Lec 4 measurable functions and integration on $L^+(\mu)$

4.1 measurable function [Fol 2.1]

4.1.1 general measurable function

Def 4.1 (($\mathcal{M},\mathcal{N}$)-measurable function)

Let $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{N})$ be measurable spaces, 如果 $f:X\to Y$ 满足:

$$B\in\mathcal{N}\implies f^{-1}(B)\in\mathcal{M}$$

, 则称 f 为一个 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-measurable function.

从一个 measurable space 到另一个 measurable space 的 function 被称为 measurable 的条件是: 被映射到可测集的集合只能是可测集.

这个定义和 topological space 上 continuous 的定义: 被映射到开集的只能是开集, 形式是完全一样的. 并且我们知道, topological space 和 measure space 也有很多相似之处. 因而连续性和可测性有一定的关系.

函数的可测性的定义是 with respect to 它们所在可测空间选定的 σ-algebra 的, 就像 topologica spaces 之间函数的连续性的定义是 with respect to 它们所在的 topological spaces 选定的 topology.

这两个定义都表示的是: 性质不好的集合不会被映射到性质良好的集合. (但是性质良好的集合有可能被映射到性质不好的集合.)

Proposition 4.1 (composition preserves measurability)

如果 f 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-measurable 的, g 是 $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-measurable 的, 那么 $g\circ f$ 是 $(\mathcal{A},\mathcal{C})$-measurable 的.

Proof Trivial.

Lemma 4.1

Let $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{N})$ be measurable spaces, 如果 $\mathcal{N}=<\varepsilon>$ for some $\varepsilon\subseteq Y$, 那么

$$f:X\to Y\ (\mathcal{M},\mathcal{N})\text{-measurable}\iff f^{-1}(E)\in\mathcal{M}\quad\forall E\subseteq\varepsilon$$

Proof foward direction: trivial.

backward direction: Let

$$D:=\{E\subseteq Y\mid f^{-1}(E)\in\mathcal{M}\}$$

容易证明: $D\supseteq\varepsilon$, 并且 D 是一个 σ-algebra.

因而 $D\supseteq<\varepsilon>=\mathcal{N}$

Remark 如果我们知道 $\mathcal{N}$ 是由某个子集生成出来的, 那么对于映射到这个 measurable space 的函数, 只要保证这个子集中的每个集合的 preimage 都是可测集就可以了, 可以 reduce 判断 f measurable 的条件.

同样类比 topological space, 如果 Y 的 topology 存在一个 basis, 那么判断 $f:X\to Y$ 连续, 只需要判断这个 basis 的 preimage 都是 open 的就好了.

Proposition 4.2

对于 topological space X, Y, let $f : X \to Y$

$$f \text{ continuous } \implies f \text{ 是 } (\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)) \text{ measurable 的}.$$

Remark topological spaces 之间, 连续函数一定是在它们的 Borel algebra 之间 measurable 的.

4.1.2 real and complex-valued measurable function

Def 4.2 ((real-valued) measurable functions)

Let $(X, \mathcal{A})$ be a measurable space, 对于 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 如果它是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-measurable 的, 我们直接简称它是 $\mathcal{A}$-measurable 的, 或者简称为 measurable 的.

Remark 实际上, 使用无穷作为值, 就是把**原本不在定义域上的无穷跳跃点放到了定义域上**, 些情况下, 仅仅是一种方便的记号，但它们通常不会被视为真正的值.

但是等价地, 我们为了便利一般都会使用 extended real number system 来进行分析, 把这些无穷间断当作无穷的值来进行分析.

这样做法的合理性是, 对于**零测集大小多个这样的无穷间断点**, 在 Lebesgue 积分体系下这一行为**并不会影响函数的 integrability 以及 integral 的值**, 因而我们可以这么做. 这一点之后并不会造成困扰, 因为我们在之后定义可积空间时, 会避开有超过零测集大小多个无穷间断点的函数, 以及无法定义的行为.

我们容易验证:

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

以及, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 的 generating set 可以是所有的 $(a, \infty]$ 集合或者 $[-\infty, a)$ 集合. 所以**一个 map to $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数是可测的, 当且仅当任意 $(a, \infty]$ 的 preimage 都可测**.

Def 4.3 ((complex-valued) measurable functions)

如果 $f : X \to \mathbb{C}$ 满足: $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ 都是 (real-valued) X-measurable 的, 那么也称 f 是 X-measurable 的, 或者直接说是 measurable 的.

Remark 任意 complex function f 都可以写为

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

这个定义其实等价于 f 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-measurable 的, 因为这个 statment 等价于 $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ 都是 (real-valued) X-measuable 的, 这是因为

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \equiv \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Def 4.4 (Lebesgue measurable functions, Borel measurable functions)

Naturally, 如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是一个 $\mathfrak{L}$-measurable 的函数, 那么我们称 f 是 **Lebesgue measurable** 的. 同样地, 如果它是一个 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-measurable 的函数, 称 f 是 **Borel measurable** 的.

Proposition 4.3

在任何 $\mathcal{M}$-measurable function f 前 compose 一个 Borel measurable 的 function, 结果仍然是 $\mathcal{M}$-measurable 的, follows from composition preserves measurability.

Proof Follows from def.

Example 4.1 f^2, $-3f$, $\frac{1}{|f|}$ $(f \neq 0)$ 都仍然是 $\mathcal{M}$-measuble 的.

4.1.3 arithmetic and sequential preservation of measurable functions

Proposition 4.4 (addition and multiplication 保留 measuability)

如果 f, g 是 $\mathcal{M}$-measurable function, 那么 $f+g, fg$ 也是.

Proof Suffices to assume f, g is (extended) real-valued. Complex case follows trivially.

Suppose f, g 是 $\mathcal{M}$-measurable 的, 我们想要证明: $f+g$ 是 $\mathcal{M}$-measurable 的, suffices to show: $(f+g)^{-1}(a, \infty] \in \mathcal{M}$ for any $a \in \mathbb{R}$.

我们 notice:

$$\{x \in X \mid f(x)+g(x)>a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \mid f(x)>r\} \cap \{x \mid g(x)>a-r\} \tag{4.1}$$

于是 finishes the proof.

对于 fg, 我们发现有

$$fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

于是也 finishes the proof, following 前一个 proposition.

Lemma 4.2 (sequential behavior of real-valued measurable function)

如果 $\{f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个 seq of $\mathcal{M}$-measurable functions, 那么

- $$g_1(x) := \sup_j f_j(x)$$
- $$g_2(x) := \inf_j f_j(x)$$
- $$g_3(x) := \limsup_{j \to \infty} f_j(x)$$
- $$g_4(x) := \liminf_{j \to \infty} f_j(x)$$

都是 $\mathcal{M}$-measurable 的.

Proof

$$g_1(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x).$$

由上确界的定义:

$$g_1(x) > a \iff \exists j \in \mathbb{N}, \text{ such that } f_j(x) > a.$$

因此,

$$\{x \mid g_1(x) > a\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x \mid f_j(x) > a\}.$$

因而:

$$g_1^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{1}^{\infty} f_j^{-1}((a,\infty])$$

由于 f_j 可测, 集合 $\{x \mid f_j(x) > a\}$ 是 $\mathcal{M}$-measurable , 而可测集合的可数并仍然是可测的, 因此 g_1 可测。

inf: dually.

limsup: 等于 inf of sup $(k \geq n)$

liminf: 等于 sup of inf $(k \geq n)$

Remark 从这个 proof 里笔者发现了这个惊人的事情。居然有

$$(sup_j f_j)^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{1}^{\infty} f_j^{-1}((a,\infty])$$

但是仔细想想也是合理的. 因为 function seq 的 sup 函数能够 map 到的值大的元素肯定比其中任何一个 function f_n 更多. 并且其中存在一个 limit 关系.

以及得出了一个很重要的结论: **可测函数的 seq 的各种极限仍然是可测函数.**

Corollary 4.1

如果 $\{f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 seq of $\mathcal{M}$-measurable functions, 且在任意 x 处极限都存在, 那么

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

是 $\mathcal{M}$-measurable 的.

Proof directly follows from lemma. 因为 x 处极限如果存在, 那么 $\sup_f f_j(x) = \inf_j f_j(x)$

Corollary 4.2

f, g $\mathcal{M}$-measurable $\implies$ $\max(f,g), \min(f,g)\mathcal{M}$- measurable

Proof two element sequence, 剩余的用空集, 于是 follows form above.

Remark 于是我们知道, 当我们把 f 拆分成 $f^+ := \max(f,0)$, $f^- := \max(-f,0)$, 我们有

$$f \ \mathcal{M}\textbf{-measurable} \implies f^+, f^- \ \mathcal{M}\textbf{-measurable}$$

并且由于 $f = f^+ - f^-$, 反向也成立. 并且 $|f| = f^+ + f^-$, 因而有:

$$f \ \mathcal{M}\textbf{-measurable} \iff f^+, f^- \ \mathcal{M}\textbf{-measurable} \iff |f| \ \mathcal{M}\textbf{-measurable}$$

4.2 simple function and integration of nonnegative functions [Fol 2.1, finished; 2.2]

4.2.1 indicator and simple function

Def 4.5 (characteristic (indicator) function)

Given $E \subseteq X$, 我们定义:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , x \notin E \end{cases}$$

♣

Lemma 4.3

如果 $(X, \mathcal{M})$ 是一个 measurable space, 那么一个 indicator function

$$\chi_E \textbf{ on } X \text{ 是 } \textbf{measurable} \text{ 的} \iff E \in \mathcal{M}$$

♡

indicator function measurable 当且仅当它 indicate 的集合是 measurable 的.

Def 4.6 (simple function)

一个 simple function on measurable space $(X, \mathcal{A})$ 是一个 $\mathcal{A}$-measurable function $\phi : X \to \mathbb{C}$, taking only finitely many values.

即: $\phi(X) = \{c_1, \cdots, c_k\}$

♣

Proposition 4.5 (使用 a sum of indicator functions of measurable sets 来定义 simple function)

对于 simple function $\phi : X \to \mathbb{C}$ s.t. $\phi(X) = \{c_1, \cdots, c_n\}$, 我们也可以定义它为:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$$

其中, $E_j = \phi^{-1}(\{c_j\})$. 我们称之为: the **standard representation of simple ϕ.**

♠

这是因为, 单点集在 $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ 上是 measurable 的, **由于 ϕ measurable, 我们得到** $E_j \in \mathcal{M}$**.** **Remark** 对于 simple function

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$$

一定有

$$\bigsqcup_{j=1}^{n} E_j = X$$

其中通常有一个 E_j 上 ϕ 的值是 0.

Lemma 4.4

如果 $\phi, \psi : X \to \mathbb{C}$ 是 simple functions, 那么

- $\phi + \psi$
- $\phi\psi$

- $|\phi|$
- $k\phi \; \forall k \in \mathbb{C}$

都是 simple functions.

特别地, 如果 $\phi, \psi : X \to \mathbb{R}$, 那么 $\max(\phi, \psi), \min(\phi, \psi)$ 也是 simple functions.

Proof trivial.

4.2.2 measurable function is a limit of simple functions

Theorem 4.1 (approximating a nonneg measurable function by simple function)

任意的 measurable $f : X \to [0, \infty]$ 都是 **pointwise limit** of an **increasing sequence of simple functions** $\{\phi_n : X \to [0, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Proof 这个构造看起来有点复杂但是其实非常直观.

对于 $n \in \mathbb{N}$, 我们都 index $0 \le k \le 2^{2n} - 1$

然后对每个 k 取:

$$E_n^k := f^{-1}((\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n+1}}])$$

以及:

$$F_n := f^{-1}((2^n, \infty])$$

即, 我们把 $(0, 2^n]$ 这一部分值域切成了 2^{2n} 份, 再把 $(2^n, \infty]$ 这一部分值域单独列成一份.

这 $2^{2n} + 1$ 份值域的切片, 我们对每一份所对应的 function graph, 都取它对应的 Preimage 上的 indicator function 乘以 $\frac{k}{2^n}$, 这段值域的最小值的 constant 函数, 于是一定会得到一个 well approximation:

$$\phi_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k\frac{k}{2^n}\chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}$$

易得,

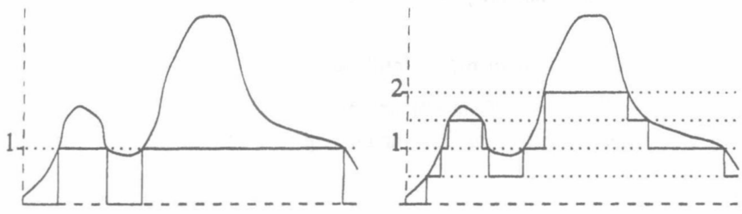
$$\phi_n \le \phi_{n+1} \le f$$

for all n. 并且在 $X \setminus F_n = \{x \mid f(x) \le 2^n\}$ 上我们有:

$$0 \le f - \phi_n \le \frac{1}{2^n}$$

随着 n 增大, 最终这个近似会覆盖整个 image, (除非具有非零测数量的无穷间断点, 那样的话最后结果也是无穷), 并且值域的划分越来越精细, 最后会得到:

- $\phi_n \to f$ **pointwisely**
- 在 f **bounded** 的定义域 $\{x \mid f(x) < \infty\}$ 上, $\phi_n \to f$ **uniformly.**



Remark 我们在构造 simple function 的时候这样用到 measurability: 这里的每个 ϕ_n 是 simple function, 是由于 f measurable, 以至于每个 E_n^k, F_n **作为 interval 的 preimage, 都是 measurable sets.**

Corollary 4.3 (approximating a complex-valued measurable function by simple function)

对于任意的 measurable $f : X \to \mathbb{C}$, 都存在 a seq of simple functions

$$0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$$

使得

- $\phi_n \to f$ **pointwisely**
- $\phi_n \to f$ **uniformly on** $\{x \mid |f(x)| < \infty\}$

♡

Proof 我们可以把 f 拆为 $\operatorname{Im} f, \operatorname{Re} f$, 然后再把它们分别拆为 $\operatorname{Im} f^+ - \operatorname{Im} f^-$, 以及 $\operatorname{Re} f^+ - \operatorname{Re} f^-$. 得到四个 real-valued nonng functions.

4.2.3 integration of non-neg functions

Def 4.7 (L^+ **space and integration on it)**

给定一个 measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 我们定义:

$$L^+(\mu) := \{\textbf{measurable functions } f : X \to [0, \infty]\}$$

对于所有的 **simple functions** $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \in L^+(\mu)$, 即所有非负的 simple functions, 我们定义 **the integral of** ϕ **with respect to** μ by:

$$\int \phi d\mu \ (= \int_X \phi d\mu) := \sum_{i=1}^n a_j \mu(E_j)$$

对于任意的 $f \in L^+(\mu)$, 我们定义 **the integral of** f **with respect to** μ by:

$$\int f d\mu \ (= \int_X f d\mu) := \sup\{\int \phi d\mu \mid 0 \le \phi \le f, \phi \text{ simple}\}$$

♣

Remark 因而对于 general 的非负可测函数, 我们通过 4.1 得知, 我们可以用 simple function 来近似它. 从而, 我们使用 simple function 的积分的极限来定义 general measurable function 的积分.

而 simple function 的积分, 即等于它下方的面积. 因而我们发现, 这个积分的定义和 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 上 Rieamnn 积分有很大的相似之处, 不同在于一个竖切定义域一个横切值域.

之后我们也会证明, 在 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 上, 所有 Riemann 可积的函数也 Lebesgue 可积, 并且得到的结果相同.

这一积分的定义是对 Riemann 积分的推广.

Remark measure theory 中的积分理论是把从 $\mathbb{R}^n$ 出发的函数 推广到了从抽象的测度空间出发的函数; 而还有其他的积分理论, 比如微分形式上的积分则是把实值函数的积分推广到了 oriented smooth manifolds 上, 不仅可以积分 scalars 还可以积分向量场. 这些积分理论的共同点是对 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 上的函数的积分是 coincide 的.

笔者感觉积分理论就是在一个抽象空间上，通过一个抽象的密度函数 (被积函数) 以及体积指标 (measure function), 得到一个抽象质量。由于这个理念本身是从 $\mathbb{R}^n$ 上 generalize 的，因而各种不同的积分理论在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分总是 coincide 的

Def 4.8 (integration on a subset)

对非负 **simple functions** $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \in L^+(\mu)$, 我们定义 **the integral of** ϕ **on** $A \in \mathcal{M}$ **with respect to** μ by:

$$\int_A \phi \, d\mu := \int \phi \chi_A \, d\mu$$

对于 general 的 $f \in L^+(\mu)$, 我们也从而定义:

$$\int_A f d\mu := \sup\{\int_A \phi d\mu \mid 0 \le \phi \le f, \phi \text{ simple}\}$$

♣

Remark

$$\int_A \phi \, d\mu := \int \phi \chi_A \, d\mu = \sum_j a_j \chi_{A \cap E_j}$$

Proposition 4.6 (integral of simple functions 的性质)

Let ϕ, ψ be simple functions in $L^+(\mu)$, 有:

- **homogeneity:** 对于任意非负 c, 有 $\int c\phi = c \int \phi$
- **linearity:** $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$
- **monotonicity:** $\phi \le \psi \implies \int \phi \le \int \psi$
- **induced measure**: $A \mapsto \int_A \phi \, d\mu$ 是一个 $\mathcal{M}$ 上的 measure.

♠

Proof **homogeneity** trivial .

linearity: Let

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \quad , \psi = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{F_j}$$

则有:

$$E_j = \bigsqcup_k (E_j \cap F_k) \quad , F_k = \bigsqcup_j (E_j \cap F_k)$$

for each j, k. 从而有

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$

Monotonicity: trivial.

induced measure: 只需要证明 countable additivity, 于是我们让 A be the union of a disjoint seq in $\mathcal{M}$, 有 :

$$\int_A \phi = \sum_j a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} a_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \phi$$

Remark 本身, 我们已经基于一个 measure 作为 " 体积密度", 来定义一个 simple function 按照这个体积密度得到的积分, 而它在每个可测集上的积分又可以定义另一个 measure;

这个 measure 表示 " 某个集合和 $E_1, \cdots, E_n$ 的交集在这个体积密度以及 simple function 放缩下有多大".

那么对于 general 的 $f \in L^+(\mu)$, 有刚才的四条性质成立吗? **显然, monotonicity 和 homogeinity 是成立的**, 但是我们会发现, 很难证明

$$\int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \int (f+g)\, d\mu$$

$\leq$ 是容易证明的, 但是 $\geq$ 有点困难. 为了证明 $\geq$ 这个方向, 我们需要下面这个重要定理:

4.2.4 MCT

Theorem 4.2 (monotone convergence theorem)

Let $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a seq in $L^+(\mu)$, 并且有 $f_n \leq f_{n+1}$ for each n.

我们 define:

$$f := \lim_n f_n \quad (= \sup_n f_n)$$

, 则一定有

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Proof 首先 Note 几个事情: 1. 这个极限函数 f 是 **well-defined** 的 (可能 ∞), by **numerical sequence** 的 **monotone bounded convergence theorem**.

2. 同样地, 由于 $\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f$, 这个 $\lim \int f_n$ 也是存在的.

3. 并且, f 也是一个可测函数, 因为 by 上个 lecture 的定理: 可测函数序列的极限也是可测函数.

现在进行证明: By monotonicity of integral,

$$\lim \int f_n \leq \int f$$

是 natural 的. 因而只需要证明另一方向.

By def, $\int f = \sup\{\int \phi \mid \phi \leq f\}$ where ϕ is simple. 因而 it **suffices to show:** 对于任意 **simple** $\phi \leq f$, 都有 $\lim \int f_n \geq \int \phi$.

我们 fix 一个 $0 \leq \phi \leq f$. WTS:

$$\lim_n \int f_n \geq \int \phi$$

要证明 $\lim \int f_n \geq \int \phi$, 我们再把它转化成证明:

$$\forall \alpha \in (0,1) \quad \lim_n \int f_n \geq \alpha \int \phi$$

我们取

$$E_n := \{x \mid f_n(x) \geq \alpha\phi\} = f^{-1}([\alpha\phi, \infty]) \in \mathcal{M}$$

容易发现, $E_n \subseteq E_{n+1}$ for each n. 并且 Claim: $\bigcup_n E_n = X$. (这就是为什么要做取 α 这个意义不明的行为) 这是因为 $\alpha < 1$, 并且 f_n converge pointwisely to f, by measurable function 的 limit behavior. 而由于 **simple function** ϕ 是 **bounded** 的, 从而 f_n 会 **uniformly** 向上接近 (以至于超过) ϕ. 取 α 是为了保证,

一定存在一个 n 使得 $E_n = X$

于是我们有:

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n} \geq \int \alpha\phi\chi_{E_n} = \alpha \int_{E_n} \phi$$

我们此处又可以用到一条冷门的性质: 由于 $E \mapsto \int_E \phi$ 是一个 **measure on** $(X, \mathcal{A})$**, by continuous from below,** 有:

$$\lim_n \int_{E_n} \phi = \int \phi$$

从而有

$$\lim_n \int f_n \geq \alpha \int \phi$$

finishing the proof.

Remark 这是一个非常重要的定理. 它表示了**非负可测函数的极限的积分等于积分的极限, 可以把取极限和积分这两个操作进行换序.**

以下为一个应用 MCT 得到的结论.

Example 4.2 取

$$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{counting})$$

于是

$$L^+(\mu) = \{f : \mathbb{N} \to [0, \infty]\}$$

是所有的从自然数到 reals 的函数. (因为我们取了 power set 作为 σ-algebra)

注意到任何一个这样的函数都可以被

$$\phi_n := \sum_{j=1}^{n} f(j)\mu(\{j\}) = \sum_{j=1}^{n} f(j)$$

来逼近. 从而

$$\int f = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \in [0, \infty]$$

如果取一个从下逼近 f 的可测函数序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 那么 by MCT, 我们总有:

$$\sum_{1}^{\infty} f_n(j) \nearrow \sum_{1}^{\infty} f(j)$$

4.2.5 (countable) linearity of integral

Corollary 4.4

$$f, g \in L^+(\mu) \quad \Longrightarrow \quad \int (f+g) = \int f + \int g$$

♡

Proof 使用 approximation by simple functions 以及 MCT. 取

$$\phi_n \nearrow f, \quad \psi_n \nearrow g$$

, 从而

$$\phi_n + \psi_n \nearrow f + g$$

,从而我们有

$$\int (f+g) \overset{MCT}{=} \lim_n \int (\phi_n + \psi_n)$$

从而由 simple function 的 Linearity 得到:

$$\int (f+g) = \lim_n \int \phi_n + \lim_n \int \psi_n$$

并且由于

$$\int \phi_n \nearrow \int f, \int \psi_n \nearrow \int g$$

我们得到:

$$\int (f+g) \geq \int f + \int g$$

另一方向 trivial.

Remark 由此可见,

$f \mapsto \int f$ 是 $\mathbb{R}$-linear 的映射.

4.2.6 Tonelli for sum and integrals

Corollary 4.5 (Tonelli for sum and integrals)

for $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^+(\mu)$, 有:

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i$$

♡

Proof Apply MCT to

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

可得证.

Remark 这是 linearity of integral 的 countable version.

由此可见 MCT 的用处很大.

4.3 properties of integration on $L^+(\mu)$ [Fol 2.2, finished]

4.3.1 Fatou's Lemma

Theorem 4.3 (Fatou's Lemma)

令 (f_n) be a seq of functions in $L^+(\mu)$, then

$$\liminf_n \int f_n \geq \int \liminf_n f_n$$

♡

Proof Set

$$g_n := \inf_{m\geq n} f_n$$

于是

$$g_n \nearrow \liminf_n f_n$$

于是 **by MCT**, we have:

$$\lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = \int \liminf_n f_n$$

By def, 我们有 $g_n \leq f_n \quad \forall n$, 于是 by monotonicity, $\int g_n \leq \int f_n$. 因而

$$\liminf_n \int f_n \geq \liminf_n \int g_n = \lim_n \int g_n = \int \liminf_n f_n$$

Remark 对于 increasing 的从而有 limit 的可测 (f_n), 我们可以使用 MCT.

但是对于任意的可测 (f_n), 我们无法使用 MCT, 不过有弱化的版本 Fatou's Lemma. 它表示**下极限的积分 小于等于 积分的下极限**.

这是一个符合直觉的事情, 因为取函数的 pointwise 极限是一个很容易极端的事情.

积分的极限是一个 numerical seq 的极限, 比较 robust. 而函数的逐点极限是一个比较不稳定的事情, **在对函数逐点极限的过程中, 它的 " 质量" 会存在一个比较大的损失, 因为其中可能包含了 uncountably many 个点的函数值的逐点极限的累积, 而积分的极限只是单个点的逐点极限. 因而大小关系很显然.**

Example 4.3 取 $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$, 考虑 $L^+(m)$ 上的函数, 即非负 Lebesgue 可测函数.

下面有几个非常经典的 Fatou's Lemma 的例子:

1. **escape to hat**:

$$f_n = \chi_{(n,n+1)}$$

f_n 在 $\mathbb{R}$ 上平移

2. **escape to width**:

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}$$

f_n 逐渐变得平坦

3. **escape to height**:

$$f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$$

f_n 逐渐变成一根针.

这三个例子中都有 $f_n \to 0$ pointwisely. 因而

$$\int \lim f_n = 0$$

, 而

$$\lim \int f_n = 1$$

, 因为对于所有 f_n 都有 $\int f_n = 1$

4.3.2 Chebyshev's inequality with corollaries

Lemma 4.5 (Chebyshev's inequality)

对于 measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$, 如果 $f \in L^+(\mu)$ 并且 $c > 0$, 那么

$$\mu\{f \geq c\} \leq \frac{1}{c}\int f$$

♡

Proof Let $E := \mu\{f \geq c\}$

$$\int f \geq \int f\chi_E \geq \int c\chi_E = c\int \chi_E = c\mu(E)$$

Remark 一个可测集的测度, 就等于 constant 1 在它上面的积分, by definition.

这是一个简单而常用的结论.

Proposition 4.7 (非负函数积分为 0 等价于几乎处处为 0)

令 $f \in L^+(\mu)$, 有:

$$\int f = 0 \iff f = 0 \text{ a.e. (即只在一个零测集上非 0)}$$

♠

Proof forward direction: directly follows from Chebyshev: set $A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$, 对于任意 n 都有 $\mu(A_n) \leq n\int f = 0$. 从而 by ctn from below, > 0 处构成零测集.

backward direction: 对于 simple function, trivial by 积分的定义; 对于 general f, 通过 limit 得到 (它下方的所有 simple functions 也 a.e. 为 0 从而积分为 0).

Corollary 4.6 (几乎处处相等的非负函数积分相等)

Let $f, g \in L^+(\mu)$ 且 $f = g$ a.e., 则有

$$\int f = \int g$$

♡

Proof Set $D := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, 则 $\mu(D) = 0$ by def

$$\int f = \int_D f + \int_{D^c} f = 0 + \int_{D^c} g = \int g$$

Corollary 4.7 (liminf version of MCT)

suppose $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 seq of functions in $L^+(\mu)$, 且 $f_n \to f \in L^+(\mu)$, 则:

$$\liminf_n \int f_n \geq \int f$$

♡

Proof 这是一个条件稍微弱化的 MCT: 把 $f_n \nearrow f$ 的条件改成了 $f_n \to f$ a.e., 得到的结论也稍弱化. **modify f_n and f on a null set** (thus without chaning the integral) 后, follows directly from **Fatou's lemma**,

Theorem 4.4 (积分收敛 $\implies$ 发散点集零测, 以及 support σ-finite)

如果 $f \in L^+(\mu)$ 且 $|\int f| < \infty$, 则有:

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$$

并且

$$\{x \mid f(x) > 0\}$$

is σ-**finite** ♡

Proof 直接 follows from Chebyshev. 取

$$A_t := \{x \mid f(x) \geq t\}$$

for $t > 0$.

于是:

$$\{x \in X \mid f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

By Chebyshev, each A_n 都有: $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int t$, 从而 by continuous from above 可得这个交集的 measure 为 0.

又有:

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$$

其中, each set has measure $\leq n \int f \leq \infty$. By def, 这个集合 σ-finite.