

## Lec 2 outer measure 与 completion of a measurable space

### 2.1 complete measure space and outer measure [Fol 1.3, finished; 1.4]

#### Def 2.1 (nul set, subnull set, almost everywhere)

对于 measure space  $(X, \mathcal{M}, \mu)$

1. 我们称  $A \in \mathcal{M}$  为一个 **null set**, 如果  $\mu(A) = 0$ ;
2. 我们称  $B \subseteq \mathcal{M}$  为一个 **subnull set**, 如果存在某个 null set  $A$  containing it.
3. 我们称一个 statement about  $X$  是 **almost everywhere (a.e.)** 的, 如果这个 statement 除了在某个 null set 上之外, 在  $X$  上处处成立.



#### Def 2.2 (complete measure space)

我们称  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  是一个 complete measure space, 如果它其中的任意 subnull set 都是 null set. (即它 measurable)



**Remark** 我们知道, 根据 measure 的 monotonicity, subnull set 的 measure, 如果存在, 一定是  $\leq$  它所在的 null set 的, 即一定  $= 0$ . 所以 complete measure space 的实际意思是: 这个 measure space 里, 任意 null set 的所有子集都是 measurable 的, 即所有足够小的集合都在这个  $\sigma$ -algebra 里.

**Example 2.1** 一个 not complete 的 measure space 的例子:

$$X = \{1, 2\}, \mathcal{M} = \emptyset, X, \mu(\forall) = 0.$$

这个例子中,  $\{1\}, \{2\}$  这两个集合不是 measurable 的, 但是却是 nullset (全集) 的子集.

#### Theorem 2.1 (every measure space can be completed)

Suppose  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  is a measure space.

Let

$$\mathcal{N} := \{\text{all null sets in } \mathcal{M}\}$$

Claim:

$$\overline{\mathcal{M}} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \text{ for some } N \in \mathcal{N}\}$$

is a  $\sigma$ -algebra, 并且在  $\overline{\mathcal{M}}$  上存在一个 unique 的 extension  $\overline{\mu}$  of  $\mu$ .



**Proof** 这一部分的 proof 以及 remark 在 hw2. 这里,  $\overline{\mathcal{M}}$  称为 **completion of  $\mathcal{M}$  with respect to  $\mu$** , 以及  $\overline{\mu}$  称为 **completion of  $\mu$** .

### 2.1.1 outer measure

#### Def 2.3 (outer measure)

An outer measure on  $X$  is a function  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$  such that

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. monotone ( $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ )
3. countable subadditive ( $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ )



**Remark** 我们对比 measure 和 outer measure 的定义: measure 的条件比 outer measure 强在:

1. measure 是定义在一个严格的  $\sigma$ -algebra 上的, 而 outer measure 则是定义在整个幂集上的.
2. measure 要求 disjoint countable additivity, outer measure 并不要求

在这两个条件的缩减下, 我们规定 outer measure 具有 monotonicity 和 countable subadditivity. 注意: measure 本身也有这个性质, 这是 measure 的 countable additivity 的推论.

outer measure 的意义在于, 我们的 measure 只定义在  $\sigma$ -algebra 上, 而我们想要给每个子集都赋予一个近似于测度的东西.

### 2.1.2 induce outer measure out of a "elementary length function"

#### Theorem 2.2 (construct outer measure out of an "elementary length function")

另  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  为一个包含  $\emptyset, X$  的集合, 并定义  $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$  为一个满足  $\rho(\emptyset) = 0$  的函数, 则

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) \mid E_i \in \mathcal{E} \text{ for each } i \text{ and } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

is an outer measure.



#### Proof

1. 取所有  $E_j = \emptyset$ , 得到  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. monotonicity 显然, 因为如果  $A \subseteq B$ , 那么  $A$  取 inf 的这个集合是包含于  $B$  的, 因而取到的 inf 是小于等于的.
3. 证明 ctbl subadditivity, 我们使用经典的  $\epsilon/2^i$  argument. 这个 statement 直观上是显然的, 因为对一个 seq of sets, 每一个里面都有一个 seq of covering, 那么这个 seq of seq of covering 总体也是这个 seq union 的一个 covering. 不过我们不能这么说, 因为这里有一个 inf 操作的换序. 所以我们令  $\epsilon > 0$ , 对于每个  $A_i$  的 covering  $(E_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ , 我们令  $\sum_k \rho(E_{i,k}) \leq \mu^*(A_i) + \epsilon/2^i$ , 最后可以得到  $\mu^*(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu^*(A_i)$ . 由于  $\epsilon$  arbitrary, 得证.

**Example 2.2** 我们取  $\mathcal{E}$  为  $\mathbb{R}$  上所有的 intervals, 并取  $\rho$  为 interval 的 length, 就得到了一个外测度. (也就是 Lebesgue outer measure)

## 2.2 $\mu^*$ -measurability and Carathéodory's Theorem [Fol 1.4]

### 2.2.1 $\mu^*$ -measurable

#### Def 2.4 ( $\mu^*$ -measurable)

Given outer measure  $\mu^*$ , 我们称  $A \subseteq X$  是  $\mu^*$ -measurable 的, if:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$



**Remark** countable subadditivity 蕴含的信息是: 如果我们把一个集合 divide 成几部分, 其 outer measure 有可能 increase. 而  $\mu^*$ -measurable 的含义是: 任何一个其他集合, 分割为和  $E$  重合以及和  $E$  的两部分之后, 其 measure 都不会增大.

**Note:** by subadditivity, must have  $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ , 而  $\mu^*$ -measurable 的集合, 则有 equality 总是成立.

同时注意: 这个行为对于 complement 是对称的.

**Remark** outer measure 是对于整个 power set 中每一个集合都赋予的, 并且其性质 cbt subadditivity 严格弱于 countable additivity. 我们自然想到: 是否有一个 power set 的子集, 其不仅是一个  $\sigma$ -algebra, 并且其上满足 countable additivity? 如果存在, 那么我们就从 outer measure induce 出了 measure.

再加上之前的用随意的 length function 来 induce outer measure 的方法, 我们就可以通过一个随意的 length function  $\rightarrow$  outer measre  $\rightarrow$  measure. (eg: 从 box length induce 出 Legesgue outer measure, 再 induce 出 Lebesgue measure).

而实际上这个想法是正确的. 只要把  $\mu^*$  的范围限制在所有  $\mu^*$ -measurable sets 上, 就形成了  $\sigma$ -algebra, 并且其 restriction 是一个 measure, 甚至是一个 complete measure.

### 2.2.2 Carathéodory's Theorem

#### Theorem 2.3

对于任意的 outer measure  $\mu^*$ ,

$$\mathcal{M} := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable sets}\}$$

is a  $\sigma$ -algebra.

并且,  $\mu^*|_{\mathcal{M}}$  is a complete measure.



**Proof** 我们首先证明这个  $\mathcal{M}$  是一个  $\sigma$ -algebra

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$  by def.
2.  $\mathcal{M}$  closed under complement, by def of  $\mu^*$ -measurability. (它对于 complement 是对称的.)
3. 为证明  $\mathcal{M}$  closed under countable union, 我们首先 prove it for two sets. 假设  $A, B \in \mathcal{M}$ , 且 disjoint.

Let  $E \subseteq X$ . 我们已知

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (2.1)$$

我们 WTS:  $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$

我们对于  $E \cap A, E \cap A^c$  可以得到:

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \quad (2.2)$$

$$\mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \quad (2.3)$$

By  $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ , we can get:

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \quad (2.4)$$

结合以上四个 equations 可以得到

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B^c)) \quad (2.5)$$

又  $\leq$  by countable subadditivity 成立, 我们得证 closed under two union (从而 inductively closed under any finite union,  $\mathcal{M}$  因而是一个 algebra).

**Remark** (Note: 这里我会想: 证明了这个 statement for any union of two sets 不就是证明了它对 any union 都成立吗? 实则不然, 因为 set union 的从属关系并不是可以从对任意  $n$  成立推广到对无穷成立, 因为这里的无穷是一个真实存在的 sequence, 而我们可以从“任意  $n$  成立推广到对无穷成立”的是比较数值大小, 因为 infinite series sum 的定义就是 limit, 而 set union 并没有 limit. 所以这里不能够直接得证.)

(Continuing the proof:) 现在我们再把这个 closed under finite union 推广到 closed under countable union, 以映证  $\mathcal{M}$  是一个  $\sigma$ -algebra. 注意到 **STS (suffices to show):  $\mathcal{M}$  closed under countable disjoint union.** 因为任意不 disjoint 的两个集合都可以拆分成三个 disjoint 的集合.

我们令  $(A_i)$  为一个  $\mathcal{M}$  中的 disjoint sequence, 并定义  $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$ , 我们由上一步的结论知道,  $B_n \in \mathcal{M}$  for all  $n$ . Define  $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , Let  $E \subseteq X$ , WTS:  $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$ .

考虑  $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$ , 因为 inductively 可得到:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \quad (2.6)$$

从而:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \quad (2.7)$$

by monotonicity ( $\mu^*(E \cap B_n^c) \geq \mu^*(E \cap B^c)$ ), 这里是一个 infinite sum, 并且 true for every  $n$ , 因而可以推广到 infinity, 得到

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i)) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E) \quad (2.8)$$

**This finishes the proof of  $\mathcal{M}$  being a  $\sigma$ -algebra.** 我们同时发现,  $\mu^*|_{\mathcal{M}}$  是一个 **complete measure** on  $\mathcal{M}$  是一个 trivial fact after the proof, 因为 taking  $B = E$ , 可以得到

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad (2.9)$$

并且 by monotonicity, 对于任意的  $\mu^*(A) = 0$ , 任取  $E \subseteq X$ , 都有

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E) \quad (2.10)$$

因而

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

得到  $A \in \mathcal{M}$ . 从而得证这是一个 complete measure.

**Remark** 证明 Carathéodory's Theorem 的 punchline 在于: 我们令  $(A_i) \in \mathcal{M}$  be a sequence,  $B_n$  be its partial union for  $n$  terms, 可以得到

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$$

, 因为 inductively 可得到:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \quad (2.11)$$

这个 statement 对于  $\mathcal{M}$  是  $\sigma$ -algebra 以及  $\mu^*|_{\mathcal{M}}$  是 measure 的证明都很重要. 我们在 outer measure 的定义中, 只声明了 countable subadditivity, 而我们需要证明的是 countable disjoint additivity, 也就是需要把不等式变成一个等式.

为此我们看到  $\mu^*$ -measurable 的定义 (Carathéodory condition) 中的等号, 并从中找到这个等式关系: 通过 disjoint set sequence 上 inductively 对于前一项使用 Carathéodory condition, 得到 disjoint additivity. (笔者的感觉是 Carathéodory condition 的直观看似不明显, 但是如果把一个 disjoint union 自身作为  $E$ , 并把自身的某项作为  $A$ , 就非常明显, 表示的是 disjoint measure sum 就是 measure of disjoint union.)

## 2.3 premeasure and Hahn-Kolmogrov extension Theorem [Fol 1.4, finished]

我们发现: 有些子集簇上的 "length" 很明显, 并且也符合 measure 的定义, 但是这个子集簇却并不构成一个  $\sigma$ -algebra. 比如:

**Example 2.3**  $\{\text{all half-open, half-closed intervals}\} \subseteq \mathbb{R}$  上, 以 interval 的 length 作为 measure, 很显然符合 measure function 的定义, 但是  $\{\text{all half-open, half-closed intervals}\} \subseteq \mathbb{R}$  并不是一个  $\sigma$ -algebra, 因为它可以通过 ctbl union 出 open interval, 并不在这个子集簇中. 不过, 这是一个 algebra.

因此, 我们想要一个方法来 extend a "measure" function on an algebra, to a measure on a  $\sigma$ -algebra.

### Def 2.5 (premeasure)

给定  $\mathcal{P}(X)$  上的一个 algebra  $\mathcal{A}_0$ , 我们称  $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$  为一个 premeasure, if

1.  $\mu_0(\emptyset) = 0$
2.  $\mu_0$  ctbl disjoint additive in  $\mathcal{A}_0$



**Remark** premeasure 就是定义在 algebra instead of  $\sigma$ -algebra 上的 measure. 显然, 通过和 measure 相同的方式可证明, premeasure 在  $\mathcal{A}_0$  上是 monotone 以及 ctbl subadditive 的.

### 2.3.1 induce outer measure out of a premeasure: preserving $\mu_0$ on $\mathcal{A}_0$

#### Proposition 2.1

Any premeasure can induce an outer measure:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}_0, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} \quad (2.12)$$

并且, we have:

$$\mu^*|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0 \quad (2.13)$$

并且 every set in  $\mathcal{A}_0$  is  $\mu^*$ -measurable.



**Proof** 这个 outer measure 的 construction directly follows from 2.2.

**Proof that  $\mu^*$  restricted to  $\mathcal{A}_0$  is  $\mu_0$ :** 令  $E \in \mathcal{A}_0$ , 假设  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , 我们令  $B_n := E \cap (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$ , 即把 covering intersecting  $E$  变成 disjoint covering  $(B_n)$ , 从而由  $\mu_0$  的 ctbl disjoint additivity 可得, 这一个新 covering 的 measure sum  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) := \mu_0(E)$ . 并且由于  $\mathcal{A}_0$  是一个 algebra, 这些  $B_n$  也在  $\mathcal{A}_0$  里面, 从而它满足 monotonicity, then  $\mu_0(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$

**Proof that every set in  $\mathcal{A}_0$  is  $\mu^*$ -measurable:** Fix  $A \in \mathcal{A}_0$ , 我们取任意  $E \subseteq X$ . Let  $\epsilon > 0$ , by def of the outer measure, 存在一个 seq  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$ , 使得  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$  并且  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$ . 有 disjoint additivity of  $\mu_0$  可得,  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i \cap A^c)$ . 从而  $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ , 得证. (实际上这是个 trivial argument, 通过  $\epsilon$  argument 来严格证明.)

**Remark** 这一 simple proposition 表明的是,  $\mu_0$  induce 出的 outer measure 在  $\mathcal{A}_0$  上 presearve  $\mu_0$  的 measure 与 measurability.

### 2.3.2 Hahn-Kolmogrov Theorem

#### Def 2.6 ( $\sigma$ -finite measure)

Let  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  be a measure space.

如果  $\mu(X) < \infty$ , 则称  $\mu$  是 finite 的.

如果存在一个 sequence  $(E_i)$  in  $\mathcal{M}$  使得  $\bigcup_i E_i = X$  并且每个  $\mu(E_i) < \infty$ , 则称  $\mu$  是  $\sigma$ -finite 的.



**Remark** 一个 finite measure 说明  $\mathcal{M}$  中的所有集合的 measure 都 finite.

#### Theorem 2.4 (Hahn-Kolmogrov Theorem)

给定一个 premeasure  $\mu_0$  on algebra  $\mathcal{M}_0$  of  $X$ , 以及其 induced outer measure  $\mu^*$ , 我们令

$$\mathcal{M} := \langle \mathcal{M}_0 \rangle$$

表示  $\sigma$ -algebra generated by the algebra  $\mathcal{M}_0$ .

并令

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$$

then we have:

1.  $(X, \mathcal{M}_0, \mu_0)$  extends to  $(X, \mathcal{M}, \mu)$

即:  $\mu|_{\mathcal{M}_0} = \mu_0$

2.  $\mu|_{\mathcal{M}}$  是 the largest extension of  $\mu_0$  to  $\mathcal{M}$  (即: 对于任意其他的  $\mathcal{M}$  上的 measure  $\nu$  that extends  $\mu_0$  to  $\mathcal{M}$ , 都有  $\nu(E) \leq \mu(E)$  for all  $E \in \mathcal{M}$ );

并且 if  $\mu_0$  is  $\sigma$ -finite, 则  $\mu$  is the unique extension of  $\mu_0$  to  $\mathcal{M}$ .



**Proof Proof of  $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$  extends to  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ :**

这个 Statement directly follows from 2.3(Carathéodory's Theorem) 以及上一个 proposition 2.1.

1. 我们首先用  $\mu_0$  induce 出  $\mu^*$ , 再 restrict  $\mu^*$  to  $\mathcal{M}^* := \{\text{all } \mu^*\text{-measurable sets}\}$ , 得到一个  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}^*$ . 注意此时: 由上一个 proposition 2.1 可得  $\mathcal{M}_0$  中所有集合都是  $\mu^*$ -measurable 的, thus  $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}^*$ , 由于  $\mathcal{M}^*$  是一个  $\sigma$ -algebra, 由 ?? 可得:  $\mathcal{M} := < \mathcal{M}_0 > \subseteq \mathcal{M}^*$ .

2. 由 Carathéodory's Theorem 可以得到:  $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$  是一个 measure, 从而  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$  也是一个 measure(等于把  $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$  限制在了一个更小的 sub- $\sigma$ -algebra 上).

(Note: this is a trivial fact that if  $\mathcal{M}^*$  is a  $\sigma$ -algebra and  $M \subset \mathcal{M}^*$  is also a  $\sigma$ -algebra, then  $\mu|_M$  is a measure if given that  $\mu$  is a  $\sigma$ -algebra on  $M^*$ )

**Proof of  $\mu$  being the largest extension of  $\mu_0$  to  $\mathcal{M}$ :** 假设  $\nu$  是一个  $\mathcal{M}$  上的  $\sigma$ -algebra s.t.  $\nu|_{\mathcal{M}_0} = \mu_0$ .

Let  $E \subseteq \mathcal{M}$ . (WTS:  $\nu(E) \leq \mu(E)$ , 即  $\nu(E) \leq \mu^*(E)$ .)

由外测度  $\mu^*$  的定义, 对于任意  $\epsilon > 0$ , 存在一列集合  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_0$  满足

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

由于  $\nu$  在  $\mathcal{A}_0$  上和  $\mu_0$  一致, 即

$$\nu(A_i) = \mu_0(A_i) \quad \forall i,$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

利用  $\nu$  的 additivity 和 monotonicity 得

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

由于  $\epsilon$  arbitrary, 得到

$$\nu(E) \leq \mu^*(E)$$

(证明思路: 在  $\mathcal{M}$  上  $\mu$  就等于  $\mu_0$  induce 的外测度, 对于其他的 extended measure, 其作用在一个集合上的测度一定小于等于任意的  $\mathcal{M}_0$  covering 的 premeasure 和, 而我们可以通过控制这个 covering 的测度和与它的外测度的差距 (since inf), 从而使得这个测度小于等它的外测度加一个无限小的  $\epsilon$ , 从而得证.)

**Proof of  $\mu$  being the unique extension of  $\mu_0$  to  $\mathcal{M}$ , provided that  $\mu_0$  is  $\sigma$ -finite:**

(recall  $\mu_0$  is  $\sigma$ -finite 即  $\mu_0(X) < \infty$ ) It remains to show that  $\nu(E) \geq \mu^*(E)$ .

Continuing 上一个 proof, we have:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \nu(E) + \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E\right) \\ &\leq \nu(E) + \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E\right) \end{aligned}$$

我们只要 controling  $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus E\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \mu^*(E) = \epsilon$  逼近 0, 即可得到反向的不等式关系.

(证明思路: 我们证明了  $\nu(E) \leq \mu^*(E)$  之后, 注意到 covering set 和  $E$  之间的差集的  $\nu$ -measure 自然也小于等于这个差集的  $\mu^*$ -measure, which can approximate 0.)

- Remark** 1. 我们首先容易定义  $X$  上的一个 algebra  $\mathcal{M}_0$  和一个 algebra 上的 premeasure  $\mu_0$ ;
2. 然后用 inf of covering sum 来 induce 出一个  $\mathcal{P}(X)$  上的 outer measure  $\mu^*$ , 而后我们限制  $\mu^*$  到  $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$  (where  $\mathcal{M}^*$  表示所有的  $\mu^*$ -measurable sets), by Carathéodory's theorem 这就 induce 出了一个 complete measure.
  3. 我们可以再取  $\mathcal{M}^*$  的一个 sub  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M} := < \mathcal{M}_0 >$ , 限制在这个集合上的  $\mu^*|_{\mathcal{M}}$  自然也是一个 measure, 并且是  $\mathcal{M}_0$  extend 到  $\mathcal{M}$  上的 larest measure. By Hahn-Kolmogrov Thm, 这个 measure 如果是  $\sigma$ -finite 的则是  $\mathcal{M}_0$  extend 到  $\mathcal{M}$  上的 unique measure.
- (Notice: 自然地,  $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$  是  $(X, \mathcal{M}, \mu^*|_{\mathcal{M}})$  的一个 completion.)