

## Module 5 integration of real and complex functions

### 5.1 integration of real and complex functions-I [Fol 2.3]

我们目前只定义了 non-negative  $\mathbb{R}$ -valued measurable function 的积分, 而我们想要完整地定义:  $\mathbb{R}$ -valued measurable function 的积分  $\int f \in \mathbb{R}$ , 以及  $\mathbb{C}$ -valued measurable function 的积分  $\int f \in \mathbb{C}$ .

recall: 对于任意  $\mathbb{R}$ -valued  $f$ ,

$$f = f^+ - f^-$$

因而我们希望 define:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

但是其中有一个 undefined 的问题: 我们要避免  $\infty - \infty$  这一类的问题. 因而我们无法对所有的可测函数进行积分, 而是定义 "integrable" 的可测函数.

#### Lemma 5.1

$$\begin{cases} \int f^+ < \infty \\ \int f^- < \infty \end{cases} \iff \int |f| < \infty$$



**Proof** trivial.

正负部分都可控, 肯定是当且仅当绝对值函数可控.

我们接下来将定义可积函数的空间是: 所有绝对值积分非无穷的函数. (怎么和预期不一样... 这样的话这个空间在积分运算下的值域就是  $\mathbb{R}$  而不是  $\overline{\mathbb{R}}$  了. 我期待的是为了避免无穷之间相减的 undefined behavior 只需要正负部分有一个积分非无穷就行了. 但是我们要求的是都不是无穷. 不过既然这么定义了肯定有其道理.)

#### 5.1.1 $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ and $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

##### Def 5.1 (real-valued integrable function)

Given measure space  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , measurable  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  被称为 **integrable** 的, 如果它满足

$$\int |f| < \infty$$

并定义其 integral 为:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$



##### Def 5.2 (complex-valued integrable function)

Further, 我们定义 measurable  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  是 **integrable** 的, 如果它同样满足:

$$\int |f| < \infty$$

注意到这个条件等价于  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  **integrable**, 因为

$$|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \leq 2|f|$$

我们定义其 integral 为:

$$\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$$



**Remark** 所以说, 实值函数的积分要计算两个, 复值函数的积分要计算四个. (好麻烦.)

#### Proposition 5.1

所有的 real-valued integrable functions 构成一个  $\mathbb{R}$ -vector space, 并且 integral 是一个 linear functional on it.

所有的 complex-valued integrable functions 构成一个  $\mathbb{C}$ -vector space, 并且 integral 是一个 linear functional on it.



**Proof** trivial.

下面我们可以定义这个 vector space 并在上面进行一定研究. 此处为一个 temporary 的记号:

#### Def 5.3 ( $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{R})$ 以及 $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ space)

给定 measure space  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  我们定义

$$\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{R}) := \{\text{all (extended) real-valued integrable functions on } X\}$$

以及

$$\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C}) := \{\text{all complex-valued integrable functions on } X\}$$



**Remark** 这基本接近我们最终的可积空间的定义了. 只需要再 quotient 掉所有的 a.e. 相等的函数就可以. 在此期间, 我们首先在这临时的空间上证明一些结论.

我们基本不使用  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{R})$ , 因为它是  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  的 subspace, 而且大部分结论基本都在更 general 的  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  上成立.

**Remark** 这个  $\mathbb{C}$ -vector space 的 dimension 是多少呢:

如果  $X$  是一个 finite set, 那么  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  的 dimension 是  $|X|$ , 因为  $e_i : x_j \mapsto \delta_{ij}$  是一个 basis; 同样的, 如果  $X$  countable, 那么  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  的 dimension 也是 countably infinite 的; 如果  $X$  uncountable, 那么  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  的 dimension 也是 uncountable 的.

比如,  $\tilde{L}(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{C})$  的 dimension 就是 uncountable 的.

#### Proposition 5.2

$\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  上,  $f \mapsto \int f$  为一个 linear functional.



因为积分是 linear 的, as we have proved.

#### Proposition 5.3

$$f \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C}) \implies \left| \int f \right| \leq \int |f|$$



**Proof** For real-valued case,

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \left| \int f^+ \right| + \left| \int f^- \right| = \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

For complex-valued case, Set

$$\alpha = \frac{\int f}{\left| \int f \right|}$$

于是有  $\alpha \in \mathbb{C}$  且  $|\alpha| = 1$ . **Note:** 一个绝对值为 1 的 **complex number** 的倒数是它的 **conjugate**. 因而:

$$\left| \int f \right| = \bar{\alpha} \int f = \int \bar{\alpha} f \in \mathbb{R}$$

从而

$$\left| \int f \right| = \int \bar{\alpha} f = \int \operatorname{Re}(\bar{\alpha} f) \leq \int |\operatorname{Re}(\bar{\alpha} f)| \leq \int |\bar{\alpha} f| = \int |f|$$

#### Def 5.4 (integrals restricted to a measurable set)

if  $f \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ ,  $E \in \mathcal{A}$  ( $\mu$  的  $\sigma$ -algebra), 我们 define:

$$\int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu$$



**Remark** 容易验证, restricted to a measurable set 的积分也是 linear 且 monotone 的.

#### Proposition 5.4 (可积函数几乎处处相等的等价条件)

if  $f, g \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ , 则 TFAE:

- $f = g$  a.e.
- $\int |f - g| = 0$
- $\int_E f = \int_E g$  for all  $E \in \mathcal{A}$



**Proof** (i)  $\iff$  (ii): by last time proposition.

(ii)  $\implies$  (iii): 因为

$$\left| \int_E f - \int_E g \right| = \left| \int (f - g) \chi_E \right| \leq \int |f - g| \chi_E \leq \int |f - g| = 0$$

(iii)  $\implies$  (ii): 令  $u := \operatorname{Re}(f - g)$ ,  $v := \operatorname{Im}(f - g)$ , 则

$$\int |f - g| = \int u^+ + \int u^- + i \int v^+ + i \int v^-$$

这四个积分都是正值. 容易发现如果  $u^+$  在一个 positive measure set  $E$  上非 0, 那么  $\int_E u^+ > 0$ , 那么  $\int |f - g| > 0$ . (其他三个积分同理.)

**Remark**  $\int |f - g| = 0$  是一个比  $\int f - g = 0$  更强的条件.  $\int f - g = 0$  可以是非零集有交错并且正负抵消, 而  $\int |f - g| = 0$  则表示 a.e. 相等.

**Remark** 有这个定理得: 我们可以 integrate  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  a.e. defined.

即:

$$f : E^c \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \mu(E) = 0$$

其中的一种情况是:

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{s.t.} \quad |f| < \infty \quad \text{a.e.}$$

并且我们发现, a.e. 相等的两个可积函数  $f, g \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  在任意可测集上的积分都相等. 于是这两个函数在  $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$  中的表现是相等的. 因而我们可以把 a.e. 相等的这种关系 quotient 掉, 简化这个空间:

### Def 5.5 ( $L^1(\mu)$ space)

我们定义  $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ , 或简称为  $L^1(\mu)$ , 为:

$$\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C}) / \sim$$

其中  $\sim$  表示一个 equivalent class:  $f \sim g$  if  $f = g$  a.e. (等价于  $\int |f - g| = 0$ )



$L^1(\mu)$  中的每个函数之间彼此至少都在一个正测度集上相互不同. 这减去了分析上考虑几乎处处相等的集合的顾虑, 对于处处相等的函数, 我们认为它们在  $L^1(\mu)$  上直接相等. 并且, 我们有:

$$f \mapsto \int f$$

在  $L^1(\mu)$  上是一个 well-defined function.

## 5.1.2 DCT

### Lemma 5.2

令  $(f_n)$  为 a seq of **a.e. defined measurable functions** on  $X$ , s.t.

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

**exists a.e.**

Claim:  **$f$  is measurable.**



**Remark** Measurability is well preserved by taking limit, 并且更改一个零测集上函数的 definedness 不会改变这个 behavior. (这是一个很宽的条件了)

### Theorem 5.1 (dominated convergence theorem)

Let  $(f_n)$  be a seq of functions in  $L^1(\mu)$ , s.t.

- $f_n \rightarrow f$  a.e.
- 存在  $g \in L^1(\mu)$  s.t.  $|f_n| \leq g$  a.e. for all  $n$ .

Claim:  $f \in L^1(\mu)$  并且

$$\int f = \lim_n \int f_n$$



**Proof** 首先由于  $f_n \rightarrow f$  a.e., by lemma 可以得到  $f$  是 measurable 的. 并且

$$|f_n| \leq |g| \text{ a.e. } \implies |f| \leq |g| \text{ a.e.}$$

于是

$$\int |f| \leq \int |g| < \infty$$

即  $f \in L^1$ . (从而  $|f|$  至多在一个 measure zero set 上无穷).

并且  $g(x) \pm f_n(x) \geq 0$  a.e. 这一点很重要, 因为从而我们可以对  $g + f_n, g - f_n$  使用 Fatou's Lemma:

$$\int g + \int f = \int (g + f) = \int (g + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n) \quad (5.1)$$

$$= \int \lim_{n \rightarrow \infty} (g + f_n) \quad (5.2)$$

$$\stackrel{\text{by Fatou}}{\leq} \liminf_n \int (g + f_n) \quad (5.3)$$

$$= \int g + \liminf_n \int f_n \quad (5.4)$$

从而 (由于  $\int g < \infty$ )

$$\int f \leq \liminf_n \int f_n$$

以及 similarly get:

$$\int g - \int f \stackrel{\text{by Fatou}}{\leq} \liminf_n \int (g - f_n) = \int g - \limsup_n \int f_n$$

从而:

$$\int f \geq \limsup_n \int f_n$$

(这里注意, negate 一个 numerical seq 后  $\liminf$  变  $\limsup$ . 由此可见 Fatou's Lemma 其实是很强大的, 只需要对  $\int g + \int f$  和  $\int g - \int f$  各用一次就可以得到:)

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

**Remark** DCT 是 MCT 在  $L^1$  上的推广. MCT 只作用于非负的可测函数, 并且要求序列递增. 而 DCT 则作用于更加广泛的情况.

DCT 增加的要求是存在一个  $L^1$  的 (a.e.) bound function, 以及极限 a.e. 存在于 extended  $\mathbb{R}$ . 这两个要求都是合理的, 一个控制了函数的上下浮动程度, 一个控制了序列的收敛性.

而进一步, 我们可以把 "存在  $g \in L^1$  s.t.  $|f_n| \leq |g|$  a.e. for all  $n$ ." 这一条件放宽到: 存在一个 seq  $(g_n)$  以及  $g$  in  $L^1$ , 使得

- $|f_n| \leq g_n$
- $g_n \rightarrow g$  a.e.
- $\int g_n \rightarrow \int g$

Proof 在 hw 5.

**Example 5.1** Suppose  $u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  is Lebesgue measurable.

考虑这一 seq of function:  $(u^n)$ .

容易发现  $u^n \rightarrow \chi_{\{u=1\}}$  p.w. 我们可以用  $g = 1$  作为 bound function. 从而得到:

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int_{\{u=1\}} 1 = m(\{u=1\})$$

**Example 5.2** compute

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}$$

令  $f_n(x) := \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}$ , 有:  $f_n(x) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  for  $x \in (0, 1]$ ;

并且考虑  $g = 1$ , 作为 bound.

因而有  $I = 0$

## 5.2 integration of real and complex functions-II [Fol 2.3]

### 5.2.1 corollaries of DCT

以下为 DCT 的 corollaries:

### 5.2.2 Fubini for series and integral

#### Corollary 5.1 (Fubini for series and integral)

对于  $L^1(\mu)$  中的 sequence  $(f_n)$ , 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{a.e.} F \in L^1(\mu)$$

并且

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int F = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$



**Proof** Recall **Tonelli for sum and integrals**: 对于  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^+(\mu)$ , 有:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

(又是经典 Fubini 补充 Tonelli) 这个定理是 Tonelli for sum and integrals 在  $L^1$  上的推广.

我们 set

$$F_n := \sum_{i=1}^n f_i \quad G := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

By Tonelli for sum and integrals, 有:

$$\int G = \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|$$

由条件知道,  $\int G < \infty$ , 因而  $G \in L^1(\mu)$ . 所以  $G$  可以作为  $F_n$  的 DCT bound:

$$\int |F| \leq \int G = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|$$

因而 by DCT::

$$\int F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int f_i = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

**Remark** Fubini's for sum and integrals : 对于一个 seq of 可积函数, 如果它们的绝对积分和收敛, 那么它们的 infinite sum 函数也是可积的, 并且可以交换积分和极限次序.

其实显然. 因为绝对积分和肯定 by tri ineq 是大于等于和的积分的, 绝对积分和能作为一个 bound function.

## 5.2.3 a function that is measurable in one var and ctn/diffble in another

## Corollary 5.2

令  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a measure space.

如果  $f: X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  满足  $f(\cdot, t) \in L^1(\mu)$  for all  $t \in [a, b]$ , 令

$$F(t) := \int f(x, t) d\mu(x)$$

则有:

1. 如果  $t \mapsto f(x, t)$  对于任意  $x$  都连续, 并且存在一个  $g \in L^1(\mu)$  使得  $|f(t, x)| \leq g(x)$  for all  $t, x$ , 那么  $F$  也是 **ctn** 的.
2. 如果  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  对于任意  $x, t$  都存在, 并且存在一个  $g \in L^1(\mu)$  使得  $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$  for all  $t, x$ , 那么  $F$  是 **differentiable** 的, 并且

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$



**Proof** 这一证明并不困难.

For part(1), STS:  $t_n \rightarrow t \implies F(t_n) \rightarrow F(t)$

Apply DCT with  $f_n(x) = f(x, t_n)$ ,  $f(x) = f(x, t)$ .

For part(2), Suppose  $t_n \rightarrow t$ .

Apply DCT to

$$h_n(x) := \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

由可导得连续得  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  measurable.

并且 by MVT,

$$|h_n(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$$

从而我们也用  $g$  bound 住了  $h_n(x)$ . **Apply DCT:**

$$F'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

**Remark** 由 DCT, 我们不仅可以交换积分和求极限的次序, 还可以在足够的条件下交换多变量的求导和积分的次序. 这一点是值得注意的, 因为 **DCT 描述的 sequential behavior** 可以应用到证明函数 **continuous** 和 **derivative** 存在. 使用 sequential definition.

如: 如果一个多变量函数对于  $x$  是 measurable 的, 并且满足对于  $t$  的 partial derivative 处处符合 DCT 条件. 那么我们可以调换它对于  $x$  积分和对于  $t$  求导的顺序.

看起来很雾但是我们看一个例子 (此为一个反例):

**Example 5.3** 是否有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}_{>0}} e^{-tx} dm(x) \stackrel{???}{=} \int_{\mathbb{R}_{>0}} -xe^{-tx} dm(x) = -\frac{1}{t^2}$$

Here

$$f(t, x) = e^{-tx}, \quad t > 0, x > 0$$

因而

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \right| = x e^{-tx}, \quad t > 0, x > 0$$

尝试找到它的 dominating  $g(x)$ : 这个函数在  $t \rightarrow 0$  处的上极限是  $g(x, t) = x$ , 但是这个  $g$  却不是一个  $L^1$  函数 (在半轴上积分为  $\infty$ ). 从而它不可以这么交换积分和求导顺序. 但是如果把  $t$  的范围限制在  $t \geq a \in \mathbb{R}_+$  而不是  $t > 0$ , 我们就可以交换这个积分和求导顺序, 因为此时可以设定

$$g(x, t) = x e^{-ax}$$

### 5.2.4 $L^1$ as a Banach space

**Theorem 5.2** ( $L^1(\mu)$  以 integral w.r.t.  $\mu$  作为 norm 是一个 normed VS)

在  $L^1(\mu)$  上, 我们 set

$$\|f\| := \int |f|$$

则  $(L^1(\mu), \|\cdot\|)$  为一个 **normed  $\mathbb{C}$ -vector space**. 即, 这是一个 **well-defined norm**.

**Proof** recall norm 的定义, 需要符合:

- Homogeneity:

$$\|af\| = |a| \cdot \|f\|$$

- triangle ineq:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

- nonnegativity:

$$\|f\| \geq 0, \quad = \text{iff } f = 0 \in L^1 \text{ (i.e. } f(x) = 0 \text{ a.e.)}$$

前两条是积分的 linearity 的下位推论. 后一条 by def.

**Corollary 5.3** ( $(L^1(\mu), \|\cdot\|)$  是一个 Banach space)

$(L^1(\mu), \|\cdot\|)$  的 induced metric space 是 complete 的. 即, every Cauchy seq converges.

(从而这是一个 **Banach space**.)

**Proof** 取一个 Cauchy seq  $(f_n)$  in  $L^1$ .

这里有一个值得 recall 的 proposition:

**Proposition 5.5**

在一个 metric space 中, 一个 Cauchy seq converges 当且仅当它存在一个 convergent 的 subsequence. ♠

证明很简单. 对于任意的  $\epsilon$ , 可以取  $\max(N, M)$ , 其中  $N$  为使得这个子序列所有元素距离  $x_* < \epsilon/2$  的下标,  $M$  为使得主序列所有元素两两之间距离  $< \epsilon/2$  的下标.

因而我们只需要证明存在一个 **subseq**  $(f_{n_j})$  s.t.  $f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f \in L^1$  即可.

已知 Cauchy, WTS:  $f_n$  收敛且极限在  $L^1$  中. 我们直觉: 用 Cauchy 条件构造  $1/\epsilon^2$  argument.

我们 pick 子下标  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  使得对于每个  $j$  都有

$$m, n \geq n_j \implies \|f_m - f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^j}$$



并 set

$$g_j := f_{n_j} - f_{n_{j-1}}, \quad g_1 = f_{n_1}$$

则有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |g_j| \leq 1 < \infty$$

从而 by Fubini's Thm for series and seqs, 存在:

$$f := \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j g_j = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_j} \in L^1 \quad \exists a.e.$$

同时有

$$\int |f - f_{n_j}| \leq \sum_{j+1}^{\infty} \int |g_j| \leq \frac{1}{2^j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

**Remark** 这里就发现了 Fubini for series and seq 的用处: 把求和与积分的换序从有限推广到无限求和上, 以绝对积分和有限为条件. 因而, **绝对积分和有限的 seq 是性质强大的.**

而我们可以运用这一点来发掘 function seq 的性质, 比如这里把一个 function seq 通过构造前后项差的方式, induce 出一个绝对积分和有限的 seq, 从而用这个 seq 的积分和反向证明原 seq 的性质.

### 5.2.5 density of simple function of $L^1(\mu)$

#### Theorem 5.3 (density of simple functions in $L^1(\mu)$ )

令  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为一个 measure space, 令  $f \in L^1(\mu)$ ,

对于任意  $\epsilon > 0$ , 都存在 simple  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^1(\mu)$ , 使得

$$\int |f - \phi| < \epsilon$$



**Proof** 这是显然的, by 积分的定义. 我么首先把  $f$  divide 为

$$f = u + iv, \quad u = u^+ - u^-, \quad v = v^+ - v^-$$

而后对这四个非负函数  $u^+, u^-, v^+, v^-$  分别使用 simple function seq approximation, 再使用 DCT:

$$\int \lim \phi_n = \int u^+ = \lim \int \phi_n$$

比方说  $(\phi_n)$  为从下逼近  $u^+$  的 simple function seq, 那么  $u^+$  是它的 dominating function, 同时也是极限. 那么对于任意的  $\epsilon > 0$  都存在一个  $n$  使得

$$\|u^+ - \phi_n\|_1 \leq \int u^+ - \int \phi_n < \epsilon$$

尤其是这一特殊情况:

5.2.6 density of step functions in  $L^1(m)$ **Theorem 5.4** (LS measure space 的  $L^1$  space 上的 density of step functions)

考虑  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m_s)$  where  $m_s$  为一个 Lebesgue-Stieljes measure on  $\mathbb{R}$ , let  $f \in L^1(\mu)$ , 对于任意  $\epsilon > 0$ , 都存在 step function  $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$ , 使得

$$\int (f - \phi) < \epsilon$$

where each  $I_j$  都是 open intervals.



**Proof** 和 general case 相似. 利用 the fact that 任意一个 Lebesgue mble function 都可以用 step function 来 approximate.

## 5.3 integration of real and complex functions-III [Fol 2.3, finished]

5.3.1 another dense subspace of  $L^1(m_s)$ :  $C_c(\mathbb{R})$ 

上一节课我们知道了: 所有的 simple functions 在  $L^1(\mu)$  中构成了一个 dense subspace. 尤其是特殊情况: 对于  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m_s)$ , 所有的 step functions 构成了一个 dense subspace of  $L^1(m_s)$ .

今天我们先介绍另一个特殊情况  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m_s)$  的  $L^1(m_s)$  的 另一个 dense subspace: 所有的 cpt supported continuous function.

也就是说, 任意的 Lebesgue intble function 都可以用 ctn function with compact supp 来近似. 一个可积函数可以是 supp 非常怪异的以及非常 unctn 的, 但是却可以用 ctn and cpt supp functions 来逼近, in  $L^1$  sense. 当然这是一种弱逼近. 函数可以差异很大.

**Def 5.6** ( $C_c(X)$ )

令  $X$  be a metric space, 我们定义:

$$C_c(X) := \{\text{all ctn functions } f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ with cpt supp}\}$$

**Theorem 5.5** ( $C_c(X) \subset L^1(\mu)$  是一个 dense linear subspace)

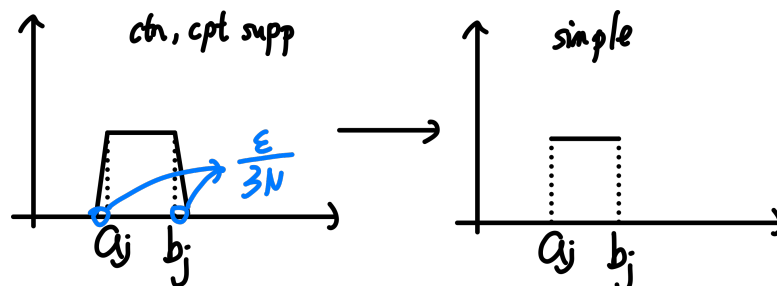
$C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mu_m)$  为一个 dense linear subspace.



**Proof** 对于  $f \in L^1(m_s)$ , let  $\epsilon > 0$ . 我们首先 pick 一个 step function 来 approximate  $f$ :

$$\phi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{I_j}, \quad \text{s.t. } \|f - \phi\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

空出来的  $\frac{\epsilon}{2}$ , 我们使用 ctn and cpt supp function  $f_j$  对每个  $\chi_{I_j}$  进行逼近, by:



从而  $\|\sum_j f_j - \phi\| < \frac{\epsilon}{2}$ , 因此  $\|\sum_j f_j - f\| < \frac{\epsilon}{2}$  by tri ineq. 得证.

### 5.3.2 Riemann v.s. Lebesgue integral

我们已经完成了一个任意的 measure space 上的 Lebesgue 积分的定义, 以及可积空间的定义.

Recall: Riemann integral 是对于  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的函数定义的, 经典定义为  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的函数.

现在我们比较对于  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的函数的 Riemann 和 Lebesgue 积分. 我们将会得出结论: **Riemann 积分是 Lebesgue 积分的特殊情况, 即, Riemann 可积的函数一定也 Lebesgue 可积, 并且积分值相同.** (对于  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的函数也一样, 之后将展开.)

Recall Riemann integral 的定义:

#### Def 5.7

对于  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bdd, 一个 **partition**  $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^n$  on  $[a, b]$  满足

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Define:

$$S_{\mathcal{P}}(f) := \sum_{j=1}^n \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f(t_j - t_{j-1})$$

$$s_{\mathcal{P}}(f) := \sum_{j=1}^n \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f(t_j - t_{j-1})$$

Define over all possible partition on  $[a, b]$ : **lower integral** and **upper integral**

$$\bar{I}(f) := \inf_{\mathcal{P} \text{ partition}} S_{\mathcal{P}}(f)$$

$$\underline{I}(f) := \sup_{\mathcal{P} \text{ partition}} s_{\mathcal{P}}(f)$$

注意到, 对于任意的  $f$ , 总是有

$$\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$$

我们称  $f$  是 **Riemann integrable** 的, if

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) := I(f)$$

这个  $I(f)$  称为  $f$  在  $[a, b]$  上的 Riemann integral.



### 5.3.3 Riemann intble $\implies$ Lebesgue intble

**Theorem 5.6 (Riemann integral 是 Lebesgue integral 的特殊情况)**

$$f \text{ Riemann integrable} \implies \begin{cases} f \in L^1([a, b], \mathcal{L}.m) \\ I(f) = \int_{[a, b]} f \, dm \end{cases}$$



**Proof** for (a): 对于给定 partition  $\mathcal{P}$ , 我们 set:

$$G_{\mathcal{P}} := \sum_j M_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}, \quad g_{\mathcal{P}} := \sum_j m_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}$$

从而有:

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \int G_{\mathcal{P}} dm, \quad s_{\mathcal{P}}(f) = \int g_{\mathcal{P}} dm$$

我们知道, refinement 能增加  $s_{\mathcal{P}}$ , 减小  $S_{\mathcal{P}}$  从而增加逼近精度, 这一点在 Lebesgue integral 中更加明显:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \implies g_{\mathcal{P}} \leq g_{\mathcal{P}'} \leq f \leq G_{\mathcal{P}'} \leq G_{\mathcal{P}} \quad (5.5)$$

$$\implies s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq I(f) \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} \quad (5.6)$$

由于  $f$  Riem integrable, 存在一个 **seq of partitions**  $(\mathcal{P}_n)$  使得  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ ,  $\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0$  (**mesh**), 并且

$$s_{\mathcal{P}_n}, S_{\mathcal{P}_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f)$$

因而 setting

$$g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\mathcal{P}_n}$$

为一个 increasing limit;

$$G := \lim_{n \rightarrow \infty} G_{\mathcal{P}_n}$$

为一个 decreasing limit; 由 mble seq 的 limit behavior 得  $g, G \in L^1(m)$  且  $g \leq f \leq G$  并且 by DCT:

$$\begin{aligned} \int g dm &= \lim_n \int g_{\mathcal{P}_n} = I(f) \\ \int G dm &= \lim_n \int G_{\mathcal{P}_n} = I(f) \end{aligned}$$

从而

$$g \leq f \leq G, \quad \text{and} \quad \int (G - g) dm = 0$$

因而

$$g = G \text{ a.e. } (\implies f \text{ a.e.})$$

因而

$$I(f) = \int f dm$$

(由于  $m$  complete,  $f$  是 Lebesgue mble 的.)

**Remark** 整体 intuitive. 对定义域的切分是对值域的切分的特殊情况.

### 5.3.4 Lebesgue's criterion for Riemann integrability

#### Theorem 5.7 (Lebesgue's characterization of Riemann integrability)

定义

$$D_f = \{x \text{ where } f \text{ is not ctn at}\}$$

则有

$$f \text{ Riemann intble} \iff m(D_f) = 0$$



**Proof** 在 395 中已经证明一次. 这里再回顾一次.

Backward direction: trivial.

Forward direction: assume  $f$  Riemann intble .

对于  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们 define:

$$H(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| \leq \delta} f(y), \quad h(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(y)$$

即  $f$  在  $x$  处的上下极限. 从而:

$$f \text{ ctn at } x \iff \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) \iff H(x) = h(x)$$

因而要证明  $m(D_f) = 0$ , STS:  $H(x) = h(x)$  a.e.

To prove this: 见 395.

## 5.4 modes of convergence [Fol 2.4, finished]

### 5.4.1 convergence family

对于  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , 我们目前有 4 种不同的 convergence.

2 general ones:

- **pointwise convergence**: 字面意思.
- **uniform convergence** (on a subset): 对于任意 error bound  $\epsilon$ , 存在同一个序号  $N$  可以  $\epsilon$ -bound 住这个集合里所有的  $x$  的函数值和 limit 函数值的 error.

2 in a measure space:

- **a.e. convergence**: ptwise convergence for a.e.  $x$ , 即 outside a null  $E$ .
- **convergence in  $L^1$** :  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$

我们 recall trivial relation:

$$\text{uni. conv} \implies \text{ptwise. conv} \implies \text{conv. a.e.}$$

但是我们不清楚  $L^1$ -convergence 和它们之间的关系.

我们看以下的 examples:

### 5.4.2 examples showing a.e. ptwise conv 和 $L^1$ conv 不能互推

**Example 5.4** on  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ , 以下  $(f_n)$ :

- **escape to width**

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{(0,n)}$$

$f_n \rightarrow 0$  uniformly 但  $\nrightarrow 0$  in  $L^1$

- **escape to hat:**

$$f_n = \chi_{(n,n+1)}$$

$f_n \rightarrow 0$  ptwisely 但并不 uniformly, 并且  $\nrightarrow 0$  in  $L^1$

- **escape to height:**

$$f_n = n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$$

$f_n \rightarrow 0$  a.e., 但是并不 ptwisely, 当然也并不 uniformly, 并且  $\not\rightarrow 0$  in  $L^1$

- **typewriter**: 我们把区间  $[0, 1]$  划分成  $2^k$  个等长子区间, 对于  $1 \leq n \leq 2^k$  令  $f_{k,n}(x)$  交替取 1, 其他取 0.

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

即, for given  $k$ ,  $f_n$  is the indicator function of the  $n$ -th dyadic interval.

$$\|f_{n,k}\|_1 = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$$

因而  $f_{n,k} \rightarrow 0$  in  $L^1$ , 但是  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f_{n,k}(x) \not\rightarrow 0$  ptwisely. (也不 a.e.) (这个例子, 在推广至  $L^p$  空间的时候, 也有  $\|f_{n,k}\|_p \rightarrow 0$ , 也可以说明  $L^p$  convergence 并不能推导 a.e. convergence, 除了  $L^\infty$  的例外.)

在这些例子中, 我们发现,  $L^1$ -convergence 和 uniform, ptwise, a.e. 这三个 modes of convergence 都互不推导. 对于 uniform convergence 和 ptwise convergence, 这是很合理的, 因为可以函数越来越宽和扁使得积分不变但是却 uni conv; 也可以函数积分收敛但是在一个零测集上反复跳跃.

并且我们进一步发现, 就算是 a.e. 收敛, 也和  $L^1$  收敛没有互推关系. 比如 ex (3), 这个函数只在 0 处不收敛至 0, 但是整体的积分却是 const 1.

我们 recall: 两个函数 a.e. 相等, 等价于它们的  $L^1$  distance 为 0. 但是它们作为函数列极限行为, 并不相干.

关于  $L^1$ -convergence 和 uniform, ptwise, a.e. convergence 的关系我们已经讨论完了.

接下来我们将关于  $L^1$ -convergence 这一条线, 引入一些新的 convergence modes, 在更大的 convergence family 中讨论这些 convergence 的关系.

### 5.4.3 3 new modes of convergence: fast $L^1$ -conv, conv measure and subseq a.e. conv

#### Def 5.8 (fast $L^1$ -convergence, convergence in measure, subseq a.e. convergence)

对于  $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{C}$ , 我们定义以下三种 convergence:

- **fast  $L^1$ -convergence**: if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n - f| < \infty$$

- **convergence in measure**: if

$$\mu(x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- **subseq a.e. convergence**: if 存在一个 subseq  $(f_{n_j})$  使得

$$f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f \text{ a.e.}$$



显然, **fast  $L^1$ -convergence**  $\implies$   $L^1$ -convergence;

我们接下来将说明, **fast  $L^1$ -convergence** 也  $\implies$  **a.e. convergence** (于是它同时作为 a.e. convergence 和  $L^1$ -convergence 的上位收敛, 作为这两条线路的上位交汇.)

而我们将说明:  $L^1$ -convergence 和 a.e. convergence 都  $\implies$  **subseq a.e. convergence**, 作为这两条线路的下位交汇.

以及,  $L^1$ -convergence  $\implies$  convergence in measure.

**Remark** 对于 convergence in measure, 还有一个可提及的定义是 **Cauchy in measure**: 对于任意  $\epsilon > 0$ ,

$$\mu(x : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$$

我们可以证明 (Folland 2.30)

$$\text{Cauchy in measure} \implies \text{convergent in measure}$$

但是反向并不成立. examples 中, **escape to width**, **escape to hat** 以及 **typewriter** 是 **convergent to 0 in measure** 的, 但不 **Cauchy in measure**;

这里和我们在 metric space 上 distance function 的定义中的 "convergent" 和 "Cauchy" 是不同的, 在以 **distance** 为收敛条件的意义上, **convergent** 是比 **Cauchy** 更强的性质.

以下的标记将在之后几个定理的证明中用到: 我们现在 define:

$$B_{n,k} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\}$$

这个集合表示对第  $n$ th term, error 控制在  $\frac{1}{k}$  以内的点.

从而我们可以用交并的形式来表示 ptwise 收敛点的集合:

$$\{x \mid f_n(x) \rightarrow f(x)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} B_{n,k}$$

Recall Chebyshev:

$$g \in L^1 \implies \mu(\{|g| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int |g|$$

**Proposition 5.6 (fast  $L^1$ -conv  $\implies$  a.e. conv.)**

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_n - f| < \infty \implies f_n \rightarrow f \text{ a.e.}$$

**Proof** 我们取

$$\{x \mid f_n(x) \rightarrow f(x)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} B_{n,k}$$

的 complement

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} B_{n,k}^c = \{f_n \not\rightarrow f\}$$

**By Cheb, for each  $n, k$  we have:**

$$\mu(B_{n,k}^c) \leq k \int |f_n - f|$$

因而由 fast  $L^1$ -convergence 的条件可得

$$\forall k \forall N, \quad \mu\left(\bigcup_{n \geq N} B_{n,k}^c\right) \leq k \sum_{n=N}^{\infty} \int |f_n - f| \quad (\rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty)$$

因而 by ctn from above,

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} B_{n,k}^c\right) = 0$$

因而

$$\mu(E) = 0$$

**Remark** 我们知道,  $L^1$ -convergence 和 a.e. convergence 互不能推, 因为这一个逐点的性质, 一个是整体的性质. 但是  $L^1$ -convergence 作为一个整体的性质又不够强大 (它允许用函数的纵深来换取宽度, 从而在收敛的情况下保持积分不变.). 然而, fast  $L^1$ -convergence 则是一个足够强大的整体性质. 因而它可以 imply a.e. convergence.

**Corollary 5.4** ( $L^1$ -convergence ( $\implies$  conv. in measure)  $\implies$  subseq a.e. conv. )

if  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ , then there exists subseq  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  s.t.  $f_{n_j} \rightarrow f$  a.e.

(即  $L^1$  convergence implies subseq a.e. convergence)



**Proof** 注意: 对于  $L^1$ -convergent 的 seq, 我们可以 pick 出一个 fast  $L^1$ -convergent 的 subseq.

Pick  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  s.t.

$$\int |f_{n_j} - f| \leq \frac{1}{j^n}$$

Then

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_{n_j} - f| < \infty$$

由刚才的 prop 得,  $f_{n_j} \rightarrow f$  a.e.

#### 5.4.4 a.u. conv.(并非 uni. conv. a.e.) 和 Egoroff's Theorem

##### Def 5.9

我们称  $f_n \rightarrow f$  almost uniformly (a.u.), 如果  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在  $E \subseteq A$  s.t.  $\mu(E) < \varepsilon$  并且  $f_n \rightarrow f$  uniformly on  $E^C$



**Remark** 和 a.e. convergence 的定义不同, a.u. convergence 并不能保证在一个零测集外都 uniform convergence, 但是它仍然 imply a.e. convergence.

也有更强的一种 convergence: uniform convergence a.e., 表示在一个零测集外都 uniform convergence, 其强度在 uni. conv. 和 a.u. conv. 中间. 但在这里, 对于我们即将介绍的 Egoroff's Theorem 而言不需要这么强的 convergence.

我们将在  $L^p$  space 的部分讨论 uniform convergence a.e. 这个 convergence mode, 并表示它等价于  $L^\infty$  convergence.

##### Theorem 5.8 (Egoroff's Theorem)

如果  $\mu$  是个 finite measure ( $\mu(X) < \infty$ ), 那么

$$f_n \rightarrow f \text{ a.e.} \iff f_n \rightarrow f \text{ a.u.}$$



**Proof** a.u.  $\implies$  a.e.: DIY (显然)

a.e.  $\implies$  a.u.: Fix  $\varepsilon > 0$ , 我们有

$$f_n \rightarrow f \text{ a.e.} \iff \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} B_{n,k}^c\right) = 0$$



因而

$$\forall k, \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} B_{n,k}^c\right) = 0$$

By Ctn from Above:

$$\forall k, \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq N} B_{n,k}\right) = 0$$

Then:

$$\forall k, \exists N_k \text{ s.t. } \mu\left(\bigcup_{n \geq N_k} B_{n,k}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Set

$$E := \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N_k} B_{n,k}^c$$

Then we have:

$$\begin{cases} \mu(E) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \\ f_n \rightarrow f \text{ unif. on } E^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N_k} B_{n,k} \end{cases}$$

**Remark** 在 Prob Theory 中很有用, 因为 prob space 是 finite measure space.

**Example 5.5**  $\mu = \infty$  时的反例: 考虑 escape to hat function  $f_n := \chi_{(n, n+1)}$  on  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ .

$f_n \rightarrow 0$  a.e. 但是并不 a.u., 因为  $\mu(X) = \infty$ .

### Theorem 5.9 (Lusin's Theorem)

If  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  是 Leb. mble 的, 那么  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在 compact  $K \subseteq [a, b]$  s.t.  $m(K^c) < \varepsilon$  并且  $f|_K$  ctn.



**Proof** 这里我们 restrict  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$  到  $[a, b]$ , 得到这个 subspace 是一个 finite ( $= b - a$ ) 的 measure space. 我们知道  $C_c([a, b]) \subseteq L^1(m)$  是 dense subset.

First assume  $f$  bounded, then  $f \in L^1(m)$ ,  $\int |f| < \infty$ .

Then:

$$\exists (f_n) \subseteq C_c([a, b]) \text{ s.t. } f_n \rightarrow f \text{ in } L^1$$

Pass to subseq:  $(f_{n_j}) \rightarrow f$  a.e.

Then by **Egorov**:

$$\exists F \subseteq [a, b] \text{ mble s.t. } \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

并且  $(f_{n_j}) \rightarrow f$  uniformly on  $F^c$ .

By inner regu: 存在  $K \subseteq [a, b]$  cpt s.t.  $K \subseteq F^c$  并且  $m(F^c \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$ , 从而  $m(K^c) < \varepsilon$  并且  $f_n$  conv unif. on  $K$ , so  $f$  ctn on  $K$ .

**Remark** 这个定理的证明中展示了 subseq a.e. convergence 的用处.

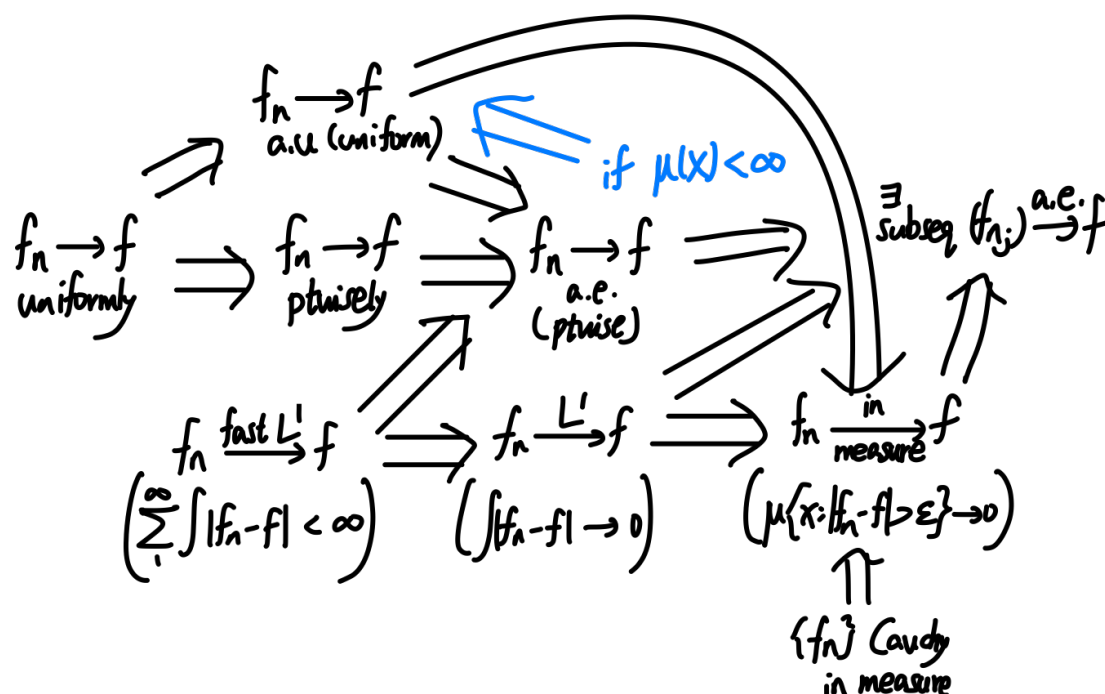
我们可以从一个  $L^1$ -convergent 的 seq 中 "蒸馏" 出一个 a.e. convergent 的 subseq, conv to 同一个函数.

并且如果把空间限制在 measure finite 的 subset 上, 还能获取到一个 a.u. convergent 的 seq.

a.u. convergent 的作用很大, 比如可以保留函数在一个比较大的空间上的 ctn 性质.

因而 subseq convergent 的性质可以 as good as convergent, a.u. 的性质可以 as good as uniform.

## 5.4.5 summary: convergence mode relations



一条线是函数值方面的收敛, 一条线是测度和积分方面的收敛, 第一次交汇是 fast  $L^1$  conv, 汇聚在 subseq a.e. conv.

**subseq a.e. conv.** 是最弱的 convergence, 这里所有的 convergence 都可以推到它.

这里可能还有其他的 convergence 关系. 但是我们不关心. 因为不太会用到它们的关系. **Remark** 那我们不禁想要问: 如果没有 fast  $L^1$  convergence, 但是还是想 show  $L^1$  convergence, 怎么办呢? 这个常用的 convergence 难道只能从定义来证明吗?

有以下两个方法:

- DCT. DCT 就是专门为了证明  $L^1$  convergence 定制的.

DCT 表明:

$$f_n \rightarrow f \text{ a.e.} + \text{dominating function} \implies f_n \rightarrow f \text{ in } L^1$$

- 如果作为底的 measure space 是 finite measure 的, 那么 uniform conv. a.e. (which is equiv to  $L^\infty$  conv.) 可以推出  $L^1$  convergence. (以及任意的  $L^p$  convergence).