

Lec 6 product measure and Fubini-Tonelli theorem

6.1 product space and product measure [Fol 1.2, finished; 2.5]

Goal: Given $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, construct $X = \prod X_i$, s.t.

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

So that we can do Fubini (iterated integration) like that in Riemann integral.

6.1.1 product σ -algebra

Def 6.1 (product σ -algebra)

Suppose (X_i, \mathcal{A}_i) mble, $1 \leq i \leq n$, the product σ -algebra $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ on $X_1 \times \cdots \times X_n$ is the smallest σ -algebra s.t. the **coordinate map**

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_j$$

is measurable.

即 the σ -algebra generated by: $\{\pi_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$.

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n := \langle \{\pi_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\} \rangle$$



我们容易发现:

Proposition 6.1

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n = \langle \{E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n\} \rangle$$



Proof By def 易得. (Prop 1.14 in book).

Remark 这里只考虑了有限情况, 但是无限的乃至 ctbly 无限的相似. 取所有可能的 set product 作为 geneating 即可.

6.1.2 product Borel algebra \subset Borel algebra of the product space

Proposition 6.2

If X_1, \dots, X_n are metric spaces. Let $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ (with product metric), then:

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subseteq \mathcal{B}_X$$

and the equality holds if X_i separable $\forall i$.



Proof

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \stackrel{\text{by prop}}{=} \langle \{U_1 \times \cdots \times U_n \text{ each open}\} \rangle \subseteq \mathcal{B}_X$$

Now let $C_i \subseteq X_i$ dense, ctbl.

Set

$$\mathcal{E}_i := \{B_r(x) \mid x \in C_i, r \in \mathbb{Q}_{>0}\} \subseteq \mathcal{B}_{X_i}$$

Then: **every open set in $X_1 \times \cdots \times X_n$ is a ctbl union of products $B_1 \times \cdots \times B_n$** , each $B_1 \in \mathcal{E}_i$. Then we have:

$$\mathcal{B}_X = \langle \{B_1 \times \cdots \times B_n\} \rangle \subset \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i}$$

Remark 显然. 有限 index 情况下, 在 product topology 中, **product of open sets 仍然是 open set**, 但是 open sets 可以不止是 product of open sets 这些. 因而 $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subseteq \mathcal{B}_X$.

并且在 separable 的 topological space 上, 比如 \mathbb{R} , 我们有: \mathbb{R}^n 中的任意 open set 都是 a ctbl union of open boxes. 于是 $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

Example 6.1

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Corollary 6.1

if (X, \mathcal{A}) is a mble space, then

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ } (\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})\text{-mble} \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \text{ } \mathcal{A}\text{-mble}$$



Proof 略.

6.1.3 construction of product measure

下面我们构建 product measure: Let $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), 1 \leq i \leq n$ be mble spaces.

And let $X := X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ Goal: 通过 Hahn-Kromolgrov 来构建 product measure on product mble space. Idea: Let

$$\mathcal{A}' := \{\text{all finite disjoint unions of rectangles (each measurable)} A_1 \times \cdots \times A_n\}$$

Step 1:

6.1.4 all finite disjoint unions of rectangles as an algebra

Proposition 6.3

\mathcal{A}' is an algebra.



Proof The set $\mathcal{E} := \{\text{rectangles}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfies:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cap F \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E} \implies E^c$ is a finite disjoint union of recs (画图可知).

Step 2:

6.1.5 各维度 measure 的 product 作为 rectangle 的 measure, 从而定义 premeasure

Now define

$$\mu' : \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty]$$

as follows:

$$\mu' \left(\bigcap_{k=1}^N E_1^{(k)} \times \cdots \times E_n^{(k)} \right) = \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_i(E_i^{(k)})$$

Claim 2:

Proposition 6.4

(1) μ' is a well-defined premeasure on \mathcal{A}' .

(2) If each μ_i is σ -finite, so is μ' .

Proof Sketch: (2) DIY. (1) STS(check): if $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ is a finite or ctbl union of rects $E^{(k)} = E_1^{(k)} \times \cdots \times E_n^{(k)}$, then

$$\prod_{i=1}^n \mu_i(E_i) = \sum_k \prod_{i=1}^n \mu_i(E_i^{(k)})$$

Use Tonelli for sums and integrals:

$$\prod_{i=1}^n \chi_{E_i}(x_i) = \chi_E(x_1, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

$$= \sum_k \chi_{E^{(k)}}(x_1, \dots, x_n) \quad (6.2)$$

$$= \sum_k \prod_{i=1}^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \quad (6.3)$$

Integrate w.r.t. x_1 :

$$\mu_1(E_1) \prod_{i=1}^n \chi_{E_i}(x_i) = \int \sum_k \prod_{i=1}^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \quad (6.4)$$

$$\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \sum_k \int \left(\prod_{i=1}^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \right) d\mu_1(x_1) \quad (6.5)$$

$$= \sum_k \mu_1(E_1^{(k)}) \prod_{i=1}^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \quad (6.6)$$

And repeat for $i = 2, \dots, n$.

6.1.6 HK extension of the premeasure as definition of product measure

Step 3: 现在已经有了 σ -finite 的 premeasure, 我们可以应用 HK Thm 构建出完整的 measure. Now use HK:

Corollary 6.2

\exists measure $\mu := \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ on $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \mathcal{A}_n$ extending μ' .

(And if each μ_i are σ -finite, then product measure 也 σ -finite, 从而 μ 是 unique extension.)



由此, 我们从 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ 的 measure 中构建出了它们的 product measure.

6.1.7 associativity of product σ -algebra and σ -finite product measure**Corollary 6.3 (associativity)**

总有

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$$

并且, if μ_1, μ_2, μ_3 are σ -finite, then:

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$$



Proof DIY. 前者 play with def, 后者直接由 σ -finite 的 premeasure 的 HK extension unique 得到.

6.1.8 如何证明一个函数 product measurable

要证明一个函数是 product measurable 的, 只需要证明它对于每个 measurable rectangle 的 preimage 都是 measurable 的即可.

Lemma 6.1

Suppose $f : X \rightarrow Y \times Z$ is a function from a measurable space (X, \mathcal{A}) to a product measure space $(Y \times Z, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$.

Claim: If $f^{-1}(B_1 \times B_2) \in \mathcal{A}$ for each measurable rectangle $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, then f is an $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ -measurable function.



Proof 因为 product σ -algebra 由所有的 measurable rectangles 生成.

Hw7 中有另一版的证明作为 lemma.

在 Hw7 中我们可以通过这个 lemma 得到一个结论: 如果 $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, 那么 E 的 diagonal 一定 $\in \mathcal{A}$. 对于特殊的函数, 比如两个 measurable function 的乘积, 其一定是 product measurable 的.

Lemma 6.2 (easier Fubini)

条件: $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ 为 arbitrary measure space (不需要 σ -finite.), $f : X \rightarrow \mathbb{C}, g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ 为 measurable functions.

结论:

$$h := fg \text{ is } (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\text{-measurable}$$

并且如果 f, g 是 L^1 的, 那么 $h \in L^1(\mu \times \nu)$ 并且

$$\int h d(\mu \times \nu) = \left(\int f d\mu \right) \left(\int g d\nu \right)$$



Proof in hw 8. 这个 statement 表示一个 \mathcal{A} -measurable 的函数和一个 \mathcal{B} -measurable 的函数的乘积是 $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ -measurable 的.

6.2 Tonelli's Thm [Fol 2.5]

我们将 focus on the case $n = 2$: $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$, 考虑

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$$

从而, 它可以推广到任何 finite 个 measure space 的 product 上.

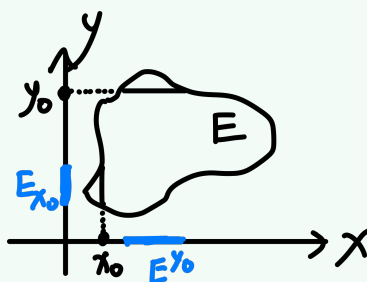
6.2.1 $E \subset X \times Y$ 的 section

Def 6.2 (x -section, y -section)

给定 product space 上的集合 $E \subset X \times Y$, 对于 $x \in X, y \in Y$, 我们定义:

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$$

$$E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$



给定从 product space 出发的函数 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, 对于 $x \in X, y \in Y$, 我们定义:

$$f_x(y) := f^y(x) := f(x, y)$$

表示固定住一个变量, 另一个变量的变化.



Example 6.2 对于任意的 $E \subset X \times Y$ 如果定义:

$$f := \chi_E$$

那么有:

$$f_x = \chi_{E_x}, \quad f^y = \chi_{E^y}$$

对于 **rectangle**: $E = A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, 有

$$E_x = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A \\ B, & x \in A \end{cases}$$

Proposition 6.5

(a)

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies \begin{cases} E_x \in \mathcal{B}, & \forall x \in X \\ E^y \in \mathcal{A}, & \forall y \in Y \end{cases}$$

(b)

$$f \text{ is } \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\text{-measurable} \implies \begin{cases} f_x \text{ is } \mathcal{B}\text{-measurable} & \forall x \\ f^y \text{ is } \mathcal{A}\text{-measurable} & \forall y \end{cases}$$

**Proof** (a) Let

$$\mathcal{E} := \{E \subset X \times Y \mid E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X \text{ and } E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y\}$$

Claim: \mathcal{E} 包含了所有的 rectangles, 并且 \mathcal{E} a σ -algebra.容易证明这一点. 从而, 由 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 的定义 (为包含所有 rectangles 的最小 σ -algebra) 得 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, 从而

(a) 成立

并且由于 (check) $f_x^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_x$ (Similar for f_y), (a) \implies (b).**Remark** 这里三件需要记住的事情:

- **section** 和取 **preimage** 可以交换顺序
- 对于一个 product measurable set, 任意 **section** 也 **measurable**
- 对于一个 product measurable function, 任意 **section function** 也 **measurable**

Remark 记录一下这里的证明方法, 以前见的比较少. 这里证明条件 A 推出条件 B 的方法: 证明所有满足条件 B 的元素构成的集合 包含了 所有满足条件 A 得元素构成的集合.这一方法的好处在于: 可以运用所有满足条件 B 的元素构成的集合的整体性质, 比如是 σ -algebra 等.**Def 6.3 (monotone class)**

Given a set X , a collection $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ is called a monotone class, if it is closed under **countable increasing unions** and **countable decreasing intersections**

当然, 一个 σ -algebra 是一个 monotone class. monotone class 是一个比 σ -algebra 更弱的定义.**6.2.2 tool needed to show Tonelli: Monotone Class Lemma****Lemma 6.3 (monotone class lemma)**Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ be an algebra.Define \mathcal{C} 为包含 \mathcal{A} 的最小的 montone class.

Claim:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \mathcal{C}$$

**Proof** $\mathcal{C} \subset \langle \mathcal{A} \rangle$ is trivial.

$\langle \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{C}$: STS \mathcal{C} 是一个 σ -algebra. see p.66. 具体做法比较 tricky, 但是思路是先证明 \mathcal{C} 是一个 algebra (这一部分较难. 我们对于 $E \in \mathcal{C}$, define $\mathcal{C}(E)$ 为 \mathcal{C} 中所有和它的交和差也仍然在 \mathcal{C} 中的 F 构成的集合, 并发现这个子集 $\mathcal{C}(E)$ 也同样是一个 monotone class. 从而 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$);

然后对于任意的 seq, 其前 n 项的 finite union $(\cup_{i=1}^n E_i)_{\text{seq}}$ 是一个 increasing seq, 其 limit 等于原 seq limit, 是属于 \mathcal{C} 的.

Remark 即, 对于一个已经是 algebra 的集合, 它生成的 monotone class 等于它生成的 σ -algebra.

这个 lemma 的好处在于, 我们在证明了一个集合是 algebra 后, 证明它是一个 σ -algebra, 只需要证明它 closed under ctbl increasing union 和 decreasing interection 即可. 我们可以利用这种 set seq 的单调性.

但是如果我们只知道 $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$, 没有 "包含 \mathcal{A} 的最小的 monotone class" 这个条件怎么办? 那也没关系, 我们很自然得出

Corollary 6.4

Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ be an algebra, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ be a monotone class, 那么一定有

$$\mathcal{C} \supset \langle \mathcal{A} \rangle$$

因为 $\langle \mathcal{A} \rangle =$ "包含 \mathcal{A} 的最小的 monotone class" $\subset \mathcal{C}$.

6.2.3 Tonelli for sets: integrating a section to get product measure

Theorem 6.1 (Tonelli for sets)

Let $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ be σ -finite measure spaces.

Take $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Then:

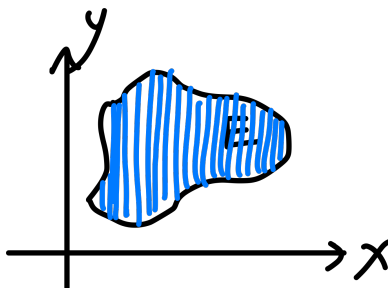
$$x \mapsto \nu(E_x), y \mapsto \mu(E_y) \text{ are measurable}$$

并且

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E_y) d\nu(y)$$

Remark 这个定理说明的是: 在 σ -finite 的 measure spaces 构成的 product measure space 中, 任意 product measurable set E , 把 x 映射到 E 的 x -section 的 measure ("扫描" 这个集合在一个方向上的宽度变化) 的行为是可测的.

并且, 我们可以把 E 的 measure 用 "对每个 x , 在 Y 上取 E 的 x -section 的 measure, 并对这一行为在 X 上进行积分" 来刻画. 这就把 product measure 拆分了开来. 其 following 是 Tonelli "把 n 个 measure spaces 的 product 上的积分拆成 n 个积分" 的强大定理.



Proof Define:

$$\mathcal{C} = \{E \subset X \times Y \mid x \mapsto \nu(E_x), y \mapsto \mu(E_y) \text{ are measurable } \forall (x, y) \in E \text{ and } \dots (2)\}$$

Claim 1: \mathcal{C} contains 所有的 rectangles. **Proof of Claim 1:** 考虑 $E = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, 即为一个 rectangle. 上一 lec 中, 我们 by def confirm: $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

那么对于任意的 $(x, y) \in E$, 我们有: $\nu(E_x) = \nu(B)$, 对于所有的 $(x, y) \notin E$, 则有 $\nu(E_x) = \emptyset$.

所以对于任意的 x , $\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B)$, 同理 $\mu(E^y) = \chi_A(x)\mu(A)$.

由此得到 $x \mapsto \nu(E_x), y \mapsto \mu(E^y)$ 是 measurable 的, 并且

$$\mu \times \nu(E) = \mu(A) \times \nu(B) = \mu(A) \int \chi_B(y) d\nu(y) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$$

同理, $\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x)$. 从而得证. 从而, 对于任意 **union of finite disjoint rectangles**, 这个结论也成立, by additivity in definition. 因而 \mathcal{C} 为一个 **algebra**.

Note: 由于 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 为包含所有 rectangles 的最小 σ -algebra, 我们只需要证明 \mathcal{C} 为一个 σ -algebra, 那么它一定包含 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. 并且 by Monotone Class Lemma, **STS**: \mathcal{C} 为一个 **monotone class**.

Claim 2: \mathcal{C} 为一个 **monotone class**. 令 $\{E_n\}$ 为一个 increasing seq in \mathcal{C} , 定义其 union 为 $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 并定义:

$$f_n(y) := \mu((E_n)^y)$$

根据 \mathcal{C} 的 definition, 每个 f_n 都是 measurable 的, 并且我们容易证明:

$$f_n \nearrow f(y) := \mu((E)^y) \text{ ptwise.}$$

于是使用 MCT, 容易得到

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = \lim \int \mu((E_n)^y) d\nu(y) = \lim \mu \times \nu(E_n) \stackrel{\text{CFB}}{=} \mu \times \nu(E)$$

从而 $E \in \mathcal{C}$.

It remains to show: \mathcal{C} closed under ctbl decreasing intersection. 不过这里我们涉及到一个 decreasing sequence 中间突然从 infinite measure 变为 finite measure 的问题, 所以我们从这里开始要分 μ, ν finite 和 not finite (but still σ -finite) 的两种情况讨论. finite measure 不用担心上述这一问题.

Case 1: μ, ν finite, 于是令 $\{E_n\}$ 为一个 decreasing seq in \mathcal{C} , 和 increasing 的情况 similar, 得到 $\mu((E_n)^y) =: f_n \searrow f(y) := \mu((E)^y)$ ptwise., 从而 by DCT (取 $\mu(X)$ 为 dominating function), 得到

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = \lim \int \mu((E_n)^y) d\nu(y) = \lim \mu \times \nu(E_n) \stackrel{\text{CFA}}{=} \mu \times \nu(E)$$

从而我们证明了在 μ, ν 为 finite measure 的情况下, \mathcal{C} 为一个 monotone class, 从而为一个 σ -algebra, 从而 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$.

Case 2: μ, ν σ -finite measure: 我们可以把 $X \times Y$ 写作 union of a seq of finite measure sets $\{X_i \times Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, 从而也是 a union of increaasing seq of finite measure sets $\{X_j \times Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. (取 $X_j \times Y_j = \bigcup_{i=1}^j X_i \times Y_i$) 从而对于任意的 $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$,

$$E = \lim_{j \rightarrow \infty} (E \cap (X_j \times Y_j))$$

对于每个 $E \cap (X_j \times Y_j)$, 我们可以应用前一结论, 得到

$$\mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int \chi_{Y_j}(y) \mu(E^y \cap X_j) d\nu(y)$$

从而应用 MCT, 得到

$$\mu \times \nu(E) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$$

同理 $\mu \times \nu(E) = \int \mu(E_x) d\nu(x)$, 从而 $E \in \mathcal{C}$, 得证.

6.2.4 Tonelli's Theorem

Theorem 6.2 (Tonelli)

Let $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ be σ -finite measure spaces.

条件: 令 $f \in L^+(X \times Y)$,

结论:

$$g(x) := \int f(x, y) d\nu \in L^+(X) \quad h(y) := \int f(x, y) d\mu \in L^+(Y)$$

(显然) 并且

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \quad (6.7)$$

$$= \int \left[\int f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y) \quad (6.8)$$



Remark Tonelli for sets 表示了 product measure 的计算方式: 通过对 x -section 的 y measure, 在 $x \in X$ 上进行积分可得到. 这就把 product measure 拆成了单个 measure 与积分.

而 Tonelli's Theorem 表示对一个非负 product measurable function 积分可以转化成对逐个 measure 积分.

recall: 非负 measurable 函数的积分, 就是一个 seq of simple functions 的积分的 sup, 而 simple function 的积分, 就是几个 measurable set 的 measure 的加权和. 因而 Tonelli's Theorem 基本上 naturally follows from Tonelli for sets.

Proof 首先, 对于 f 是 simple function 的 case, 直接 follows from Tonelli for sets. (mentioned in remark.)

对于 general case: $f \in L^+(X \times Y)$, 令 $\{f_n\}$ 为一个 seq of simple functions ptwisely converging to f .

于是

$$\int g d\mu = \lim \int g_n d\mu = \lim \int f_n d(\mu \times \nu) = \int f d(\mu \times \nu)$$

$$\int h d\nu = \lim \int h_n d\nu = \lim \int f_n d(\mu \times \nu) = \int f d(\mu \times \nu)$$

by MCT.

6.3 Fubini's Theorem and Lebesgue integral in \mathbb{R}^n [Fol 2.5, finished; 2.6]

recall Tonelli's Theorem: Given $f \in L^+(X \times Y)$, set $g(x) := \int f_x d\nu, h(y) := \int f^y d\mu$. Then $g \in L^+(X), h \in L^+(Y)$, 以及有:

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int g d\mu = \int h d\nu$$

展开后可写作:

$$\int f d(\mu \times \nu) = \iint f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

更加简洁可写作:

$$\int f d(\mu \times \nu) = \iint f d\nu d\mu = \iint f d\mu d\nu$$

Corollary 6.5

if $f \in L^1(X \times Y)$ and $f \geq 0$ then

- $g(x) < \infty$ for a.e. x
- $h(y) < \infty$ for a.e. y



Remark 在 product measure space 上 measurable 的可积函数, 在每个成分上, 都不能有过多的 infinity point.

Next: Fubini's Theorem.

Fubini's Theorem 是 Tonelli's Theorem 对 \mathbb{C} -valued 函数 (instead of $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -valued) 的推广. 但是其实证明很 trivial.

6.3.1 Fubini's Theorem**Theorem 6.3 (Fubini's Theorem)**

条件: $f \in L^1(\mu \times \nu)$,

结论:

- $f_x \in L^1(\nu)$ for a.e. x , $f^y \in L^1(\mu)$ for a.e.
- The a.e. defined functions:

$$g(x) := \int f_x d\nu \in L^1(\mu), \quad h(x) := \int f^y d\nu \in L^1(\nu)$$

•

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int g d\mu = \int h d\nu \quad (= \iint f d\mu d\nu)$$



Proof $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, so WLOG can assume f is \mathbb{R} -valued.

又 $f = f^+ - f^-$, 直接 apply Tonellis's Thm 可得.

Remark Tonelli and Fubini's Theorem 不仅有用在可以拆分积分以进行计算, 而且有用在积分换序.

实际上, 根据它的条件可以发现, 积分可换序的条件是很宽裕的, 只要这个函数 f 在 L^+ 或者 L^1 space 中就可以了.

Example 6.3 求和换序的合理性:

考虑

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\text{counting}})$$

if $a_{mn} \in \mathbb{C}$ for $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ and

$$\infty > \sum_{m,n} |a_{mn}| =: \sup_{F \subset \mathbb{N}^2 \text{ finite}} \sum_{(m,n) \in F} |a_{m,n}|$$

Thm: 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\sum_m a_{mn}$ conv absly to some $b_n \in \mathbb{C}$;

同样, 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, $\sum_n a_{mn}$ conv absly to $c_m \in \mathbb{C}$. 以及 $\sum_n b_n, \sum_m c_m$ conv absly to $\sum_{m,n} a_{mn}$.

即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |a_{mn}|$$

6.3.2 complete Fubini's Theorem

Remark 即便 $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ 都 complete, product space $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ 不一定 complete! (甚至说基本很少 complete)

Example 6.4 考虑 $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ 考虑一个 Vitali set.

$$V \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \{0\} \text{ is a subnull set, not measurable}$$

但是如果我们 consider completion:

$$(X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}, \overline{\mu \times \nu})$$

Theorem 6.4 (complete Fubini-Tonelli)

对于 complete measure space $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$, 取它们的 product measure space 的 completion:

$$(X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}, \overline{\mu \times \nu})$$

我们将 $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ 简易写作 \mathcal{L} , $\overline{\mu \times \nu}$ 简易写作 λ .

Suppose $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ is \mathcal{L} -measurable 并且 $f \in L^+(\lambda)$ or $f \in L^1(\lambda)$, 则有

- f_x 是 \mathcal{B} -measurable 的 for a.e. x 且 $x \mapsto \int f_x d\nu$ 是 measurable 的
- f_y 是 \mathcal{A} -measurable 的 for a.e. y 且 $y \mapsto \int f_y d\mu$ 是 measurable 的

并且, 在 $f \in L^1(\lambda)$ 的情况下, $f_x, f_y, x \mapsto \int f_x d\nu, y \mapsto \int f_y d\mu$ 也是 **integrable** 的, 即 $\in L^1(\lambda)$, 并且

$$\int f d\lambda = \iint f d\mu d\nu = \iint f d\nu d\mu$$



Proof exercise. 比较简单.

Remark 这一定理的意思是, 在 μ, ν 是 complete measure 的情况下, $\mu \times \nu$ 的 completion $\overline{\mu \times \nu}$ 虽然并不等于 $\mu \times \nu$, 但是 $L^1(\overline{\mu \times \nu})$ 的函数的积分却可以当作 $L^1(\mu \times \nu)$ 的函数的积分, 从而分成两个积分. 这是因为 因为完备化测度只是增加了一些原本测度为零的集合的子集, 这些集合不会影响积分计算. 这一定理的直接应用是 Lebesgue integral on \mathbb{R}^n .

6.3.3 remark: integral of 非负函数等于 area under graph

Theorem 6.5

令 (X, \mathcal{A}, μ) 为一个 arbitrary measure space, $f \in L^+(\mu)$ 为 arbitrary 可测非负函数, 我们定义:

$$G_f := \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Claim: G_f 是 $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -measurable 的, 并且

$$(\mu \times m)(G_f) = \int f d\mu$$



Proof In hw 6.

Remark G_f 即 area under the graph of f . 这一 statment 是一个正式的表达 of “integral of 非负函数等于 area under graph”. 我们也可以推广它到 L^1 上 (正负 part 的差), which is trivial.