

Module 2 outer measure 与 completion of a measurable space

2.1 complete measure space and outer measure [Fol 1.3, finished; 1.4]

Def 2.1 (nul set, subnull set, almost everywhere)

对于 measure space (X, \mathcal{M}, μ)

1. 我们称 $A \in \mathcal{M}$ 为一个 **null set**, 如果 $\mu(A) = 0$;
2. 我们称 $B \subseteq \mathcal{M}$ 为一个 **subnull set**, 如果存在某个 null set A containing it.
3. 我们称一个 statement about X 是 **almost everywhere (a.e.)** 的, 如果这个 statement 除了在某一个 null set 上之外, 在 X 上处处成立.



Def 2.2 (complete measure space)

我们称 (X, \mathcal{M}, μ) 是一个 complete measure space, 如果它其中的任意 subnull set 都是 null set. (即它 measurable)



Remark 我们知道, 根据 measure 的 monotonicity, subnull set 的 measure, 如果存在, 一定是 \leq 它所在的 null set 的, 即一定 $= 0$. 所以 complete measure space 的实际意思是: 这个 measure space 里, 任意 null set 的所有子集都是 measurable 的, 即所有足够小的集合都在这个 σ -algebra 里.

Example 2.1 一个 not complete 的 measure space 的例子:

$$X = \{1, 2\}, \mathcal{M} = \emptyset, X, \mu(\forall) = 0.$$

这个例子中, $\{1\}, \{2\}$ 这两个集合不是 measurable 的, 但是却是 nullset (全集) 的子集.

Theorem 2.1 (every measure space can be completed)

Suppose (X, \mathcal{M}, μ) is a measure space.

Let

$$\mathcal{N} := \{\text{all null sets in } \mathcal{M}\}$$

Claim:

$$\overline{\mathcal{M}} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \text{ for some } N \in \mathcal{N}\}$$

is a σ -algebra, 并且在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上存在一个 unique 的 extension $\bar{\mu}$ of μ .



Proof 这一部分的 proof 以及 remark 在 hw2. 这里, $\overline{\mathcal{M}}$ 称为 **completion of \mathcal{M} with respect to μ** , 以及 $\bar{\mu}$ 称为 **completion of μ** .

2.1.1 outer measure

Def 2.3 (outer measure)

An outer measure on X is a function $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ such that

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. monotone ($A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$)
3. countable subadditive ($\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$)



Remark 我们对比 measure 和 outer measure 的定义: measure 的条件比 outer measure 强在:

1. measure 是定义在一个严格的 σ -algebra 上的, 而 outer measure 则是定义在整个幂集上的.
2. measure 要求 disjoint countable additivity, outer measure 并不要求

在这两个条件的缩减下, 我们规定 outer measure 具有 monotonicity 和 countable subadditivity. 注意: measure 本身也有这个性质, 这是 measure 的 countable additivity 的推论.

outer measure 的意义在于, 我们的 measure 只定义在 σ -algebra 上, 而我们想要给每个子集都赋予一个近似于测度的东西.

2.1.2 induce outer measure out of a "elementary length function"

Theorem 2.2 (construct outer measure out of an "elementary length function")

另 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 为一个包含 \emptyset, X 的集合, 并定义 $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ 为一个满足 $\rho(\emptyset) = 0$ 的函数, 则

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) \mid E_i \in \mathcal{E} \text{ for each } i \text{ and } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

is an outer measure.

**Proof**

1. 取所有 $E_j = \emptyset$, 得到 $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. monotonicity 显然, 因为如果 $A \subseteq B$, 那么 A 取 inf 的这个集合是包含于 B 的, 因而取到的 inf 是小于等于的.
3. 证明 ctbl subadditivity, 我们使用经典的 $\epsilon/2^i$ argument. 这个 statement 直观上是显然的, 因为对一个 seq of sets, 每一个里面都有一个 seq of covering, 那么这个 seq of seq of covering 总体也是这个 seq union 的一个 covering. 不过我们不能这么说, 因为这里有一个 inf 操作的换序. 所以我们令 $\epsilon > 0$, 对于每个 A_i 的 covering $(E_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$, 我们令 $\sum_k \rho(E_{i,k}) \leq \mu^*(A_i) + \epsilon/2^i$, 最后可以得到 $\mu^*(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu^*(A_i)$. 由于 ϵ arbitrary, 得证.

Example 2.2 我们取 \mathcal{E} 为 \mathbb{R} 上所有的 intervals, 并取 ρ 为 interval 的 length, 就得到了一个外测度. (也就是 Lebesgue outer measure)

2.2 μ^* -measurability and Carathéodory's Theorem [Fol 1.4]

2.2.1 μ^* -measurable

Def 2.4 (μ^* -measurable)

Given outer measure μ^* , 我们称 $A \subseteq X$ 是 μ^* -measurable 的, if:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$



Remark countable subadditivity 蕴含的信息是: 如果我们把一个集合 divide 成几部分, 其 **outer measure** 有可能 **increase**. 而 μ^* -measurable 的含义是: 任何一个其他集合, 分割为和 E 重合以及和 E 的两部分之后, 其 **measure** 都不会增大.

Note: by subadditivity, must have $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, 而 μ^* -measurable 的集合, 则有 equality 总是成立.

同时注意: 这个行为对于 complement 是对称的.

Remark outer measure 是对于整个 power set 中每一个集合都赋予的, 并且其性质 **ctbl subadditivity** 严格弱于 countable additivity. 我们自然想到: 是否有一个 power set 的子集, 其不仅是一个 σ -algebra, 并且其上满足 countable additivity? 如果存在, 那么我们就从 outer measure induce 出了 measure.

再加上之前的用随意的 length function 来 induce outer measure 的方法, 我们就可以通过一个随意的 length function \rightarrow outer measure \rightarrow measure. (eg: 从 box length induce 出 Lebesgue outer measure, 再 induce 出 Lebesgue measure).

而实际上这个想法是正确的. 只要把 μ^* 的范围限制在所有 μ^* -measurable sets 上, 就形成了 σ -algebra, 并且其 restriction 是一个 measure, 甚至是一个 complete measure.

2.2.2 Carathéodory's Theorem

Theorem 2.3

对于任意的 outer measure μ^* ,

$$\mathcal{M} := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable sets}\}$$

is a σ -algebra.

并且, $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ is a complete measure.



Proof 我们首先证明这个 \mathcal{M} 是一个 σ -algebra

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$ by def.
2. \mathcal{M} closed under complement, by def of μ^* -measurability. (它对于 complement 是对称的.)
3. 为证明 \mathcal{M} closed under countable union, 我们首先 prove it for two sets. 假设 $A, B \in \mathcal{M}$, 且 disjoint. Let $E \subseteq X$. 我们已知

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (2.1)$$

我们 **WTS**: $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$

我们对于 $E \cap A, E \cap A^c$ 可以得到:

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \quad (2.2)$$

$$\mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \quad (2.3)$$

By $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$, 可以得到:

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \quad (2.4)$$

结合以上四个 equations 可以得到

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B^c)) \quad (2.5)$$

又 \leq by countable subadditivity 成立, 我们得证 closed under two union (从而 inductively closed under any finite union, \mathcal{M} 因而是一个 algebra).

Remark (Note: 这里我会想: 证明了这个 statement for any union of two sets 不就是证明了它对 any union 都成立吗? 实则不然, 因为 set union 的从属关系并不是可以从对任意 n 成立推广到对无穷成立, 因为这里的无穷是一个真实存在的 sequence, 而我们可以从"任意 n 成立推广到对无穷成立"的是比较数值大小, 因为 infinite series sum 的定义就是 limit, 而 set union 并没有 limit. 所以这里不能够直接得证.)

(Continuing the proof:) 现在再把这个 closed under finite union 推广到 closed under countable union, 以映证 \mathcal{M} 是一个 σ -algebra. 注意到 **STS (suffices to show): \mathcal{M} closed under countable disjoint union.** 因为任意不 disjoint 的两个集合都可以拆分成三个 disjoint 的集合.

我们令 (A_i) 为一个 \mathcal{M} 中的 disjoint sequence, 并定义 $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$, 我们由上一步的结论知道, $B_n \in \mathcal{M}$ for all n . Define $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, Let $E \subseteq X$, WTS: $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$.

考虑 $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$, 因为 inductively 可得到:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \quad (2.6)$$

从而:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \quad (2.7)$$

by monotonicity ($\mu^*(E \cap B_n^c) \geq \mu^*(E \cap B^c)$), 这里是一个 infinite sum, 并且 true for every n , 因而可以推广到 infinity, 得到

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i)\right) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E) \quad (2.8)$$

This finishes the proof of \mathcal{M} being a σ -algebra. 我们同时发现, $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是一个 complete measure on \mathcal{M} 是一个 trivial fact after the proof, 因为 taking $B = E$, 可以得到

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad (2.9)$$

并且 by monotonicity, 对于任意的 $\mu^*(A) = 0$, 任取 $E \subseteq X$, 都有

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E) \quad (2.10)$$

因而

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

得到 $A \in \mathcal{M}$. 从而得证这是一个 complete measure.

Remark 证明 Carathéodory's Theorem 的 punchline 在于: 我们令 $(A_i) \in \mathcal{M}$ be a sequence, B_n be its partial union for n terms, 可以得到

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$$

, 因为 inductively 可得到:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \quad (2.11)$$

这个 statement 对于 \mathcal{M} 是 σ -algebra 以及 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是 measure 的证明都很重要. 我们在 outer measure 的定义中, 只声明了 countable subadditivity, 而我们需要证明的是 countable disjoint additivity, 也就是需要把不等式变成一个等式.

为此我们看到 μ^* -measurable 的定义 (Carathéodory condition) 中的等号, 并从中找到这个等式关系: **通过 disjoint set sequence 上 inductively 对于前一项使用 Carathéodory condition, 得到 disjoint additivity.** (笔者的感觉是 Carathéodory condition 的直观看似不明显, 但是如果把一个 disjoint union 自身作为 E , 并把自身的某项作为 A , 就非常明显, 表示的是 disjoint measure sum 就是 measure of disjoint union.)

2.3 premeasure and Hahn-Kolmogorov extension Theorem [Fol 1.4, finished]

我们发现: 有些子集簇上的 "length" 很明显, 并且也符合 measure 的定义, 但是这个子集簇却并不构成一个 σ -algebra. 比如:

Example 2.3 $\{\text{all half-open, half-closed intervals}\} \subseteq \mathbb{R}$ 上, 以 interval 的 length 作为 measure, 很显然符合 measure function 的定义, 但是 $\{\text{all half-open, half-closed intervals}\} \subseteq \mathbb{R}$ 并不是一个 σ -algebra, 因为它可以通过 ctbl union 出 open interval, 并不在这个子集簇中. 不过, 这是一个 algebra.

因此, 我们想要一个方法来 **extend a "measure" function on an algebra, to a measure on a σ -algebra.**

Def 2.5 (premeasure)

给定 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个 algebra \mathcal{A}_0 , 我们称 $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ 为一个 premeasure, if

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$
2. μ_0 ctbl disjoint additive in \mathcal{A}_0



Remark premeasure 就是定义在 algebra instead of σ -algebra 上的 measure. 显然, 通过和 measure 相同的方式可证明, premeasure 在 \mathcal{A}_0 上是 **monotone 以及 ctbl subadditive** 的.

2.3.1 induce outer measure out of a premeasure: preserving μ_0 on \mathcal{A}_0


Proposition 2.1

Any premeasure can induce an outer measure:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}_0, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} \quad (2.12)$$

并且, we have:

$$\mu^*|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0 \quad (2.13)$$

并且 every set in \mathcal{A}_0 is μ^* -measurable. 

Proof 这个 outer measure 的 construction directly follows from 2.2.

Proof that μ^* restricted to \mathcal{A}_0 is μ_0 : 令 $E \in \mathcal{A}_0$, 假设 $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 我们令 $B_n := E \cap (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, 即把 covering intersecting E 变成 disjoint covering (B_n) , 从而由 μ_0 的 ctbl disjoint additivity 可得, 这一个新 covering 的 measure sum $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) := \mu_0(E)$. 并且由于 \mathcal{A}_0 是一个 algebra, 这些 B_n 也在 \mathcal{A}_0 里面, 从而它满足 monotonicity, then $\mu_0(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$

Proof that every set in \mathcal{A}_0 is μ^* -measurable: Fix $A \in \mathcal{A}_0$, 我们取任意 $E \subseteq X$. Let $\epsilon > 0$, by def of the outer measure, 存在一个 seq $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$, 使得 $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. 有 disjoint additivity of μ_0 可得, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i \cap A^c)$. 从而 $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, 得证. (实际上这是个 trivial argument, 通过 ϵ argument 来严格证明.)


Remark 这一 simple proposition 表明的是, μ_0 induce 出的 outer measure 在 \mathcal{A}_0 上 preserve μ_0 的 measure 与 measurability.

2.3.2 Hahn-Kolmogorov Theorem

Def 2.6 (σ -finite measure)

Let (X, \mathcal{M}, μ) be a measure space.

如果 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 是 finite 的.

如果存在一个 sequence (E_i) in \mathcal{M} 使得 $\bigcup_i E_i = X$ 并且每个 $\mu(E_i) < \infty$, 则称 μ 是 σ -finite 的. 

Remark 一个 finite measure 说明 \mathcal{M} 中的所有集合的 measure 都 finite.

Theorem 2.4 (Hahn-Kolmogorov Theorem)

给定一个 premeasure μ_0 on algebra \mathcal{M}_0 of X , 以及其 induced outer measure μ^* , 我们令


$$\mathcal{M} := \langle \mathcal{M}_0 \rangle$$

表示 σ -algebra generated by the algebra \mathcal{M}_0 .

并令

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$$

then we have:

1. $(X, \mathcal{M}_0, \mu_0)$ extends to (X, \mathcal{M}, μ)
即: $\mu|_{\mathcal{M}_0} = \mu_0$
2. $\mu|_{\mathcal{M}}$ 是 the largest extension of μ_0 to \mathcal{M} (即: 对于任意其他的 \mathcal{M} 上的 measure ν that extends μ_0 to \mathcal{M} , 都有 $\nu(E) \leq \mu(E)$ for all $E \in \mathcal{M}$);
并且 if μ_0 is σ -finite, 则 μ 是 the unique extension of μ_0 to \mathcal{M} . 

Proof Proof of $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ extends to (X, \mathcal{M}, μ) :

这个 Statement directly follows from 2.3(Carathéodory's Theorem) 以及上一个 proposition 2.1.

1. 我们首先用 μ_0 induce 出 μ^* , 再 restrict μ^* to $\mathcal{M}^* := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable sets}\}$, 得到一个 σ -algebra \mathcal{M}^* . 注意此时: 由上一个 proposition 2.1 可得 \mathcal{M}_0 中所有集合都是 μ^* -measurable 的, thus $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}^*$, 由于 \mathcal{M}^* 是一个 σ -algebra, 由 ?? 可得: $\mathcal{M} := \langle \mathcal{M}_0 \rangle \subseteq \mathcal{M}^*$.

2. 由 Carathéodory's Theorem 可以得到: $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ 是一个 measure, 从而 $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 也是一个 measure (等于把 $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ 限制在了一个更小的 sub- σ -algebra 上).

(Note: this is a trivial fact that if \mathcal{M}^* is a σ -algebra and $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$ is also a σ -algebra, then $\mu|_{\mathcal{M}}$ is a measure if given that μ is a σ -algebra on \mathcal{M}^*)

Proof of μ being the largest extension of μ_0 to \mathcal{M} : 假设 ν 是一个 \mathcal{M} 上的 σ -algebra s.t. $\nu|_{\mathcal{M}_0} = \mu_0$.

Let $E \subseteq \mathcal{M}$. (WTS: $\nu(E) \leq \mu(E)$, 即 $\nu(E) \leq \mu^*(E)$.)

由外测度 μ^* 的定义, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在一系列集合 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_0$ 满足

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

由于 ν 在 \mathcal{A}_0 上和 μ_0 一致, 即

$$\nu(A_i) = \mu_0(A_i) \quad \forall i,$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

利用 ν 的 additivity 和 monotonicity 得

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

由于 ϵ arbitrary, 得到

$$\nu(E) \leq \mu^*(E)$$

(证明思路: 在 \mathcal{M} 上 μ 就等于 μ_0 induce 的外测度, 对于其他的 extended measure, 其作用在一个集合上的测度一定小于等于任意的 \mathcal{M}_0 covering 的 premeasure 和, 而我们可以通过控制这个 covering 的测度和与它的外测度的差距 (since inf), 从而使得这个测度小于等于它的外测度加一个无限小的 ϵ , 从而得证.)

Proof of μ being the unique extension of μ_0 to \mathcal{M} , provided that μ_0 is σ -finite:

(recall μ_0 is σ -finite 即 $\mu_0(X) < \infty$) It remains to show that $\nu(E) \geq \mu^*(E)$.

Continuing 上一个 proof, we have:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \nu(E) + \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E\right) \\ &\leq \nu(E) + \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E\right) \end{aligned}$$

我们只要 controlling $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \mu^*(E) = \epsilon$ 逼近 0, 即可得到反向的不等式关系.

(证明思路: 我们证明了 $\nu(E) \leq \mu^*(E)$ 之后, 注意到 covering set 和 E 之间的差集的 ν -measure 自然也小于等于这个差集的 μ^* -measure, which can approximate 0.)

Remark 1. 我们首先容易定义 X 上的一个 algebra \mathcal{M}_0 和一个 algebra 上的 premeasure μ_0 ;

2. 然后用 inf of covering sum 来 induce 出一个 $\mathcal{P}(X)$ 上的 outer measure μ^* , 而后我们限制 μ^* 到 $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ (where \mathcal{M}^* 表示所有的 μ^* -measurable sets), by Carathéodory's theorem 这就 induce 出了一个 complete measure.

3. 我们可以再取 \mathcal{M}^* 的一个 sub σ -algebra $\mathcal{M} := \langle \mathcal{M}_0 \rangle$, 限制在这个集合上的 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 自然也是一个 measure, 并且是 μ_0 extend 到 \mathcal{M} 上的 largest measure. By Hahn-Kolmogorov Thm, 这个 measure 如果是 σ -finite 的则是 μ_0 extend 到 \mathcal{M} 上的 unique measure.

(Notice: 自然地, $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$ 是 $(X, \mathcal{M}, \mu^*|_{\mathcal{M}})$ 的一个 completion.)