

## Lec 3 distribution function 与 Lebesgue-Stieltjes measures

### 3.1 distribution function and Borel measures on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [Fol 1.5]

This lecture: 1. distribution function 是 increasing 且 right continuous 的, 2. 任意 increasing 且 right continuous 的函数可以作为 distribution function, 用它来构造它对应的 measure.

#### 3.1.1 distribution function of a locally finite (i.e. regular) Borel measure

##### Def 3.1 (distribution function of $\mu$ )

给定一个 **locally finite (finite on all compact sets)** 的 Borel measure on  $\mathbb{R}$  (即  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ), 我们定义:

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & , x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) & , x < 0 \end{cases}$$

这个函数被称为  $\mu$  的 **distribution function**.

**Remark** 一个 **locally finite (finite on all compact sets)** 的 Borel measure on  $\mathbb{R}^n$  被称为一个 regular measure. 在 Ch 3 中, 我们将在讨论  $\mathbb{R}^n$  上 regular measure 对于 Lebesgue measure 的 derivative.

##### Proposition 3.1

容易发现:  $F$  是  $\mu$  的 distribution function, 当且仅当  $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$ , 任取这样的 interval.

这两个定义是等价的.

##### Theorem 3.1 (distribution function is increasing and right ctn)

对于  $\mathbb{R}$  上的任意 locally finite Borel measure  $\mu$ , 其 distribution function  $F_\mu$  都是 increasing 且 right continuous 的. (right ctn:

$$F_\mu(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

**Proof** increasing: trivially by monotonicity of measure.

right continuous: follows from measure 的 ctnity. 正轴上:  $\mu((0, x + 1/n])$  的 sequence 极限为  $\mu(0, x]$ , by ctn from above; 负轴上,  $\mu((x + 1/n, 0])$  的 sequence 极限为  $\mu((x, 0])$ , by ctn from below.

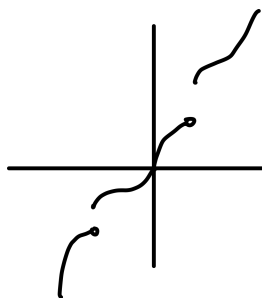
**Remark Note:** distribution function 是 right ctn 的, 但却未必是 left ctn 的. 因为我们构造离散的 measure, 使得这个 distribution function 具有间断点. 这样导致了左不连续. 反例: 例如 atomic measure.

#### 3.1.2 any increasing and right ctn function is a unique distribution function

##### Def 3.2 (h-interval)

我们定义形如  $(a, b]$ ,  $(-\infty, b]$  的  $\mathbb{R}$  的子集, 以及  $\emptyset, \mathbb{R}$ , 为 h-intervals.

h-intervals 即所有的左开右闭区间.



### Lemma 3.1 (h-intervals form an algebra and generate borel set)

$$\mathcal{A}_0 := \{\text{finite (disjoint) unions of h-intervals}\}$$

是一个 algebra, 并且

$$\langle \mathcal{A}_0 \rangle = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$



**Proof** trivial. follows from lec 2 的 generating set of borel set on  $\mathbb{R}$ .

### Theorem 3.2 (任意 increasing 且 right ctn 函数都是某个 regular Borel measure 的 distribution 函数)

取 lemma 中的  $\mathcal{A}_0$ . 对于任意的 **increasing** 且 **right ctn** 的  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们 define  $\mu_0: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$ , by:

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i))$$

并规定  $\mu_0(0) = 0$ , 以及  $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$

, **Claim 1:**  $\mu_0$  是一个  $\mathcal{A}_0$  上的  $\sigma$ -finite premeasure.

**Claim 2: (by Hahn-Kolmogorov)**  $\mu_0$  extend to a locally finite Borel measure  $\mu_F$ , 并且  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$  for any h-interval, i.e.  $F$  是  $\mu_F$  的 distribution function.

**Claim 3:**  $F$  是  $\mu_F$  的唯一 **distribution function up to constant term**, in the sense that 任意其他的 such function  $G$  如果也是  $\mu_F$  的 distribution function, 则必然有  $F - G$  为 const.



#### **Proof** Claim1

1. well-definedness of  $\mu_0$ : 对于两个结果一样的 union, finding common refinement 即可.
2.  $\mu_0(\emptyset) = 0$ : 因为  $\emptyset$  就是  $(a, a]$ .
3. finite additivity: trivial.
4.  $\sigma$ -finiteness: each  $\mu_0((n, n+1]) < \infty$
5. **ctbl additivity: nontrivial**, 下面详细展开.

Suppose  $A_1, A_2, \dots$  是 seq of disjoint h-intervals in  $\mathcal{A}_0$ . Let  $A := \bigsqcup_i A_i$ .

WTS:  $\mu_0(A) = \sum_i \mu_0(A_i)$ .

(1) WTS  $\mu_0(A) \geq \sum_i \mu_0(A_i)$  这个 direction easy. We define  $B_n := \bigsqcup_1^n A_i$ , 由 finite additivity 得到:  $\mu_0(B_n) = \sum_i^n \mu_0(A_i)$ , 从而

$$\mu_0(A) = \mu_0(B_n) + \mu_0(A \setminus B_n) \geq \mu_0(B_n)$$

for each  $n$ , 由于这是一个 numerical seq, 可以 conclude  $\mu_0(A) \geq \sum_i \mu_0(A_i)$ . (2) WTS  $\sum_i \mu_0(A_i) \geq \mu_0(A)$ . 这个 direction 较难, 需要用到  $\epsilon/2^n$  的 argument.

For simplicity, 我们只需要考虑  $A_i = (a_i, b_i]$  的 interval 形式, 其他形式 can trivially prove. 并且, 由于  $\mathcal{A}_0$  中任何一个元素至多只有 finite 个离散的 h-intervals, 我们 **suffice to assume**  $A$  是一个 **h-interval**.

从而, 我们也可以 denote  $A = (a, b]$ .

Let  $\epsilon > 0$ .

By  $F$  的 increasing 和 right ctn, 存在  $\delta, \delta_i$  s.t.

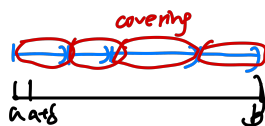
$$F(a + \delta) - F(a) \leq \epsilon$$

同样地, 对于每个  $A_i$ , 我们都可以找到  $\delta_i$  使得

$$F(b_i + \delta_i) - F(b_i) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$$

于是  $(a_i, b_i + \delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  就形成了一个 open covering for  $[a + \delta, b]$ . By cptness, 存在一个 finite subcovering  $(a_i, b_i + \delta_i)_{1 \leq i \leq N}$ .

By relabelling, 我们 **suppose**  $A_i$  是从左到右排序的. 于是每个  $b_i + \delta_i$  都处于下一个  $A_{i+1}$  之内.



从而:

$$\mu_0(A) \leq F(b) - F(a + \delta) - \epsilon \quad (3.1)$$

$$\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \quad (3.2)$$

$$= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) + \epsilon \quad (3.3)$$

$$\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} (F(b_i + \delta_i) - F(a_i)) + \epsilon \quad (3.4)$$

$$< \sum_{i=1}^N (F(b_i) - F(a_i) + \frac{\epsilon}{2^i}) + \epsilon \quad (3.5)$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) + 2\epsilon \quad (3.6)$$

Claim 2, 3 都 directly follows from Hahn-Komogrov Thm.

**Remark** 这一证明实则简单. 关键的步骤是 1. 简化问题为 union 成一个 h-interval; 2. 通过 cptness 取 finite covering; 3. 对每个  $A_i$  取一个  $\epsilon/2^i$  的小 cover, 最后可以被  $\epsilon$  bound.

**Example 3.1** 我们已经证明, 从任意的 increasing 且 right ctn 的函数都可以构造出一个以其为 distribution function 的 locally finite Borel measure on  $\mathbb{R}$ , 因而我们简称这样的函数都叫做 distribution function.

以下为两个 distribution function 的例子:

1. Heaviside function

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

2. 我们将  $\mathbb{Q}$  以某种形式列出:  $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$  而后定义:

$$F(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n} H(x - r_n) \in (0, 1)$$

这个函数通过有理数的次序给每个有理数赋了一个“weight”，并对于每个  $x$ ，把所有有理数分为  $> x$  和  $\leq x$  的两部分，只把  $\leq x$  的那部分有理数的权重算进  $F(x)$ 。于是  $x$  越大，被算进  $F(x)$  的有理数越多， $F(x)$  就越大。（虽然每个有理数的权重是乱的）。这个函数在每一点上都 discrete。

这个过程可推广，不取  $\mathbb{Q}$  而取任意的 countable sets in  $\mathbb{R}$  作为参照。

本 lec 总结：通过直接定义 distribution function 来得到的 measure，实则就是不同于直接取 interval 长度，我们隐性地给每个点一个 mass（类似概率密度），从而把区间的长度中每一个点加上一个权重。最后形成一个不一定均匀的 measure。这个 distribution 的分布曲线决定了这个 measure。

## 3.2 Lebesgue-Stieltjes measure [Fol 1.5, finished]

给定一个 increasing 且 right ctn 的函数  $F$ ，我们已经展示了用它作为 distribution function 来 induce 出一个 regular Borel measure  $\mu_F$  on  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

在构造这个函数时，我们使用的是用 premeasure  $\mathcal{A}_0$  (of all finite unions of h-intervals)，使用 Hahn-Kolmogorov 来 induce outer measure  $\mu_F^*$ ，再把 restrict 它到  $< \mathcal{A}_0 >$ ，即  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上，获得的 measure。这一个 measure 是一个 Borel measure，但是它并不 complete。

recall in lec 6: 我们其实可以 complete 这个 measure，只需要在第二步，用 premeasure  $\mathcal{A}_0$  induce 出 outer measure 后，不要 restrict 它到  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上，而是 restrict 到取  $\mathcal{M}_\mu := \{\text{all } \mu_F^*\text{-measurable set}\}$  上，得到的就是 completion of  $\mu_F$ ，即

$$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \overline{\mu_F})$$

其中， $\mathcal{A}^*$  是  $< \mathcal{A}_0 >$  即  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  的 proper super set。我们把这个 completed measure 叫做 Lebesgue Stieltjes measure associated with  $F$ ，并用  $\mu_F$  来指代它。（刚才，我们把未完备的 measure 叫做  $\mu_F$ ，但现在我们不再使用这个 measure，而是使用它的 completion，并转而称它的 completion ( $\overline{\mu_F}$ ) 为  $\mu_F$ 。）

$$\text{Regular Borel measure} \xrightarrow{\text{completion}} \text{LS measure}$$

### Def 3.3 (Lebesgue-Stieltjes measure associated with $F$ )

给定一个 distribution function  $F$ ，我们使用它来定义 h-intervals 的 premeasure  $\mu_0$ ，并把这个 premeasure induce 出的 outer measure  $\mu^*$  限制在

$$\mathcal{M}_\mu := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable set}\}$$

上，由 Carathéodory Thm 得它是 complete 的。称这个 complete 的 measure

$$\mu_F := \mu^*|_{\mathcal{M}_\mu}$$

为 Lebesgue Stieltjes measure associated with  $F$ .



**Remark** 根据定义，对于任意  $E \in \mathcal{M}_\mu$ ，它的 LS measure 为：

$$\mu_F(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \right\}$$

### 3.2.1 inner and outer regularity of LS measure

虽然我们使用 h-intervals 来 induce 了这个 measure，但是实际上我们在表示 measure 时，可以用 open intervals 来代替 h-intervals：

**Lemma 3.2 (open intervals can substitute for h-intervals when computing measure)**

固定一个 Lebesgue-Stieltjes measure associated with  $F$ , 任意  $E \in \mathcal{M}_\mu$ , 它的 measure 等于:

$$\mu_F(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$$



**Proof** 每个 open interval 都等于 a ctbl disjoint union of h-intervals, 从而是在这个被取 inf 集合内的; 所以只需要证明能取到这个 inf 即可. Fix  $\epsilon > 0$ , 我们根据定义可以取到一个 seq  $(a_i, b_i]$  使得它 measure sum  $\leq \mu(E) + \epsilon/2$ , 而我们对于每个  $i$ , 在 interval 的右边再取一个  $< \epsilon/2^{i+1}$  的  $\delta_i$ , 就变成了一个 open interval, 并且最后距离这个 h-interval seq 的 measure sum 差距至多  $\epsilon/2$ . 从而得证.

**Theorem 3.3 (outer regularity)**

对于一个 Lebesgue-Stieltjes measure associated with  $F$ , 任意  $E \in \mathcal{M}_\mu$ , 它的 measure 等于:

$$\mu_F(E) = \inf \{ \mu_F(U) \mid U \text{ open, and } E \subseteq U \} \quad (3.7)$$



**Proof** Directly follows from lemma. 首先, by monotonicity, 一个包含  $E$  的开集  $U$  的  $\mu_F$  一定比  $E$  的大. 并且, 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 都可以找到一个 open covering 使得 measure sum  $< \mu_F(E) + \epsilon$ , by def.

**Theorem 3.4 (inner regularity)**

对于一个 Lebesgue-Stieltjes measure associated with  $F$ , 任意  $E \in \mathcal{M}_\mu$ , 它的 measure 等于:

$$\mu_F(E) = \sup \{ \mu_F(K) \mid K \text{ compact, and } K \subseteq E \} \quad (3.8)$$



**Proof** 首先证明  $E$  bounded 的 case. 假设  $E$  bdd.

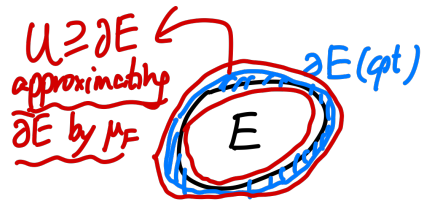
如果  $E$  closed, 则  $E$  cpt, trivially true.

如果  $E$  open, 那么  $E$  的 boundary 是 closed (cpt) 的, 从而  $\partial E \in \mathcal{M}_\mu$  我们 let  $\epsilon > 0$ . 我们对  $\partial E$  使用 outer regularity, 可以取一个 open set  $U$  covering  $\partial E$ , 并且使得  $\mu_F(U) \leq \mu_F(\partial E) + \epsilon$

此时取  $K := E \setminus U$ , 我们发现这是一个 approximating  $E$  的 compact set, 并且有:

$$E = K \sqcup (U \cap E)$$

从而:



$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(K) + \mu(U \cap E) \\ \Rightarrow \mu(K) &= \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)) \\ &\geq \mu(E) - \epsilon \end{aligned}$$

而对于 unbounded 的 case, 直接由

$$E = \bigsqcup_j (E \cap (j, j+1])$$

得到.

**Remark** outer / inner regularity 表示,  $\mathbb{R}$  上一个 (LS-measurable set 的) LS measure 就等于它内部用 cpt set 逼近它的 measure limit; 以及等于它外部用 open set 逼近它的 measure limit.

这个性质也可以推广到  $\mathbb{R}^n$  上.

### 3.2.2 Lebesgue-Stieltjes measurable 的等价条件

#### Def 3.4 ( $G_\delta, F_\sigma$ sets)

Topological space 中, 一个 **countable intersection of open sets** 被称为一个  $G_\delta$  set, 一个 **countable union of closed sets** 被称为一个  $F_\sigma$  set.



**Remark** topological space 中, finite intersection of open sets 还是 open set, 但是 countable intersection 则未必; finite union of closed sets 还是 closed set, 但是 countable union 则未必.

$G_\delta$  sets 包括了所有的 open sets, 以及一部分扩充;  $F_\sigma$  sets 包括了所有的 closed sets, 以及一部分扩充.

#### Theorem 3.5 (Lebesgue-Stieltjes measurable 的等价条件)

TFAE:

i

$$E \in \mathcal{M}_\mu$$

ii 存在一个  $G_\delta$  set  $V$  以及一个 measure zero set  $N_1$  ( $\mu_F(N_1) = 0$ ) 使得

$$E = V \setminus N_1$$

iii 存在一个  $F_\sigma$  set  $H$  以及一个 measure zero set  $N_2$  ( $\mu_F(N_2) = 0$ ) 使得

$$E = H \cup N_2$$

iv 存在一个 open set  $U$  使得对于任意的  $\epsilon > 0$ , 都有

$$\mu^*(U \setminus E) < \epsilon$$



**Proof** 由 (ii) 和 (iii) 推得 (i) 是 trivial 的. 这是因为 LS measure 是 complete measure, 任意 null set 都是 measurable 的. 由 (i) 推 (ii) 和 (iii): follows from outer 与 inner regularity. 假设  $E$  是 LS-measurable 的, 我们直接取一个 inner seq of cpt subsets 以及一个 outer seq of open super sets, 使得

$$\mu_F(U_j) - \frac{1}{2^i} \leq \mu_F(E) \leq \mu_F(K_j) + \frac{1}{2^i} \quad (3.9)$$

于是就得到:  $V := \bigcap_i U_i$ ,  $H := \bigcup_i K_i$ , 与  $E$  的差集都是一个 null set. 并且它们分别为  $G_\delta$  和  $F_\sigma$  sets.

**Remark**  $\sigma$ -algebra 和 topology 各自只 closed under finite 的交和并, 而  $\langle \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$  则 closed under ctbl 交和并, 从而所有的  $G_\delta$  和  $F_\sigma$  sets 都在其中.  $\mathcal{M}_\mu$  是一个比  $\langle \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$  更大的集合, 但是其实它其中的元素都可以用  $G_\delta$  和  $F_\sigma$  sets, 即  $\langle \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$  中的集合来逼近. 这是合理的, 因为 completion 就是把一些 subnull sets 加入到了  $\sigma$ -algebra 里.

## 3.2.3 Lebesgue measure and its invariance properties

**Def 3.5 (Lebesgue measure)**

Lebesgue measure 即 Lebesgue-Stieltjes measure associated with  $F(x) = x$ . 我们用  $m := \mu_F$  来表示它, 并用  $\mathfrak{L} := \mathcal{M}_m$  来表示所有的 Lebesgue measurable sets.

从而  $\mathbb{R}$  上的 Lebesgue measure space 表示为:

$$(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$$



**Remark** Lebesgue measure 是最 normal 的 Lebesgue-Stieltjes measure, 它 preserve intervals 的长度作为其 measure:

$$m((a, b]) = b - a$$

**Theorem 3.6 ( $\mathfrak{L}$  preserves translation and scaling)**

if  $E \in \mathfrak{L} \implies E + s, rE \in \mathfrak{L} \forall s, r \in \mathbb{R}$ .

并且,  $m(E + s) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$



**Proof** 首先, 如果  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , 那么 by hw 1, 我们证明了  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  是 closed under translation 和 scaling 的, 因而  $rE, E + s \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

我们 define on  $\mathcal{A}_0 := \{\text{finite union of h-intervals}\}$ :

$$m_s(E) := m(E + s)$$

$$m^r(E) := m(rE)$$

显然, 这两个函数 agree with  $m, |r|m$ . 由于  $m$  是  $\sigma$ -finite 的, 从而 by Hahn-Kolmogorov, 它 uniquely extend to  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . 因而,  $m_s$  在  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上和  $m$  相等,  $m^r$  在  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上和  $|r|m$  相等. 并且, 我们知道  $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$  是 completion of  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ , 因而  $m_s$  也同样 complete to  $m$  on  $\mathfrak{L}$ . (同理,  $m^r$  也同样 complete to  $|r|m$  on  $\mathfrak{L}$ )

**Remark** 我们只要证明两个 measure function 在 premeasure 上相等或称倍数关系, 就能证明它们在 induced (complete) measure 上相等.

此外, 有另一种证明方式. After we know  $m_s$  在  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上和  $m$  相等,  $m^r$  在  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上和  $|r|m$  相等, 我们由 3.5 Lebesgue-Stieltjes measurable 的等价条件可知:  $\mathfrak{L}$  上的集合一定是一个 Borel set 并上一个 null set, 由于 null set 的 measure 在经过 translation 和 scaling 后仍然是 0, 同样得证.