

Module 4 measurable functions and integration on $L^+(\mu)$

4.1 measurable function [Fol 2.1]

4.1.1 general measurable function

Def 4.1 ($(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -measurable function)

Let $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ be measurable spaces, 如果 $f : X \rightarrow Y$ 满足:

$$B \in \mathcal{N} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$$

, 则称 f 为一个 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -measurable function.



从一个 measurable space 到另一个 measurable space 的 function 被称为 measurable 的条件是: 被映射到可测集的集合只能是可测集.

这个定义和 topological space 上 continuous 的定义: 被映射到开集的只能是开集, 形式是完全一样的. 并且我们知道, topological space 和 measure space 也有很多相似之处. 因而连续性和可测性有一定的关系.

函数的可测性的定义是 with respect to 它们所在可测空间选定的 σ -algebra 的, 就像 topological spaces 之间函数的连续性的定义是 with respect to 它们所在的 topological spaces 选定的 topology.

这两个定义都表示的是: 性质不好的集合不会被映射到性质良好的集合. (但是性质良好的集合有可能被映射到性质不好的集合.)

Proposition 4.1 (composition preserves measurability)

如果 f 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -measurable 的, g 是 $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ -measurable 的, 那么 $g \circ f$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ -measurable 的.



Proof Trivial.

Lemma 4.1

Let $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ be measurable spaces, 如果 $\mathcal{N} = \langle \varepsilon \rangle$ for some $\varepsilon \subseteq Y$, 那么

$$f : X \rightarrow Y \text{ } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-measurable} \iff f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \quad \forall E \subseteq \varepsilon$$



Proof forward direction: trivial.

backward direction: Let

$$D := \{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$$

容易证明: $D \supseteq \varepsilon$, 并且 D 是一个 σ -algebra.

因而 $D \supseteq \varepsilon \implies \mathcal{N}$

Remark 如果我们知道 \mathcal{N} 是由某个子集生成出来的, 那么对于映射到这个 measurable space 的函数, 只要保证这个子集中的每个集合的 preimage 都是可测集就可以了, 可以 reduce 判断 f measurable 的条件.

同样类比 topological space, 如果 Y 的 topology 存在一个 basis, 那么判断 $f : X \rightarrow Y$ 连续, 只需要判断这个 basis 的 preimage 都是 open 的就好了.

Proposition 4.2

对于 topological space X, Y , let $f : X \rightarrow Y$

$$f \text{ continuous} \implies f \text{ 是 } (\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)) \text{ measurable 的.}$$



Remark topological spaces 之间, 连续函数一定是在它们的 Borel algebra 之间 measurable 的.

4.1.2 real and complex-valued measurable function**Def 4.2 ((real-valued) measurable functions)**

Let (X, \mathcal{A}) be a measurable space, 对于 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 如果它是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ -measurable 的, 我们直接简称它是 \mathcal{A} -measurable 的, 或者简称为 measurable 的.



Remark 实际上, 使用无穷作为值, 就是把原本不在定义域上的无穷跳跃点放到了定义域上, 些情况下, 仅仅是一种方便的记号, 但它们通常不会被视为真正的值.

但是等价地, 我们为了便利一般都会使用 extended real number system 来进行分析, 把这些无穷间断当作无穷的值来进行分析.

这样做法的合理性是, 对于零测集大小多个这样的无穷间断点, 在 Lebesgue 积分体系下这一行为并不会影响函数的 integrability 以及 integral 的值, 因而我们可以这么做. 这一点之后并不会造成困扰, 因为我们在之后定义可积空间时, 会避开有超过零测集大小多个无穷间断点的函数, 以及无法定义的行为.

我们容易验证:

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

以及, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 的 generating set 可以是所有的 $(a, \infty]$ 集合或者 $[-\infty, a)$ 集合. 所以一个 map to $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数是可测的, 当且仅当任意 $(a, \infty]$ 的 preimage 都可测.

Def 4.3 ((complex-valued) measurable functions)

如果 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 满足: $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ 都是 (real-valued) X -measurable 的, 那么也称 f 是 X -measurable 的, 或者直接说是 measurable 的.



Remark 任意 complex function f 都可以写为

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

这个定义其实等价于 f 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -measurable 的, 因为这个 statment 等价于 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ 都是 (real-valued) X -measurable 的, 这是因为


$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \equiv \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Def 4.4 (Lebesgue measurable functions, Borel measurable functions)

Naturally, 如果 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个 \mathcal{L} -measurable 的函数, 那么我们称 f 是 **Lebesgue measurable** 的. 同样地, 如果它是一个 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -measurable 的函数, 称 f 是 **Borel measurable** 的.




Proposition 4.3

在任何 \mathcal{M} -measurable function f 前 compose 一个 Borel measurable 的 function, 结果仍然是 \mathcal{M} -measurable 的, follows from composition preserves measurability. 

Proof Follows from def.

Example 4.1 $f^2, -3f, \frac{1}{|f|}$ ($f \neq 0$) 都仍然是 \mathcal{M} -measurable 的.

4.1.3 arithmetic and sequential preservation of measurable functions**Proposition 4.4 (addition and multiplication 保留 measurability)**

如果 f, g 是 \mathcal{M} -measurable function, 那么 $f + g, fg$ 也是. 

Proof Suffices to assume f, g is (extended) real-valued. Complex case follows trivially.

Suppose f, g 是 \mathcal{M} -measurable 的, 我们要证明: $f + g$ 是 \mathcal{M} -measurable 的, suffices to show: $(f + g)^{-1}(a, \infty] \in \mathcal{M}$ for any $a \in \mathbb{R}$.

我们 notice:

$$\{x \in X \mid f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \mid f(x) > r\} \cap \{x \mid g(x) > a - r\} \quad (4.1)$$

于是 finishes the proof.

对于 fg , 我们发现

$$fg = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$$

于是也 finishes the proof, following 前一个 proposition.

Lemma 4.2 (sequential behavior of real-valued measurable function)

如果 $\{f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个 seq of \mathcal{M} -measurable functions, 那么

•

$$g_1(x) := \sup_j f_j(x)$$

•

$$g_2(x) := \inf_j f_j(x)$$

•

$$g_3(x) := \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

•

$$g_4(x) := \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

都是 \mathcal{M} -measurable 的. 

Proof

$$g_1(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x).$$

由上确界的定义:

$$g_1(x) > a \iff \exists j \in \mathbb{N}, \text{ such that } f_j(x) > a.$$

因此,

$$\{x \mid g_1(x) > a\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \mid f_j(x) > a\}.$$

因而:

$$g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a, \infty])$$

由于 f_j 可测, 集合 $\{x \mid f_j(x) > a\}$ 是 \mathcal{M} -measurable, 而可测集合的可数并仍然是可测的, 因此 g_1 可测。

inf: dually.

limsup: 等于 inf of sup ($k \geq n$)

liminf: 等于 sup of inf ($k \geq n$)

Remark 从这个 proof 里笔者发现了这个惊人的事情。居然有

$$(\sup_j f_j)^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a, \infty])$$

但是仔细想想也是合理的. 因为 function seq 的 sup 函数能够 map 到的值大的元素肯定比其中任何一个 function f_n 更多. 并且其中存在一个 limit 关系.

以及得出了一个很重要的结论: **可测函数的 seq 的各种极限仍然是可测函数.**

Corollary 4.1

如果 $\{f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个 seq of \mathcal{M} -measurable functions, 且在任意 x 处极限都存在, 那么

$$f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

是 \mathcal{M} -measurable 的.



Proof directly follows from lemma. 因为 x 处极限如果存在, 那么 $\sup_j f_j(x) = \inf_j f_j(x)$

Corollary 4.2

f, g \mathcal{M} -measurable $\implies \max(f, g), \min(f, g)$ \mathcal{M} -measurable



Proof two element sequence, 剩余的用空集, 于是 follows from above.

Remark 于是我们知道, 当我们把 f 拆分成 $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \max(-f, 0)$, 我们有

$$f \text{ } \mathcal{M}\text{-measurable} \implies f^+, f^- \text{ } \mathcal{M}\text{-measurable}$$

并且由于 $f = f^+ - f^-$, 反向也成立. 并且 $|f| = f^+ + f^-$, 因而有:

$$f \text{ } \mathcal{M}\text{-measurable} \iff f^+, f^- \text{ } \mathcal{M}\text{-measurable} \iff |f| \text{ } \mathcal{M}\text{-measurable}$$

4.2 simple function and integration of nonnegative functions [Fol 2.1, finished; 2.2]

4.2.1 indicator and simple function

Def 4.5 (characteristic (indicator) function)

Given $E \subseteq X$, 我们定义:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , x \notin E \end{cases}$$



Lemma 4.3

如果 (X, \mathcal{M}) 是一个 measurable space, 那么一个 indicator function

$$\chi_E \text{ on } X \text{ 是 measurable 的} \iff E \in \mathcal{M}$$



indicator function measurable 当且仅当它 indicate 的集合是 measurable 的.

Def 4.6 (simple function)

一个 simple function on measurable space (X, \mathcal{A}) 是一个 \mathcal{A} -measurable function $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$, taking only finitely many values.

即: $\phi(X) = \{c_1, \dots, c_k\}$



Proposition 4.5 (使用 a sum of indicator functions of measurable sets 来定义 simple function)

对于 simple function $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ s.t. $\phi(X) = \{c_1, \dots, c_n\}$, 我们也可以定义它为:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$$

其中, $E_j = \phi^{-1}(\{c_j\})$. 我们称之为: the **standard representation of simple ϕ** .



这是因为, 单点集在 $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ 上是 measurable 的, 由于 ϕ measurable, 我们得到 $E_j \in \mathcal{M}$. **Remark** 对于 simple function

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$$

一定有

$$\bigsqcup_{j=1}^n E_j = X$$

其中通常有一个 E_j 上 ϕ 的值是 0.

Lemma 4.4

如果 $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ 是 simple functions, 那么

- $\phi + \psi$
- $\phi\psi$

- $|\phi|$
- $k\phi \forall k \in \mathbb{C}$

都是 simple functions.

特别地, 如果 $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 $\max(\phi, \psi), \min(\phi, \psi)$ 也是 simple functions.



Proof trivial.

4.2.2 measurable function is a limit of simple functions

Theorem 4.1 (approximating a nonneg measurable function by simple function)

任意的 measurable $f : X \rightarrow [0, \infty]$ 都是 **pointwise limit** of an **increasing sequence of simple functions** $\{\phi_n : X \rightarrow [0, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$.



Proof 这个构造看起来有点复杂但是其实非常直观.

对于 $n \in \mathbb{N}$, 我们都 index $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$

然后对每个 k 取:

$$E_n^k := f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

以及:

$$F_n := f^{-1}((2^n, \infty])$$

即, 我们把 $(0, 2^n]$ 这一部分值域切成了 2^{2n} 份, 再把 $(2^n, \infty]$ 这一部分值域单独列成一份.

这 $2^{2n} + 1$ 份值域的切片, 我们对每一份所对应的 function graph, 都取它对应的 Preimage 上的 indicator function 乘以 $\frac{k}{2^n}$, 这段值域的最小值的 constant 函数, 于是一定会得到一个 well approximation:

$$\phi_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k \frac{1}{2^n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}$$

易得,

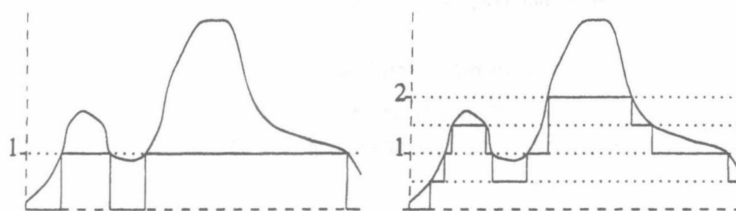
$$\phi_n \leq \phi_{n+1} \leq f$$

for all n . 并且在 $X \setminus F_n = \{x \mid f(x) \leq 2^n\}$ 上我们有:

$$0 \leq f - \phi_n \leq \frac{1}{2^n}$$

随着 n 增大, 最终这个近似会覆盖整个 image, (除非具有非零测数量的无穷间断点, 那样的话最后结果也是无穷), 并且值域的划分越来越精细, 最后会得到:

- $\phi_n \rightarrow f$ pointwisely
- 在 f bounded 的定义域 $\{x \mid f(x) < \infty\}$ 上, $\phi_n \rightarrow f$ uniformly.



Remark 我们在构造 simple function 的时候这样用到 measurability: 这里的每个 ϕ_n 是 simple function, 是由于 f measurable, 以至于每个 E_n^k, F_n 作为 interval 的 preimage, 都是 measurable sets.

Corollary 4.3 (approximating a complex-valued measurable function by simple function)

对于任意的 measurable $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, 都存在 a seq of simple functions

$$0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$$

使得

- $\phi_n \rightarrow f$ pointwisely
- $\phi_n \rightarrow f$ uniformly on $\{x \mid |f(x)| < \infty\}$



Proof 我们可以把 f 拆为 $\text{Im } f, \text{Re } f$, 然后再把它们分别拆为 $\text{Im } f^+ - \text{Im } f^-$, 以及 $\text{Re } f^+ - \text{Re } f^-$. 得到四个 real-valued nonng functions.

4.2.3 integration of non-neg functions

Def 4.7 (L^+ space and integration on it)

给定一个 measure space (X, \mathcal{M}, μ) 我们定义:

$$L^+(\mu) := \{\text{measurable functions } f : X \rightarrow [0, \infty]\}$$

对于所有的 **simple functions** $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \in L^+(\mu)$, 即所有非负的 simple functions, 我们定义 **the integral of ϕ with respect to μ** by:

$$\int \phi d\mu (= \int_X \phi d\mu) := \sum_{i=1}^n a_j \mu(E_j)$$

对于任意的 $f \in L^+(\mu)$, 我们定义 **the integral of f with respect to μ** by:

$$\int f d\mu (= \int_X f d\mu) := \sup \left\{ \int \phi d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simple} \right\}$$



Remark 因而对于 general 的非负可测函数, 我们通过 4.1 得知, 我们可以用 simple function 来近似它. 从而, 我们使用 simple function 的积分的极限来定义 general measurable function 的积分.

而 simple function 的积分, 即等于它下方的面积. 因而我们发现, 这个积分的定义和 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 上 Riemann 积分有很大的相似之处, 不同在于一个竖切定义域一个横切值域.

之后我们也会证明, 在 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 上, 所有 Riemann 可积的函数也 Lebesgue 可积, 并且得到的结果相同.

这一积分的定义是对 Riemann 积分的推广.

Remark measure theory 中的积分理论是把从 \mathbb{R}^n 出发的函数推广到了从抽象的测度空间出发的函数; 而还有其他的积分理论, 比如微分形式上的积分则是把实值函数的积分推广到了 oriented smooth manifolds 上, 不仅可以积分 scalars 还可以积分向量场. 这些积分理论的共同点是对 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 上的函数的积分是 coincide 的.

笔者感觉积分理论就是在一个抽象空间上, 通过一个抽象的密度函数 (被积函数) 以及体积指标 (measure function), 得到一个抽象质量. 由于这个理念本身是从 \mathbb{R}^n 上 generalize 的, 因而各种不同的积分理论在 \mathbb{R}^n 上的积分总是 coincide 的

Def 4.8 (integration on a subset)

对非负 **simple functions** $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \in L^+(\mu)$, 我们定义 **the integral of ϕ on $A \in \mathcal{M}$ with respect to μ** by:

$$\int_A \phi d\mu := \int \phi \chi_A d\mu$$

对于 general 的 $f \in L^+(\mu)$, 我们也从而定义:

$$\int_A f d\mu := \sup \left\{ \int_A \phi d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simple} \right\}$$



Remark

$$\int_A \phi d\mu := \int \phi \chi_A d\mu = \sum_j a_j \chi_{A \cap E_j}$$

Proposition 4.6 (integral of simple functions 的性质)

Let ϕ, ψ be simple functions in $L^+(\mu)$, 有:

- **homogeneity:** 对于任意非负 c , 有 $\int c\phi = c \int \phi$
- **linearity:** $\int(\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$
- **monotonicity:** $\phi \leq \psi \implies \int \phi \leq \int \psi$
- **induced measure:** $A \mapsto \int_A \phi d\mu$ 是一个 \mathcal{M} 上的 measure.



Proof homogeneity trivial .

linearity: Let

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}, \psi = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{F_j}$$

则有:

$$E_j = \bigsqcup_k (E_j \cap F_k), F_k = \bigsqcup_j (E_j \cap F_k)$$

for each j, k . 从而有

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$

Monotonicity: trivial.

induced measure: 只需要证明 countable additivity, 于是我们让 A be the union of a disjoint seq in \mathcal{M} , 有:

$$\int_A \phi = \sum_j a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} a_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \phi$$

Remark 本身, 我们已经基于一个 measure 作为 "体积密度", 来定义一个 simple function 按照这个体积密度得到的积分, 而它在每个可测集上的积分又可以定义另一个 measure;

这个 measure 表示 "某个集合和 E_1, \dots, E_n 的交集在这个体积密度以及 simple function 放缩下有多大".

那么对于 general 的 $f \in L^+(\mu)$, 有刚才的四条性质成立吗? 显然, **monotonicity** 和 **homogeneity** 是成立的, 但是我们会发现, 很难证明

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \int (f + g) d\mu$$

\leq 是容易证明的, 但是 \geq 有点困难. 为了证明 \geq 这个方向, 我们需要下面这个重要定理:

4.2.4 MCT

Theorem 4.2 (monotone convergence theorem)

Let $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a seq in $L^+(\mu)$, 并且有 $f_n \leq f_{n+1}$ for each n .

我们 define:

$$f := \lim_n f_n \quad (= \sup_n f_n)$$

, 则一定有

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$



Proof 首先 Note 几个事情: 1. 这个极限函数 f 是 **well-defined** 的 (可能 ∞), by **numerical sequence** 的 **monotone bounded convergence theorem**.

2. 同样地, 由于 $\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f$, 这个 $\lim \int f_n$ 也是存在的.

3. 并且, f 也是一个可测函数, 因为 by 上个 lecture 的定理: 可测函数序列的极限也是可测函数.

现在进行证明: By monotonicity of integral,

$$\lim \int f_n \leq \int f$$

是 natural 的. 因而只需要证明另一方向.

By def, $\int f = \sup\{\int \phi \mid \phi \leq f\}$ where ϕ is simple. 因而 it **suffices to show**: 对于任意 **simple** $\phi \leq f$, 都有 $\lim \int f_n \geq \int \phi$.

我们 fix 一个 $0 \leq \phi \leq f$. WTS:

$$\lim_n \int f_n \geq \int \phi$$

要证明 $\lim \int f_n \geq \int \phi$, 我们再把它转化成证明:

$$\forall \alpha \in (0, 1) \quad \lim_n \int f_n \geq \alpha \int \phi$$

我们取

$$E_n := \{x \mid f_n(x) \geq \alpha \phi\} = f^{-1}([\alpha \phi, \infty]) \in \mathcal{M}$$

容易发现, $E_n \subseteq E_{n+1}$ for each n . 并且 Claim: $\bigcup_n E_n = X$. (这就是为什么要做取 α 这个意义不明的行为) 这是因为 $\alpha < 1$, 并且 f_n converge pointwisely to f , by measurable function 的 limit behavior. 而由于 **simple function** ϕ 是 **bounded** 的, 从而 f_n 会 **uniformly** 向上接近 (以至于超过) ϕ . 取 α 是为了保证,

一定存在一个 n 使得 $E_n = X$

于是我们有:

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n} \geq \int \alpha \phi \chi_{E_n} = \alpha \int_{E_n} \phi$$

我们此处又可以用到一条冷门的性质: 由于 $E \mapsto \int_E \phi$ 是一个 **measure on (X, \mathcal{A}) , by continuous from below**, 有:

$$\lim_n \int_{E_n} \phi = \int \phi$$

从而有

$$\lim_n \int f_n \geq \alpha \int \phi$$

finishing the proof.

Remark 这是一个非常重要的定理. 它表示了非负可测函数的极限的积分等于积分的极限, 可以把取极限和积分这两个操作进行换序.

以下为一个应用 MCT 得到的结论.

Example 4.2 取

$$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\text{counting}})$$

于是

$$L^+(\mu) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]\}$$

是所有的从自然数到 reals 的函数. (因为我们取了 power set 作为 σ -algebra)

注意到任何一个这样的函数都可以被

$$\phi_n := \sum_{j=1}^n f(j) \mu(\{j\}) = \sum_{j=1}^n f(j)$$

来逼近. 从而

$$\int f = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \in [0, \infty]$$

如果取一个从下逼近 f 的可测函数序列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 那么 by MCT, 我们总有:

$$\sum_1^{\infty} f_n(j) \nearrow \sum_1^{\infty} f(j)$$

4.2.5 (countable) linearity of integral

Corollary 4.4

$$f, g \in L^+(\mu) \implies \int (f + g) = \int f + \int g$$



Proof 使用 approximation by simple functions 以及 MCT. 取

$$\phi_n \nearrow f, \quad \psi_n \nearrow g$$

, 从而

$$\phi_n + \psi_n \nearrow f + g$$

, 从而我们有

$$\int (f + g) \stackrel{MCT}{=} \lim_n \int (\phi_n + \psi_n)$$

从而由 simple function 的 Linearity 得到:

$$\int (f + g) = \lim_n \int \phi_n + \lim_n \int \psi_n$$

并且由于

$$\int \phi_n \nearrow \int f, \int \psi_n \nearrow \int g$$

我们得到:

$$\int (f + g) \geq \int f + \int g$$

另一方向 trivial.

Remark 由此可见,

$f \mapsto \int f$ 是 \mathbb{R} -linear 的映射.

4.2.6 Tonelli for sum and integrals

Corollary 4.5 (Tonelli for sum and integrals)

for $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $L^+(\mu)$, 有:

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i$$



Proof Apply MCT to

$$g_n = \sum_{i=1}^n f_i$$

可得证.

Remark 这是 linearity of integral 的 countable version.

由此可见 MCT 的用处很大.

4.3 properties of integration on $L^+(\mu)$ [Fol 2.2, finished]

4.3.1 Fatou's Lemma

Theorem 4.3 (Fatou's Lemma)

令 (f_n) be a seq of functions in $L^+(\mu)$, then

$$\liminf_n \int f_n \geq \int \liminf_n f_n$$



Proof Set

$$g_n := \inf_{m \geq n} f_m$$

于是

$$g_n \nearrow \liminf_n f_n$$

于是 by MCT, we have:

$$\lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = \int \liminf_n f_n$$

By def, 我们有 $g_n \leq f_n \ \forall n$, 于是 by monotonicity, $\int g_n \leq \int f_n$. 因而

$$\liminf_n \int f_n \geq \liminf_n \int g_n = \lim_n \int g_n = \int \liminf_n f_n$$

Remark 对于 increasing 的从而有 limit 的可测 (f_n) , 我们可以使用 MCT.

但是对于任意的可测 (f_n) , 我们无法使用 MCT, 不过有弱化的版本 Fatou's Lemma. 它表示下极限的积分 小于等于 积分的下极限.

这是一个符合直觉的事情, 因为取函数的 pointwise 极限是一个很容易极端的事情.

积分的极限是一个 numerical seq 的极限, 比较 robust. 而函数的逐点极限是一个比较不稳定的事情, 在对函数逐点极限的过程中, 它的 "质量" 会存在一个比较大的损失, 因为其中可能包含了 uncountably many 个点的函数值的逐点极限的累积, 而积分的极限只是单个点的逐点极限. 因而大小关系很显然.

Example 4.3 取 $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$, 考虑 $L^+(m)$ 上的函数, 即非负 Lebesgue 可测函数.

下面有几个非常经典的 Fatou's Lemma 的例子:

1. **escape to hat:**

$$f_n = \chi_{(n, n+1)}$$

f_n 在 \mathbb{R} 上平移

2. **escape to width:**

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{(0, n)}$$

f_n 逐渐变得平坦

3. **escape to height:**

$$f_n = n \chi_{(0, \frac{1}{n})}$$

f_n 逐渐变成一根针.

这三个例子中都有 $f_n \rightarrow 0$ pointwisely. 因而

$$\int \lim f_n = 0$$

, 而

$$\lim \int f_n = 1$$

, 因为对于所有 f_n 都有 $\int f_n = 1$

4.3.2 Chebyshev's inequality with corollaries

Lemma 4.5 (Chebyshev's inequality)

对于 measure space (X, \mathcal{M}, μ) , 如果 $f \in L^+(\mu)$ 并且 $c > 0$, 那么

$$\mu\{f \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int f$$



Proof Let $E := \mu\{f \geq c\}$

$$\int f \geq \int f \chi_E \geq \int c \chi_E = c \int \chi_E = c \mu(E)$$

Remark 一个可测集的测度, 就等于 constant 1 在它上面的积分, by definition.

这是一个简单而常用的结论.

Proposition 4.7 (非负函数积分为 0 等价于几乎处处为 0)

令 $f \in L^+(\mu)$, 有:

$$\int f = 0 \iff f = 0 \text{ a.e. (即只在一个零测集上非 0)}$$



Proof forward direction: directly follows from Chebyshev: set $A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$, 对于任意 n 都有 $\mu(A_n) \leq n \int f = 0$. 从而 by ctn from below, > 0 处构成零测集.

backward direction: 对于 simple function, trivial by 积分的定义; 对于 general f , 通过 limit 得到 (它下方的所有 simple functions 也 a.e. 为 0 从而积分为 0).

Corollary 4.6 (几乎处处相等的非负函数积分相等)

Let $f, g \in L^+(\mu)$ 且 $f = g$ a.e., 则有

$$\int f = \int g$$



Proof Set $D := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, 则 $\mu(D) = 0$ by def

$$\int f = \int_D f + \int_{D^c} f = 0 + \int_{D^c} g = \int g$$

Corollary 4.7 (liminf version of MCT)

suppose $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个 seq of functions in $L^+(\mu)$, 且 $f_n \rightarrow f \in L^+(\mu)$, 则:

$$\liminf_n \int f_n \geq \int f$$



Proof 这是一个条件稍微弱化的 MCT: 把 $f_n \nearrow f$ 的条件改成了 $f_n \rightarrow f$ a.e., 得到的结论也稍弱化.

modify f_n and f on a null set (thus without changing the integral) 后, follows directly from **Fatou's lemma**,

Theorem 4.4 (积分收敛 \implies 发散点集零测, 以及 support σ -finite)

如果 $f \in L^+(\mu)$ 且 $\int f < \infty$, 则有:

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$$

并且

$$\{x \mid f(x) > 0\}$$

is σ -finite



Proof 直接 follows from Chebyshev. 取

$$A_t := \{x \mid f(x) \geq t\}$$

for $t > 0$.

于是:

$$\{x \in X \mid f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

By Chebyshev, each A_n 都有: $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int f$, 从而 by continuous from above 可得这个交集的 measure 为 0.

又有:

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$$

其中, each set has measure $\leq \int f \leq \infty$. By def, 这个集合 σ -finite.