Lec 1 outer measure 与 completion of a measurable space

1.1 complete measure space and outer measure [Fol 1.3, finished; 1.4]

Def 1.1 (nul set, subnull set, almost everywhere)

对于 measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$

1. 我们称 $A \in \mathcal{M}$ 为一个 **null set**, 如果 $\mu(A) = 0$;
2. 我们称 $B \subseteq \mathcal{M}$ 为一个 **subnull set**, 如果存在某个 null set A containing it.
3. 我们称一个 statement about X 是 **almost everywhere (a.e.)** 的, 如果这个 statement 除了在某个 null set 上之外, 在 X 上处处成立.

♣

Def 1.2 (complete measure space)

我们称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个 complete measure space, 如果它其中的任意 subnull set 都是 null set. (即它 measurable)

♣

Remark 我们知道, 根据 measure 的 monotonicity, subnull set 的 measure, 如果存在, 一定是 $\leq$ 它所在的 null set 的, 即一定 $= 0$. 所以 complete measure space 的实际意思是: 这个 measure space 里, 任意 null set 的所有子集都是 measurable 的, 即所有足够小的集合都在这个 σ-algebra 里.

Example 1.1 一个 not complete 的 measure space 的例子:

$$X = \{1, 2\}, \mathcal{M} = \emptyset, X, \mu(\forall) = 0.$$

这个例子中, $\{1\}, \{2\}$ 这两个集合不是 measurable 的, 但是却是 nullset (全集) 的子集.

Theorem 1.1 (every measure space can be completed)

Suppose $(X, \mathcal{M}, \mu)$ is a measure space.

Let

$$\mathcal{N} := \{\text{all null sets in } \mathcal{M}\}$$

Claim:

$$\overline{M} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \text{ for some } N \in \mathcal{N}\}$$

is a σ-algebra, 并且在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上存在一个 unique 的 extension $\overline{\mu}$ of μ.

♡

Proof 这一部分的 proof 以及 remark 在 hw2. 这里, $\overline{M}$ 称为 **completion of $\mathcal{M}$ with respect to μ**, 以及 $\overline{\mu}$ 称为 **completion of μ.**

1.1.1 outer measure

Def 1.3 (outer measure)

An outer measure on X is a function $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ such that

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. monotone ($A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$)
3. countable subadditive ($\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$)

♣

Remark 我们对比 measure 和 outer measure 的定义: measure 的条件比 outer measure 强在:

1. measure 是定义在一个严格的 σ-algebra 上的, 而 outer measure 则是定义在整个幂集上的.
2. measure 要求 disjoint countable additivity, outer measure 并不要求

在这两个条件的缩减下, 我们规定 outer measure 具有 monotonicity 和 countable subadditivity. 注意: measure 本身也有这个性质, 这是 measure 的 countable additivity 的推论.

outer measure 的意义在于, 我们的 measure 只定义在 σ-algebra 上, 而我们想要给每个子集都赋予一个近似于测度的东西.

1.1.2 induce outer measure out of a ”elementary length function”

Theorem 1.2 (construct outer measure out of an ”elementary length function”)

另 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 为一个包含 $\varnothing, X$ 的集合, 并定义 $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty)$ 为一个满足 $\rho(\varnothing) = 0$ 的函数, 则

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) \mid E_i \in \mathcal{E} \text{ for each i and } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}$$

is an outer measure.

♡

Proof

1. 取所有 $E_j = \varnothing$, 得到 $\mu^*(\varnothing) = 0$
2. monotonicity 显然, 因为如果 $A \subseteq B$, 那么 A 取 inf 的这个集合是包含于 B 的, 因而取到的 inf 是小于等于的.
3. 证明 ctbl subadditivity, 我们使用经典的 $\epsilon/2^i$ argument. 这个 statement 直观上是显然的, 因为对一个 seq of sets, 每一个里面都有一个 seq of covering, 那么这个 seq of seq of covering 总体也是这个 seq union 的一个 covering. 不过我们不能这么说, 因为这里有一个 inf 操作的换序. 所以我们令 $\epsilon > 0$, 对于每个 A_i 的 covering $(E_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$, 我们令 $\sum_k \rho(E_{i,k}) \leq \mu^*(A_i) + \epsilon/2^i$, 最后可以得到 $\mu^*(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu^*(A_i)$. 由于 ϵ arbitrary, 得证.

Example 1.2 我们取 $\mathcal{E}$ 为 $\mathbb{R}$ 上所有的 intervals, 并取 ρ 为 interval 的 length, 就得到了一个外测度. (也就是 Lebesgue outer measure)

1.2 μ^*-measurability and Carathéodory's Theorem [Fol 1.4]

1.2.1 μ^*-measurable

Def 1.4 (μ^*-measurable)

Given outer measure μ^*, 我们称 $A \subseteq X$ 是 μ^*-measurable 的, if:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

♣

Remark countable subadditivity 蕴含的信息是: 如果我们把一个集合 divide 成几部分, **其 outer measure 有可能 increase.** 而 μ^*-measurable 的含义是: 任何一个其他集合, 分割为和 E 重合以及和 E 的两部分之后, 其 measure 都不会增大.

Note: by subadditivity, must have $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, 而 μ^*-measurable 的集合, 则有 equality 总是成立.

同时注意: 这个行为对于 complement 是对称的.

Remark outer measure 是对于整个 power set 中每一个集合都赋予的, 并且其性质 ctbl subadditivity 严格弱于 countable additivity. 我们自然想到: 是否有一个 power set 的子集, 其不仅是一个 σ-algebra, 并且其上满足 countable additivity? 如果存在, 那么我们就从 outer measure induce 出了 measure.

再加上之前的用随意的 length function 来 induce outer measure 的方法, 我们就可以通过一个随意的 length function $\to$ outer measre $\to$ measure. (eg: 从 box length induce 出 Legesgue outer measure, 再 induce 出 Lebesgue measure).

而实际上这个想法是正确的. 只要把 μ^* 的范围限制在所有 μ^*-measurable sets 上, 就形成了 σ-algebra, 并且其 restriction 是一个 measure, 甚至是一个 complete measure.

1.2.2 Carathéodory's Theorem

Theorem 1.3

对于任意的 outer measure μ^*,

$$\mathcal{M} := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable sets}\}$$

is a σ-algebra.

并且, $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ **is a complete measure.**

♡

Proof 我们首先证明这个 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-algebra

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$ by def.
2. $\mathcal{M}$ closed under complement, by def of μ^*-measurablity. (它对于 complement 是对称的.)
3. 为证明 $\mathcal{M}$ closed under countable union, 我们首先 prove it for two sets. 假设 $A, B \in \mathcal{M}$, 且 disjoint. Let $E \subseteq X$. 我们已知

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \tag{1.1}$$

我们 **WTS:** $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$

我们对于 $E \cap A, E \cap A^c$ 可以得到:

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \tag{1.2}$$

$$\mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \tag{1.3}$$

By $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$, 可以得到:

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \tag{1.4}$$

结合以上四个 equations 可以得到

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B^c)) \tag{1.5}$$

又 $\leq$ by countable subadditivity 成立, 我们得证 closed under two union (从而 inductively closed under any finite union, $\mathcal{M}$ 因而是一个 algebra).

Remark (Note: 这里我会想: 证明了这个 statement for any union of two sets 不就是证明了它对 any union 都成立吗? 实则不然, 因为 set union 的从属关系并不是可以从对任意 n 成立推广到对无穷成立, 因为这里的无穷是一个真实存在的 sequence, 而我们可以从" 任意 n 成立推广到对无穷成立" 的是比较数值大小, 因为 infinite series sum 的定义就是 limit, 而 set union 并没有 limit. 所以这里不能够直接得证.)

(Continuing the proof:) 现在我们再把这个 closed under finite union 推广到 closed under countable union, 以映证 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-algebra. 注意到 **STS (suffices to show): $\mathcal{M}$ closed under countable disjoint union**. 因为任意不 disjoint 的两个集合都可以拆分成三个 disjoint 的集合.

我们令 (A_i) 为一个 $\mathcal{M}$ 中的 disjoint sequence, 并定义 $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$, 我们由上一步的结论知道, $B_n \in \mathcal{M}$ for all n. Define $B := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, Let $E \subseteq X$, WTS: $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$.

考虑 $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$, 因为 inductively 可得到:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \tag{1.6}$$

从而:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \tag{1.7}$$

by monotonicity ($\mu^*(E \cap B_n^c) \geq \mu^*(E \cap B^c)$), 这里是一个 infinite sum, 并且 true for every n, 因而可以推广到 infinity, 得到

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty (E \cap A_i)) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E) \tag{1.8}$$

This finishes the proof of $\mathcal{M}$ being a σ-algebra. 我们同时发现, $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是一个 **complete measure** on $\mathcal{M}$ 是一个 trivial fact after the proof, 因为 taking $B = E$, 可以得到

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i) \tag{1.9}$$

并且 by monotonicity, 对于任意的 $\mu^*(A) = 0$, 任取 $E \subseteq X$, 都有

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E) \tag{1.10}$$

因而

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

得到 $A \in \mathcal{M}$. 从而得证这是一个 complete measure.

Remark 证明 Carathéodory's Theorem 的 punchline 在于: 我们令 $(A_i) \in \mathcal{M}$ be a sequence, B_n be its partial union for n terms, 可以得到

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$$

, 因为 inductively 可得到:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \tag{1.11}$$

这个 statement 对于 $\mathcal{M}$ 是 σ-algebra 以及 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是 measure 的证明都很重要. 我们在 outer measure 的定义中, 只声明了 countable subadditivity, 而我们需要证明的是 countable diskjoint additivity, 也就是需要把不等式变成一个等式.
为此我们看到 μ^*-measurable 的定义 (Carathéodory condition) 中的等号, 并从中找到这个等式关系: **通过 disjoint set sequence 上 inductively 对于前一项使用 Carathéodory condition, 得到 disjoint additivity.** (笔者的感觉是 Carathéodory condition 的直观看似不明显, 但是如果把一个 disjoint union 自身作为 E, 并把自身的某项作为 A, 就非常明显, 表示的是 disjoint measure sum 就是 measure of disjoint union.)

1.3 premeasure and Hahn-Kolmogrov extension Theorem [Fol 1.4, finished]

我们发现: 有些子集簇上的 "length" 很明显, 并且也符合 measure 的定义, 但是这个子集簇却并不构成一个 σ-algebra. 比如:
Example 1.3 $\{$all half-open, half-closed intervals$\} \subseteq \mathbb{R}$ 上, 以 interval 的 length 作为 measure, 很显然符合 measure function 的定义, 但是 $\{$all half-open, half-closed intervals$\} \subseteq \mathbb{R}$ 并不是一个 σ-algebra, 因为它可以通过 ctbl union 出 open interval, 并不在这个子集簇中. 不过, 这是一个 algebra.

因此, 我们想要一个方法来 **extend a "measure" function on an algebra, to a measure on a σ-algebra.**

Def 1.5 (premeasure)

给定 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个 **algebra** $\mathcal{A}_0$, 我们称 $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, +\infty]$ 为一个 premeasure, if

1. $\mu_0(\varnothing) = 0$
2. μ_0 ctbl disjoint additive in $\mathcal{A}_0$

♣

Remark premeasure 就是定义在 algebra instead of σ-algebra 上的 measure. 显然, 通过和 measure 相同的方式可证明, premeasure 在 $\mathcal{A}_0$ 上是 **monotone 以及 ctbl subadditive 的.**

1.3.1 induce outer measure out of a premeasure: preserving μ_0 on $\mathcal{A}_0$

Proposition 1.1

Any premeasure can induce an outer measure:

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}_0, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} \tag{1.12}$$

并且, we have:

$$\mu^*|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0 \tag{1.13}$$

并且 **every set in $\mathcal{A}_0$ is μ^*-measurable.**

Proof 这个 **outer measure** 的 **construction directly follows from** 1.2.

Proof that μ^* restricted to $\mathcal{A}_0$ is μ_0: 令 $E \in \mathcal{A}_0$, 假设 $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 我们令 $B_n := E \cap (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, 即把 covering intersecting E 变成 disjoint covering (B_n), 从而由 μ_0 的 ctbl disjoint additivity 可得, 这一个新 covering 的 measure sum $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) := \mu_0(E)$. 并且由于 $\mathcal{A}_0$ 是一个 algebra, 这些 B_n 也在 $\mathcal{A}_0$ 里面, 从而它满足 monotonicty, then $\mu_0(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$

Proof that every set in $\mathcal{A}_0$ is μ^*-measurable: Fix $A \in \mathcal{A}_0$, 我们取任意 $E \subseteq X$. Let $\epsilon > 0$, by def of the outer measure, 存在一个 seq $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$, 使得 $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. 有 disjoint additivity of μ_0 可得, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i \cap A^c)$. 从而 $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, 得证. (实际上这是个 trivial argument, 通过 ϵ argument 来严格证明.)

Remark 这一 simple proposition 表明的是, μ_0 induce 出的 outer measure 在 $\mathcal{A}_0$ 上 **presearve μ_0 的 measure 与 measurability.**

1.3.2 Hahn-Kolmogrov Theorem

Def 1.6 (σ-finite measure)

Let $(X, \mathcal{M}, \mu)$ be a measure space.

如果 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 是 finite 的.

如果存在一个 sequence (E_i) in $\mathcal{M}$ 使得 $\bigcup_i E_i = X$ 并且每个 $\mu(E_i) < \infty$, 则称 μ 是 σ-finite 的.

Remark 一个 finite measure 说明 $\mathcal{M}$ 中的所有集合的 measure 都 finite.

Theorem 1.4 (Hahn-Kolmogrov Theorem)

给定一个 premeasure μ_0 on algebra $\mathcal{M}_0$ of X, 以及其 induced outer measure $\mu*$, 我们令

$$\mathcal{M} :=< \mathcal{M}_0 >$$

表示 σ-algebra generated by the algebra $\mathcal{M}_0$.

并令

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$$

then we have:

1. $(X, \mathcal{M}_0, \mu_0)$ extends to $(X, \mathcal{M}, \mu)$
   即: $\mu|_{\mathcal{M}_0} = \mu_0$
2. $\mu|_{\mathcal{M}}$ 是 **the largest extension of μ_0 to $\mathcal{M}$** (即: 对于任意其他的 $\mathcal{M}$ 上的 measure ν that extends μ_0 to $\mathcal{M}$, 都有 $\nu(E) \leq \mu(E)$ for all $E \in \mathcal{M}$);
   并且 **if μ_0 is σ-finite**, 则 μ 是 **the unique extension** of μ_0 to $\mathcal{M}$.

Proof **Proof of $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ extends to $(X, \mathcal{M}, \mu)$:**

这个 Statement directly follows from 1.3(Carathéodory's Theorem) 以及上一个 proposition 1.1.

1. 我们首先用 μ_0 induce 出 μ^*, 再 restrict μ^* to $\mathcal{M}^* := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable sets}\}$, 得到一个 σ-algebra $\mathcal{M}^*$. 注意此时: 由上一个 proposition 1.1 可得 $\mathcal{M}_0$ 中所有集合都是 μ^*-measurable 的, thus $M_0 \subseteq \mathcal{M}^*$, 由于 $\mathcal{M}^*$ 是一个 σ-algebra, 由 **??** 可得: $\mathcal{M} :=< \mathcal{M}_0 >\subseteq \mathcal{M}^*$.
2. 由 Carathéodory's Theorem 可以得到: $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ 是一个 measure, 从而 $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 也是一个 measure(等于把 $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ 限制在了一个更小的 sub-σ-algebra 上).
(Note: this is a trivial fact that if M^* is a σ-algebra and $M \subset M^*$is also a σ-algebra, then $\mu|_M$ is a measure if given that μ is a σ-algebra on M^*)

Proof of μ being the largest extension of μ_0 to $\mathcal{M}$: 假设 ν 是一个 $\mathcal{M}$ 上的 σ-algebra s.t. $\nu|_{\mathcal{M}_0} = \mu_0$.
Let $E \subseteq \mathcal{M}$. (WTS: $\nu(E) \leq \mu(E)$, 即 $\nu(E) \leq \mu^*(E)$.)
由外测度 μ^* 的定义, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在一列集合 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_0$ 满足

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

由于 ν 在 $\mathcal{A}_0$ 上和 μ_0 一致，即

$$\nu(A_i) = \mu_0(A_i) \quad \forall i,$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

利用 ν 的 additivity 和 monotoncity 得

$$\nu(E) \leq \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

由于 ϵ arbitrary, 得到

$$\nu(E) \leq \mu^*(E)$$

(证明思路: 在 $\mathcal{M}$ 上 μ 就等于 μ_0 induce 的外测度, 对于其他的 extended measure, 其作用在一个集合上的测度一定小于等于任意的 $\mathcal{M}_0$ covering 的 premeasure 和, 而我们可以通过控制这个 covering 的测度和与它的外测度的差距 (since inf), 从而使得这个测度小于等它的外测度加一个无限小的 ϵ, 从而得证.)

Proof of μ being the unique extension of μ_0 to $\mathcal{M}$, provided that μ_0 is σ-finite:
(recall μ_0 is σ-finite 即 $\mu_0(X) < \infty$) It remains to show that $\nu(E) \geq \mu^*(E)$.
Continuing 上一个 proof, we have:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \nu(E) + \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E)$$
$$\leq \nu(E) + \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E)$$

我们只要 controling $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \mu^*(E) = \epsilon$ 逼近 0, 即可得到反向的不等式关系.
(证明思路: 我们证明了 $\nu(E) \leq \mu^*(E)$ 之后, 注意到 covering set 和 E 之间的差集的 ν-measure 自然也小于等于这个差集的 μ^*-measure, which can approximate 0.)

Remark 1. 我们首先容易定义 X 上的一个 algebra $\mathcal{M}_0$ 和一个 algebra 上的 premeasure μ_0;

2. 然后用 inf of covering sum 来 induce 出一个 $\mathcal{P}(X)$ 上的 outer measure μ^*, 而后我们限制 μ^* 到 $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ (where $\mathcal{M}^*$ 表示所有的 μ^*-measurable sets), by Carathéodory's theorem 这就 induce 出了一个 complete measure.

3. 我们可以再取 $\mathcal{M}^*$ 的一个 sub σ-algebra $\mathcal{M} :=< \mathcal{M}_0 >$, 限制在这个集合上的 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 自然也是一个 measure, 并且是 $\mathcal{M}_0$ extend 到 $\mathcal{M}$ 上的 lartest measure. By Hahn-Kolmogrov Thm, 这个 measure 如果是 σ-finite 的则是 $\mathcal{M}_0$ extend 到 $\mathcal{M}$ 上的 unique measure.
(Notice: **自然地,** $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$ **是** $(X, \mathcal{M}, \mu^*|_{\mathcal{M}})$ **的一个 completion.**)