Module 9 L_p space and inequalities

9.1 Banach Space and L_p space [Fol 5.1; 6.1]

对应 Folland 5.1(1), 6.1(1).

9.1.1 norm and completeness

Recall:

Def 9.1 (semi-norm, norm)

一个 **semi norm** 是一个函数 $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ starting from a vector space V. 其满足 (1): tri eq 和 (2): homogeneity.

如果一个 semi-norm 满足 (3): $||v|| = 0$ iff $v = 0$, 则称它为一个 **norm**. ♣

Def 9.2 (Banach space)

一个 normed vector space $(V, ||\cdot||)$ 的 induced metric space 如果是 complete 的, 它就被称为一个 **Banach space**. ♣

Remark Cauchy 指的是对于任意 ϵ, 都存在 N 使得对于任意 $n, m \geq N$ 都有

$$\|v_n - v_m\| < \epsilon$$

而 convergent 指的是存在一个极限 v, 使得对于任意 ϵ, 都存在 N 使得对于任意 $n \geq N$ 都有

$$\|v_n - v\| \leq \epsilon$$

By tri ineq 容易证明: 在 genral normed VS 中, convergent imply Cauchy, 反之未必. convergent 是更强的条件. (interestingly, convergence in measure 却不 imply Cauchy in measure)

Example 9.1 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ with Euclidean norm is a Banach space.

$C^0([0, 1])$: space of ctn functions on $[0, 1]$ equipped with sup norm **is Banach**.

$$||f - g|| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$C_c^0(\mathbb{R})$: space of ctn functions with cpt supp on $\mathbb{R}$ equipped with sup norm **is not Banach**! 这是因为, 一个有 cpt supp 的 function seq 的极限未必有 cpt supp. 比如 $(\chi_{[-n,n]})_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemma 9.1

A metric space (X, ρ) is **complete** iff **every Cauchy seq has a subseq that converges.** ♡

Proof Trivial.

$\Longrightarrow$: Clear.

$\Longleftarrow$: subseq conv dist bound + Cauchy dist bound can bound the whole tail with arbitrary ϵ.

这个 statement, 直接把 complete 的定义从每个 Cauchy seq 都收敛, 优化为每个 Cauchy seq 都有一个收敛 subseq.

9.1.2 every Cachy seq conv (complete) $\iff$ every abs conv series convs

Def 9.3 (series: convergence 和 absolute convergence)

对于一个 normed VS $(V, ||\cdot||)$ 中的 seq (v_n), 我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **converges**, 如果存在 $v \in V$ s.t.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n = v$$

即

$$\lim_{N\to\infty} \|v - \sum_{n=1}^{N} v_n\| = 0$$

我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **absolutely converges**, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n|| < \infty$$

即这个 series 对应的 norm series converges to some real number. ♣

Theorem 9.1 (another criterion for Banach space)

A normed VS $(V, ||\cdot||)$ is a Banach space iff every absolutely convergent series converges. ♡

Proof "$\implies$": 如果 $(V, ||\cdot||)$ is a Banach space, Suppose $\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n|| < \infty$, 取部分和序列

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} v_n$$

有

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} v_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|v_k\|$$

For large enough m, n 这个 bound 可以无限小, 因而 (S_N) is Cauchy. "$\impliedby$": 如果 $(V, ||\cdot||)$ 中 every absolutely convergent series converges.

Suppose (v_n) is Cauchy. WTS it converges.

By Cauchy, 存在 subseq, say labeled $n_1 < n_2 < \cdots$, s.t. $||v_m - v_n|| < \frac{1}{3^j}$for all $m, n \ge n_j$ Then

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||v_{n_{j+1}} - v_{n_j}|| < \infty$$

Let (y_j) be s.t. $y_1 = v_{n_1}$, $y_j = v_{n_{j+1}} - v_{n_j}$, then

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||y_j|| \le ||y_1|| + \sum_{j} \frac{1}{2^j} = ||y_1|| + 1 < \infty$$

并且有:

$$v_{n_j} = \sum_{k=1}^{j} y_k$$

由于 $\sum_{j=1}^{\infty} ||y_j|| < \infty$, by our assumption 得到, 这个极限 $\lim_{j\to\infty} v_{n_j} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ 是存在的.

Remark 这个证明中也有一个简略但是有用的结论: 任意 normed VS 中, **一个 series absolutely convergent 可以推出它的部分和 seq 是 Cauchy 的. (反向则未必成立).**

整个 imply 关系的示意图:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty \implies S_N \text{ Cauchy} \underset{\text{always}}{\overset{\text{if Banach}}{\rightleftarrows}} S_N \text{ converges} \iff \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ converges} \implies (x_k)\to 0$$

(这个图直观说明了为什么 Banach 和 "every abs conv seq conv" 是等价的. 因为这只是**在 Cauchy imply conv 的前后套了两个必然发生的 implication 关系**而已. 但有时候, 这个关系反而更加好证明.)
(注意, partial sum seq Cauchy 并不 imply 原 series absolutely converge!)

9.1.3 任何 finite dim normed VS 一定 Banach, infinite dim 则不一定 Banach

Remark Note, 我们知道在 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ 上, abs conv 一定 imply con; 但是在 general (infinite dimension) 的 normed VS 上, **absolutely converge 并不 imply converge.**

1. As is known to all, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 上 Euclidean norm 的 induced metric 就是 Euclidean metric, making it complete metric space, 从而是 Banach space.
2. recall in elementary functional analysis:

Def 9.4

我们称两个 norms $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ on a vector space 是 equivalent, 如果存在常数 $C_1, C_2>0$ 使得对于任意 x 都有

$$C_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2\|x\|_a$$

这一定义即 topologically equivalent. 因为 equivalent norms define **equivalent metric,** 从而 **same topology.**

以及这个经典的定理:

Theorem 9.2

finite dimensional vector space X 上, 所有 norms 都 equivalent.

这里先不证明.
利用这个定理, 我们发现 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ **上采用任何 norm 都是 Banach space.**
3. 我们 recall: 任何 finite dim $\mathbb{R}$-vector space 或者 $\mathbb{C}$-vector space 都 isomorphic to some $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. 因而利用这 theorem, 我们得到: **任何 finite dim normed VS 都是 complete metric space (Banach space), regardless of choice of norm.**
然而 **infinite dim normed VS 则未必一定 Banach.**
一个常见的反例:

$$V=\mathbb{R}[x]$$

所有的 polynomials with real coeffs. 考虑这一 norm:

$$\|p\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |p(x)|$$

$\mathbb{R}[x]$ 是无限维的, 因为多项式的次数可以任意提高.

$(\mathbb{R}[x], ||p||_{\sup})$ 不是 complete 的, 其 completion 是 Banach 空间 $C[0,1]$, 所有在 $[0,1]$ 上的连续函数, with the same sup norm.

下面我们将介绍一类 infinite dimension 但是 Banach 的 normed VS: L^p spaces.

9.1.4 L^p spaces

Def 9.5 (L_p spaces)

Consider $p \in (0, \infty)$.
Let $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个 measure space.
Define for $f : X \to \mathbb{R}$ measurable:

$$||f||_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \in [0, \infty]$$

Define

$$L^p(\mu) := \{f : ||f||_p < \infty\} / \sim$$

where $f \sim g$ if $f = g$ a.e. ♣

固定一个 measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$, 我们将用 L_p 来简易指代 $L^p(\mu)$.

Remark 注意, 我们容易发现:if $0 < p < \infty$ and f measurable, TFAE:

- $f \in L^p$
- $|f| \in L^p$
- $|f|^p \in L^1$

Example 9.2 $(X, \mathcal{A}, \mu) := (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$,

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha} \chi_{(0,1)}, \quad f \in L^p(m) \iff \alpha p < 1$$

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha} \chi_{(1,\infty)}, \quad f \in L^p(m) \iff \alpha p > 1$$

$(X, \mathcal{A}, \mu) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{counting})$,

$$L^p(\mu_{counting}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$$

Lemma 9.2 (L_p space is a vector space)

L_p space is a $\mathbb{C}$-vector space. ♡

Proof Suppose $f, g \in L^p$.
由于

$$|f+g|^p \le (|f| + |g|)^p \le (2 \max\{|f|, |g|\})^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p) \tag{9.1}$$

于是 by linearity of integral, 得到:

$$f, g \in L^p \implies f + g \in L^p$$

(Note: $p > 1$ 时也可以 by $|x|^p$ 这一函数的 convexity 得到这个 bound, 但是这个方法只有效于 $p > 1$)

但是 **Question 1: Is L_p a normed VS? 即, $\|\cdot\|_p$ 总是一个 valid norm 吗?** A: **True for** $p \in [1, \infty)$**,**

false for $p \in (0,1)$**.** Homogeneity 和 $\|f\|_p = 0$ iff $f = 0$ (a.e.) 是显然的, 但是我们发现, tri ineq 没有显然的证明.
Next lecture, we will show the Minkowski's ineq, 即 L^p space 上的三角不等式:

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

但是这个不等式只 hold for $p \in [1,\infty)$, 并且 fail otherwise.
(因而对于 L^p space 的研究, 我们将 **focus on** $p \in [1,\infty)$ **的情况.**)

Question 2: Is L^p **space,** $p \in [1,\infty)$**, Banach? Answer: Yes.**
我们也将在 next lecture 证明它.

9.2 inequilities on L^p spaces [Fol 6.1]

对应 Folland 6.1(2).
我们将证明 Hölder's ineq 以及它的 corollary Minkowski's ineq, 从而证明: L^p 是一个 normed VS, 并且是一个 Banach space (这里 $1 \leq p < \infty$, 但是 later we will also prove L^∞ 也是 Banach space).
这两个不等式非常重要.

9.2.1 Hölder's ineq

Theorem 9.3 (Hölder's ineq)
Consider conjugate pair: $p, q \in [1,\infty)$ s.t.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

则对于任意两个 measurable function $f, g : X \to \mathbb{C}$, 一定有:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

特别地, 如果 $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$, 则 $fg \in L^1(\mu)$, 并且 equality holds iff

$$\|g\|_q^q |f|^p = \|f\|_p^p |g|^q \quad \mu\text{-a.e.}$$

Remark For $(p,q) = (2,2)$, this is **Cauchy-Swartz ineq**:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

即:

$$\left(\int f\overline{g}\right) \leq \int |fg| \leq \sqrt{\left(\int |f|^2\right)\left(\int |g|^2\right)}$$

Proof Trivial Case 1: 如果 $\|f\|_p = 0$ (或者 $\|g\|_q = 0$), then f is zero μ-almost everywhere, and the product fg is zero μ-almost everywhere, 于是两边都是 0, ineq trivially true.
Trivial Case 2: 如果 $\|f\|_p = \infty$ or $\|g\|_q = \infty$, 则右边 infinite, ineq trivially true. 因而我们只需要考虑 $\|f\|_p$ and $\|g\|_q$ are in $(0,\infty)$ 的情况就好了.

Main case: 我们需要一个 Lemma:

Lemma 9.3 (Young's inequality for products)

Whenever $p, q \in (1, \infty)$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 都有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0 \tag{9.2}$$

where equality is achieved if and only if $a^p = b^q$.

另一个等价形式是:

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b, \quad \forall a, b \geq 0$$

♡

Proof of Lemma:

$b = 0$ 则 trivial case. 因而 setting $t := \frac{a}{b}$, reduced to show:

$$t^\lambda \leq \lambda t + (1-\lambda)$$

with eq iff $t = 1$. 这是显然的, 因为 by Calculus, $t^\lambda - \lambda t$ 是 strictly increasing for $t < 1$, strictly decreasing for $t > 1$ 的, max 在 $t = 1$, 正好是 $1 - \lambda$.

使用 Young's inequality for products 得到:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \quad x \in X \tag{9.3}$$

Integrating both sides gives

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{9.4}$$

which proves the claim.

Integration 的 equality holds iff point equality holds a.e., 并且, by Young's inequality for products, 上面的 equality holds iff

$$\|g\|_q^q |f|^p = \|f\|_p^p |g|^q \quad \mu\text{-a.e.}$$

Remark 1. 显然, 根据我们的证明过程可知: **Hölder's ineq also holds on any measurable subset $S \subset X$**:

$$\int_S |fg| \leq \left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_S |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

2. 这里的满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的 p, q 我们称之为: **Hölder conjugate**, 并称它们互为对方的 **conjugate exponent**.
3. 左边实际上是两个正值函数的 inner product, 相当于把一个投影到另一个上;

几何直观: Hölder's ineq 在退化为 Cauchy-Swartz 时表示, 两个函数/向量的内积一定小于等于长度积; 而 Hölder's ineq 更广义: 表示它们的内积一定小于它们取任意相互 conjugate 的 norm 长度的积. 并且 sooner 我们会学到: 对作为 Hölder conjugates 的 p, q, L^p 和 L^q 互为 dual space, 从而 Hölder ineq 表示的是就是 norm 与其 dual norm 之间的 maximal inner product 控制关系.

Remark Hölder's ineq 有一个 generalization: 对于任意 $0 < s < \infty$ and $0 < p_1, \ldots, p_n < \infty$ such that

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{s};$$

都有

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_s \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

This generalization will be proved in hw8.

9.2.2 Minkowski's ineq: tri ineq on L^p, 确认 $\|\cdot\|_p$-norm 是 L^p 上的 valid norm

Minkowski's ineq 即 L^p space 上的 tri ineq.

Corollary 9.1 (Mincowski's ineq)

对于任意 $1 \leq p < \infty$, 都有:

$$\|f+g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

♡

Proof 显然, 对于任意 x 都有:

$$|f+g|^p \leq \Big(|f|+|g|\Big)|f+g|^{p-1}$$

因而:

$$\int |f+g|^p \leq \int |f|\cdot|f+g|^{p-1} + \int |g|\cdot|f+g|^{p-1}$$

我们定义

$$h(x) := |f(x)+g(x)|^{p-1}$$

于是

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\leq \int |fh| + \int |gh| \\ &\leq \|f\|_p\|h\|_q + \|g\|_p\|h\|_q \\ &= \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\Big(\int |f+g|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\end{aligned}$$

其中 q 是 p 的 Hölder conjugate. 这里的 punchline is actually: 由于

$$q := \frac{p}{p-1}$$

actually,

$$(p-1)q = p$$

因而:

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\leq \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\Big(\int |f+g|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\ &= \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\Big(\int |f+g|^{p}\Big)^{1/q} \\ &= \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\Big(\int |f+g|^{p}\Big)^{1-1/p}\end{aligned}$$

两边同时除以 $\big(\int |f+g|^p\big)^{1-1/p}$ 得到:

$$\Big(\int |f+g|^p\Big)^{1/p} =: \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

从而得证.

Remark 这里的技巧是: 把一个 p 次方的函数拆成一个 1 次方的函数和一个 $p-1$ 次方的函数, 并且使用 Hölder, 这样就得到了一个 1 次的函数的 p-norm 和另一个 $p-1$ 次的函数的 q norm, 但是注意

$q(p-1)=p$, 因而这个函数就变成了

$$\left(\int |\phi|^p\right)^{1/q}$$

的形式. 并且注意到:

$$\frac{\int |\phi|^p}{\left(\int |\phi|^p\right)^{1/q}} = \left(\int |\phi|^p\right)^{1/p} = \|\phi\|_p$$

Remark Minkowski 不等式证明的是 $1 \leq p < \infty$ 时的 p-norm 的三角不等式. 但是对于 $0 < p < 1$, 它并不成立. 因为这个时候 $p-1<0$, 我们刚才的证明不作效.

直观的证明: 在 $p \geq 1$ 的时候, $|x|^p$ 是一个 strictly convex 的函数; 而在 $0 < p < 1$ 的时候, $|x|^p$ 则是一个 strictly concave 的函数.

因而我们运用 strictly concave 的性质:

$$|a+b|^p > |a|^p + |b|^p$$

再由积分可得到反例. (比如取 indicator function 进行积分)

9.2.3 properties of L^p spaces $(1 \leq p < \infty)$

9.2.4 L^p $(1 \leq p < \infty)$ is Banach

Theorem 9.4 (L^p space $(1 \leq p < \infty)$ is Banach)

L^p $(1 \leq p < \infty)$ is Banach. ♡

Proof By last lec 的定理: 一个 NVS 是 Banach 的等价条件是任意 abs conv series 都 conv. 因而我们证明这一点即可.

Suppose $f_n \in L^p$ for each n, 并且这个 series abs conv, 即:

$$B := \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$$

我们 define:

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

我们 WTS:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g$$

in p-norm induced metric sense, 即, for some $f \in L^p$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \left\|g-g_n\right\|_p = 0$$

我们 Set:

$$G_n := \sum_{k=1}^{n} |f_k|, \quad G := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

这个函数以及函数列的定义是为了使用 DCT, 作 donimating function 用.

By measurable function 的 limit behavior, 有

$$G_n, G \in L^+$$

并且

$$\|G_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq B$$

由于 $G_n \nearrow G$, by MCT 有

$$\int G^p = \lim_{n\to\infty} \int G_n^p \leq B^p < \infty$$

由于 $G \in L^p$, 有

$$G(x) < \infty \quad a.e.$$

于是:

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) < \infty \quad a.e.$$

又 $|g_n|, |g| \leq G, g_n \to g$, 可得到:

$$|g_n - g|^p \leq 2^p G^p \in L^1$$

因而 by DCT 可以得到:

$$\lim_n \int |g_n - g|^p = 0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_p = \left(\lim_n \int |g_n - g|^p \right)^{1/p} = 0$$

Remark 1. 我们说一个 function seq converge to 一个 function 指的是 in the sense of distance, 而这里就是 metric induced by norm, 即**它们的差的 L_p norm converge to** 0**.**
2. 注意, 我们 recall: $f_k \to f$ a.e. 并不说明 $f_k \to f$ in L^1, 因为每个点 converge 的速度不一样. 当然, 对 L^p 也同理.
3. **虽然 a.e. convergence 不能推出 L^p convergence, 但是配合 DCT, 则可以推出. DCT 是我们证明 L^p convergence 的关键.**
4. 要证明

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_p = 0$$

完全可以忽略积分外的 $1/p$ 次方. 其实只需要证明

$$\lim_n \int |g_n - g|^p = 0$$

就可以了. 证明 L^p convergence, 比起 L^1 convergence 略困难的地方就是被积函数变得更大了.

9.2.5 Criterion for L^p convergence: 逐点 a.e. conv + L^p 积分值 conv

我们刚才 mention: DCT 对于 function seq L^p convergence 的证明有很大作用. 这里我们就提供一个 DCT 推出的 L^p convergence 的判断准则:

Theorem 9.5 (Criterion for L^p convergence)

if $f_n \to f$ a.e. and $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, then $\|f_n - f\|_p \to 0$.

即

$$\text{a.e. conv } + L^p \text{ norm conv } \implies L^p conv$$

但是 converse 并不成立. 反例是 typewriter function.

Proof In Hw 8.

9.2.6 dense subsets of L^p, and specially $L^p(\mathbb{R}, m)$

Proposition 9.1

对于任意 $1 \le p < \infty$, the set of {simple functions}, is dense in L^p.

即:

$$\{f : X \to \mathbb{C} \mid f = \sum_1^n a_j \chi_{E_j}, \mu(E_j) < \infty\}$$

是 L^p 的 dense subset.

Remark 我们已经 proved this for L^1, 而其实这个 density 推广至 L^p 也成立.

Proof 对 f 使用 simple function seq 逼近, 使用 $2^p|f|^p$ 作为 dominating function of $|f_k - f|^p$; 而后使用 DCT 得证.

Theorem 9.6 ($C_c^0(\mathbb{R}^n)$ is dense in $L^p(\mathbb{R}, m)$ for $1 \le p < \infty$)

$C_c^0(\mathbb{R}^n)$ is dense in $L^p(\mathbb{R}, m)$ for $1 \le p < \infty$

Proof exercise. Similar to the proof for L^1, 只需要使用加入 p power 的 function 作为 dominating function 即可.

9.3 L^∞ space, and relationship between L^p spaces $(0 \le p \le \infty)$ [Fol 6.1, finished]

对应 Folland 6.1(3), finishing 6.1.

我们已经完成了对 $1 \le p < \infty$ 的 L^p space 的构建. 现在, 我们来构建最后一块拼图: L^∞ space.

9.3.1 L^∞ space

我们考虑这个启发式的例子:

$$X := \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X), \quad \mu = \mu_{counting}$$

于是:

$$L^p(\mu) = \{(a_1, \cdots, a_n) : \|(a_1, \cdots, a_n)\|_p = \left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} < \infty\} = \mathbb{C}^n$$

我们发现:

$$\|(a_1, \cdots, a_n)\|_p \to \max_j |a_j| \quad \text{as} \quad p \to \infty$$

因为 p 取得越大, 最大的 entry 的 contribution 占比就越突出.
对于这样的 L^p space, 我们可以定义 sup norm, 定义为最大的 entry.
即便 X 是 countable 的, 这个定义也可以定义为 $\sup_j |a_j|$, make sense.
那么如果我们想要给任意的 measure space 定义 sup norm 呢? 我们可以考虑

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| \ ?$$

实际上我们有更好的定义方式:

Def 9.6 (essential supremum)

$$\|f\|_\infty := \inf\{a \ge 0 : \mu\{x : |f(x)| > a\} = 0\}$$

也可以写作:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$$

♣

Remark essential sup 是一个比较容易搞错的定义.
一个 function 的 essential supremum 即: 这个 function 几乎处处的 sup.
它 $\le \sup f$, 因为它允许在零测集上存在一些点的函数值大于它.
这是合理的, 因为积分可以不考虑零测集.

Remark 对于零测集只有空集的 measure space 上的函数, 比如 对于 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 上的函数, 其 essentail supermum 即 supermum.
对于

$$\sup_{x\in X} |f(x)|$$

我们也有一个称呼, 称其为 **uniform norm**. 即:

$$\|f\|_u := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Def 9.7 (L^∞ space)

$$L^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ measurable} : \|f\|_\infty < \infty\}/\sim$$

where $\sim$ 表示 a.e. 相等的函数的 equiv class.

♣

Remark 注意: $f \in L^\infty(\mu)$**, 并不等价于** f **a.e. bounded!**
实则 recall: f a.e. **bounded 是** $f \in L^p(\mu)$ **for any** $1 \le p \le \infty$ **的必要条件**, 否则, 函数积分不可能 $< \infty$, 函数 p 次方的积分更加不可能 $< \infty$.
$f \in L^\infty(\mu)$ 是一个很严格的条件, 当然严格强于 f a.e. bounded.
比方说: $f = \frac{1}{x}$**, 只有在** 0 **这一个点上** f **是 unbounded 的, 但是它的 essential supermum 仍然是** ∞, 因为不可能通过去掉一个 measure 0 set 来使它 bounded.

无法找到一个 M, 使得 f 在几乎处处都小于 M. 你只能控制, f 在 $(0, 1/M)$ 上小于 M, 这个集合的测度随 M 增大越来越小, 但是永远都是正测度. (同样这个函数也不属于任何 $L^p(m)$.)
一个函数 essential supermum $< \infty$, 即 $\in L^\infty$, 则必须要它 unbounded 的这个行为是可以忽略不计的, 不能是明显的. 比如它在 $\mathbb{Q}$ 上 unbounded. 如果是在一个点上连续 blow up, 那么它就不可能 $\in L^\infty$. 类似于这里的 $f = \frac{1}{x}$.

Remark 我们在本节课还会证明, 如果 measure space X has finite measure, 那么有

$$L^\infty(X) \subset \cdots \subset L^p(X) \subset \cdots \subset L^q(X) \subset \cdots \subset L^1(X)$$

for 任意的 $p \ge q$.
这表明的是, 在一定要求下, L^∞ 是要求最严格的 space.

下面是一个比较典型的例子:

9.3.2 ℓ^∞ space

Def 9.8 (ℓ^∞)

$$\ell^\infty := \{(a_j)_1^\infty : \|(a_j)\|_\infty := \sup_j |a_j| < \infty\}$$

♣

Example 9.3

$$f = x\chi_{\mathbb{Q}} \in L^\infty(m)$$

with

$$\|f\|_\infty = 0$$

因为整个 $\mathbb{Q}$ 都是零测的.
Remark ℓ^∞ 其实就是:

$$X := \mathbb{N}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X), \quad \mu = \mu_{counting}$$

的 measure space 上的 $L^\infty(\mu)$.

$$\ell^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{counting})$$

一个 seq 就是一个从 $\mathbb{N}$ to $\mathbb{C}$ 的函数, 把每个 entry map to 一个 complex number.
而对于 counting measure 作为 measure 的 measure space 上, 唯一的零测集就是空集, 因为哪怕只取一个元素, 这个子集的测度也是 1.
比如, 我们只取三个 entry $1, 2, 8$, 看 $\{|a_n|\}_1^\infty \backslash \{|a_1|, |a_2|, |a_3|)\}$ 中的 sup value, 也不符合 essential supremum 的定义.
因而我们发现, **对于 唯一的零测集就是空集 的 measure space, for example, 任何以 counting measure 作为 measure 的 measure space, 其 essential sup norm 就是普通的 sup value norm.**
比如

$$\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \cdots, \ell^\infty$$

9.3.3 L^∞ 的基本性质: as a NVS; Hölder's ineq on it; dense subsets

Lemma 9.4

如果 $f \in L^\infty(\mu)$ 则:

- 一定有 $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ for a.e. x.
- 存在一个 bounded 函数 g, 使得 $f = g$ a.e.

Proof 显然.

Remark 是否有在某个零测集上 unbounded 但是却 L^∞ 的函数? 答案是肯定的:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

有 $\|f\|_\infty = 0$.

Theorem 9.7

- $$\|fg\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

  可以把它看作 **Hölder** 的一部分特殊情况, 因为可以看作
  $$\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1$$
  从而补充完整了 Hölder ineq for $1 \le p, q \le \infty$
- L^∞ 是一个 **normed vector space**, equipped with $\|\cdot\|_\infty$
- simple functions are dense in L^∞

Proof 容易证明.

Remark 注意, L^∞ 和 L^p 有一个出入点是: $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ **并不是** $L^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ **上的 dense subspace!**

9.3.4 L^∞-convergence 作为 (finite measure space 下) 最强的 L^p convergence: 等价于 uni. conv a.e.

Theorem 9.8 (convergence in L^∞ $\iff$ uniform convergence a.e.)

$$f_n \to f \ \text{ in } L^\infty \iff \text{exists null set } E \subset X \ s.t. f_n \to f \text{ uniformly on } E^c$$

(注意, 这不是 **conv almost uniformly**, 而是一个比 almost uniformly 更强的条件: **conv uniformly almost everywhere**, 因为 almost uniformly 只要求对于任意的 ϵ, 都存在一个 measure 小于 ϵ 的 E, 使得在 E^c 上 uni conv 即可.)

Remark 这一条 convergence 十分惊人. 因为**对于普通的 L^p space, converge in L^p 和 a.e. convergence 并没有任何的互推关系**; 但是对于 L^∞ convergence, 我们却可以把它**等价于 uniform convergence almost everywhere**, which is 一个**比 a.u convergence 更强, 比 a.e. convergence 更强的逐点 convergence**. 可以看出 L^∞ convergence 是比任何 L^p convergence 都要强一个层次的收敛性质.

这一点

Proof : Suppose $f_n \to f$ uni. a.e; WTS: $f_n \to f$ in L^∞ $f_n \to f$ uni. a.e 即: 存在零测集 $E \subset X$, $f_n \to f$ on E^c.

Let $\epsilon > 0$.

$f_n \to f$ uni. a.e 表明, 存在 N 使得 for all $n \ge N$ 有

$$\forall x \in E^c, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

by def, exactly is:

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$$

This shows that $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$, 即 $f_n \to f$ in L^∞.

: Suppose $f_n \to f$ in L^∞; WTS: $f_n \to f$ uni. a.e.Denote:

$$\epsilon_n := \|f_n - f\|_{L^\infty}$$

By assumption, $\epsilon_n \to 0$. Define for each n:

$$A_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon_n\}$$

By def $\|f_n - f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_x |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon_n$, 于是 $\mu(A_n) = 0$ 那么令:

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

by subadditivity of measure 有 $\mu(E) = 0$. 于是对于任意 ϵ_n, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon_n \to 0, \quad \text{for all } x \in E^c$$

由于 $\epsilon_n \to 0$, showing that outside E, 有 $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$.

Remark 这两个 convergence 直觉上是自然相等的.

但是这并不能够说明 $L^\infty(\mu)$-convergence 就是强于任何 $L^p(\mu)$-convergence 的. 因为即便是 uniform 的 ptwise conv 也无法推出 L^p conv.

特殊情况是, 如果整个 base space X 是 finite measure 的, 则可以推出

$$L^\infty(\mu)\text{-convergence} \implies L^p(\mu)\text{-convergence} \implies L^q(\mu)\text{-convergence} \implies \cdots$$

whenever $p > q$. (可证明)

但是对于无限测度空间, 这种推论未必成立.

9.3.5 L^∞ as Banach space

Theorem 9.9 (L^p $(1 \le p \le \infty)$ is Banach)

For any measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $L^p(\mu)$ is Banach for all $1 \le p \le \infty$

Proof 我们已经 proved 了 $1 \le p < \infty$ 的 case, 现在 prove $p = \infty$ 的 case.

By 9.1, 我们知道 STS: every abs conv series conv in L^∞.

我们 suppose $f_k \in L^\infty$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty$$

WTS: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converges.

Set:

$$E_k := \{x : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$$

于是有

$$\mu(E_k) = 0 \quad \text{for each } k$$

因而 setting

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

有

$$\mu(E) = 0$$

note:

$$x \in E^c \implies \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty$$

从而,

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

在 E^c 上是 well-defined 的, 且 bounded by $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$.
对于 $x \in E$, 我们可以随便设置值, 比如 π, 然后 define $g(x) = \pi$ on $x \in E$. 然后对于 each n, 我们 set:

$$g_n(x) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} f_k(x), & x \in E^c \\ \frac{1}{\pi}, & x \in E \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_\infty \le \sup_{x \in E^c} |g_n(x) - g(x)| &\le \sup_{x \in E^c} |\sum_{n+1}^{\infty} f_k(x)| \\ &\le \sup_{x \in E^c} \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\le \sum_{n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

Remark My reflection: 不 Banach 的 normed vector space 是什么样子的呢? 即, 这个 space 中存在某些 series, 其对应的 norm series absolutely conv 但是它却不 converge to 一个元素呢?
我们考虑空间 c_{00}, 它是所有 finite supp 的 seq 组成的空间:

$$c_{00} := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{only finite } x_i \neq 0\}$$

with ℓ^1 norm:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

c_{00} 是一个 normed vector space, 但不是 Banach space, 它的完备化是 ℓ^1. 我们考虑 series, with:

$$x_n = e_n / 2^n$$

其中 $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, 第 n 个位置是 1, 其余是 0, 是这个 NVS 的 standard basis.
显然每个 $x_n \in c_{00}$，并且：

$$\|x_n\| = \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

这是一个 absolutely convergent series, 但其和

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right) \notin c_{00}$$

L^p space 的 Banach 性表示了其**极限存在的稳定性**. recall, Banach 即 complete NVS, 而 **complete 是比 closed 更强的条件**.
因而**任何一个 L^p 函数列, 如果 Cauchy / converge in L^p norm, 那么它的极限一定在 L^p 里.**

9.3.6 relationship between L^p spaces

9.3.7 $L^m(\mu) \subset L^n(\mu), 0 < n \le m \le \infty$, for measure finite space)

刚才我们已经 state 了, 但还没有证明:

Theorem 9.10 (inclusion relation between L^p spaces (when base space is finite measure))

如果 measure space X has finite measure, 那么有

$$L^\infty(X) \subset \dots \subset L^m(X) \subset \dots \subset L^n(X) \subset \cdots$$

for 任意的 $m \ge n$.

这是我们首次把 $p < 1$ 也 include 进我们的讨论.

这个 statement 即: 对于 from finite measure space to $\mathbb{C}$ 的 function f, 它的 $\|f\|_m < \infty$ 是比 $\|f\|_n < \infty$ 更强的条件.
尤其, 除去 L^∞ 的情况, 它更直接的意思是: 对于 $0 < n \le m < \infty$ 而言, f 的绝对值的 m 次方的积分 $< \infty$ 是比 f 的绝对值的 n 次方的积分 $< \infty$ 要更强的条件.

这其实是一件比较直观的事情. 因为对于 $|f| \ge 1$ 的部分,

$$\int_{|f|\ge 1} |f|^{large} \ge \int_{|f|\ge 1} |f|^{small}$$

而对于 $|f| < 1$ 的部分,

$$\int_{|f|<1} |f|^{large} \le \int_{|f|<1} |f|^{small}$$

然而**由于整个 space 的 measure 是 finite 的, $|f| < 1$ 的部分并不影响**. 因为

$$\int_{|f|<1} |f|^{large} \le \int_{|f|<1} |f|^{small} \le \int_{|f|<1} 1 \le \mu(X)$$

因而, 对于 $\mu(X) < \infty$ 的情况, 显然有 $\|f\|_{large} < \infty$ 是比 $\|f\|_{small} < \infty$ 更强的条件.

(实际上, 如果只有 measure finite 的 x 上 $|f(x)| < 1$, 那么即便 $\mu(X) = \infty$, $\|f\|_{large} < \infty$ 也是比 $\|f\|_{small} < \infty$ 更强的条件; 而如果有 measure infinite 的 x 上 $|f(x)| < 1$, 那么有可能 $\|f\|_{large} < \infty$ 是比 $\|f\|_{small} < \infty$ 更弱的条件)

My point: 虽然说 $|f(x)|^{large}$ 比起 $|f(x)|^{small}$ 是更大还是更小取决于 $|f(x)|$ 是否 ≥ 1 or < 1, 但是 ≥ 1 的

值是可以 unbounded 的, 而 <1 的值再怎么通过小次方变得更大, 也超不过 1. 因而 $|f(x)| \ge 1$ 的部分通常更能函数积分值的有限性, 除非在一个 measure infinite 的集合上 $|f(x)| < 1$.

这里有一个更加严格的证明:

Proof 首先, 对于 $m = \infty$ 的 case, 如果 $f \in L^m = L^\infty$, 那么取任意 $1 \le n < \infty$ 都有:

$$\int |f|^n \le \int \|f\|_\infty^n = \|f\|_\infty^n \mu(X) < \infty$$

其次, 对于正常的 $m < \infty$ 的 case, 我们使用 Hölder: 如果 $f \in L^m$, 那么对于任意 $n < m$, 我们可以构造出 Hölder conjugate $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{m}{m-n}$, 从而:

$$\begin{aligned}\int |f|^n &= \int |f|^n \cdot 1 \\ &\le \left(\int (|f|^n)^{\frac{m}{n}} \right)^{\frac{n}{m}} \left(\int 1^{\frac{m}{m-n}} \right)^{\frac{m-n}{m}} \\ &= \|f\|_m^n \mu(X)^{\frac{m-n}{m}} < \infty\end{aligned}$$

从而

$$\|f\|_m < \infty \implies \|f\|_n < \infty$$

这一 proof 利用 Hölder conjuate, 通过构造包含 $\frac{m}{n}$ 的 Hölder conjugate, 把 $\int |f|^n$ 改成了 $\|f\|_m$ 的 expression.

以下是一个经典的例子:

Example 9.4 考虑 **measure finite 的 measure space** $(0,1)$: 通过经典的 Calculus 我们知道:

$$f(x) = \frac{1}{x^m} \in L^p(0,1) \quad \text{for all } p < \frac{1}{m}$$

但是对于任意的 m, 都有:

$$f(x) = \frac{1}{x^m} \notin L^p(0,1)$$

而我们再看一个 **measure infinite 的 measure space** $(1,\infty)$ **上的反例**, 采用同一个函数:

$$f(x) = \frac{1}{x^m}, \quad x \in (1,\infty)$$

这个时候, p 越大, $\int |f|^p = \|f\|_p^p$ 反而越小, 通过经典的 Calculus 我们知道: 我们知道而对于

$$f(x) = \frac{1}{x^m} \in L^p(1,\infty) \quad \text{for all } p > \frac{1}{m}$$

并且 $f \in L^\infty(1,\infty)$, 因为 $\|f\|_\infty = 1$.

这个空间上的这个函数正对应了我们刚才讨论的, 如果有 infinite measure 数量的 x 上 $|f(x)| < 1$, 那么很可能 $\|f\|_{large} < \infty$ 是比 $\|f\|_{small} < \infty$ 更弱的条件

9.3.8 control arbitrary $\|f\|_m$ 和 $\|f\|_n$ 的大小比例, in measure finite space

Remark 刚才我们的推导中,

$$\int |f|^n \le \|f\|_m^n \mu(X)^{\frac{m-n}{m}} < \infty$$

两边开 p 方, 可以得到一个不等式:

Theorem 9.11

对于 measure finite space X, 对于任意的 $0 < n \le m \le \infty$, 有:

$$\|f\|_n \le \|f\|_m \, \mu(X)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}$$

这也是一个有用的不等式. 它在 measure finite space 上, 对于任意的可测函数, 控制了两个任意的 function p-norm (虽然 for $p < 1$ 不能严格地称为 norm) 之间的大小关系。

9.3.9 $(L^n \cap L^r) \subset L^m \subset (L^n + L^r)$, 对任意 $0 < n < m < r \le \infty$

Proposition 9.2

对于 measurable $f : X \to \mathbb{C}$,

$$t \mapsto \|f\|_{\frac{1}{t}}$$

is **log-convex**.

equivalently 即: 对于任意的 $0 < n < m < r \le \infty$, 都有

$$\|f\|_m \le \|f\|_n^\lambda \cdot \|f\|_r^{1-\lambda}$$

where

$$\lambda := \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{r}} \in (0,1), \quad i.e. \left(\frac{1}{m}\right) = \lambda\left(\frac{1}{n}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{r}\right)$$

Remark log convex 即: 这个函数的 log 函数是 convex 的. 即对于任意 x, y, 以及 $[x, y]$ 上的任意一点, 即 $\lambda x + (1-\lambda)y$ for some $\lambda \in [0,1]$, 都有:

$$\log f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda \log f(x) + (1-\lambda) \log f(y)$$

即:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$$

例如: e^x, e^{x^2}, x^x 都是 log-convex 的. convex 函数的几何意义是 **" 函数值小于等于两端的线性插值"**, 中点值 $\le$ 两端值的**算术平均**, 而 log-convex 函数的几何意义是: , 中点值 $\le$ 两端值的**几何平均**.
这里, 两端点是 $\frac{1}{r} < \frac{1}{n}$, 而中间的取点则是 $\frac{1}{m}$. log convexity 性质表明:

$$\|f\|_m \le \|f\|_n^\lambda \cdot \|f\|_r^{1-\lambda}$$

Proof For $r = \infty$, then $\lambda = \frac{n}{m}$.
Since

$$|f|^m = |f|^n \cdot |f|^{m-n} \le |f|^n \cdot \|f\|_\infty^{m-n} \quad a.e.$$

可以得到

$$\int |f|^m \le \left(\int |f|^n\right) \cdot \|f\|_\infty^{m-n} = \|f\|_n^n \cdot \|f\|_\infty^{m-n}$$

从而 Taking qth root 得到结果:

$$\|f\|_m \le \|f\|_n^{n/m} \|f\|_\infty^{1-n/m}$$

For $r < \infty$: 我们采用 conjugate exponents:

$$\frac{n}{\lambda m}, \frac{r}{(1-\lambda)m}$$

这是因为:

$$\left(\frac{1}{m}\right) = \lambda\left(\frac{1}{n}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{r}\right) \implies 1 = \lambda\left(\frac{m}{n}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{m}{r}\right)$$

从而 Applying Hölder:

$$\begin{aligned}\int |f|^m &= \int |f|^{\lambda m}|f|^{(1-\lambda)m} \\ &\le \left(\int |f|^n\right)^{\frac{\lambda m}{n}} \left(\int |f|^r\right)^{\frac{(1-\lambda)m}{r}} \\ &= \|f\|_n^{\lambda m} \cdot \|f\|_r^{(1-r)m}\end{aligned}$$

Taking q th root 得到结果.

Remark Hölder's ineq 仍然是这里重要的一步. 我们这里需要利用 convexity 表述中的 "point on a line segment" 条件来构造一个 conjugate.

Remark 此处我们可以由这个 proposition 直接得到一个推论:

Corollary 9.2

对于任意的 $0 < n < m < r \le \infty$, 都有

$$(L^n \cap L^r) \subset L^m$$

♡

Example 9.5 令 A 为任意集合, $0 \le p < q \le \infty$, 有:

$$\|f\|_q \le \|f\|_p \quad \text{and thus} \quad \ell^p(A) \subset \ell^q(A)$$

这是因为

$$\|f\|_\infty^p = \sup_\alpha |f(\alpha)|^p \le \sum_\alpha |f(\alpha)|^p = \|f\|_p^p$$

于是 for $q \ne \infty$ case

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda} \le \|f\|_p$$

(另一 case, trivial.)

我们发现 ℓ^p 空间, p 越小要求反而越严格.

这是因为 ℓ^p 空间中一个函数就是一个 seq, 其 p-norm 就是各项的 p 次方和, 再开 p 次方根.

对于一个 seq, 如果它的累和 series 收敛, 它的各项肯定是 **eventually 收敛的**, 那么这些除了有限项外的这些项的绝对值都是 < 1 的, 那么 p **越大, 它们 p 次方和只会越小**. 这正对应了我们之前说的 "$|f(x)| < 1$ **的点主导函数" 的情况.**

相对于这个 inclusion 关系, 我们还有另外一个 inclusion 关系:

Proposition 9.3 (每个 L^m 函数都是一个 L^n 函数和一个 L^r 函数的和 $(0 < n < m < r \le \infty)$)

对于任意的 $0 < n < m < r \le \infty$, 都有

$$L^m \subset (L^n + L^r)$$

这个 inclusion 关系有一种调和的感觉在里面. 它 roughly mean 给定一个函数, 它可以拆成一个更加容易积的函数和一个更加不容易积的函数, 并且我们很大程度上可以控制这两个函数的可积性.
但其实很简单, 就是用我们之前的 $|f(x)| < 1$ 和 ≥ 1 的点作为区分, 把函数的定义域分成两部分. 如果 $|f|$ 的 m 次方是可积的, 那么更小的 n 次方, 对于 $|f(x)| \ge 1$ 的部分肯定也是可积的; 更大的 r 次方, 对于 $|f(x)| < 1$ 的部分肯定也是可积的;

Proof Suppose $f \in L^m$. Let

$$E := \{x : |f(x)| > 1\}$$

let

$$g := f\chi_E, \quad h := f\chi_{E^c}$$

于是 $g \in L^n$ for all $0 < n \le m$, $h \in L^r$ for all $r \ge m$ and $r = \infty$.