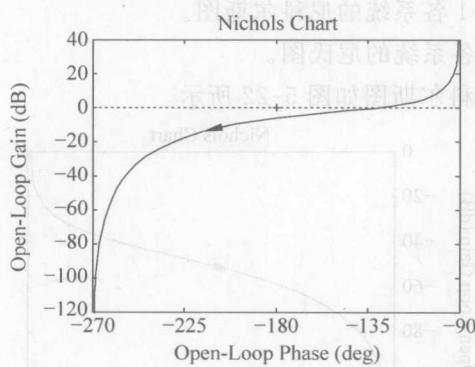


图 5-25 题 A5-1(4)尼科尔斯图

(5) 题 A5-1(5)尼科尔斯图如图 5-26 所示。

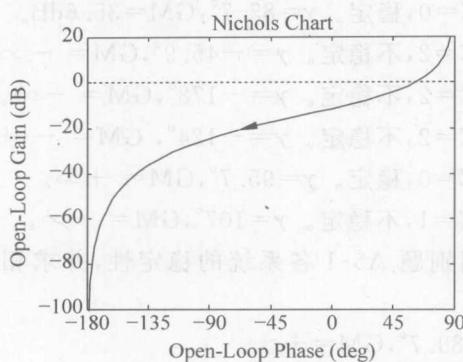


图 5-26 题 A5-1(5)尼科尔斯图

(6) 题 A5-1(6)尼科尔斯图如图 5-27 所示。

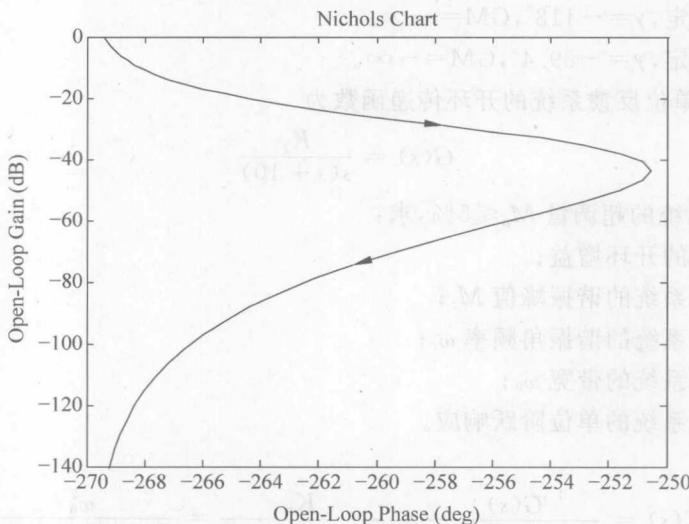


图 5-27 题 A5-1(6)尼科尔斯图

**A5-7** 用伯德图法判别题 A5-1 各系统的稳定性,并求相位裕度  $\gamma$  和增益裕度 GM。

解 用伯德图法判别题 A5-1 各系统的稳定性。

- (1) 穿越数为 0,  $P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=89.7^\circ, GM=\infty$ 。
- (2) 穿越数为 0,  $P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=89.1^\circ, GM=49.6\text{ dB}$ 。
- (3) 穿越数为 0,  $P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=40.7^\circ, GM=\infty$ 。
- (4) 穿越数为 0,  $P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=50.3^\circ, GM=6.02\text{ dB}$ 。
- (5) 穿越数为 0.5,  $P=0, Z=1$ , 不稳定。 $\gamma=-118^\circ, GM=\infty$ 。
- (6) 穿越数为 0.5,  $P=1, Z=2$ , 不稳定。 $\gamma=-89.4^\circ, GM=\infty$ 。

**A5-8** 用奈氏判据判别题 A5-2 各系统的稳定性,并求相位裕度  $\gamma$  和增益裕度 GM。

解 (1)  $N=0, P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=+\infty, GM=+\infty$ 。

(2)  $N=0, P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=85.7^\circ, GM=35.6\text{dB}$ 。

(3)  $N=2, P=0, Z=2$ , 不稳定。 $\gamma=-45.9^\circ, GM=-\infty$ 。

(4)  $N=2, P=0, Z=2$ , 不稳定。 $\gamma=-178^\circ, GM=-\infty$ 。

(5)  $N=1, P=1, Z=2$ , 不稳定。 $\gamma=-124^\circ, GM=-\infty$ 。

(6)  $N=0, P=0, Z=0$ , 稳定。 $\gamma=95.7^\circ, GM=+\infty$ 。

(7)  $N=1, P=0, Z=1$ , 不稳定。 $\gamma=107^\circ, GM=-\infty$ 。

**A5-9** 用尼氏图判别题 A5-1 各系统的稳定性，并求相位裕度  $\gamma$  和增益裕度 G. M.

解 (1) 稳定,  $\gamma=89.7^\circ, GM=+\infty$ 。

(2) 稳定,  $\gamma=89.1^\circ, GM=49.6\text{dB}$ 。

(3) 稳定,  $\gamma=40.7^\circ, GM=+\infty$ 。

(4) 稳定,  $\gamma=50.3^\circ, GM=6.02\text{dB}$ 。

(5) 不稳定,  $\gamma=-118^\circ, GM=-\infty$ 。

(6) 不稳定,  $\gamma=-89.4^\circ, GM=-\infty$ 。

**A5-10** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+10)}$$

若要求闭环系统的超调量  $M_p \leq 5\%$ , 求:

- (1) 系统的开环增益;
- (2) 闭环系统的谐振峰值  $M_r$ ;
- (3) 闭环系统的谐振角频率  $\omega_r$ ;
- (4) 闭环系统的带宽  $\omega_b$ ;
- (5) 闭环系统的单位阶跃响应。

解

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K_r}{s^2 + 10s + K_r} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} < 5\%$ , 求得

$$\zeta > 0.69$$

由  $2\omega_n\zeta = 10$ , 求得

$$\omega_n = 7.25$$

开环根迹增益

$$K_r = \omega_n^2 = 52.5$$

开环增益

$$K = \frac{K_r}{10} = 5.25$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1, \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 1.585, \quad \text{带宽 } \omega_b = 7.43$$

单位阶跃响应曲线如图 5-28 所示。

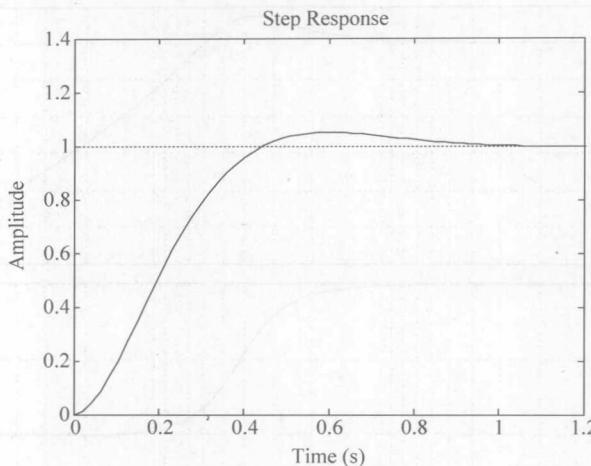


图 5-28 题 A5-10 系统的阶跃响应曲线

## B 深入题

**B5-1** 题 A2-7 的汽车悬浮系统(图 5-29),假定输入  $x_i(t) = \sin \omega t$ ,若  $m=1\text{kg}$ ,  $k=18\text{N/m}$ ,  $b=4\text{N} \cdot \text{s/m}$ ,求系统的频率响应。绘制系统的伯德图,并判断系统的稳定性。

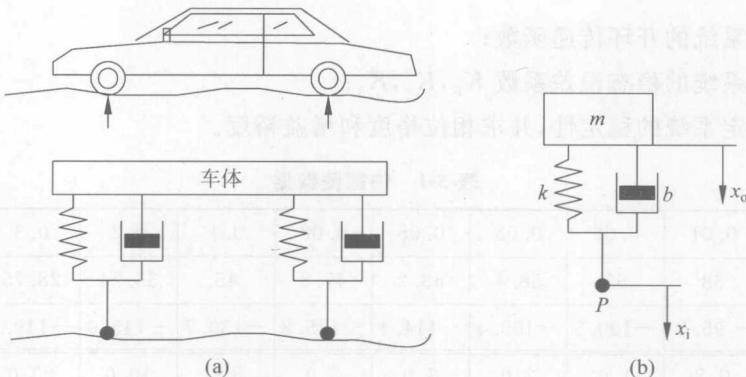


图 5-29 题 B5-1 汽车悬浮系统模型

解

$$k(x_i - x_o) + b(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = m \ddot{x}_o$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{4s + 18}{s^2 + 4s + 18}$$

用 MATLAB 绘系统伯德图如图 5-30 所示。

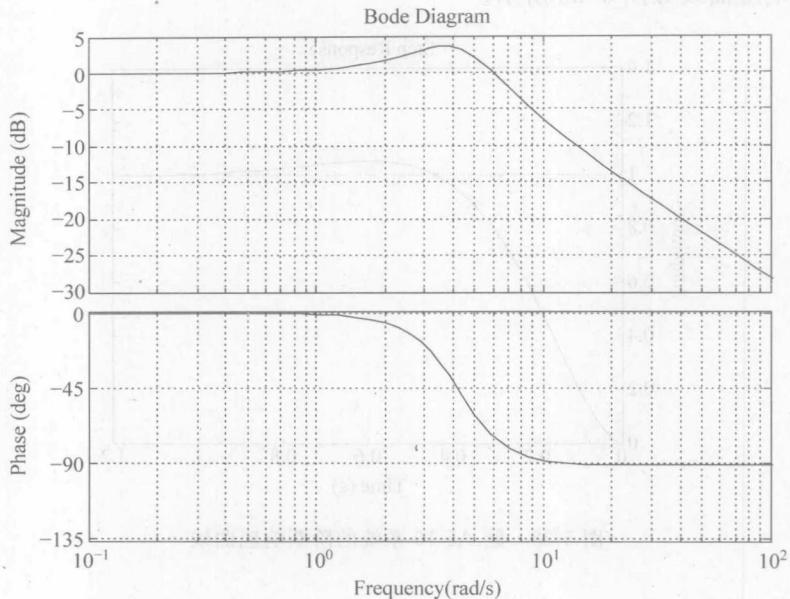


图 5-30 题 B5-1 伯德图

$$GM = \infty \quad \gamma = 105^\circ \quad \omega_c = 5 \text{ rad/s}$$

所以系统稳定。

**B5-2** 用实验方法测得某系统频率响应(对数幅频特性和相频特性)的数据如表 5-1。

- (1) 求系统的开环传递函数;
- (2) 求系统的稳态误差系数  $K_p, K_v, K_a$ ;
- (3) 判定系统的稳定性,并求相位裕度和增益裕度。

表 5-1 伯德图数据

$\omega/\text{rad/s}$	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.1	0.2	0.3	0.5
$L(\omega)/\text{dB}$	68	62	58.4	53.2	47.8	45	35.24	28.75	21.36
$\varphi(\omega)/^\circ$	-95.3	-100.5	-105.4	-114.4	-125.2	-130.7	-145.0	-149.1	-149.3
$\omega/\text{rad/s}$	0.8	1.0	2.0	3.0	5.0	8.0	10.0	20.0	30.0
$L(\omega)/\text{dB}$	13.6	10.6	1.94	-3.1	-17.1	-20	-34	-40	-48
$\varphi(\omega)/^\circ$	-145.5	-143.3	-139.3	-134.4	-151.5	-159.8	-163.3	-171.3	-174.1

提示: 对数幅频特性用渐近线近似时, 渐近线的斜率必须是  $-20 \text{ dB/dec}$  的整数倍( $0, 1, 2, \dots$ )。

解 (1) 通过描点法得到开环的 Bode 图如图 5-31 所示。首先, 根据相频的起始点, 可以知道系统有一个积分环节; 其次, 根据相频特性有上扬的趋势, 可以断

定系统分子有一个一阶微分环节；最后，相频曲线最终趋近于 $-180^\circ$ ，知道最终分母的一阶环节（包括积分环节）的个数比分子多二个。用折线连接这些点，这些折线的斜率，应该是 $-20\text{dB/dec}$ 的整数倍。应用最小二乘原理，尽量使得折线经过这些点，当不可能经过所有点时，使得总的偏差最小。因此系统的开环传递函数可以是

$$\frac{K(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

由图， $20\log \left| \frac{K}{0.01} \right| = 68$ ,  $K = 25$ ,  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1/3$ 。

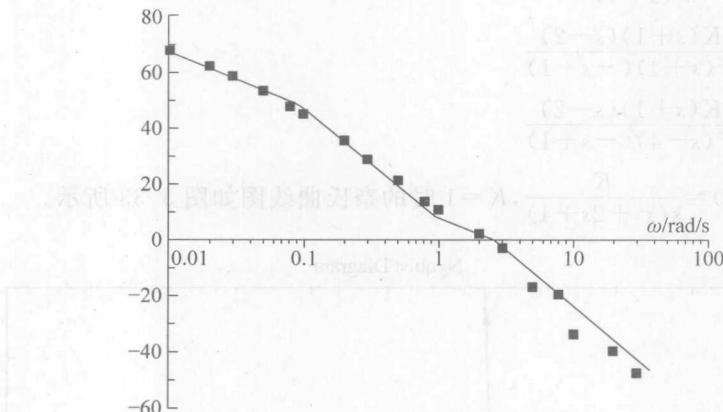


图 5-31 题 B5-2 幅频特性图

通常，在求出传递函数后，再根据求出的传递函数作相频（见图 5-32），检验误差。这个练习给出工程上求传递函数的频率特性方法。通常，如果系统的线性特征比较明显，这种方法的精度还是可以的。

渐近线的斜率必须是 $-20\text{dB/dec}$ 的整数倍( $0, 1, 2, \dots$ )。

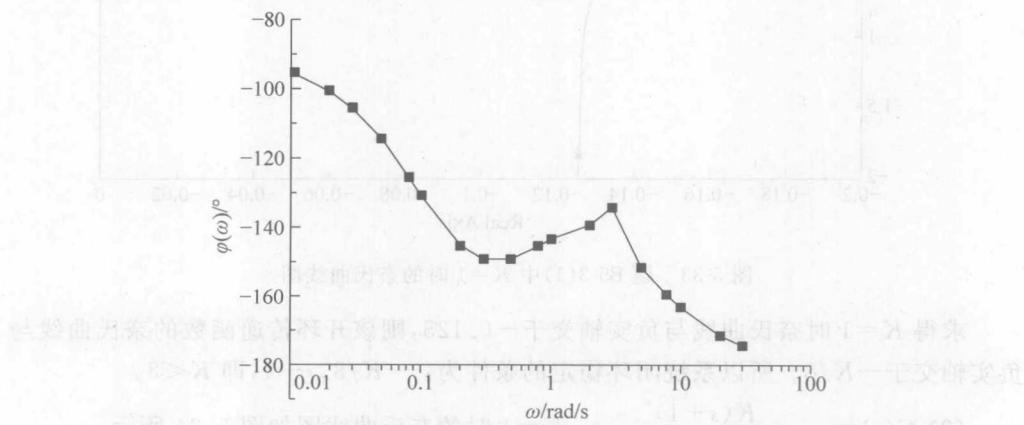


图 5-32 题 B5-2 相频特性图

(2) 系统是 I 型的, 因此  $K_p = \infty, K_v = K, K_a = 0$ 。

(3) 从图上读出,  $\gamma = 32^\circ, GM = \infty$ 。

**B5-3** 绘制下列系统开环传递函数的奈氏曲线, 并用奈氏曲线求使闭环系统稳定的  $K$  值范围。

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 4)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s^2 + 2s + 4)(s+4)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)}$$

$$(4) G(s) = \frac{K(s+1)(s-2)}{s^2(s+4)(-s+1)}$$

$$(5) G(s) = \frac{K(s+1)(s-2)}{s^2(s-4)(-s+1)}$$

解 (1)  $G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 4)}$ ,  $K=1$  时的奈氏曲线图如图 5-33 所示。

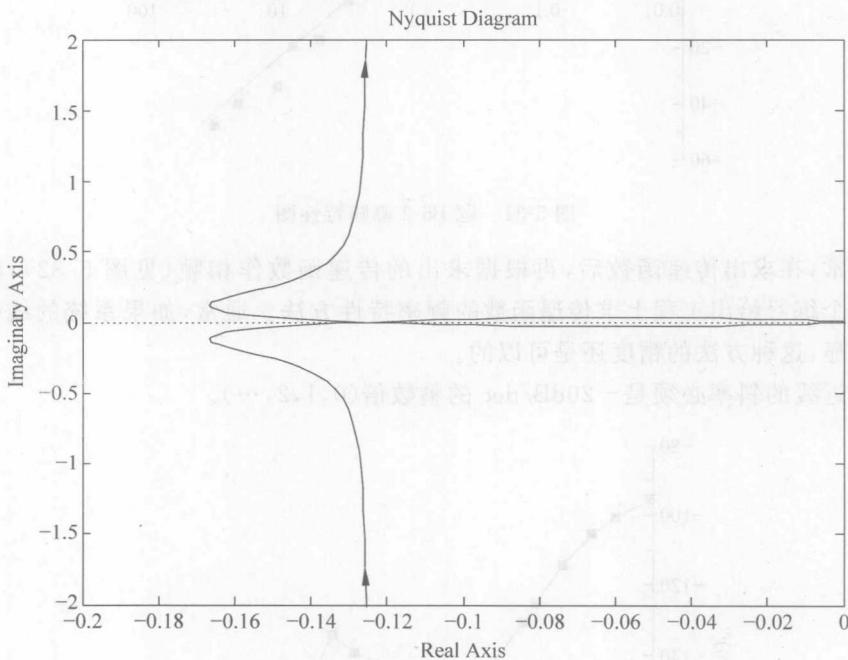
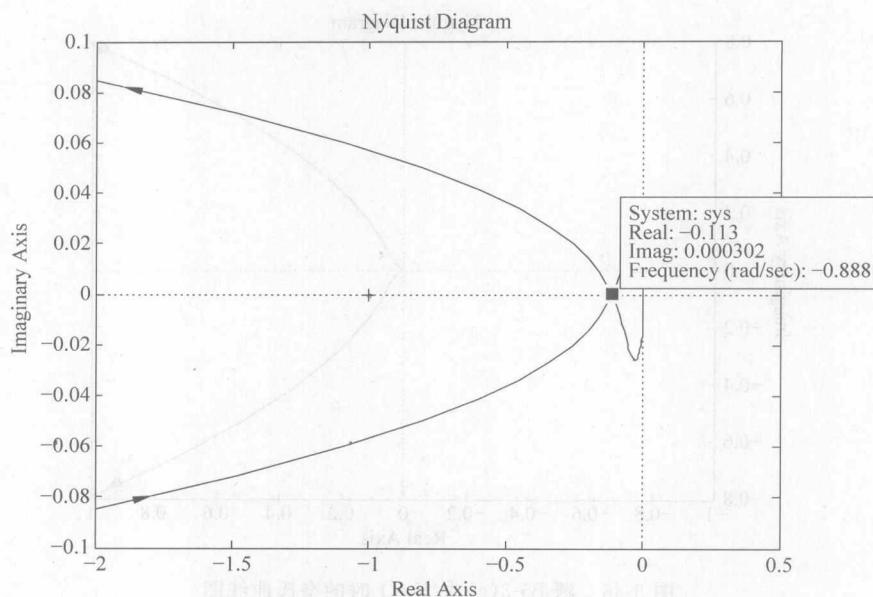


图 5-33 题 B5-3(1) 中  $K=1$  时的奈氏曲线图

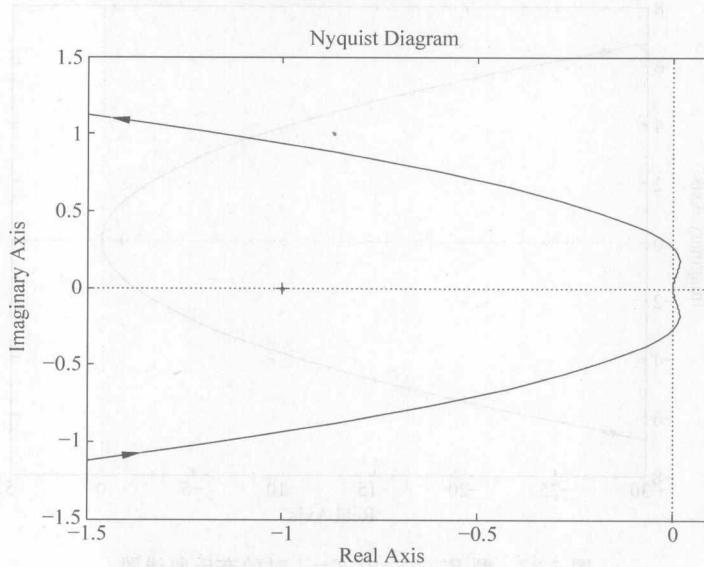
求得  $K=1$  时奈氏曲线与负实轴交于  $-0.125$ , 则该开环传递函数的奈氏曲线与负实轴交于  $-K/8$ 。所以系统闭环稳定的条件为:  $-K/8 > -1$ , 即  $K < 8$ 。

$$(2) G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s^2 + 2s + 4)(s+4)}, K=1$$
 时的奈氏曲线图如图 5-34 所示。

曲线与实轴交点为  $-0.1113K$ , 当  $-0.1113K > -1$  即  $K < 8.85$  时, 系统稳定。

图 5-34 题 B5-3(2) 中  $K=1$  时的奈氏曲线图

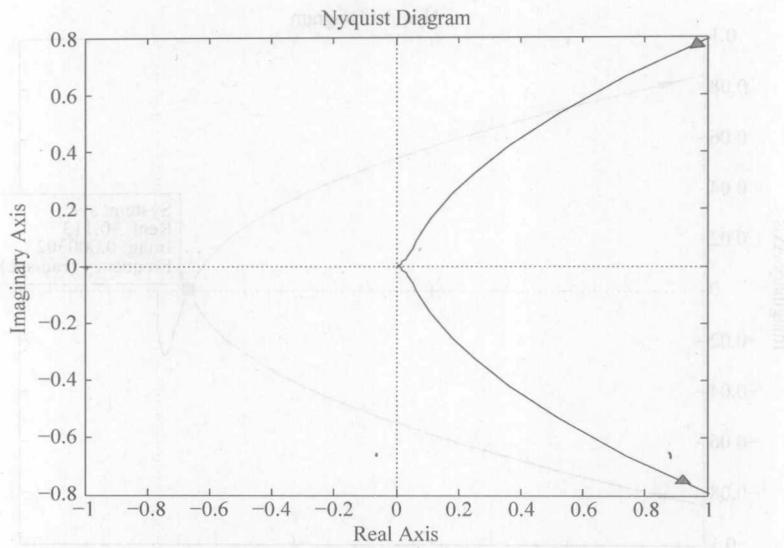
(3)  $G(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)}$ ,  $K=1$  时的奈氏曲线图如图 5-35 所示。

图 5-35 题 B5-3(3) 中  $K=1$  时的奈氏曲线图

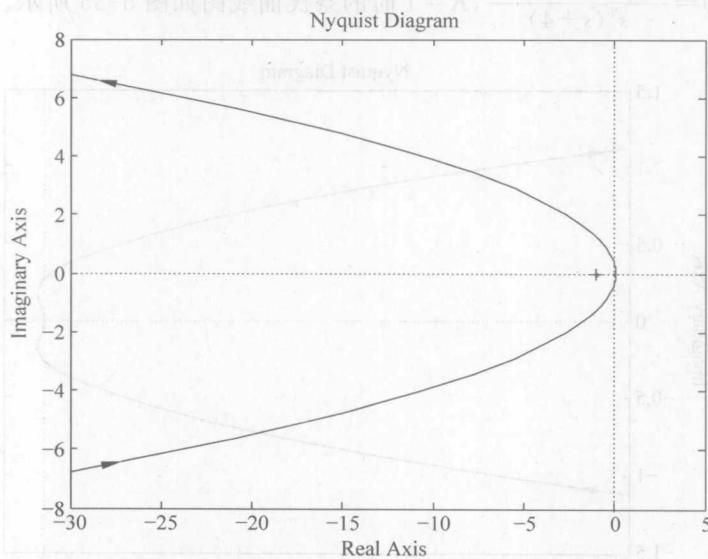
$N_{-1}=0$ ,  $P_{-1}=0$ ,  $K$  取任何值都稳定(奈氏曲线不包围  $-1+j0$  点)。

(4)  $G(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)(-s+1)}$ ,  $K=1$  时的奈氏曲线图如图 5-36 所示。

$N_{-1}=1$ ,  $P_{-1}=1$ ,  $K$  取任何值都不稳定。

图 5-36 题 B5-3(4) 中  $K=1$  时的奈氏曲线图

(5)  $G(s) = \frac{K(s+1)(s-2)}{s^2(s-4)(-s+1)}$ ,  $K=1$  时的奈氏曲线图如图 5-37 所示。

图 5-37 题 B5-3(5) 中  $K=1$  时的奈氏曲线图

$N_{-1}=0$ ,  $P_{-1}=2$ ,  $K$  取任何值系统都不稳定。

**B5-4** 设控制系统如图 5-38(a)所示,  $G(s)$  和  $G_c(s)$  都是最小相位系统。若已知  $G(s)$  和  $G_c(s)G(s)$  的对数幅频特性(如图 5-38(b))。试求:

(1)  $G_c(s)$  的传递函数;

- (2)  $G(s)$  和  $G_c(s)G(s)$  的稳态误差系数  $K_p, K_v, K_a$ ；  
 (3)  $G(s)$  和  $G_c(s)G(s)$  的相位裕度；  
 (4) 比较串入  $G_c(s)$  前后闭环系统的超调量。

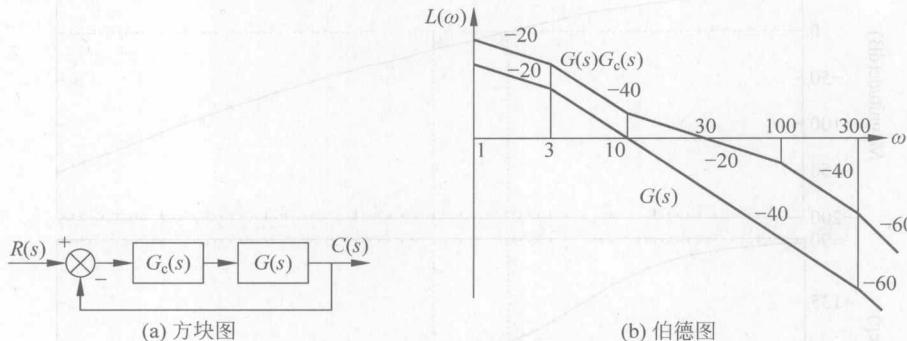


图 5-38 题 B5-4 的系统的方块图与伯德图

解 先求  $G(s)G_c(s)$

$$G(s)G_c(s) = \frac{KK_c\left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{s\left(\frac{1}{3}s + 1\right)\left(\frac{1}{100}s + 1\right)\left(\frac{1}{300}s + 1\right)}$$

$$20\lg\left(\frac{30}{10}\right) + 40\lg\left(\frac{10}{3}\right) + 20\lg\left(\frac{3}{1}\right) = 20\lg KK_c$$

$$KK_c = 100$$

再求得  $G(s)$

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\frac{1}{3}s + 1\right)\left(\frac{1}{300}s + 1\right)}$$

$$40\lg\left(\frac{10}{3}\right) + 20\lg\left(\frac{3}{1}\right) = 20\lg K, \quad K = \frac{100}{3}$$

(1)  $G_c(s)$  的传递函数

$$G_c(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{G(s)} = \frac{3(0.1s + 1)}{(0.01s + 1)}$$

(2)  $G(s)$  和  $G_c(s)G(s)$  的稳态误差系数  $K_p, K_v, K_a$ 。对于  $G(s)$

$$K_p = \infty, \quad K_v = \frac{100}{3}, \quad K_a = 0$$

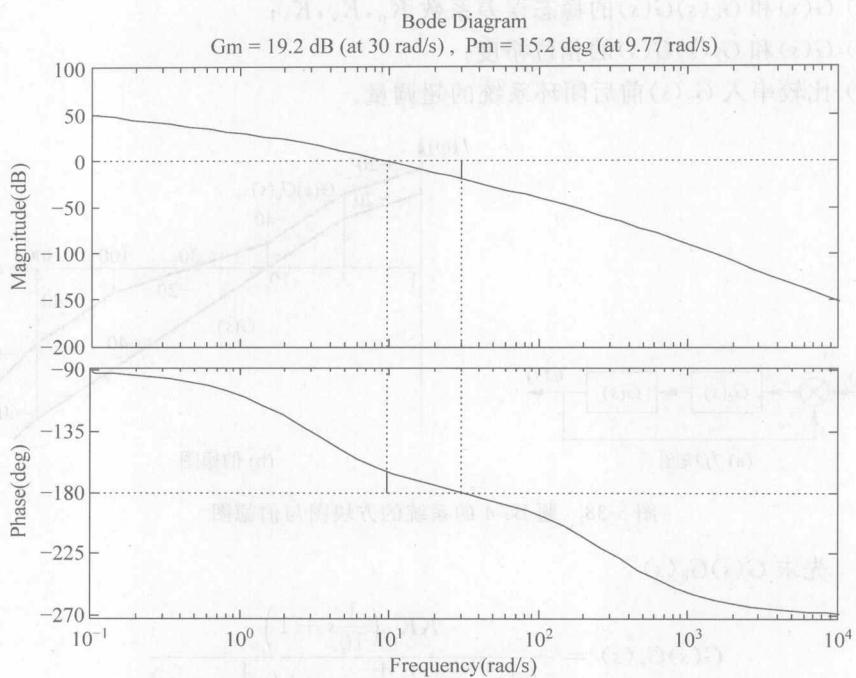
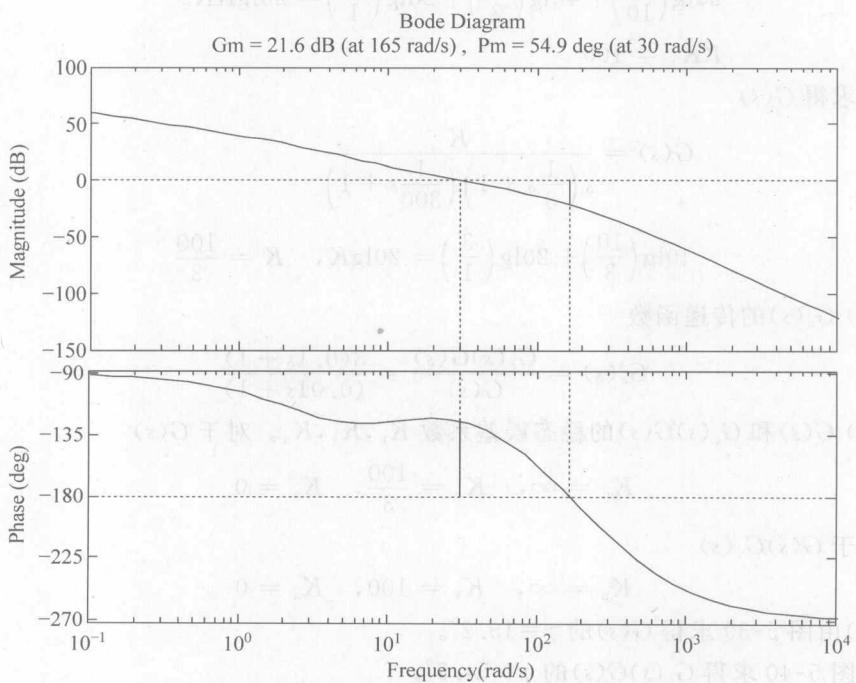
对于  $G(s)G_c(s)$

$$K_p = \infty, \quad K_v = 100, \quad K_a = 0$$

(3)由图 5-39 求得  $G(s)$  的  $\gamma = 15.2^\circ$ 。

由图 5-40 求得  $G_c(s)G(s)$  的  $\gamma = 54.9^\circ$ 。

(4) 串入  $G_c(s)$  前后闭环系统单位阶跃响应曲线见图 5-41, 串入  $G_c(s)$  后闭环系统的超调量减小。

图 5-39 题 B5-4 中  $G(s)$  的伯德图图 5-40 题 B5-4 中  $G_c(s)G(s)$  的伯德图

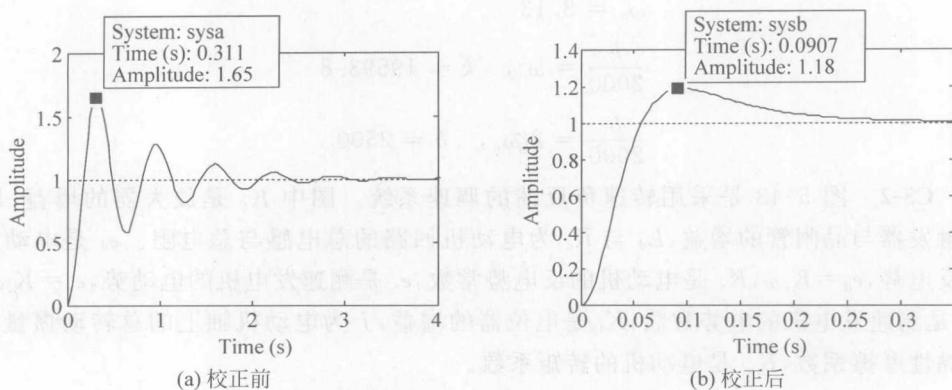


图 5-41 题 B5-4 单位阶跃响应曲线

## C 实践题

**C5-1** 题 B5-1 的汽车悬浮系统,用实验方法测得其伯德图如图 5-42 所示。若已知  $m=2000\text{kg}$ ,试求参数  $b$  和  $k$ 。

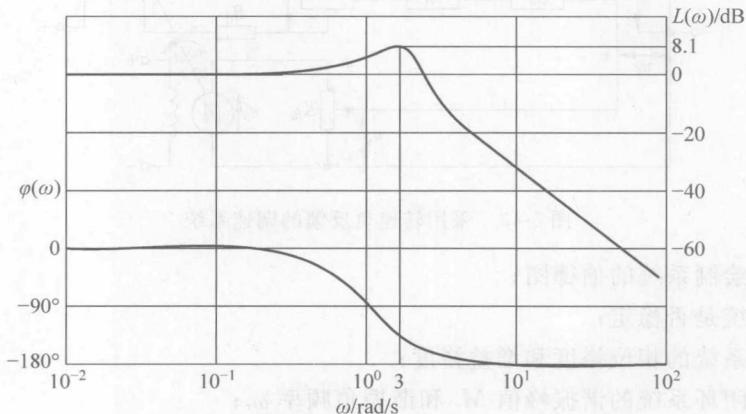


图 5-42 题 C5-1 伯德图

**解** 由图可知,由题 B5-1 得到汽车悬浮系统的数学模型为

$$k(x_i - x_o) + b(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = m \ddot{x}_o$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} = \frac{bs+k}{2000s^2+bs+k}$$

$$20\lg |G(j\omega_r)| = 8.1 \text{ dB}$$

$$20\log M_r = 20\log(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})^{-1} = 8.1 \text{ dB}$$

$$\zeta = 0.2$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 3$$

$$\omega_n = 3.13$$

$$\frac{k}{2000} = \omega_n^2, \quad k = 19593.8$$

$$\frac{b}{2000} = 2\zeta\omega_n, \quad b = 2500$$

**C5-2** 图 5-43 是采用转速负反馈的调速系统。图中  $K_p$  是放大器的增益,  $K_s$  是触发器与晶闸管的增益,  $L_d$  与  $R_d$  为电动机回路的总电感与总电阻。 $e_d$  是电动机的反电势,  $e_d = K_e \omega$ ,  $K_e$  是电动机的反电势常数,  $e_s$  是测速发电机的电动势,  $e_s = K_f \omega$ ,  $K_f$  是测速发电机的电势常数,  $K_{fs}$  是电位器的增益,  $J$  为电动机轴上的总转动惯量,  $b$  是黏性摩擦系数,  $K_m$  是电动机的转矩系数。

$$J = 11 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad b = 0.27 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$$

$$K_m = 0.84 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A} \quad K_e = 0.84 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad}$$

$$R_d = 1.36 \Omega \quad L_d = 3.6 \text{ mH}$$

$$K_p = 10 \quad K_s = 5 \quad K_f = 0.2 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad} \quad K_{fs} = 0.1$$

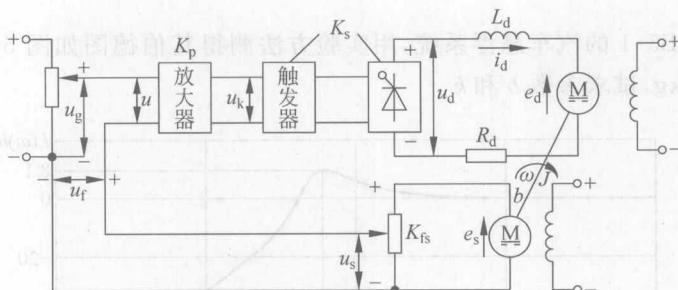


图 5-43 采用转速负反馈的调速系统

- (1) 试绘制系统的伯德图;
- (2) 系统是否稳定;
- (3) 求系统的相位裕度和增益裕度;
- (4) 求闭环系统的谐振峰值  $M_r$  和谐振角频率  $\omega_r$ ;
- (5) 求系统的主导极点及系统的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$ ;
- (6) 求系统的单位阶跃响应及系统的超调量  $M_p$  和按 2% 误差准则的调整时间  $t_s$ 。

解 系统的结构图可表示为图 5-44。其中：

电动机传递函数

$$G_0(s) = \frac{\Omega(s)}{U_d(s)} = \frac{K_m}{L_d J s^2 + (R_d J + L_d b)s + (R_d b + K_e K_m)}$$

$$= \frac{0.84}{0.0000396 s^2 + 0.015932 s + 1.0728}$$

前向传递函数

$$G(s) = K_p K_s G_0(s) = \frac{42}{0.0000396 s^2 + 0.015932 s + 1.0728}$$

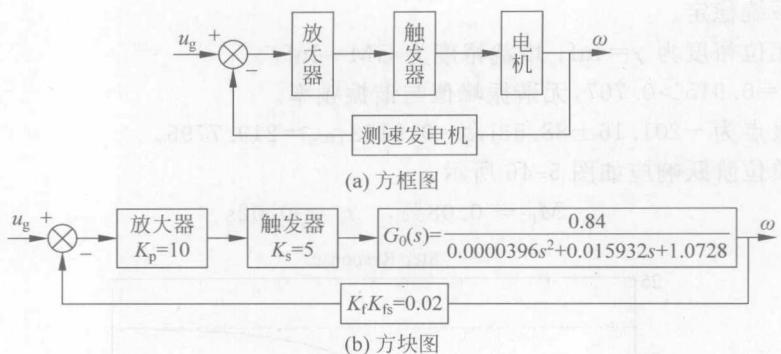


图 5-44 题 C5-1 系统原理方框图与方块图

反馈传递函数

$$H(s) = K_f K_{fs} = 0.02$$

所以,开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{0.84}{0.0000396s^2 + 0.015932s + 1.0728}$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{42}{0.0000396s^2 + 0.015932s + 1.9128}$$

(1) 开环伯德图如图 5-45 所示。

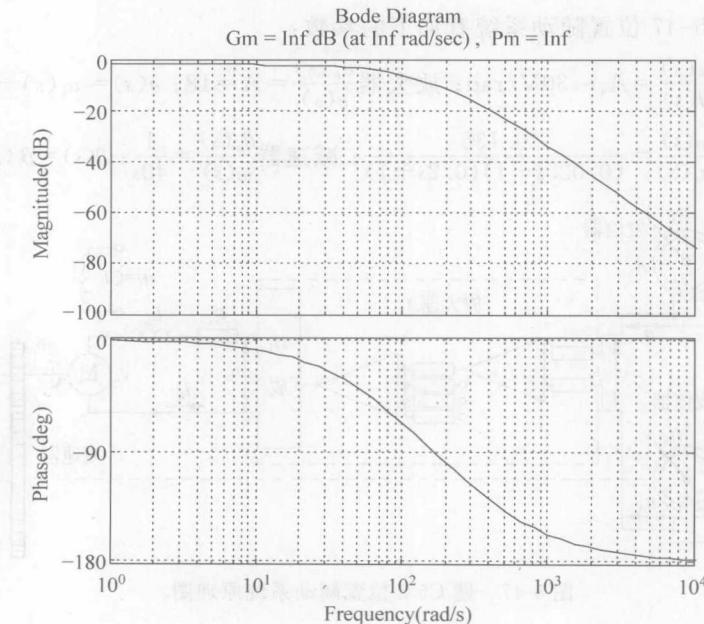


图 5-45 题 C5-2 系统伯德图

(2) 系统稳定。

(3) 相位裕度为  $\gamma = \text{Inf}$ ; 增益裕度为  $GM = \text{Inf}$ 。

(4)  $\zeta = 0.915 > 0.707$ , 无谐振峰值与谐振频率。

(5) 极点为  $-201.16 \pm 88.53j$ ,  $\zeta = 0.9153$ ,  $\omega_n = 219.7795$ 。

(6) 单位阶跃响应如图 5-46 所示。

$$M_p = 0.08\%, \quad t_s = 0.02s$$

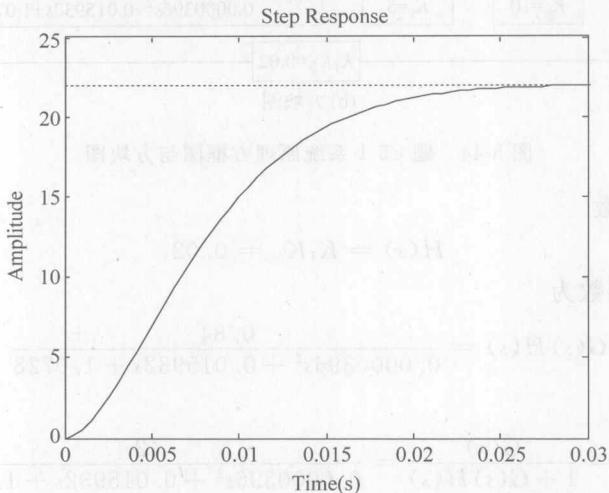


图 5-46 题 C5-2 系统阶跃响应图

C5-3 图 5-47 位置随动系统有如下的参数:

收发信器  $\frac{u(s)}{\theta(s)} = A_s = 30V/\text{rad}$ ; 放大器  $\frac{u_a(s)}{e(s)} = A = 18$ ;  $e(s) = u_i(s) - u_o(s)$ ;

执行电机  $\frac{\omega(s)}{u_a(s)} = \frac{0.135}{(0.025s+1)(0.2s+1)}$ ; 减速器  $\frac{\theta_o(s)}{\omega(s)} = \frac{1}{40s}$ ;  $\theta(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$ 。

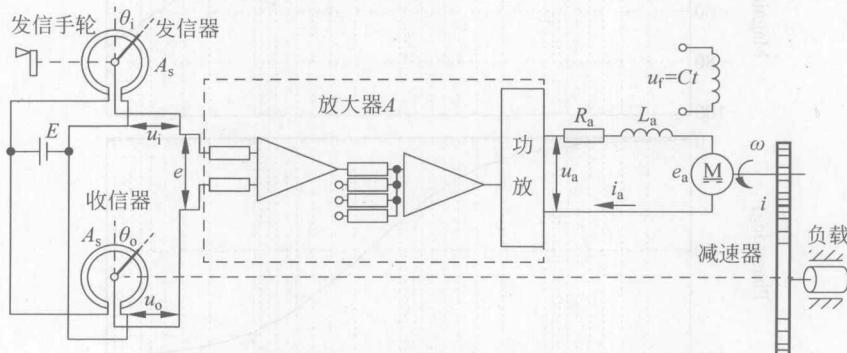


图 5-47 题 C5-3 位置随动系统原理图

(1) 求系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$ ;

(2) 重复 C5-2 题(1)~(6)的计算。

解 系统的方框图和方块图如图 5-48 所示。

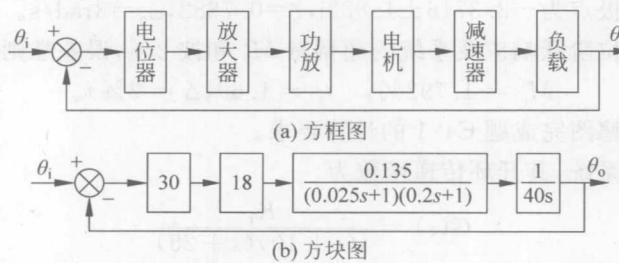


图 5-48 题 C5-3 系统原理方框图和方块图

(1) 求得系统的闭环传递函数

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{1.8225}{s(0.025s+1)(0.2s+1)}$$

(2) 重复 C5-2 题(1)~(6)的计算。

试绘制系统的伯德图,如图 5-49 所示。

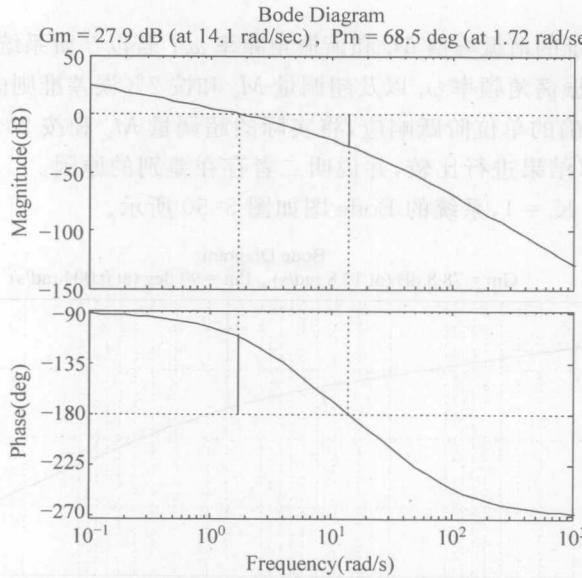


图 5-49 题 C5-3 系统伯德图

系统是否稳定?

由图可知,相位裕度大于零,系统稳定。

$$\zeta = 0.7882, \quad \omega_n = 3 \text{ rad/s}$$

求系统的相位裕度和增益裕度:

相位裕度为  $68.5^\circ$ , 增益裕度为  $27.9 \text{ dB}$ 。

求闭环系统的谐振峰值  $M_r$  和谐振角频率  $\omega_r$ :

$\zeta > 0.707$ , 不会有谐振。

求系统的主导极点及系统的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$ :

系统的主导极点为  $-2.3716 \pm 1.852j$ ,  $\zeta = 0.7882$ ,  $\omega_n = 3\text{rad/s}$ 。

求系统的单位阶跃响应及系统的超调量  $M_p$  和按 2%, 误差准则的调整时间  $t_s$ :

$$M_p = 1.792\%, \quad t_s = 1.69(\Delta = 2\%)。$$

#### C5-4 用伯德图完成题 C4-1 的计算要求。

原单位反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+10)(s+25)}$$

(1) 绘制系统的伯德图。若原闭环系统的超调量  $M_p = 60\%$ , 求原系统主导极点的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  以及根轨迹增益  $K_r$  和在单位速度输入  $r(t) = tu(t)$  时, 系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。

(2) 引入超前校正装置

$$G_c(s) = \frac{(s+3)}{(s+3.93)}$$

求引入超前校正装置后系统的伯德图; 判定系统的稳定性并求系统的相位裕度和增益裕度。

(3) 求闭环系统的谐振峰值  $M_r$  和谐振角频率  $\omega_r$ ; 若以二阶系统来近似, 求系统的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡角频率  $\omega_n$  以及超调量  $M_p$  和按 2% 误差准则的调整时间  $t_s$ 。

(4) 求系统准确的单位阶跃响应, 将实际的超调量  $M_p$  和按 2% 误差准则的调整时间  $t_s$  与前面计算结果进行比较, 并说明二者存在差别的原因。

解 (1) 假设  $K_r = 1$ , 系统的 Bode 图如图 5-50 所示。

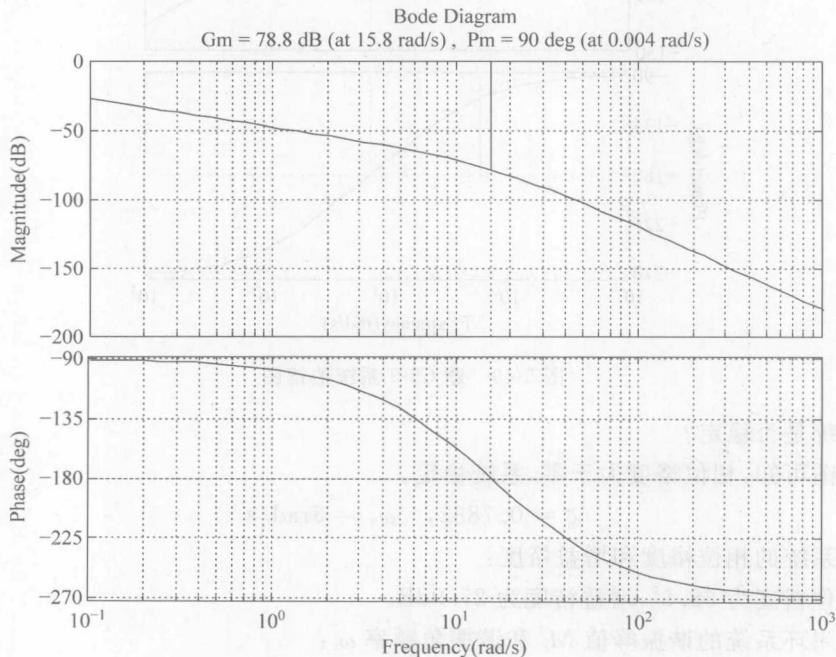


图 5-50 题 C5-4 系统校正前的伯德图

因为  $M_p = 60\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$ , 求得  $\xi = 0.16$

$$\theta = \arccos \xi = 80.8^\circ$$

利用 MATLAB 做出系统的根轨迹图如图 5-51。

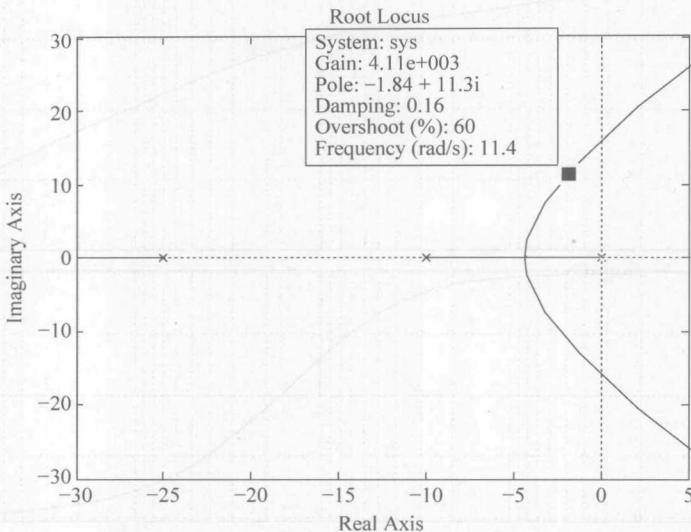


图 5-51 题 C5-4 系统校正前的根轨迹图

根据阻尼比的要求 ( $\xi = 0.16$ ), 从图中可以得到闭环主导极点为  $-1.84 \pm 11.3j$ 。

$$\omega_n = 11.4, K_r = 4110$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}, \text{ 其中 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = \frac{4110}{250} = 16.44$$

$$e_{ss} = \frac{1}{16.44} = 0.06$$

(2) 引入超前校正装置后系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{4110(s+3)}{s(s+10)(s+25)(s+3.93)}$$

伯德图(采用(1)中计算得到的  $K_r = 4110$ )如图 5-52 所示。

引入超前校正后, 系统稳定, 相位裕度为  $26.4^\circ$ , 增益裕度为  $7.69\text{dB}$ 。

(3) 系统的闭环频率特性如图 5-53 所示。

由闭环频率特性图中, 可求得  $M_r = 7.25\text{dB}$ ,  $\omega_r = 11.2\text{rad/s}$ 。

由  $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 7.25\text{dB}$ , 求得阻尼比  $\xi = 0.2$ , 再由  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$ , 求得

无阻尼振荡频率  $\omega_n = 11.74\text{rad/s}$ 。

求得超调量  $M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 52.68\%$ ,  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.7\text{s}$ 。

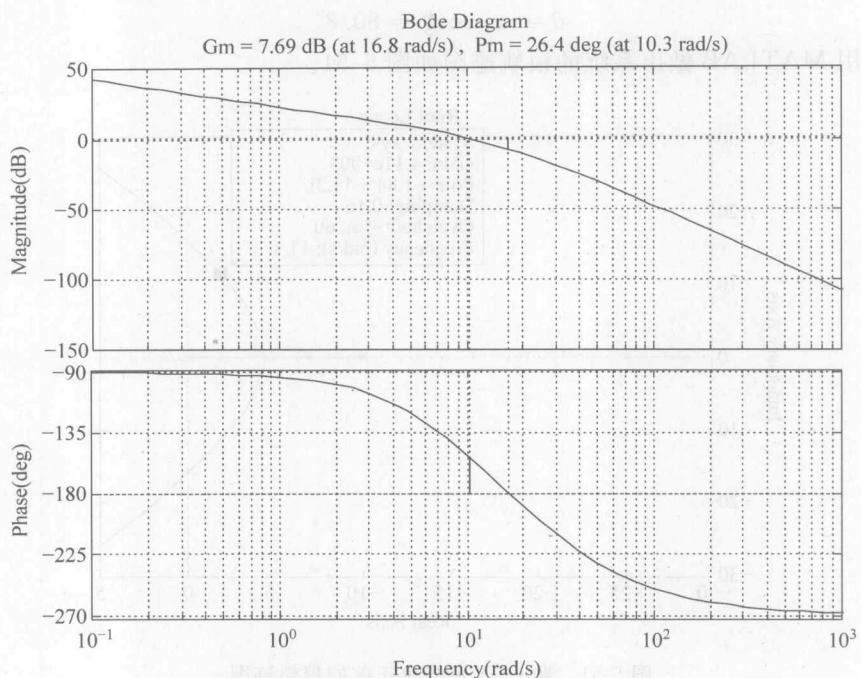


图 5-52 题 C5-4 系统校正后的伯德图

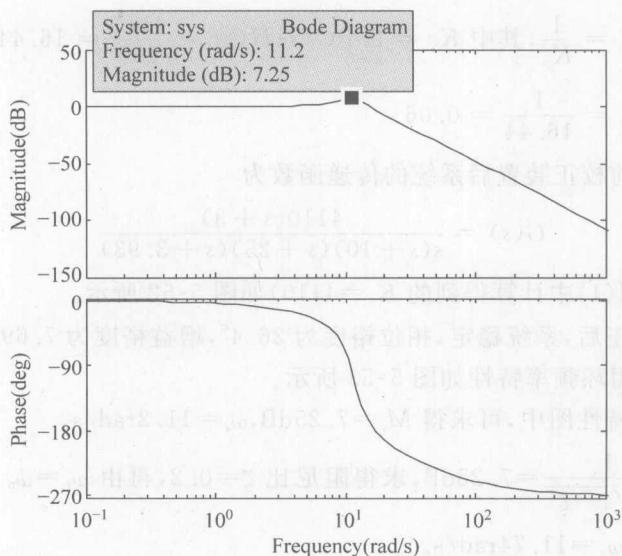


图 5-53 题 C5-4 系统校正后的闭环频率特性图

(4) 系统准确的单位阶跃响应如图 5-54 所示。

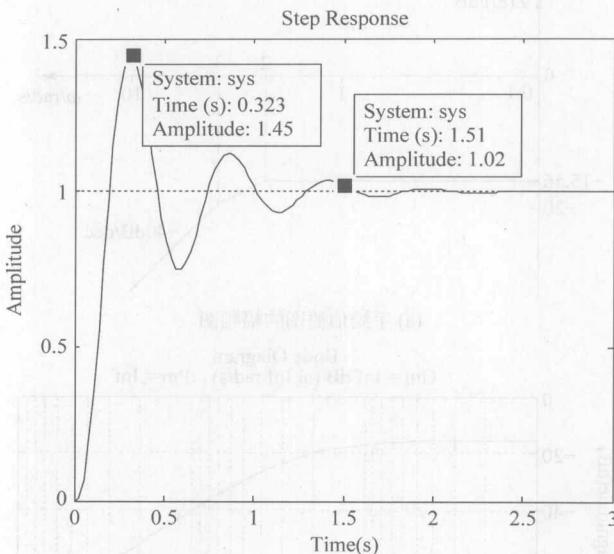


图 5-54 题 C5-4 校正后系统准确的单位阶跃响应曲线

超调量  $M_p = 45\%$ , 2% 的调整时间  $t_s = 1.51\text{s}$ , 与(3)的近似计算结果相近。产生的偏差主要是由于其他零极点的影响。

**C5-5** 用伯德图完成题 C4-2 的计算。原单位反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

- (1) 绘制系统的伯德图, 并求系统的相位裕度和增益裕度;
- (2) 求系统的稳态误差系数  $K_p$ ,  $K_v$  和  $K_a$ ;
- (3) 若希望将系统的稳态误差系数增大到原来的 10 倍, 引入滞后校正装置

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

校正装置的  $K_c$  应为多大?

- (4) 绘制校正后系统的伯德图, 并计算校正后系统的稳态误差系数;
- (5) 求校正后系统的相位裕度和增益裕度, 并比较校正前后的系统稳态性能。

**解** 原单位反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

- (1) 绘制系统的伯德图, 并求系统的相位裕度和增益裕度

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{6} \frac{1}{(s/2 + 1)(s/3 + 1)}$$

$$20\lg K = 20\lg(1/6) = -15.56\text{dB}$$

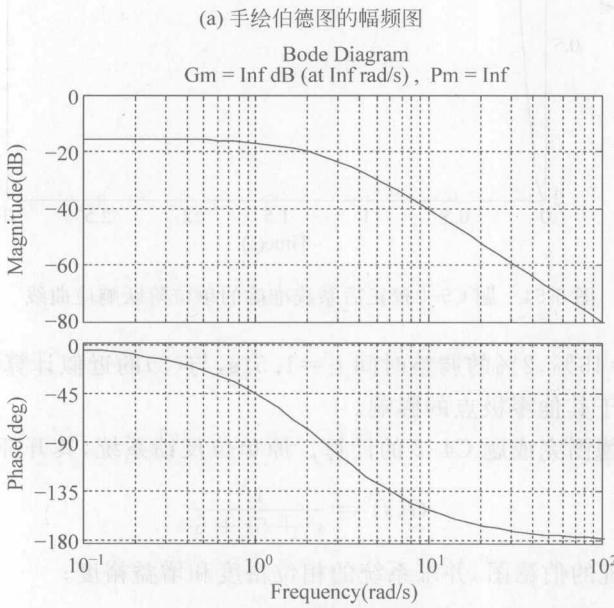
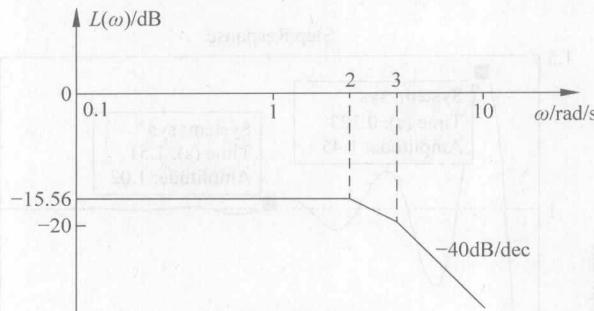


图 5-55 题 C5-5 系统的伯德图

由图 5-55 可看出, 相位裕度为无穷大, 增益裕度为无穷大。

(2) 求系统的稳态误差系数  $K_p, K_v$  和  $K_a$

$$K_p = 1/6, \quad K_v = 0, \quad K_a = 0$$

(3) 系统校正后的稳态误差  $K'_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_c(s+0.05)}{(s^2 + 5s + 6)(s+0.005)} = 10 \times \frac{K_c}{6}$ , 根据

题意要求  $K'_p = 10 \times K_p$  ( $K_p$  为原系统的稳态误差系数), 由(2)得到  $K_p = \frac{1}{6}$ , 求得

$$K_c = 1$$

$$(4) G'(s) = G(s)G_c(s) = \frac{10}{6} \frac{20s+1}{(s/2+1)(s/3+1)(200s+1)}$$

$$20\lg K = 20\lg(10/6) = 4.44 \text{ dB}$$

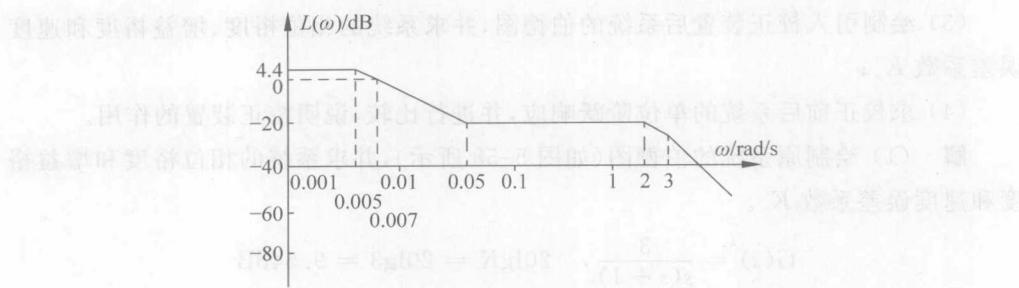


图 5-56 题 C5-5 校正后系统的幅频伯德图

校正后系统的幅频伯德图如图 5-56 所示。校正后,  $K_p = 5/3$ ,  $K_v = 0$ ,  $K_a = 0$ 。

(5) 校正后系统的伯德图如图 5-57 所示。

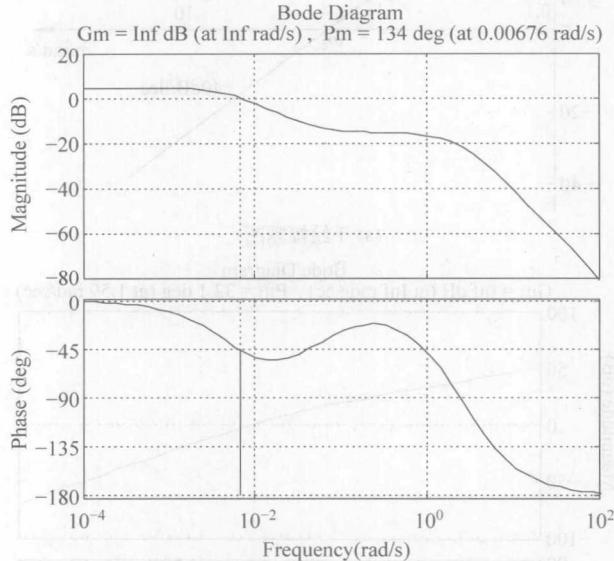


图 5-57 题 C5-5 校正后系统的伯德图

校正后, 相位裕度为  $134^\circ$ , 增益裕度为无穷大。校正后, 系统的稳态性能改善。

**C5-6** 用伯德图完成题 C4-3 的计算。原单位反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{3}{s(s+1)}$$

引入超前-滞后校正装置

$$G_c(s) = \frac{(s+1)(s+0.1)}{(s+1.25)(s+0.008)}$$

(1) 绘制原系统的伯德图, 并求系统的相位裕度、增益裕度和速度误差系数  $K_v$ ;

- (2) 求原系统的单位阶跃响应；  
 (3) 绘制引入校正装置后系统的伯德图，并求系统的相位裕度、增益裕度和速度误差系数  $K_v$ ；  
 (4) 求校正前后系统的单位阶跃响应，并进行比较，说明校正装置的作用。

解 (1) 绘制原系统的伯德图(如图 5-58 所示)，并求系统的相位裕度和增益裕度和速度误差系数  $K_v$ 。

$$G(s) = \frac{3}{s(s+1)}, \quad 20\lg K = 20\lg 3 = 9.54 \text{ dB}$$

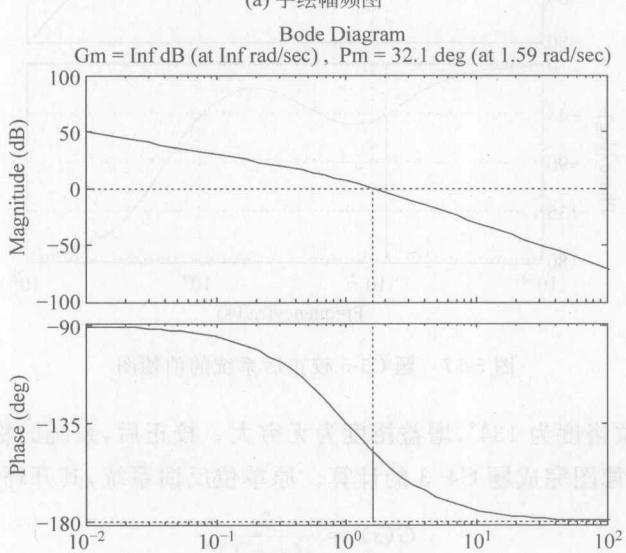
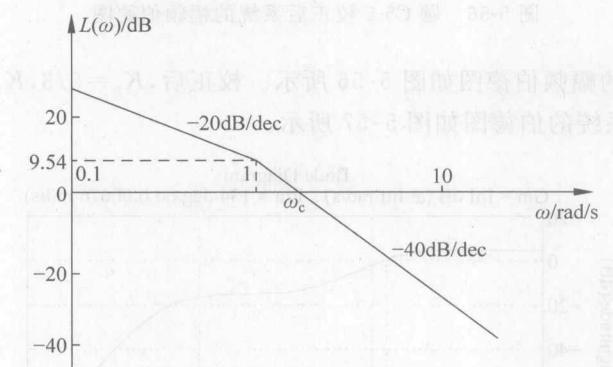


图 5-58 题 C5-6 校正前系统的伯德图

相位裕度为 32.1dB, 增益裕度为无穷大,  $K_v = 3$ 。

(2) 求原系统的单位阶跃响应, 如图 5-59 所示。

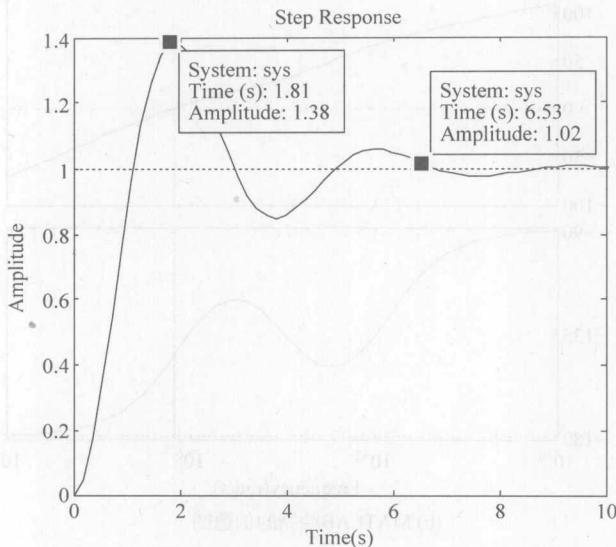
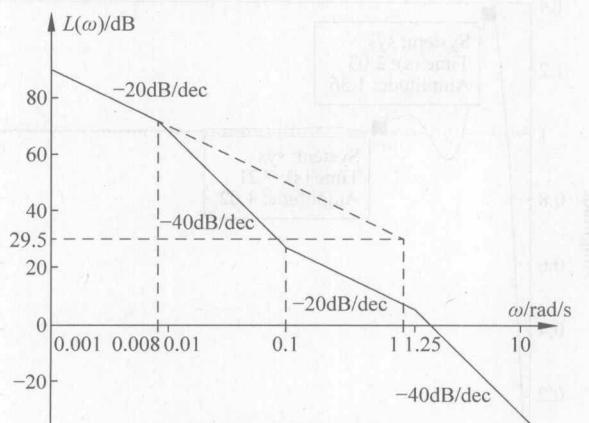


图 5-59 题 C5-6 校正前系统的单位阶跃响应曲线

(3) 绘制引入校正装置后系统的伯德图(如图 5-60 所示), 并求系统的相位裕度和增益裕度、速度误差系数  $K_v$

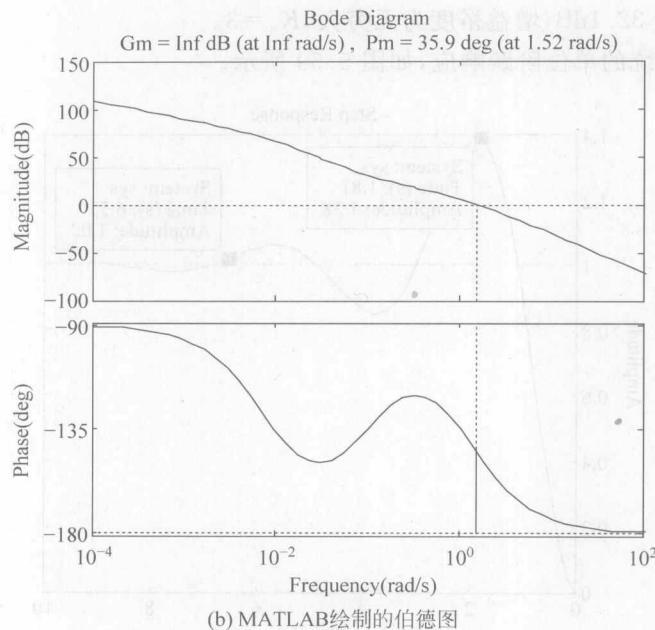
$$G(s)G_c(s) = \frac{(s+1)(s+0.1)}{(s+1.25)(s+0.008)} \frac{3}{s(s+1)} = \frac{30(10s+1)}{s(s/1.25+1)(125s+1)}$$

$$20\lg K = 20\lg 30 = 29.54\text{dB}$$



(a) 校正后系统的手绘伯德图

图 5-60 题 C5-6 校正后系统的伯德图



(b) MATLAB绘制的伯德图

图 5-60 (续)

MATLAB 画图结果如下：

相位裕度为  $35.9^\circ$ , 增益裕度为无穷大,  $K_v=30$ 。

(4) 求校正前后系统的单位阶跃响应, 并进行比较, 说明校正装置的作用。

校正后的单位阶跃响应如图 5-61 所示。

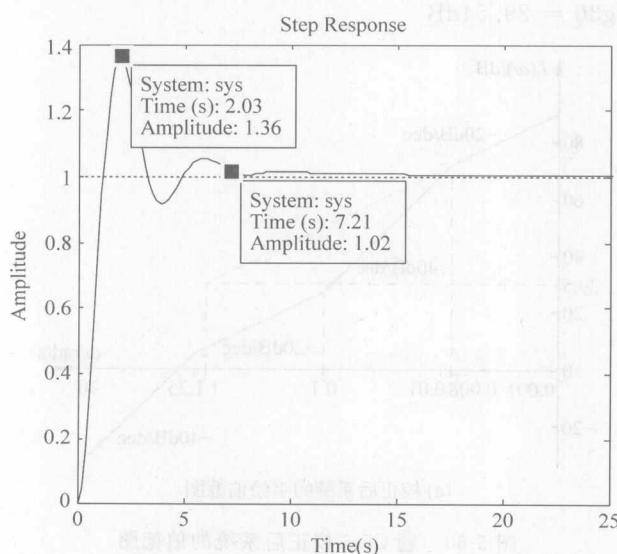


图 5-61 题 C5-6 校正后系统的单位阶跃响应曲线

校正环节的引入使得系统的稳态性能(稳态误差系数增加)和动态性能(超调量减小、相位稳定裕度增加)都得到了改善。

## D MATLAB 题

**D5-1** 用 MATLAB 的 bode 命令绘制题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4) 各系统的伯德图，并在图上标出系统的相位裕度和增益裕度。

解 (1) 题 A5-1(1) 系统伯德图如图 5-62 所示, MATLAB 画图结果如下:

$$\omega_c = 0.0667 \text{ rad/s} \quad \omega_g = \text{无穷大}$$

相位裕度为  $89.7^\circ$  增益裕度为无穷大。

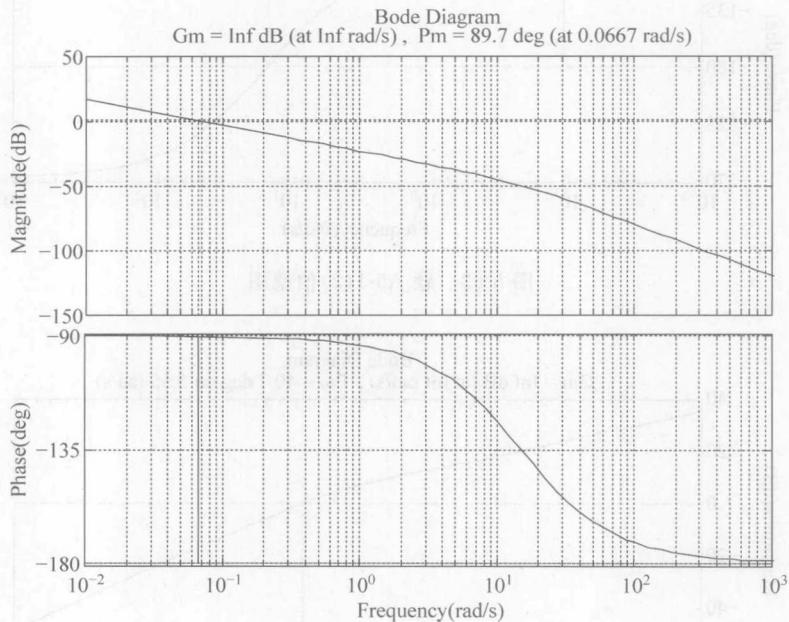


图 5-62 题 A5-1(1) 伯德图

(2) 题 A5-1(2) 系统伯德图如图 5-63 所示, MATLAB 画图结果如下:

$$\omega_c = 0.1 \text{ rad/s} \quad \omega_g = 14.1 \text{ rad/s}$$

相位裕度为  $89.1^\circ$ , 增益裕度为  $49.6 \text{ dB}$ 。

(3) 题 A5-1(3) 系统伯德图如图 5-64 所示, MATLAB 画图结果如下:

$$\omega_c = 5.55 \text{ rad/s} \quad \omega_g = \text{无穷大}$$

相位裕度为  $40.7^\circ$ , 增益裕度为无穷大。

(4) 题 A5-1(4) 系统伯德图如图 5-65 所示, MATLAB 画图结果如下:

$$\omega_c = 5.65 \text{ rad/s} \quad \omega_g = 10 \text{ rad/s}$$

相位裕度为  $50.3^\circ$ , 增益裕度为  $6.02\text{dB}$ 。

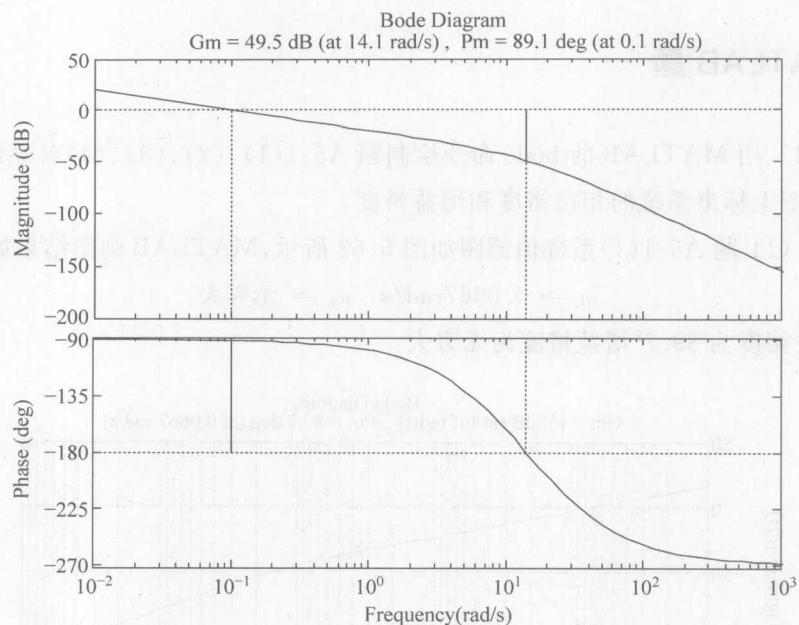


图 5-63 题 A5-1(2)伯德图

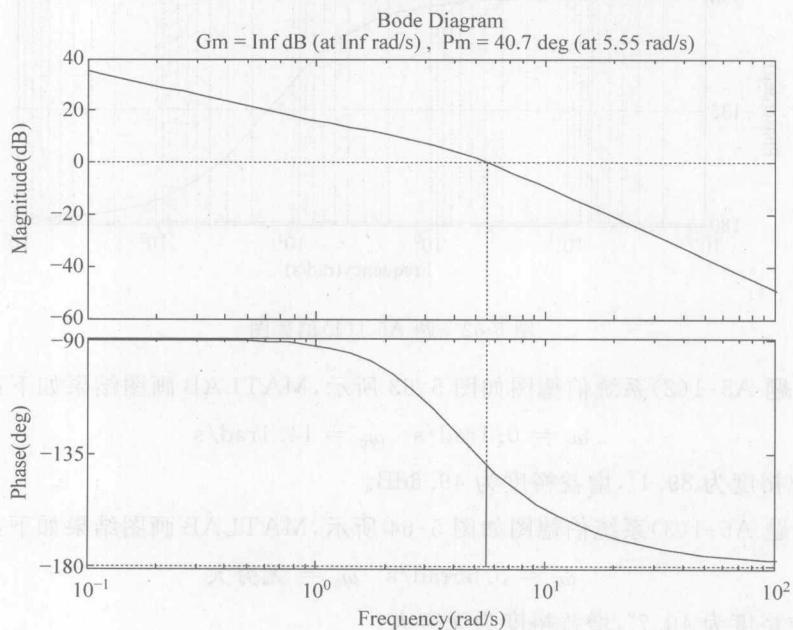


图 5-64 题 A5-1(3)伯德图

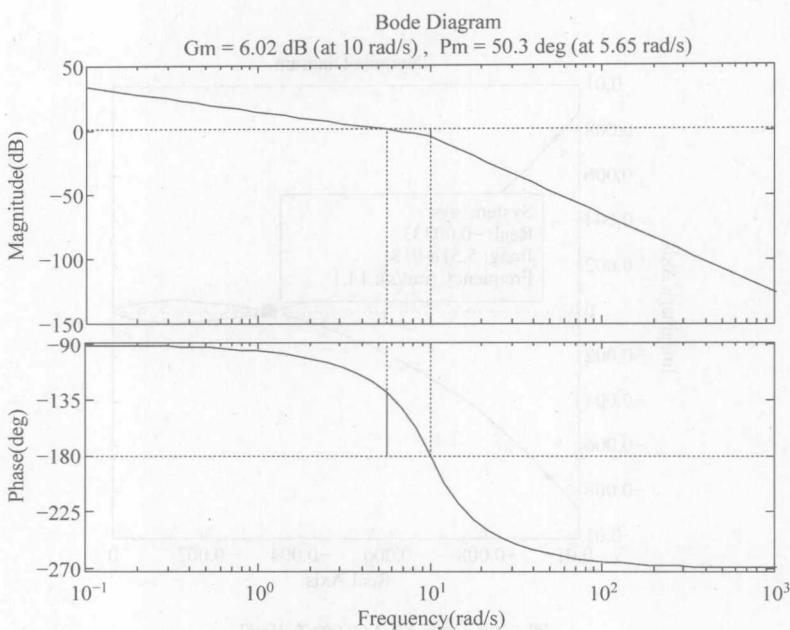


图 5-65 题 A5-1(4)伯德图

**D5-2** 用 MATLAB 的 Nyquist 命令绘制题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4) 各系统的奈氏图，并在图上标出系统的相位裕度和增益裕度。

解 (1) 题 A5-1(1) 系统的奈氏图如图 5-66 所示。

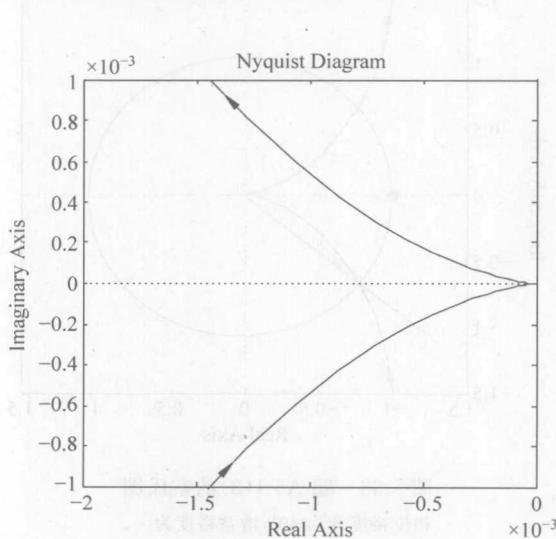


图 5-66 题 A5-1(1) 的奈氏图  
相位裕度约为  $90^\circ$ ，增益裕度为  $\infty$ 。

(2) 题 A5-1(2)系统的奈氏图如图 5-67 所示。

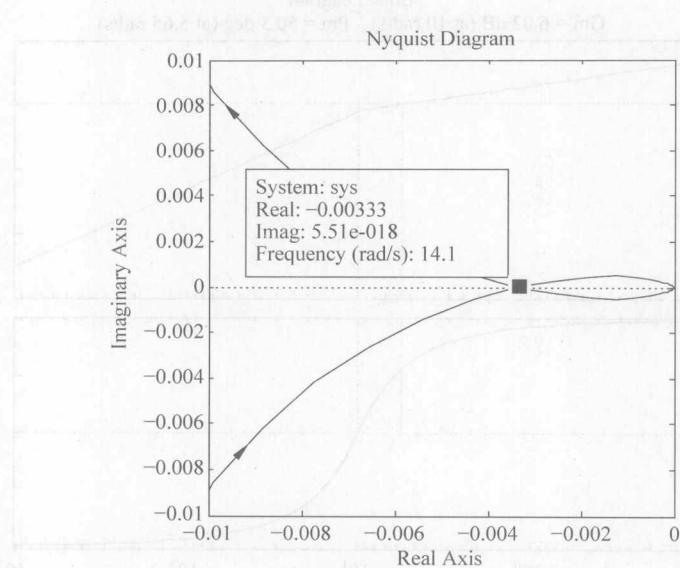


图 5-67 题 A5-1(2)的奈氏图

相位裕度约为  $90^\circ$ , 增益裕度为  $49.6\text{dB}$ 。

(3) 题 A5-1(3)系统的奈氏图如图 5-68 所示。

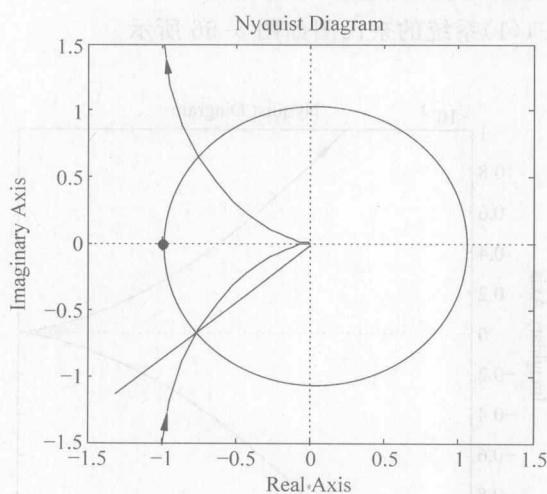


图 5-68 题 A5-1(3)的奈氏图

相位裕度约为  $40^\circ$ , 增益裕度为  $\infty$ 。

(4) 题 A5-1(4)系统的奈氏图如图 5-69 所示。

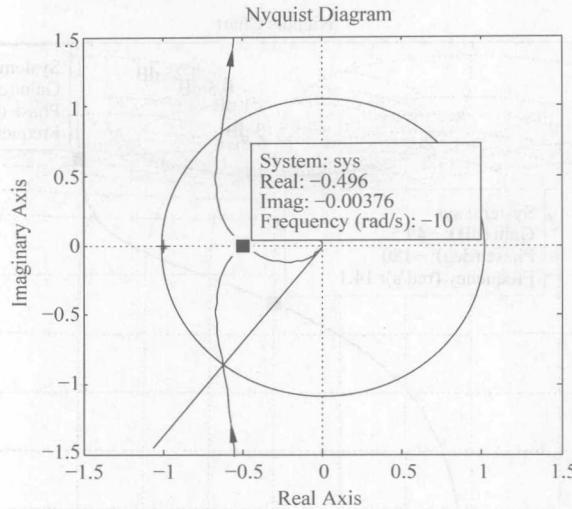


图 5-69 题 A5-1(4)的奈氏图

相位裕度约为  $50^\circ$ , 增益裕度为  $6.09\text{dB}$ 。

**D5-3** 用 MATLAB 的 Nichols 和 Ngrid 命令绘制题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4) 各系统的尼科尔斯图, 并在图上标出系统的相位裕度和增益裕度。

解 (1) 题 A5-1(1)系统尼科尔斯图如图 5-70 所示, 相位裕度为  $89.7^\circ$ , 增益裕度为  $\infty$ 。

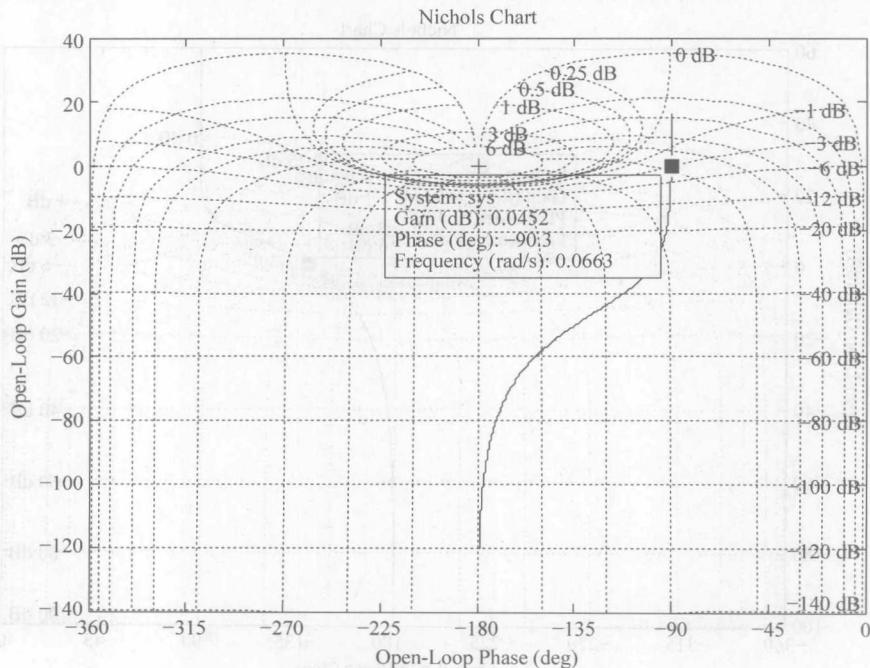


图 5-70 题 A5-1(1)尼科尔斯图

(2) 题 A5-1(2) 系统尼科尔斯图如图 5-71 所示, 相位裕度为  $89.1^\circ$ , 增益裕度为  $49.5\text{dB}$ 。

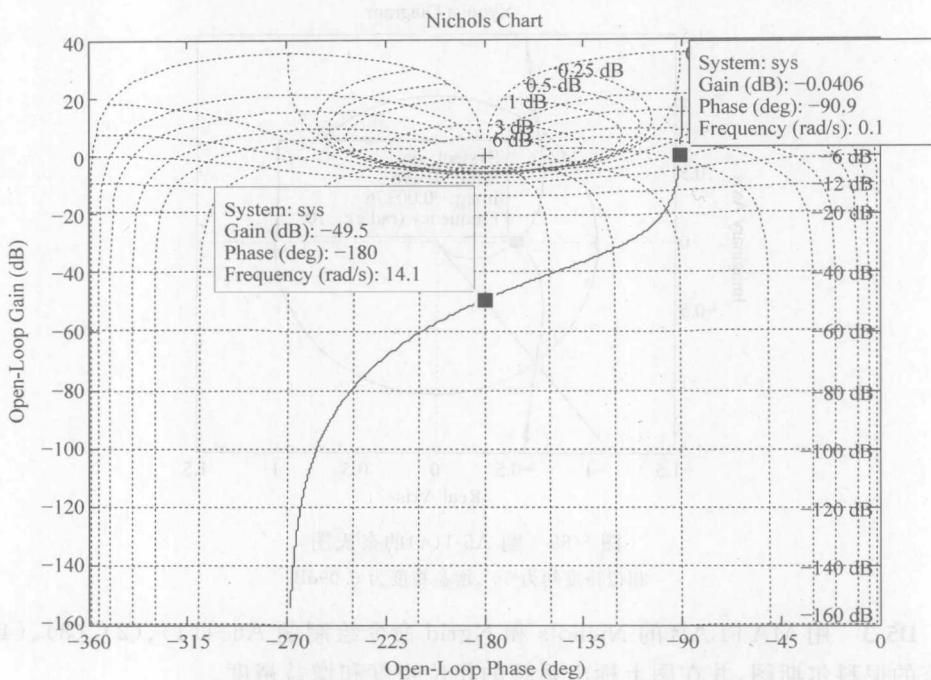


图 5-71 题 A5-1(2) 尼科尔斯图

(3) 题 A5-1(3) 系统尼科尔斯图如图 5-72 所示, 相位裕度为  $41^\circ$ , 增益裕度为  $\infty$ 。

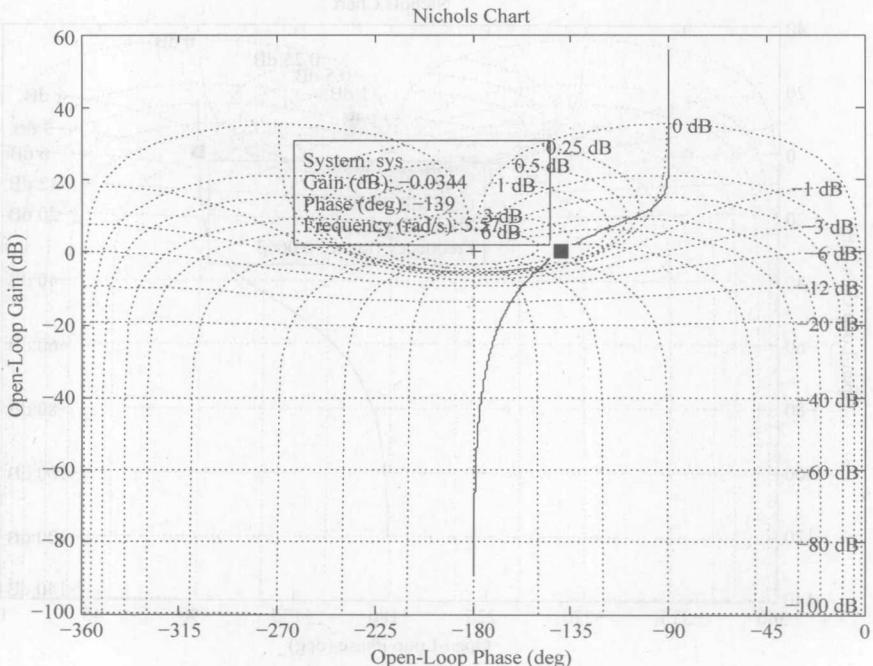


图 5-72 题 A5-1(3) 尼科尔斯图

(4) 题 A5-1(4)系统尼科尔斯图如图 5-73 所示,相位裕度为  $50^\circ$ ,增益裕度为  $6.01\text{dB}$ 。

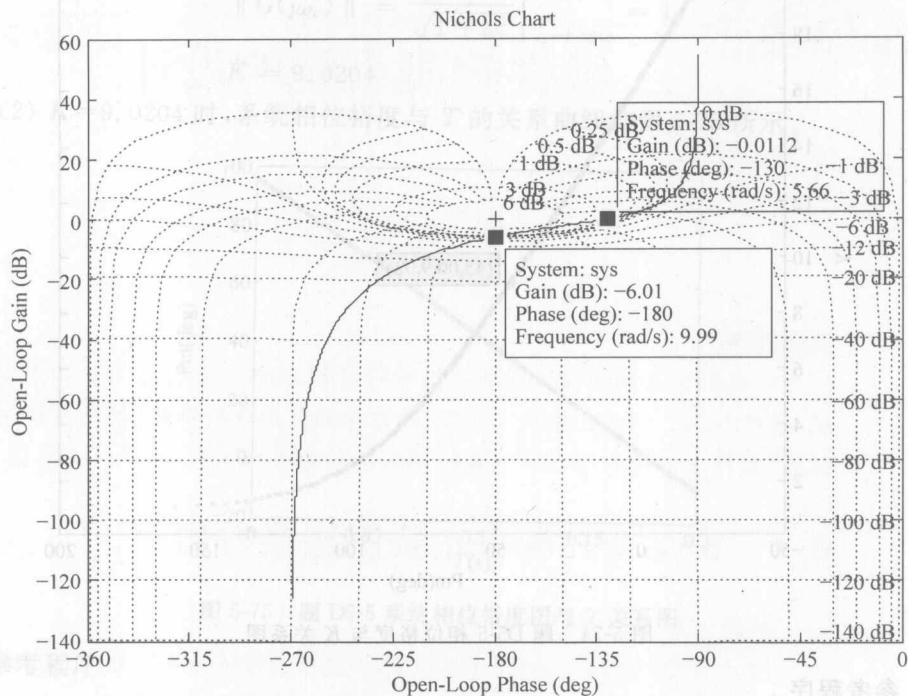


图 5-73 题 A5-1(4)尼科尔斯图

**D5-4** 用 MATLAB 的 margin 命令求题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4)各系统的相位裕度和增益裕度。

解 分别执行命令

```
num1 = 1; den1 = conv([1, 0], [1, 15]); sys = tf(num1, den1); figure(1); margin(sys); [GM, Pm, Wcp, Wcg] = margin(sys)
num2 = 20; den2 = conv(conv([1, 0], [1, 10]), [1, 20]); sys = tf(num2, den2); figure(2); margin(sys); [GM, Pm, Wcp, Wcg] = margin(sys)
num3 = [36, 72]; den3 = conv([1, 0], [1, 6, 12]); sys = tf(num3, den3); figure(3); margin(sys); [GM, Pm, Wcp, Wcg] = margin(sys)
num4 = 5; den4 = conv([1, 0], [0.01, 0.1, 1]); sys = tf(num4, den4); figure(4); margin(sys); [GM, Pm, Wcp, Wcg] = margin(sys)
```

**D5-5** 一单位反馈系统的开环传递函数为

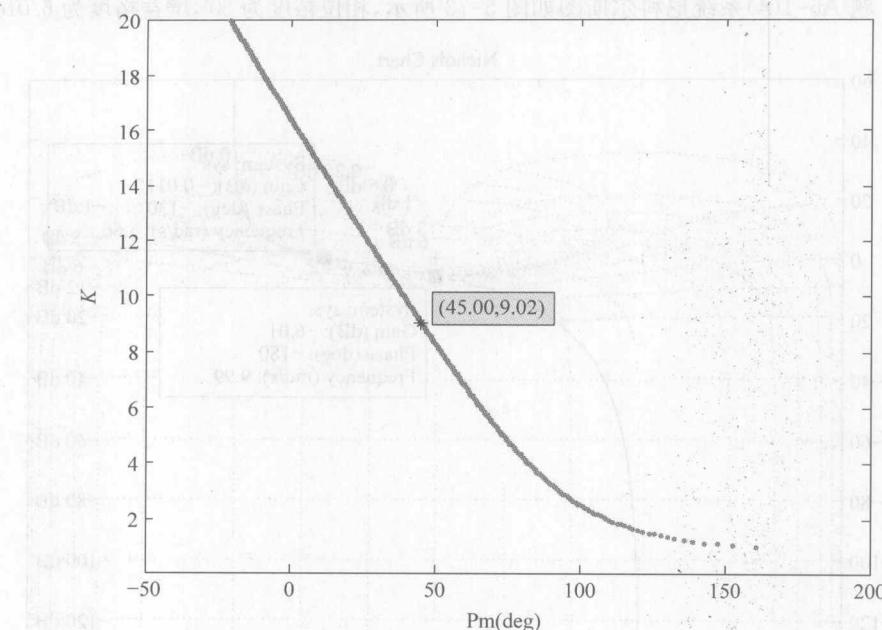
$$G(s) = \frac{K e^{-Ts}}{s + 1}$$

(1) 当  $T=0.1\text{s}$ , 用 margin 命令求使系统的相位裕度为  $45^\circ$  的  $K$  值;

(2) 利用所求的  $K$  值, 绘制在  $0 \leq T \leq 0.2\text{s}$  范围内相位裕度与  $T$  的关系曲线。

解 (1) 解法 1

当  $T=0.1\text{s}$  时, 系统的相位裕度与增益  $K$  之间的关系如图 5-74 所示, 由图可知, 当  $K=9.02$  时, 系统的相位裕度为  $45^\circ$ 。

图 5-74 题 D5-5 相位裕度与  $K$  关系图

## 参考程序

```
% T = 0.1s 时, 绘制系统相位裕度与增益 K 之间的关系曲线
%
T = 0.1;
num1 = [1];
den1 = [1 1];
sys1 = tf(num1,den1);
for K = 0.1:0.05:20
    sys = K * sys1;
    [Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys);
    Pm = Pm - 0.1 * Wcp * 180/pi;
    axis([-50 200 0.1 20]);
    plot(Pm,K);
    holdon;
end;
xlabel('Pm (deg)')
ylabel('K')
plot(45,9.0204,'r*')
text(50,9.1,['(',num2str(45,'%5.2f'),',',num2str(9.0204,'%5.2f'),')'],'EdgeColor','red','BackgroundColor',[.7 .9 .7],'VerticalAlignment','bottom');
```

## 解法 2

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega) = 180^\circ - 0.1 \times \omega_c \times \frac{180}{\pi} - \arctan \omega_c = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \omega_c = 8.9648$$

$$\| G(j\omega_c) \| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_c^2}} \Big|_{\omega_c = 8.9648} = 1$$

$$K = 9.0204$$

(2)  $K=9.0204$  时, 系统相位裕度与  $T$  的关系曲线如图 5-75 所示。

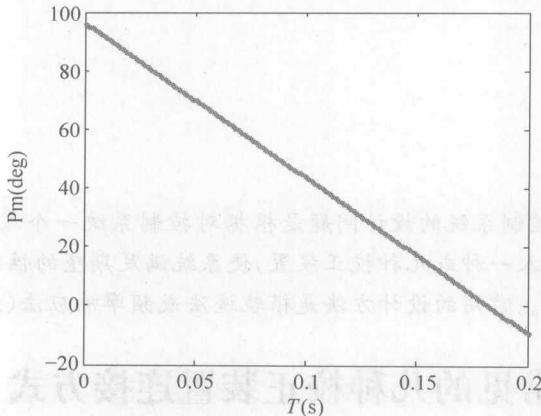


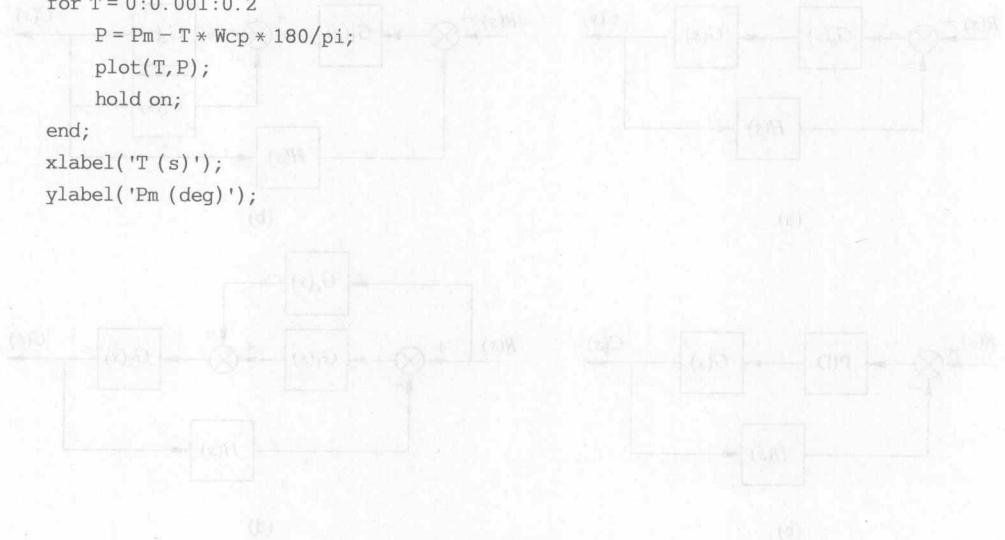
图 5-75 题 D5-5 系统相位裕度图与  $T$  关系图

### 参考程序

```
% K = 9.0204 时, 绘制系统相位裕度与 T 的关系曲线
```

```
%
```

```
K = 9.25;
num = [K];
den = [1 1];
sys = tf(num, den);
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sys);
for T = 0:0.001:0.2
    P = Pm - T * Wcp * 180/pi;
    plot(T, P);
    hold on;
end;
xlabel('T (s)');
ylabel('Pm (deg);')
```



# 第6章

## 线性控制系统的 设计

### 要点提示

线性控制系统的  
设计问题是根据对控制系统一个或几个性能指标的要求,通过引入一种或几种校正装置,使系统满足期望的性能(稳态性能和动态性能)指标。常用的设计方法是根轨迹法或频率响应法(经常用伯德图法)。

### 6.1 常见的几种校正装置连接方式

补偿方案主要有以下几类:

- (1) 串联补偿器 串联在前向通道上的校正装置  $G_c(s)$ ,如图 6-1(a)所示;
- (2) 局部反馈补偿器 在前向通道的局部引入反馈校正  $G_f(s)$ ,如图 6-1(b)所示;
- (3) PID 控制器 在前向通道中引入误差信号的比例积分微分控制器,如图 6-1(c)所示;
- (4) 前馈补偿器 接入于输入信号与被控对象之间的补偿装置,如图 6-1(d)中的  $G_c(s)$ 。

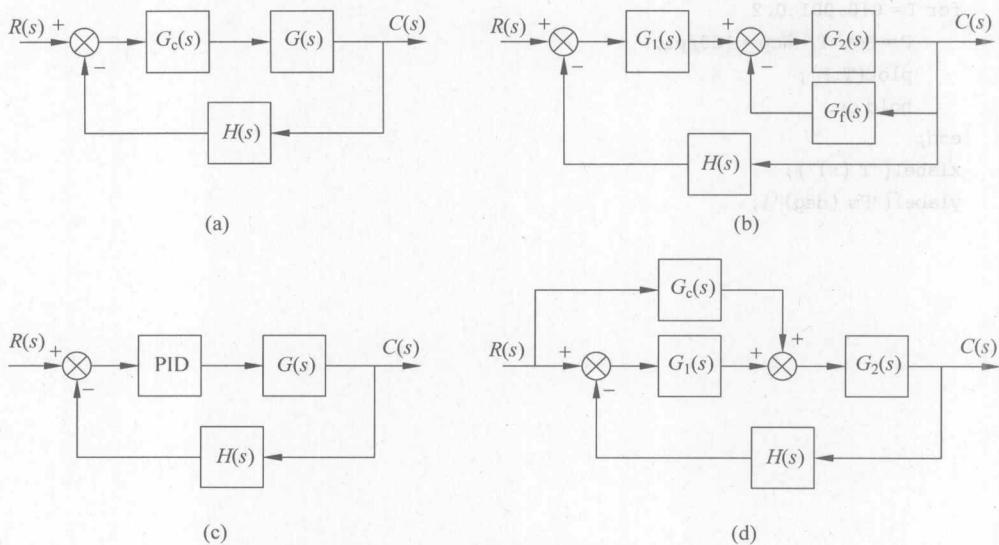


图 6-1 各种校正装置的连接

## 6.2 不同域中系统动态性能指标的相互关系

常用的性能指标是频域指标,

(1) 开环 增益剪切角频率  $\omega_c$ 、相位裕度  $\gamma$  及增益裕度 GM。

(2) 闭环 谐振峰值  $M_r$ 、谐振角频率  $\omega_r$  及带宽  $\omega_b$ 。

## 6.3 串联超前校正

常用的串联校正装置有超前校正、滞后校正和滞后超前校正。选择校正器的主要根据系统原有的稳态性能、动态性能与期望性能之间的差异。超前校正器的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + T_s}$$

它可以用无源网络实现,也可以用运算放大器构成。它的伯德图如图 6-2 所示。由图可见其相位总为正。相位的最大值出现  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$  处,即两个转角频率的几何平均

处(Bode 图上是两个转角频率的中点),其最大超前角为  $\varphi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 。

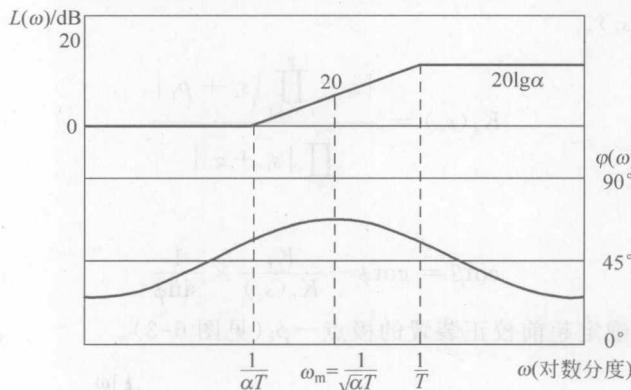


图 6-2 无源相位超前网络的伯德图

### 6.3.1 伯德图法

在超前校正中需要设计的是  $\alpha$  和  $T$ 。通常是根据要增加的相位确定  $\alpha$ , 应用下列关系

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (6-1)$$

然后在伯德图上找出  $L(\omega) = -10\lg\alpha$  所对应的角频率作为新的  $\omega_m$ , 由  $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$  求

出  $T$ 。应用超前校正是利用校正器的相位超前特点, 经校正的系统增益剪切频率在原系统增益剪切频率的稍右方。

### 6.3.2 根轨迹法

按主导极点的要求, 计算欲使根轨迹能通过主导极点, 超前校正必须提供的超前相位  $\phi$ , 然后根据根轨迹的幅值条件和相位条件确定超前校正的参数。

设  $j$  校正前系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^\nu \prod_{j=\nu+1}^n (s + p_j)} \quad (6-2)$$

式中,  $p_j$  和  $z_i$  是系统的开环极点和零点。

用根轨迹法设计超前校正装置的步骤如下:

① 按  $e_{ss}$  要求, 确定系统的根轨迹增益  $K_r$  及系统期望的主导极点  $s_c$  (有的地方用  $s_x$  表示)。

② 求  $\phi$ 。计算超前校正装置需要提供的补偿相角

$$\phi = \pm (2k + l) \times 180^\circ - \angle(G(s_c)H(s_c)) \quad (6-3)$$

式中,  $\angle(G(s_c)H(s_c))$  是原系统的开环极点和零点至  $s_c$  的相位。

③ 计算  $K_r(s_c)$ 。

$$K_r(s_c) = \frac{|s_c|^\nu \prod_{j=\nu+1}^n |s_c + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s_c + z_i|} \quad (6-4)$$

④ 计算  $\beta$ 。

$$\cot \beta = \cot \phi - \frac{K_r}{K_r(s_c)} \times \frac{1}{\sin \phi} \quad (6-5)$$

根据  $\beta$ , 作图确定超前校正装置的极点  $-p_c$  (见图 6-3)。

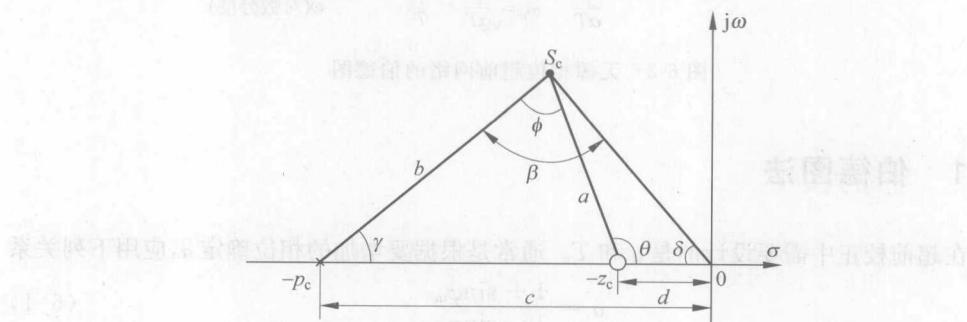


图 6-3 超前校正计算图

⑤ 再由  $\phi$ , 作图确定超前校正装置的零点一  $z_c$ 。

⑥ 检验设计结果。

## 6.4 串联滞后校正

滞后校正器的传递函数是

$$G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + T_s} \quad (6-6)$$

式中,  $\beta < 1$ 。相位滞后校正器常用无源网络实现或运算放大器构成。

相位滞后网络的伯德图如图 6-4 所示。

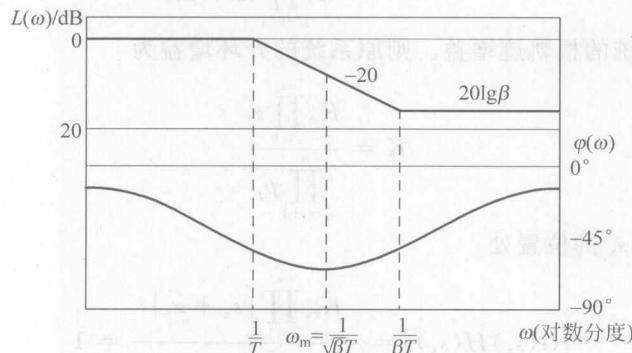


图 6-4 无源相位滞后网络伯德图

### 6.4.1 伯德图法

设计滞后校正时, 不是利用其滞后相位, 而是利用其在  $\omega > \frac{1}{\beta T}$  的  $20\lg\beta$  增益(衰减  $1/\beta$  倍)的特性, 从而增益剪切频率左移, 达到稳定的目的。

常用步骤如下: 首先在原频率特性上找一个频率, 它的相位达到相位裕度的要求, 即

$$\gamma(\omega_{cl}) = -180^\circ + \gamma_1 + (5^\circ \sim 10^\circ)$$

其中  $\omega_{cl}$  是计划的幅频剪切频率,  $\gamma_1$  是要求的相位裕度。然后取  $\beta = 10^{-L(\omega_{cl})/20}$ , 那么滞后校正  $G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + T_s}$  一定实现  $\omega_{cl}$  为新的幅频剪切频率。将滞后校正网络的零点配置在低于  $\omega_{cl}$  十倍频程以下, 即  $\frac{1}{\beta T} < \frac{1}{10}\omega_{cl}$ , 由此决定  $T$ 。

### 6.4.2 根轨迹法

用根轨迹法设计相位滞后校正网路的问题是, 当系统的根轨迹通过期望的主

导极点(因为原系统的动态性能满足要求),但在主导极点的位置上,不能满足系统的稳态误差要求,通过增加一对相位滞后校正网络的零、极点,达到既不会对在主导极点附近的根轨迹产生明显变化,又能增大在主导极点处根轨迹的增益,从而改善系统的稳态性能。为此应使滞后校正的零、极点相对于主导极点而言构成偶极子,并使滞后校正对系统的动态性能影响可以忽略不计的前提下计算其校正参数。

设原系统的开环传递函数是

$$G(s)H(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=\nu+1}^n (s + p_j)} \quad (6-7)$$

式中,  $K_r$  是原系统的根轨迹增益。则原系统的开环增益为

$$K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=\nu+1}^n p_j} \quad (6-8)$$

在希望主导极点  $s_x$  的位置处

$$|G(s_x)H(s_x)| = \frac{K_{rx} \prod_{i=1}^m |s_x + z_i|}{|s_x|^{\nu} \prod_{j=\nu+1}^n |s_x + p_j|} = 1 \quad (6-9)$$

式中,  $K_{rx}$  为原系统在希望主导极点位置上的根轨迹增益

$$K_{rx} = \frac{|s_x|^{\nu} \prod_{j=\nu+1}^n |s_x + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s_x + z_i|} \quad (6-10)$$

原系统在希望主导极点  $s_x$  处的开环增益  $K_1$  为

$$K = \frac{K_{rx} \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=\nu+1}^n p_j} \quad (6-11)$$

串入相位滞后校正装置  $G_c(s) = \frac{1}{\beta} \times \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts} = \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}}$  (已将增益放大  $\frac{1}{\beta}$  倍) 后, 系统

的开环传递函数为

$$G(s)H(s)G_c(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=\nu+1}^n (s + p_j)} \times \frac{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)}{\left(s + \frac{1}{T}\right)} \quad (6-12)$$

令  $s = s_x$ , 则

$$|G(s_x)H(s_x)G_c(s_x)| = \frac{K_{rx} \prod_{i=1}^m |s_x + z_i|}{|s_x|^v \prod_{j=v+1}^n |s_x + p_j|} \times \left| \frac{s_x + \frac{1}{\beta T}}{s_x + \frac{1}{T}} \right| = 1$$

所以串入相位滞后校正装置  $G_c(s) = \frac{1}{\beta} \times \frac{1 + \beta T s}{1 + T s}$  (已将增益放大  $\frac{1}{\beta}$  倍,  $\beta \leq 1$ ) 后, 其根轨迹通过主导极点。校正后系统的开环增益为

$$K_c = \frac{K_{rx} \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=v+1}^n p_j} \times \frac{z_c}{p_c} = \frac{1}{\beta} K \quad (\beta \leq 1) \quad (6-13)$$

用根轨迹法设计相位滞后网络的计算步骤如下:

- ① 按  $e_{ss}$  要求, 绘制校正前系统的根轨迹图。
- ② 在根轨迹图上确定希望主导极点  $s_x$  及在主导极点处  $s_x$  的开环增益  $K$ 。
- ③ 计算为满足稳态性能要求, 系统所要求的开环增益  $K_c$  及开环增益需要增加的倍数  $\frac{1}{\beta}$

$$\beta = \frac{K}{K_c} \quad (6-14)$$

- ④ 根据  $\beta$  选择滞后校正的零点  $z_c$  和极点  $p_c$ 。为保证  $z_c$  和  $p_c$  能成为系统的偶极子, 应当使  $z_c$  和  $p_c$  尽量靠近原点。通常满足以下条件

$$|z_c| = \frac{1}{\beta} |p_c| \ll \omega_n \quad (6-15)$$

式中  $\omega_n$  是主导极点的无阻尼振荡角频率。以及

$$|s_x + z_c| \approx |s_x + p_c| \quad (6-16)$$

为满足式(6-16), 应使

$$\angle(s_x + z_c) - \angle(s_x + p_c) \leq 2^\circ \quad (6-17)$$

- ⑤ 绘制校正后系统的根轨迹图, 求出在开环增益等于  $K_c$  时的主导极点。
- ⑥ 校验系统的性能指标, 若不满足要求, 则调整校正参数  $\beta$ , 重复④以后的步骤。

## 6.5 串联超前-滞后校正

当系统的稳态性能与动态性能均不能满足要求, 用单一的相位超前校正或相位滞后校正无法同时改善系统的稳态和动态性能, 此时就应考虑使用相位超前-滞后校正网络。

超前-滞后校正的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{(\alpha T_1 s + 1)(\beta T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (6-18)$$

$$\alpha\beta = 1$$

当  $\alpha > 1$ ,  $\frac{\alpha T_1 s + 1}{T_1 s + 1}$  为超前校正环节, 因为  $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$ , 所以  $\frac{\beta T_2 s + 1}{T_2 s + 1}$  是滞后校正环节。

相位超前-滞后校正网络的伯德图如图 6-5 所示。可见在低频段是一个滞后校正环节, 在高频段是一个超前校正环节, 但这两个环节的参数是有制约的。引入此校正的基本思想是利用其滞后校正部分提高系统的稳态性能, 利用其超前校正部分改善系统的动态性能。

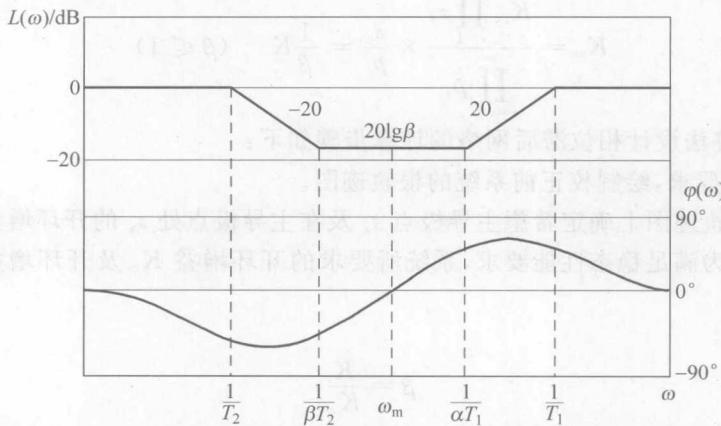


图 6-5 相位超前-滞后校正网络伯德图

## 6.6 局部反馈校正

局部反馈校正是一种在系统的局部环节中引入反馈对系统进行校正的方法。如图 6-6, 系统原有环节  $G_1(s)$  与  $G_2(s)$ , 在系统的局部环节  $G_2(s)$  上引入反馈  $G_f(s)$ , 就是局部反馈校正。

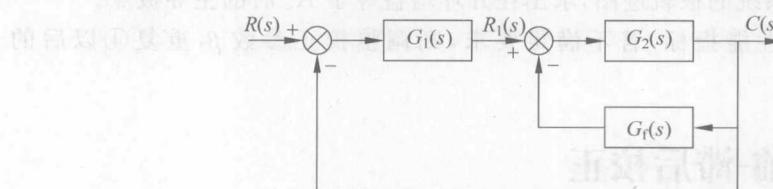


图 6-6 局部反馈方块图

局部反馈部分的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_f(s)} \quad (6-19)$$

如果在对系统动态性能起主要作用的频率范围内, 满足

$$|G_2(j\omega)G_f(j\omega)| \gg 1 \quad (6-20)$$

则

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} \approx \frac{1}{G_f(s)} \quad (6-21)$$

而当

$$|G_2(j\omega)G_f(j\omega)| << 1 \quad (6-22)$$

则

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} \approx G_2(s) \quad (6-23)$$

式(6-21)和式(6-23)说明,当局部反馈部分的开环增益远大于1时,其闭环传递函数仅决定于反馈校正的传递函数的倒数;而当局部反馈部分的开环增益远小于1时,其闭环传递函数与反馈校正无关。在实际应用中,把上述条件简化为 $|G_2(j\omega)G_f(j\omega)| > 1$ 和 $|G_2(j\omega)G_f(j\omega)| < 1$ ,这样会增大误差(可以证明在 $|G_2(j\omega)G_f(j\omega)| = 1$ 时的误差最大,其误差不会超过3dB),但简化了设计计算。

## 6.7 PID控制器

PID控制是比例积分微分控制,它是利用系统误差信号的比例、积分和微分信号作为系统的控制信号,其方块图如图6-7所示。PID控制的传递函数为

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (6-24)$$

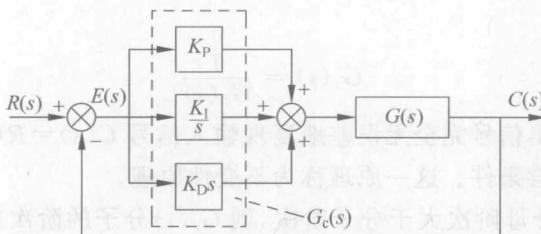


图6-7 PID控制方块图

在PID控制中,比例控制是最基本的控制,为满足实际系统控制指标的不同要求,再分别引入积分控制或微分控制,因而有比例积分控制(PI控制)、比例微分控制(PD控制)和比例积分微分控制(PID控制)。PID(比例—积分—微分)调节器结构简单、工作可靠、调节方便、稳定性好、在工业控制中得到广泛的应用。

## 6.8 前馈补偿与复合控制

减小或消除系统稳态误差是控制系统设计的一个重要目标。采用前馈补偿可以在很大程度上减小乃至消除稳态误差,而又不致对系统的动态性能带来不良影

响。前馈补偿就是在反馈控制系统中引入一个开环控制通道，对系统产生一个附加的补偿控制信号，达到消除或减小稳态误差的目标。反馈控制加入前馈补偿的控制系统称为复合控制系统。按照产生误差的源头不同，前馈补偿产生的补偿控制信号可以取自输入信号，也可取自扰动信号，分别称为按输入补偿的复合控制系统和按扰动补偿的复合控制系统。图 6-8 是这两种复合控制系统的方块图。

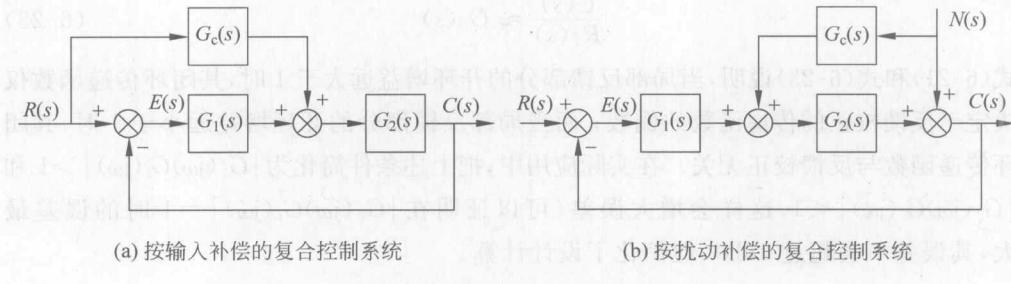


图 6-8 带前馈补偿的复合控制系统

### 6.8.1 按输入补偿的复合控制系统

按输入补偿的复合控制系统的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - G_2(s)G_c(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (6-25)$$

只要满足

$$G_c(s) = \frac{1}{G_2(s)} \quad (6-26)$$

就可实现系统的输出信号完全无误差地复现输入信号  $C(s) = R(s)$ 。式(6-26)就是对输入的误差全补偿条件。这一原理称为不变性原理。

通常  $G_2(s)$  的分母阶次大于分子阶次，则  $G_c(s)$  分子的阶次就大于分母的阶次，这不便于物理实现。所以多半只能做到近似的全补偿。

### 6.8.2 按扰动补偿的复合控制系统

按扰动补偿的复合控制系统的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{1 + G_2(s)G_c(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (6-27)$$

全补偿的条件为

$$G_c(s) = -\frac{1}{G_2(s)} \quad (6-28)$$

满足式(6-28)，就能完全消除扰动对输出的影响。要准确实现对扰动的全补偿，除了受到物理条件的限制外，还必须要求扰动是可检测的。

前馈补偿能预先产生一个补偿信号,以抵消由原信号通道产生的误差,实现消除系统稳态误差的目的。从理论上讲,它能完全消除系统自身及外来扰动产生的误差,但在实际上,只能做到近似的全补偿。

## 习题解答

### A 基本题

**A6-1** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{(s+5)}$$

为使系统对单位阶跃输入响应的稳态误差为零,超调量  $M_p \leq 5\%$ ,按 2% 准则的调整时间为  $t_s \leq 1s$ ,引入串联校正装置

$$G_c(s) = \frac{s+a}{s}$$

试确定  $a$  和  $K_1$  的取值。

解 (1) 近似为无零二阶系统处理。根据二阶系统的时域性能指标

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq 5\%, \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 1$$

求得校正后系统的  $\zeta=0.69, \omega_n=5.8$ 。

(2) 加上串联校正后,系统是 I 型系统,对于阶跃输入的稳态误差一定为零。由  $2\xi\omega_n=5+K_1, \omega_n^2=K_1a$  得  $K_1=3, a=11.2$ 。

**A6-2** 某控制系统如图 6-9 所示,欲使系统的速度误差系数  $K_v=10$ ,超调量  $M_p \leq 4.5\%$ ,采用 PI 控制。试确定控制器的参数  $K_P$  和  $K_I$ ; 并求系统的单位阶跃响应,验证性能指标。

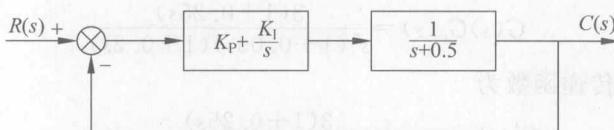


图 6-9 题 A6-2 系统图

解 (1) 求  $K_I$ 。经过 PI 控制后,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s}\right) \left(\frac{1}{s+0.5}\right) = \frac{K_P s + K_I}{s(s+0.5)}$$

系统的速度误差系数  $K_v=10$ ,所以系统的开环增益为  $\frac{K_I}{0.5}=10$ 。所以,  $K_I=5$

(2) 求  $K_P$ 。由  $M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq 4.5\%$ ,得  $\xi=0.707$ 。 $s^2 + (K_P + 0.5)s + 5 = 0$ 。

由  $2\zeta\omega_n = K_p + 0.5$ ,  $\omega_n^2 = 5$  得  $K_p = 2.7$ 。系统的阶跃响应如图 6-10 所示。

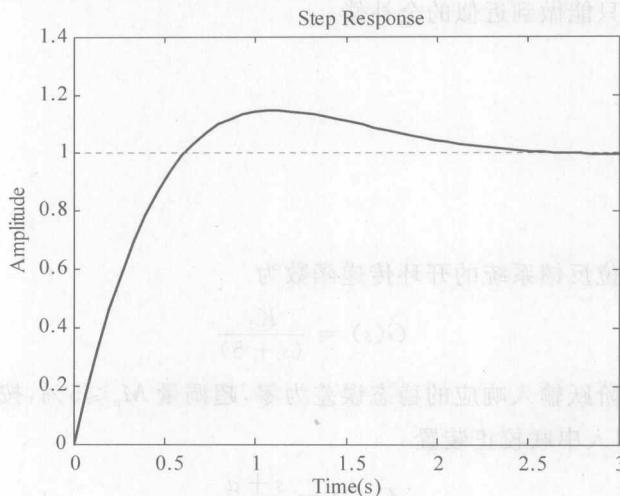


图 6-10 题 A6-2 系统的阶跃响应图

超调量超出允许范围,其原因是附加零点的影响。

A6-3 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{3}{s(0.2s+1)}$$

引入超前校正网络为

$$G_c(s) = \frac{(1+0.25s)}{s(1+0.05s)}$$

试分别用伯德图和尼科尔斯图确定谐振峰值  $M_r$  和带宽  $\omega_b$ 。

解

(1) 使用伯德图

加上超前校正后,系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{3(1+0.25s)}{s^2(1+0.05s)(1+0.2s)}$$

系统的闭环传递函数为

$$G'(s) = \frac{3(1+0.25s)}{0.01s^4 + 0.25s^3 + s^2 + 0.75s + 3}$$

画出其伯德图如图 6-11 所示。

从图中可以读出,谐振峰值  $M_r$  为 38.7 dB,带宽  $\omega_b$  为 2.77 rad/s。

(2) 使用尼科尔斯图

加上超前校正后,系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{3(1+0.25s)}{s^2(1+0.05s)(1+0.2s)}$$

画出其尼科尔斯图如图 6-12 所示。

同样可以得到,带宽  $\omega_b$  为 2.77 rad/s(谐振峰值无法在图中标出)。

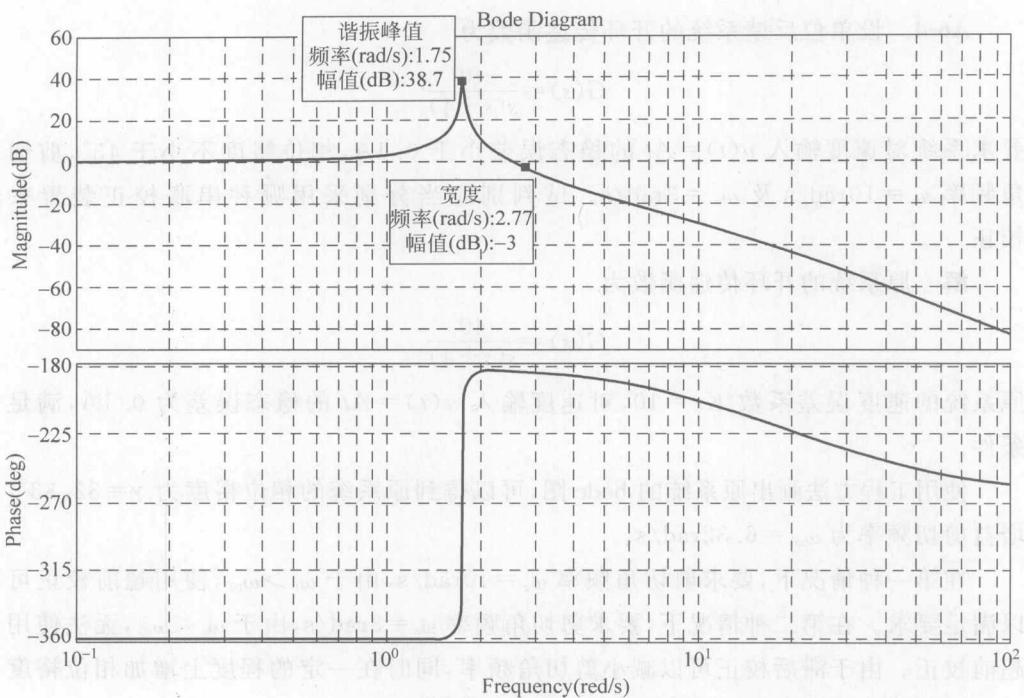


图 6-11 题 A6-3 系统伯德图

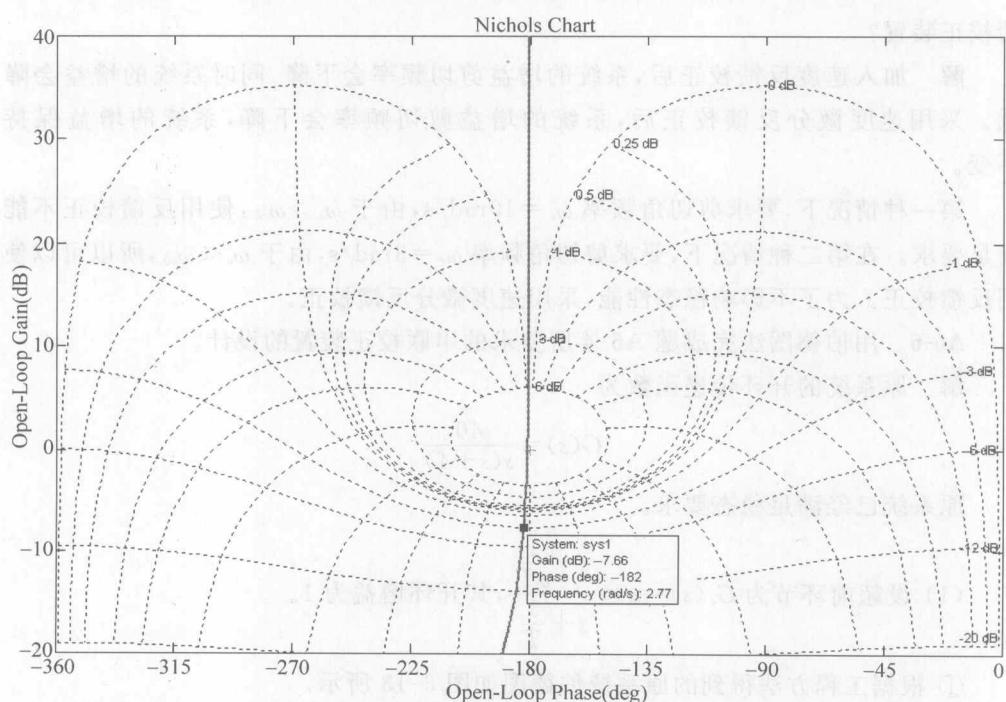


图 6-12 题 A6-3 系统的尼科尔斯图

**A6-4** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

要求系统对速度输入  $u(t) = At$  的稳态误差小于  $0.1A$ , 相位裕度不小于  $45^\circ$ , 剪切角频率  $\omega_c = 10\text{rad/s}$  及  $\omega_c = 3\text{rad/s}$ 。试判断应当分别采用哪种串联校正装置来校正。

解 原系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

原系统的速度误差系数  $K_v = 10$ , 对速度输入  $u(t) = At$  的稳态误差为  $0.1A$ , 满足条件。

使用工程方法画出原系统的 bode 图, 可以得到原系统的相位裕度为  $\gamma = 32.33^\circ$ , 增益剪切频率为  $\omega_{c0} = 6.32\text{rad/s}$ 。

在第一种情况下, 要求剪切角频率  $\omega_c = 10\text{rad/s}$ , 由于  $\omega_c > \omega_{c0}$ , 使用超前校正可以满足要求。在第二种情况下, 要求剪切角频率  $\omega_c = 3\text{rad/s}$ , 由于  $\omega_c < \omega_{c0}$ , 无法使用超前校正。由于滞后校正可以减小剪切角频率, 同时在一定的程度上增加相位裕度  $\gamma$ , 所以在第二种情况下, 可以使用滞后环节进行校正。

**A6-5** 对题 A6-4, 若采用反馈校正装置能否达到要求? 若能, 应当采用哪种反馈校正装置?

解 加入速度反馈校正后, 系统的增益剪切频率会下降, 同时系统的增益会降低。采用速度微分反馈校正后, 系统的增益剪切频率会下降, 系统的增益保持不变。

第一种情况下, 要求剪切角频率  $\omega_c = 10\text{rad/s}$ , 由于  $\omega_c > \omega_{c0}$ , 使用反馈校正不能满足要求。在第二种情况下, 要求剪切角频率  $\omega_c = 3\text{rad/s}$ , 由于  $\omega_c < \omega_{c0}$ , 所以可以使用反馈校正。为了不影响稳态性能, 采用速度微分反馈校正。

**A6-6** 用伯德图法完成题 A6-4 所要求的串联校正装置的设计。

解 原系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

原系统已经满足稳态要求。

(1) 设超前环节为  $G_c(s) = \alpha \times \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}}$ , 其开环增益为 1。

① 根据工程方法得到的原系统伯德图如图 6-13 所示。

② 计算  $\alpha$ 。系统在  $\omega_c = 10\text{rad/s}$  处的幅值为  $L(\omega_c) = -8.6\text{dB}$ , 利用超前环节的增益补偿  $L(\omega_c)$ , 使得校正后的系统在  $\omega_c = 10\text{rad/s}$  的  $L'(\omega_c) = 0\text{dB}$ , 所以有  $10\lg\alpha =$

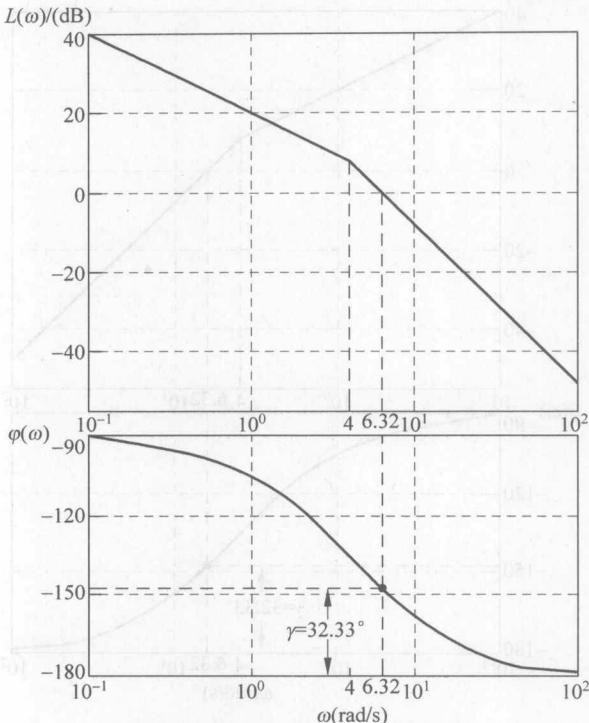


图 6-13 题 A6-6(1)系统的伯德图

8. 6 dB。解得,  $\alpha = 7.24$ 。

③ 计算  $T$ 。

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \cdot \omega_c = 27$$

所以,超前校正环节为

$$G_c(s) = 7.24 \times \frac{s + 3.73}{s + 27}$$

校正后的系统开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{289.6(s + 3.73)}{s(s + 4)(s + 27)}$$

校正后系统的相位裕度为  $\gamma = 71^\circ > 45^\circ$

(2) 设滞后环节为  $G_c(s) = \beta \times \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}}$ , 其开环增益为 1。

① 根据工程方法得到的原系统伯德图如图 6-14 所示。

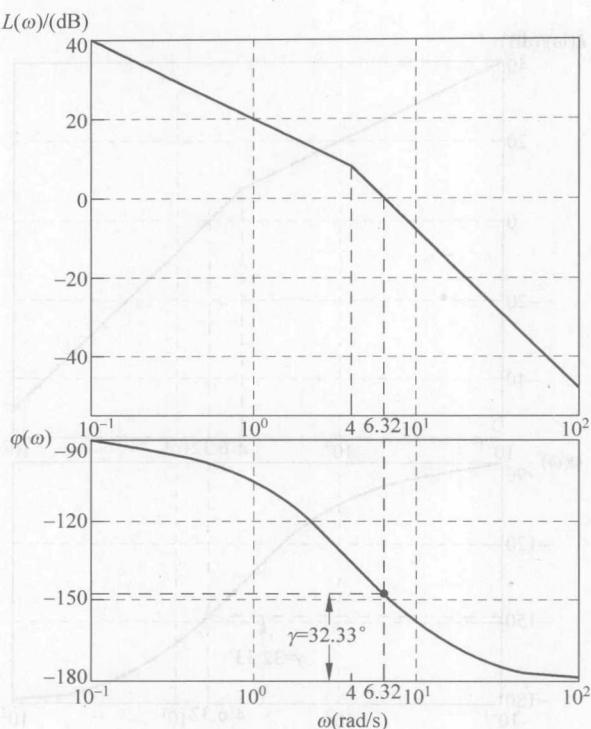


图 6-14 题 A6-6(2)系统伯德图

② 选择校正后系统的剪切角频率

$$\varphi(\omega_c) = -180^\circ + 45^\circ + (5^\circ \sim 10^\circ) = -125^\circ$$

$$\omega_c = 3 \text{ rad/s}$$

③ 求  $\beta$ 。欲使校正后  $L(\omega)$  曲线在  $\omega = \omega_c$  穿越 0dB 线, 从图上可查到, 应使  $20\lg\beta = -8.52 \text{ dB}$ , 则

$$\beta = 10^{-L(\omega_c)/20} = 10^{-0.426} = 0.375$$

④ 求  $\frac{1}{\beta T}$ 。选取滞后校正网络的零点。令

$$\frac{1}{\beta T} = 0.1 \omega_c = 0.3$$

⑤ 相位滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \beta \times \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}} = 0.375 \times \frac{s + 0.3}{s + 0.11}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{15(s + 0.3)}{s(s + 4)(s + 0.11)}$$

相位裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \arctan\left(\frac{3}{0.3}\right) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) - \arctan\left(\frac{3}{0.11}\right) = 49.53^\circ > 45^\circ$$

**A6-7** 用伯德图法完成题 A6-5 所要求的反馈校正装置的设计。

解 (1) 选用速度微分校正。

(2) 根据工程方法绘制系统伯德图如图 6-15 所示。

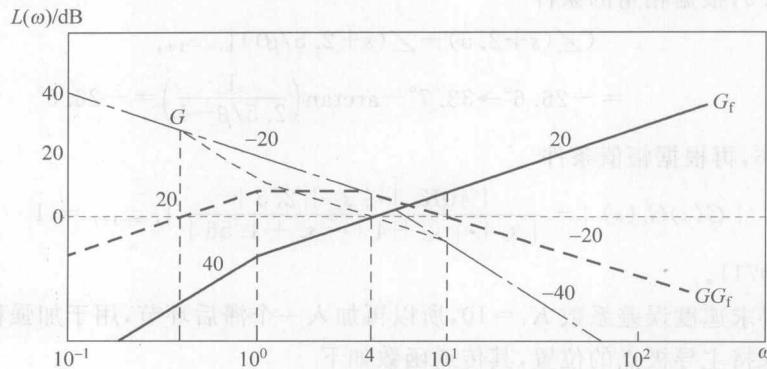


图 6-15 题 A6-7 系统伯德图

(3) 选取校正后系统的剪切频率为  $\omega_c = 4 \text{ rad/s}$ 。基于试探法, 结合已知的系统不可变部分的对数频率特性, 绘制反馈校正装置的对数频率特性。其对应的传递函数为

$$G_f(s) = \frac{0.25s^2}{s+1}$$

绘制  $GG_f$  的对数频率特性, 并求得  $20\lg |G(j\omega)G_f(j\omega)| \geq 0$  对应的频段为  $0.4 \sim 10 \text{ rad/s}$ , 则校正后系统的开环传递函数近似为

$$G_{\text{校正后}}(s) = \frac{10(s+1)}{s(2.5s+1)(0.1s+1)}$$

校正后系统的相位裕度为  $59^\circ > 45^\circ$ 。

**A6-8** 对题 A6-4 的系统, 稳态误差要求不变, 系统动态性能要求为超调量  $M_p \leqslant 4.5\%$ ,  $t_s \leqslant 4 \text{ s}$ 。用根轨迹法为其设计校正装置。

解 (1) 根据二阶系统的时域性能指标, 有

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} < 4.5\% \quad t_s = 4 = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

求得校正后系统的  $\xi = 0.707$ ,  $\omega_n = 1.414$ 。确定闭环系统的期望主导极点为

$$s_c = -1 \pm 1j$$

(2) 绘制原系统的根轨迹。原系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

(3) 计算系统在主导极点处的相位

$$\phi = -135^\circ - 18.4^\circ = -153.4^\circ$$

(4) 使用滞后校正, 其需要提供的滞后相角为

$$\phi = -180^\circ + (135^\circ + 18.4^\circ) = -26.6^\circ$$

(5) 假设滞后校正如下

$$G_c(s) = K_c \frac{(s+z_c)}{(s+z_c/\beta)}$$

假设  $z_c = 2.5$ , 根据相角的条件

$$= -26.6^\circ \rightarrow 33.7^\circ - \arctan\left(\frac{1}{2.5/\beta - 1}\right) = -26.6^\circ$$

解得  $\beta=1.6$ , 再根据幅值条件

$$| G(s)G_c(s) | = \frac{| 40K_c | \bullet | s_c + 2.5 |}{| s_c | \bullet | s_c + 4 | \bullet | s_c + 1.56 |} \Big|_{s_c=-1+j} = 1$$

得  $K_c = 0.0711$ 。

由于要求速度误差系数  $K_v=10$ , 所以再加入一个滞后环节, 用于加强稳态指标, 同时尽量保持主导极点的位置, 其传递函数如下

$$G_{c2}(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta_2 T}\right)}$$

令  $\frac{1}{T} = 0.01$ , 根据  $10K_c\beta\beta_2 = 10$ , 得到  $\beta_2 = 8.8$ 。所以, 校正以后, 系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s)G_{c2}(s) = \frac{2,844(s+2.5)(s+0.01)}{s(s+4)(s+1.56)(s+0.0011)}$$

校正后系统的根轨迹图如图 6-16 所示。

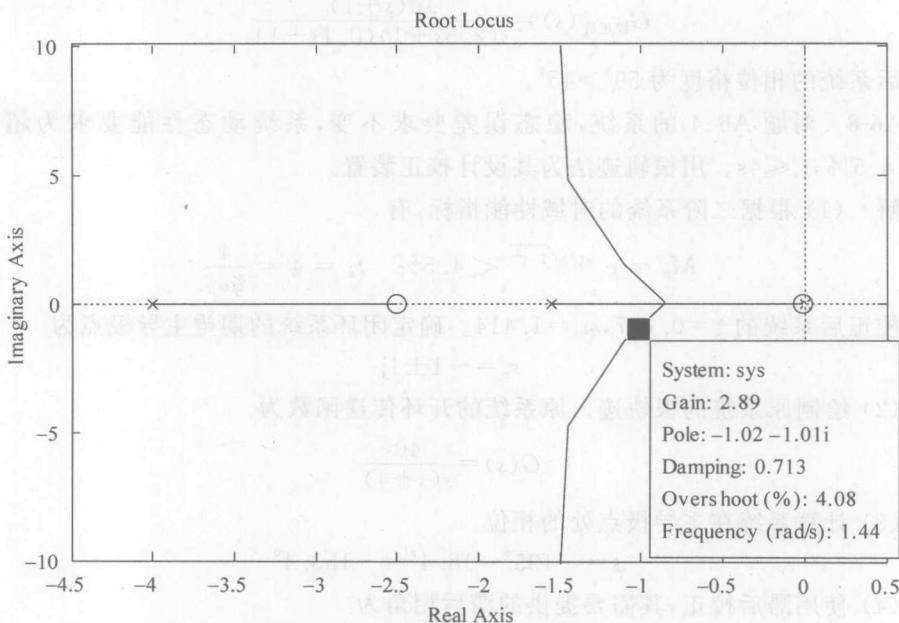


图 6-16 校正后系统的根轨迹图

系统的阶跃响应如图 6-17 所示。

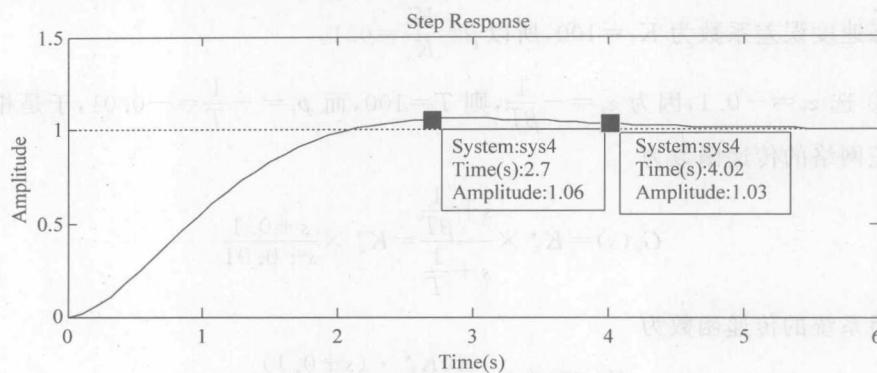


图 6-17 系统的阶跃响应图

**A6-9** 题 A6-4 的系统,若其相位裕度已经满足要求,而要将稳态误差要求提高到 0.01A,为其设计校正装置。

解 相位裕度已经满足要求,将稳态误差要求提高到 0.01A。而滞后校正可以提高稳态响应并不降低动态特性,所以使用滞后校正。

### (1) 根轨迹法

① 确定闭环主导极点。原系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

画出根轨迹图如图 6-18 所示。所以,主导极点为  $s_c = -2 \pm 6j$ , 阻尼比为  $\zeta = 0.316$ 。

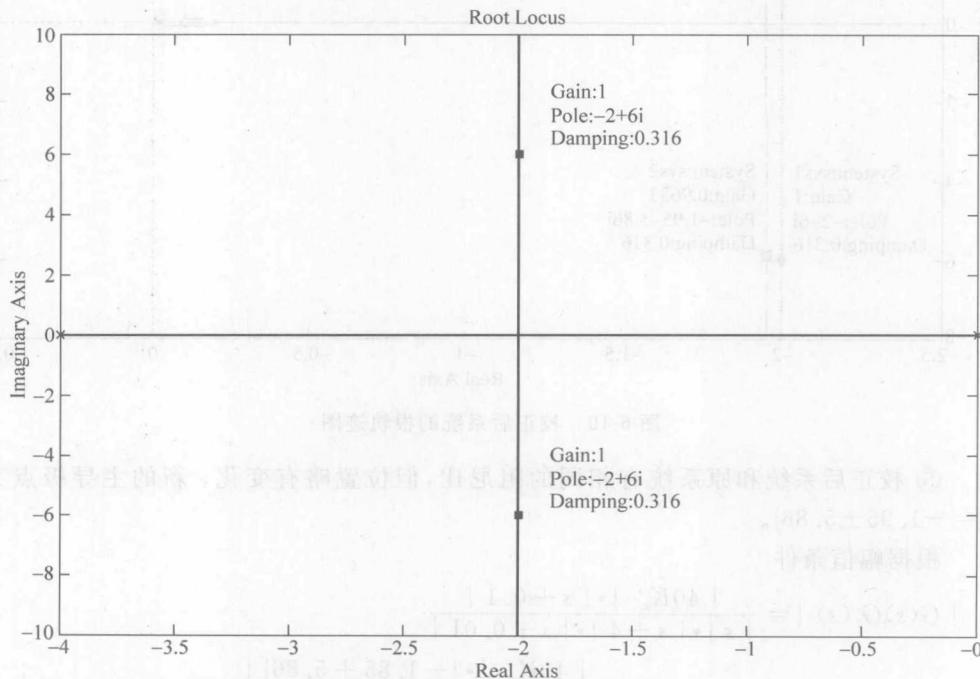


图 6-18 原系统根轨迹图

② 计算校正网络的  $\beta$ 。未校正系统的静态速度误差系数为  $K'_v = 40/4 = 10$ , 要求的静态速度误差系数为  $K_v = 100$ , 所以  $\beta = \frac{K'_v}{K_v} = 0.1$ 。

③ 选  $z_c = -0.1$ , 因为  $z_c = -\frac{1}{\beta T}$ , 则  $T = 100$ , 而  $p_c = -\frac{1}{T} = -0.01$ , 于是相位滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = K_c^* \times \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}} = K_c^* \times \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

校正后系统的传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{40K_c^* \cdot (s + 0.1)}{s(s + 4)(s + 0.01)}$$

④ 绘制校正后的根轨迹图如图 6-19 所示。

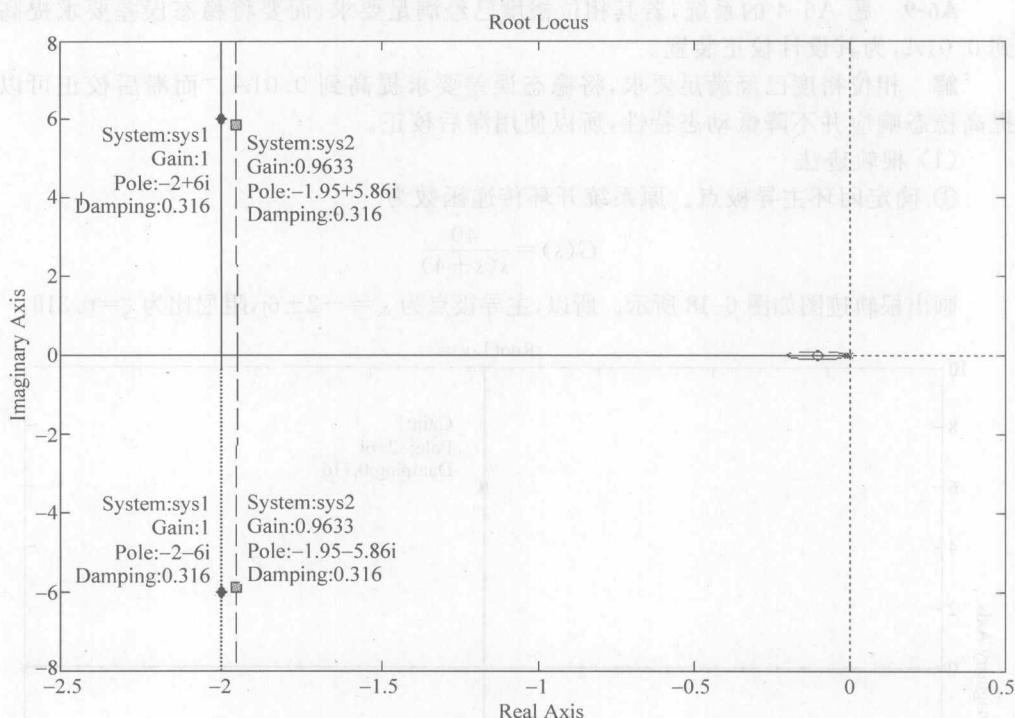


图 6-19 校正后系统的根轨迹图

⑤ 校正后系统和原系统有相同的阻尼比, 但位置略有变化。新的主导极点为  $s_c = -1.95 \pm 5.86j$ 。

根据幅值条件

$$\begin{aligned} |G(s)G_c(s)| &= \frac{|40K_c^*| \cdot |s + 0.1|}{|s| \cdot |s + 4| \cdot |s + 0.01|} \\ &= \frac{|40K_c^*| \cdot |-1.85 + 5.86j|}{|-1.95 + 5.86j| \cdot |2.05 + 5.86j| \cdot |-1.949 + 5.86j|} = 1 \end{aligned}$$

求得

$$K_c^* = \frac{38.5320}{40} = 0.9633$$

设计的滞后环节传递函数为

$$G_c(s) = 0.9633 \times \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

校正后系统的传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{38.532 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 4)(s + 0.01)}$$

验证校正的相位裕度为  $\gamma = 34^\circ$ 。

## (2) 频率法

原系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

根据工程方法得到原系统的伯德图如图 6-20 所示。

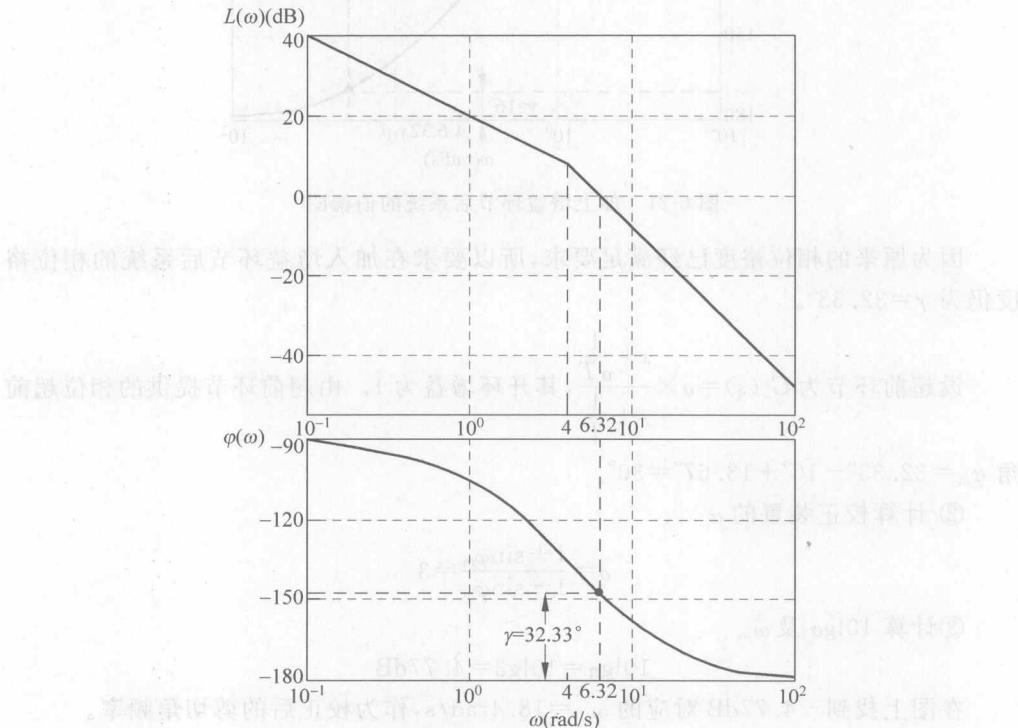


图 6-20 原系统的伯德图

- ① 稳态误差要求提高到  $0.01A$ , 所以现加上一个增益调整环节, 即  $K=5$  加上增益环节以后, 原系统开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{200}{s(s+4)}$$

画出伯德图如图 6-21 所示。

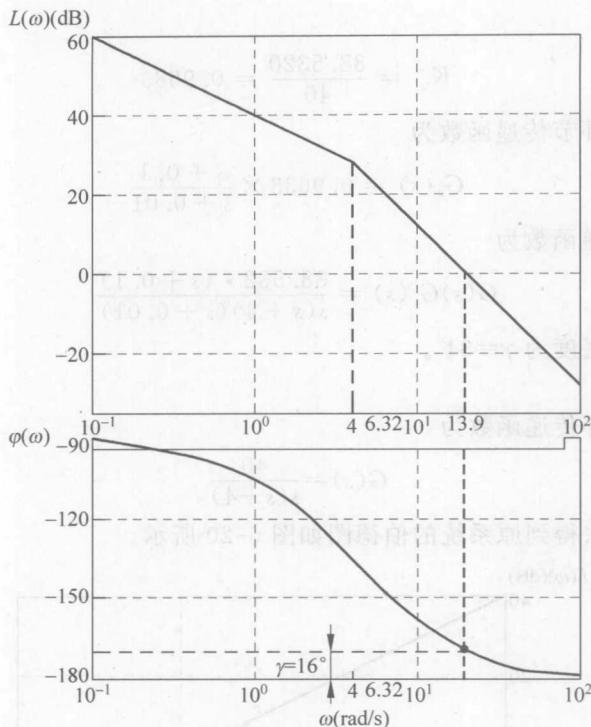


图 6-21 加上增益环节后系统的伯德图

因为原来的相位裕度已经满足要求, 所以要求在加入增益环节后系统的相位裕度仍为  $\gamma=32.33^\circ$ 。

设超前环节为  $G_c(s)=\alpha \times \frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}}$ , 其开环增益为 1。由超前环节提供的相位超前

角  $\varphi_m=32.33^\circ-16^\circ+13.67^\circ=30^\circ$ 。

② 计算校正装置的  $\alpha$

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=3$$

③ 计算  $10\lg\alpha$  及  $\omega_m$

$$10\lg\alpha=10\lg 3=4.77\text{dB}$$

在图上找到  $-4.77\text{dB}$  对应的  $\omega_{cl}=18.4\text{rad/s}$ , 作为校正后的剪切角频率。

$$\omega_{cl}=\omega_m=18.4\text{rad/s}$$

④ 计算  $T$

$$\frac{1}{T}=\sqrt{\alpha} \cdot \omega_m=\sqrt{3} \times 18.4=31.87$$

所以, 超前校正环节为

$$G_c(s)=3 \times \frac{s+10.62}{s+31.87}$$

校正后的系统开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{600(s+10.62)}{s(s+4)(s+31.87)}$$

验证校正的相位裕度为  $\gamma=42.3^\circ$ 。

**A6-10** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+4)}$$

(1) 今欲使系统的速度误差系数提高到 5.0, 不改变原系统的动态性能, 用根轨迹法为其设计一个滞后校正装置。

(2) 比较校正前后系统的瞬态响应指标。

解 确定闭环主导极点。原系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+4)}$$

① 绘制系统的根轨迹图(见图 6-22)

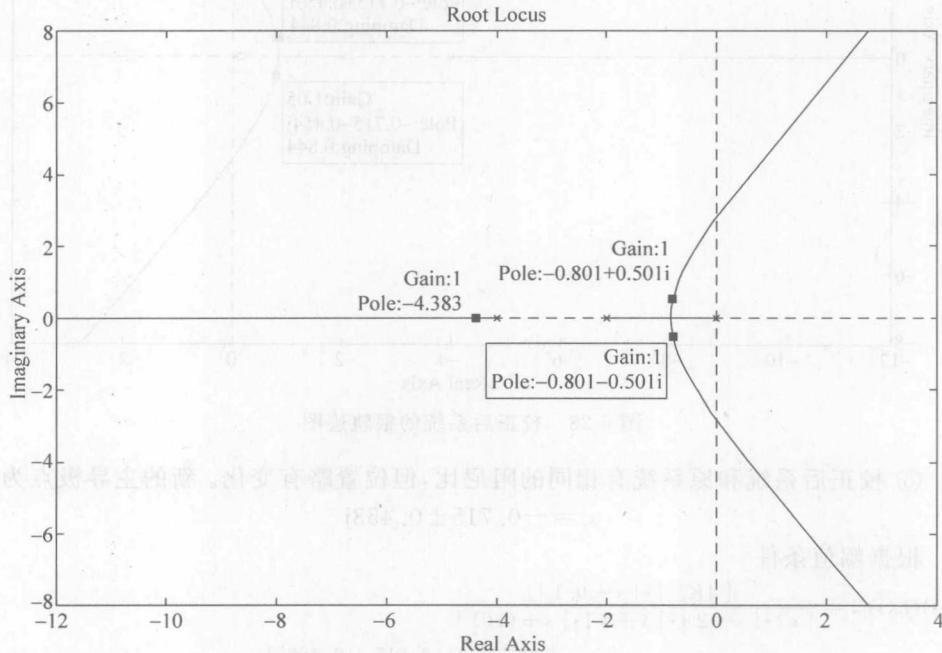


图 6-22 系统的根轨迹图

② 在图上求得主导极点为  $s_c = -0.801 \pm 0.509j$ , 阻尼比为  $\zeta = 0.844$ 。

③ 计算校正网络  $b$ 。未校正系统的静态速度误差系数为  $K'_v = 4/2 \cdot 4 = 0.5$ , 要求的静态速度误差系数为  $K_v = 5$ 。所以  $b = \frac{K'_v}{K_v} = 0.1$ 。

④ 选  $z_c = -0.1$ , 因为  $z_c = -\frac{1}{bT}$ , 则  $T = 100$ , 而  $p_c = -\frac{1}{T} = -0.01$ , 于是相位滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = K_c^* \times \frac{s + \frac{1}{bT}}{s + \frac{1}{T}} = K_c^* \times \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

校正后系统的传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{4K_c^* \cdot (s + 0.1)}{s(s+2)(s+4)(s+0.01)}$$

⑤ 绘制校正后的根轨迹图(见图 6-23)

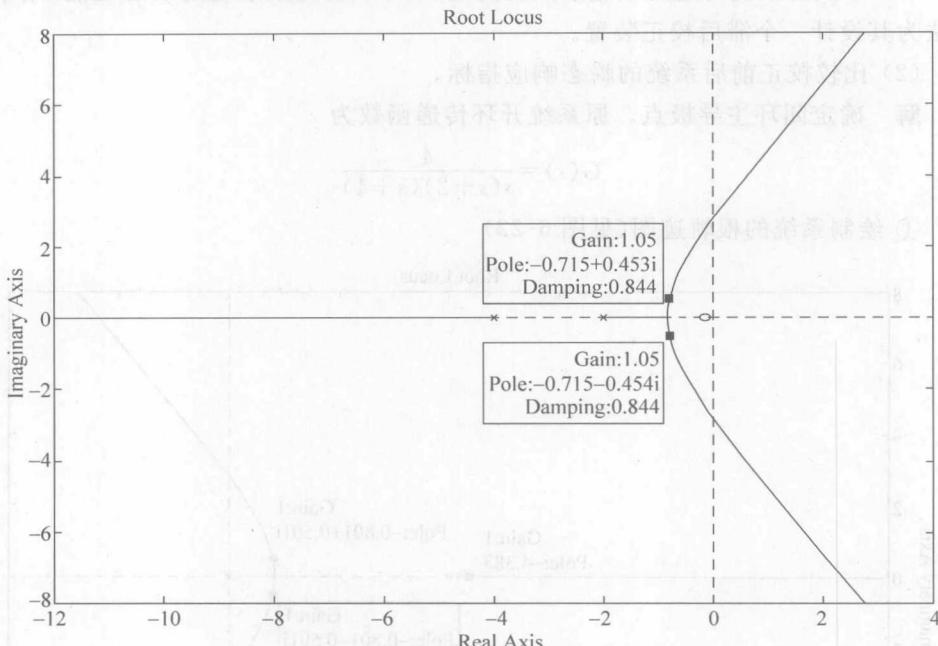


图 6-23 校正后系统的根轨迹图

⑥ 校正后系统和原系统有相同的阻尼比,但位置略有变化。新的主导极点为

$$s_c = -0.715 \pm 0.453j$$

根据幅值条件

$$\begin{aligned} |G(s)G_c(s)| &= \frac{|4K_c^*| \cdot |s + 0.1|}{|s| \cdot |s + 2| \cdot |s + 4| \cdot |s + 0.01|} \\ &= \frac{|4K_c^*| \cdot |-0.615 + 0.453j|}{|-0.715 + 0.453j| \cdot |1.285 + 0.453j| \cdot |3.285 + 0.453j| \cdot |-0.714 + 0.453j|} = 1 \end{aligned}$$

求得  $K_c^* = 1.05$ 。

设计的滞后环节传递函数为

$$G_c(s) = 1.05 \times \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

校正后系统的传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{4.2 \cdot (s + 0.1)}{s(s+2)(s+4)(s+0.01)}$$

校正前后的阶跃响应(见图 6-24)

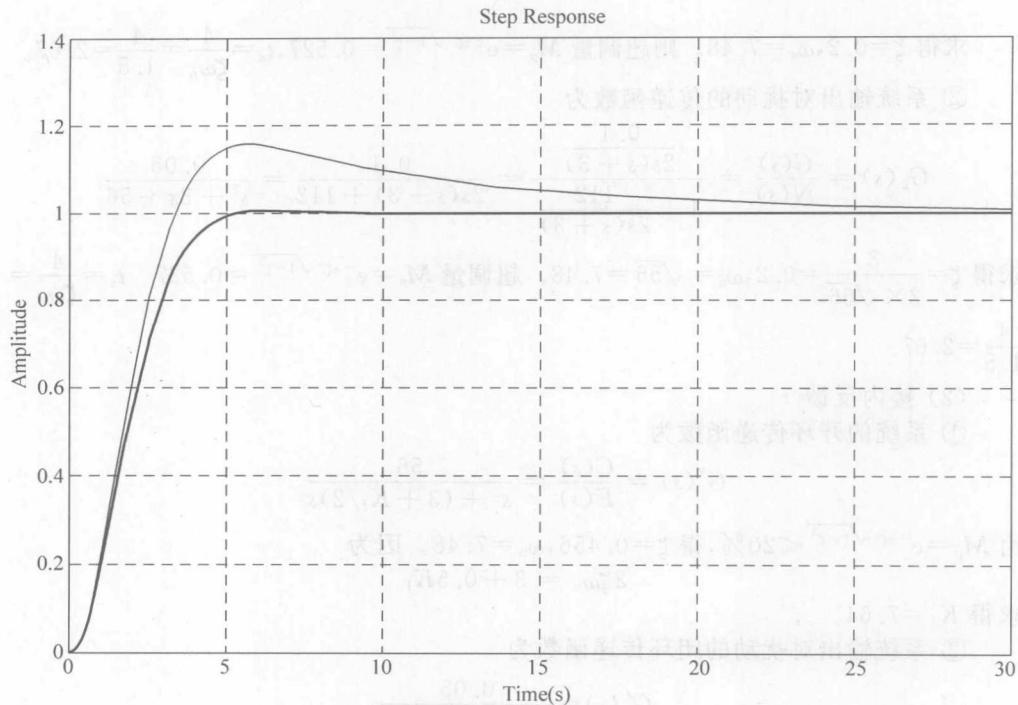


图 6-24 校正后的阶跃响应图

**A6-11** 如图 6-25 的系统,试求:

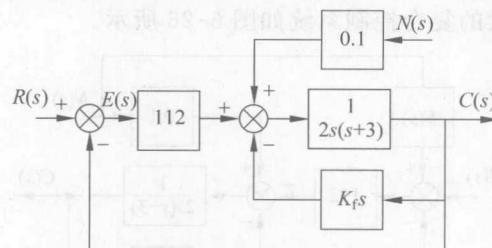


图 6-25 题 A6-11 系统方块图

(1) 当内反馈断开时

- ① 系统对单位阶跃输入的超调量和调整时间;
- ② 系统对单位阶跃扰动的超调量和调整时间。

(2) 当接入内反馈时

- ① 欲使系统对单位阶跃输入的超调量降为 20%, 反馈系数  $K_f$  的值应调到什么值?
- ② 在上述  $K_f$  值下, 系统对单位阶跃扰动的超调量和调整时间。

解

(1) 断开内反馈

- ① 系统输出对输入的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{56}{s(s+3)}$$

求得  $\zeta = 0.2, \omega_n = 7.48$ 。则超调量  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.527, t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1.5} = 2.67$ 。

② 系统输出对扰动的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{0.1}{2s(s+3)}}{1 + \frac{112}{2s(s+3)}} = \frac{0.1}{2s(s+3) + 112} = \frac{0.05}{s^2 + 3s + 56}$$

求得  $\zeta = \frac{3}{2 \times \sqrt{56}} = 0.2, \omega_n = \sqrt{56} = 7.48$ 。超调量  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.527, t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1.5} = 2.67$ 。

(2) 接内反馈

① 系统的开环传递函数为

$$G''(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{56}{s^2 + (3 + K_f/2)s}$$

由  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} < 20\%$ , 得  $\zeta = 0.456, \omega_n = 7.48$ 。因为

$$2\zeta\omega_n = 3 + 0.5K_f$$

求得  $K_f = 7.64$ 。

② 系统输出对扰动的闭环传递函数为

$$G'_2(s) = \frac{0.05}{s^2 + 6.82s + 56}$$

求得  $\zeta = 0.46, \omega_n = 7.48$ , 则  $M_p = 19.64\%, t_s = 1.16s$

**A6-12** 上题的系统,设计一个按扰动补偿的复合控制,使消除扰动对输出的影响。

解 设按扰动补偿的复合控制系统如图 6-26 所示。

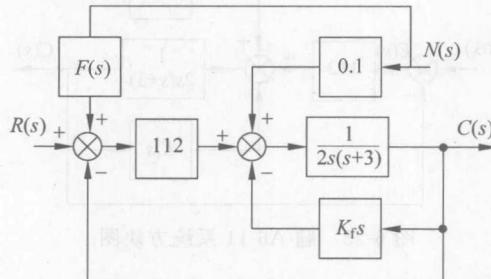


图 6-26 按扰动补偿的复合控制系统结构图

由图 6-26 可得加上前馈补偿  $F(s)$  后, 系统输出对扰动的传递函数为

$$G''_2(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{56F(s) + 0.05}{s^2 + (3 + 0.5K_f)s + 56}$$

为消除扰动对输出的影响, 选择  $F(s) = -1/1120$ 。

## B 深入题

**B6-1** 对题 A6-4, 若对稳态性能要求提高为稳态误差小于 0.01A, 应当采用怎样的串联校正装置才能达到要求? 并为它设计校正装置, 画出校正网络的线路图,

并选择元件参数。

解 原系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

为了满足稳态条件,先加上增益为10的环节并将加上增益环节后的系统作为新的原系统,调整后的原系统的开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{400}{s(s+4)}$$

绘制系统伯德图如图6-27所示。

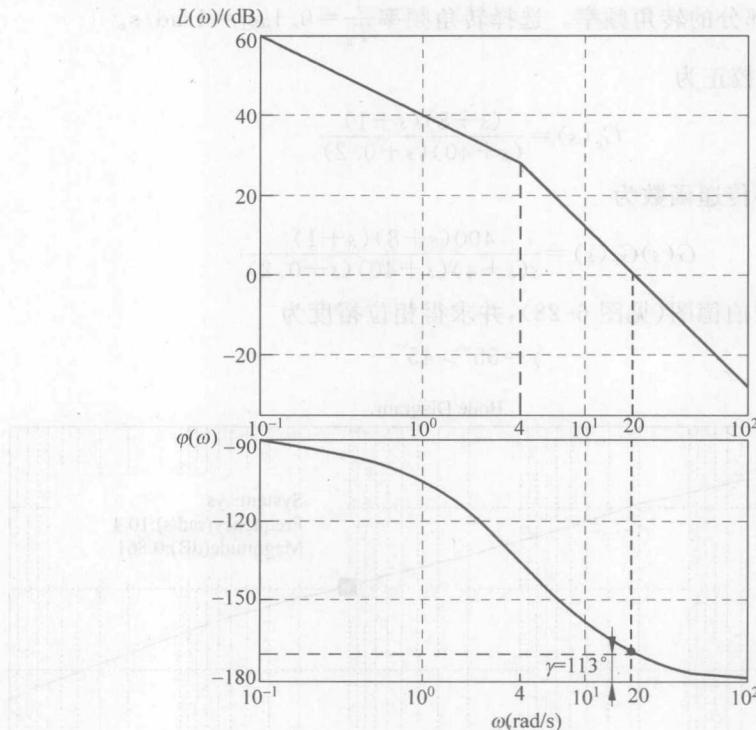


图6-27 系统伯德图

增益剪切频率为  $\omega_c = 20\text{ rad/s}$ , 相位裕度为  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(20/4) = 11.3^\circ$ 。

(1) 在第一种情况下,要求剪切角频率  $\omega_c = 10\text{ rad/s}$ , 此时由于  $\omega_c < \omega_c$ , 无法仅仅使用超前校正。而且虽然滞后校正可以减小剪切角频率,但在剪切角频率  $\omega_c = 10\text{ rad/s}$  处相位裕度  $\gamma = 22^\circ$ , 使用滞后校正也很难达到要求。所以,使用超前-滞后校正。

设超前-滞后校正为

$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

① 选择新的剪切角频率为  $\omega_{c1} = 10\text{ rad/s}$ , 则需要提供的相位超前量为

$$\phi_m = 45^\circ - 22^\circ + 7^\circ = 30^\circ$$

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \Rightarrow \beta = 3$$

取  $\beta=5$ 。

② 确定超前部分的转角频率。在  $\omega_{cl}$  处原系统的  $L(\omega)=12$ dB, 通过  $(10\text{rad/s}, -12\text{dB})$  点画一条斜率为  $20\text{dB/dec}$  的直线。该直线与  $0\text{dB}$  以及  $-20\lg 5$  的交点, 就确定了所要求的转角频率。超前部分的转角频率为  $\frac{\beta}{T_1}=40\text{rad/s}$ ,  $\frac{1}{T_1}=8\text{rad/s}$

③ 确定滞后部分的转角频率。选择转角频率  $\frac{1}{T_2}=0.1\omega_{cl}=1\text{rad/s}$ 。

④ 超前-滞后校正为

$$G_c(s) = \frac{(s+8)(s+1)}{(s+40)(s+0.2)}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{400(s+8)(s+1)}{s(s+4)(s+40)(s+0.2)}$$

绘制校正后系统的伯德图(见图 6-28), 并求得相位裕度为

$$\gamma=55^\circ > 45^\circ$$

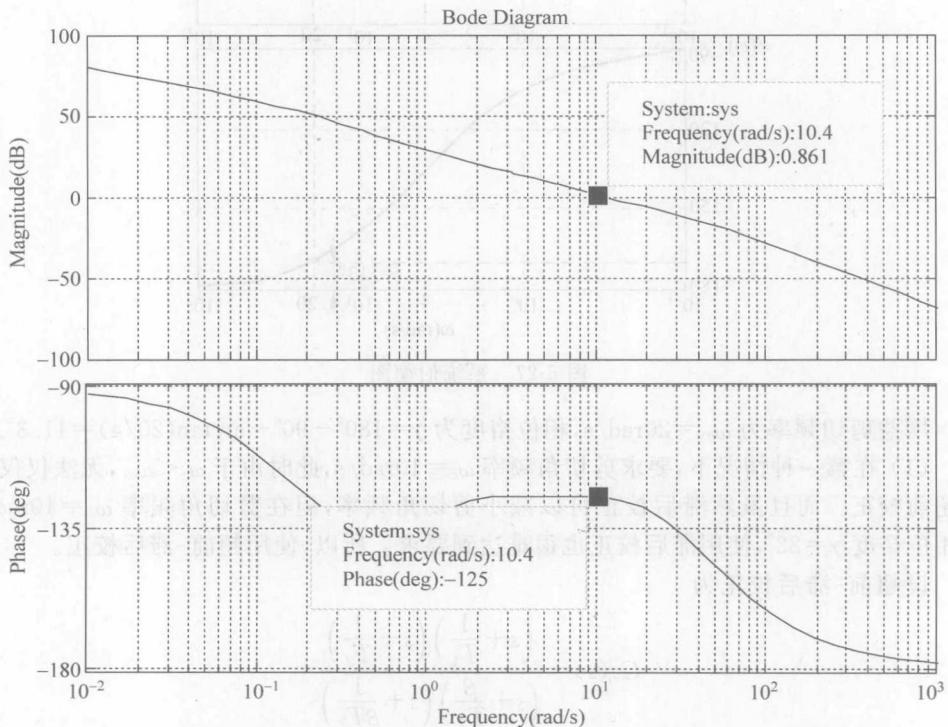


图 6-28 校正后系统的伯德图

选择组件如图 6-29 所示。

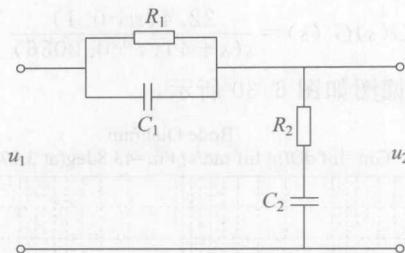


图 6-29 选择组件图

超前滞后环节

$$G_c(s) = \frac{(\alpha T_1 s + 1)(\beta T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{\left(\frac{1}{8}s + 1\right)(s + 1)}{\left(\frac{1}{40}s + 1\right)(5s + 1)}$$

$$\alpha T_1 = 0.125, T_1 = 1/40 = 0.025, \beta T_2 = 1, T_2 = 5$$

$$R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2 = T_1 + T_2 = 5.025$$

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = T_1 T_2 = 0.125$$

$$R_1 C_1 = \alpha T_1 = 0.125$$

$$R_2 C_2 = \beta T_2 = 1$$

$$\alpha \beta = 1$$

计算得到

$$R_1 = 12.5, R_2 = 3.08, C_1 = 0.01, C_2 = 0.325$$

(2) 在第二种情况下, 要求剪切角频率  $\omega_c = 4\text{rad/s}$ , 在剪切角频率  $\omega_c = 4\text{rad/s}$  处, 相位裕度  $\gamma = 45^\circ$ , 满足要求。再者, 由于  $\omega_c < \omega_{c0}$ , 使用滞后校正可以达到要求。

设滞后校正为

$$G_c(s) = \frac{1 + \beta T s}{1 + T s}$$

① 求  $1/\beta T$ 。选取滞后校正网络的零点, 因为  $0.1\omega_c = 0.4$ , 选

$$\frac{1}{\beta T} = 0.1 < 0.1\omega_{c1}$$

② 求  $\beta$ 。欲使校正后  $L(\omega)$  曲线在  $\omega = \omega_c$  穿越  $0\text{dB}$  线, 从图上可查到, 应使  $20\lg\beta = -25\text{dB}$ , 则

$$\beta = 10^{-L(\omega_c)/20} = 10^{-1.25} = 0.056$$

③ 计算滞后校正网络的零、极点零、极点

$$\omega_z = \frac{1}{\beta T} = 0.1 \quad \omega_p = \frac{1}{T} = 0.0056$$

④ 滞后校正为

$$G_c(s) = 0.056 \cdot \frac{s + 0.1}{s + 0.0056}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{22.4(s+0.1)}{s(s+4)(s+0.0056)}$$

绘制校正后系统的伯德图如图 6-30 所示。

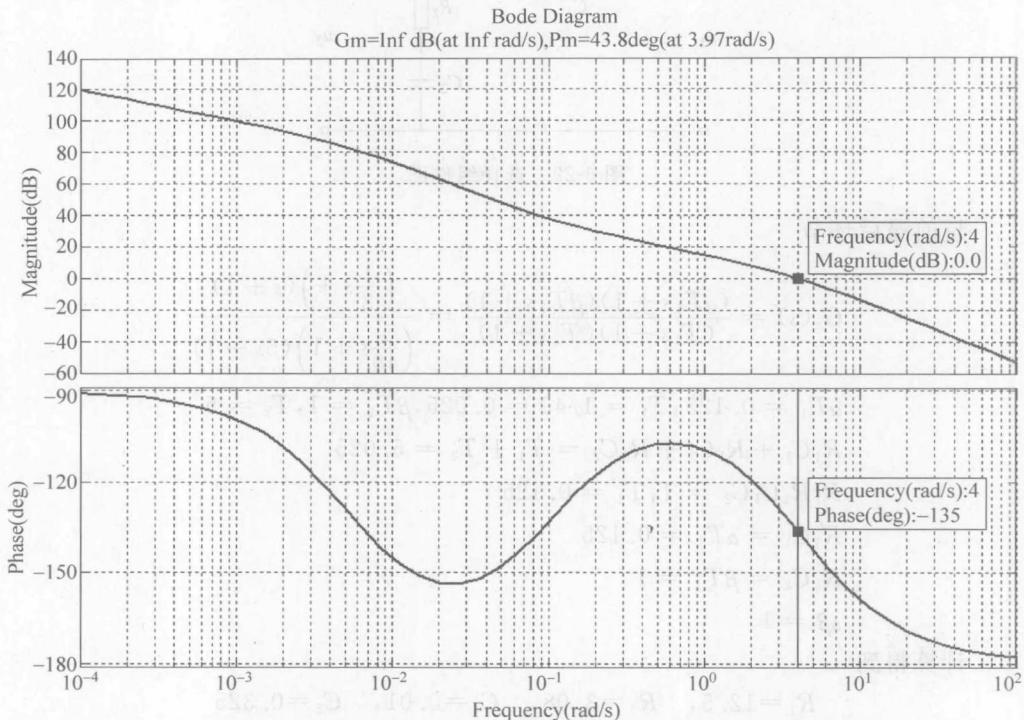


图 6-30 校正后系统的伯德图

求得相位裕度为  $\gamma=45^\circ$ , 满足要求。

选择组件如图 6-31 所示。

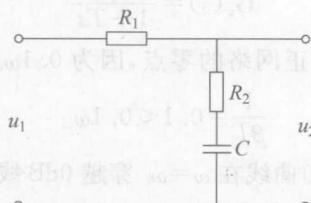


图 6-31 选择组件图

滞后环节

$$G_c(s) = \frac{(\beta Ts + 1)}{(Ts + 1)} = \frac{10s + 1}{178.5s + 1}$$

$$\beta T = 10, \quad T = 178.5$$

$$(R_1 + R_2)C = T = 178.5, \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \beta = 0.056$$

计算得到

$$R_1 = 168.5, \quad R_2 = 10, \quad C = 1$$

**B6-2** 如图 6-32 所示的系统,若  $G_c(s) = K$ ,  $\tau = 0.1s$ ,试绘制系统的伯德图,并确定使相位裕度为  $55^\circ$  的  $K$  值。

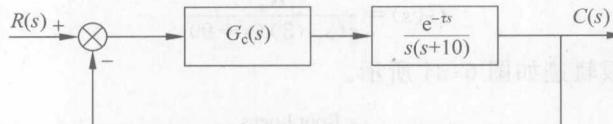


图 6-32 题 B6-2 系统图

解 (1) 当  $K=1$  时,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s(s+10)} = \frac{0.1e^{-0.1s}}{s(0.1s+1)}$$

(2) 绘制系统的伯德图如图 6-33 所示。

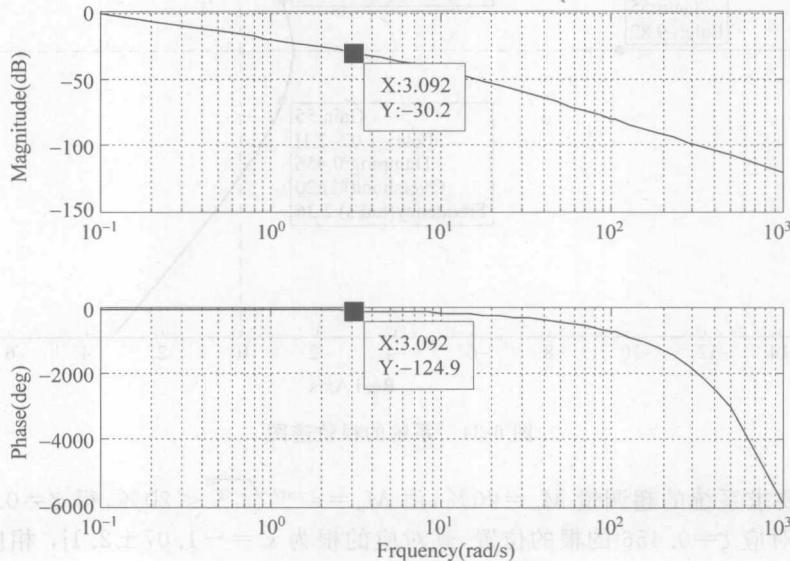


图 6-33 系统的伯德图

(3) 系统的相位裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan^{-1} 0.1 \times \omega_c - 0.1 \times \omega_c \times 180^\circ / 3.14$$

当要求相位裕度为  $55^\circ$  时,对应的穿越频率必须为  $3.1 \text{ rad/s}$ ,此处原系统对应的幅值为  $L(\omega) = -30.2 \text{ dB}$ ,所以,可以增加  $K$  使幅值曲线上移,使得新的剪切频率变成  $\omega_c = 3.1 \text{ rad/s}$ ,通过计算,可得  $K = 31$ 。

**B6-3** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+3)(s+9)}$$

(1) 若要求系统的超调量  $M_p = 20\%$ ,试确定  $K_r$  值;

(2) 在上述  $K_r$  值下, 求系统的速度误差系数  $K_v$  和按 2% 及 5% 准则的调整时间  $t_s$ ;

(3) 设计一个校正装置, 使系统的  $K_v=20, M_p=15\%, t_s$  减小 2.5 倍。

解 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+3)(s+9)}$$

画出系统的根轨迹如图 6-34 所示。

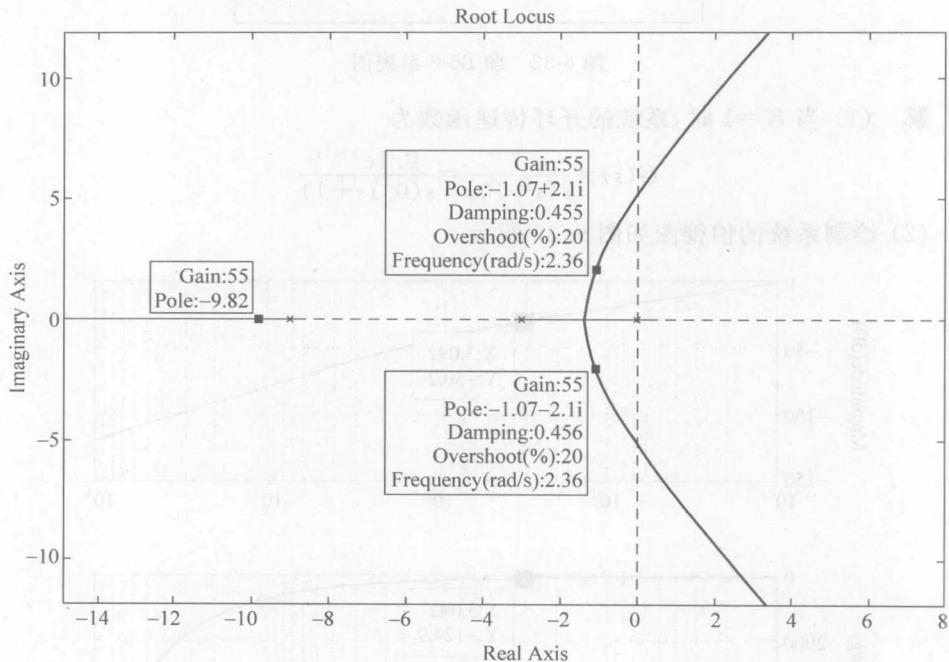


图 6-34 系统的根轨迹图

(1) 要求系统的超调量  $M_p=20\%$ , 由  $M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}<20\%$ , 得  $\xi=0.456$ 。在图中找出对应  $\xi=0.456$  的根的位置, 其对应的根为  $s_c=-1.07 \pm 2.1j$ , 相应的  $K=K_r=55$ 。

(2) 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{55}{s(s+3)(s+9)}$$

系统的速度误差系数  $K_v=\frac{55}{3\times 9}=2.04$ ; 2%准则的调整时间  $t_{s2\%}=\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{1.07}=3.74$ ; 5%准则的调整时间  $t_{s5\%}=\frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{1.07}=2.8$ 。

系统的阶跃响应如图 6-35 所示。

(3) 要求系统的  $K_v=20$ , 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{55}{s(s+3)(s+9)}$$

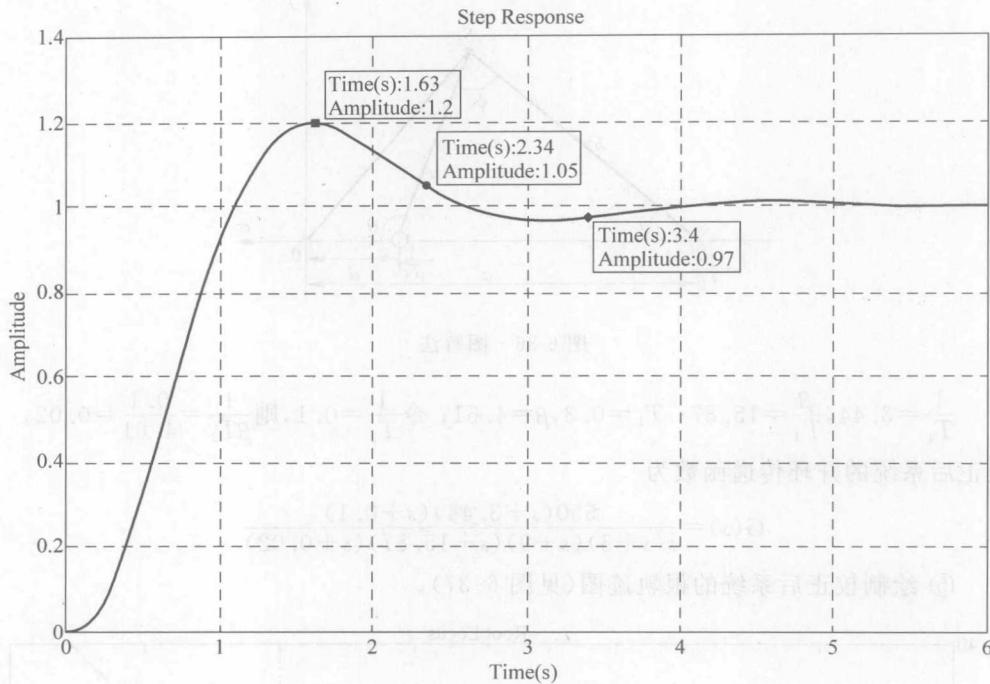


图 6-35 系统的阶跃响应曲线

① 根据二阶系统的时域性能指标  $M_p = 15\%$ ,  $t_s = 3.74/2.5 = 1.5$ , 求得要求的  $\zeta = 0.52$ ,  $\omega_n = 5.13$ 。闭环系统的期望主导极点为

$$s_c = -2.67 \pm 4.38j$$

设校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = K_c \cdot \frac{55}{s(s+3)(s+9)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

② 求  $K_c$ 。要求系统的  $K_v = 20$ , 所以  $K_c = 20/2.04 = 10$ 。

③ 求超前校正装置提供的超前相角。超前相角

$$\phi = -180^\circ + (121.37^\circ + 85.69^\circ + 34.68^\circ) = 61.74^\circ$$

④ 确定  $T_1, \beta$ 。

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \cdot \left| \frac{550}{s(s+3)(s+9)} \right|_{s=-2.67+4.38j} = 1 \Rightarrow \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \times 3.17 = 1$$

$$\angle \left( s + \frac{1}{T_1} \right) - \angle \left( s + \frac{1}{\beta T_1} \right) = 61.74^\circ$$

由图解法(见图 6-36), 可以得到  $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3.17} \\ \phi = \theta - \gamma = 61.74^\circ \end{cases}$ , 从而求得

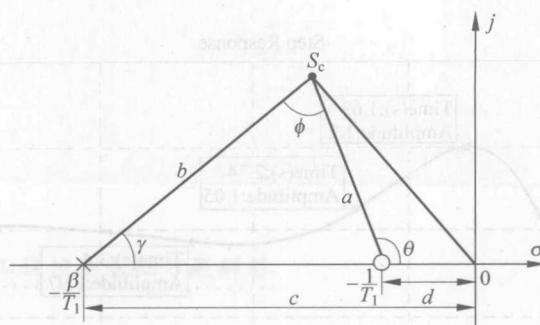


图 6-36 图解法

$$\frac{1}{T_1} = 3.44, \frac{\beta}{T_1} = 15.87; T_1 = 0.3, \beta = 4.61; \text{令 } \frac{1}{T_2} = 0.1, \text{则 } \frac{1}{\beta T_2} = \frac{0.1}{4.61} = 0.02.$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{550(s+3.44)(s+0.1)}{s(s+3)(s+9)(s+15.87)(s+0.02)}$$

⑤ 绘制校正后系统的根轨迹图(见图 6-37)。

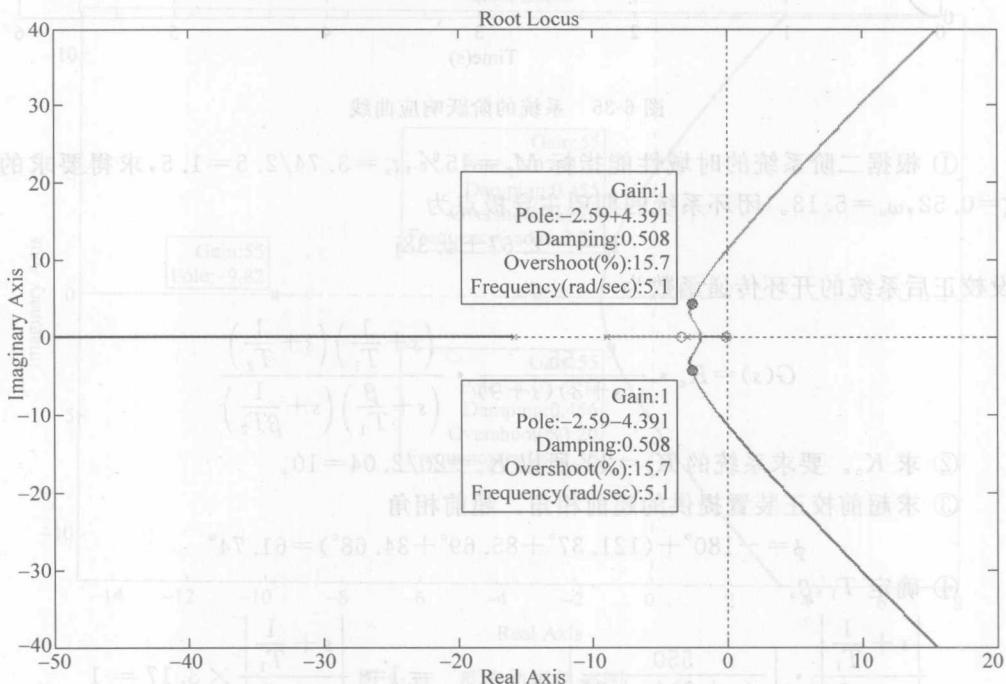


图 6-37 校正后系统的根轨迹图

⑥ 系统的阶跃响应如图 6-38 所示。

**B6-4** 如图 6-39(a) 的系统,  $K$  为增益可调的放大器,  $G(s)$  的对数幅频特性如图 6-39(b) 所示。试问选用哪种校正装置, 能满足系统如下要求:

(1) 速度误差系数  $K_v = 10$ ;

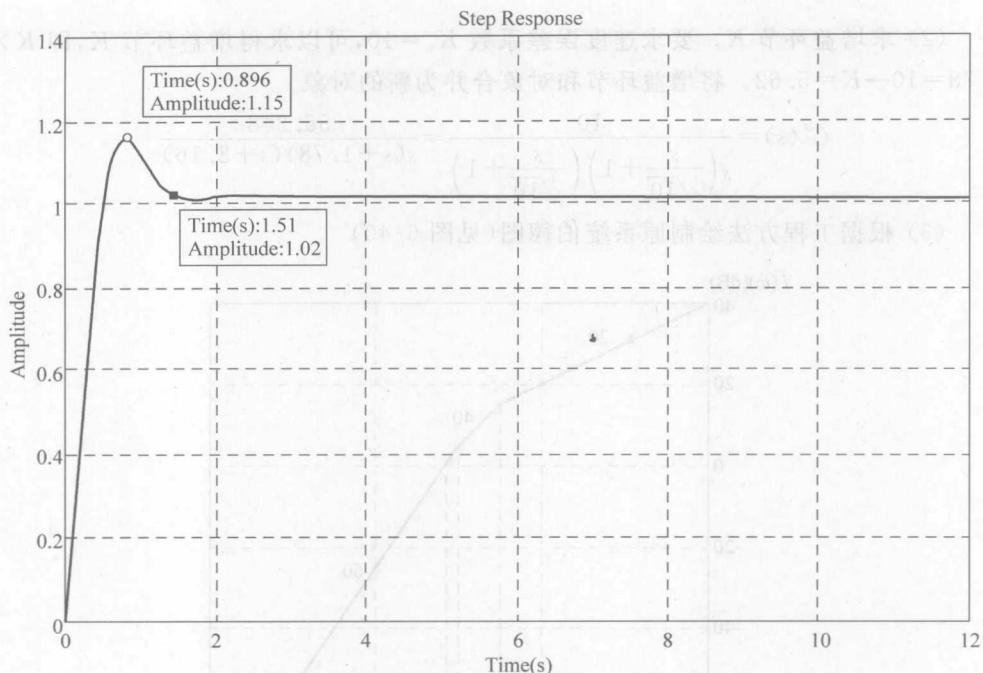


图 6-38 系统的阶跃响应曲线

- (2) 剪切角频率  $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$ ;
- (3) 相位裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ 。

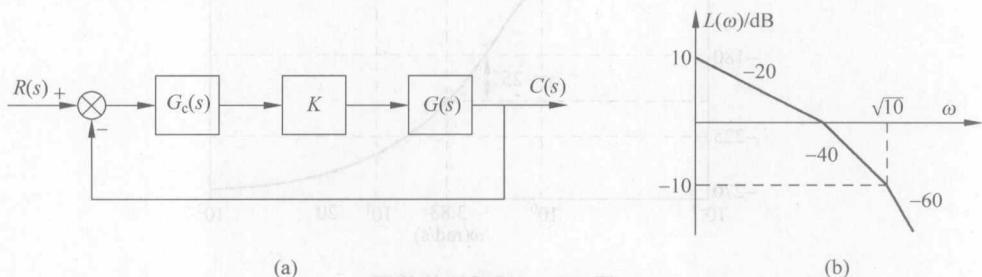


图 6-39 题 B6-4 系统方块图和对数幅频特性图

解 (1) 求对象的传递函数。由于  $\omega = \sqrt{10}$  时幅值为  $-10 \text{ dB}$ , 可以求得剪切频率  $\omega_c$  为

$$40 \lg \left( \frac{\sqrt{10}}{\omega_c} \right) = 10, \quad \text{得 } \omega_c = \sqrt[4]{10} = 1.78 \text{ (rad/s)}$$

低频段延长线和 0dB 的交点正好为  $\omega_c = 1.78$ , 所以  $K_1 = \omega_c = \sqrt[4]{10} = 1.78$ 。对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{\sqrt{10}}{s}}{s \left( \frac{s}{\sqrt[4]{10}} + 1 \right) \left( \frac{s}{\sqrt{10}} + 1 \right)} = \frac{1.78}{s \left( \frac{s}{1.78} + 1 \right) \left( \frac{s}{3.16} + 1 \right)}$$

(2) 求增益环节  $K$ 。要求速度误差系数  $K_v = 10$ , 可以求得增益环节  $K$ , 即  $K \times 1.78 = 10 \rightarrow K = 5.62$ 。将增益环节和对象合并为新的对象

$$G'(s) = \frac{10}{s\left(\frac{s}{\sqrt{10}}+1\right)\left(\frac{s}{4\sqrt{10}}+1\right)} = \frac{56.248}{s(s+1.78)(s+3.16)}$$

(3) 根据工程方法绘制原系统伯德图(见图 6-40)

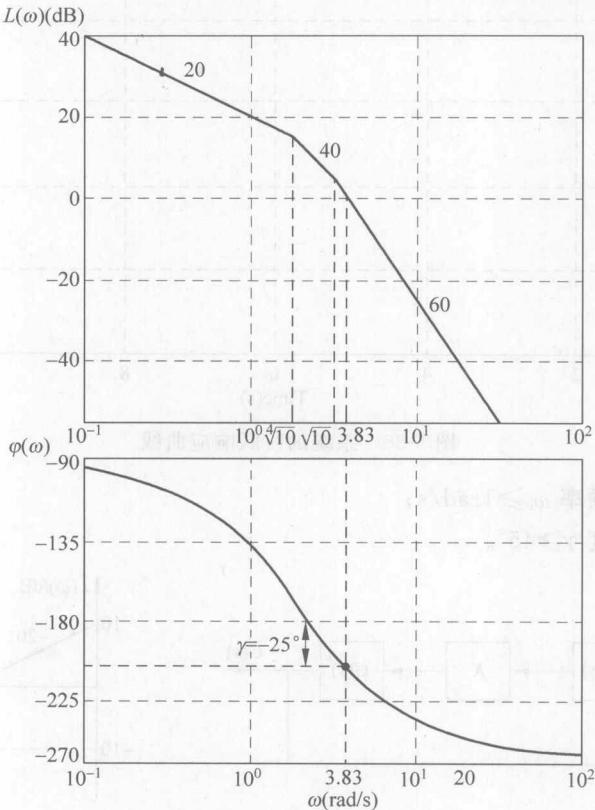


图 6-40 原系统伯德图

相位裕度为  $\gamma = -25^\circ$ , 要求相位裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ 。采用超前-滞后校正, 设为

$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

① 根据工程方法得到的原系统伯德图, 选择新的剪切角频率  $\omega_c = 2.37 \text{ rad/s}$ , 此处的相位为  $\phi = -180^\circ$ , 由超前环节提供的相位超前角  $\phi_m = 45^\circ - 0^\circ + 5^\circ = 50^\circ$ 。

② 确定滞后部分的转角频率。选择转角频率  $\omega = \frac{1}{T_2}$  在新的剪切角频率以下十倍频程处, 即  $\omega = 0.2 \text{ rad/s}$ , 所以  $T_2 = 5$ 。

③ 根据超前部分最大超前相位角  $\phi_m$ , 计算  $\beta$

$$\sin\phi_m = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}, \quad \text{取 } \beta = 7.55$$

④ 确定超前部分。从原系统的伯德图可以看到  $G'(j2.37) = 10\text{dB}$ , 超前-滞后校正可以产生  $-17.56\text{dB}$  的幅值。画一条斜率为  $20\text{dB/dec}$ , 且通过  $(-10\text{dB}, 2.37\text{rad/s})$  点的直线。该直线与  $0\text{dB}$  以及  $-20\lg 7.55$  的交点, 就确定了所要求的转角频率。可以求得与  $0\text{dB}$  交点的角频率  $\omega_4$  为

$$20\log(\omega_4/2.37) = 10\text{dB} \Rightarrow \omega_4 = 7.5$$

与  $-20\lg 7.55$  交点的角频率, 即超前部分的转角频率  $\omega_3$  为

$$20\log(2.37/\omega_3) = -10\text{dB} + 17.56\text{dB} = 7.56\text{dB} \Rightarrow \omega_3 = 1$$

⑤ 超前-滞后校正为

$$G_c(s) = \frac{(s+1)(s+0.2)}{(s+7.5)(s+0.03)}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{56.248(s+1)(s+0.2)}{s(s+1.78)(s+3.16)(s+7.5)(s+0.03)}$$

校正后系统的伯德图如图 6-41 所示。

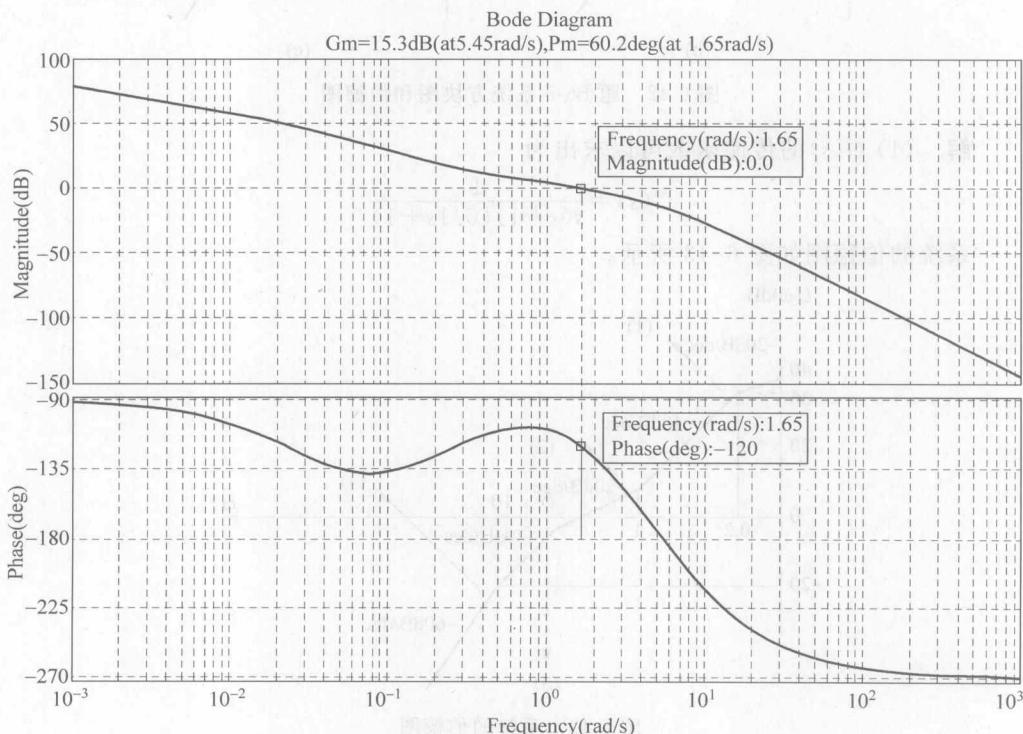


图 6-41 校正后系统的伯德图

**B6-5** 如图 6-42(a)的系统,图 6-42(b)是  $G(s)$  的对数幅频特性,系统期望的对数幅频特性如图 6-42(c)所示。

- (1) 写出系统期望开环传递函数;
- (2) 令  $F(s)=0$ ,设计一个串联校正装置  $G_c(s)$ ,使系统满足期望特性要求;
- (3) 令  $G_c(s)=1$ ,设计一个反馈校正装置  $F(s)$ ,使系统满足期望特性要求。

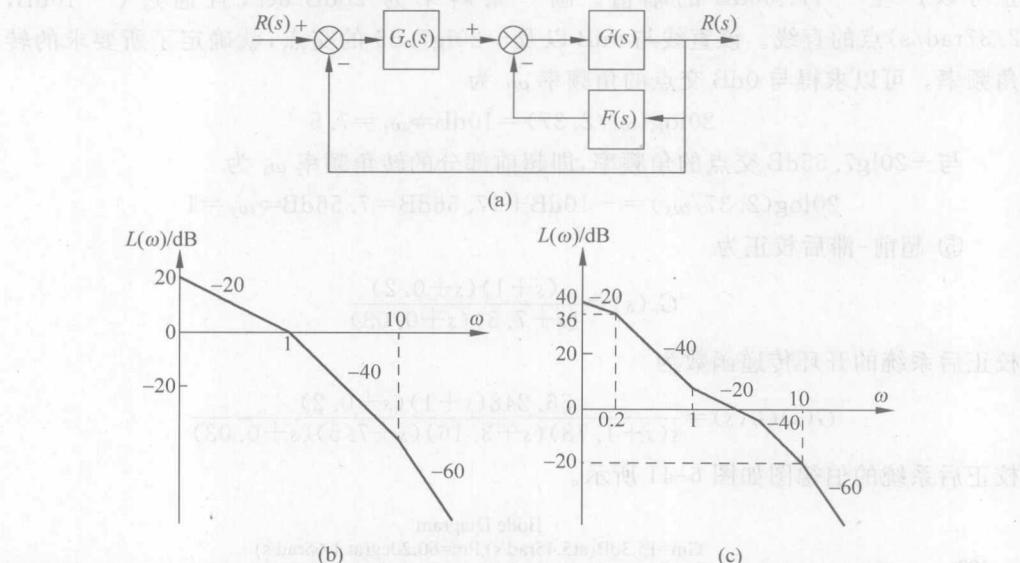


图 6-42 题 B6-5 系统方块图和伯德图

解 (1)  $G(s)$  的传递函数可以求出为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

系统的伯德图如图 6-43 所示。

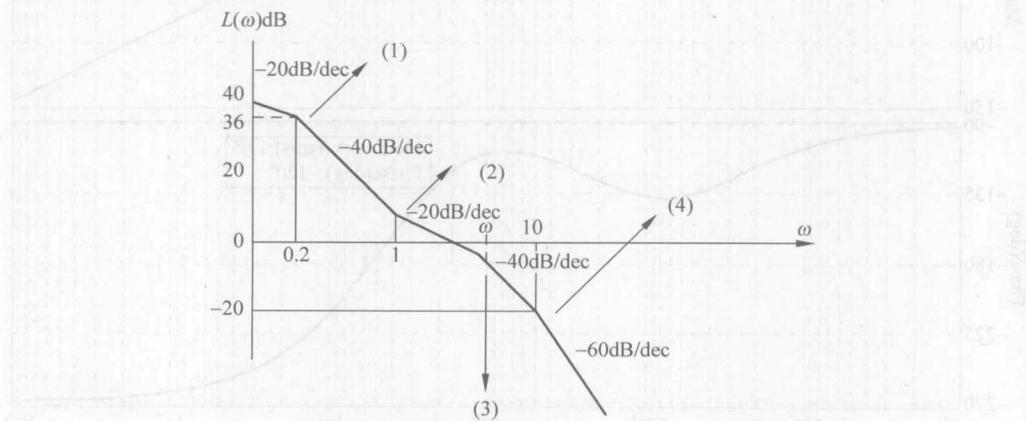


图 6-43 系统的伯德图

在  $\omega_1=0.2$  处即(1)处的幅值为  $L(\omega_1)=36$ , 可以计算得到在  $\omega_2=1$  处即(2)处的幅值为  $L(\omega_2)=36-40\lg 5$ 。

假设转折点(3)处的频率为  $\omega$ , 在  $\omega_3 = \omega$  处即(3)处的幅值为

$$L(\omega) = L(\omega_2) - 20\lg\omega = 36 - 40\lg 5 - 20\lg\omega$$

在  $\omega_4 = 10$  处即(4)处的幅值为

$$L(\omega_4) = L(\omega) + 40\lg\omega - 40 = 36 - 40\lg 5 - 20\lg\omega + 40\lg\omega - 40 = 20\lg\omega - 4 - 40\lg 5$$

又在  $\omega_4 = 10$  处的幅值为  $-20$  dB, 所以  $20\lg\omega - 4 - 40\lg 5 = -20$ , 解得  $\omega = 3.962$ 。

假设系统的开环增益为  $K_c$ , 则  $20\lg K_c = 36 - 20\lg 5$ , 解得  $K_c = 12.62$ 。

系统期望开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{12.62(s+1)}{s(5s+1)(0.252s+1)(0.1s+1)}$$

(2) 令  $F(s) = 0$ , 系统的开环传递函数为

$$G_e(s)G(s) = G'(s)$$

所以

$$G_e(s) = \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{\frac{12.62(s+1)}{s(5s+1)(0.252s+1)(0.1s+1)}}{\frac{1}{s(s+1)(0.1s+1)}} = \frac{12.62(s+1)^2}{(5s+1)(0.252s+1)}$$

(3) 将原系统的增益提高 12.62 倍, 使得校正前后的伯德图曲线的起始幅值相等(见图 6-44)。

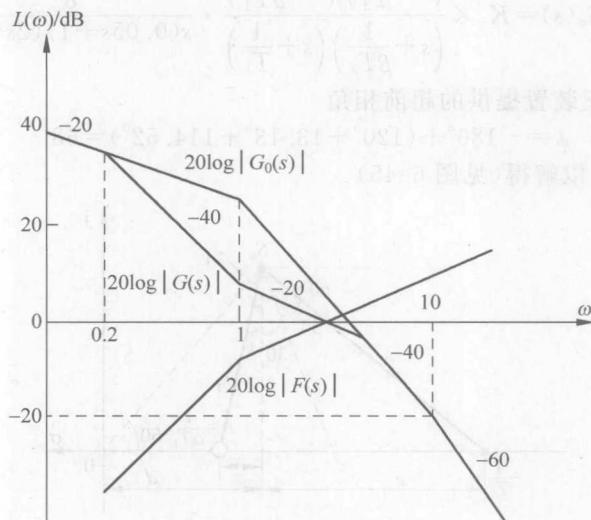


图 6-44 校正前后系统的伯德图

比较校正前和校正后系统的幅频特性, 选择  $20\log|G(s)|$  的中频段特性的倒特性为反馈校正通道频率响应  $F(s)$  的幅频特性  $20\log|F(s)|$ , 即

$$F(s) = \frac{0.39622s^2}{s+1}$$

**B6-6** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{8}{s(0.05s+1)(2s+1)}$$

(1) 用根轨迹法设计一个合适的串联校正装置,使系统的速度误差系数  $K_v = 80\text{s}^{-1}$ , 超调量  $M_p = 16\%$ , 按 2% 准则的调整时间  $t_s = 1.65\text{s}$ ;

(2) 按相同的性能指标要求, 用频率响应法设计串联校正装置;

(3) 分别求(1)和(2)校正后系统的单位阶跃响应, 验证设计结果, 二者之间是否有区别, 分析原因。

解 (1) 用根轨迹法设计串联校正装置

① 根据二阶系统的时域性能指标, 有

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} < 16\%, \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.65$$

求得校正后系统的  $\zeta = 0.5, \omega_n = 4.75$ 。闭环系统的期望主导极点为

$$s_c = -2.375 \pm 4.11j$$

② 设计超前-滞后校正

$$G_c(s) = K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{8}{s(0.05s+1)(2s+1)}$$

③ 求超前校正装置提供的超前相角

$$\phi = -180^\circ + (120^\circ + 13.13^\circ + 114.52^\circ) = 68^\circ$$

利用图解法可以解得(见图 6-45)

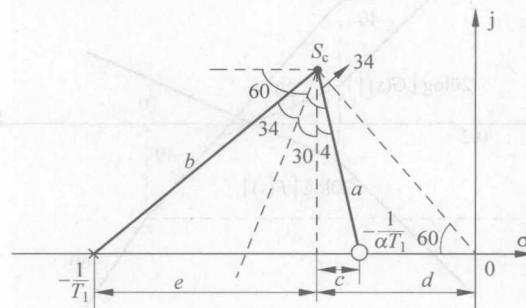


图 6-45 图解法

$$\begin{cases} -\frac{1}{T_1} = e + d = -4.11 \cdot \tan(64^\circ) - 2.375 = -10.802 \\ -\frac{1}{\alpha T_1} = d - c = -2.375 + 4.11 \cdot \tan(4^\circ) = -2.088 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T_1} = 10.802 \\ \frac{1}{\alpha T_1} = 2.088 \end{cases}$$

④ 根据幅值条件确定  $K_c$

$$\left| K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{8}{s(0.05s+1)(2s+1)} \right|_{s_c=-2.375 \pm 4.11j} = 1$$

$$K_c = 11.0375$$

⑤ 选择滞后部分零极点。要求系统的  $K_v=80$ , 则

$$\frac{8K_c\beta}{\alpha} = 80, \quad \text{得到 } \beta = 4.687$$

选取  $T_2$  足够大, 令  $T_2=10$ , 所以,

$$\frac{1}{T_2} = 0.1, \quad \frac{1}{\beta T_2} = 0.021$$

⑥ 校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{88.3 \cdot (s+2.088)(s+0.1)}{s(0.05s+1)(2s+1)(s+10.802)(s+0.021)}$$

⑦ 校正后系统的根轨迹如图 6-46 所示。

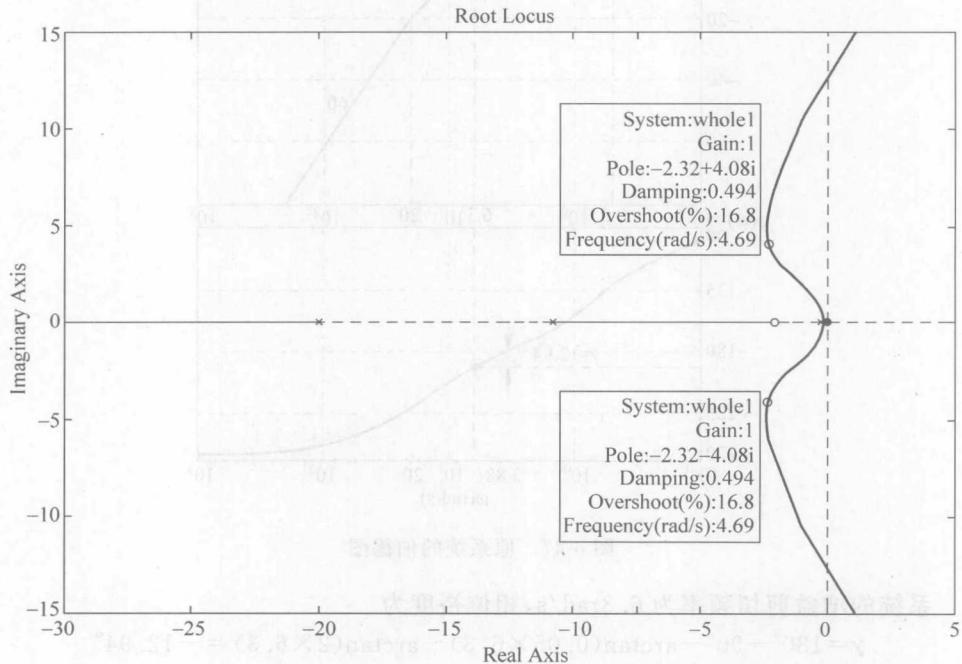


图 6-46 校正后系统的根轨迹图

主导极点参数非常接近要求。

(2) 速度误差系数  $K_v=80$ , 所以  $K_c=80/8=10$ 。

① 根据二阶系统的时域性能指标, 有超调量  $M_p \leq 16\%$ , 按 2% 准则的调节时间  $t_s \leq 1.65s$ , 将时域指标换算为频域指标。由公式

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \leq 1.65s$$

解得  $\gamma \geq 52^\circ$ ,  $\omega_c \geq 3.8 \text{ rad/s}$ 。

② 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{80}{s(0.05s+1)(2s+1)}$$

③ 根据工程方法绘制原系统伯德图(见图 6-47)

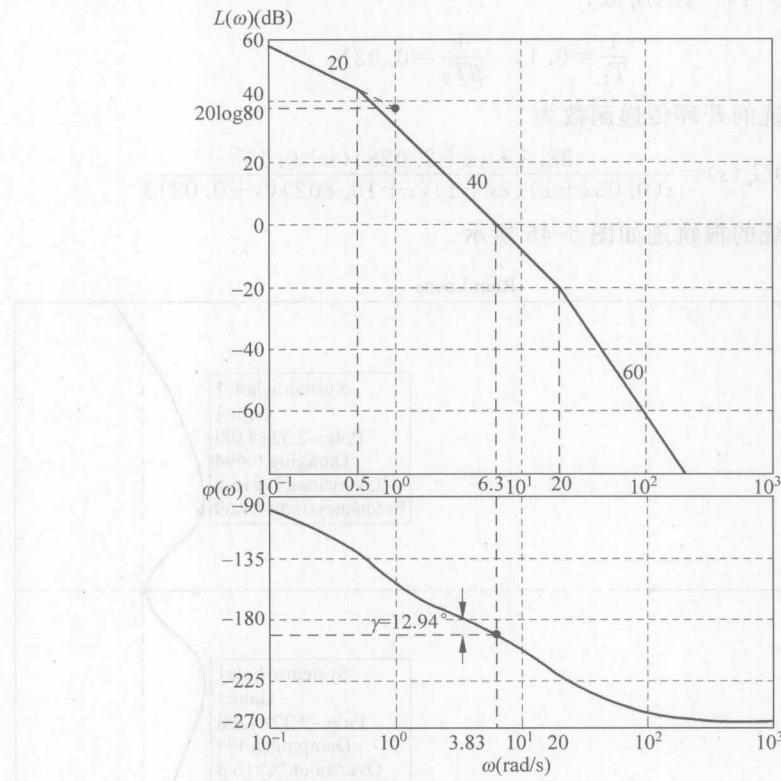


图 6-47 原系统的伯德图

系统的增益剪切频率为  $6.3 \text{ rad/s}$ , 相位裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.05 \times 6.3) - \arctan(2 \times 6.3) = -12.94^\circ$$

④ 设超前-滞后校正为

$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

根据原系统 Bode 图,新的剪切角频率  $\omega_c = 3.15 \text{ rad/s}$ ,在新的剪切频率对应的相位裕度  $\gamma = 0^\circ$ ,所需的相位超前角  $\phi_m = 52^\circ + 8^\circ = 60^\circ$ 由超前环节提供。

确定滞后部分的转角频率。选择转角频率  $\omega = \frac{1}{T_2}$  在新的剪切角频率以下十倍频程处，即  $\omega = 0.38\text{rad/s}$ ，所以  $T_2 = 2.63$ 。

确定  $\beta$

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad \text{取 } \beta = 14$$

确定超前部分：从原系统的伯德图可以看到  $G'(j3.15) = 12\text{dB}$ ，超前-滞后校正可以产生  $-23\text{dB}$  的幅值。画一条斜率为  $20\text{dB/dec}$  且通过  $(-12\text{dB}, 3.15\text{rad/s})$  点的直线。该直线与  $0\text{db}$  以及  $-20\lg 14\text{dB}$  的交点，就是所要求的转角频率。可以求得与  $0\text{dB}$  交点的角频率为

$$20\log(\omega_4/3.15) = 12\text{dB} \Rightarrow \omega_4 = 12.54$$

与  $-20\lg 14\text{dB}$  交点的角频率，即超前部分的转角频率为

$$20\log(3.15/\omega_3) = -12\text{dB} + 23\text{dB} = 11\text{dB} \Rightarrow \omega_3 = 0.9$$

超前-滞后校正为

$$G_c(s) = \frac{(s+0.9)(s+0.38)}{(s+12.54)(s+0.027)}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{80(s+0.9)(s+0.38)}{s(0.05s+1)(2s+1)(s+12.54)(s+0.027)}$$

校正后系统的伯德图如图 6-48 所示。

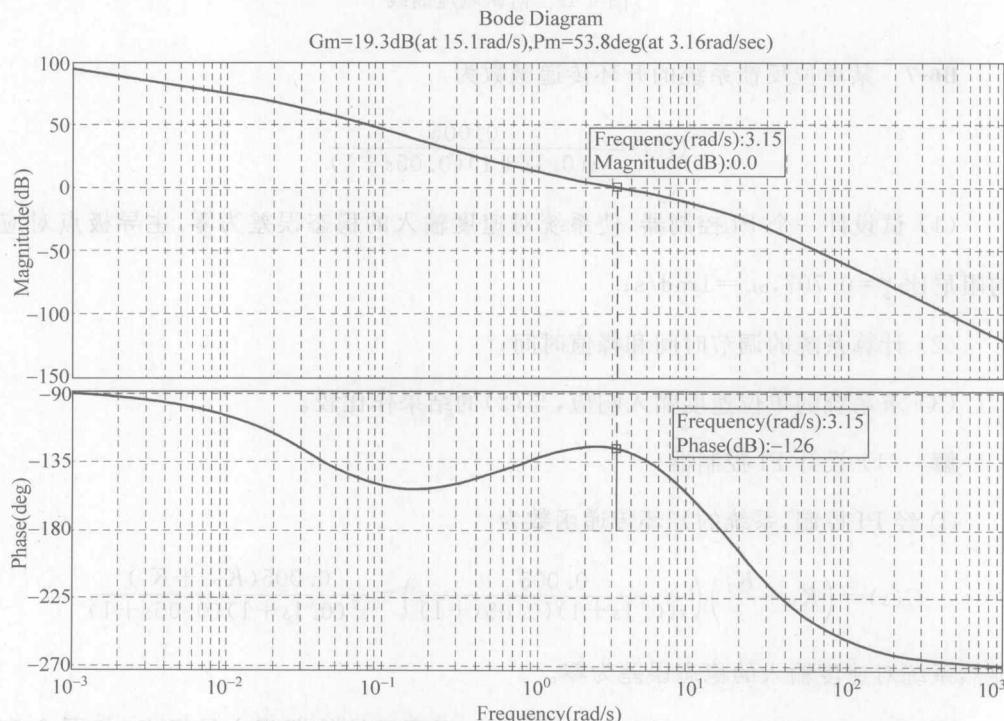


图 6-48 校正后系统的伯德图

(3) 求阶跃响应(如图 6-49 所示)。

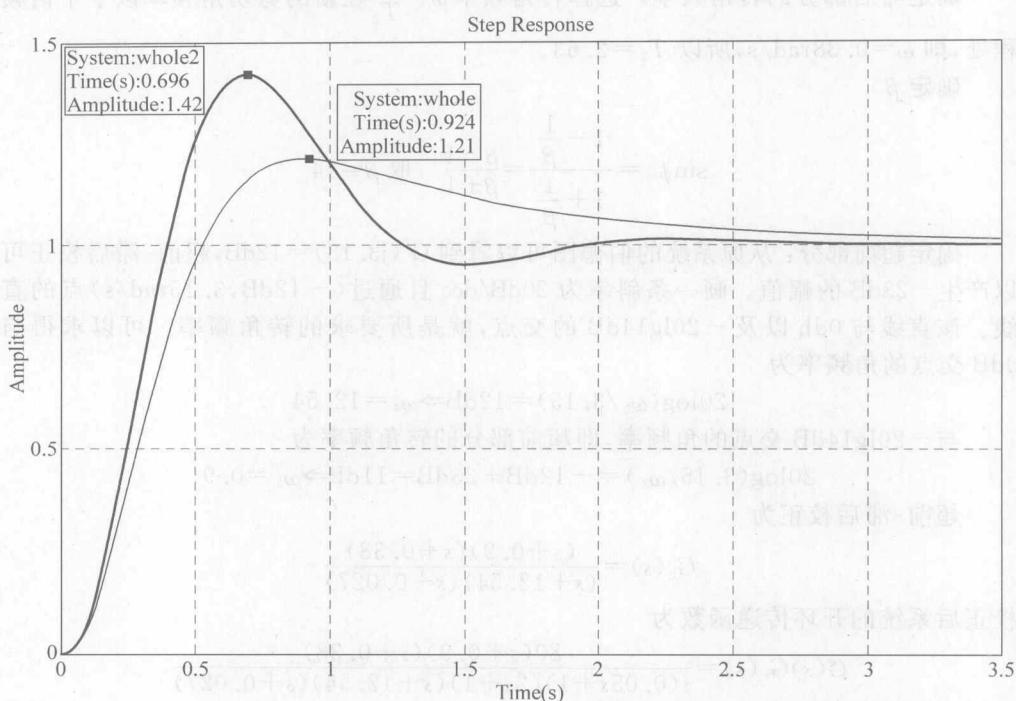


图 6-49 阶跃响应曲线

**B6-7** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{0.005}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

- (1) 试设计一个 PI 控制器,使系统对速度输入的稳态误差为零,主导极点对应  
的阻尼比  $\zeta=0.707$ ,  $\omega_n=1\text{rad/s}$ ;
- (2) 计算系统的调节时间和峰值时间;
- (3) 求系统的单位速度输入响应,与(2)的结果作比较。

解 (1) 设计 PI 控制器

① 经 PI 控制,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \left(\frac{0.005}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}\right) = \frac{0.005(K_p s + K_i)}{s^2(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

显然系统对速度输入的稳态误差为零。

② 校正后系统的  $\zeta=0.707$ ,  $\omega_n=1\text{rad/s}$ , 闭环系统的期望主导极点(如图 6-51)

所示)为

$$s_c = -0.707 \pm 0.707j$$

则系统在主导极点  $s_c = -0.707 \pm 0.707j$  位置, 满足如下的幅值和相角条件表达式

$$\begin{aligned} |G(s)| &= \frac{0.005 |K_p s_c + K_1|}{|s_c|^2 \cdot |0.1s_c + 1| \cdot |0.05s_c + 1|} \\ &= \frac{0.005 |(-0.707K_p + K_1) + 0.707K_{pj}|}{|-0.707 + 0.707j|^2 \cdot |1 - 0.0707 + 0.0707j| \cdot |1 - 0.03535 + 0.03535j|} = 1 \\ \angle G(s) &= \angle(K_p s_c + K_1) - \angle(s_c^2) - \angle(0.1s_c + 1) - \angle(0.05s_c + 1) \\ &= \angle((-0.707K_p + K_1) + 0.707K_{pj}) - \angle((-0.707 + 0.707j) \\ &\quad \cdot (-0.707 + 0.707j)) - \angle(1 - 0.0707 + 0.0707j) \\ &\quad - \angle(1 - 0.03535 + 0.03535j) = \pm(2k + 1) \times 180^\circ \end{aligned}$$

由相角条件表达式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{0.707K_p}{K_1 - 0.707K_p} &= -8.85 \rightarrow -8.85 \times (K_1 - 0.707K_p) \\ &= 0.707K_p \rightarrow K_p = 1.6K_1 \end{aligned}$$

由幅值条件表达式可以得到

$$\begin{aligned} |(-0.707K_p + K_1) + 0.707K_{pj}| &= |-0.1312K_1 + 1.1312K_{1j}| = 179.8743 \rightarrow K_1 \\ &= 157.95 \rightarrow K_p = 252.72 \end{aligned}$$

校正后系统根轨迹图如图 6-50(a)和(b)所示。其中图(b)为图(a)的局部放大图。

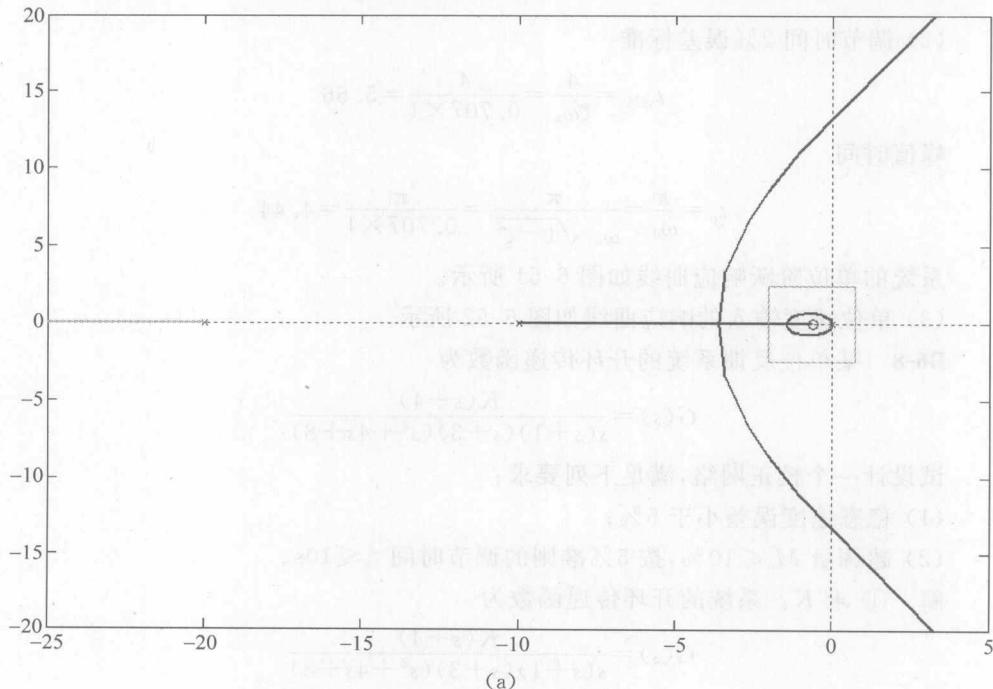


图 6-50 校正后系统根轨迹图

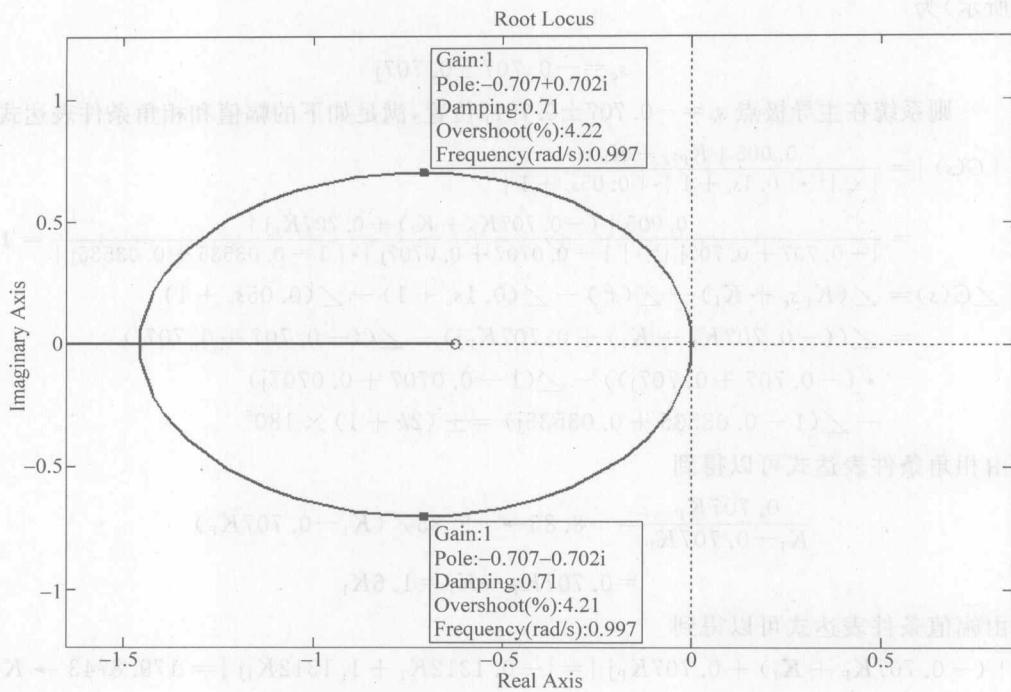


图 6-50 (续)

(2) 调节时间 2% 误差标准

$$t_{s2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.707 \times 1} = 5.66$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0.707 \times 1} = 4.44$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 6-51 所示。

(3) 单位速度输入的响应曲线如图 6-52 所示。

**B6-8** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+3)(s^2+4s+8)}$$

试设计一个校正网络，满足下列要求：

(1) 稳态速度误差小于 5%；

(2) 超调量  $M_p \leqslant 10\%$ ，按 5% 准则的调节时间  $t_s \leqslant 10s$ 。

解 ① 求  $K$ 。系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+3)(s^2+4s+8)}$$

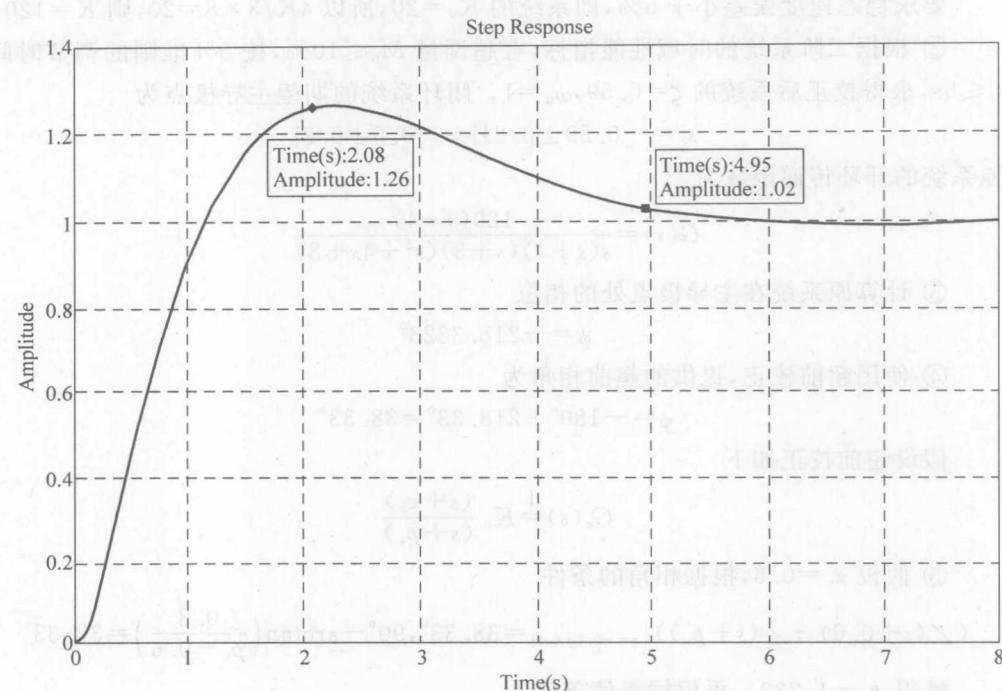


图 6-51 单位阶跃响应曲线

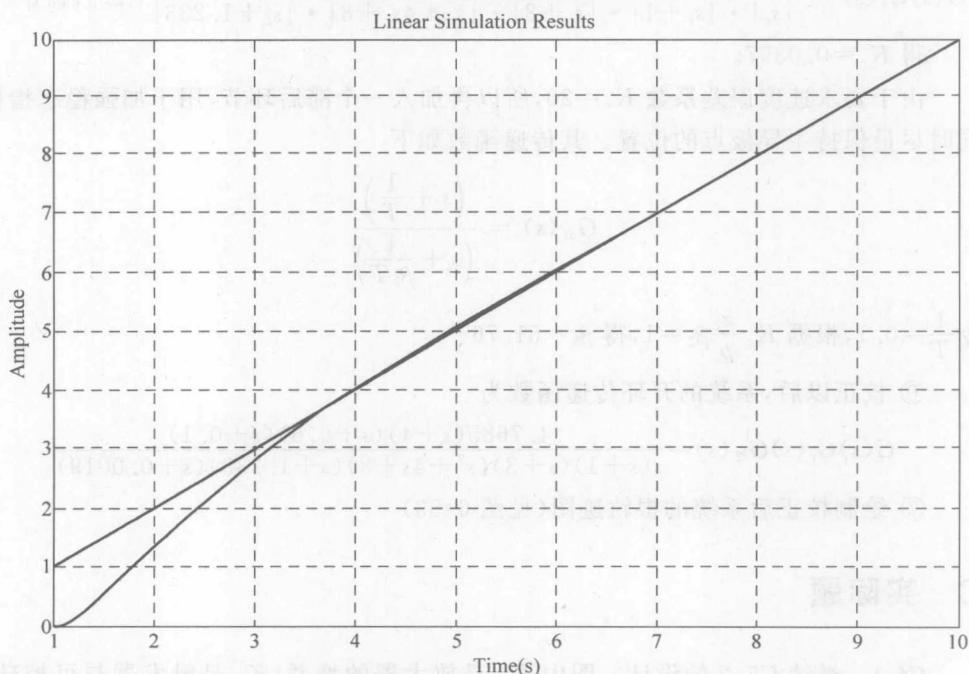


图 6-52 单位速度输入的响应曲线

要求稳态速度误差小于 5%，即系统的  $K_v=20$ ，所以  $4K/3 \times 8=20$ ，则  $K=120$ 。

② 根据二阶系统的时域性能指标，有超调量  $M_p \leq 10\%$ ，按 5% 准则的调节时间为  $t_s \leq 5s$ ，求得校正后系统的  $\zeta=0.59, \omega_n=1$ 。闭环系统的期望主导极点为

$$s_c = -0.59 \pm 0.81j \approx -0.6 \pm 0.8j$$

原系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{120(s+4)}{s(s+1)(s+3)(s^2+4s+8)}$$

③ 计算原系统在主导极点处的相位

$$\phi = -218.3323^\circ$$

④ 使用超前校正，提供的超前相角为

$$\phi = -180^\circ + 218.33^\circ = 38.33^\circ$$

假设超前校正如下

$$G_c(s) = K_c \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)}$$

⑤ 假设  $z_c=0.6$ ，根据相角的条件

$$(\angle(s+0.6) - \angle(s+p_c))|_{s=-0.6 \pm 0.8j} = 38.33^\circ, 90^\circ - \arctan\left(\frac{0.8}{p_c - 0.6}\right) = 38.33^\circ$$

解得  $p_c=1.233$ 。再根据幅值条件

$$|G(s)G_c(s)| = \frac{|120K_c| \cdot |s_c+4| \cdot |s_c+0.6|}{|s_c| \cdot |s_c+1| \cdot |s_c+3| \cdot |s_c^2+4s_c+8| \cdot |s_c+1.233|}|_{s=-0.6 \pm 0.8j} = 1,$$

得  $K_c=0.0397$ 。

由于要求速度误差系数  $K_v=20$ ，所以再加入一个滞后环节，用于加强稳态指标，同时尽量保持主导极点的位置。其传递函数如下

$$G_{c2}(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta_2 T}\right)}$$

令  $\frac{1}{T}=0.1$ ，根据  $K_c \frac{z_c}{p_c} \beta_2 = 1$ ，得  $\beta_2 = 51.76$

⑥ 校正以后，系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s)G_{c2}(s) = \frac{4.7685(s+4)(s+0.6)(s+0.1)}{s(s+1)(s+3)(s^2+4s+8)(s+1.233)(s+0.0019)}$$

⑦ 绘制校正后系统的根轨迹图（见图 6-53）

## C 实际题

**C6-1** 继续 C5-2 的设计。图中  $K_p$  是放大器的增益， $K_s$  是触发器与可控硅的增益， $L_d$  与  $R_d$  为电动机回路的总电感与总电阻。 $e_d$  是电动机的反电势， $e_d = K_e \omega$ ， $K_e$  是电动机的反电势常数， $e_s$  是测速发电机的电动势， $e_s = K_f \omega$ ， $K_f$  是测速发电机的

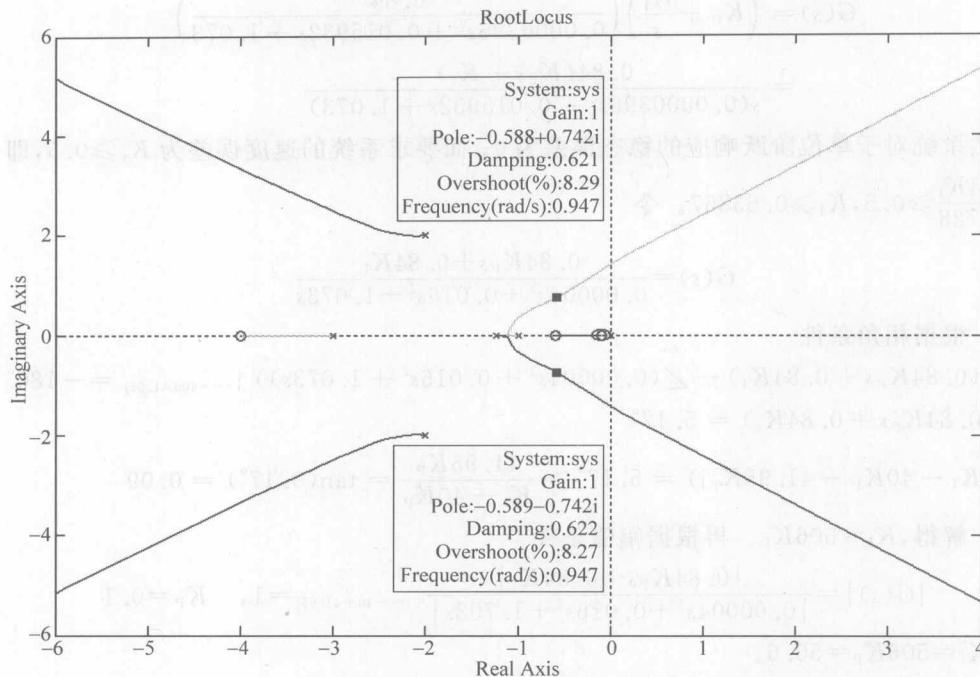


图 6-53 校正后系统的根轨迹图

电势常数,  $K_{fs}$  是电位器的增益,  $J$  为电动机轴上的总转动惯量,  $b$  是黏性摩擦系数,  $K_m$  是电动机的转矩系数。系统参数如下

$$J = 11 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad b = 0.27 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad},$$

$$K_m = 0.84 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}, \quad K_e = 0.84 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad},$$

$$R_d = 1.36 \Omega, \quad L_d = 3.6 \text{ mH}$$

$$K_p = 10, \quad K_s = 5 \quad K_f = 0.2 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad} \quad K_{fs} = 0.1$$

试设计一个 PI 控制器,使系统的单位阶跃响应的稳态误差为零,速度误差系数  $K_v \geq 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,超调量  $M_p \leq 5\%$ ,调整时间  $t_s \leq 0.1 \text{ s}$ (按 2% 准则)。

解 ① 系统的开环传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_p K_s K_m K_f K_{fs}}{L_d J s^2 + (R_d J + b L_d) s + (K_e K_m + R_d b)} \\ &= \frac{10 \times 5 \times 0.84 \times 0.2 \times 0.1}{(0.0036 \times 0.011 s^2 + (1.36 \times 0.011 + 0.27 \times 0.0036) s + (0.84 \times 0.84 + 1.36 \times 0.27)} \\ &= \frac{0.84}{0.0000396 s^2 + 0.015932 s + 1.073} \end{aligned}$$

② 根据二阶系统的时域性能指标,求得校正后系统的  $\zeta = 0.69, \omega_n = 57.96$ 。闭环系统的期望主导极点为

$$s_c = -40 \pm 41.95j$$

③ 经 PI 控制,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right) \left( \frac{0.84}{0.0000396s^2 + 0.015932s + 1.073} \right)$$

$$= \frac{0.84(K_p s + K_i)}{s(0.0000396s^2 + 0.015932s + 1.073)}$$

显然系统对于单位阶跃响应的稳态误差为 0；而要求系统的速度误差为  $K_v \geq 0.5$ ，即  $\frac{0.84K_i}{1.0728} \geq 0.5, K_i \geq 0.63857$ 。令

$$G(s) = \frac{0.84K_p s + 0.84K_i}{0.00004s^3 + 0.016s^2 + 1.073s}$$

根据相角条件

$$\begin{aligned} & (\angle(0.84K_p s + 0.84K_i) - \angle(0.00004s^3 + 0.016s^2 + 1.073s))|_{s=-40+41.95j} = -180^\circ \\ & \angle(0.84K_p s + 0.84K_i) = 5.17^\circ \end{aligned}$$

$$\angle(K_i - 40K_p + 41.95K_p j) = 5.17^\circ > \frac{41.95K_p}{K_i - 40K_p} = \tan(5.17^\circ) = 0.09$$

解得  $K_i = 506K_p$ 。再根据幅值条件

$$|G(s)| = \frac{|0.84K_p s + 0.84K_i|}{|0.00004s^3 + 0.016s^2 + 1.073s|}|_{s=-40+41.95j} = 1, \quad K_p = 0.1$$

得  $K_i = 506K_p = 50.6$ 。

系统的单位阶跃响应如图 6-54 所示。

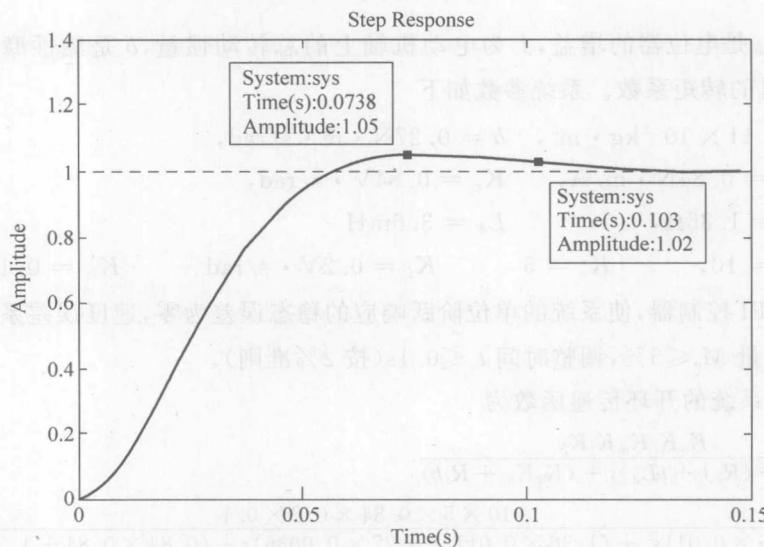


图 6-54 系统的单位阶跃响应

**C6-2** 图 6-55 是汽轮发电机组的调速系统方块图, 控制目标是发电机的转速  $n$ , 调速器的阀门控制进入汽轮机的蒸气量来调节汽轮发电机组的转速, 调速器的阀门由电信号  $u$  控制。已知调速器的增益为  $K = 10 \text{ rad/V}$ , 发电机的额定转速为  $n = 1200 \text{ r/min}$ , 机组的转动惯量  $J = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

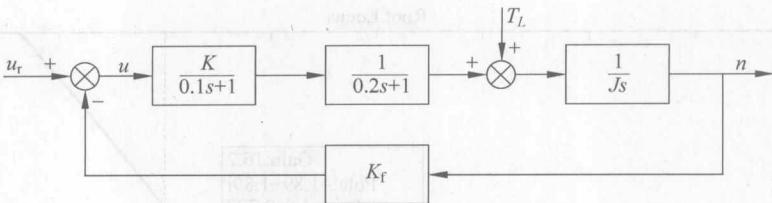


图 6-55 汽轮发电机组调速系统

- (1) 绘制系统以 \$K\_f\$ 为参变量的根轨迹，并确定使系统的阻尼比 \$\zeta=0.707\$ 时闭环极点及对应的 \$K\_f\$ 值；
- (2) 在负载 \$T\_L=0\$ 及由(1)确定的 \$K\_f\$ 值下，使发电机达到额定转速 \$n=1200\text{r}/\text{min}\$ 所需要的输入电压 \$u\_r\$ 的数值；
- (3) 当负载出现一恒定变化量，求发电机转速变化的百分比 \$\nu\$；
- (4) 设计一个串联校正装置，使发电机转速变化的百分比 \$\nu \leq \pm 0.1\%\$，系统的主导极点参数为 \$\zeta=0.707, \omega\_n=3.5\text{rad}/\text{s}\$；
- (5) 求系统在校正前后的单位阶跃响应，检验设计结果。

解 (1) 系统的特征方程

$$\frac{K}{0.1s+1} \cdot \frac{1}{0.2s+1} \cdot \frac{1}{J_s} \cdot K_f + 1 = 0$$

即

$$\frac{5K_f}{s(s+10)(s+5)} + 1 = 0$$

绘制根轨迹如图 6-56 所示。

求得要求校正后系统的 \$\zeta=0.707\$。闭环系统的期望主导极点为

$$s_c = -1.89 \pm 1.89j, \quad K_f = 16.2$$

(2) 求 \$u\_r\$

① 系统对于输入的闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{N(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{s(s+10)(0.2s+1)+16.2} = \frac{1}{0.2s^3 + 3s^2 + 10s + 16.2}$$

② 系统的输出 \$n(s)\$ 对于单位阶跃响应 (\$U\_r(s)=1\$) 的稳态值为

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{0.2s^3 + 3s^2 + 10s + 16.2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{16.2}$$

所以，如果希望 \$n(s)=1200\$，则 \$u\_r(t)=16.2 \times 1200=19440\$。

(3) 系统对于负载的闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{N(s)}{T_L(s)} = \frac{\frac{1}{100s}}{1 + \frac{1}{100s} \cdot \frac{100 \times 16.2}{(s+10)(0.2s+1)}} = \frac{(0.01s+0.1)(0.2s+1)}{0.2s^3 + 3s^2 + 10s + 16.2}$$

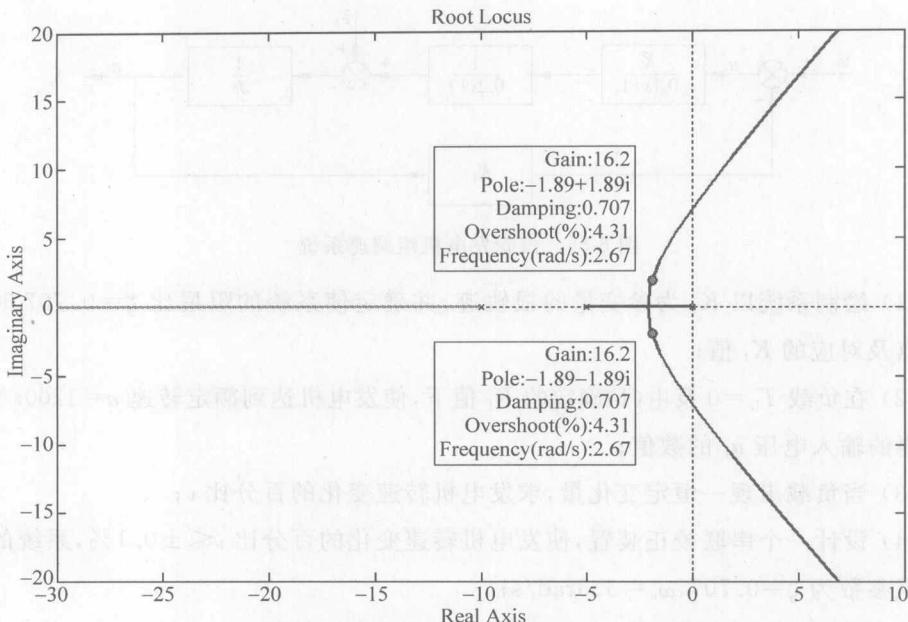


图 6-56 系统的根轨迹图

系统的输出  $n(s)$  对于单位阶跃扰动响应 ( $T_L(s)=1$ ) 的稳态值为

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(0.01s+0.1)(0.2s+1)}{0.2s^3 + 3s^2 + 10s + 16.2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{0.1}{16.2} = 0.0062$$

所以, 改变比为 0.62%。

(4) 设计校正装置如图 6-57 所示。

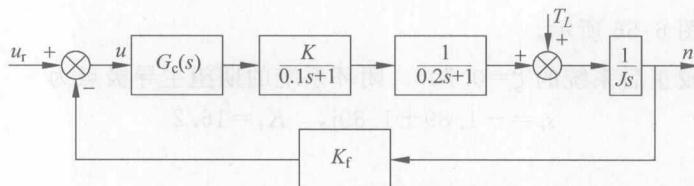


图 6-57 校正装置图

① 系统对于负载的闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{N(s)}{T_L(s)} = \frac{\frac{1}{100s}}{1 + \frac{1}{100s} \cdot \frac{100 \times 16.2}{(s+10)(0.2s+1)} \cdot G_c(s)}$$

② 系统输出对于输入的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s) \cdot \frac{16.2}{s(s+10)(0.2s+1)}$$

③ 系统的主导极点参数为  $\zeta=0.707, \omega_n=3.5\text{rad/s}$ ; 则系统的主导极点为

$$s_c = -2.74 \pm 2.48j$$

④ 采用超前-滞后校正

$$G_c(s) = K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}$$

校正后的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{16.2}{s(s+10)(0.2s+1)}$$

⑤ 超前校正装置需要增加的相角为

$$\phi = -180^\circ + 137.85^\circ + 47.66^\circ + 18.86^\circ = 24.37^\circ$$

⑥ 利用图解法(见图 6-58)可以解得

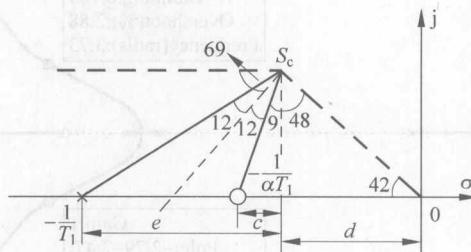


图 6-58 图解法

$$\begin{cases} -\frac{1}{T_1} = e + d = -2.48 \times \tan(33^\circ) - 2.74 = -4.37 \\ -\frac{1}{\alpha T_1} = c + d = -2.48 \times \tan(9^\circ) - 2.74 = -3.13 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \frac{1}{T_1} = 4.37 \\ \frac{1}{\alpha T_1} = 3.13 \end{cases}$$

⑦ 根据幅值条件确定  $K_c$

$$K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{16.2}{s(s+10)(0.2s+1)} \Big|_{s_c = -2.74 \pm 2.48j} = 1$$

求得  $K_c = 1.39$ 。

⑧ 确定滞后环节。要求发电机转速变化的百分比  $\nu \leq \pm 0.1\%$ , 可以使  $G_c(s)$  的开环增益调节到 7, 这样改变便可以调节到  $0.62\% / 7 \leq 0.1\%$ 。所以

$$\frac{K_c \beta}{\alpha} = 7 \rightarrow \beta = 7.03$$

选取  $T_2$  足够大, 令  $T_2 = 10$ 。所以,

$$\frac{1}{T_2} = 0.1, \quad \frac{1}{\beta T_2} = 0.014$$

⑨ 校正后的开环特征传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{22.52 \cdot (s+3.13)(s+0.1)}{s(s+10)(0.2s+1)(s+4.37)(s+0.014)}$$

⑩ 系统的根轨迹图如图 6-59 所示。

主导极点参数非常接近要求。

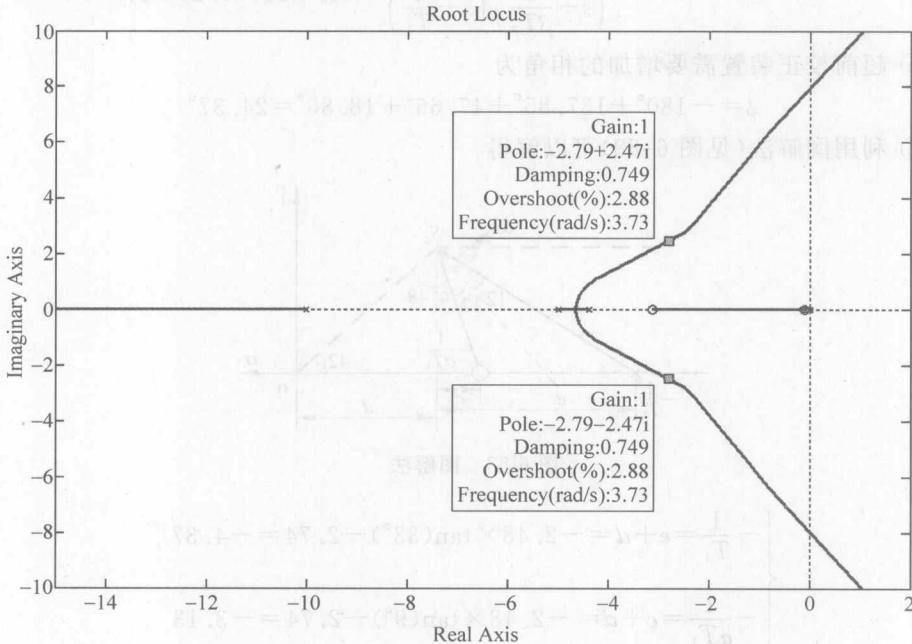


图 6-59 系统的根轨迹图

(5) 校正前系统的单位阶跃响应如图 6-60 所示。

校正后系统的单位阶跃响应如图 6-61 所示。

**C6-3** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+10)(s+50)}$$

要求系统的速度误差系数  $K_v = 10$ , 超调量  $M_p \leq 10\%$ , 调整时间(按 2% 准则)  $t_s \leq 0.5$  s。为系统设计一个串联校正装置。

解 ① 根据二阶系统的时域性能指标, 求得校正后系统的  $\zeta = 0.59, \omega_n = 13.56$ 。

闭环系统的期望主导极点为

$$s_e = -8 \pm 10.95j$$

② 设计超前-滞后校正

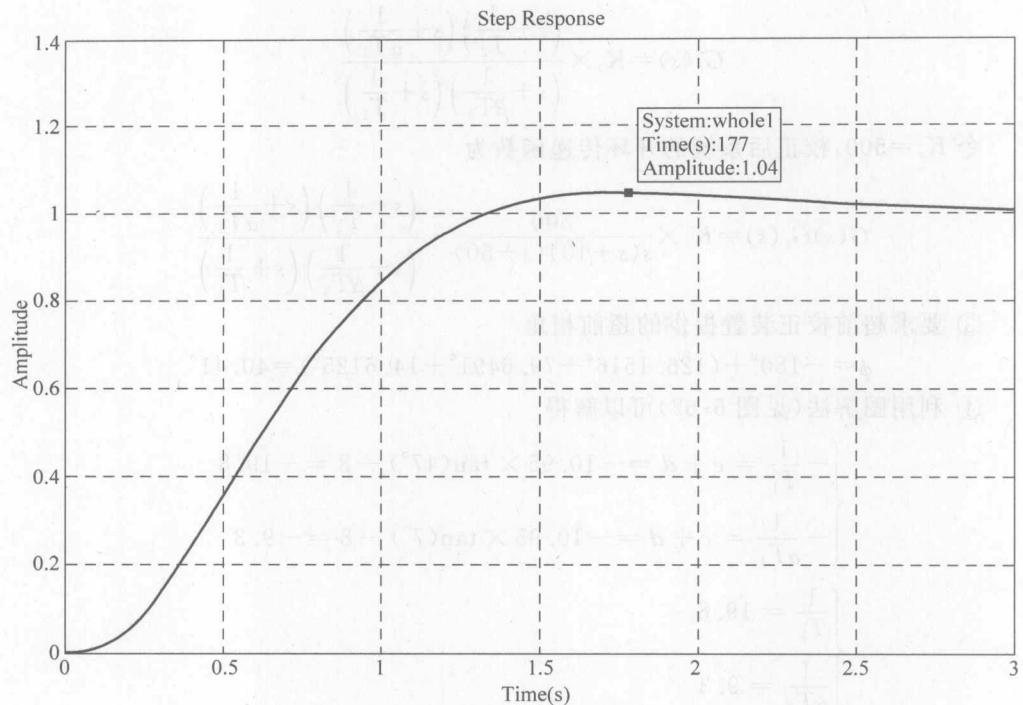


图 6-60 校正前系统的单位阶跃响应曲线

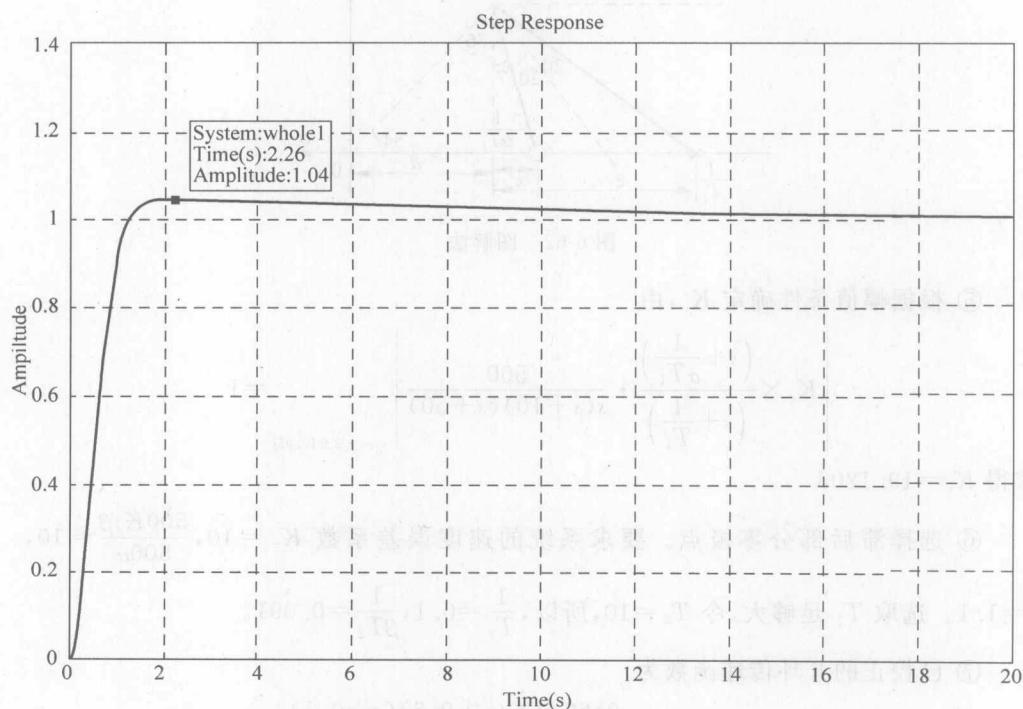


图 6-61 校正后系统的单位阶跃响应曲线

$$G_c(s) = K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}$$

令  $K_c = 500$ , 校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = K_c \times \frac{500}{s(s+10)(s+50)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}$$

③ 要求超前校正装置提供的超前相角

$$\phi = -180^\circ + (126.1516^\circ + 79.6491^\circ + 14.6125^\circ) = 40.41^\circ$$

④ 利用图解法(见图 6-62)可以解得

$$\begin{cases} -\frac{1}{T_1} = e + d = -10.95 \times \tan(47^\circ) - 8 = -19.8 \\ -\frac{1}{\alpha T_1} = c + d = -10.95 \times \tan(7^\circ) - 8 = -9.3 \\ \frac{1}{T_1} = 19.8 \\ \frac{1}{\alpha T_1} = 9.3 \end{cases}$$

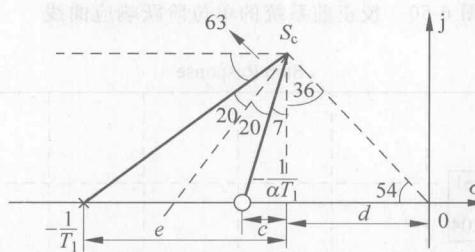


图 6-62 图解法

⑤ 根据幅值条件确定  $K_c$ , 由

$$\left| K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{500}{s(s+10)(s+50)} \right|_{s_c = -8 \pm 10.95j} = 1$$

求得  $K_c = 19.1205$

⑥ 选择滞后部分零极点。要求系统的速度误差系数  $K_v = 10$ ,  $\frac{500K_c\beta}{500\alpha} = 10$ ,  $\beta = 1.1$ 。选取  $T_2$  足够大, 令  $T_2 = 10$ , 所以,  $\frac{1}{T_2} = 0.1$ ,  $\frac{1}{\beta T_2} = 0.091$ 。

⑦ 已校正的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{9560.3 \times (s+9.3)(s+0.1)}{s(s+10)(s+50)(s+19.8)(s+0.091)}$$

校正后单位阶跃响应曲线如图 6-63 所示, 满足题目要求。

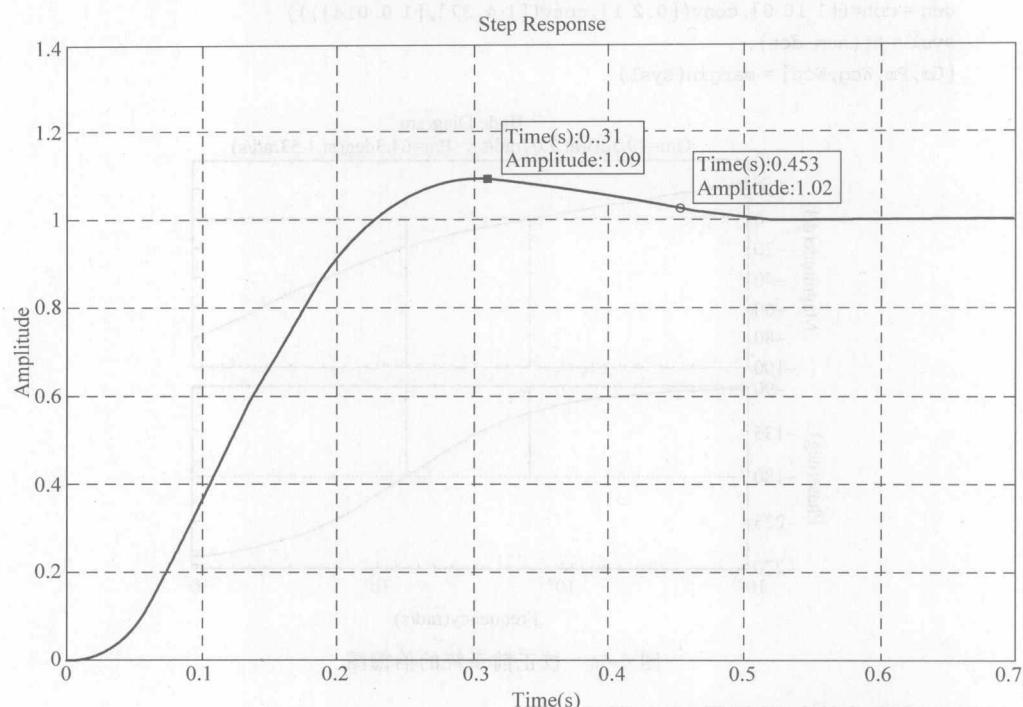


图 6-63 题 C6-3 校正后系统单位阶跃响应曲线

## D MATLAB 题

**D6-1** 用 MATLAB 绘制题 C6-2 校正前后的伯德图, 并计算系统的相位裕度。

解 ① 校正前。校正前的开环特征传递函数为

$$G(s) = \frac{16.2}{s(s+10)(0.2s+1)}$$

编写 MATLAB 程序

```
num = [16.2]
den = conv([1 10 0], [0.2 1])
sys1 = tf(num, den)
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sys1)
```

校正前系统的伯德图如图 6-64 所示。可以得到相位裕度为  $P_m = 64.3^\circ$ 。

② 校正后。校正后的开环特征传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{22.52 \cdot (s+3.13)(s+0.1)}{s(s+10)(0.2s+1)(s+4.37)(s+0.014)}$$

编写 MATLAB 程序

```

num = conv([22.52 22.52 * 3.13],[1 0.1])
den = conv([1 10 0],conv([0.2 1],conv([1 4.37],[1 0.014])))
sys1 = tf(num,den)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys1)

```

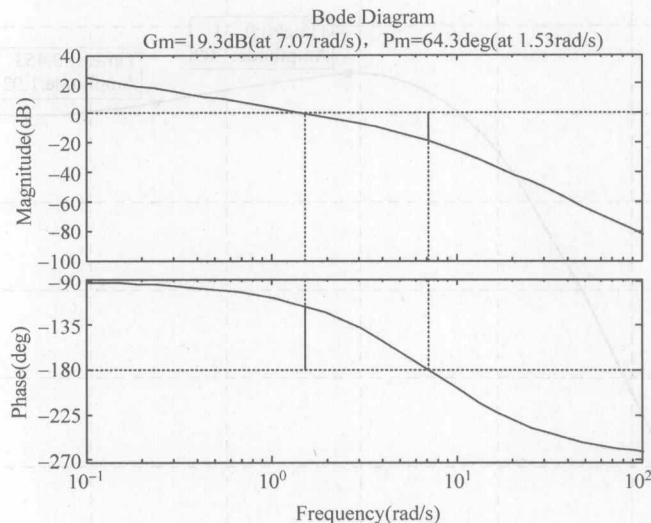


图 6-64 校正前系统的伯德图

校正后系统的伯德图如图 6-65 所示。

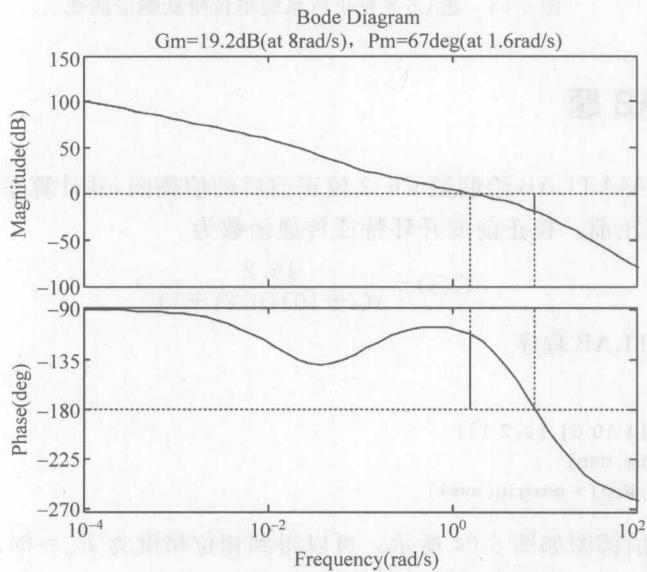


图 6-65 校正后系统的伯德图

由图求得相位裕度为  $P_m=67^\circ$ 。

**D6-2** 用 MATLAB 验证题 A6-1 的计算结果。

解 校正以后, 系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{3(s+11.2)}{s(s+5)}$$

编写 MATLAB 程序

```
num = [0.93 13.24]
den = [1 5 0]
sys1 = tf(num, den)
whole1 = feedback(sys1, 1)
step(whole1)
```

得到系统的阶跃响应曲线如图 6-66 所示。

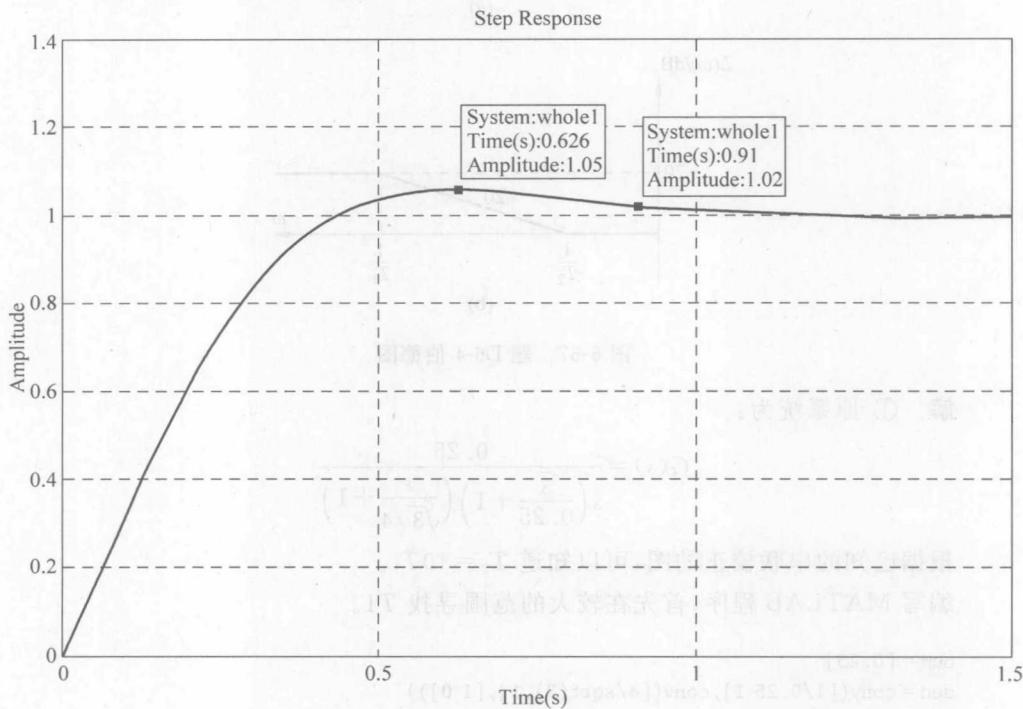


图 6-66 系统的阶跃响应曲线

得到系统的调整时间小于 1s, 超调量=5%, 稳态误差为 0。满足设计条件。

**D6-3** 某单位反馈控制系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+10}{s^2 + 2s + 20}$$

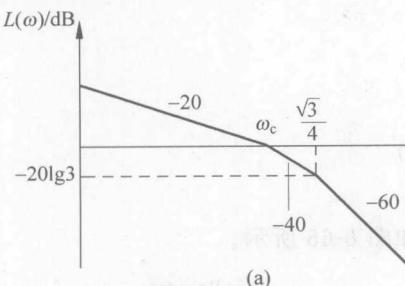
设计要求：阶跃响应的稳态误差 $\leq 10\%$ ；调整时间 $\leq 5s$ ；相位裕度 $45^\circ$ 。

- (1) 用 MATLAB 程序, 按根轨迹法设计一个串联滞后校正网络, 使满足上述要求;
- (2) 求系统的单位阶跃响应, 验证(1)的结果;
- (3) 用 margin 命令计算系统的相位裕度。

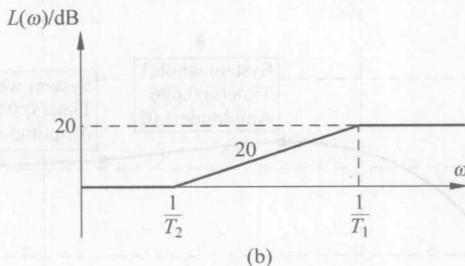
**解** 本题无须采用滞后校正, 将系统增益放大 20 倍即可满足所有要求。

**D6-4** 已知最小相位系统的对数幅频特性如图 6-67(a)所示。为提高系统的相

位裕度,采用串联超前校正网络,其伯德图如图 6-67(b)所示。请用 MATLAB 程序求使系统达到相位裕度为最大的  $T_1$  与  $T_2$ 。



(a)



(b)

图 6-67 题 D6-4 伯德图

解 ① 原系统为:

$$G(s) = \frac{0.25}{s \left( \frac{s}{0.25} + 1 \right) \left( \frac{s}{\sqrt{3}/4} + 1 \right)}$$

根据已知的串联校正的图,可以知道  $T_2 = 10T_1$ 。

编写 MATLAB 程序,首先在较大的范围寻找  $T_1$ 。

```

num = [0.25]
den = conv([1/0.25 1], conv([4/sqrt(3), 1], [1 0]))
gh = tf(num, den)
figure(1)
a = 10
for T1 = 0.3:0.1:1
    num1 = [a * T1, 1]
    den1 = [T1, 1]
    gh1 = tf(num1, den1)
    gh2 = gh1 * gh
    [Gm, Pm, Wg, Wc] = margin(gh2)
    bode(gh2)
    grid on
    hold on
    disp('T1 = '); disp(T1);
    disp('Gm = '); disp(Gm);
    disp('Pm = '); disp(Pm);
end

```

② 系统的伯德图如图 6-68 所示。

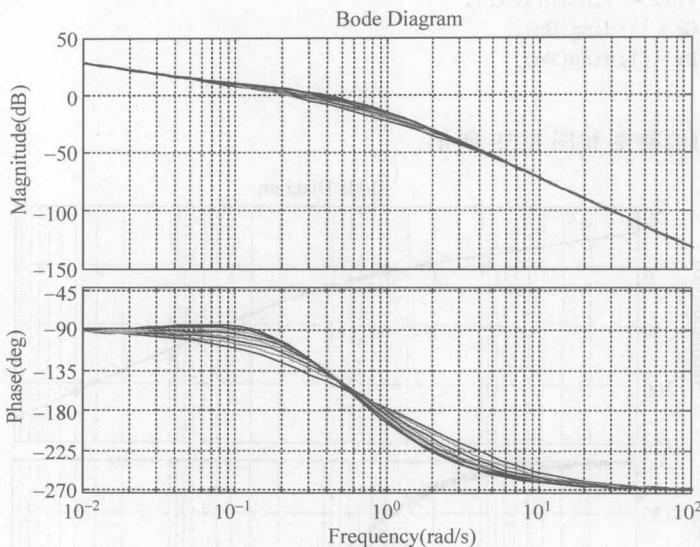


图 6-68 T1 较大范围变化的系统伯德图

结果如下(Pm 是相位裕度):

T1=0.3	Gm=15.7438	Pm=53.4168
T1=0.4	Gm=11.7321	Pm=57.8244
T1=0.5	Gm=8.9332	Pm=59.9913
T1=0.6	Gm=7.0506	Pm=59.8708
T1=0.7	Gm=5.7456	Pm=57.8533
T1=0.8	Gm=4.8080	Pm=54.6077
T1=0.9	Gm=4.1116	Pm=50.7295
T1=1	Gm=3.5793	Pm=46.6243

可以发现在 0.5 附近的相位裕度比较大,再编写下面的程序,进一步寻找 T1。

③ 编写 MATLAB 程序

```

num = [0.25]
den = conv([1/0.25 1], conv([4/sqrt(3), 1], [1 0]))
gh = tf(num, den)
figure(2)
a = 10
for T1 = 0.45:0.01:0.58
    num1 = [a * T1, 1]
    den1 = [T1, 1]
    gh1 = tf(num1, den1)
    gh2 = gh1 * gh
    [Gm, Pm, Wg, Wc] = margin(gh2)
    bode(gh2)
    grid on
end

```

```

hold on
disp('1/T1 = '); disp(1/T1);
disp('Gm = '); disp(Gm);
disp('Pm = '); disp(Pm);
end

```

④ 画出的伯德图如图 6-69 所示。

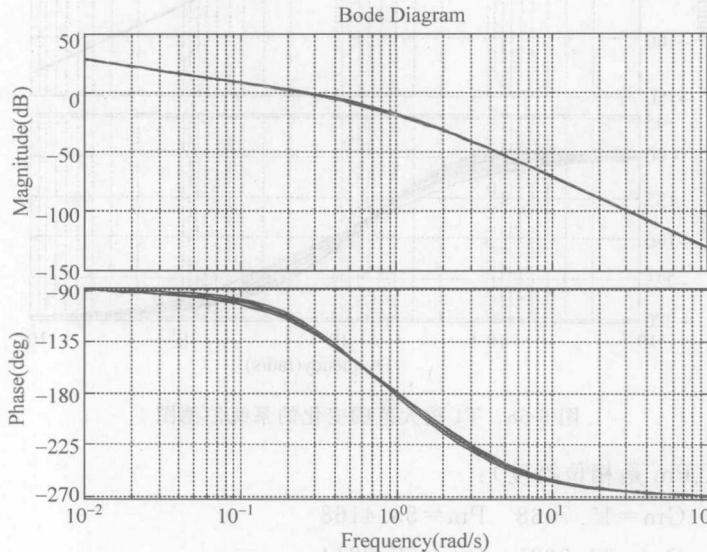


图 6-69 T1 小范围变化的系统伯德图

结果如下(Pm 是相位裕度)：

$1/T_1 = 2.2222$	$G_m = 10.1922$	$P_m = 59.2028$
$1/T_1 = 2.1739$	$G_m = 9.9196$	$P_m = 59.4080$
$1/T_1 = 2.1277$	$G_m = 9.6579$	$P_m = 59.5894$
$1/T_1 = 2.0833$	$G_m = 9.4066$	$P_m = 59.7470$
$1/T_1 = 2.0408$	$G_m = 9.1652$	$P_m = 59.8810$
$1/T_1 = 2$	$G_m = 8.9332$	$P_m = 59.9913$
$1/T_1 = 1.9608$	$G_m = 8.7104$	$P_m = 60.0783$
$1/T_1 = 1.9231$	$G_m = 8.4971$	$P_m = 60.1416$
$1/T_1 = 1.8868$	$G_m = 8.2910$	$P_m = 60.1838$
<b><math>1/T_1 = 1.8519</math></b>	<b><math>G_m = 8.0929</math></b>	<b><math>P_m = 60.2045</math></b>
$1/T_1 = 1.8182$	$G_m = 7.9023$	$P_m = 60.2031$
$1/T_1 = 1.7857$	$G_m = 7.7188$	$P_m = 60.1799$
$1/T_1 = 1.7544$	$G_m = 7.5423$	$P_m = 60.1346$
$1/T_1 = 1.7241$	$G_m = 7.3722$	$P_m = 60.0668$

由上述结果可知, 当  $\frac{1}{T_1} = 1.8519$ ,  $\frac{1}{T_2} = 0.18519$  时, 校正系统的相位裕度  $\gamma = 60.2045^\circ$  是最大的。

# 第7章

## 非线性反馈控制系统

**要点提示**

### 7.1 非线性控制系统的概述

实际的控制系统都不同程度地存在非线性特性,只有在一定工作范围内,在某些限制条件下,才可以近似为线性定常系统。对于非线性程度比较严重,输入信号变化范围较大的系统,某些元件将明显地工作在非线性范围。此时如果仍用线性理论进行分析与设计,会产生很大的误差,甚至会得出错误的结论,因而,学习非线性控制系统的分析及设计方法就显得非常重要。

如果系统中包含一个或一个以上具有非线性特性的环节,或只能用非线性方程来描述动态过程的环节,那么无论它还包含多少线性环节,就称它为非线性系统。对于那些不能线性化的系统称为本质非线性系统,有时也简单地称之为非线性系统。

非线性系统与线性系统相比有许多不同的特点,它们的主要区别如表 7-1 所示。

表 7-1 线性与非线性系统的特点与性能

特点及性能	线性系统	非线性系统
齐次性	满足	不满足
叠加原理	满足	不满足
稳定性	与初始条件无关	与初始条件有关
正弦信号输入	稳态输出信号与输入信号频率相同	输出信号总含有非输入频率分量
极限环(持续振荡)	不存在	可能存在,并有极限环稳定性问题

## 7.2 描述函数法

### 7.2.1 描述函数

描述函数法是频率特性法在非线性系统中的推广应用。假如非线性元件的输入是正弦信号,将输出展开成 Fourier 级数,其中一次分量称为基波分量,它与输入的正弦波是同频率的,我们用它代替输出进行分析。

非线性元件的描述函数是非线性元件输出的基波分量与正弦输入信号的复数比,即

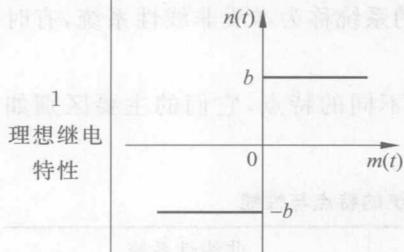
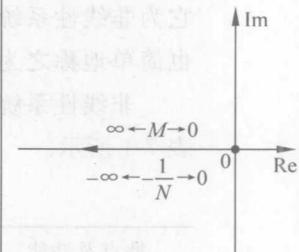
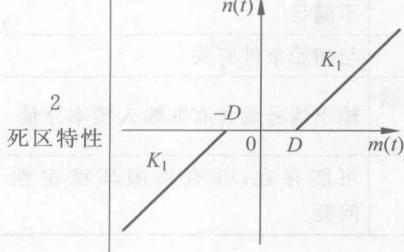
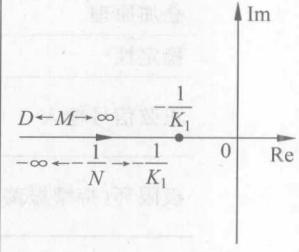
$$N(M, \omega) = \frac{M_1}{M} \angle \Phi_1 = \frac{B_1}{M} + j \frac{A_1}{M} \quad (7-1)$$

其中, $N(M, \omega)$ 为非线性元件的描述函数; $M$ 和 $M_1$ 分别为正弦输入和输出基波分量的振幅; $\Phi_1$ 为输出基波分量的相位移。 $B_1, A_1$ 为输出基波分量的傅氏系数:

$$A_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(\omega t) \cos \omega t d(\omega t), \quad B_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(\omega t) \sin \omega t d(\omega t) \quad (7-2)$$

式中 $n(\omega t)$ 为非线性元件的输出。书中的表 7-2 给出了几种常见非线性的描述函数。

表 7-2 典型非线性特性

名称	静 特 性	描述函数 $N(M, \omega)$	负荷描述函数图
1 理想继电 特性		$\frac{4b}{\pi M}$	
2 死区特性		$K_1 - \frac{2K_1}{\pi} \arcsin \frac{D}{M}$ $- \frac{2K_1 D}{\pi M} \sqrt{1 - \left( \frac{D}{M} \right)^2} \quad (M \geq D)$	

续表

名称	静特性	描述函数 $N(M, \omega)$	负荷描述函数图
3 饱和特性		$\frac{2K_1}{\pi} \left( \arcsin \frac{s}{M} + \frac{s}{M} \sqrt{1 - \left( \frac{s}{M} \right)^2} \right) (M \geq z)$	
4 齿隙特性		$\begin{aligned} & \frac{K_1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{M} \right) + \right. \\ & \left. 2 \left( 1 - \frac{2b}{M} \right) \sqrt{\frac{b}{M} \left( 1 - \frac{b}{M} \right)} \right. \\ & \left. + j \frac{2K_1 b}{\pi M} \left( \frac{b}{M} - 1 \right) (M \geq b) \right) \end{aligned}$	
5 有死区的 继电特性		$\frac{4b}{\pi M} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{M} \right)^2} (M \geq a)$	
6 具有磁滞 的继电 特性		$\begin{aligned} & \frac{4b}{\pi M} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{M} \right)^2} \\ & - j \frac{4ba}{\pi M^2} (M \geq a) \end{aligned}$	
7 死区特性		$\begin{aligned} & K_1 - \frac{2K_1}{\pi} \arcsin \frac{D}{M} \\ & + \frac{2K_1 D}{\pi M} \sqrt{1 - \left( \frac{D}{M} \right)^2} (M \geq D) \end{aligned}$	

续表

名称	静特性	描述函数 $N(M, \omega)$	负荷描述函数图
8 分段非线性特性		$K_2 + \frac{2(K_1 - K_2)}{\pi} \cdot \arcsin \frac{a}{M} + \frac{a}{M} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{M}\right)^2}$ $(M \geq a)$	
9 具有死区及磁滞的继电特性		$\frac{2b}{\pi M} \left[ 1 - \left( \frac{a}{M} \right)^2 + \sqrt{1 - \left( \frac{ma}{M} \right)^2} + j \frac{a(m-1)}{M} \right]$ $(M \geq a)$	

非线性环节并联后总的描述函数等于各非线性环节的描述函数之和。当两个非线性环节串联时,其总的描述函数不等于两个非线性环节描述函数的乘积,而是需要通过折算。首先要求出这两个非线性环节的等效非线性特性,然后根据等效的非线性特性求总的描述函数,应该注意的是,如果两个非线性环节的前后次序调换,等效的非线性特性并不相同,总的描述函数也不一样,这一点与线性环节串联的化简规则明显不同。

## 7.2.2 描述函数分析

一般利用奈氏图和奈氏判据分析应用描述函数描述的系统稳定性。我们可把负倒描述函数(或称负倒幅相特性) $-1/N(M, \omega)$ 和 $G(j\omega)$ 轨迹画在一张图上,两个轨迹的交点就是可能出现持续振荡的点。

依据 $-\frac{1}{N(M, \omega)}$ 与 $G(j\omega)$ 轨迹的相对位置进行系统分析的稳定性判据如下:

- (1) 若 $G(j\omega)$ 有 $P$ 个 $s$ 右半开平面的极点,当 $\omega$ 从 $-\infty$ 到 $\infty$ 变化时, $G(j\omega)$ 轨迹逆时针包围 $-\frac{1}{N(M, \omega)}$ 轨迹 $P$ 圈,则闭环系统是稳定的。否则是不稳定的。
- (2) 若 $G(j\omega)$ 的极点全部位于 $s$ 的左半闭平面上,当 $\omega$ 从 $-\infty$ 到 $\infty$ 变化时, $G(j\omega)$ 轨迹不包围 $-\frac{1}{N(M, \omega)}$ 轨迹,则闭环系统是稳定的。否则不稳定的。
- (3) 若 $-\frac{1}{N(M, \omega)}$ 轨迹与 $G(j\omega)$ 轨迹相交,仅当振幅 $M$ 增大时, $-\frac{1}{N(M, \omega)}$ 轨迹

由  $G(j\omega)$  轨线的包围区域穿出的交点处才存在自振荡(即极限环);反之,则是不稳定的自振荡点(不存在持续振荡)。

当系统存在稳定自振荡,且  $N$  仅是  $M$  的函数时,可用下述方法计算自振荡的角频率和振幅。

稳定自振荡的角频率  $\omega$  等于  $G(j\omega)$  轨线在交点处的  $\omega$  值,稳定自振荡的幅值  $M$  等于  $-\frac{1}{N(M, \omega)}$  轨线在交点处的  $M$  值。

(4) 若  $-\frac{1}{N(M, \omega)}$  轨线与  $G(j\omega)$  轨线相切,则表示可能存在一个半稳定的极限环。

## 7.3 相平面法

### 7.3.1 相轨迹的基本概念

相平面法是应用相空间概念分析、设计非线性系统的一种有效方法。相平面法取自微分方程理论,一般只适用低维系统,大多数是二阶系统,至多三阶。

设描述某二阶系统的微分方程为

$$\ddot{c} + f(c, \dot{c}) = 0 \quad (7-3)$$

式中  $c$  是系统输出,  $f(c, \dot{c})$  是  $c$  和  $\dot{c}$  的线性或非线性函数。用  $c$  和  $\dot{c}$  分别作为横坐标和纵坐标的直角坐标系,将  $t$  作为参数,做出的一族函数  $\dot{c} = f(c)$  的图像,称为系统的相图,这个直角坐标系就称为相平面。当初始条件决定后,  $\dot{c} = f(c)$  表征为一条曲线,称为一条相轨迹,  $t$  增长方向为这条轨迹的走向。相平面法是根据相轨迹的走向来判别系统稳定性的。

### 7.3.2 奇点和极限环

#### 1. 奇点

在相平面上同时满足  $\dot{c} = 0$  和  $f(c, \dot{c}) = 0$  的特殊点称为奇点。奇点处相轨迹的斜率  $\frac{dc}{dt}$  不确定,这说明可以有无穷多条相轨迹以不同的斜率进入、离开或包围该点。在奇点处,  $\dot{c} = 0, \ddot{c} = 0$ , 这表示系统不再运动,处于平衡状态,所以奇点也称为平衡点。因为奇点处  $\dot{c} = 0$ , 所以奇点只能出现在  $c$  轴上。

不同时满足  $\dot{c} = 0$  和  $f(c, \dot{c}) = 0$  的点称为普通点,在任一普通点上的斜率都为一确定值,因而通过普通点的相轨迹只有一条,即相轨迹不会在普通点相交。

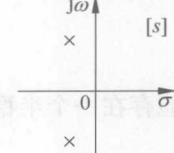
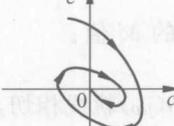
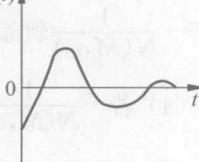
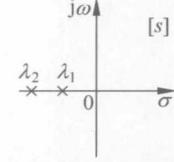
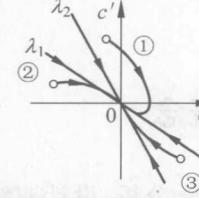
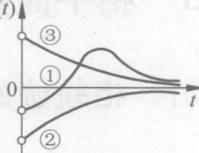
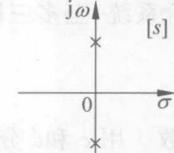
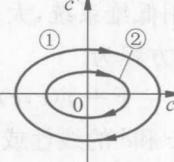
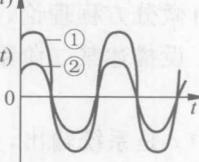
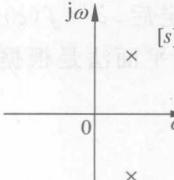
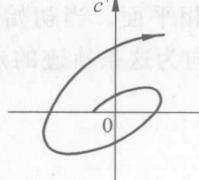
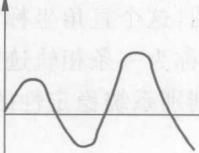
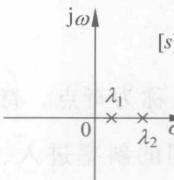
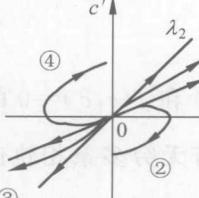
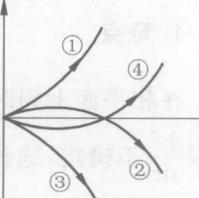
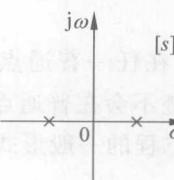
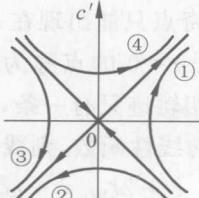
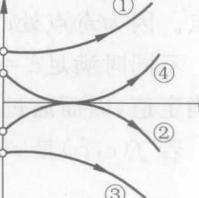
若  $f(c, \dot{c})$  是  $c(t)$  和  $\dot{c}(t)$  的线性函数,则线性微分方程的一般形式为

$$\ddot{c} + 2\zeta\omega_n \dot{c} + \omega_n^2 c = 0 \quad (7-4)$$

坐标原点  $(0, 0)$  为系统的奇点。假设微分方程的特征根为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,根据  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  在复

平面上的位置,奇点的特性可分为六种情况。表 7-3 列出了各情况下奇点的名称、根分布图、相平面图与动态响应,由此可看出它们之间的关系。

表 7-3 奇点的分类

奇点类型	闭环根分布	相平面图	动态响应
(a) 稳定焦点			
(b) 稳定节点			
(c) 中心点 (旋涡)			
(d) 不稳定 焦点			
(e) 不稳定 节点			
(f) 鞍点			

## 2. 极限环

极限环是指相平面图中存在的孤立的封闭相轨迹。所谓孤立的封闭相轨迹,是指在这类封闭曲线的邻近区域内只存在着卷向它或起始于它而卷出的相轨迹。极限环把相平面分为内部平面和外部平面。相轨迹不能从环内穿越极限环进入环外,也不能从环外进入环内。

并不是相平面上所有封闭相轨迹都是极限环,奇点的性质是中心点时,对应的相轨迹也是封闭曲线。但这时相轨迹是封闭的曲线簇,不存在卷向某条封闭曲线或由某条封闭曲线卷出的相轨迹,在任何特定的封闭曲线附近仍存在着封闭的曲线。所以这些封闭的相轨迹曲线不是孤立的,不是极限环。

极限环有稳定、不稳定和半稳定之分,分析极限环邻近相轨迹的运动特点,可以判断极限环的类型。

(1) 稳定极限环。如果在极限环附近,起始于极限环外部和内部的相轨迹都趋于该极限环,即环内的相轨迹散到该环,环外的相轨迹收敛到该环,则这样的极限环称为稳定极限环。

(2) 不稳定极限环。如果在极限环附近,起始于极限环内部的相轨迹离开该极限环逐渐收敛,而起始于极限环外部的相轨迹离开该极限环而发散,则该极限环称为不稳定极限环。

(3) 半稳定极限环。半稳定极限环有两种不同的情况。一种是起始于极限环外部的相轨迹从极限环发散出去,而起始于极限环内部的相轨迹发散到极限环。另一种情况相反,起始于极限环外的相轨迹收敛于极限环,起始于极限环内的相轨迹收敛于环内的奇点。

### 7.3.3 相轨迹的绘制

(1) 解析法。解析法只适用于系统的微分方程较为简单、便于积分求解的情况,用解析法求解系统相轨迹时,通常对相轨迹斜率方程进行积分求得相轨迹方程。

(2) 等倾线法。等倾线法是一种不必求解微分方程,通过作图求取相轨迹的方法。对于二阶系统 $\ddot{c}+f(c, \dot{c})=0$ ,其相轨迹的斜率方程为

$$\frac{d\dot{c}}{dc} = -\frac{f(c, \dot{c})}{\dot{c}} \quad (7-5)$$

令 $\sigma = \frac{d\dot{c}}{dc}$ ,则对于给定的斜率 $\sigma$ ,根据上式可以在相平面 $c-\dot{c}$ 上画出一条曲线,在该曲线各点上的相轨迹具有相同的斜率 $\sigma$ ,这条曲线称为等倾线。任意给定一个初始条件,根据等倾线上表示相轨迹方向的短线段就可以画出系统的相轨迹。

### 7.3.4 非线性系统的相平面分析

在非线性控制系统中,大多数非线性环节都具有分段线性的特性,或近似分段线性的特性。这样,就可以用几个分段线性的系统来近似一个非线性系统。在用相平面法分析时,首先要根据非线性特性的分段情况,将相平面分成若干个区域,并列出每个区域的线性微分方程。其次确定各个区域奇点的位置和类型,并利用奇点的性质勾画出各区的相轨迹。最后根据系统状态变化的连续性,在各区的分界线上,将相轨迹彼此衔接成连续曲线。通常将各区域的分界线称为切换线,在切换线上相轨迹的衔接点称为切换点。

在分区绘制相轨迹时,每个区域都可能具有奇点,奇点的位置可以在本区域之内,也可以在本区域之外。如果奇点的位置在本区域之内,称为实奇点,该区的相轨迹可以汇集于这个实奇点,如果奇点的位置在本区之外,则称为虚奇点,该区的相轨迹不可能汇集于虚奇点。在二阶非线性控制系统中,只能有一个实奇点,而其他区域的奇点都是虚奇点。

## 习题解答

### A 一般题

A7-1 试推导图 7-1 所示各非线性部件的描述函数。

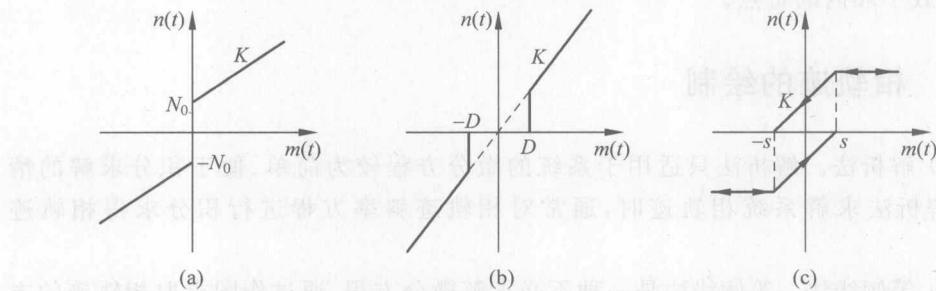


图 7-1 题 A7-1 图

解 (1)  $m(t) = A \sin \omega t$ , 则

$$n(t) = \begin{cases} km(t) + N_0 = kA \sin \omega t + N_0, & 0 \leq \omega t < \pi \\ km(t) - N_0 = kA \sin \omega t - N_0, & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(t) \cos \omega t d\omega t = 0$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(t) \sin \omega t d\omega t = kA + \frac{4N_0}{\pi}$$

所以

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = k + \frac{4N_0}{\pi A}$$

$$(2) m(t) = A \sin \omega t$$

$$n(t) = \begin{cases} km(t) = kA \sin \omega t & \arcsin \frac{D}{A} \leq \omega t < \pi - \arcsin \frac{D}{A}, \pi + \arcsin \frac{D}{A} \leq \omega t < 2\pi - \arcsin \frac{D}{A} \\ 0 & 0 \text{ 到 } 2\pi \text{ 内其他区间} \end{cases}$$

因为  $n(t)$  是奇函数, 所以  $A_1 = 0$ ; 而

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(t) \sin \omega t \, d\omega t = \frac{kA}{2\pi} \left[ 2\pi - 4 \arcsin \frac{D}{A} \right] + \frac{2kD}{\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{D}{A} \right)^2}$$

所以

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{D}{A} + \frac{2KD}{\pi A} \sqrt{1 - \left( \frac{D}{A} \right)^2}$$

(3) 由图可知, 输入与输出之间的关系为

$$n(\omega t) = \begin{cases} kA \sin \omega t - kS & 0 \leq \omega t < \arcsin \frac{S}{A} \\ 2kS & \arcsin \frac{S}{A} \leq \omega t < \pi - \arcsin \frac{S}{A} \\ kA \sin \omega t + kS & \pi - \arcsin \frac{S}{A} \leq \omega t < \pi + \arcsin \frac{S}{A} \\ -2kS & \pi + \arcsin \frac{S}{A} \leq \omega t < 2\pi - \arcsin \frac{S}{A} \\ kA \sin \omega t - kS & 2\pi - \arcsin \frac{S}{A} \leq \omega t < 2\pi \end{cases}$$

由于输出波形非奇非偶, 所以必须求  $A_1$  与  $B_1$ , 有

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(t) \cos \omega t \, d\omega t = \frac{-4kS^2}{\pi A}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n(t) \sin \omega t \, d\omega t = \frac{2kA}{\pi} \arcsin \frac{S}{A} + \frac{6kS}{\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{S}{A} \right)^2}$$

所以

$$N(A) = \frac{B_1 + jA_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{S}{A} + \frac{6kS}{\pi A} \sqrt{1 - \left( \frac{S}{A} \right)^2} - \frac{4kS^2}{\pi A^2} j$$

**A7-2** 非线性系统如图 7-2 所示, 求自振荡的频率和振幅。

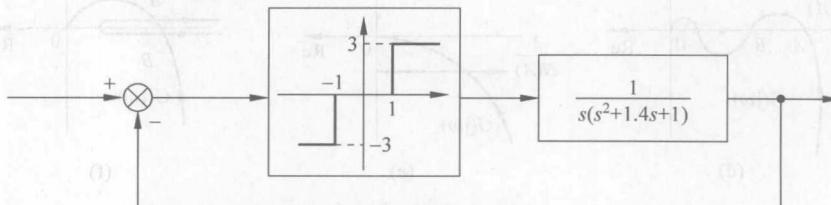


图 7-2 题 A7-2 图

解

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \quad A \geq h$$

$$= \frac{4 \times 3}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \quad A \geq 1$$

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{12 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2}} \quad A \geq 1$$

当  $A \rightarrow 1$ ,  $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$ ; 当  $A \rightarrow \infty$ ,  $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$ , 所以存在极值点。

由  $\frac{d\left(-\frac{1}{N(A)}\right)}{dA} = 0$  可得  $X = \sqrt{2}$ , 由此

$$\left. -\frac{1}{N(A)} \right|_{X=\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{6}$$

由  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$  得  $\omega = 1$ ,  $\text{Re}[G(j\omega)]|_{\omega=1} = -\frac{1}{1.4} < -\frac{\pi}{6}$ 。

由  $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{1.4}$  可得  $A_1 = 1.092$ ,  $A_2 = 2.482$ 。

可见存在一个交点, 交点处对应着负倒幅特性两个不同的幅值。其中幅值  $X_2$  为稳定的振幅。所以自激振荡的频率为  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , 振幅为 2.482。

**A7-3** 已知系统的  $G(j\omega)$  与  $-\frac{1}{N(A)}$  图如图 7-3 所示, 试判断系统稳定性。

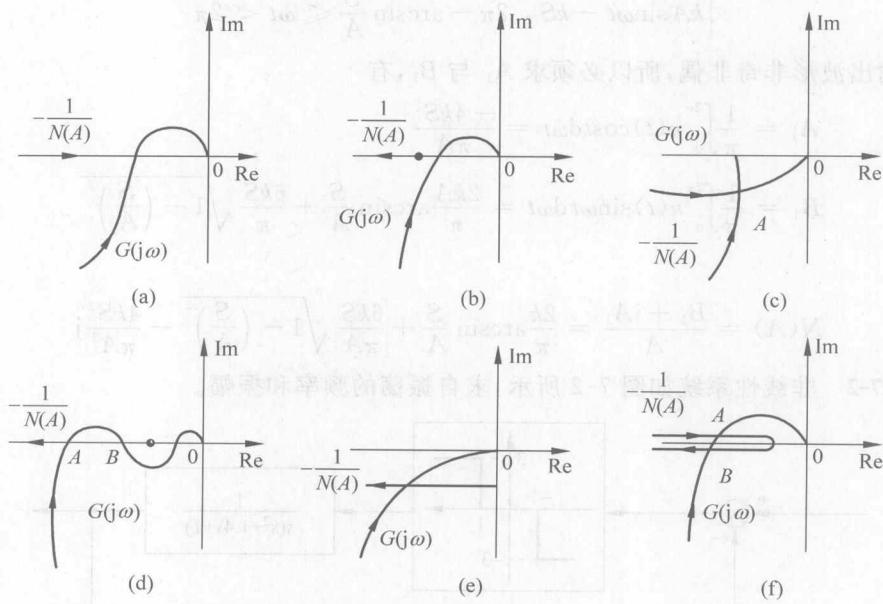


图 7-3 题 A7-3 图

解 假设开环系统  $G(j\omega)$  是稳定的，则可以根据奈奎斯特判据判断：

(1) 交点处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域内移动，则系统是不稳定的周期运动。

(2)  $G(j\omega)$  曲线不包围  $-\frac{1}{N(A)}$ ，系统稳定。

(3) 交点处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域外移动，交点是自振点。

(4) A 点处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域外移动，是自振点；B 点处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域内移动，是不稳定的周期运动。

(5) 交点处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域外移动，交点是自振点。

(6) A 点处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域内移动，是不稳定的周期运动；B 点

处  $-\frac{1}{N(A)}$  轨迹向  $G(j\omega)$  包围区域外移动，是自振点。

**A7-4** 具有继电特性的非线性系统如图 7-4 所示。试画出相轨迹图，分析系统在初始条件作用下的运动规律。

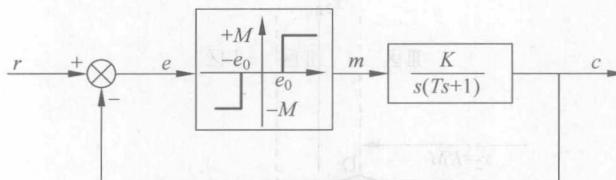


图 7-4 题 A7-4 图

解 线性部分的输入输出关系为

$$T \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{dc}{dt} = Km$$

非线性部分的输入输出关系由下式表示

$$m = f(e) = \begin{cases} M, & e > e_0 \\ 0, & -e_0 < e < e_0 \\ -M, & e < -e_0 \end{cases}$$

令  $r(t) = R \cdot 1(t)$ ，引入新的变量  $e = r - c$ ，并选择相变量  $x_1 = e, x_2 = \dot{e}$

$$\dot{x}_2 = \ddot{e} = -\ddot{c} = -\frac{Km - \dot{c}}{T} = -\frac{Kf(x_1) + x_2}{T}$$

从而

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{Kf(x_1) + x_2}{T} \end{cases}$$

于是有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{Kf(x_1) + x_2}{Tx_2} = q$$

由非线性特性  $f(e)$  的三种可能值, 将相平面分为三个区:

I 区  $x_1 > e_0, f(x_1) = M$  此区域内等倾线方程为

$$q = -\frac{KM + x_2}{Tx_2} \quad \text{或} \quad x_2 = -\frac{KM}{1+qT}$$

等倾线为一组与水平轴平行的直线。当  $q=0, x_2=-KM$  为相轨迹在 I 区的渐近线。

II 区  $-e_0 < x_1 < e_0, f(x_1) = 0$  此区域内等倾线方程为

$$q = -\frac{1}{T}$$

等倾线为斜率为  $\frac{1}{T}$  的直线。

III 区  $x_1 < -e_0, f(x_1) = -M$  此区域内等倾线方程为

$$q = -\frac{-KM + x_2}{Tx_2} \quad \text{或者} \quad x_2 = \frac{KM}{1+qT}$$

等倾线为一组与水平轴平行的直线。当  $q=0, x_2=KM$  为相轨迹在 III 区的渐近线。

根据以上分析绘制相轨迹图(如图 7-5 所示)。

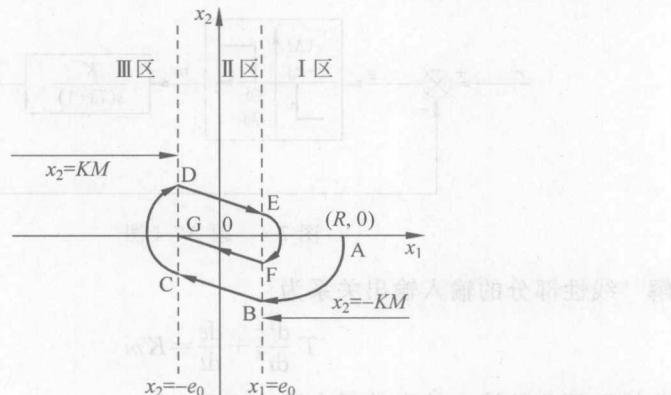


图 7-5 相轨迹

**A7-5** 已知非线性系统如图 7-6 所示, 系统开始是静止的, 输入信号  $r(t) = 4 \times 1(t)$ , 试画出系统的相轨迹, 并分析系统的运动特点。

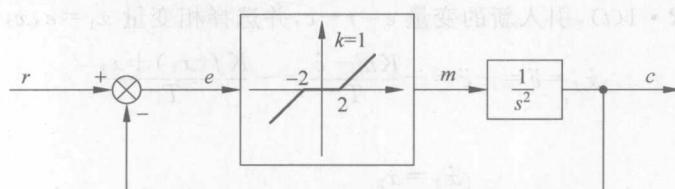


图 7-6 题 A7-5 图

解 根据图 A7-6, 可列写系统的微分方程如下

$$m(t) = c''(t),$$

$$c(t) = r(t) - e(t), \quad c'(t) = r'(t) - e'(t) = -e'(t), \quad c''(t) = -e''(t)$$

$$m(t) = \begin{cases} e(t) + 2 & e(t) < -2 \\ 0 & -2 \leq e(t) \leq 2 \\ e(t) - 2 & e(t) \geq 2 \end{cases}$$

为了便于分析, 取  $e(t)$  和  $e'(t)$  为状态变量, 并按特性曲线分区域列写微分方程式

$$\text{区域 I : } e''(t) + e(t) + 2 = 0 \quad e(t) < -2$$

奇点坐标为  $(-2, 0)$ , 该奇点为中心点。

$$\text{区域 II : } e''(t) = 0 \quad -2 \leq e(t) \leq 2$$

相轨迹为水平线。

$$\text{区域 III : } e''(t) + e(t) - 2 = 0 \quad e(t) \geq 2$$

奇点坐标为  $(2, 0)$ , 该奇点为中心点。

画出相轨迹如图 7-7 所示。

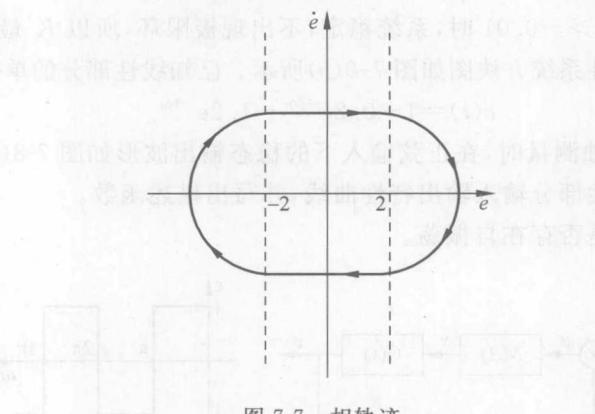


图 7-7 相轨迹

可见, 其特点是始终无法收敛到平衡点, 而是处于无限的周期运动中。

## B 深入题

**B7-1** 非线性系统如图 7-8 所示,  $K=100, a=1$ 。

(1) 分析  $K'=0.1$  时系统的稳定性。

(2) 确定不存在极限环时  $K'$  的最大值。

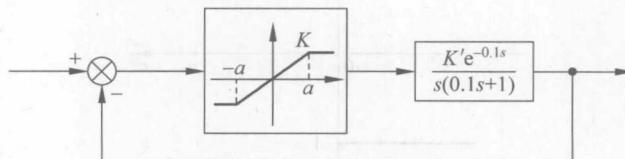


图 7-8 题 B7-1 图

$$\text{解} \quad (1) \quad N(A) = \frac{2K}{\pi} \lfloor \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \rfloor \quad A \geq a$$

$$= \frac{200}{\pi} \lfloor \arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \rfloor \quad A \geq 1$$

$$G(j\omega) = \frac{K' e^{-0.1\omega j}}{j\omega(j0.1\omega + 1)} = \frac{0.1e^{-0.1\omega j}}{j\omega(j0.1\omega + 1)}$$

令

$$\angle G(j\omega) = -0.1\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan 0.1\omega = -\pi$$

求出  $G(j\omega)$  曲线与负实轴交点处的频率  $\omega = 8.6 \text{ rad/s}$ , 以及相应幅值

$$|G(j\omega)| = \frac{K'}{\omega \sqrt{1 + (0.1\omega)^2}} = 0.088K' = 0.0088$$

由饱和非线性系统的描述函数可知, 当  $A = 1 \rightarrow \infty$  时, 负倒描述函数  $\frac{-1}{N(A)}$  从  $-0.01 \rightarrow -\infty$ 。显然,  $-0.0088 \geq -0.01$ , 故系统稳定。

(2)  $-0.088K' > -0.01$  时, 系统稳定, 不出现极限环, 所以  $K'$  最大值为 0.114。

**B7-2** 一非线性系统方块图如图 7-9(a)所示。已知线性部分的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$$

非线性部分单独测量时, 在正弦输入下的稳态输出波形如图 7-8(b)所示。

(1) 画出非线性部分输入输出特性曲线, 并写出描述函数。

(2) 判断系统是否存在自振荡。

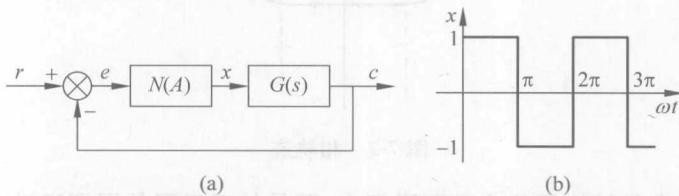


图 7-9 题 B7-2 图

解 (1) 非线性部分输入输出特性曲线如图 7-10 所示。其描述函数为

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}$$

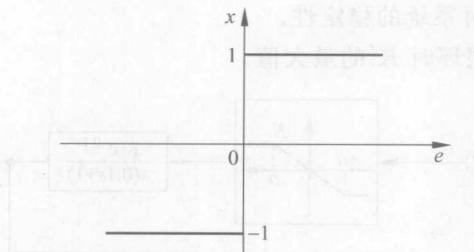


图 7-10 输入输出特性

(2) 对  $c(t)$  进行拉氏变换有

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1.2}{s+10}$$

$$C(s) = G(s)R(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

$$G(s) = C(s) \times s = \frac{600}{s^2 + 70s + 600}$$

可知开环传递函数无右半  $s$  平面极点, 系统的  $G(j\omega)$  曲线不包围  $-\frac{1}{N(A)}$ , 则系统稳定, 不存在自振荡。

**B7-3** 已知非线性系统如图 7-11 所示,  $r(t)=1(t)$ 。试用相平面法分析:

(1)  $T_d=0$  时系统的运动。

(2)  $T_d=0.5$  时系统的运动, 并分析比例微分控制对改善系统性能的影响。

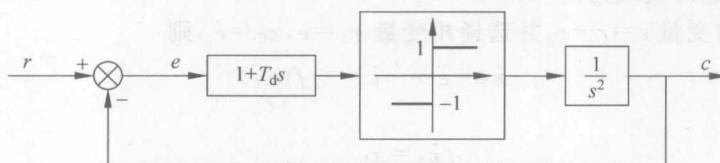


图 7-11 题 B7-3 图

解 (1)  $T_d=0$  时线性部分的输入输出关系为

$$\frac{d^2c}{dt^2} = m$$

非线性部分的输入输出关系由下式表示

$$m=f(e)=\begin{cases} 1, & e>0 \\ -1, & e<0 \end{cases}$$

引入新的变量  $e=r-c$ , 并选择相变量  $x_1=e, x_2=\dot{e}$

$$\dot{x}=e=-\ddot{c}=-f(x)$$

从而

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-f(x_1) \end{cases}$$

于是有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2} \quad \text{即} \quad f(x_1)dx_1 = -x_2 dx_2 \quad (7-6)$$

又

$$x_1(0)=e(0)=r(0_+)-c(0_+)=1, \quad x_2(0)=0$$

当  $x_1>0$  时, 对式(7-6)两边同时积分得

$$\frac{1}{2}x_2^2 = -x_1 + C_1 \quad (7-7)$$

当  $x_1 < 0$  时, 对式(7-6)两边同时积分得

$$\frac{1}{2}x_2^2 = x_1 + C_2 \quad (7-8)$$

根据式(7-7)、式(7-8)绘制相轨迹图(见图 7-12)。

(2)  $T_d=0.5$  时线性部分的输入输出关系为

$$\begin{cases} \frac{d^2c}{dt^2} = m \\ e_1 = e + \frac{0.5de}{dt} \end{cases}$$

非线性部分的输入输出关系由下式表示

$$m = f(e) = \begin{cases} 1, & e + 0.5\dot{e} > 0 \\ -1, & e + 0.5\dot{e} < 0 \end{cases}$$

显然, 相轨迹的开关线为  $e + 0.5\dot{e} = 0$ 。

引入新的变量  $e = r - c$ , 并选择相变量  $x_1 = e, x_2 = \dot{e}$ , 则

$$\dot{x}_2 = \ddot{e} = -\ddot{c} = -f(x_1)$$

从而

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f(x_1) \end{cases}$$

于是有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2} \quad \text{即} \quad f(x_1)dx_1 = -x_2dx_2 \quad (7-9)$$

又

$$x_1(0) = e(0) = r(0_+) - c(0_+) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

当  $x_1 + 0.5x_2 > 0$  时, 对式(7-9)两边同时积分得

$$\frac{1}{2}x_2^2 = -x_1 + C_1 \quad (7-10)$$

当  $x_1 + 0.5x_2 < 0$  时, 对式(7-9)两边同时积分得

$$\frac{1}{2}x_2^2 = x_1 + C_2 \quad (7-11)$$

根据式(7-10)、式(7-11)绘制相轨迹图(见图 7-13)。

通过以上计算比较, 可知比例微分控制能够提高系统的稳定性。

**B7-4** 在图 7-14(a)的相平面中,  $a$  和  $b$  哪个相轨迹的振荡周期短? 在图 7-14(b)中,  $c$  和  $d$  哪个相轨迹的振荡周期短?

解 在图 7-14(a)中,  $b$  的相轨迹振荡周期短, 因为根据从相平面图求取时间解的圆弧法, 系统的相轨迹是用圆心位于  $x$  轴上的一系列圆弧来近似的, 当点在圆周上运动时, 其所需要的时间是其所对

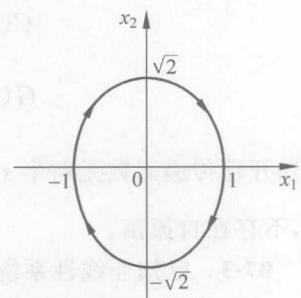


图 7-12  $T_d = 0.5$  时的相轨迹

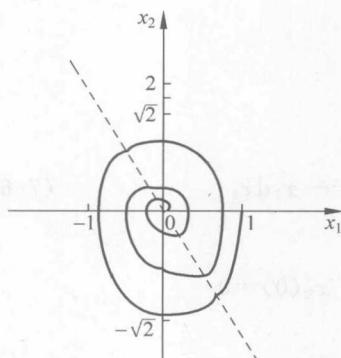


图 7-13  $T_d = 0.5$  时的相轨迹

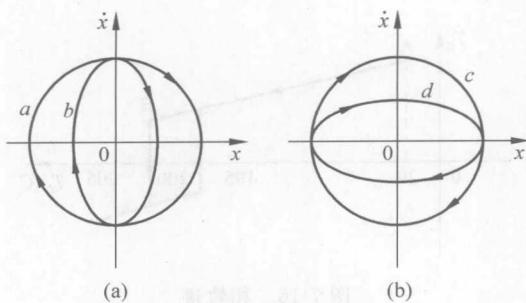


图 7-14 题 B7-4 图

应的圆心角(弧度)与角速度之比,假设角速度是固定的,则  $a$  的弧度正好是  $2\pi$ ,而  $b$  分段近似成圆心在  $x$  轴上的圆后,其圆心弧度之和明显小于  $2\pi$ ,所以  $b$  的相轨迹振荡周期短。

同样的道理,在图 7-14(b)中, $c$  的振荡周期比较短。

## C 实际题

**C7-1** 设恒温箱温度控制系统结构如图 7-15 所示,若要求保持温度  $T_c = 200^\circ\text{C}$ ,恒温箱由常温  $20^\circ\text{C}$  启动,试在  $T_c - \dot{T}_c$  相平面上画出温度控制系统的相轨迹,并计算温度由  $20^\circ\text{C}$  升到  $200^\circ\text{C}$  的升温时间和保持温度的精度。

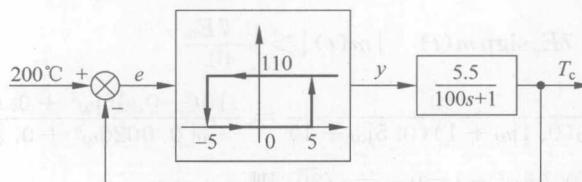


图 7-15 题 C7-1 图

解 由图 7-15 可得系统分段微分方程为

$$100 \dot{T}_c + T_c = \begin{cases} T_c < 195 \\ 605 & T_c < 205, \quad \dot{T}_c > 0 \\ 0 & T_c > 205 \\ 0 & T_c > 195, \quad \dot{T}_c < 0 \end{cases}$$

相应的相轨迹如图 7-16 所示。

升温时间在升温时,相轨迹沿 AB 运动。AB 对应相轨迹方程为

$$\dot{T}_c = \frac{(605 - T_c)}{100}$$

$$t_r = \int_{20}^{200} \frac{dT_c}{\dot{T}_c} = \int_{20}^{200} \frac{100}{605 - T_c} dT_c = 100 \ln \frac{585}{405} = 36.77$$

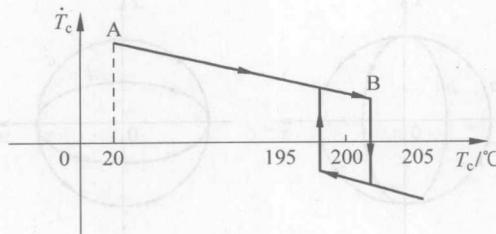


图 7-16 相轨迹

由相平面可见,保温精度为 $\pm 5^{\circ}\text{C}$ 。

**C7-2** 一单位负反馈伺服系统中的放大器在马达额定电压  $E_0$  的 70% 后达到饱和,假设放大器非饱和区的增益为 40,线性部件的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

问是否存在极限环,如存在的话,试判断它的稳定性,并求出振荡频率及幅值。

解 非线性部分的输入输出特性曲线如图 7-17 所示。非线性部分的数学描述为

$$n(t) = \begin{cases} 40m(t) & |m(t)| \leq \frac{0.7E_0}{40} \\ 0.7E_0 \operatorname{sign} m(t) & |m(t)| > \frac{0.7E_0}{40} \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0.1j\omega+1)(0.5j\omega+1)} = \frac{10(-0.05\omega^2 + 0.6\omega + j\omega)}{-\omega[0.0025\omega^4 + 0.26\omega^2 + 1]}$$

令  $\operatorname{Im}G(j\omega)=0$ , 即  $0.05\omega^2 - 1 = 0$ ,  $\omega = \sqrt{20}$ , 则

$$[\operatorname{Re}G(j\omega)]|_{\omega=\sqrt{20}} = \left. \frac{-6}{0.0025\omega^4 + 0.26\omega^2 + 1} \right|_{\omega=\sqrt{20}} = -0.83$$

非线性的负倒幅特性位于负实轴  $(-\infty, -0.025)$  上,与  $G(j\omega)$  相交,且为稳定的交点。交点处的频率为  $\sqrt{20} \text{ rad/s}$ , 振幅  $M$  可以通过解下列方程获得

$$-\frac{\pi}{80(\arcsin(0.7E_0/40M) + (0.7E_0/40M)\sqrt{1-(0.7E_0/40M)^2})} = -0.83$$

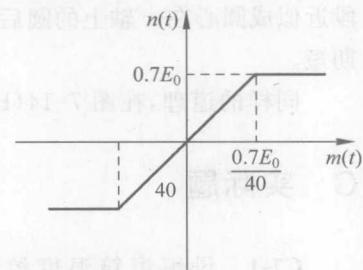


图 7-17 输入输出特性

# 第8章

## 计算机控制系统

### 要点提示

计算机控制系统(CCS)是以微型计算机为核心部件的自动控制系统或过程控制系统；作为当今工业控制的主流系统，它已取代常规的模拟检测、调节、显示、记录等仪器设备和大部分操作管理的职能，并具有较高级的计算方法和处理方法，使受控对象的动态过程按规定方式和技术要求运行，以完成各种过程控制、操作管理等任务。计算机控制系统广泛应用于生产现场，并深入许多行业的多个领域。

### 8.1 计算机控制系统的硬件组成

计算机控制系统的硬件由计算机主机、输入通道、输出通道、被控对象四部分组成。

### 8.2 采样与恢复

#### 8.2.1 采样过程

采样开关每隔一定时间  $T$  闭合一次，于是连续的信号  $\epsilon(t)$  就变成了时间上离散的采样信号  $\epsilon^*(t), \epsilon^*(t)$  是一个序列  $\{\epsilon(0), \epsilon(T), \dots, \epsilon(kT), \dots\}$ 。这种把连续信号变成脉冲序列的过程称为采样过程，其中的  $T$  称为采样周期， $\epsilon(kT)$  称为第  $k$  次采样值， $\omega_s = T^{-1}$  称为采样频率。

#### 8.2.2 采样定理

香农(Shannon)采样定理 若信号  $\epsilon^*(t)$  所含的最高频率成分为  $\omega_m$ ，如果采样频率满足

$$\omega_s \geqslant 2\omega_m \quad (8-1)$$

即可在采样后的信号  $\epsilon^*(t)$  中不失真地复现原信号  $\epsilon(t)$ 。

### 8.2.3 信号恢复

零阶保持器是一种按常值规律外推的保持器,它把前一个采样时刻  $nT$  的采样值  $\epsilon(nT)$  不增不减地保持到下一个采样时刻  $(n+1)T$ ,当下一个采样时刻  $(n+1)T$  到来时应换成新的采样值  $\epsilon((n+1)T)$  继续外推。零阶保持器的传递函数为

$$G_{ho}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (8-2)$$

如

$$\bar{\epsilon}(t) = \epsilon(kT) + \epsilon'(kT)(t - kT) \quad t \in [kT, (k+1)T] \quad (8-3)$$

由于输出与输入信号的一阶微分有关,故称之为一阶保持器,其中的  $\epsilon'(kT) = \frac{\epsilon(kT) - \epsilon((k-1)T)}{T}$  为差分。类似地,可以定义  $m$  阶采样保持器,一般  $m$  阶保持器需要用到前  $m$  个采样值。

## 8.3 $z$ 变换

### 8.3.1 $z$ 变换的定义

连续信号  $\epsilon(t)$  经采样开关后成为脉冲函数序列  $\epsilon^*(t), \epsilon^*(t)$  的  $z$  变换定义式为

$$E(z) = \mathcal{Z}[\epsilon(t)] \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon(nT) z^{-n} \quad (8-4)$$

### 8.3.2 $z$ 变换的基本性质

#### (1) 线性定理

$$\mathcal{Z}[\alpha\{\epsilon_1(k)\} \pm \beta\{\epsilon_2(k)\}] = \alpha \mathcal{Z}[\{\epsilon_1(k)\}] \pm \beta \mathcal{Z}[\{\epsilon_2(k)\}] = \alpha E_1(z) \pm \beta E_2(z) \quad (8-5)$$

#### (2) 实位移定理

$$\mathcal{Z}[\{\epsilon(k+n)\}] = z^n \left[ E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon(k) z^{-k} \right] \quad (\text{超前定理}) \quad (8-6)$$

#### (3) 复位移定理

设  $\{\epsilon(k)\}$  的  $z$  变换为  $E(z)$ ,那么

$$\mathcal{Z}[\{e^{ak}\epsilon(k)\}] = E(ze^{-a}) \quad (8-7)$$

#### (4) 初值定理

设  $\{\epsilon(k)\}$  的  $z$  变换为  $E(z)$ ,那么

$$\epsilon(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z) \quad (8-8)$$

### (5) 终值定理

设 $\{\epsilon(k)\}$ 的 $z$ 变换为 $E(z)$ ,若极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} \epsilon(n)$ 存在,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) \quad (8-9)$$

## 8.3.3 $z$ 变换的求法

求取 $z$ 变换可以按照定义求级数,称为级数求和法,也可以用复变函数中的留数法,控制理论中最常用的是部分分式法。

设连续函数 $\epsilon(t)$ 的拉氏变换 $E(s)$ 为有理函数,则其必可写成部分分式和的形式,即

$$E(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + s_i}$$

这时, $E(z) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{z}{z - e^{-s_i/T}}$ 。

常用函数的 $z$ 变换见书中表8-1。

## 8.3.4 $z$ 反变换的求法

由于 $z$ 反变换结果仅指出原函数在采样时刻的值,所以反变换的结果一般以信号序列 $\{\epsilon(k)\}$ 表示,而不以连续函数 $\epsilon(t)$ 的形式表示。常用的有长除法和部分分式法。

(1) 长除法 这种方法可以将两个多项式的商表示的 $z$ 变换式变成幂级数的形式,即

$$E(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z^{-1} + \epsilon_2 z^{-2} + \dots \quad (8-10)$$

幂级数的各系数就是 $\epsilon(t)$ 在各采样时刻的值,即 $\epsilon(0) = \epsilon_0, \epsilon(T) = \epsilon_1, \epsilon(2T) = \epsilon_2, \dots$ 。这种方法简单易行,但要得到 $\{\epsilon(k)\}$ 的闭式结果较为困难。

(2) 部分分式法 首先将 $z$ 变换式写成部分分式的形式,然后与主教材《工程控制基础》中表8-1对照,写出每一项对应的信号序列。从表8-1可见,变换式的每一个单项的分子都含有 $z$ 的因子。所以在写 $E(z)$ 的部分分式时,应先把 $z$ 提出,即写成 $E(z) = zE_1(z)$ 的形式,然后再把 $E_1(z)$ 写成部分分式。

## 8.4 脉冲传递函数

线性离散系统的脉冲传递函数定义为:零初始条件下,系统或环节的输出采样函数的 $z$ 变换和输入采样函数的 $z$ 变换之比。典型带零阶保持器的系统如图8-1所示。

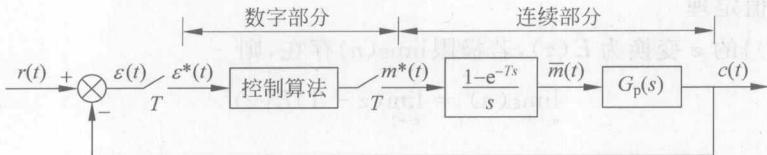


图 8-1 典型的计算机控制系统

### 8.4.1 数字部分的脉冲传递函数

在图 8-1 中, 数字控制器的脉冲传递函数为控制信号  $m(t)$  的  $z$  变换和偏差  $e(t)$  的  $z$  变换之比, 即

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}z^{-1} + \dots + \alpha_0 z^{-n}}{1 + \beta_{n-1}z^{-1} + \dots + \beta_0 z^{-n}} \quad (8-11)$$

### 8.4.2 连续部分的脉冲传递函数

在图 8-1 所示的典型的计算机控制系统中, 计算机输出的控制信号  $m^*(t)$  经零阶保持器后作用到被控对象上。因此, 零阶保持器和被控对象一起构成这个系统的连续部分, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{1 - e^{Ts}}{s} G_p(s) \quad (8-12)$$

然后求取连续部分的脉冲传递函数  $G(z)$ 。

### 8.4.3 闭环脉冲传递函数

闭环脉冲传递函数一般可以通过解方程求取。例如在图 8-1 所示系统中

$$G(z) = G(z)M(z), \quad M(z) = D(z)E(z), \quad E(z) = R(z) - C(z)$$

所以  $\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)D(z)}{1 + D(z)D(z)}$ 。在求取脉冲传递函数时, 采样开关的位置是会影响结果的。

## 8.5 离散控制系统的性能分析

### 8.5.1 离散控制系统的稳定性分析

线性定常离散控制系统的稳定的充要条件是: 闭环系统特征方程的所有根(即闭环脉冲传递函数的所有极点)都分布在  $z$  平面的单位圆内, 单位圆是稳定边界。

通过求解系统特征方程的根, 当然可以判定系统是否稳定; 但是若系统阶次较

高,求根就不那么容易。可以通过变换

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad \text{或} \quad w = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (8-13)$$

将  $z$  平面变换到  $w$  平面,然后利用连续系统中的劳斯判据分析系统的稳定性。

### 8.5.2 离散控制系统的动态性能和稳态性能分析

离散控制系统的动态和稳态性能分析和一般补偿设计可以参照连续系统进行,如也可以定义误差系统等。

## 8.6 数字控制器的设计

属于离散系统特色的设计有的最少拍无差系统。在离散系统中,一个采样周期也称为一拍。最少拍无差系统也称最小调整时间系统或最快响应系统。该系统对于典型输入信号,如单位阶跃信号、单位速度信号、单位加速度信号,具有最快的响应速度,能在有限的几个采样周期(几拍)之内结束过渡过程,在采样点上无稳态误差,完全跟踪输入信号。设计控制其实现最少拍称为最小拍设计。

最小拍系统设计方法比较简便,系统结构也比较简单,是一种时间最优系统。但在实际应用中存在一定的局限性,首先最小拍系统对于不同输入信号的适应性较差,其次最小拍系统对于参数的变化也比较敏感,当系统参数受各种因素的影响发生变化时,会导致瞬态响应时间的延长。另外,上述最小拍系统只能保证在采样点无稳态误差,而在采样点之间系统的输出可能会出现波动,因而这种系统称为有波纹系统。

## 习题解答

### A 一般题

**A8-1** 利用  $z$  变换表,求下列函数的  $z$  变换。

$$(1) E(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}; \quad (2) E(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)};$$

$$(3) E(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}; \quad (4) E(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+2)};$$

$$(5) E(s) = \frac{s+1}{s^2+25}; \quad (6) E(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+26}.$$

解

$$(1) E(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{Te^{-T}z}{(z-e^{-T})^2}$$

$$(2) E(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$E(z) = -\frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{2z}{z-e^{-2T}}$$

$$(3) E(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$E(z) = \frac{z}{2(z-1)} + \frac{z}{2(z-e^{-2T})}$$

$$(4) E(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$E(z) = \frac{4z}{z-e^{-2T}} - \frac{3z}{z-e^{-T}} + \frac{Tze^{-T}}{(z-e^{-T})^2}$$

$$(5) E(s) = \frac{s+1}{s^2+25} + \frac{1}{s^2+25} + \frac{1}{s^2+25}$$

$$E(z) = \frac{z(z-\cos 5T)}{z^2-2z\cos 5T+1} + \frac{z\sin 5T}{5(z^2-2z\cos 5T+1)}$$

$$(6) E(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+26} = \frac{s+1}{(s+1)^2+25}$$

$$E(z) = \frac{z^2 - ze^{-T}\cos 5T}{z^2 - 2ze^{-T}\cos 5T + e^{-2T}}$$

A8-2 利用  $z$  变换的定义, 求下列函数的  $z$  变换, 并写出闭式结果。

$$(1) \epsilon(t) = e^{-at};$$

$$(2) \epsilon(t) = e^{-(t-T)} u(t-T);$$

$$(3) \epsilon(t) = e^{-(t-5T)} u(t-5T).$$

解

(1)

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(nT-T)} u(nT-T) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n-1)T} u[(n-1)T] z^{-(n-1)} z^{-1} \\ &= z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)T} u[(n-1)T] z^{-(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} u(nT) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \\
 &= \frac{1}{z - e^{-T}}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(nT-5T)} u(nT-5T) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n-5)T} u[(n-5)T] z^{-(n-5)} z^{-5} \\
 &= z^{-5} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} z^{-n} \\
 &= z^{-5} \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \\
 &= \frac{1}{z^4(z - e^{-T})}
 \end{aligned}$$

**A8-3** 试求下列函数的  $z$  反变换:

$$(1) X(z) = \frac{z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}; \quad (2) X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)};$$

$$(3) X(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}; \quad (4) X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}.$$

**解****(1) 部分分式法**

$$X(z) = \frac{z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} = \frac{1}{e^{-aT} - e^{-bT}} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}} \right)$$

则

$$x(n) = \frac{e^{-anT} - e^{-bnT}}{e^{-aT} - e^{-bT}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**留数计算法** $z^{n-1} F(z)$  在极点  $e^{-aT}$  和  $e^{-bT}$  处留数之和, 得

$$x(n) = \frac{z^n}{z - e^{-bT}} \Big|_{z=e^{-aT}} + \frac{z^n}{z - e^{-aT}} \Big|_{z=e^{-bT}} = \frac{e^{-anT} - e^{-bnT}}{e^{-aT} - e^{-bT}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2) X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{-z}{(z-1)^2} + \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

$$x(n) = -n - 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(3) X(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-e^{-aT}}$$

因此

$$x(n) = 1 - e^{-anT}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(4) 长除法

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)} = 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2} + 0.875z^{-3} + \dots$$

根据  $z$  变换定义, 有

$$x(0) = 0, x(T) = 0.5, \quad x(2T) = 0.75, \quad x(3T) = 0.875, \dots$$

部分分式法

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

则

$$x(n) = 1 - 0.5^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**A8-4** 在矩形法数值积分中, 用矩形面积的和来近似  $x(t)$  积分的  $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ , 见图 8-2。

(1) 写出这一方法中联系  $y(k+1)$ ,  $y(k)$ ,  $x(k+1)$  的差分方程;

$$(2) \text{ 证明 } \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{Tz}{z-1}.$$

$$\text{解 } (1) y(k+1) - y(k) = Tx(k+1)$$

$$(2) \text{ 因为 } y[(k+1)T] - y(kT) = Tx[(k+1)T], \text{ 即}$$

$$y(kT+T) - y(kT) = Tx(kT+T)$$

等式两边同取  $z$  变换可得

$$zy(z) - y(z) = Tzx(z)$$

$$\text{即 } \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{Tz}{z-1} \text{ 得证。}$$

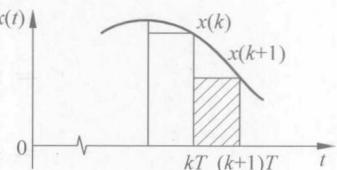


图 8-2 题 A8-4 图

**A8-5** 在图 8-3 中, 数字滤波器的差分方程为

$$m(k+1) = 0.5\varepsilon(k+1) - 0.5 \times 0.99\varepsilon(k) + 0.995m(k)$$

设采样频率为 25Hz。

(1) 求  $C(z)$ ;

(2) 求  $c(0)$  及  $\lim_{k \rightarrow \infty} c(kT)$ 。

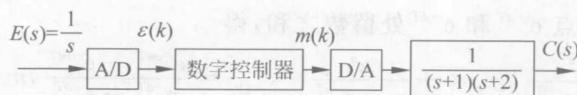


图 8-3 题 A8-5 图

解

(1) 对差分方程在零初始条件取  $z$  变换, 得

$$zm(z) = 0.5z\varepsilon(z) - 0.5 \times 0.99\varepsilon(z) + 0.995m(z)$$

所以有

$$[z - 0.995]m(z) = [0.5z - 0.5 \times 0.99]\epsilon(z)$$

进而可得

$$\frac{m(z)}{\epsilon(z)} = \frac{0.5z - 0.5 \times 0.99}{z - 0.995}$$

又因为

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

对它进行  $z$  变换, 因为采样频率为 25Hz, 所以  $T=0.04s$ , 可得结果为

$$\frac{z}{z - e^{-T}} - \frac{z}{z - e^{-2T}} = \frac{z}{z - e^{-0.04}} - \frac{z}{z - e^{-0.08}}$$

将其相乘可得

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{0.5z - 0.5 \times 0.99}{z - 0.995} \times \left( \frac{z}{z - e^{-0.04}} - \frac{z}{z - e^{-0.08}} \right) \\ &= \frac{0.5z(z - 0.99)(e^{-0.04} - e^{-0.08})}{(z - 0.995)(z - e^{-0.04})(z - e^{-0.08})} \end{aligned}$$

所以

$$C(z) = G(z)R(z) = \frac{0.5z^2(z - 0.99)(e^{-0.04} - e^{-0.08})}{(z - 0.995)(z - e^{-0.04})(z - e^{-0.08})(z - 1)}$$

(2) 根据初值定理可得

$$c(0) = \lim_{n \rightarrow 0} c(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} C(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.5z^2(z - 0.99)(e^{-0.04} - e^{-0.08})}{(z - 0.995)(z - e^{-0.04})(z - e^{-0.08})(z - 1)} = 0$$

根据终值定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)C(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.5z^2(z - 0.99)(e^{-0.04} - e^{-0.08})}{(z - 0.995)(z - e^{-0.04})(z - e^{-0.08})} \\ &= \frac{0.5 \times 0.01 \times (e^{-0.04} - e^{-0.08})}{0.005 \times (1 - e^{-0.04})(1 - e^{-0.08})} = \frac{(e^{-0.04} - e^{-0.08})}{(1 - e^{-0.04})(1 - e^{-0.08})} \end{aligned}$$

A8-6 写出以下各图所示系统的  $C(z)$  表达式(见图 8-4)。

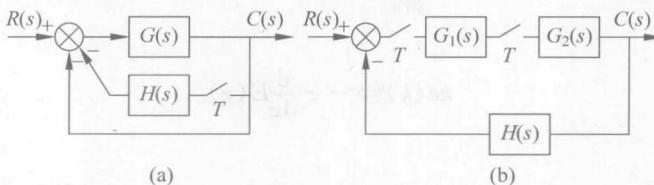


图 8-4 题 A8-6 图

解

$$(1) C(z) = \frac{GR(z)}{1 + G(z) + GH(z)}$$

$$(2) C(z) = \frac{R(z)G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$$

A8-7 设离散系统的特征方程式为

$$z^3 - 1.5z^2 - 0.25z + 0.4 = 0$$

试用劳斯判据分析该系统的稳定性，并指明分布在单位圆外闭环极点的个数。

解 对该系统进行  $z = \frac{w+1}{w-1}$  的  $w$  变换，得到关于  $w$  的系统方程

$$-0.35w^3 + 0.55w^2 + 5.95w + 1.85 = 0$$

由此可得如下的劳斯表

$w^3$	-0.35	5.95
$w^2$	0.55	1.85
$w^1$	7.13	0
$w^0$	1.85	0

劳斯表首列系数符号不同，所以该系统不稳定。劳斯表第一列符号改变了一次，所以  $w$  平面上有一个右半平面的根，则分布在单位圆外部闭环极点个数为 1。

## B 深入题

B8-1 试证明下列关系成立

$$\mathcal{Z}[t\epsilon(t)] = -Tz \frac{d}{dz} E(z)$$

证明 由  $z$  变换定义得

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^{-k}$$

将上式对  $z$  求导，得

$$\begin{aligned} \frac{dE(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} e(k) z^{-k} \\ &= -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k e(k) z^{-k} = -z^{-1} \mathcal{Z}[ke(k)] \end{aligned}$$

即

$$ke(k) \Leftrightarrow -z \frac{d}{dz} E(z)$$

从而

$$\mathcal{Z}[t\epsilon(t)] = \mathcal{Z}[kT\epsilon(kT)] = T\mathcal{Z}[ke(k)] = -Tz \frac{d}{dz} E(z)$$

得证。

B8-2 用留数法求下列各式的采样变换  $E^*(s)$

$$(1) E(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$$

$$(2) E(s) = \frac{(s+2)e^{-2Ts}}{(s-1)(s+1)}$$

$$(3) E(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(4) \epsilon(t) = (t-T)u(t-T)$$

$$\text{解 (1)} \quad E(z) = (p-1) \cdot \frac{p+2}{(p-1)(p+1)} \cdot \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=1} + (p+1) \cdot$$

$$\frac{p+2}{(p-1)(p+1)} \cdot \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-1}$$

$$= \frac{3z}{z(z-e^T)} - \frac{z}{2(z-e^{-T})}$$

$$(2) \quad E(z) = z^{-2} \left\{ (p-1) \frac{p+2}{(p-1)(p+1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=1} \right.$$

$$\left. + (p+1) \frac{p+2}{(p-1)(p+1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-1} \right\}$$

$$= \frac{3z^{-1}}{2(z-e^T)} - \frac{z^{-1}}{2(z-e^{-T})}$$

$$(3) \quad E(z) = \frac{d}{dp} \left( p^2 \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{z}{z-e^{Tp}} \right) \Big|_{p=0} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$(4) \quad E(s) = \frac{e^{-Ts}}{s^2}$$

$$E(z) = z^{-1} \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2} \right] = z^{-1} \times \frac{d}{dp} \left( p^2 \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{z}{z-e^{Tp}} \right) \Big|_{p=0} = \frac{T}{(z-1)^2}$$

**B8-3** 给出以下差分方程

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = \epsilon(k)$$

其中

$$\epsilon(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \text{其余} \end{cases}$$

$$x(0) = 1 \quad x(1) = -1$$

解出  $x(k)$  的表达式。

**解** 差分方程两边取  $z$  变换得

$$z^2 [X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] + 3z[X(z) - x(0)] + 2X(z) = 1$$

$$X(z) = \frac{z+1}{z+2} = 1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3} + 8z^{-4} - \dots$$

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ (-1)^k 2^{k-1} & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

**B8-4** 设图 8-5 所示系统的输入为单位阶跃函数。求输出  $c(k)$  在各采样时刻的值, 画出  $c(k)$  的大致波形。

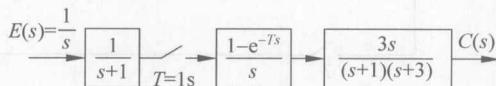


图 8-5 题 B8-4 图

$$\begin{aligned}
 \text{解 } G_1(s) &= \frac{(1-e^{-Ts})}{s} \frac{3s}{(s+1)(s+3)} = \frac{3(1-e^{-s})}{(s+1)(s+3)} \\
 G_1(z) &= 3 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+3)}\right] \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \left[ \frac{z}{z-e^{-1}} - \frac{z}{z-e^{-3}} \right] = \frac{3}{2} \cdot (z-1) \cdot \frac{e^{-1}-e^{-3}}{(z-e^{-1})(z-e^{-3})} \\
 G_2 E(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} \\
 C(z) &= G_2 E(z) G_1(z) = \frac{3z(1-e^{-1})(e^{-1}-e^{-3})}{2(z-e^{-1})^2(z-e^{-3})} \\
 c(k) &= \sum \{\text{Res}[C(z)z^{k-1}]\} = \frac{3(1-e^{-1})(e^{-3k} + ke^{-k} - ke^{-(k+2)} - e^{-k})}{2(e^{-1}-e^{-3})}
 \end{aligned}$$

$c(k)$  的波形如图 8-6 所示。

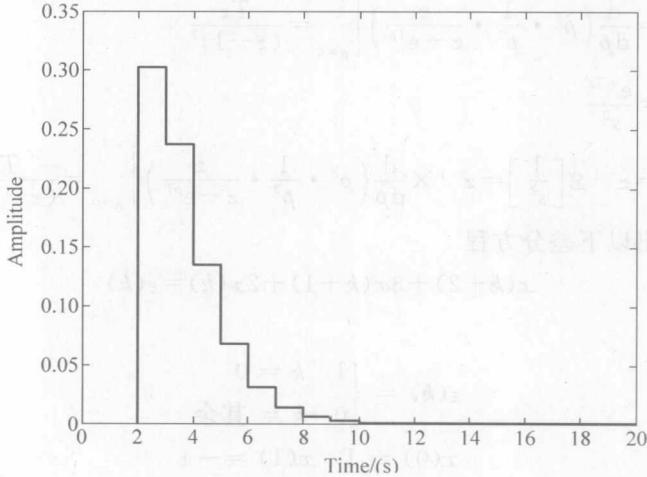


图 8-6  $c(k)$  的波形

**B8-5** 图 8-7 所示系统除了有一个给定输入  $R(s)$  外。还有一个扰动输入  $U(s)$ 。

- (1) 写出在  $R(s), U(s)$  作用下  $C(z)$  的表达式；
- (2) 如果选择  $D_2(z), D_3(z)$  满足  $D_3(z) = D_2(z)\overline{G_1 G_2}(z)$ , 写出  $C(z)$  表达式；
- (3) 这样选择有什么好处？是否能减小扰动  $U(s)$  对  $C(z)$  影响？

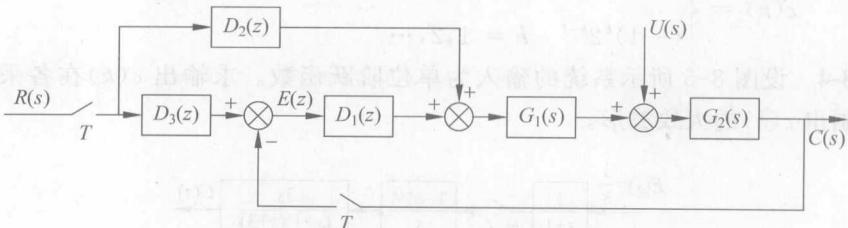


图 8-7 题 B8-5 图

$$\text{解} \quad (1) \quad C(s) = \frac{R(s)D_2(z)G_1(s)G_2(s)}{1+D_1(z)G_1(s)G_2(s)} + \frac{R(s)D_3(z)D_1(z)G_1(s)G_2(s)}{1+D_1(z)G_1(s)G_2(s)} \\ + \frac{U(s)G_2(s)}{1+D_1(z)G_1(s)G_2(s)}$$

$$[C(s)]^* = \frac{[R(s)]^*[D_2(z)G_1(s)G_2(s)]^*}{1+[D_1(z)G_1(s)G_2(s)]^*} + \frac{[R(s)]^*[D_3(z)D_1(z)G_1(s)G_2(s)]^*}{1+[D_1(z)G_1(s)G_2(s)]^*} \\ + \frac{[U(s)G_2(s)]^*}{1+[D_1(z)G_1(s)G_2(s)]^*}$$

对上式进行  $z$  变换, 则有

$$C(z) = \frac{R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} + \frac{R(z)D_3(z)D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} + \frac{\overline{UG_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)}$$

(2) 如果有  $D_3(z)=D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)$ , 则根据(1)的结论, 有

$$C(z) = \frac{R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} + \frac{R(z)D_3(z)D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} + \frac{\overline{UG_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} \\ = \frac{R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} + \frac{R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} \\ + \frac{\overline{UG_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} \\ = \frac{R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} \cdot [1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)] + \frac{\overline{UG_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)} \\ = R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z) + \frac{\overline{UG_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)}$$

(3)

$$E(z) = R(z)D_3(z) - C(z)$$

$$= R(z)D_3(z) - R(z)D_2(z)\overline{G_1G_2}(z) - \frac{\overline{UG_2}(z)}{1+D_1(z)\overline{G_1G_2}(z)}$$

可见选择  $D_3(z)=D_2(z)\overline{G_1G_2}(z)$  可以改善系统的跟踪精度, 但不会改变  $U(s)$  对  $C(z)$  的影响。

**B8-6** 已知系统的方块图如图 8-8 所示。

- (1) 当  $k=8$  时, 分析系统的稳定性;
- (2) 求  $k$  的临界放大倍数。

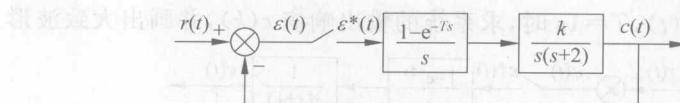


图 8-8 题 B8-6 图

解 由图 8-8 可知, 系统的开环传递函数为

$$W_k(s) = \frac{k(1-e^{-Ts})}{s^2(s+2)} = \frac{k(1-e^{-Ts})}{4} \left[ \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \right]$$

从而可得

$$W_k(z) = \frac{k(1-z^{-1})}{4} \left[ \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-2}} \right]$$

其特征方程为  $1+W_k(z)=0$ , 即

$$z^2 + (0.28k - 1.14)z + 0.14 + 0.15k = 0$$

当  $k=8$  时, 特征方程为

$$z^2 + 1.1z - 1.06 = 0$$

求得  $z_1=0.67, z_2=-1.7$ 。因为  $|z_2|>1$ , 所以系统不稳定。

令  $z=\frac{1+w}{1-w}$ , 进行  $w$  变换得

$$\left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 + (0.28k - 1.14) \frac{1+w}{1-w} + (0.14 + 0.15k) = 0$$

整理得

$$0.43kw^2 + (1.72 - 0.3k)w + (2.28 - 0.13k) = 0$$

要使系统稳定, 需要  $w$  的各次项系数均大于 0, 即

$$\begin{cases} 0.43k > 0 \\ 1.72 - 0.3k > 0 \\ 2.28 - 0.13k > 0 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} k > 0 \\ k < 5.73 \quad \text{即 } 0 < k < 5.73 \\ k < 17.5 \end{cases}$$

所以,  $k$  的临界放大倍数为 5.73。

## C 实际题

**C8-1** 已知系统方块图如图 8-9 所示。试求

(1) 系统的开环脉冲传递函数  $G(z)$ ;

(2) 系统的闭环脉冲传递函数  $\phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$ ;

(3) 当  $r(t)=2u(t), T=1s$  时, 求系统的输出响应  $c(k)$ , 并画出大致波形。

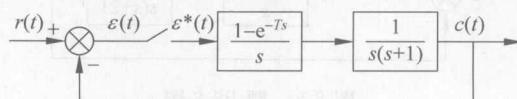


图 8-9 题 C8-1 图

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \quad G(z) &= \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(s+1)} \right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \right] = \frac{T}{z-1} - \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \\
 &= \frac{(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \phi(z) = \frac{c(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{z^2 + (T-2)z + (1-Te^{-T})}$$

(3) 已知  $r(t) = 2u(t)$ ,  $T = 1s$ , 且

$$\phi(z) = \frac{(T-1-e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{z^2 + (T-2)z + (1-Te^{-T})} = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321}$$

$$R(z) = \frac{2z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
 C(z) &= \phi(z)R(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321} \times \frac{2z}{z-1} \\
 &= \frac{0.7358z^2 + 0.5284z}{z^3 - 2z^2 + 1.6321z - 0.6321} \\
 &= \frac{0.7358z^{-1} + 0.5284z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.6321z^{-2} - 0.6321z^{-3}} \\
 &= 0.736z^{-1} + 2z^{-2} + 2.8z^{-3} + 2.8z^{-4} + 2.292z^{-5} + 1.79z^{-6} + 1.604z^{-7} + \dots
 \end{aligned}$$

所以

$$c(0) = 0, c(T) = 0.736, c(2T) = 2, c(3T) = 2.8,$$

$$c(4T) = 2.8, c(5T) = 2.292, c(6T) = 1.79, c(7T) = 1.604, \dots$$

系统的输出响应波形如图 8-10 所示。

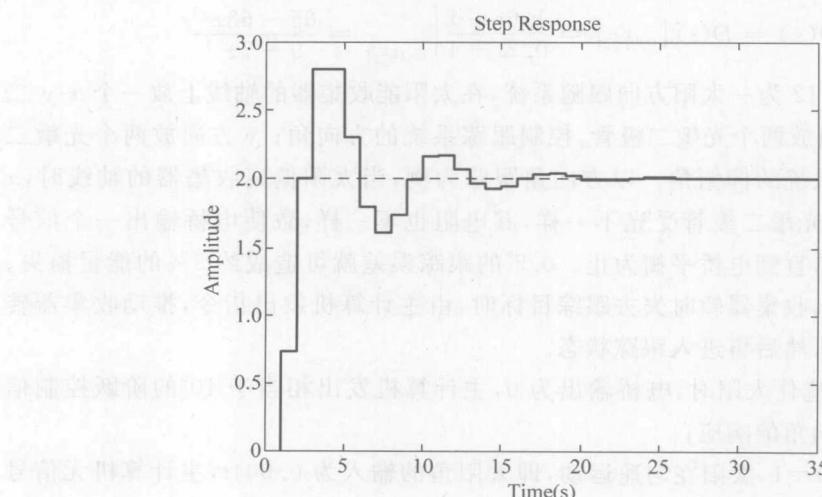


图 8-10 系统的输出响应

**C8-2** 某雷达天线方向角控制系统的方块图如图 8-11 所示。试设计数字控制器,使系统的相位裕度  $\gamma \geq 55^\circ$ 。

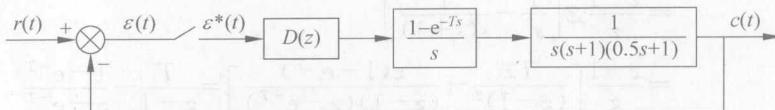


图 8-11 题 C8-2 图

解 采用模拟化设计方法。取采样时间为系统最小时常数的  $1/10$ , 即  $T = 0.05\text{s}$ 。

采样保持器的等效传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{0.05s + 1}$$

考虑采样保持器的影响, 未校正系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)(0.05s+1)}$$

绘制未校正系统的 Bode 图, 未校正系统的剪切频率与相位裕度分别为

$$\omega_c' = 0.749\text{rad/s}, \quad \gamma' = 30.5^\circ$$

利用相位超前校正设计方法进行设计, 所设计的控制器为

$$D(s) = \frac{1.6s + 1}{0.2s + 1}$$

绘制校正后系统的 Bode 图, 由图可知

$$\omega_c = 1.16\text{rad/s}, \quad \gamma = 56^\circ > 55^\circ$$

满足设计要求。

用双线性变换将  $D(s)$  离散化为数字控制器  $D(z)$

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}z-1} = \frac{1.6s + 1}{0.2s + 1} \Big|_{s=40\frac{z-1}{z+1}} = \frac{65 - 63z^{-1}}{9 - 7z^{-1}}$$

**C8-3** 图 8-12 为一太阳方向跟随系统, 在太阳能收集器的轴线上放一个  $x-y$  二维传感器,  $x$  方向放两个光敏二极管, 控制跟踪系统的方向角;  $y$  方向放两个光敏二极管, 控制跟踪系统的仰俯角。以方向角跟踪为例, 当太阳偏离收集器的轴线时,  $x$  方向安装的两个光敏二级管受光不一样, 其电阻也不一样, 致使电桥输出一个信号推动收集器转动, 直到电桥平衡为止。 $0.5^\circ$  的跟踪误差就可造成约 5% 的能量损失。当云层遮住太阳, 收集器暂时失去跟踪目标时, 由主计算机发出指令, 推动收集器转动进行目标搜索, 然后再进入跟踪状态。

(1) 当云层遮住太阳时, 电桥输出为 0, 主计算机发出相当于  $10^\circ$  的阶跃控制信号, 求收集器方向角的响应;

(2) 设  $D(z)=1$ , 太阳在匀速运动, 即太阳角的输入为  $0.004t$ , 主计算机无信号输出, 求方向角的稳态误差;

(3) 要使系统对斜坡输入的稳态误差为 0, 在  $D(z)$  中应增加一个什么样的极点?

这样处理后系统的稳定性如何?

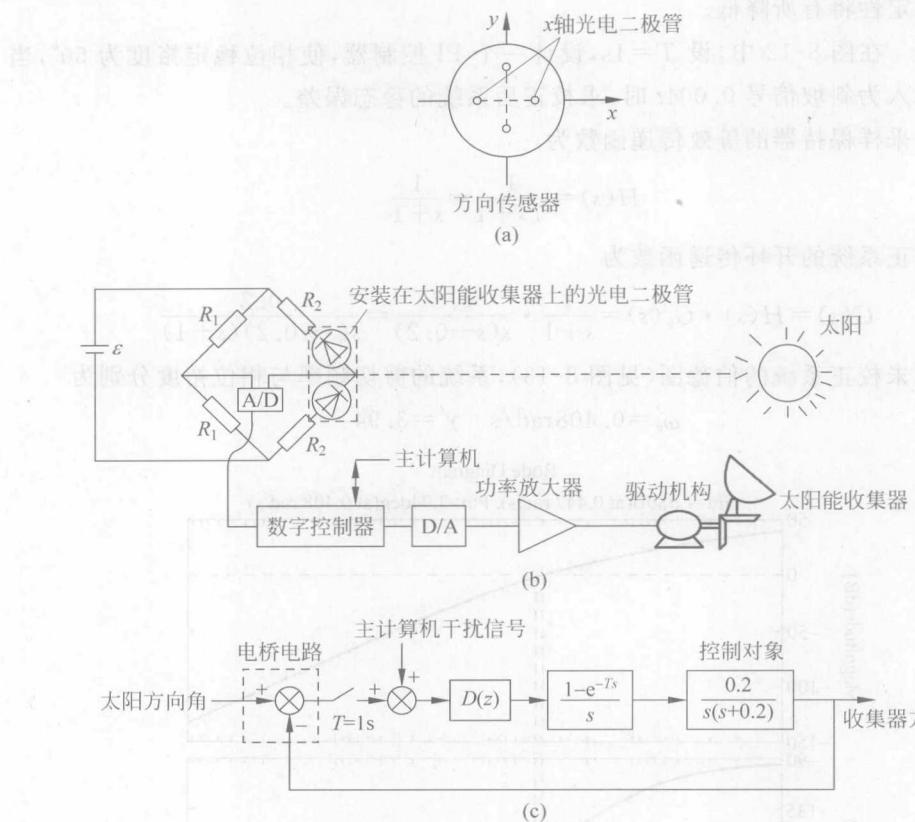


图 8-12 题 C8-3 图

解 (1)

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{0.2}{s(s+0.2)}\right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{0.2}{s^2(s+0.2)}\right] \\ &= \frac{(5e^{-0.2}-4)z + (5-6e^{-0.2})}{(z-1)(z-e^{-0.2})} \end{aligned}$$

$$R(z) = \frac{10z}{z-1}$$

$$C(z) = G(z)R(z) = \frac{10z[(5e^{-0.2}-4)z + (5-6e^{-0.2})]}{(z-1)^2(z-e^{-0.2})}$$

$$c(k) = \sum \{\text{Res}[C(z)z^{k-1}]\} = 50e^{-0.2k} + 10k - 50$$

(2)

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T}(z-1)GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(5e^{-0.2}-4)z + (5-6e^{-0.2})}{z - e^{-0.2}} = 1$$

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} = 0.004$$

(3)  $D(z)$ 中增加  $z=1$  的极点可使系统对斜坡输入的稳态误差为 0, 这样处理后系统的稳定性将有所降低。

**C8-4** 在图 8-12 中, 设  $T=1\text{s}$ , 设计一个 PI 控制器, 使相位稳定裕度为  $50^\circ$ , 当太阳角输入为斜坡信号  $0.004t$  时, 求校正后系统的稳态误差。

解 采样保持器的等效传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s+1}$$

未校正系统的开环传递函数为

$$G(s) = H(s) \cdot G_p(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{0.2}{s(s+0.2)} = \frac{0.2}{s(s+0.2)(s+1)}$$

绘制未校正系统的伯德图(见图 8-13), 系统的剪切频率与相位裕度分别为

$$\omega_c' = 0.408\text{rad/s} \quad \gamma' = 3.94$$

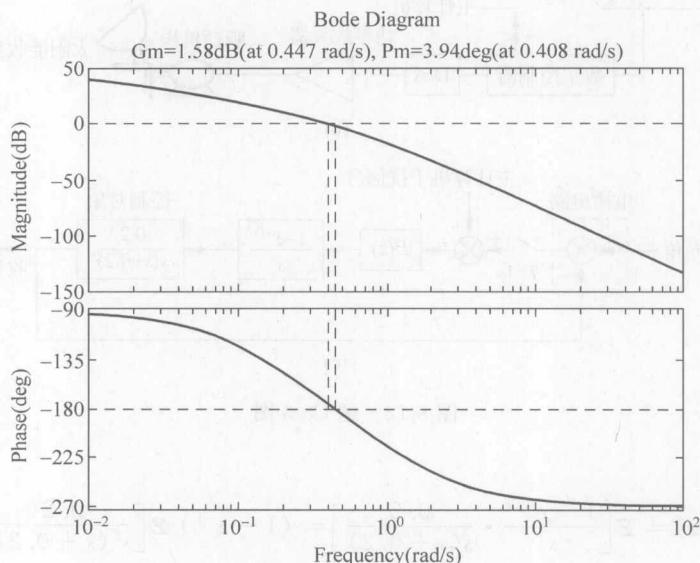


图 8-13 未校正系统的伯德图

利用相位滞后校正方法进行设计, 所设计的 PI 控制器为

$$D(s) = \frac{0.02(s+0.01)}{s}$$

校正后系统的伯德图如图 8-14 所示, 系统的剪切频率与相位裕度分别为

$$\omega_c = 0.0912\text{rad/s} \quad \gamma = 54^\circ$$

满足设计要求。

采用双线性变换将  $D(s)$  离散化为数字控制器  $D(z)$

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{0.02(s+0.01)}{s} \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{z+1}} = \frac{0.0201z - 0.0199}{z-1}$$

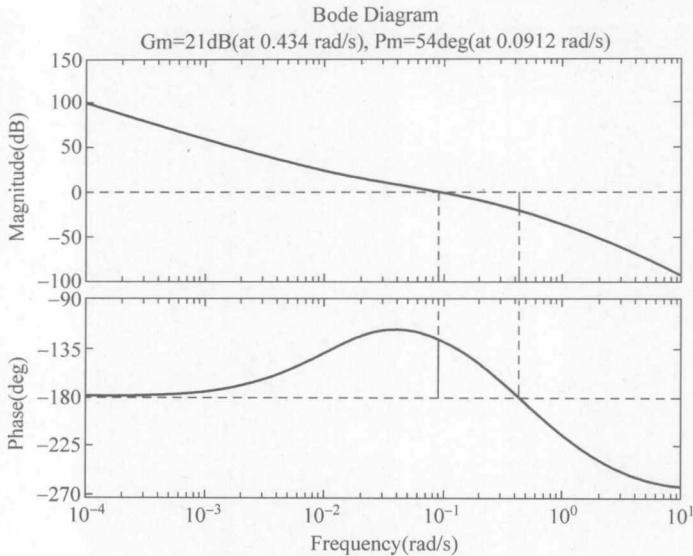


图 8-14 校正后系统的伯德图

将未校正系统的开环传递函数进行离散化,得

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{Ts}}{s} \cdot \frac{0.2}{s(s + 0.2)} \right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{0.2}{s^2(s + 0.2)} \right] \\
 &= \frac{z - 1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(s + 0.2)} \right] \\
 &= \frac{z - 1}{z} \cdot \left[ \frac{Tz}{(z - 1)^2} - \frac{5(1 - e^{-0.2T})z}{(z - 1)(z - e^{-0.2T})} \right] \\
 &= \frac{z - 1}{z} \cdot \left[ \frac{z}{(z - 1)^2} - \frac{5(1 - e^{-0.2})z}{(z - 1)(z - e^{-0.2})} \right] \\
 &= \frac{(5e^{-0.2} - 4)z + 5 - 6e^{-0.2}}{(z - 1)(z - e^{-0.2})}
 \end{aligned}$$

当太阳角输入的斜坡信号为 0.004t 时,校正后系统的稳态速度误差系数为

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z - 1) \left[ \frac{(5e^{-0.2} - 4)z + 5 - 6e^{-0.2}}{(z - 1)(z - e^{-0.2})} \times \frac{0.0201z - 0.0199}{z - 1} \right] = \infty$$

所以,  $\epsilon_v = \frac{1}{K_v} = 0$ 。

## 本书特色

本书的选题比较侧重于基本训练，同时考虑到部分同学报考硕士研究生的需求，选题时还参考了相关学校的研究生入学试卷，扩大了本书的适用面。习题分为四种类型：基本题、深入题、实际题和MATLAB题，分别作为基本要求、进一步掌握以及学会运用现代计算机手段分析控制系统的训练要求。力求做到：

- (1) 在指导思想上，强调与IT技术结合；
- (2) 在内容安排上，坚持“加强基础，削枝强干”；
- (3) 在体系结构上，理清“三纵三横”。“三纵”指系统的“三域”模型（时域、复域、频域），“三横”指基于“三域”的控制系统“三性”（稳定性、动态特性、稳态特性）分析。

## 作者简介

杨明 上海交通大学自动化系教授、博士生导师，全国宝钢奖优秀教师，上海市浦江人才。2003年在清华大学计算机系获得博士学位，2003—2005年在法国国家信息与自动化研究所从事博士后工作，2005年归国。现任上海交通大学国家精品课程“自动控制原理”负责人，中国人工智能学会智能机器人专业委员。长期从事智能车研究，在国内外学术刊物和会议上发表论文120多篇，申请和获得国家发明专利30多项。

