Lec 2 Borel σ-algebra on $\mathbb{R}$ and measure [Fol 1.2, finished; 1.3]

Recall: the σ-algebra generated by ε

$$< \varepsilon >:= \bigcap_{\varepsilon \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma \text{ -algebra on } X} S$$

is the smallsest σ-algebra containing ε.

Example 2.1

$$< \{E\} >= \{\emptyset, E, E^c, X\} \tag{2.1}$$

Lemma 2.1 (inclusion properties of generated σ-algebra)

1. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ where $\mathcal{A}$ is a σ-algebra, then $< \mathcal{E} > \subseteq \mathcal{A}$.
2. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, then $< \mathcal{E} > \subseteq < \mathcal{F} >$.
3. if $\mathcal{E} \subseteq < \mathcal{F} >$, then $< \mathcal{E} > \subseteq < \mathcal{F} >$.

♡

Proof trivial.

Def 2.1 (Borel σ-algebra defined on a topological space)

For topological space $(X, \mathcal{T})$, we define:

$$\mathcal{B}_X :=< \mathcal{T} >$$

♣

Borel σ-algebra on a topological space 就是 σ-algebra generated by the topology. Its members are called **Borel sets**. 当然, 所有的 open sets 和 closed sets 都是 Borel sets.

2.1 generating Borel σ-algebra on $\mathbb{R}$

Example 2.2 Let $\mathcal{E}_1$: $\mathbb{R}$ 上所有的 open intervals;
$\mathcal{E}_2$: $\mathbb{R}$ 上所有的 closed intervals;
$\mathcal{E}_3$: $\mathbb{R}$ 上所有的左开右闭 intervals;
$\mathcal{E}_4$: $\mathbb{R}$ 上所有的左闭右开 intervals;
$\mathcal{E}_5$: $\mathbb{R}$ 上所有的左开右无界 intervals;
$\mathcal{E}_6$: $\mathbb{R}$ 上所有的左闭右无界 intervals;
$\mathcal{E}_7$: $\mathbb{R}$ 上所有的左无界右开 intervals;
$\mathcal{E}_8$: $\mathbb{R}$ 上所有的左无界右闭 intervals;
$\bigcup_{i=1,\cdots,8} \mathcal{E}_i$ 即 $\mathbb{R}$ 上的所有形式的 interals.

Lemma 2.2

任意以上 $\mathcal{E}_i, i = 1, \cdots, 8$ 都可以 generate $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

♡

Proof 我们 recall: 所有的 countable 以及 second countable 的 topological space 都具有 **Lindelöf property**: 任意 open covering 都存在一个 countable 的 subcovering.

Lindelöf property 的一个推论就是, 在具有 Lindelöf property 的 metric space 或者 second countable 的 space 中, 任意 open set 都可以写成 countable 个 open balls 的 union.

我们在 elementary 的 real analysis 中已经学过, $[a, b) = \cap_{n\geq 1}(a - 1/n, b)$, 以其作为例子, 这些 intervals 彼此之间都可以相互转换.

2.2 measure

Def 2.2 (measurable space and measure space)

Let X be a set, $\mathcal{M}$ be a σ-algebra on X.

A measure on (X, A) is a function $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. countable additive:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

   for disjoint seq of $E_i \in \mathcal{M}$.

如果这样的 μ 存在, 我们则称 $(X, \mathcal{M})$ 为一个 measurable space, 并称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个 measure space.

Remark 一个 probability space 就是一个 measure space, satisfying $\mu(X) = 1$.

Example 2.3

1. 对于任意的 $(X, \mathcal{M})$, 我们可以定义:

$$\mu(A) := \#A \quad (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$

   这个 measure 叫做 **counting measure**.

2. Fix $x_0 \in M$, 可以 define

$$\mu(A) := \delta_x := \begin{cases} 1 \text{ , if } x_0 \in A \\ 0 \text{ , if } x_0 \notin A \end{cases}$$

   这个 measure 叫做 the **Dirac measure at** x_0.

3. 给定一个 X 上的函数 $f : X \to [0, \infty)$, 我们可以通过这个函数来定义:

$$\mu(A) := \sum_{x\in A} f(x)$$

   这个测度依赖于函数值来表示每个点的单点集的 measure, 并通过一个集合上所有点的单点集 measure 相加得到这个集合在这个函数下的 measure. (缺点: 我们已经知道, 如果一个函数在一个集合上的正集是 uncountable 的, 那么这个集合上的这个测度一定是 ∞.)

以下是 measure function 由它的定义的两条性质 (空集为 0 以及 ctbl additivity) 推导出的一些基本性质:

Lemma 2.3 (measure is finitely additive)

Measure is finitely additive.

Proof 显然, ctbl additive implies finite additive.

Remark 反向则不成立. 这让我们想起: Jordan measure 和 Lebesgue measure.

Lemma 2.4

$A, B \in \mathcal{M} \implies$

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$

Proof

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

而后使用 finite additive 可得. 这是一个 direct corollary of countable additivity.

Corollary 2.1

$A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \implies$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Theorem 2.1 (properties of measure)

对于任何 measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$:

1. **monotonicity**: $A \subseteq B \in \mathcal{M} \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

   Proof trivial.

2. **countable subadditivity**:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

   Proof By setting $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, 而后通过 ctbl disjoint additivity 与 monotonicity 可得

3. **continuous from above**: 如果 $A_i \subseteq A_{i+1} \forall i \geq 2 \implies$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

   Proof 使用 same trick as 2.

4. **countinuous from below**: 如果 $A_i \supseteq A_{i+1} \forall i$ 且存在某个 j 使得 $\mu(A_i) < \infty$, 则

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

   Proof 前面的都无视, 直到第一个 measure $< \infty$ 的集合, 是可能出现在最后的 intersection 里的最大集合. 我们 Fix 这个 A_j. 通过构造补集的方式, 把交转为并, 从而用 (3) 得证. Define: $E_i := A_j \setminus A_i \forall i \geq j$ 从而

$$\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = A_j \setminus (\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i)$$

   进而

$$\mu(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i) = \mu(A_j) - \mu(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i)$$

   进而 by (3)

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i) = \mu(A_j) - \lim_{i \to \infty} \mu(E_i) = \mu(A_j) - \lim_{i \to \infty} (\mu(A_j) - \mu(A_i)) = \lim_{i \to \infty} A_i$$