

# Module 7 Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$

## 7.1 Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$ [Fol 2.6]

今日: Lebesgue measure in  $\mathbb{R}^n$  的

- regularity
- behavior under affine transformation
- behavior under diffeomorphism

### 7.1.1 Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$

这是 product measure 最常见的应用和例子.

#### Def 7.1

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$  Lebesgue measure is **completion of**  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m|_{\text{borel}})$ .



where  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$   $\mathcal{L}^n = \{\text{Leb meas sets}\} \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  Write:

$$\int f \, dm^n$$

#### Theorem 7.1 (Fubini-Tonelli for $m^n$ )

Suppose  $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$  or  $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int f \, dm^n = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n \quad (7.1)$$

$$= \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \cdots dx_1 \quad (7.2)$$



**Example 7.1** Show:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin^2(x)}{x} \, dx = \frac{1}{4} \log(1 + 4s^{-2})$$

for  $s > 0$ , by integrating  $e^{-sx} \sin 2xy = f(x, y)$  over the rectangle  $x \in (0, \infty), y \in (0, 1)$ .

Sketch:  $f \in L^1$  (since it is ctn on  $\mathbb{R}$ ) 以及

$$|f| \leq e^{-sx}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-sx} < \infty$$

可计算得

$$\int_0^1 \sin 2xy \, dy = \frac{1}{2x} \sin^2 x$$

而后 compute

$$\int_0^1 e^{-sx} \sin 2xy \, dy$$

by integration by part for twice.

7.1.2 regularities of Lebesgue measure in  $\mathbb{R}^n$ **Theorem 7.2 (regularities of  $\mathcal{L}^n$ )**

If  $E \subset \mathcal{L}^n$ , 则有:

- **outer regularity:**

$$m(E) = \inf\{m(U) \mid U \text{ open } \supset E\}$$

- **inner regularity:**

$$m(E) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compact } \subset E\}$$

- if  $m(E) < \infty$ , 则对于任意  $\epsilon > 0$ , 都存在 disjoint rectangles  $R_1, \dots, R_N$  with sides that are open intervals (literally rectangles) s.t.

$$m(E \Delta \bigcup_j R_j) < \epsilon$$

**Proof for (a,b) i.e. regularities:**

Fix  $\epsilon > 0$ . By construction, 存在 finite disjoint union of rectangle  $T_j$  for each  $j$ , 使得

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{\infty} m(T_j) \leq m(E) + \epsilon$$

By outer regularity of  $m^1$ , 存在  $U_j \supset T_j$  open rect s.t.  $m(U_j) \leq m(T_j) + \epsilon/2^j$  Then:

$$E \subset U := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \quad \text{and} \quad m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(U_j)$$

Construct  $K$  as in dim 1 (DIY)  $\leq m(E) + 2\epsilon$ .

(完整 Pf 可见 395 笔记, 此略)

**Proof for (c):**

Notation as above.

$$m(E) < \infty \implies m(U) < \infty \implies m(U_j) < \infty \quad \forall j$$

Sides of  $U_j$  are disjoint union of ctbly many open finite intervals.

因而存在 open rectangle  $V_j \subset U_j$  for each  $j$  that are finite disjoint union of finite open intervals s.t.

$$m(U_j \setminus V_j) < \epsilon/2^j$$

Now pick  $R_1, \dots, R_N$  from honest rectangles (即 sides 都是 intervals 的 rectangle) insides  $V_j$  (DIY). (完整 Pf 可见 395 笔记, 此略)

**Corollary 7.1**

For  $f \in L^1(m)$ , if  $f \in L^1(m)$  and  $\epsilon > 0$  then

- 对于任意  $\epsilon > 0$ , 都存在  $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{R_j}$  s.t.

$$\int |\phi - f| dm < \epsilon$$

其中 each  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $R_j$  是 rectangles with sides as finite open intervals.

- 存在  $\phi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  s.t.

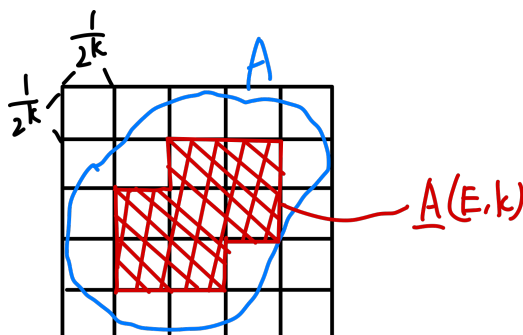
$$\int |f - \phi| dm < \epsilon$$



**Proof** Similar to 1 dim case, 可以证明 {all step functions},  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  是 dense subspace of  $L^1(m)$ .

### 7.1.3 approximating an open set $E \subset \mathbb{R}^n$ by countable disjoint interior cubes

对于  $k \in \mathbb{Z}$ , 令  $\mathcal{Q}_k$  be the collection of cubes whose side length is  $\frac{1}{2^k}$  且 vertices 在 lattice  $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$  中, 即精细度为  $\frac{1}{2^k}$  的网格中的所有 cubes.



对于  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 我们定义:

$$\underline{A}(E, k) := \bigcup \{Q \in \mathcal{Q}_k : Q \subset E\}, \quad \overline{A}(E, k) := \bigcup \{Q \in \mathcal{Q}_k : Q \cap E \neq \emptyset\}$$

即, 一个是被包含在  $E$  中的所有格子, 一个是最小的覆盖  $E$  的所有格子. 并定义:

$$\underline{A}(E) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{A}(E, k), \quad \overline{A}(E) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}(E, k)$$

以及

$$\overline{\kappa}(E) := \lim_{k \rightarrow \infty} m(\underline{A}(E, k)), \quad \underline{\kappa}(E) := \lim_{k \rightarrow \infty} m(\overline{A}(E, k))$$

By CFB, CFA 容易得到:

$$\overline{\kappa}(E) = m(\overline{A}(E)), \quad \underline{\kappa}(E) = m(\underline{A}(E))$$

Note: 这里的  $\underline{A}(E, k)$ ,  $\overline{A}(E, k)$ ,  $\underline{A}(E)$ ,  $\overline{A}(E)$  都是 union of cubes with disjoint interiors.

#### Lemma 7.1 (approximate an open set by disjoint interior cubes)

Let  $E \subset \mathbb{R}^n$  be open.

Claim:  $E = \underline{A}(E)$



**Proof** Folland 2.43.

#### Corollary 7.2

$E \subset \mathbb{R}^n$  是 Lebesgue measurable 的  $\iff \overline{\kappa}(E) = \underline{\kappa}(E)$



### 7.1.4 behavior under affine transformation

Affine transformation 即 linear transformation + translation.

### 7.1.5 Lebesgue measure and integral is invariant under translation

对于  $a \in \mathbb{R}^n$ , 一个 translation  $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x + a$  是 ctn 的并且

$$t_a^{-1} = t_{-a}$$

#### Theorem 7.3 (Lebesgue measure and integral is invariant under translation)

(a) 任取  $a \in \mathbb{R}^n$ ,

$$E \in \mathcal{L}^n \implies t_a(E) \in \mathcal{L}^n \quad \text{and} \quad m(t_a(E)) = m(E)$$

(b) if  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  is Leb measurable, then so is  $f \circ t_a$ .

More, if  $f \in L^+$  or  $f \in L^1$ , then  $f \circ t_a \in L^1$  并且

$$\int (f \circ t_a) dm = \int f dm$$



**Remark** 集合的 measure 以及 measurable function 的积分在 translation 下保持不变.

**Proof** (Folland 2.42)

(a)  $t_a$  ctn  $\implies t_a(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ , 因而  $t_a(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$   $E$  rectangle, so  $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ , each in  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$   
 $m(E) = \prod_1^n m(E_i)$ ,  $t_a(E) = \prod t_{a_i}(E_i)$  因而

$$m(t_a(E)) = \prod m(t_{a_i}(E_i)) = \prod m(E_i) \subset m(E)$$

BY HK uniqueness, get

$$m(t_a(E)) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$$

if  $N \subset \mathbb{R}^n$  subnull set, so is  $t_a(N)$ . 因而

$$m(t_a(E)) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{L}^n$$

(b) Pick  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$ . 因而  $f^{-1}(B) = E \cup N$ ,  $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ,  $N$  null set 因而

$$(f \circ t_a)^{-1}(B) = t_a^{-1}(f^{-1}(B)) \tag{7.3}$$

$$= t_a^{-1}(E) \cup t_a^{-1}(N) \text{ (one Borel, one null)} \tag{7.4}$$

$$= t_{-a}(f^{-1}(B)) \tag{7.5}$$

当  $f = \chi_E$  时, 积分 reduce to measure, 即 (a); 因而

$$\int (f \circ t_a) dm = \int f dm$$

also holds for simple  $f$ , by linearity.

从而 by def, 也 hold for  $f \in L^+$  和  $f \in L^1$ .

7.1.6 Lebesgue measure and integration is scaled  $|\det T|$  under linear map**Theorem 7.4 (Lebesgue measure and integration is scaled  $|\det T|$  by linear map)**

For  $T \in GL(n, \mathbb{R})$  (即 linear map  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  且可逆) (a) 如果  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  is Lebesgue measurable, then so is  $f \circ T$ .

Moreover if  $f \in L^+$  or  $f \in L^1$ , then  $f \circ T \in L^+$ ,  $f \circ T \in L^1$  respectively. And

$$\int f \, dm = |\det T| \int f \circ T \, dm$$

(b)

$$E \in \mathcal{L}^n \implies T(E) \in \mathcal{L}^n \quad \text{and} \quad m(T(E)) = |\det T| m(E)$$



**Proof** Note: 对于  $T, S \in GL(n, \mathbb{R})$ , 如果

$$\int f = |\det T| \int f \circ T \quad \text{and} \quad \int f = |\det S| \int f \circ S$$

, 那么则有

$$\int f = |\det(T \circ S)| \int f \circ (T \circ S)(x)$$

which trivially follows from computation. (and  $\det(S \circ T) = \det S \times \det T$  for any linear map  $S, T$ .)  
recall that:

**Lemma 7.2 (row reduction)**

任意 **invertible linear map** 可以被拆分为 **finite** 个 **elementary linear maps**. ( $T_1$ : scale 一行;  $T_2$ : 交换两行;  $T_3$ : 一行加上另一行的倍数).



于是, 我们只需要 prove the theorem for elementary linear maps 就可以了. 而 elementary linear maps 的 cases 则 easily follows from Fubini-Toneilli.

**Let  $f$  be Borel measurable.**

对于  $T_2$ : 交换两行 (其  $\det$  为  $-1$ ), 我们改变 the order of integration for two coordinates, 因而 integration 不变;

对于  $T_1$ : scale 一行 by const  $c$  (其  $\det$  为  $c$ ), 我们在一 coordinate 上积分值翻  $c$  倍, 因而整体积分值翻  $c$  倍. 这里用到了  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的 Lebesgue integral 的已证明结论:

$$\int f(t) \, dt = |c| \int f(ct) \, dt$$

对于  $T_3$ : 一行加上另一行的倍数 (其  $\det$  为  $1$ ), 我们 recall  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的 Lebesgue integral 的 translation invariance:

$$\int f(t+a) \, dt = \int f(t) \, dt$$

因而整体积分值不变.

从而我们证明了 (a) for Borel measurable  $f$ .

从而, (b) for Borel set  $E$  trivially follows from (a), by taking indicator function.

而对于 (b) 的  $E$  Lebesgue measurable case,  $E = B \cup N$  for some Borel set  $B$  以及 subnull set  $N$ , 从而  $m(E) = m(B)$ .

从而 (b) proved.

而 (a) 的  $f$  Lebesgue measurable 的 case, by def reduces to  $f = \chi_E$  where  $E$  is Lebesgue measurable set, 于是 follows from the (b).

### 7.1.7 Lebesgue measure is invariant under rotation (and reflection)

#### Corollary 7.3 (Lebesgue measure is invariant under rotation)

对于 rotation 和 reflection (即 orthogonal transformation), 即  $TT^* = I_n$  的 linear map  $T$ , 有  $m(T(E)) = m(E)$ .



**Proof**  $TT^* = I_n \implies |\det(T)| = 1$ .

**Remark**  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  为一个 orthogonal transformation (可写作  $A \in O(n)$ ) 的定义是它 preserve norm. 我们知道,  $A \in O(n)$  当且仅当  $A^* = A^{-1}$ .

有两种情况: rotation ( $\det A = 1$ ) 和 reflection ( $\det A = -1$ ).

## 7.2 Change of Variable Thm on $\mathbb{R}^n$ [Fol 2.6, finished]

### 7.2.1 COV

#### Theorem 7.5 (general change of variable theorem)

Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  open,  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为一个  $C^1$  diffeomorphism.

Claim:

- (a) 如果  $f : G(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  上是 Lebesgue measurable 的, 则  $f \circ G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  也是 Lebesgue measurable 的. 并且, 如果  $f \in L^+(G(\Omega), m)$  或者  $f \in L^1(G(\Omega), m)$ , 则有

$$\int_{G(\Omega)} f \, dm = \int_{\Omega} (f \circ G) |\det DG| \, dm$$

- (b) 如果  $E \subset \Omega$  是 Lebesgue measurable set, 则  $G(E)$  也是 Lebesgue measurable set, 并且

$$m(G(E)) = \int_E |\det DG| \, dm$$



**Proof** 首先, 类似于上一个 lecture 中的各个证明, 只需要 prove for Borel measurable functions 和 Borel sets 就可以了. 我们分为五步证明.

**Step 1:** 我们首先证明, 在  $E$  为一个 closed cube 的情况下 (我们转面用  $Q$  来表示它), 有

$$m(G(Q)) \leq \int_Q |\det DG(x)| \, dx$$

**Proof of Step 1:**

$$Q = \{x : \|x - a\|_{\sup} \leq h\}$$

By MVT 容易得到, 对于任意的  $x \in Q$ , 有:

$$\|G(x) - G(a)\|_{\sup} \leq h \cdot (\sup_{y \in Q} \|DG(y)\|_{\sup})$$

(by bounding each entry.)

从而, 我们发现  $G(Q)$  是 contained in 一个边长是  $h \cdot \sup_{y \in Q} \|DG(y)\|_{\sup}$  的 cube 的.

从而有:

$$m(G(Q)) \leq (\sup_{y \in Q} \|DG(y)\|)^n m(Q)$$

在 invertible  $T$  的作用下,  $T^{-1} \circ G$  仍然是一个 diffeomorphism, 从而

$$m(G(Q)) = |\det T| m(T^{-1}(G(Q))) \quad (7.6)$$

$$\leq |\det T| (\sup_{y \in Q} \|T^{-1} DG(y)\|)^n m(Q) \quad (7.7)$$

Let  $\epsilon > 0$ .

由于  $DG$  是 continuous 的,  $DG(x)^{-1} DG(y)$  也是 ctn 的 (从而 **uni.ctn. in the compact cube**), 我们对于任意  $\epsilon > 0$  都可以找到一个  $\delta > 0$  使得 对于任意的  $y, z \in Q$  s.t.  $\|y - z\|_{\sup} \leq \delta$ , 都有

$$\|DG(x)^{-1} DG(y)\| \leq 1 + \epsilon$$

于是我们可以把  $Q$  切分成 interior disjoint 的 closed subcubes  $Q_1, \dots, Q_N$ , 标记其各个中心为  $x_1, \dots, x_N$ , 其每个的 side length 都至多为  $\delta$ , 从而有  $G(Q) \subset \bigcup_{j=1}^N m(G(Q_j))$ . 于是

$$m(G(Q)) \leq \sum_{j=1}^N m(G(Q_j)) \quad (7.8)$$

$$\leq \sum_{j=1}^N |\det DG(x_j)| (\sup_{y \in Q_j} \|DG(x_j)^{-1} DG(y)\|_{\sup})^n m(Q_j) \quad (7.9)$$

$$\leq (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^N |\det DG(x_j)| m(Q_j) \quad (7.10)$$

$$\rightarrow (1 + \epsilon) |\det DG(x)| m(Q) \quad \text{as } \delta \rightarrow 0 \quad (7.11)$$

$$\rightarrow |\det DG(x)| m(Q) = \int_Q |\det DG(x)| dm \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (7.12)$$

证明了这一结论, 我们就完成了这个 proof 的一大半.

**Step 2:** Prove

$$m(G(U)) \leq \int_U |\det DG(x)| dm$$

for open  $U$  的 case.

**Proof of Step 2:** Directly follows from 上一 lecture 的这个 statement: 任意 open  $E \subset \mathbb{R}^n$  都是 countable disjoint interior cubes 的 union.

**Step 3:** Prove

$$m(G(E)) \leq \int_E |\det DG(x)| dm$$

for  $E$  Borel 的 case.

**Proof of Step 3:** Apply step 2 的结论, 使用 MCT for  $L^+$  case, 使用 DCT for  $L^1$  case. 至此, 我们完成了 (b) 的证明的一个方向, 由此可以完成 (a) 的不等式的一个方向:

**Step 4:** 证明

$$\int_{G(\Omega)} f \, dm \leq \int_{\Omega} f \circ G |\det DG(x)| \, dm$$

simple function 的 case reduces to measure, 而  $L^+$  的 case follows from MCT.

**Step 5:** 不等式的另一方向: 其实很简单, 因为 diffeomorphism 的 inverse 仍然是 diffeomorphism, 所以 apply inverse 可得.

注意, 这只是 for Borel  $E$  和  $L^+$  Borel measurable  $f$ , 不过我们容易接着推导出 Lebesgue measurable  $E$  的情况和  $f \in L^+(m)$  的情况; 从而再接着推导出  $f \in L^1(m)$  的情况.

**Remark** 这个证明写得比较潦草. 详情见 Folland 2.47.

但是大概思路都比较简单. 其中比较困难的是 Step 1 中的各种 error bounds. 很麻烦.

## 7.2.2 application of COV: polar coordinate

### Def 7.2 (mapping from Euclidean coord to polar coord)

我们定义:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times S^{n-1}$$

by:

$$x \mapsto (r \in \mathbb{R}, \theta \in S^{n-1})$$

其中,

$$r = |x|, \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$$



这是一个很直观的坐标变换, 即一个 diffeomorphism.

### Def 7.3 (a Borel measure on $(0, \infty) \times S^{n-1}$ )

我们定义

$$m_*(E) := m(\Phi^{-1}(E))$$



这是一个通过坐标变换的 preimage 的 Borel measure 定义的新的 Borel measure.

### Theorem 7.6

Define Borel measure  $\rho$  on  $(0, \infty)$  by:

$$\rho(E) = \int_E r^{n-1} \, dr$$

存在 unique 的 Borel measure  $\sigma_{n-1}$  on  $S^{n-1}$ , 使得 for Borel measurable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  且  $f \geq 0$  or



$f \in L^1(m)$ , 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm \stackrel{COV}{=} \int_{(0,\infty) \times S^{n-1}} f(r\theta) dm_* \quad (7.13)$$

$$\stackrel{Fubini}{=} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\sigma d\rho \quad (7.14)$$

$$= \int_0^\infty r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\sigma dr \quad (7.15)$$



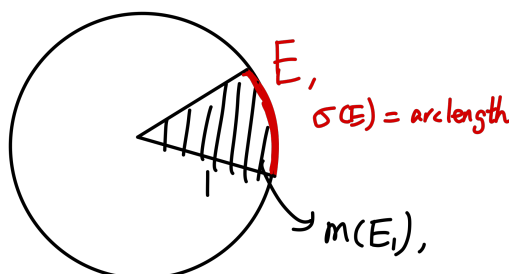
**Proof** 见 Folland 2.49.

**Remark**

这里  $S^{n-1}$  的 unique measure  $\sigma$  的计算公式是:

$$\sigma(E) = n \cdot m\left(\Phi^{-1}((0,1) \times E)\right) = n \cdot m\{r\theta \mid 0 < r \leq 1, \theta \in E\}$$

这很容易直观:



这里  $n = 2$ ,  $m(E_1)$  表示的单位圆下,  $E$  的弧长下的扇形面积, 而  $\sigma(E)$  表示  $E$  的 arc length.

(类比, 在  $n = 3$  的情况下,  $m(E_1)$  表示单位球下,  $E$  的球面下的锥形体积,  $\sigma(E)$  表示  $E$  在  $S^2$  中的球面面积.)

**Remark** 对于  $E = S^{n-1}$  即全集的情况, 这个 measure 有固定的计算公式.

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

**Example 7.2**  $\sigma(S^1) = 2\pi$ ,  $\sigma(S^2) = 4\pi$ .

**Example 7.3** 使用 polar coordinate 计算积分:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

这是因为:

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty r e^{-ar^2} dr = \frac{\pi}{a}$$

而由于

$$e^{-a|x|^2} = \prod_{j=1}^n e^{-ax_j^2}$$

我们得到

$$I_n = (I_1)^n$$

特别地,

$$I_2 = I_1^2, \quad \text{thus } I_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$