

## Module 12 differentiation on real spaces

### 12.1 differentiation of regular Borel measures on $\mathbb{R}^n$ [Fol 3.4, finished]

#### Def 12.1 (regular Borel measure)

一个 Borel measure  $\nu$  on  $\mathbb{R}^n$  被称为 regular 的, if  $\nu$  is locally finite (finite on every compact set).



#### Theorem 12.1 (regular Borel measure: 蕴含了 regularity)

一个 regular Borel measure  $\nu$  on  $\mathbb{R}^n$  一定满足:

1. outer regularity:

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) \mid E \subset U \text{ open}\}$$

2. inner regularity:

$$\nu(E) = \sup\{\nu(U) \mid E \supset U \text{ open}\}$$



**Remark** 这里不证明这两个性质. 因为目前的知识不够.

regular  $\implies$  outer regularity: Hard, 其推导需要 Ch7 regular 和 inner regularity  $\implies$  outer regularity: 这个简单, same as proof of Thm 1.18 on Folland.

**Example 12.1** 任何 LS measure on  $\mathbb{R}$  (restrict to Borel sets) 都是 regular measure. Lebesgue measure  $m$  on  $\mathbb{R}^n$  (restrict to Borel sets) 是 regular measure.

当然, 这个概念也可以推广至 signed/complex measure 上.

#### Def 12.2 (regular signed/complex measure)

一个 signed/complex measure  $\nu$  on  $\mathbb{R}^n$  被称为 regular measure, if  $|\nu|$  is regular 的.



#### Lemma 12.1

如果  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , 则  $f dm$  是一个 regular measure. 如果  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是 extended-integrable 的, 则

$$f \in L^1_{loc}(m) \iff f dm \text{ is a regular measure}$$



**Proof** Folland p99. 这显然, 因为  $f$  locally integrable 就说明  $f dm$  是 locally finite 的.

#### Lemma 12.2

如果  $\rho, \lambda$  是 signed/complex measure 并且  $\rho \perp \lambda$ , 那么

$$\rho, \lambda \text{ are regular measures} \iff \rho + \lambda \text{ is a regular measure}$$



**Proof** 在 hw 10 中.

Note: STS it for positive measure, 这是因为对于 regular signed / complex measure 而言,

$$\lambda \perp \rho \iff \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } |\lambda|(A^c) = 0 \text{ and } |\rho|(A) = 0 \iff |\lambda| \perp |\rho|$$

并且从而

$$\nu = \lambda + \rho, \lambda \perp \rho \implies |\nu| = |\lambda + \rho| = |\lambda| + |\rho|$$

这一命题的证明也在 hw 10 中,

### 12.1.1 LDT meets LRNT: 任何 regular Borel measure $\nu$ on $\mathbb{R}^n$ 对于 $m$ 的 RN-derivative = relative density

#### Theorem 12.2 (LDT meets LRNT: computing RN derivative on $\mathbb{R}^n$ )

Let  $\nu$  be a regular Borel measure on  $\mathbb{R}^n$ , with LRN decomposition

$$\nu = \lambda + \rho, \quad d\rho = f dm, \quad \lambda \perp m$$

即

$$d\nu = d\lambda + f dm$$

那么: 对于  $m$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ , 都有:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{m(B(x, r))} = f(x)$$



**Remark** Also true with  $B(x, r)$  replaced with shrinking  $E_r$ .

这一 Thm 一句话概括即: 如果  $\nu$  是一个 regular measure, 那么几乎处处, 我们都可以用这一点上的 density of  $\nu$  over  $m$  来获得它对  $m$  的 RN derivative  $f$ .

**Proof** 由  $\nu = \lambda + \rho$  得到:

$$\frac{\nu(B(x, r))}{m(B(x, r))} = \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} + \frac{\rho(B(x, r))}{m(B(x, r))}$$

By LDT, 我们有:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho(B(x, r))}{m(B(x, r))} = f(x), \quad \text{for } m\text{-a.e. } x.$$

于是, 原命题即转化为 WTS:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} = 0, \quad \text{for } m\text{-a.e. } x.$$

(Notice: 这里 0 也就是  $d\lambda/dm$ , 因为两个 mutually singular 的 measure, 其 RN derivative = 0 a.e.).

By lemma: 因为  $\nu$  regular, 且  $\lambda \perp \rho$ , 可以推出:  $\lambda, \rho$  也是 regular 的.

WLOG 我们可以 suppose  $\lambda$  是 positive measure, 因为  $\lambda \perp m \iff |\lambda| \perp m$ , 并且  $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$  for any  $E$ . 因而  $\lambda$  是 positive measure 的情况中这个极限为 0 也自然推广到 complex measure 上.

注意: 由于  $\lambda \perp m$ , 我们可以选取 Borel set  $A$  such that

$$\lambda(A) = 0, \quad m(A^c) = 0$$

从而: 只需要证明  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} = 0$  for a.e.  $x \in A$  就可以了, 因为  $A^c$  本身也是  $m$  的 null set.

我们 set:

$$F_k := \left\{ x \in A : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} \geq \frac{1}{k} \right\}$$

从而 STS: 对于任意  $k$ ,  $m(F_k) = 0$ .

我们 Fix 一个  $k$ , by  $\lambda$  的 inner regularity, STS: 对于任意的 cpt  $K \subset F_k$  compact, 都有  $m(K) = 0$ .

于是我们 fix 一个 compact set  $K \subset F_k$ , 并 fix  $\epsilon > 0$ , STS:  $m(K) < \epsilon$ .

By  $\lambda$  的 outer regularity, 存在  $U_\epsilon \supset A$  open 使得

$$\lambda(U_\epsilon) < \frac{\epsilon}{3^n k}$$

By  $F_k$  的定义, 对于任意的  $x \in F_k$ , 都存在某个  $r_x > 0$  使得

$$\nu(B(x, r_x)) > \frac{1}{k} m(B(x, r_x))$$

Since

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$$

从而 by finite open covering thm, 一定存在某个 finite set  $K'$  使得

$$K \subset \bigcup_{x \in K'} B(x, r_x)$$

我们 recall Vitali covering lemma: For given collection of balls  $\{B_j \subset \mathbb{R}^n\}_{j=1}^k$ , 存在 **disjoint** subcollection  $\{B_{j_1}, \dots, B_{j_m}\}$  使得

$$\bigcup_{j=1}^k B_j \subset \bigcup_{i=1}^m (3B_{j_i})$$

代入这里, 得到: 存在  $K'' \subset K'$  s.t. for all  $x \in K''$ ,  $B(x, r_x)$  都是 disjoint 的, with

$$K \subset \bigcup_{x \in K''} 3B(x, r_x)$$

于是

$$\begin{aligned} m(K) &\leq \sum_{x \in K''} m(3B(x, r_x)) \\ &= 3^n \sum_{x \in K''} m(B(x, r_x)) \\ &\leq 3^n k \sum_{x \in K''} \lambda(B(x, r_x)) \\ &\leq 3^n k \lambda(U_\epsilon) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Since  $\epsilon$  任意,  $m(K) = 0$ .

Since  $K$  任意,  $m(F_k) = 0$ .

Since  $k$  任意,

$$m\left(\left\{x \in A : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} > 0\right\}\right) = 0$$

从而得证.

**Remark** 这实际上是一件比较自然的事情. 因为  $\lambda \perp m$ , 那么存在一个划分: 使得某边  $\lambda$  null,  $m$  具有全测度. 在这一边几乎每一点上,  $\lambda$  相对于  $m$  的密度理应为 0; 而另一边,  $m$  是零测度的; 从而整体, 在至多一个  $m$  的 null set 外,  $\lambda$  相对于  $m$  的密度为 0.

在这个证明中, 我们巧妙地同时运用了 inner 和 outer regularity 来简化要证明的结论, 最后 reduce to finite open covering 并自然地使用 Vitali covering lemma 来 bound measure. 属于比较好看的证明.

12.1.2 Differentiation on  $\mathbb{R}$ 12.1.3 {positive regular Borel measures on  $\mathbb{R}$ }  $\simeq$  {distribution functions  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ }

Recall that: 每个 **distribution function** (非严格 increasing, right ctn function) 都对应了唯一的一个 **regular Borel measures**  $\mu_F$  on  $\mathbb{R}$ , 反之亦然.

给定一个 regular Borel measures  $\mu_F$ ,

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & , x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) & , x < 0 \end{cases}$$

为它的 unique distribution function. 即  $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$ , for all h-intervals.

而给定对于 distribution function  $F$ , 我们 define  $\mu_0$  by:

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i))$$

然后 by **Hahn-Kolmogorov**, extend to a regular Borel measure  $\mu_F$ , 使得  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$  for any h-interval, i.e.  $F$  是  $\mu_F$  的 distribution function, 并且 unique in the sense that 任意其他的 such function  $G$  如果也是  $\mu_F$  的 distribution function, 则必然有  $F - G$  为 const. 从而

$$\mu_F \longleftrightarrow F$$

之间构成了一个 measures 和 functions 的空间的 bijection.

distribution function 和 regular measure 之间的对应关系, 关键用处在于什么呢? 我们 recall 刚刚才证明的定理, 不过使用一个更 general 的 version (can easily be extended from what we proved):

**Theorem 12.3 (slightly more general version of LRNT meets LDT)**

Let  $\nu$  be a regular Borel measure on  $\mathbb{R}^n$ , with LRN decomposition

$$\nu = \lambda + \rho, \quad d\rho = f \, dm, \quad \lambda \perp m$$

那么: 对于  $m$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ , 取任意 nicely shrinking  $\{E_r\}$  to  $x$ , 都有:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x)$$



因而如果我们有一个  $\mathbb{R}$  上的 regular measure  $\mu_G$ , 那么考虑  $E_r := (x, x+r]$ , 我们有:

$$\frac{\mu_G(E_r)}{m(E_r)} = \frac{G(x+r) - G(x)}{r}$$

从而我们发现 for a.e.  $x$ , 都有:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_G(E_r)}{m(E_r)} = G'(x)$$

我们可以得到: 这个 regular measure  $\mu_G$  相对于  $m$  的 LRN derivative, 就等于它的 distribution function 的 derivative! 甚至, 我们可以由此判断: 如果  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个 distribution function (increasing, right ctn), 那么它的 derivative 一定是 a.e. 存在的! Since  $\mu_G$  regular  $\implies G$  locally intble  $\implies$  by LDT, 这个 density limit 是 a.e. 存在的.

至此, 我们发现了 Monotone Differentiation Theorem.

## 12.1.4 Monotone Differentiation Theorem

**Theorem 12.4 (Monotone Differentiation Theorem)**

令  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为一个 increasing (nondecreasing) function, set:

$$G(x) := F(x+)$$

即  $F$  的右极限函数. (note:  $G$  一定是 **increasing** 且 **right ctn** 的, 因而是 **a distribution function**) 则有:

- $D_F := \{x : F \text{ disctn at } x\}$  是至多 ctbl 的 (从而一定 zero measure)
- $F, G$  都 differentiable  $m$ -a.e., 并且

$$F' = G' \text{ a.e.}$$



**Proof of (a):** STS that, 对于任意  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$Z_{m,n} := \left\{ x \in [-m, m] : F(x+) - F(x-) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

是一个 finite set. 从而  $D_F = \bigcup_{m,n} Z_{m,n}$  是 at most ctbl 的.

而  $Z_{m,n}$  确实是 finite 的, 因为  $F(-m) - F(m)$  是 bounded 的, 所以  $Z_{m,n}$  一定是 finite 的. (至多经历  $F(-m) - F(m)/(1/n)$  个这样的点).

**Proof of (b):** 首先我们知道,  $G$  right ctn + increasing  $\implies \mu_G$  是一个 LS (thus regular when restricted to Borel sets) measure on  $\mathbb{R}$ .

Apply LDT to  $\mu_G$ , take  $E_r := (x, x+r]$  as the shrinking family to  $x$ .

于是

$$\frac{\mu_G(E_r)}{m(E_r)} = \frac{G(x+r) - G(x)}{r}$$

由 LDT  $\implies$  上式的 limit exist for a.e.  $x$  ( $\mu_G$  w.r.t.  $m$  的 RN derivative), 它就是  $G'$ , 且  $G'$  a.e. 存在, 等于其 induce 的 LS measure 的 RN derivative.

现在 remains to show:  $F$  的 derivative 也 a.e. 存在, 并且和  $G$  的相等. 我们 set:

$$H := G - F$$

从而 STS:  $H'$  a.e. 存在且为 0.

首先,  $H > 0$  并且  $H \neq 0$  只可能在 discontinuous points (which is at most ctbl) 上. We set:

$$\mu := \sum_{x \in D_F} H(x) \delta_x$$

从而对于任意区间  $I$ ,

$$\mu(I) = \sum_{x \in D_F \cap I} H(x)$$

由于  $F, G$  locally intble, 这个  $\mu$  是一个 **regular Borel measure**.

并且, 这个  $\mu$  的 null set 为  $D_f^c$ , 而  $D_f$ , as we have proved, is at most ctbl, 因而是  $m$  的 null set. 从而得到:

$$\mu \perp m$$

于是

$$\frac{d\mu}{dm} = 0 \quad \text{a.e.}$$

从而由 LDT 得:

$$\frac{\mu((x-r, x+r))}{2r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad a.e.$$

因而对于任意的  $h > 0$ ,

$$\left| \frac{H(x+h) - H(x)}{h} \right| \leq \frac{H(x+h) + H(x)}{|h|} \leq \frac{\mu((x-2|h|, x+2|h|))}{4|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

finishing the proof.

**Remark** As conclusion:  $\mathbb{R}$  上的任意 increasing 函数  $F$ , 其 right limit induce 的 LS measure 对于  $m$  的 RN derivative, 就等于它的 derivative a.e.

## 12.2 functions of bounded variation: $F \in BV$ [Fol 3.5]

上一节课我们证明了 Monotone Differentiation Theorem: 它表明的是, 任何  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的 non-decreasing function 都是 differentiable a.e. 的.

我们知道一个函数在一整个区间上 differentiable 其实是一个比价严格的条件, 但是 differentiable a.e. 的条件就略好达到一些.

Question: 如果一个函数在  $[a, b]$  上 differentiable a.e., 那么 in a.e. sense, 可以在  $[a, b]$  上定义它的 derivative  $F'$ . 那么, 是否一定有

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

呢? 答案肯定是不一定的. 以下是三个反例: 1. Heaviside function; 2. Cantor function; 3.  $F'(x) = 0$  a.e., but not 0 on a null set.

这也很显然: 因为单点的值是无法控制的. 我们只能控制 in sense of a.e., 因而有 outlier 的  $a, b$  是很正常的.

我们之后将 revisit 这一问题, 给出这个等式成立的 condition.

接下来我们将

### 12.2.1 total variation function $T_F$ of a function $F$

#### Def 12.3 (total variation function)

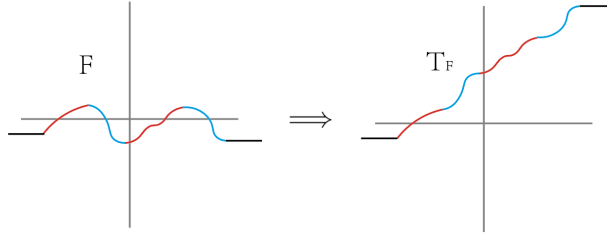
给定一个 function  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 我们定义它的 total variation function  $T_F$  为:

$$T_F: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$$

$$x \mapsto \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j+1})| : -\infty < x_0 < \cdots < x_n = x \right\}$$



**Remark** Total variation 是一个很形象的定义.  $T_F(x)$  表示的是  $F$  从  $-\infty$  到当前  $x$  的这段定义域上, 总的变化量. 它 count into 所有的变化, 包括离散的和连续的, 正方向的和负方向的.

**Lemma 12.3**

对于任意的  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T_F$  都是 increasing 的; 并且对于任意  $a < b$ , 有:

$$T_F(b) = T_F(a) + T_F(a; b)$$

where

$$T_F(a; b) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j+1})| : b = x_0 < \dots < x_n = a \right\}$$

表示  $F$  的定义域限制在  $[a, b]$  上的 total variation.



**Proof** 显然, 由于 total variation 是 increasing 的, 我们总是可以 **greedily** 选择 **partition**. 对于一个 partition, 总是可以插入一个中间点把它分成两半, 而这两半的 sub partition 的 total variation 的和  $\geq$  原先的 partition 的 total variation.

**12.2.2 space of functions of bounded variation:  $BV$  的基本性质****Def 12.4 (function of bounded variation)**

如果  $T_F(\infty) < \infty$ , 我们称  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  is **of bounded variation** 的, 写作  $F \in BV$ .

**Def 12.5 (function of bounded variation on an interval)**

如果  $T_F(a; b) < \infty$ , 我们称  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  is **of bounded variation** on  $[a, b]$ , 写成  $F \in BV([a, b])$ .



首先显然,  $F \in BV$  可以 reduce to real-valued 的情况来讨论.

**Proposition 12.1**

$$F \in BV \iff \operatorname{Re} f \in BV \text{ and } \operatorname{Im} f \in BV$$

**12.2.3  $BV$  as a vector space****Lemma 12.4 ( $BV$  是一个 complex vector space)**

如果  $F, G \in BV$ , 那么对于任意的  $a, b \in \mathbb{C}$ , we have

$$T_{aF+bG} \leq |a|T_F + |b|T_G$$

从而

$$aF + bG \in BV$$



**Proof** 易得. 显然, 函数的 total variation 是线性可加的.

12.2.4  $F \in BV$  的  $T_F$  的 limit behavior

我们知道,  $F \in BV$  if  $T_F(\infty) < \infty$ . 而关于  $T_F(-\infty)$ , 同样有强结论:

**Proposition 12.2**

$$F \in BV \implies T_F(-\infty) = 0$$

**Proof** Let  $\epsilon > 0$ .

从而对于任意的  $x \in \mathbb{R}$ , since  $F \in BV$  那么  $T_F$  bounded,  $T_F(x)$  是一个 real number.

因而我们可以找到一组 partition points  $x_0 < \dots < x_n$  使得

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \epsilon$$

从而

$$T_F(x) - T_F(x_0) \geq T_F(x) - \epsilon$$

从而

$$T_F(y) \leq \epsilon, \quad \forall y \leq x_0$$

Since  $\epsilon > 0$  arbitrary, 这证明了  $T_F(-\infty) = 0$

**Remark**  $F$  bounded variation 的必要条件是它在  $x \rightarrow \infty$  时, 截止  $x$  处的 variation  $\rightarrow 0$ .

**Lemma 12.5** ( $F \in BV$  right ctn  $\implies T_F$  right ctn)

$$F \in BV \text{ right ctn} \implies T_F \text{ 也 right ctn}$$

**Proof** Let  $x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ .

Let

$$\alpha := T_F(x+) - T_F(x)$$

WTS:  $\alpha = 0$ .

By right ctnity of  $F$  和  $T_F$  increasing, 我们可以选择  $\delta > 0$ , 同时满足:  $|F(x+h) - F(x)| < \epsilon, T_F(x+h) - T_F(x+) < \epsilon$  whenever  $0 < h < \delta$ .

Fix 一个满足  $0 < h < \delta$  的  $h$ . 其后的证明见 Folland 104.

12.2.5 属于  $BV, BV(I)$  的函数**Lemma 12.6** (哪些函数一定  $BV$  or  $BV(I)$ )

1. 如果  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bounded 且 increasing, 那么  $F \in BV$  且  $T_F(x) = F(x) - F(-\infty)$ .
2. 如果  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lipschitz continuous 的, 那么  $F \in BV(I)$  for 任意的 cpt interval  $I$
3. 如果  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是 differentiable 且  $F'$  bounded 的, 那么  $F \in BV(I)$  for 任意的 cpt interval  $I$

**Proof** (1) trivial.

(2) by def: 考虑 Lipschitz const  $M$ , 则  $T_F(a; b) \leq M(b - a)$ .



(3): 这是 (2) 的推论, 因为 recall: by MCT 可得:  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是 differentiable 且  $F'$  bounded  $\implies F$  Lipschitz ctn.

### Proposition 12.3

以下是一些经典的函数的 variational behavior:

1.  $f(x) = \sin(x)$ : 属于  $BV(I)$  for 任意 cpt  $I$ , 但不属于  $BV$ .
2.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(0) = 0$ : 属于  $BV(I)$  iff  $0 \notin I$ .
3.  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, f(0) = 0$ : 属于  $BV(I)$  iff  $0 \notin I$ .

**Proof** (1) 显然; (2),(3) 见 HW 11. 其实它们基本相同. ( $\implies$ ): if  $0 \notin I$  then  $F \in BV(I)$ . 是简单的, we differentiate  $F(x) = x \sin(1/x)$  for  $x \neq 0$ :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( x \cdot \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right) = \sin \left( \frac{1}{x} \right) + x \cdot \cos \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \sin \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \cos \left( \frac{1}{x} \right)$$

在不含 0 的区间上, 它是 bounded 的. 于是 by lemma 得证.

( $\impliedby$ ): if  $F \in BV(I)$  then  $0 \notin I$ . This is equiv to: if  $0 \in I$  then  $F \notin BV(I)$ .

Suppose  $0 \in I = [a, b]$  then  $a \leq 0$  and  $b \geq 0$ , one of which is strict. WLOG we suppose  $b > 0$ .

我们的 idea 是 harmonic series. 考虑

$$y_n := \frac{1}{n\pi + \pi/2} \rightarrow 0^+$$

we have:

$$F(y_n) = y_n \sin \left( \frac{1}{y_n} \right) = \frac{1}{n\pi + \pi/2} \cdot \sin(n\pi + \pi/2)$$

For odd  $n$ ,  $F(y_n) = \frac{-1}{n\pi + \pi/2}$ , for even  $n$ ,  $F(y_n) = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$ . Since  $b > 0$ , for some  $N_0$  we have  $y_{N_0} < b$ . Then we consider the partition: pick  $N \in \mathbb{N}$ , and use  $x_0 = 0, x_1 = y_{N_0+N-1}, x_2 = y_{N_0+N-2}, \dots, x_N = y_{N_0}, x_{N+1} = b$  as the partition points of  $[0, b]$ .

Then we have

$$\sum_{n=1}^{N+1} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq \sum_{n=N_0}^{N_0-2+N} \frac{1}{\pi n + \pi/2} + \frac{1}{\pi(n+1) + \pi/2} \geq 2 \sum_{n=N_0}^{N_0-2+N} \frac{1}{\pi n + \pi/2}$$

As  $N \rightarrow \infty$ , this sum  $\sum_{n=1}^{N+1} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \rightarrow \infty$ , by the harmonic series.

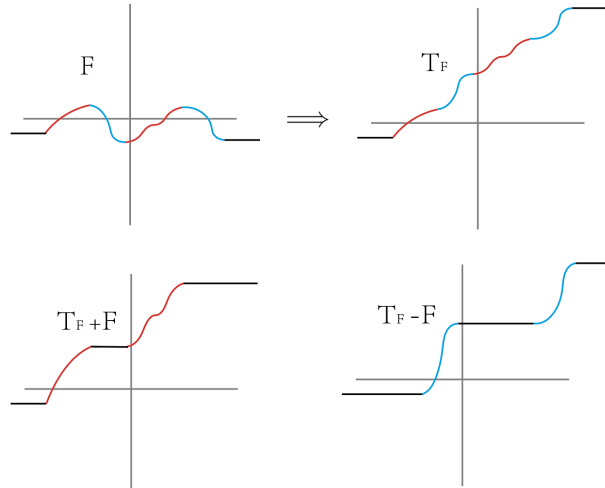
### 12.2.6 Jordan decomposition for $f \in BV$ : $f = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$

#### Lemma 12.7

如果 real-valued  $F \in BV$ , 那么  $T_F + F, T_F - F$  都是 increasing 的.

**Remark**  $T_F + F$  即:  $F$  increasing 的地方加倍 increasing,  $F$  decreasing 的地方 const;

$T_F - F$  即:  $F$  decreasing 的地方反向加倍 increasing,  $F$  increasing 的地方 const;



**Proof** 任取  $x < y$ .

Let  $\epsilon > 0$ .

Can find  $x_0 < x_1 < \dots < x_N = x$ , s.t.

$$\sum_1^N |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \epsilon$$

从而

$$\begin{aligned} T_F(y) &\geq \sum_1^N |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(y) - F(x)| \\ &\geq T_F(x) - \epsilon + |F(y) - F(x)| \end{aligned}$$

由于  $\epsilon > 0$  任意, 可以得到:

$$T_F(y) - T_F(x) \geq |F(y) - F(x)|$$

因而:

$$(T_F(y) - F(y)) - (T_F(x) - F(x)) \geq |F(y) - F(x)| - (F(y) - F(x)) \geq 0$$

#### Theorem 12.5 (Jordan decomposition for $F \in BV$ )

对于  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (注意是 real-valued):

$$F \in BV \iff F \text{ 等于两个 bounded increasing functions 的差}$$

Specially,

$$F \in BV \iff T_F \pm F \text{ bounded}$$

因而 for  $F \in BV$ , 我们总是可以把它写作

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$$

where we call it as the **Jordan decomposition** of  $F \in BV$ . 其中,  $\frac{1}{2}(T_F + F)$  被称为  $F$  的 **positive variation**;  $\frac{1}{2}(T_F - F)$  被称为  $F$  的 **negative variation**.



**Proof** 显然,  $F \in BV \implies F$  bdd, 因为

$$|F(y) - F(x)| \leq T_F(\infty) - T_F(-\infty)$$

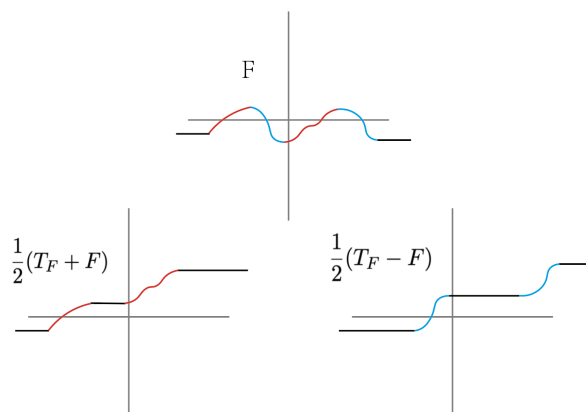


Figure 12.1: positive/negative variation

For  $F \in BV$ , we have  $T_F(\infty) < \infty$ ,  $T_F(-\infty) = 0$ .

又  $F \in BV \implies T_F$  bdd by def, 我们得到:

$$F \in BV \implies T_F \pm F \text{ bounded}$$

而反向 trivial (bounded function 的差仍然 bounded).

**Remark** 我们可以通过  $F$  和 0 的 min, max 取到它的正负部分, 把它按正负部分分解成

$$F = F^+ - F^-$$

而这里, Jordan decomposition 则是按照它正负方向上的 variation 来分:

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$$

$F$  的 **positive variation, negative variation** 和 total variation 一样也是很形象. 我们把

$$F_+ := \frac{1}{2}T_F + F, \quad F_- := \frac{1}{2}T_F - F$$

(这和正负部分的拆分的记号差别在正负号的上下.)

### 12.2.7 corollaries of Jordan decomposition

#### Corollary 12.1

Let  $F \in BV$ . By Jordan decomposition,  $F$  等于两个 bounded increasing functions 的差. 从而我们 by MDT 得:

- $F(x+), F(x-)$  存在 for all  $x$ ;  $F(\pm\infty)$  也存在.
- $D_F = \{x : F \text{ disctn at } x\}$  是 at most ctbl 的.
- 定义  $G(x) := F(x+)$ , 则  $F, G$  都 a.e. differentiable 且  $F' = G'$  m-a.e.



这里最重要的是:

$$F \in BV \implies F \text{ a.e. differentiable}$$

## 12.3 NBV & AC 空间, 以及其上的 FTC for Lebesgue integral [Fol 3.5, finished]

### 12.3.1 NBV 及其性质

#### Def 12.6 (NBV)

For  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 我们定义:  $F \in NBV$ , if  $F \in BV$  且  $F$  right ctn,  $F(-\infty) = 0$ .



**Remark** 这个要求中  $F(-\infty) = 0$  这一条并不要紧, 因为我们知道 for  $F \in BV$ ,  $F(-\infty) = c$  for some const  $c$  是一定的 (因为  $T_F(-\infty) = 0$ ), 因而 right ctn 的  $F \in BV$  减去一个常数一定是 NBV 的.  $F \in NBV$  的

#### Proposition 12.4

$NBV \subset BV$  是一个 linear subspace.



**Remark** 我们容易发现

$$F \in BV \iff T_F \in BV \iff F_+, F_- \in BV$$

又因为,  $T_F(-\infty) = 0$  对于  $F \in BV$  总是成立, 且我们知道  $F$  right ctn  $\implies T_F$  right ctn; 于是:

$$F \in BV \text{ and right ctn} \implies T_F \in NBV \implies F_+, F_- \in NBV$$

我们已经知道:

$$\{\text{positive regular Borel measures on } \mathbb{R}\} \simeq \{\text{distribution functions } F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Notice: 这一点 is achieved by

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & , x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) & , x < 0 \end{cases}$$

等同于:

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

注意: positive regular Borel measure 和 distribution functions 都有一个共同点: 它们在 bounded set 上是 bounded 的, 但是整体可以 unbounded.

而现在我们证明:

### 12.3.2 {complex Borel measures on $\mathbb{R}$ } $\simeq NBV$

注意: 一个 complex Borel measure 和一个  $F \in NBV$  都是 finite 的.

#### Theorem 12.6 ({complex Borel measures on $\mathbb{R}$ } $\simeq NBV$ )

1. 对于  $\mathbb{R}$  上的 complex measure  $\mu$ , defining

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

则有:

$$F \in NBV$$

2. 对于  $F \in NBV$ , 一定存在某个 unique complex measure  $\mu_F$  on  $\mathbb{R}$ , 使得

$$\mu((-\infty, x]) = F(x) \quad \forall x$$



**Proof** (1): 当  $\mu$  是 positive 的情况下, 是显然的. complex 的情况就是 re/im 部分分别叠加即可.

(2): 同样, WLOG 我们可以假设  $F$  是 real-valued 的.

$F \in NBV \implies F = F_+ - F_-$ , 这两个都是 bounded increasing functions 且 NBV, 从而存在两个 finite signed measure 满足:

$$\mu_{\pm}((-\infty, x]) = F_{\pm}(x) - F_{\pm}(-\infty)$$

再定义

$$\mu := \mu_+ - \mu_-$$

即可

**Remark** 这里其实和 positive regular measure 关联 distribution function 的 way:

$$F_{\mu}(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & , x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) & , x < 0 \end{cases}$$

是等价的, 只不过差了一个常数  $\mu((-\infty, 0])$  而已.

之所以我们这里可以直接定义

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

是因为, 对于 complex measure (thus finite) 而言, 这个常数  $\mu((-\infty, 0])$  一定是 finite 的. 但是对于 regular positive regular measure 而言, 这个常数可能是无穷 (且很可能). 因而对于 regular positive regular measure 我们采用这种迂回的定義方式来避开无穷值, 但是对于 complex measure 我们可以直接爽快地定义

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

**Theorem 12.7** ( $\mu_F$  的 total variation measure  $= \mu_{T_F}$ )

对于任意的  $F \in NBV$ , 我们有:

$$|\mu_F| = \mu_{T_F}$$

Specially when  $F$  是 real-valued 情况下, 那么  $\mu_F$  是一个 finite positive measure, 且有

$$\mu_{\pm} = \mu_{F_{\pm}}$$



Now: Given  $F \in NBV$  with associated c.m.  $\mu_F$ , 什么时候  $\mu_F \perp m$ , 什么时候  $\mu_F \ll m$ ?

**Theorem 12.8** (characterization of  $\mu_F \perp m$  和  $\mu_F \ll m$ , for  $F \in NBV$ )

对于  $F \in NBV$ , 我们已经知道:  $F'$   $m$ -a.e. 存在, 且  $F' \in L^1(m)$ .

Now we claim, 有:

$$\mu_F \perp m \iff F' = 0 \quad m\text{-a.e.}$$

以及

$$\mu_F \ll m \iff F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt \quad \forall x$$



**Proof** Let  $x \in \mathbb{R}$ . Applying LDT and LRNT, with  $E_r := (x, x+r]$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} = F'$$

因而  $F'$  就是这个 RN derivative. 对于

$$\mu_F = \lambda + \rho$$

where  $\lambda \perp m, \rho \ll m$ , 我们有:

$$F(x) := \mu_F((-\infty, x]) = \lambda((-\infty, x]) + \rho((-\infty, x])$$

我们知道,  $\mu_F \perp m \iff \rho = 0$ , 从而 by LDT meets LRNT, we know that

$$F' = 0 \text{ a.e.}$$

而  $\mu_F \ll m \iff \lambda = 0$ , 从而直接:

$$F(x) := \rho((-\infty, x]) = F' dm((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$$

### 12.3.3 AC 及其性质

#### Def 12.7 (absolutely continuous function)

我们定义  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  是 absolutely ctn 的, if 对于任意  $\epsilon > 0$  都存在  $\delta > 0$  使得对于任意的 disjoint intervals  $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$ , 都有:

$$\sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_1^N |b_j - a_j| < \delta$$



**Remark** absolutely continuous 是比 uniformly continuous 严格更强的条件: 我们只考虑  $N = 1$  而非任意正整数时这个 def 就 reduce 为 uniform ctn.

absolutely continuous 表示了一种更强的控制性: 选取任意一些地方的变化足够小的  $x$ , 其引发的  $y$  的变化一定可控. ( $y$  的变化的可控性完全由  $x$  的变化量决定, 不由  $x$  的位置决定)

这一看就和 measure 有关系.

#### Def 12.8 (absolutely continuous function on a cpt interval)

我们定义  $F: I \rightarrow \mathbb{C}$  是 absolutely ctn 的, if 对于任意  $\epsilon > 0$  都存在  $\delta > 0$  使得对于任意的 disjoint intervals  $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N) \subset I$ , 都有:

$$\sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_1^N |b_j - a_j| < \delta$$



#### Lemma 12.8 ( $F \in NBV$ abs ctn $\iff \mu_F \ll m$ )

对于  $F \in NBV$ ,

$$F \in AC \iff \mu_F \ll m$$



**Proof** 我们 recall, abs ctn 除了 “ $m$  的 nullsets 也一定是  $\mu_F$  的 null sets” 之外, 还有另一个 characterization:  $\mu_F \ll m$  当且仅当对于任意  $\epsilon > 0$  都存在  $\delta > 0$  使得  $m(E) < \delta \implies |\mu_F(E)| < \epsilon$ .

显然, 这个 characterization 和这里的命题有关. 我们发现,  $\mu_F \ll m \implies F \in AC$  直接 naturally follows

from 这个 form. Let  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta$  使得  $m(E) < \delta \implies |\mu_F(E)| < \epsilon$ . 那么考虑  $E = \bigsqcup_1^N (a_j, b_j)$  with  $m(E) < \delta$ , 直接有

$$|\mu_F(E)| = \sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon$$

从而得证.

而反向, 我们考虑  $m(E) = 0$ , 并利用 outer regularity 取一个逼近它的 open set (每个是 union of finite disjoint open intervals) seq, 逼近  $E$ , with  $m(U_1) < \delta$ . 由  $F \in AC$  可以得到

$$\mu_F(U_j) \leq \mu_F(U_1) < \epsilon$$

for all  $j$ , 从而  $\mu_F(E) \leq \epsilon$ . 从而得证, since  $\epsilon$  arbitrary.

### 12.3.4 FTC for Lebesgue integral on $\mathbb{R}$ : requires NBV + AC

#### Corollary 12.2 ()

如果  $f \in L^1(m)$ , 那么

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt \in NBV \cap AC, \quad f = F' \quad a.e.$$

Conversely, 如果  $F \in NBV \cap AC$ , 那么

$$F' \in L^1(m), \quad F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$$



**Remark** forward 方向即:  $f \in L^1(m)$  则它的累积函数  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$  具有良好的连续性和变差有界性, 从而满足 FTC: a.e. 有

$$\frac{d}{dx} \left( F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt \right) = f(x)$$

并且 for  $F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , 这个函数是  $NBV \cap AC$  的. 这可以推出:

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t) dt$$

backward 方向即: 如果  $F$  具有良好的连续性和变差有界性, 那么它的导数满足:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$$

简而言之: **FTC-I for Lebesgue integral** 在整个  $\mathbb{R}$  上都成立当且仅当  $F \in NBV \cap AC$ .

### 12.3.5 FTC for Lebesgue integral on a cpt interval: 只需要 AC

比起刚才的 FTC-I, FTC-II 的条件要宽松很多, 只需要  $F$  在它需要被用到的 compact interval 上 AC 即可以. 这是因为, 我们不需要用到 NBV 只需要 BV, 并且在 cpt interval 上, AC 本身就可以推出 BV.

#### Lemma 12.9

如果  $F \in AC([a, b])$ , 那么  $F \in BV([a, b])$ .

即

$$AC([a, b]) \subset BV([a, b])$$



**Proof** 这是显然的. 我们看到  $F \in AC([a, b])$  的定义: on  $[a, b]$  we have:

$$\sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_1^N |b_j - a_j| < \delta$$

我们不妨考虑  $\epsilon = 1$ , 然后可以划分  $[a, b]$  into 一个个总长度为  $\frac{\delta}{2}$  的由 disjoint intervals 构成的块 (补空缺没事), 从而 Bound 住这个划分上的 variation by partition  $\sum_1^{N_0} |F(b_j) - F(a_j)|$ . 而我们发现: 这个时候我们不论怎么 fine 这个划分, 每个块的总长度总归是不变的, 从而仍然可以使用原先的 bound.

我们 recall: for total variation, partition 的选取是 greedy 的. 从而这就足以得证.

**Remark** 这里没有仔细证明, 但是理解这个 idea 即可. 这表现了 locally, AC 是一个比 BV 更强的条件, 因为 total variation 就是 sup of variations over 所有划分, 而 AC 的定义正好就是: 无视划分的方法, 只要这个集合的总长度小于  $\delta$ , 它上面的 variation by partition 就要小于  $\epsilon$ .

### Theorem 12.9 (FTC-II for Lebesgue integral on a cpt interval)

TFAE:

- $F \in AC[a, b]$
- $F$  是 diffble a.e. on  $[a, b]$  的, 且  $F' \in L^1([a, b], m)$ , 且

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt$$

for all  $x \in [a, b]$ .



**Proof** 首先,  $F \in AC[a, b] \implies F \in BV[a, b] \implies F$  diffble a.e. on  $[a, b]$ .

Notice that: 这里我们只考虑  $F|_{[a, b]}$ , 于是我们可以将其他部分的值都设为 smooth 的, 并 normalize it: 把  $F(x) := 0$  for  $x < a$ ,  $F(x) := b$  for  $x > b$ .

又  $F \in AC \implies F$  right ctn for sure, 我们 then have:  $F \in NBV$ , 从而

### 12.3.6 characterization for Lipschitz ctn

#### Theorem 12.10 (characterization for Lipschitz ctn)

对于  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , we have:

$$F \text{ Lipschitz ctn with const } M \iff F \in AC \text{ and } |F'(x)| \leq M \text{ a.e.}$$



**Proof** 见 HW 12.

从而我们得到: ctnity 条件的递推关系:

$$\text{Lipschitz ctn} \implies \text{abs ctn} \implies \text{uniformly ctn} \implies \text{ctn}$$

关于连续函数的可导性: Lipschitz ctn 可以推得 a.e. diffble + bounded derivative; abs ctn 可以推得 a.e. diffble 且在 cpt interval 上 derivative  $L^1$ ; 而往后的 uniform ctn 则不蕴含可导性条件.

而关于和可导性紧密相关的变差性质: abs ctn 在 bounded interval 上是比 BV, NBV 更强的条件, 而在  $\mathbb{R}$  上则并不是.

在  $\mathbb{R}$  上, NBV + AC 的函数可运用 FTC. 而在 bounded area 上 AC 的函数就可以运用 FTC.