Module 6 product measure and Fubini-Tonelli theorem

6.1 product space and product measure [Fol 1.2, finished; 2.5]

Goal: Given $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, construct $X = \prod X_i$, s.t.

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

So that we can do Fubini (iterated integration) like that in Riemann integral.

6.1.1 product σ-algebra

Def 6.1 (product σ-algebra)

Suppose $(X_i, \mathcal{A}_i)$ mble, $1 \le i \le n$, the product σ-algebra $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ on $X_1 \times \cdots \times X_n$ is the smallest σ-algebra s.t. the **coordinate map**

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_j$$

is measurable.

即 the σ-algebra generated by: $\{\pi_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$.

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n :=< \{\pi_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\} >$$

♣

我们容易发现:

Proposition 6.1

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n =< \{E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{A}_i \times \cdots \times \mathcal{A}_n\} >$$

♠

Proof By def 易得. (Prop 1.14 in book).

Remark 这里只考虑了有限情况, 但是无限的乃至于 ctblly 无限的相似. 取所有可能的 set product 作为 geneating 即可.

6.1.2 product Borel algebra ⊂ Borel algebra of the product space

Proposition 6.2

If $X_1, \cdots, X_n$ are metric spaces. Let $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ (with product metric), then:

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subseteq \mathcal{B}_X$$

and the equality holds if X_i separable $\forall i$.

♠

Proof

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \overset{\text{by prop}}{=} < \{U_1 \times \cdots \times U_n \text{ each open}\} > \subseteq \mathcal{B}_X$$

Now let $C_i \subseteq X_i$ dense, ctbl.

Set

$$\mathcal{E}_i := \{B_r(x) \mid x \in C_i \ , \ r \in \mathbb{Q}_{>0}\} \subseteq \mathcal{B}_{X_i}$$

Then: **every open set in $X_1 \times \cdots \times X_n$ is a ctbl union of products** $B_1 \times \cdots \times B_n$, each $B_1 \in \mathcal{E}_i$. Then we have:

$$B_X =< \{B_1 \times ... \times B_n\} >\subset \bigotimes_1^n B_{X_i}$$

Remark 显然. **有限 index** 情况下, 在 product topology 中, **product of open sets 仍然是 open set**, 但是 open sets 可以不止是 product of open sets 这些. 因而 $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subseteq \mathcal{B}_X$.

并且在 separable 的 topological space 上, 比如 $\mathbb{R}$, 我们有: $\mathbb{R}^n$ 中的任意 open set 都是 a ctbl union of open boxes. 于是 $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

Example 6.1

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Corollary 6.1

if $(X, \mathcal{A})$ is a mble space, then

$$f : X \to \mathbb{C} \ \ (\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})\text{-mble} \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \ \ \mathcal{A}\text{-mble}$$

Proof 略.

6.1.3 construction of product measure

下面我们构建 product measure: Let $(X_i\,, \mathcal{A}_i\,, \mu_i)$, $1 \leq i \leq n$ be mble spaces.

And let $X := X_1 \times ... \times X_n$, $\mathcal{A} := \mathcal{A}_i \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ Goal: 通过 Hahn-Kromolgrov 来构建 product measure on product mble space. Idea: Let

$$\mathcal{A}' := \{\text{all finite disjoint unions of rectangles (each measurable)} A_1 \times \cdots \times A_n\}$$

Step 1:

6.1.4 all finite disjoint unions of rectangles as an algebra

Proposition 6.3

$\mathcal{A}'$ is an algebra.

Proof The set $\mathcal{E} := \{\text{rectangles}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfies:

- $\varnothing \in \mathcal{E}$
- $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cap F \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E} \implies E^c$ is a finite disjoint union of recs (画图可知).

Step 2:

6.1.5 各维度 measure 的 product 作为 rectangle 的 measure, 从而定义 premeasure

Now define

$$\mu' : \mathcal{A}' \to [0, \infty]$$

as follows:

$$\mu'(\bigsqcup_{k=1}^{N} E_1^{(k)} \times \cdots \times E_n^{(k)}) = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i^{(k)})$$

Claim 2:

Proposition 6.4

(1) μ' is a well-defined premeasure on $\mathcal{A}'$.

(2) If each μ_i is σ-finite, so is μ'.

Proof Sketch: (2) DIY. (1) STS(check): if $E = E_1 \times \cdots E_n$ is a finite or ctbl union of rects $E^{(k)} = E_1^{(k)} \times \cdots \times E_n^{(k)}$, then

$$\prod_1^n \mu_i(E_i) = \sum_k \prod_1^n \mu_i(E_i^{(k)})$$

Use Tonelli for sums and integrals:

$$\prod_1^n \chi_{E_i}(x_i) = \chi_E(x_1, \cdots, x_n) \tag{6.1}$$

$$= \sum_k \chi_{E^{(k)}}(x_1, \cdots, x_n) \tag{6.2}$$

$$= \sum_k \prod_1^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \tag{6.3}$$

Integrate w.r.t. x_1:

$$\mu_1(E_1) \prod_{i=1}^n \chi_{E_i}(x_i) = \int \sum_k \prod_1^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \tag{6.4}$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \sum_k \int (\prod_1^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i)) d\mu_1(x_1) \tag{6.5}$$

$$= \sum_k \mu_1(E_1^{(k)}) \prod_{i=1}^n \chi_{E_i^{(k)}}(x_i) \tag{6.6}$$

And repeat for $i = 2, \cdots, n$.

6.1.6 HK extension of the premeasure as definition of product measure

Step 3: 现在已经有了 σ-finite 的 premeasure, 我们可以应用 HK Thm 构建出完整的 measure. Now use HK:

Corollary 6.2

$\exists$ measure $\mu := \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ on $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \mathcal{A}_n$ extending μ'.

(And if each μ_i are σ-finite, then product measure 也 σ-finite, 从而 μ 是 unique extension.)

由此, 我们从 $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ 的 measure 中构建出了它们的 product measure.

6.1.7 associativity of product σ-algebra and σ-finite product measure

Corollary 6.3 (assotiativity)

总有

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$$

并且, if μ_1, μ_2, μ_3 are σ-finite, then:

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$$

Proof DIY. 前者 play with def, 后者直接由 σ-finite 的 premeasure 的 HK extension unique 得到.

6.1.8 如何证明一个函数 product measurable

要证明一个函数是 product measurable 的, 只需要证明它对于每个 measurable rectangle 的 preimage 都是 measurable 的即可.

Lemma 6.1

Suppose $f : X \to Y \times Z$ is a function from a measurable space $(X, \mathcal{A})$ to a product measure space $(Y \times Z, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$.

Claim: If $f^{-1}(B_1 \times B_2) \in \mathcal{A}$ for each measurable rectangle $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, then f is an $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-measurable function.

Proof 因为 product σ-algebra 由所有的 measurable rectangles 生成.

Hw7 中有另一版的证明作为 lemma.

在 Hw7 中我们可以通过这个 lemma 得到一个结论: 如果 $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, 那么 E 的 diagonal 一定 $\in \mathcal{A}$.

对于特殊的函数, 比如两个 measurable function 的乘积, 其一定是 product measurable 的.

Lemma 6.2 (easier Fubini)

条件: $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 为 arbitrary measure space (不需要 σ-finite.), $f : X \to \mathbb{C}$, $g : Y \to \mathbb{C}$ 为 measurable functions.

结论:

$$h := fg \quad \text{is } (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\text{-measurable}$$

并且如果 f, g 是 L^1 的, 那么 $h \in L^1(\mu \times \nu)$ 并且

$$\int h \, d(\mu \times \nu) = \Big(\int f \, d\mu\Big)\Big(\int g \, d\nu\Big)$$

Proof in hw 8. 这个 statement 表示一个 $\mathcal{A}$-measurable 的函数和一个 $\mathcal{B}$-measurable 的函数的乘积是 $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$-measurable 的.

6.2 Tonelli's Thm [Fol 2.5]

我们将 focus on the case $n = 2$: $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, 考虑

$$(X \times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\times\nu)$$

从而, 它可以推广到任何 finite 个 measure space 的 product 上.

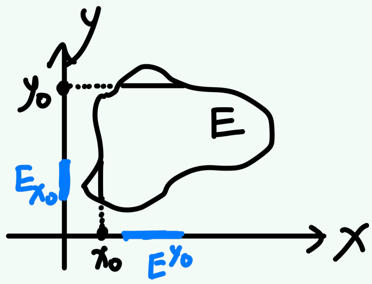
6.2.1 $E \subset X \times Y$ 的 section

Def 6.2 (x-section, y-section)

给定 product space 上的集合 $E \subset X \times Y$, 对于 $x \in X, y \in Y$, 我们定义:

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$$

$$E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in Y\}$$



给定从 product space 出发的函数 $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, 对于 $x \in X, y \in Y$, 我们定义:

$$f_x(y) := f^y(x) := f(x, y)$$

表示固定住一个变量, 另一个变量的变化. ♣

Example 6.2 对于任意的 $E \subset X \times Y$ 如果定义:

$$f := \chi_E$$

那么有:

$$f_x = \chi_{E_x}, \quad f^y = \chi_{E^y}$$

对于 **rectangle:** $E = A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, 有

$$E_x = \begin{cases} \varnothing, & x \notin A \\ B, & x \in A \end{cases}$$

Proposition 6.5

(a)

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies \begin{cases} E_x \in \mathcal{B}, & \forall x \in X \\ E^y \in \mathcal{A} & , \forall y \in Y \end{cases}$$

(b)

$$f \text{ is } \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\text{-measurable} \implies \begin{cases} f_x \text{ is } \mathcal{B}\text{-measurable} & \forall x \\ f^y \text{ is } \mathcal{A}\text{-measurable} & \forall y \end{cases}$$

Proof (a) Let

$$\mathcal{E} := \{E \subset X \times Y \mid E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X \quad \text{and} \quad E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y\}$$

Claim: $\mathcal{E}$ 包含了所有的 rectangles, 并且 $\mathcal{E}$ a σ-algebra.
容易证明这一点. 从而, 由 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 的定义 (为包含所有 rectangles 的最小 σ-algebra) 得 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, 从而 (a) 成立
并且由于 (check) $f_x^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_x$ (Similar for f_y), (a) $\implies$ (b).
Remark 这里三件需要记住的事情:

- **section 和取 preimage 可以交换顺序**
- 对于一个 product measurable set, 任意 **section 也 measurable**
- 对于一个 product measurable function, 任意 **section function 也 measurable**

Remark 记录一下这里的证明方法, 以前见的比较少. 这里**证明条件 A 推出条件 B** 的方法: **证明所有满足条件 B 的元素构成的集合 包含了 所有满足条件 A 得元素构成的集合.**
这一方法的好处在于: 可以运用所有满足条件 B 的元素构成的集合的整体性质, 比如是 σ-algebra 等.

Def 6.3 (monotone class)
Given a set X, a collection $C \subset \mathcal{P}(X)$ is called a monotone class, if it is closed under **countable increasing unions** and **countable decreasing intersections**

当然, 一个 σ-algebra 是一个 monotone class. monotone class 是一个比 σ-algebra 更弱的定义.

6.2.2 tool needed to show Tonelli: Monotone Class Lemma

Lemma 6.3 (monotone class lemma)
Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ be an algebra.
Define $\mathcal{C}$ 为包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 montone class.
Claim:

$$< \mathcal{A} >= \mathcal{C}$$

Proof $\mathcal{C} \subset < \mathcal{A} >$ is trivial.
$< \mathcal{A} > \subset \mathcal{C}$: STS $\mathcal{C}$ 是一个 σ-algebra. see p.66. 具体做法比较 tricky, 但是思路是先证明 $\mathcal{C}$ 是一个 algebra (这一部分较难. 我们对于 $E \in \mathcal{C}$, define $\mathcal{C}(E)$ 为 $\mathcal{C}$ 中所有和它的交和差也仍然在 $\mathcal{C}$ 中的 F 构成的集合, 并发现这个子集 $\mathcal{C}(E)$ 也同样是一个 monotone class. 从而 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$);

然后对于任意的 seq, 其 前 n 项的 finite union $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$seq 是一个 increasing seq, 其 limit 等于原 seq limit, 是属于 $\mathcal{C}$ 的.

Remark 即, 对于一个已经是 algebra 的集合, 它生成的 monotone class 等于它生成的 σ-algebra.

这个 lemma 的好处在于, **我们在证明了一个集合是 algebra 后, 证明它是一个 σ-algebra, 只需要证明它 closed under ctbl increasing union 和 decreasing interection 即可. 我们可以利用这种 set seq 的单调性.**

但是如果我们只知道 $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$, 没有 " 包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 monotone class" 这个条件怎么办? 那也没关系, 我们很自然得出

Corollary 6.4

Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ be an algebra, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ be a monotone class, 那么一定有

$$\mathcal{C} \supset \langle \mathcal{A} \rangle$$

因为 $\langle \mathcal{A} \rangle =$ " 包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 monotone class" $\subset \mathcal{C}$.

6.2.3 Tonelli for sets: integrating a section to get product measure

Theorem 6.1 (Tonelli for sets)

Let $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ be σ-**finite** measure spaces.

Take $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Then:

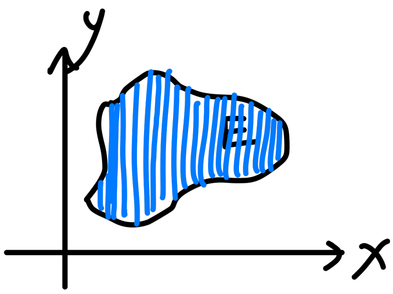
$$x \mapsto \nu(E_x), y \mapsto \mu(E_y) \text{ are } \textbf{measurable}$$

并且

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

Remark 这个定理说明的是: 在 σ-finite 的 measure spaces 构成的 product measure space 中, 任意 product measurable set E, 把 x 映射到 E 的 x-section 的 measure **(" 扫描" 这个集合在一个方向上的宽度变化) 的行为是可测的.**

并且, 我们可以把 E 的 measure 用 **"对每个 x, 在 Y 上取 E 的 x-section 的 measure, 并对这一行为在 X 上进行积分"** 来刻画. 这就把 product measure 拆分了开来. 其 following 是 Tonelli **"把 n 个 measure spaces 的 product 上的积分拆成 n 个积分"** 的强大定理.



Proof Define:

$$\mathcal{C} = \{E \subset X \times Y \mid x \mapsto \nu(E_x), y \mapsto \mu(E_y) \text{ are measurable } \forall (x, y) \in E \text{ and} \cdots (2)\}$$

Claim 1: $\mathcal{C}$ contains 所有的 rectangles. Proof of Claim 1: 考虑 $E = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, 即为一个 rectangle. 上一 lec 中, 我们 by def confirm: $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

那么对于任意的 $(x,y)\in E$, 我们有: $\nu(E_x)=\nu(B)$, 对于所有的 $(x,y)\notin E$, 则有 $\nu(E_x)=\varnothing$.
所以对于任意的 x, $\nu(E_x)=\chi_A(x)\nu(B)$, 同理 $\mu(E^y)=\chi_A(x)\mu(A)$.
由此得到 $x\mapsto\nu(E_x), y\mapsto\mu(E^y)$ 是 measurable 的, 并且

$$\mu\times\nu(E)=\mu(A)\times\nu(B)=\mu(A)\int\chi_B(y)\,d\nu(y)=\int\mu(E^y)\,d\nu(y)$$

同理, $\mu\times\nu(E)=\int\nu(E_x)\,d\mu(x)$. 从而得证. 从而, 对于任意 **union of finite disjoint rectangles,** 这个结论也成立, by additivity in definition. 因而 $\mathcal{C}$ 为一个 **algebra.**

Note: 由于 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 为包含所有 rectangles 的最小 σ-algebra, 我们只需要证明 $\mathcal{C}$ 为一个 **σ-algebra**, 那么它一定包含 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. 并且 by Monotone Class Lemma, **STS:** $\mathcal{C}$ 为一个 **monotone class.**

Claim 2: $\mathcal{C}$ 为一个 **monotone class.** 令 $\{E_n\}$ 为一个 increasing seq in $\mathcal{C}$, 定义其 union 为 $E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 并定义:

$$f_n(y):=\mu((E_n)^y)$$

根据 $\mathcal{C}$ 的 definition, 每个 f_n 都是 measurable 的, 并且我们容易证明:

$$f_n\nearrow f(y):=\mu((E)^y)\text{ ptwise.}$$

于是使用 MCT, 容易得到

$$\int\mu(E^y)\,d\nu(y)=\lim\int\mu((E_n)^y)\,d\nu(y)=\lim\mu\times\nu(E_n)\overset{\text{CFB}}{=}\mu\times\nu(E)$$

从而 $E\in\mathcal{C}$.
It remains to show: $\mathcal{C}$ closed under ctbl decreasing intersection. 不过这里我们涉及到一个 decreasing sequence 中间突然从 infinite measure 变为 finite measure 的问题, 所以我们从这里开始要分 μ,ν finite 和 not finite (but still σ-finite) 的两种情况讨论. finite measure 不用担心上述这一问题.
Case 1: μ,ν **finite**, 于是令 $\{E_n\}$ 为一个 decreasing seq in $\mathcal{C}$, 和 increasing 的情况 similar, 得到 $\mu((E_n)^y)=:f_n\searrow f(y):=\mu((E)^y)$ ptwise., 从而 by DCT (取 $\mu(X)$ 为 donimating function), 得到

$$\int\mu(E^y)\,d\nu(y)=\lim\int\mu((E_n)^y)\,d\nu(y)=\lim\mu\times\nu(E_n)\overset{\text{CFA}}{=}\mu\times\nu(E)$$

从而我们证明了在 μ,ν 为 finite measure 的情况下, $\mathcal{C}$ 为一个 monotone class, 从而为一个 σ-algebra, 从而 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\subset\mathcal{C}$.

Case 2: μ,ν **σ-finite measure**: 我们可以把 $X\times Y$ 写作 union of a seq of finite measure sets $\{X_i\times Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 从而也是 a union of increaasing seq of finite measure sets $\{X_j\times Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. (取 $X_j\times Y_j=\bigcup_{i=1}^{j}X_j\times Y_j$) 从而对于任意的 $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$,

$$E=\lim_{j\to\infty}(E\cap(X_j\times Y_j))$$

对于每个 $E\cap(X_j\times Y_j)$, 我们可以应用前一结论, 得到

$$\mu\times\nu(E\cap(X_j\times Y_j))=\int\chi_{Y_j}(y)\mu(E^y\cap X_j)\,d\nu(y)$$

从而应用 **MCT**, 得到

$$\mu\times\nu(E)=\int\mu(E^y)\,d\nu(y)$$

同理 $\mu\times\nu(E)=\int \mu(E_x)\,d\mu(x)$, 从而 $E\in\mathcal{C}$, 得证.

6.2.4 Tonelli's Theorem

Theorem 6.2 (Tonelli)

Let $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ be σ-finite measure spaces.
条件: 令 $f\in L^+(X\times Y)$,
结论:

$$g(x):=\int f(x,y)\,d\nu\ \in L^+(X)\quad h(y):=\int f(x,y)\,d\mu\ \in L^+(Y)$$

(显然) 并且

$$\int f\,d(\mu\times\nu)=\int\Big[\int f(x,y)\,d\nu(y)\Big]d\mu(x) \tag{6.7}$$
$$=\int\Big[\int f(x,y)\,d\mu(x)\Big]d\nu(y) \tag{6.8}$$

♡

Remark Tonelli for sets 表示了 product measure 的计算方式: 通过对 x-section 的 y measure, 在 $x\in X$ 上进行积分可得到. 这就把 product measure 拆成了单个 measure 与积分.
而 Tonelli's Theorem 表示**对一个非负 product measurable function 积分可以转化成对逐个 measure 积分.**
recall: 非负 measurable 函数的积分, 就是一个 seq of simple functions 的积分的 sup, 而 simple function 的积分, 就是**几个 measurable set 的 measure 的加权和**. 因而 Tonelli's Theorem 基本上 naturally follows from Tonelli for sets.

Proof 首先, 对于 f 是 **simple function 的 case, 直接 follows from Tonelli for sets.** (mentioned in remark.)
对于 general case: $f\in L^+(X\times Y)$, 令 $\{f_n\}$ 为一个 seq of simple functions ptwisely converging to f.
于是

$$\int g\,d\mu=\lim\int g_n\,d\mu=\lim\int f_n\,d(\mu\times\nu)=\int f\,d(\mu\times\nu)$$
$$\int h\,d\mu=\lim\int h_n\,d\mu=\lim\int f_n\,d(\mu\times\nu)=\int f\,d(\mu\times\nu)$$

by MCT.

6.3 Fubini's Theorem and Lebesgue integral in $\mathbb{R}^n$ [Fol 2.5, finished; 2.6]

recall Tonelli's Theorem: Given $f\in L^+(X\times Y)$, set $g(x):=\int f_x d\nu$, $h(y):=\int f^y d\mu$. Then $g\in L^+(X)$, $h\in L^+(Y)$, 以及有:

$$\int f\,d(\mu\times\nu)=\int g\,d\mu=\int h\,d\nu$$

展开后可写作:

$$\int f\,d(\mu\times\nu)=\iint f(x,y)\,d\nu(y)d\mu(x)=\iint f(x,y)\,d\mu(x)d\nu(y)$$

更加简洁可写作:

$$\int f\,d(\mu\times\nu)=\iint f\,d\nu d\mu=\iint f\,d\mu d\nu$$

Corollary 6.5

if $f \in L^1(X \times Y)$ and $f \geq 0$ then

- $g(x) < \infty$ for a.e. x
- $h(y) < \infty$ for a.e. y

Remark 在 product measure space 上 measurable 的可积函数, 在每个成分上, 都不能有过多的 infinity point.

Next: Fubini's Theorem.

Fubini's Theorem 是 Tonelli's Theorem 对 $\mathbb{C}$-valued 函数 (instead of $\mathbb{R}_{\geq 0}$-valued) 的推广. 但是其实证明很 trivial.

6.3.1 Fubini's Theorem

Theorem 6.3 (Fubini's Theorem)

条件: $f \in L^1(\mu \times \nu)$,

结论:

- $f_x \in L^1(\nu)$ for a.e. x, $f^y \in L^1(\mu)$ for a.e.
- The a.e. defined functions:
$$g(x) := \int f_x \, d\nu \in L^1(\mu), \quad h(x) := \int f^y \, d\nu \in L^1(\nu)$$
-
$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \int g \, d\mu = \int h \, d\nu \quad (= \iint f \, d\mu d\nu)$$

Proof $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, so WLOG can assume f is $\mathbb{R}$-valued.

又 $f = f^+ - f^-$, 直接 apply Tonellis's Thm 可得.

Remark Tonelli and Fubini's Theorem 不仅有用在可以拆分积分以进行计算, 而且有用在积分换序.

实际上, 根据它的条件可以发现, 积分可换序的条件是很宽裕的, 只要这个函数 f 在 L^+ 或者 L^1 space 中就可以了.

Example 6.3 求和换序的合理性:

考虑

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{counting})$$

if $a_{mn} \in \mathbb{C}$ for $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ and

$$\infty > \sum_{m,n} |a_{mn}| =: \sup_{F \subset \mathbb{N}^2 \text{finite}} \sum_{(m,n) \in F} |a_{m,n}|$$

Thm: 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\sum_m a_{mn}$ conv absly to some $b_n \in \mathbb{C}$;

同样, 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, $\sum_n a_{mn}$ conv absly to $c_m \in \mathbb{C}$. 以及 $\sum_n b_n$, $\sum_m c_m$ conv absly to $\sum_{m,n} a_{mn}$.

即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |a_{mn}|$$

6.3.2 complete Fubini's Theorem

Remark 即便 $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 都 complete, product space $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ **不一定 complete! (甚至说基本很少 complete)**

Example 6.4 考虑 $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ 考虑一个 Vitali set.

$$V \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \{0\} \text{ is a subnull set, not measurable}$$

但是如果我们 consider completion:

$$(X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}, \overline{\mu \times \nu})$$

Theorem 6.4 (complete Fubini-Tonelli)

对于 complete measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, 取它们的 product measure space 的 completion:

$$(X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}, \overline{\mu \times \nu})$$

我们将 $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ 简易写作 $\mathcal{L}$, $\overline{\mu \times \nu}$ 简易写作 λ.

Suppose $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ is $\mathcal{L}$-measurable 并且 $f \in L^+(\lambda)$ or $f \in L^1(\lambda)$, 则有

- f_x 是 $\mathcal{B}$-measurable 的 for a.e. x 且 $x \mapsto \int f_x \, d\nu$ 是 measurable 的
- f_y 是 $\mathcal{A}$-measurable 的 for a.e. y 且 $y \mapsto \int f_y \, d\mu$ 是 measurable 的

并且, 在 $f \in L^1(\lambda)$ 的情况下, f_x, f_y, $x \mapsto \int f_x \, d\nu$, $y \mapsto \int f_y \, d\mu$ 也是 **integrable** 的, 即 $\in L^1(\lambda)$, 并且

$$\int f \, d\lambda = \iint f \, d\mu d\nu = \iint f \, d\nu d\mu$$

Proof exercise. 比较简单.

Remark 这一定理的意思是, 在 μ, ν 是 complete measure 的情况下, $\mu \times \nu$ 的 completion $\overline{\mu \times \nu}$ **虽然并不等于 $\mu \times \nu$, 但是 $L^1(\overline{\mu \times \nu})$ 的函数的积分却可以当作 $L^1(\mu \times \nu)$ 的函数的积分, 从而分成两个积分.** 这是因为 因为完备化测度只是增加了一些**原本测度为零的集合的子集**, 这些集合不会影响积分计算. 这一定理的直接应用是 Lebesgue integral on $\mathbb{R}^n$.

6.3.3 remark: integral of 非负函数等于 area under graph

Theorem 6.5

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个 arbitrary measure space, $f \in L^+(\mu)$ 为 arbitrary 可测非负函数, 我们定义:

$$G_f := \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : 0 \le y \le f(x)\}$$

Claim: G_f 是 $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-measurable 的, 并且

$$(\mu \times m)(G_f) = \int f \, d\mu$$

Proof In hw 6.

Remark G_f 即 area under the graph of f. 这一 statment 是一个**正式的表达 of "integral of 非负函数等于 area under graph"**. 我们也可以推广它到 L^1 上 (正负 part 的差), which is trivial.