Lec 1 distribution function 与 Lebesgue-Stieltjes measures

1.1 distribution function and Borel measures on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [Fol 1.5]

This lecture: 1. distribution function 是 increasing 且 right continuous 的, 2. 任意 increasing 且 right continuous 的函数可以作为 distribution function, 用它来构造它对应的 measure.

1.1.1 distribution function of a locally finite (i.e. regular) Borel measure

Def 1.1 (distribution function of μ)

给定一个 **locally finite (finite on all compact sets)** 的 **Borel measure** on $\mathbb{R}$ (即 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(bR), \mu)$), 我们定义:

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0,x]) & ,x \geq 0 \\ -\mu((x,0]) & ,x < 0 \end{cases}$$

这个函数被称为 μ 的 **distribution function.** ♣

Remark 一个 **locally finite (finite on all compact sets)** 的 Borel measure on $\mathbb{R}^n$ 被称为一个 regular measure. 在 Ch 3 中, 我们将在讨论 $\mathbb{R}^n$ 上 regular measure 对于 Lebesgue measure 的 derivative.

Proposition 1.1

容易发现: F 是 μ 的 distribution function, 当且仅当 $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$, 任取这样的 interval. ♠

这两个定义是等价的.

Theorem 1.1 (distribution function is increasing and right ctn)

对于 $\mathbb{R}$ 上的任意 locally finite Borel measure μ, 其 distribution function F_μ 都是 increasing 且 right continuous 的. (right ctn:

$$F_\mu(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

♡

Proof increasing: trivially by monotonicity of measure.
right continuous: follows from measure 的 ctnity. 正轴上: $\mu((0, x+1/n])$ 的 sequence 极限为 $\mu(0,x])$, by ctn from above; 负轴上, $\mu((x+1/n, 0])$ 的 sequence 极限为 $\mu((x,0])$, by ctn from below.

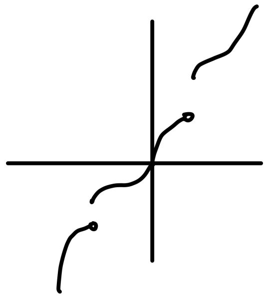
Remark **Note: distribution function 是 right ctn 的, 但却未必是 left ctn 的.** 因为我们构造离散的 measure, 使得这个 distribution function 具有间断点. 这样导致了左不连续. 反例: 例如 atomic measure.

1.1.2 any increasing and right ctn function is a unique distribution function

Def 1.2 (h-interval)

我么定义形如 $(a,b]$, $(-\infty, b]$ 的 $\mathbb{R}$ 的子集, 以及 $\varnothing, \mathbb{R}$, 为 h-intervals. ♣

h-intervals 即**所有的左开右闭区间.**



Lemma 1.1 (h-intervals form an algebra and generate borel set)

$$\mathcal{A}_0 := \{\text{finite (disjoint) unions of h-intervals}\}$$

是一个 algebra, 并且

$$< \mathcal{A}_0 >= \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Proof trivial. follows from lec 2 的 generating set of borel set on $\mathbb{R}$.

Theorem 1.2 (任意 increasing 且 right ctn 函数都是某个 regular Borel measure 的 distribution 函数)

取 lemma 中的 $\mathcal{A}_0$. 对于任意的 **increasing** 且 **right ctn** 的 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** 我们 define $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$, by:

$$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i))$$

并规定 $\mu_0(0) = 0$, 以及 $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$

, **Claim 1:** μ_0 **是一个** $\mathcal{A}_0$ **上的** σ**-finite premeasure.**

Claim 2: (by Hahn-Kolmogrov) μ_0 **extend to a locally finite Borel measure** μ_F, 并且 $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ for any h-interval, i.e. F 是 μ_F 的 distribution function.

Claim 3: F 是 μ_F 的唯一 **distribution function up to constant term**, in the sense that 任意其他的 such function G 如果也是 μ_F 的 distribition function, 则必然有 $F - G$ 为 const.

Proof Claim1

1. well-definedness of μ_0: 对于两个结果一样的 union, finding common refinement 即可.
2. $\mu_0(\varnothing) = 0$: 因为 $\varnothing$ 就是 $(a, a]$.
3. finite additivity: trivial.
4. σ-finiteness: each $\mu_0((n, n + 1]) < \infty$
5. **ctbl additivity: nontrivial,** 下面详细展开**.**

Suppose $A_1, A_2, \cdots$ 是 seq of disjoint h-intervals in $\mathcal{A}_0$. Let $A := \bigsqcup_i A_i$.
WTS: $\mu_0(A) = \sum_i \mu_0(A_i)$.
(1) WTS $\mu_0(A) \geq \sum_i \mu_0(A_i)$ 这个 direction easy. We define $B_n := \bigsqcup_1^n A_i$, 由 finite additivity 得到: $\mu_0(B_n) = \sum_i^n \mu_0(A_i)$, 从而

$$\mu_0(A) = \mu_0(B_n) + \mu_0(A \setminus B_n) \geq \mu_0(B_n)$$

for each n, 由于这是一个 numerical seq, 可以 conclude $\mu_0(A) \geq \sum_i \mu_0(A_i)$. (2) WTS $\sum_i \mu_0(A_i) \geq \mu_0(A)$. 这个 direction 较难, 需要用到 $\epsilon/2^n$ 的 argument.

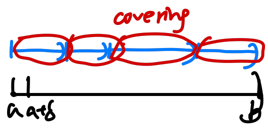
For simplicity, 我们只需要考虑 $A_i = (a_i, b_i]$ 的 interval 形式, 其他形式 can trivially prove. 并且, 由于 $\mathcal{A}_0$ 中任何一个元素至多只有 finite 个离散的 h-intervals, 我们 **suffice to assume** A 是一个 **h-interval.**
从而, 我们也可以 denote $A = (a, b]$.
Let $\epsilon > 0$.
By F 的 increasing 和 right ctn, 存在 δ, δ_i s.t.

$$F(a+\delta) - F(a) \leq \epsilon$$

同样地, 对于每个 A_i. 我们都可以找到 δ_i 使得

$$F(b_i+\delta_i) - F(b_i) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$$

于是 $(a_i, b_i+\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 就形成了一个 open covering for $[a+\delta, b]$. By cptness, 存在一个 finite subcovering $(a_i, b_i+\delta_i)_{1\leq i\leq N}$.
By relabelling, 我们 **suppose** A_i 是从左到右排序的. 于是每个 $b_i+\delta_i$ 都处于下一个 A_{i+1} 之内.



从而:

$$\begin{aligned}
\mu_0(A) &\leq F(b) - F(a+\delta) - \epsilon && (1.1)\\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(a_1) + \epsilon && (1.2)\\
&= F(b_N+\delta_N) - F(a_N) + \sum_{1}^{N-1}(F(a_{i+1}) - F(a_i)) + \epsilon && (1.3)\\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(a_N) + \sum_{1}^{N-1}(F(b_i+\delta_i) - F(a_i)) + \epsilon && (1.4)\\
&< \sum_{1}^{N}(F(b_i) - A(a_i) + \frac{\epsilon}{2^i}) + \epsilon && (1.5)\\
&< \sum_{1}^{\infty}\mu_0(A_i) + 2\epsilon && (1.6)
\end{aligned}$$

Claim 2, 3 都 directly follows from Hahn-Komogrov Thm.
Remark 这一证明实则简单. 关键的步骤是 1. 简化问题为 union 成一个 h-interval; 2. 通过 cptness 取 finite covering; 3. 对每个 A_i 取一个 $\epsilon/2^i$ 的小 cover, 最后可以被 ϵ bound.
Example 1.1 我们已经证明, 从任意的 increasing 且 right ctn 的函数都可以构造出一个以其为 distribution function 的 locally finite Borel measure on $\mathbb{R}$, 因而我们简称这样的函数都叫做 distribution function.
以下为两个 distribution function 的例子:
1. Heaviside function

$$H(x) = \begin{cases} 1 & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$$

2. 我们将 $\mathbb{Q}$ 以某种形式列出: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \cdots\}$ 而后定义:

$$F(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n} H(x - r_n) \in (0, 1)$$

这个函数通过有理数的次序给每个有理数赋了一个"weight", 并对于每个 x, 把所有有理数分为 $> x$ 和 $\le x$ 的两部分, 只把 $\le x$ 的那部分有理数的权重算进 $F(x)$. 于是 x 越大, 被算进 $F(x)$ 的有理数越多, $F(x)$ 就越大. (虽然每个有理数的权重是乱的). 这个函数在每一点上都 discrete.
这个过程可推广, 不取 $\mathbb{Q}$ 而取任意的 countable sets in $\mathbb{R}$ 作为参照.

本 lec 总结: 通过直接定义 distribution function 来得到的 measure, 实则就是不同于直接取 interval 长度, 我们隐性地给每个点一个 mass (类似概率密度), 从而把区间的长度中每一个点加上一个权重. 最后形成一个不一定均匀的 measure. 这个 distribution 的分布曲线决定了这个 measure.

1.2 Lebesgue-Stieltjes measure [Fol 1.5, finished]

给定一个 increasing 且 right ctn 的函数 F, 我们已经展示了用它作为 distribution function 来 induce 出一个 regular Borel measure μ_F on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
在构造这个函数时, 我们使用的是用 premeasure $\mathcal{A}_0$ (of all finite unions of h-intervals), 使用 Hahn-Kolmogrov 来 induce outer measure μ_F^*, 再把 restrict 它到 $< \mathcal{A}_0 >$, 即 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上, 获得的 measure. **这一个 measure 是一个 Borel measure, 但是它并不 complete.**
recall in lec 6: 我们其实可以 complete 这个 measure, 只需要在第二步, 用 premeasure $\mathcal{A}_0$ induce 出 outer measure 后, 不要 restrict 它到 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上, 而是 restrict 到取 $\mathcal{M}_\mu := \{\text{all } \mu_F^*\text{-measurable set}\}$ 上, 得到的就是 completion of μ_F, 即

$$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \overline{\mu_F})$$

其中, $\mathcal{A}^*$ 是 $< \mathcal{A}_0 >$ 即 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 的 proper super set. **我们把这个 completed measure 叫做 Lebesgue Stieltjes measure associated with F, 并用 μ_F 来指代它. (刚才, 我们把未完备的 measure 叫做 μ_F, 但现在我们不再使用这个 measure, 而是使用它的 completion, 并转而称它的 completion ($\overline{\mu_F}$) 为 μ_F.)**

$$\text{Regular Borel measure} \xrightarrow{\text{completion}} \text{LS measure}$$

Def 1.3 (Lebesgue-Stieltjes measure associated with F)

给定一个 distribution function F, 我们使用它来定义 h-intervals 的 premeasure μ_0, 并把这个 premeasure induce 出的 outer measure μ^* 限制在

$$\mathcal{M}_\mu := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable set}\}$$

上, 由 Carathéodory Thm 得它是 complete 的. 称这个 complete 的 measure

$$\mu_F := \mu^*|_{\mathcal{M}_\mu}$$

为 **Lebesgue Stieltjes measure associated with F.** ♣

Remark 根据定义, 对于任意 $E \in \mathcal{M}_\mu$, 它的 LS measure 为:

$$\mu_F(E) = \inf\{\sum_1^\infty (F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \bigcup_1^\infty (a_i, b_i]\}$$

1.2.1 inner and outer regularity of LS measure

虽然我们使用 h-intervals 来 induce 了这个 measure, 但是实际上我们在表示 measure 时, 可以用 open intervals 来代替 h-intervals:

Lemma 1.2 (open intervals can substitute for h-intervals when computing measure)

固定一个 Lebesgue-Stieltjes measure associated with F, 任意 $E \in \mathcal{M}_\mu$, 它的 measure 等于:

$$\mu_F(E) = \inf\{\sum_1^\infty (F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \bigcup_1^\infty (a_i, b_i)\}$$

Proof 每个 open interval 都等于 a ctbl disjoint union of h-intervals, 从而是在这个被取 inf 集合内的; 所以只需要证明能取到这个 inf 即可. Fix $\epsilon > 0$, 我们根据定义可以取到一个 seq $(a_i, b_i]$ 使得它 measure sum $\leq \mu(E) + \epsilon/2$, 而我们对于每个 i, 在 interval 的右边再取一个 $< \epsilon/2^{i+1}$ 的 δ_i, 就变成了一个 open interval, 并且最后距离这个 h-interval seq 的 measure sum 差距至多 $\epsilon/2$. 从而得证.

Theorem 1.3 (outer regularity)

对于一个 Lebesgue-Stieltjes measure associated with F, 任意 $E \in \mathcal{M}_\mu$, 它的 measure 等于:

$$\mu_F(E) = \inf\{\mu_F(U) \mid U \text{ open , and } E \subseteq U\} \tag{1.7}$$

Proof Directly follows from lemma. 首先, by monotonicity, 一个包含 E 的开集 U 的 μ_F 一定比 E 的大. 并且, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都可以找到一个 open covering 使得 measure sum $< \mu_F(E) + \epsilon$, by def.

Theorem 1.4 (inner regularity)

对于一个 Lebesgue-Stieltjes measure associated with F, 任意 $E \in \mathcal{M}_\mu$, 它的 measure 等于:

$$\mu_F(E) = \sup\{\mu_F(K) \mid K \text{ compact , and } K \subseteq E\} \tag{1.8}$$

Proof 首先证明 E bounded 的 case. 假设 E bdd.

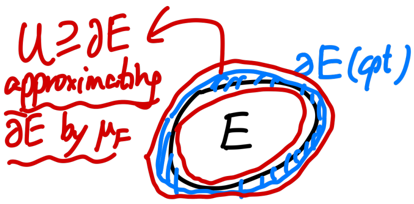
如果 E closed, 则 E cpt, trivially true.

如果 E open, 那么 E 的 bounadry 是 closed (cpt) 的, 从而 $\partial E \in \mathcal{M}_\mu$ 我们 let $\epsilon > 0$. 我们对 ∂E 使用 outer regularity, 可以取一个 open set U covering ∂E, 并且使得 $\mu_F(U) \leq \mu_F(E) + \epsilon$

此时取 $K := E \setminus U$, 我们发现这是一个 approximating E 的 compact set, 并且有:

$$E = K \sqcup (U \cap E)$$

从而:



$$\mu(E) = \mu(K) + \mu(U \cap E)$$
$$\Rightarrow \mu(K) = \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E))$$
$$\geq \mu(E) - \varepsilon$$

而对于 unbounded 的 case, 直接由

$$E = \bigsqcup_j (E \cap (j, j+1])$$

得到.

Remark outer / inner regularity 表示, $\mathbb{R}$ 上一个 (LS-measurable set 的) LS measure 就等于它内部用 cpt set 逼近它的 measure limit; 以及等于它外部用 open set 逼近它的 measure limit.

这个性质也可以推广到 $\mathbb{R}^n$ 上.

1.2.2 Lebesgue-Stieltjes measurable 的等价条件

Def 1.4 (G_δ, F_σ **sets**)

Topological space 中, 一个 **coutable intersection of open sets** 被称为一个 G_δ **set**, 一个 **countable union of closed sets** 被称为一个 F_σ **set**. ♣

Remark topological space 中, finite intersection of open sets 还是 open set, 但是 countable intersection 则未必; finite union of closed sets 还是 closed set, 但是 countable union 则未必.

G_δ sets 包括了所有的 open sets, 以及一部分扩充; F_σ sets 包括了所有的 closed sets, 以及一部分扩充.

Theorem 1.5 (Lebesgue-Stieltjes measurable 的等价条件)

TFAE:

i

$$E \in \mathcal{M}_\mu$$

ii 存在一个 G_δ set V 以及一个 measure zero set N_1 ($\mu_F(N_1) = 0$) 使得

$$E = V \setminus N_1$$

iii 存在一个 F_σ set H 以及一个 measure zero set N_2 ($\mu_F(N_2) = 0$) 使得

$$E = H \cup N_2$$

iv 存在一个 open set U 使得对于任意的 $\epsilon > 0$, 都有

$$\mu^*(U \setminus E) < \epsilon$$

♡

Proof 由 (ii) 和 (iii) 推得 (i) 是 trivial 的. 这是因为 LS measure 是 complete measure, 任意 null set 都是 measurable 的. 由 (i) 推 (ii) 和 (iii): follows from outer 与 inner regularity. 假设 E 是 LS-measurable 的, 我们直接取一个 inner seq of cpt subsets 以及一个 outer seq of open super sets, 使得

$$\mu_F(U_j) - \frac{1}{2^i} \le \mu_F(E) \le \mu_F(K_j) + \frac{1}{2^i} \tag{1.9}$$

于是就得到: $V := \bigcap_i U_i$, $H := \bigcup_i K_i$, 与 E 的差集都是一个 null set. 并且它们分别为 G_δ 和 F_σ sets.

Remark σ-algebra 和 topology 各自只 closed under finite 的交和并, 而 $< \mathcal{B}(\mathbb{R}) >$ 则 closed under ctbl 交和并, 从而所有的 G_δ 和 F_σ sets 都在其中. $\mathcal{M}_\mu$ 是一个比 $< \mathcal{B}(\mathbb{R}) >$ 更大的集合, 但是其实它其中的元素都可以用 G_δ 和 F_σ sets, 即 $< \mathcal{B}(\mathbb{R}) >$ 中的集合来逼近. 这是合理的, 因为 completion 就是把一些 subnull sets 加入到了 σ-algebra 里.

1.2.3 Lebesgue measure and its invariance properties

Def 1.5 (Lebesgue measure)

Lebesgue measure 即 Lebesgue-Stieltjes measure associated with $F(x) = x$. 我们用 $m := \mu_F$ 来表示它, 并用 $\mathfrak{L} := \mathcal{M}_m$ 来表示所有的 Lebesgue measurable sets.
从而 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue measure space 表示为:

$$(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$$

♣

Remark Lebesgue measure 是最 normal 的 Lebesgue-Stieltjes measure, 它 preserve intervals 的长度作为其 measure:

$$m((a, b]) = b - a$$

Theorem 1.6 ($\mathfrak{L}$ preserves translation and scaling)

if $E \in \mathfrak{L} \implies E + s, rE \in \mathfrak{L}\ \forall s, r \in \mathbb{R}$.
并且, $m(E + s) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$

♡

Proof 首先, 如果 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 那么 by hw 1, 我们证明了 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 closed under translation 和 scaling 的, 因而 $rE, E + s \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
我们 define on $\mathcal{A}_0 :=$ {finite union of h-intervals}:

$$m_s(E) := m(E + s)$$

$$m^r(E) := m(rE)$$

显然, 这两个函数 agree with $m, |r|m$. 由于 m 是 σ**-finite** 的, 从而 **by Hahn-Kolmogrov,** 它 **uniquely extend to** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. 因而, m_s 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上和 m 相等, m^r 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上和 $|r|m$ 相等. 并且, 我们知道 $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$ 是 **completion of** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, 因而 m_s 也同样 complete to m on $\mathfrak{L}$. (同理, m^r 也同样 complete to $|r|m$ on $\mathfrak{L}$)

Remark 我们只要证明两个 measure function 在 premeasure 上相等或称倍数关系, 就能证明它们在 induced (complete) measure 上相等.
此外, 有另一种证明方式. After we know m_s 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上和 m 相等, m^r 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上和 $|r|m$ 相等, 我们由 1.5 Lebesgue-Stieltjes measurable 的等价条件 可知: $\mathfrak{L}$ 上的集合一定是一个 Borel set 并上一个 null set, 由于 null set 的 measure 在经过 translation 和 scaling 后仍然是 0, 同样得证.