Module 11 Radon-Nikodym theorem

11.1 Radon-Nikodym Theorem [Fol 3.2]

以下是两个 instructive 的 questions:

Question 1: Given 三个 s.m. on

$$\mu = m + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{x_j} + \mu_{Cantor}$$

on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 我们可否从 μ 中 recover 其中一个 measure, without 另外两个 measure?

$$\mu_{Cantor} = (?)\mu$$

Question 2: 给定一个任意的 p.m. μ, 以及一个任意的 s.m. ν on $(X, \mathcal{A})$,
如何判断是否存在一个 $f \in L^1(\mu)$, 使得

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

以及, 如果存在, 如何找到这样的一个 f?

11.1.1 absolutely continuous: $\nu \ll \mu$

Def 11.1 (a s.m. absolutely continuous w.r.t. a p.m.)

给定 p.m. μ 和 s.m. ν on $(X, \mathcal{A})$, 我们称 ν is absolutely continuous w.r.t. μ, 如果

$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

即: ν 的 null sets 包含了 μ 的所有 null sets. (ν 拥有比 μ 严格更多的 null sets)

写作

$$\nu \ll \mu$$

♣

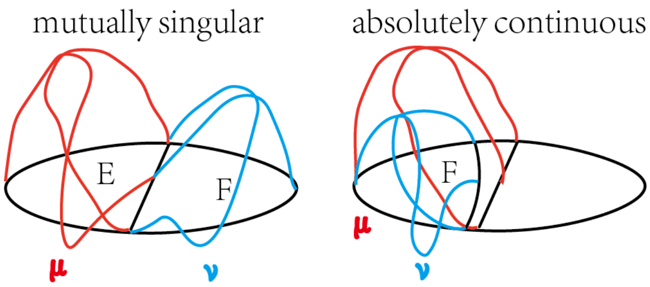

Figure 11.1: mutually singular and absolutely continuous

$\nu \perp \mu$ **表示的是** ν **和** μ **出现变化的区域完全不同**, 而 $\nu \ll \mu$ **表示的是** ν **出现变化的区域完全包括在** μ **出现变化的区域里** (因为 μ 不变化的区域被包括在 ν 不变化的区域里).

Example 11.1 $f \in L^1(\mu)$, $\nu(E) := \int_E f \, d\mu$, 由积分定义出的 s.m., 总是满足

$$\nu \ll \mu$$

Example 11.2

$$\nu_1 := m, \quad \nu_2 := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{x_j}, \quad \nu_3 := \mu_{Cantor}$$

这三个 measure 有

$$\nu_i \not\ll \nu_j \quad \forall i \neq j$$

它们是 mutually singular 的. 对于其中任意两个 ν_i, ν_j, 本身已经存在一个划分使得 ν_i 在 E 上是 null 的而 ν_j 在 E^c 上是 null 的. 那么如果 $\nu_i \ll \nu_j$, 则说明 ν_i 在 E^c 上也是 null 的, 那么 ν_i 在整个 X 上都是 null 的, 说明 ν_i 是一个 trivial measure.
显然, 这里三个 measure 都不是 trivial measure, 因而它们之间没有 abs ctn 的关系.

Proposition 11.1 (absolutely continuous 的性质)

- $$|\nu| \ll \mu \iff \nu^+ \ll \mu \text{ and } \nu^- \ll \mu$$

  (容易证明)

- $$\nu \perp \mu \text{ and } \nu \ll \mu \implies \nu = 0$$

  (刚才已经证明)

我们可以把 absolutely ctn 的概念从一个 s.m. wrt 一个 p.m. 扩展到一个 s.m. wrt 一个 s.m., by taking 后面这个 s.m. 的 total variation measure:

$$\text{say } \nu \ll \mu, \text{ if } \nu \ll |\mu|$$

但是 Folland 表示我们之后并不需要用到这个更 general 的定义. 所以不用在意它.

11.1.2 $\nu \ll \mu$ 的等价条件

question: 为什么这个定义要叫做 absolutely continuous, 它和 continuous 这个词到底有什么关系. 下面这个 theorem 说明了这一点.

Theorem 11.1 (why it is called "absolutely continuous")

令 ν 为一个 **finite s.m.**, μ 为一个 **p.m.** on $(X, \mathcal{A})$.
Claim:

$$\nu \ll \mu \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |\nu(E)| < \epsilon \text{ whenever } \mu(E) < \delta$$

Remark 类比: $f(x)$ is **uniform ctn function** of x: 对于任意 ϵ 都存在 δ 使得 $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ whenever $|x - y| < \delta$.
而 finite s.m. 的 absolutely ctn $\nu \ll \mu$ 也是一个连续性表达: 我们以 measure μ 作为集合大小的度量基准, **对于任意集合, 对其进行很小的调整改变其 μ-大小 (比如去掉/并上一个 μ-小集合), ν 的值的改变相对于这个 μ-大小调整是连续的. (可以更改这个 μ-大小调整尺度, 使得 ν 的值的改变任意小)**
我们经过思考可以发现, 这和我们之前说的 **"$\nu \ll \mu$ 表示的是 ν 出现变化的区域完全包括在 μ 出现变化的区域里" 是一致的**, 因为这即说明对于 finite ν 受到 μ 的可控制性 (不存在失控的区域): 既然只有在

μ 的 variation 区域才出现 variation, 那么取它们相对 variation 的最大比例, 那么总是可以通过 μ, 把 ν 的 variation 控制在这个 variation 比例之上.

Proof (i) to (ii): 我们使用反证, 利用 **limsup**.

Assume (i), 并 suppose for contradiction that (ii) 不成立.

那么存在 $\epsilon > 0$ s.t. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 都存在一个 seq $E_n \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(E_n) \le \frac{1}{2^n}$, $\nu(E_n) \ge \epsilon$ for each n.

Set

$$E := \limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

我们标记后面的每个集合为:

$$F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

于是

$$\mu(F_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

从而得到,

$$\mu(E) = 0$$

而由于 $\nu(F_n) \ge \epsilon$ for each n, we have

$$\nu(E) \ge \epsilon$$

这与 $\nu \ll \mu$ contradict. 从而得证: $\nu \ll \mu \implies \delta$-$\epsilon$ argument.

而 δ-ϵ argument $\implies \nu \ll \mu$ 是 trivial 的.

11.1.3 RN derivative and RN Thm

11.1.4 RN derivative: (if exist) express how ν can be induced from μ

Def 11.2 (Radon-Nikodym derivative)

对于 $\begin{cases} \text{p.m. } \mu \\ \text{s.m. } \nu \end{cases}$ on $(X, \mathcal{A})$, 如果存在一个 $\mathcal{A}$-measurable f, 使得 ν 为 the **signed measure** ν **induced by** μ **and** f**:**

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

则称 f **is the Radon-Nikodym Derivative of** ν **w.r.t.** μ**.** 写作

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

或者

$$d\nu = f d\mu$$

♣

Radon-Nikodym derivative f 刻画的是**在每一点** $x \in X$ **上, signed 测度** ν **相对于测度** μ **的变化速率.** We sometimes call ν **the signed measure** $f\,d\mu$**.**

Example 11.3 取 LS measure μ_F on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, with $F = e^{2x}$.
那么:

$$\mu_F((a,b)) = e^{2b} - e^{2a} = \int_a^b 2e^{2x}\, dx$$

我们可以 check:

$$\mu_F(E) = \int_E 2e^{2x}\, dx, \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

因而

$$\frac{d\mu_F}{dm} = 2e^{2x} = F'(x)$$

Proposition 11.2

任取 measure μ, 以及 extended μ-integrable function f, 那么 the **signed measure** ν **induced by** μ **and** f 即 $\nu(E) := \int_E f\, d\mu$ 一定有:

$$\nu \ll \mu$$

Proof trivial.

Question: 我们如何判断这个 RN derivative 是否存在呢? Radon Nikodym Theorem 正是这个问题的答案.

11.1.5 RN Thm: σ-finite $\nu \ll \mu \iff$ 存在 RN derivative

Theorem 11.2 (Radon-Nikodym Theorem)

对于 σ**-finite** $\begin{cases} \text{p.m. } \mu \\ \text{s.m. } \nu \end{cases}$ on $(X, \mathcal{A})$,

$$\nu \ll \mu \iff \exists \text{ ext. } \mu\text{-intble } f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

并且这个 RN derivative f 是 **unique** 的, **in** μ**-a.e. sense.** (即在 μ 的一个 null set 之外唯一).

Radon Nikodym Theorem 表示, 对于 σ-finite 的 ν 和 μ, RN derivative 存在 (并且一定唯一) 当且仅当 $\nu \ll \mu$. 即对于任意两个 abs ctn 的 measure, 只要它们 σ-finite, 就可以用一个具体的函数 f 来表达它们之间的关系.

要证明 RN Theorem, 我们还需要一些 Lemma.

Lemma 11.1

如果 ν, μ 都是 **finite positive** measure on $(X, \mathcal{A})$ 并且 $\mu \not\perp \nu$, 那么一定存在 $\epsilon > 0$ 以及 $E \in \mathcal{A}$ with $\mu(E) > 0$ s.t.

$$\nu \geq \epsilon\mu \quad \text{on } E$$

Proof We look at $\nu - \frac{1}{n}\mu$ for each $n \in \mathbb{N}$. 它们都是 finite signed measure for sure.
考虑 Hahn decomposition $P_n \sqcup N_n$ for each n. 并 set:

$$P := \bigcup_n P_n, \quad N := \bigcap_n N_n = P^c$$

于是: N 对于任意 n, 都是 $\nu - \frac{1}{n}\mu$ 的 negative set.
这说明:

$$\forall n,\ 0 \le \nu(N) \le \frac{1}{n}\mu(N)$$

因而一定有:

$$\nu(N) = 0$$

(这是显然的, 因为 N intersect 了所有的 $\nu - \frac{1}{n}\mu$ 的负集, 在 n 大的时候这个 diff measure 基本等于 ν, 而 ν 本身是 positive 的, 那么显然 $\nu(N) = 0$.)
Case 1: 如果 $\mu(P) = 0$, 那么 $\mu \perp \nu$.
Case 2: Otherwise then 存在某个 $\mu(P_n) > 0$, 说明 P_n 是 $\nu - \frac{1}{n}\mu$ 的 positive set, 因而在 P_n 上, $\nu \ge \frac{1}{n}\mu$.

这个 Lemma 表明, 对于两个 positive measures, 它们要么 mutually singular, 要么一定存在某个 non-trivial 的集合上, 一个能够以一定比例 bound 另外一个.
这是因为, 只要这两个 positive measures 不是 mutually singular 的 (说明它们有共同的存在变化的区域), 那么 note that positive measure 随着集合增大一定是增大的, 因而直觉上肯定存在某个子集, 使得其上, 它们其中一个能够以一定比例 bound 另外一个.

现在我们证明 RN Thm:

Proof of RN Thm:
Step 1: 首先确认 **uniqueness, if exist.**
首先我们 assume ν, μ 都是 finite p.m.
我们先 verity **uniqueness**: 假设

$$d\nu = f_1\, d\mu = f_2\, d\mu, \quad f_i \text{ ext. } \mu\text{-intble}$$

那么令 $g := f_1 - f_2$, 有

$$\int_E g\, d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

所以 $g = 0$ a.e.
This shows the uniqueness.
然后我们 verity **existence**:
我们考虑

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^+(\mu) : \int_E f\, d\mu \le \nu(E),\ \forall E \in \mathcal{A} \right\}$$

We can define partial order on $\mathcal{F}$: 称 $f_1 \le f_2$ if $f_1(x) \ge f_2(x)$ for a.e. x.
显然 $f = 0$ 是 $\mathcal{F}$ 中最小的元素. Idea: 我们想要得到 $\mathcal{F}$ 中最大的元素 f_{max}, 看看是否能取到总是有

$$\int_E f_{max} d\mu = \nu(E)$$

Step 2: Claim $f_1, f_2 \in \mathcal{F} \implies f := \max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{F}$
Proof of Claim: for fixed f_1, f_2, 考虑 $A := \{f_1 > f_2\}$. 任取 $E \in \mathcal{A}$, 有:

$$\int_E f\, d\mu = \int_{E\cap A} f_1\, d\mu + \int_{E\cap A^c} f_2\, d\mu \le \nu(E\cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E)$$

Claim proved.

Step 3: 构造出 **potential RN derivative:** 最大的元素 $f \in \mathcal{F}$ 现在我们 set

$$a := \sup \left\{ \int f \, d\mu \mid f \in \mathcal{F} \right\}$$

显然有:

$$1 \leq a \leq \nu(X)$$

pick $g_n \in \mathcal{F}$ s.t. $\int g_n \, d\mu \nearrow a$, 并且 set

$$f_n := \max\{g_1, \cdots, g_n\}$$

for each n.
显然有:

$$f_n \leq f_{n+1}, \quad \int f_n \, d\mu \nearrow a$$

并且根据我们的 claim, 所有 $f_n \in \mathcal{F}$.
根据可测函数的性质,

$$\exists f := \lim_n f_n \in L^+(\mu), \text{ and } \in L^1(\mu) \text{ (since } \mu \text{ finite)}$$

并且根据 MCT,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = a$$

并且, 对于任意 E measurable, 根据 MCT 也有

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \nu(E)$$

我们 set:

$$\nu'(E) := \int_E f \, d\mu$$

Step 4: 证明 $\nu' = \nu$**.**

Proof: 首先我们知道 by def $\nu' \leq \nu$.

Set:

$$\tilde{\nu} := \nu - \nu' \geq 0$$

By our assumption $\nu \ll \mu$, 从而也有 $\tilde{\nu} \ll \mu$.
因而只需要证明 $\tilde{\nu} \perp \mu$, 就可以得到 $\tilde{\nu} = 0$, 从而证明出 $\nu' = \nu$.
这个时候 Lemma 就起了作用:
Suppose for contradictin that $\tilde{\nu} \not\perp \mu$, 那么 by lemma, 由于 $\tilde{\nu}$ 是一个 finite positive measure, μ 也是一个 finite positive measure, 则存在 $\epsilon > 0$ 和 nontrivial measurable E, 使得 $\tilde{\nu} \geq \epsilon\mu$ on E.
于是:

$$g := f + \epsilon \chi_E \in \mathcal{F}$$

而 $\int f \, d\mu = a$, 因而

$$\int g \, d\mu > a$$

这和 $g \in \mathcal{F}$ 冲突 (否则它的积分一定小于等于 a).
从而**,** μ, ν 是 **finite p.m.** 的情况得证**.**

Step 5: 推广至 ν finite s.m., μ finite p.m. 的情况.
直接 Apply Step 1 to ν^+, ν^- 即得证.
Step 6: 推广至 ν, μ σ-finite 的情况.
Proof: By σ-finite 的定义, 我们可以 decompose

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

那么 by finite case, $\nu|_{X_n}, \mu|_{X_n}$ is finite for each n.
因而

$$f_n := \frac{d(\nu|_{X_n})}{d(\mu|_{X_n})} \ \exists \quad \text{for each } n$$

于是, take

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n} f_n$$

即可得证.
Note: 这里的 f 是 **ext μ-intble** 的, 即: f^+, f^- 至少有一个是 **ext μ-intble** 的. 这 **follows from** ν 作为一个 **signed measure** 的定义: ν 至多 **admit** $+\infty, -\infty$ 中的一个.
Specially, 如果 ν 是一个 **positive measure,** 那么 f 一定也是非负的, 从而 $f^- = 0$.
Remark 在 RN Thm 的 proof 中, 我们的大体思路就是: 首先, 肯定要 reduce to 我们熟悉的 finite positive measure 的情况; 其次, 我们使用一个 trick: 取一个能够逐步逼近 RN derivative $\frac{d\nu}{d\mu}$ 的空间

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^+(\mu) : \int_E f \, d\mu \leq \nu(E), \ \forall E \in \mathcal{A} \right\}$$

并猜想其最大的元素就是 $\frac{d\nu}{d\mu}$, 然后证明它们确实相等, by proving 它们的差是一个 zero measure.

下一个 lecture: 我们将 upgrade RN Thm to 一个更加 general 的 version: Lebesgue Radon Nikodym Thm.

11.2 Lebesgue-Radon-Nikodym Theorem [Fol 3.2, finished; 3.3, finished]

recall Radon-Nikodym Theorem:

$$\begin{cases} \mu \ \sigma\text{-finite p.m.} \\ \nu \ \sigma\text{-finite s.m.} \\ \nu \ll \mu \end{cases} \implies \begin{cases} \exists! \text{ extended } \mu\text{-integrable } f : X \to \mathbb{R} \\ d\nu = f d\mu \end{cases}$$

我们称 f 为 Radon-Nikodym Derivative:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

Example 11.4 Application: conditional expectation.

$$(X, \mathcal{A}, \mu) := \Big([0,1), \mathcal{B}([0,1)), m \Big)$$

$f : [0,1) \to \mathbb{R}$ Borel measurable.

Define:

$$B := \{\varnothing, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), X\}$$

f 并非一定是 B-measurable 的.

11.2.1 LRNT: 任意 σ-finite ν, μ, 可将 ν 拆解成 $\lambda \perp \mu$ 和 $\rho \ll \mu$

Theorem 11.3 (Lebesgue-Radon-Nikodym Theorem)

如果 $\begin{cases} \mu \ \sigma\text{-finite p.m.} \\ \nu \ \sigma\text{-finite s.m.} \end{cases}$ on $(X, \mathcal{A})$, 那么存在唯一的 decomposition

$$\nu = \lambda + \rho$$

where λ, ρ 是 σ-finite 的 signed measure s.t. $\begin{cases} \lambda \perp \mu \\ \rho \ll \mu \end{cases}$.

(于是, by RNT, 存在 μ-unique 的 extended μ-integrable $f : X \to \mathbb{R}$ s.t. $d\rho = f\, d\mu$). ♡

Sktech of proof of LRN theorem: Assume for simplicity that μ, ν 是 finite p.m.

Like last time, look at

$$\mathcal{F} := \{f \in L^+ : \int_E f\, d\mu \le \nu(E) \ \ \forall E \in \mathcal{A}\}/\sim$$

Saw: $\mathcal{F}$ 有 max element f.

Define ρ by $d\rho = f\, d\mu$.

Set:

$$\lambda := \nu - \rho$$

Want: $\lambda \perp \mu$.

Prove by contradiction: 如果 $\lambda \not\perp \mu$, 那么 Lemma 2 告诉我们: 存在 $\epsilon > 0$ 和 positive measure 的 $E \in \mathcal{A}$ 使得:

$$\lambda \ge \epsilon\mu$$

on E.

Set

$$g := f + \epsilon\chi_E$$

则

$$\int_F g\, d\mu = \int_{F\cap E} (f + \epsilon)\, d\mu + \int_{F\cap E^c} f\, d\mu$$

因而

$$\begin{aligned} \rho(F\cap E) + \epsilon\mu(F\cap E) + \rho(F\cap E^c) &= \rho(F) + \epsilon\mu(F\cap E) \\ &\le \nu(F) - \epsilon\mu(F) + \epsilon\mu(F\cap E) \\ &\le \nu(F) \end{aligned}$$

因而 $g \in \mathcal{F}$ 且 $g > f$.

从而得证 $\lambda \perp \mu$. 从而 existence proved.

Uniqueness part: Suppose we have

$$\nu = \lambda_1 + \rho_1 = \lambda_2 + \rho_2$$

where $\lambda_i \perp \mu$, $\rho_i \ll \mu$. 那么

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \rho_2 - \rho_1$$

我们知道, $\lambda_1 - \lambda_2$ 和 $\rho_2 - \rho_1$ 也是 signed measures. 并且,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \perp \mu, \quad (\rho_2 - \rho_1) \ll \mu$$

By Lemma 1:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \rho_2 - \rho_1 = 0$$

Properties of the RN derivative: (P91 in Folland)

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

$$\nu \ll \mu, \mu \ll \mu \implies \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu} = 1$$

μ-a.e. = ν-a.e.

11.2.2 complex measure 以及 complex version of LRNT

Def 11.3 (complex measure)

一个 complex measure on a measurable space $(X, \mathcal{A})$ 是一个 map $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ satisfying $\nu(\varnothing) = 0$ 以及 ctbl disjoint additivity. ♣

Example 11.5 simple complex measures:

$X = \{1, 2, \cdots, n\}$ ν p/s/c measure on X.

Since $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, a complex measure ν is just a function

$$\nu_0 : X \to \mathbb{C}, \quad \text{i.e., } \nu_0 = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n.$$

而

$$\nu(E) = \sum_{x \in E} \nu_0(x)$$

ν positive: $\in \mathbb{R}^n_+$ ν signed: $\in \mathbb{R}^n$

For discrete spaces, the total variation measure is defined pointwise:

$$|\nu|(i) := |\nu_i|, \quad \text{for each } i = 1, \ldots, n.$$

So the total variation measure $|\nu|$ is just the vector of magnitudes:

$$|\nu| = (|\nu_1|, |\nu_2|, \ldots, |\nu_n|).$$

What is $\frac{d\nu}{d|\nu|}$?

Since this is a finite discrete setting, the Radon-Nikodym derivative is computed **pointwise**:

$$\left(\frac{d\nu}{d|\nu|}\right)(i) = \begin{cases} \frac{\nu_i}{|\nu_i|} & \text{if } \nu_i \neq 0, \\ 0 & \text{if } \nu_i = 0. \end{cases}$$

So the result is a function $f : X \to \mathbb{C}$, given by:

$$f(i) = \begin{cases} \frac{\nu_i}{|\nu_i|} & \text{if } \nu_i \neq 0, \\ 0 & \text{if } \nu_i = 0. \end{cases}$$

$$f := \frac{d\nu}{d|\nu|} = \left(\frac{\nu_1}{|\nu_1|}, \frac{\nu_2}{|\nu_2|}, \dots, \frac{\nu_n}{|\nu_n|}\right), \quad \text{with the convention } \frac{0}{0} := 0.$$

This derivative is a function that lives on the unit circle in $\mathbb{C}$ (except at zero), and it satisfies:

$$|f(i)| = 1 \quad \text{whenever } \nu_i \neq 0.$$