

Module 1 sigma-algebra 与 measure

1.1 σ-algebra [Fol 1.2]

我们(见 my Math 395 notes)已经证明: 在 \mathbb{R} 上不存在一个 measure function $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. translate invariant
3. countably additivite

因而, 对于比如 \mathbb{R} 的这种无法在其幂集上定义良好的 measure function 的集合, 我们要定义一个 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, 使得我们能在这个 power set 的子集上, 定义一个 make sense 的 measure.

首先, 为了对于一个任意的集合 X 都能在其上定义 measure, 我们要考虑在 X 的一个什么样的子集簇上有希望定义这样的 measure.

Def 1.1 (algebra, σ-algebra)

对于 set $X, S \subseteq \mathcal{P}(X)$ 被称为 X 上的一个 σ-algebra, if 其满足:

1. $\emptyset \in X$;
2. **closed under complement**: if $E \in S$ then $X \setminus E \in S$;
3. **closed under countable union**: if $E_1, E_2, \dots \in S$ then $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in S$.

如果第三条并不满足, 而是只满足 **closed under finite union**, 则称 S 是 X 上的一个 algebra. 当然, σ-algebra 是比 algebra 严格更强的条件.



我们定义 X 的一个子集簇为一个 σ-algebra 如果它包含空集并 closed under complement and countable union. 但这并不是 σ-algebra 的全部性质. 这三个性质还蕴涵了: σ-algebra 也一定包含 X , 且 **closed under set difference, symmetric difference** 以及 **countable intersection**.

对于 algebra, 它也有以上的所有性质的 finite version.

Theorem 1.1 (σ -algebra also closed under set difference, symmetric difference and countable intersection)

Let S be a σ -algebra on set X .

Claim:

1. $X \in S$
2. $D, E \in S \implies D \cup E, D \cap E, D \setminus E \in S$

Proof union: from def by leaving others as \emptyset ;

intersection:

$$(D \cap E)^C = D^C \cup E^C \in S$$

setminus:

$$D \setminus E = D \cap (X \setminus E) \in S$$

3. $D, E \in S \implies D \Delta S \in S$

Proof

$$D \Delta E = (D \setminus E) \cup (E \setminus D)$$

4. $A_1, A_2, \dots \in S \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

Proof

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\right)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C \in S$$



Remark 我们发现 σ -algebra 很像是 topology. 实际上 σ -algebra 和 topology 的区别就是: σ -algebra 只保证了 closed under countable union 而 topology closed under any union; topology 只保证 closed under finite intersection 而 σ -algebra closed under countable intersection.

Lemma 1.1 (任意 σ -algebra 的 intersection 仍是 σ -algebra)

Let $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ be a collection of σ -algebra on X , then $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ is a σ -algebra on X .



Proof 这是个 trivial proof. 但是它具有一定理解上的启发.

我们对 σ -algebra 有一个直观理解: 如果我们想把一些集合做成一个 σ -algebra, 那么首先我们把它们的补集放进这个 σ -algebra 里, 其次我们把这些集合的 up to countable 的任意组合的并集也放进这个 σ -algebra 里.

因而即便我们把一些 σ -algebra 给 intersect 起来, 其中每个集合的补集和这些集合的 up to ctbl 的任意组合的并集也在这个 intersection 里.

这是个重要的直观理解. 我们想到, 如果我们要把一个 sigma-algebra 里的一部分去掉, 并保持它仍然是一个 sigma-algebra, 那么我们得把这些集合的补集, 以及能够 ctbl union 成这些集合的小集合也去掉, 并对这些小集合也 recursively 进行这个操作.

Corollary 1.1 (unique smallest σ -algebra containing a collection of subsets)

Given $\varepsilon \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$\langle \varepsilon \rangle := \bigcap_{\varepsilon \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

**Def 1.2 (σ -algebra generated by a subset)**

We call

$$\langle \varepsilon \rangle := \bigcap_{\varepsilon \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

the σ -algebra generated by ε

**1.2 Borel σ -algebra on \mathbb{R} and measure [Fol 1.2, finished; 1.3]**

Recall: the σ -algebra generated by ε

$$\langle \varepsilon \rangle := \bigcap_{\varepsilon \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

is the smallest σ -algebra containing ε .

Example 1.1

$$\langle \{E\} \rangle = \{\emptyset, E, E^c, X\} \quad (1.1)$$

Lemma 1.2 (inclusion properties of generated σ -algebra)

1. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ where \mathcal{A} is a σ -algebra, then $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \mathcal{A}$.
2. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, then $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$.
3. if $\mathcal{E} \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$, then $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$.



Proof trivial.

Def 1.3 (Borel σ -algebra defined on a topological space)

For topological space (X, \mathcal{T}) , we define:

$$\mathcal{B}_X := \langle \mathcal{T} \rangle$$



Borel σ -algebra on a topological space 就是 σ -algebra generated by the topology. Its members are called **Borel sets**. 当然, 所有的 open sets 和 closed sets 都是 Borel sets.

1.2.1 generating Borel σ -algebra on \mathbb{R}

Example 1.2 Let \mathcal{E}_1 : \mathbb{R} 上所有的 open intervals;

\mathcal{E}_2 : \mathbb{R} 上所有的 closed intervals;

\mathcal{E}_3 : \mathbb{R} 上所有的 left-open right-closed intervals;

\mathcal{E}_4 : \mathbb{R} 上所有的 left-closed right-open intervals;

\mathcal{E}_5 : \mathbb{R} 上所有的 left-open right-unbounded intervals;

\mathcal{E}_6 : \mathbb{R} 上所有的 left-closed right-unbounded intervals;

\mathcal{E}_7 : \mathbb{R} 上所有的 left-unbounded right-open intervals;

\mathcal{E}_8 : \mathbb{R} 上所有的 left-unbounded right-closed intervals;

$\bigcup_{i=1,\dots,8} \mathcal{E}_i$ 即 \mathbb{R} 上的所有形式的 intervals.

Lemma 1.3

任意以上 $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, 8$ 都可以 generate $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$



Proof 我们 recall: 所有的 countable 以及 second countable 的 topological space 都具有 **Lindelöf property**: 任意 open covering 都存在一个 countable 的 subcovering.

Lindelöf property 的一个推论就是, 在具有 Lindelöf property 的 metric space 或者 second countable 的 space 中, 任意 open set 都可以写成 countable 个 open balls 的 union.

我们在 elementary 的 real analysis 中已经学过, $[a, b] = \bigcap_{n \geq 1} (a - 1/n, b)$, 以其作为例子, 这些 intervals 彼此之间都可以相互转换.

1.2.2 measure

Def 1.4 (measurable space and measure space)

Let X be a set, \mathcal{M} be a σ -algebra on X .

A measure on (X, \mathcal{A}) is a function $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. countable additive:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

for disjoint seq of $E_i \in \mathcal{M}$.

如果这样的 μ 存在, 我们则称 (X, \mathcal{M}) 为一个 measurable space, 并称 (X, \mathcal{M}, μ) 为一个 measure space.



Remark 一个 probability space 就是一个 measure space, satisfying $\mu(X) = 1$.

Example 1.3

1. 对于任意的 (X, \mathcal{M}) , 我们可以定义:

$$\mu(A) := \#A \quad (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$

这个 measure 叫做 **counting measure**.

2. Fix $x_0 \in M$, 可以 define

$$\mu(A) := \delta_{x_0} := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{if } x_0 \notin A \end{cases}$$

这个 measure 叫做 the **Dirac measure at x_0** .

3. 给定一个 X 上的函数 $f : X \rightarrow [0, \infty)$, 我们可以通过这个函数来定义:

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} f(x)$$

这个测度依赖于函数值来表示每个点的单点集的 measure, 并通过一个集合上所有点的单点集 measure 相加得到这个集合在这个函数下的 measure. (缺点: 我们已经知道, 如果一个函数在一个集合上的正集是 uncountable 的, 那么这个集合上的这个测度一定是 ∞ .)

以下是 measure function 由它的定义的两条性质 (空集为 0 以及 ctbl additivity) 推导出的一些基本性质:

Lemma 1.4 (measure is finitely additive)

Measure is finitely additive.



Proof 显然, ctbl additive implies finite additive.

Remark 反向则不成立. 这让我们想起: Jordan measure 和 Lebesgue measure.

Lemma 1.5

$$A, B \in \mathcal{M} \implies$$

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$



Proof

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

而后使用 finite additive 可得. 这是一个 direct corollary of countable additivity.

Corollary 1.2

$$A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \implies$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$



Theorem 1.2 (properties of measure)

对于任何 measure space (X, \mathcal{M}, μ) :

1. **monotonicity:** $A \subseteq B \in \mathcal{M} \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

Proof trivial.

2. **countable subadditivity:**

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Proof By setting $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, 而后通过 ctbl disjoint additivity 与 monotonicity 可得

3. **continuous from above:** 如果 $A_i \subseteq A_{i+1} \forall i \geq 2 \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

Proof 使用 same trick as 2.

4. **continuous from below:** 如果 $A_i \supseteq A_{i+1} \forall i$ 且存在某个 j 使得 $\mu(A_i) < \infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Proof 前面的都无视, 直到第一个 $\text{measure} < \infty$ 的集合, 是可能出现在最后的 intersection 里的最大集合. 我们 Fix 这个 A_j . 通过构造补集的方式, 把交转为并, 从而用 (3) 得证. Define:

$$E_i := A_j \setminus A_i \forall i \geq j \text{ 从而}$$

$$\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = A_j \setminus \left(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i\right)$$

进而

$$\mu\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right) = \mu(A_j) - \mu\left(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i\right)$$

进而 by (3)

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_j) - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) = \mu(A_j) - \lim_{i \rightarrow \infty} (\mu(A_j) - \mu(A_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$$



Recall: the σ -algebra generated by ε

$$\langle \varepsilon \rangle := \bigcap_{\varepsilon \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

is the smallsest σ -algebra containing ε .

Example 1.4

$$\langle \{E\} \rangle = \{\emptyset, E, E^c, X\} \quad (1.2)$$

Lemma 1.6 (inclusion properties of generated σ -algebra)

1. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ where \mathcal{A} is a σ -algebra, then $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \mathcal{A}$.
2. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, then $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$.
3. if $\mathcal{E} \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$, then $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$.

**Proof** trivial.**Def 1.5 (Borel σ -algebra defined on a topological space)**For topological space (X, \mathcal{T}) , we define:

$$\mathcal{B}_X := \langle \mathcal{T} \rangle$$



Borel σ -algebra on a topological space 就是 σ -algebra generated by the topology. Its members are called **Borel sets**. 当然, 所有的 open sets 和 closed sets 都是 Borel sets.

1.2.3 generating Borel σ -algebra on \mathbb{R} **Example 1.5** Let \mathcal{E}_1 : \mathbb{R} 上所有的 open intervals; \mathcal{E}_2 : \mathbb{R} 上所有的 closed intervals; \mathcal{E}_3 : \mathbb{R} 上所有的 left-open right-closed intervals; \mathcal{E}_4 : \mathbb{R} 上所有的 left-closed right-open intervals; \mathcal{E}_5 : \mathbb{R} 上所有的 left-open right-unbounded intervals; \mathcal{E}_6 : \mathbb{R} 上所有的 left-closed right-unbounded intervals; \mathcal{E}_7 : \mathbb{R} 上所有的 left-unbounded right-open intervals; \mathcal{E}_8 : \mathbb{R} 上所有的 left-unbounded right-closed intervals; $\bigcup_{i=1,\dots,8} \mathcal{E}_i$ 即 \mathbb{R} 上的所有形式的 intervals.**Lemma 1.7**任意以上 $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, 8$ 都可以 generate $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 

Proof 我们 recall: 所有的 countable 以及 second countable 的 topological space 都具有 **Lindelöf property**: 任意 open covering 都存在一个 countable 的 subcovering.

Lindelöf property 的一个推论就是, 在具有 Lindelöf property 的 metric space 或者 second countable 的 space 中, 任意 open set 都可以写成 countable 个 open balls 的 union.

我们在 elementary 的 real analysis 中已经学过, $[a, b] = \bigcap_{n \geq 1} (a - 1/n, b)$, 以其作为例子, 这些 intervals 彼此之间都可以相互转换.

1.2.4 measure**Def 1.6 (measurable space and measure space)**Let X be a set, \mathcal{M} be a σ -algebra on X .A measure on (X, \mathcal{M}) is a function $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. countable additive:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

for disjoint seq of $E_i \in \mathcal{M}$.

如果这样的 μ 存在, 我们则称 (X, \mathcal{M}) 为一个 measurable space, 并称 (X, \mathcal{M}, μ) 为一个 measure space.



Remark 一个 probability space 就是一个 measure space, satisfying $\mu(X) = 1$.

Example 1.6

1. 对于任意的 (X, \mathcal{M}) , 我们可以定义:

$$\mu(A) := \#A \quad (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$

这个 measure 叫做 **counting measure**.

2. Fix $x_0 \in M$, 可以 define

$$\mu(A) := \delta_{x_0} := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{if } x_0 \notin A \end{cases}$$

这个 measure 叫做 the **Dirac measure at x_0** .

3. 给定一个 X 上的函数 $f : X \rightarrow [0, \infty)$, 我们可以通过这个函数来定义:

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} f(x)$$

这个测度依赖于函数值来表示每个点的单点集的 measure, 并通过一个集合上所有点的单点集 measure 相加得到这个集合在这个函数下的 measure. (缺点: 我们已经知道, 如果一个函数在一个集合上的正集是 uncountable 的, 那么这个集合上的这个测度一定是 ∞ .)

以下是 measure function 由它的定义的两条性质(空集为 0 以及 ctbl additivity)推导出的一些基本性质:

Lemma 1.8 (measure is finitely additive)

Measure is finitely additive.



Proof 显然, ctbl additive implies finite additive.

Remark 反向则不成立. 这让我们想起: Jordan measure 和 Lebesgue measure.

Lemma 1.9

$A, B \in \mathcal{M} \implies$

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$



Proof

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

而后使用 finite additive 可得. 这是一个 direct corollary of countable additivity.

Corollary 1.3

$A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \implies$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

**Theorem 1.3 (properties of measure)**

对于任何 measure space (X, \mathcal{M}, μ) :

1. **monotonicity:** $A \subseteq B \in \mathcal{M} \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

Proof trivial.

2. **countable subadditivity:**

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Proof By setting $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, 而后通过 ctbl disjoint additivity 与 monotonicity 可得

3. **continuous from above:** 如果 $A_i \subseteq A_{i+1} \forall i \geq 2 \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

Proof 使用 same trick as 2.

4. **continuous from below:** 如果 $A_i \supseteq A_{i+1} \forall i$ 且存在某个 j 使得 $\mu(A_i) < \infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Proof 前面的都无视, 直到第一个 $\mu(A_i) < \infty$ 的集合, 是可能出现在最后的 intersection 里的最大集合. 我们 Fix 这个 A_j . 通过构造补集的方式, 把交转为并, 从而用 (3) 得证. Define: $E_i := A_j \setminus A_i \forall i \geq j$ 从而

$$\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = A_j \setminus \left(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i\right)$$

进而

$$\mu\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right) = \mu(A_j) - \mu\left(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i\right)$$

进而 by (3)

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_j) - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) = \mu(A_j) - \lim_{i \rightarrow \infty} (\mu(A_j) - \mu(A_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$$

