0.1 integration of real and complex functions-I [Fol 2.3]

我们目前只定义了 non-negative $\overline{\mathbb{R}}$-valued measurable function 的积分, 而我们想要完整地定义: $\overline{\mathbb{R}}$-valued measurable function 的积分 $\int f \in \overline{\mathbb{R}}$, 以及 $\mathbb{C}$-valued measurable function 的积分 $\int f \in \mathbb{C}$.

recall: 对于任意 $\overline{\mathbb{R}}$-valued f,

$$f = f^+ - f^-$$

因而我们希望 define:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

但是其中有一个 undefined 的问题: 我们要避免 $\infty - \infty$ 这一类的问题. 因而我们无法对所有的可测函数进行积分, 而是定义 "integrable" 的可测函数.

Lemma 0.1

$$\begin{cases} \int f^+ < \infty \\ \int f^- < \infty \end{cases} \iff \int |f| < \infty$$

♡

Proof trivial.

正负部分都可控, 肯定是当且仅当绝对值函数可控.

我们接下来将定义可积函数的空间是: 所有绝对值积分非无穷的函数. (怎么和预期不一样... 这样的话这个空间在积分运算下的值域就是 $\mathbb{R}$ 而不是 $\overline{\mathbb{R}}$ 了. 我期待的是为了避免无穷之间相减的 undefined behavior 只需要正负部分有一个积分非无穷就行了. 但是我们要求的是都不是无穷. 不过既然这么定义了肯定有其道理.)

0.1.1 $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ and $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

Def 0.1 (real-valued integrable function)

Given measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$, **measurable** $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 被称为 **integrable** 的, 如果它满足

$$\int |f| < \infty$$

并定义其 integral 为:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

♣

Def 0.2 (complex-valued integrable function)

Further, 我们定义 **measurable** $f : X \to \mathbb{C}$ 是 **integrable** 的, 如果它同样满足:

$$\int |f| < \infty$$

注意到这个条件等价于 $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f$ **integrable,** 因为

$$|f| \le |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f| \le 2|f|$$

我们定义其 integral 为:

$$\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$$

♣

Remark 所以说, **实值函数的积分要计算两个, 复值函数的积分要计算四个**. (好麻烦.)

Proposition 0.1

所有的 real-valued integrable functions 构成一个 $\mathbb{R}$-vector space, 并且 integral 是一个 linear functional on it.

所有的 complex-valued integrable functions 构成一个 $\mathbb{C}$-vector space, 并且 integral 是一个 linear functional on it.

♠

Proof trivial.

下面我们可以定义这个 vector space 并在上面进行一定研究. 此处为一个 temporary 的记号:

Def 0.3 ($\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{R})$ 以及 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ space)

给定 measure space $(X,\mathcal{M},\mu)$ 我们定义

$$\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{R}) := \{\text{all (extended) real-valued integrable functions on } X\}$$

以及

$$\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C}) := \{\text{all complex-valued integrable functions on } X\}$$

♣

Remark 这基本接近我们最终的可积空间的定义了. 只需要再 quotient 掉所有的 a.e. 相等的函数就可以. 在此之间, 我们首先在这临时的空间上证明一些结论.

我们基本不使用 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{R})$, 因为它是 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ 的 subspace, 而且大部分结论基本都在更 general 的 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ 上成立.

Remark 这个 $\mathbb{C}$-vector space 的 dimension 是多少呢:

如果 X 是一个 finite set, 那么 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ 的 dimension 是 $|X|$, 因为 $e_i : x_j \mapsto \delta_{ij}$ 是一个 basis; 同样的, 如果 X countable, 那么 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ 的 dimension 也是 countably infinite 的; 如果 X uncountable, 那么 $\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ 的 dimension 也是 uncountable 的.

比如, $\tilde{L}(\mathbb{R}^n,\mu,\mathbb{C})$ 的 dimension 就是 uncountable 的.

Proposition 0.2

$\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})$ 上, $f \mapsto \int f$ 为一个 linear functional.

♠

因为积分是 linear 的, as we have proved.

Proposition 0.3

$$f \in \tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C}) \implies |\int f| \leq \int |f|$$

♠

Proof For real-valued case,

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right| = \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

For complex-valued case, Set

$$\alpha = \frac{\int f}{|\int f|}$$

于是有 $\alpha \in \mathbb{C}$ 且 $|\alpha| = 1$. **Note:** 一个绝对值为 **1** 的 **complex number** 的倒数是它的 **conjuate.**
因而:

$$\left|\int f\right| = \overline{\alpha}\int f = \int \overline{\alpha} f \in \mathbb{R}$$

从而

$$\left|\int f\right| = \int \overline{\alpha} f = \int \mathrm{Re}(\overline{\alpha} f) \leq \int |\mathrm{Re}(\overline{\alpha} f)| \leq \int |\overline{\alpha} f| = \int |f|$$

Def 0.4 (integratal restricted to a measurable set)

if $f \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$, $E \in \mathcal{A}$ (μ 的 σ-algebra), 我们 define:

$$\int_E f\, d\mu := \int f\chi_E\, d\mu$$

♣

Remark 容易验证, restricted to a measurable set 的积分也是 linear 且 monotone 的.

Proposition 0.4 (可积函数几乎处处相等的等价条件)

if $f, g \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$, 则 TFAE:

- $f = g$ a.e.
- $\int |f - g| = 0$
- $\int_E f = \int_E g$ for all $E \in \mathcal{A}$

♠

Proof $(i) \iff (ii)$: by last time proposition.
$(ii) \implies (iii)$: 因为

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| = \left|\int (f-g)\chi_E\right| \leq \int |f-g|\chi_E \leq \int |f-g| = 0$$

$(iii) \implies (ii)$: 令 $u := \mathrm{Re}(f-g)$, $v := \mathrm{Im}(f-g)$, 则

$$\int |f-g| = \int u^+ + \int u^- + i\int v^+ + i\int v^-$$

这四个积分都是正值. 容易发现如果 u^+ 在一个 positive measure set E 上非 0, 那么 $\int_E u^+ > 0$, 那么 $\int |f-g| > 0$. (其他三个积分同理.)

Remark $\int |f-g| = 0$ 是一个比 $\int f - g = 0$ 更强的条件. $\int f - g = 0$ 可以是非零集有交错并且正负抵消, 而 $\int |f-g| = 0$ 则表示 a.e. 相等.

Remark 有这个定理得: **我们可以 integrate** $f : X \to \mathbb{C}$ **a.e. defined**.
即:

$$f : E^c \to \mathbb{C} \quad , \quad \mu(E) = 0$$

其中的一种情况是:

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \quad s.t. \quad |f| < \infty \quad a.e.$$

并且我们发现, a.e. 相等的两个可积函数 $f, g \in \tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ 在任意可测集上的积分都相等. 于是这两个函数在 $\tilde{L}(X, \mu, \mathbb{C})$ 中的表现是相等的. 因而我们可以把 a.e. 相等的这种关系 quotient 掉, 简化这个

空间:

Def 0.5 ($L^1(\mu)$ space)

我们定义 $L^1(X,\mu,\mathbb{C})$, 或简称为 $L^1(\mu)$, 为:

$$\tilde{L}(X,\mu,\mathbb{C})/\sim$$

其中 $\sim$ 表示一个 equivalent class: $f \sim g$ if $f = g$ a.e. (等价于 $\int |f-g| = 0$) ♣

$L^1(\mu)$ 中的每个函数之间彼此至少都在一个正测度集上相互不同. 这减去了分析上考虑几乎处处相等的集合的顾虑, 对于处处相等的函数, 我们认为它们在 $L^1(\mu)$ 上直接相等. 并且, 我们有:

$$f \mapsto \int f$$

在 $L^1(\mu)$ 上是一个 well-defined function.

0.1.2 DCT

Lemma 0.2

令 (f_n) 为 a seq of **a.e. defined measurable functions** on X., s.t.

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

exists a.e.

Claim: f **is measurable.** ♡

Remark Measurability is well preserved by taking limit, 并且更改一个零测集上函数的 definedness 不会改变这个 behavior. (这是一个很宽的条件了)

Theorem 0.1 (dominated convergence theorem)

Let (f_n) be a seq of functions in $L^1(\mu)$, s.t.

- $f_n \to f$ a.e.
- 存在 $g \in L^1(\mu)$ s.t. $|f_n| \le g$ a.e. for all n.

Claim: $f \in L^1(\mu)$ 并且

$$\int f = \lim_n \int f_n$$

♡

Proof 首先由于 $f_n \to f$ a.e., by lemma 可以得到 f 是 measurable 的.

并且

$$|f_n| \le |g| \text{ a.e.} \implies |f| \le |g| \text{ a.e.}$$

于是

$$\int |f| \le \int |g| < \infty$$

即 $f \in L^1$. (从而 $|f|$ 至多在一个 measure zero set 上无穷).

并且 $g(x) \pm f_n(x) \geq 0$ a.e. 这一点很重要, 因为从而我们可以对 $g + f_n, g - f_n$ 使用 Fatou's Lemma:

$$\int g + \int f = \int (g + f) = \int (g + \lim_{n\to\infty} f_n) \tag{1}$$
$$= \int \lim_{n\to\infty} (g + f_n) \tag{2}$$
$$\overset{\text{by Fatou}}{\leq} \liminf_n \int (g + f_n) \tag{3}$$
$$= \int g + \liminf_n \int f_n \tag{4}$$

从而 (由于 $\int g < \infty$)

$$\int f \leq \liminf_n \int f_n$$

以及 similarly get:

$$\int g - \int f \overset{\text{by Fatou}}{\leq} \liminf_n \int (g - f_n) = \int g - \limsup_n \int f_n$$

从而:

$$\int f \geq \limsup_n \int f_n$$

(这里注意, negate 一个 numerical seq 后 liminf 变 limsup. 由此可见 Fatou'e Lemma 其实是很强大的, 只需要对 $\int g + \int f$ 和 $\int g - \int f$ 各用一次就可以得到:)

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Remark DCT 是 MCT 在 L^1 上的推广. MCT 只作用于非负的可测函数, 并且要求序列递增. 而 DCT 则作用于更加广泛的情况.

DCT 增加的要求是存在一个 L^1 的 (a.e.) bound function, 以及极限 a.e. 存在于 extened $\mathbb{R}$. 这两个要求都是合理的, 一个控制了函数的上下浮动程度, 一个控制了序列的收敛性.

而进一步, 我们可以把 " 存在 $g \in L^1$ s.t. $|f_n| \leq |g|$ a.e. for all n." 这一条件放宽到：存在一个 seq (g_n) 以及 g in L^1, 使得

- $|f_n| \leq g_n$
- $g_n \to g$ a.e.
- $\int g_n \to \int g$

Proof 在 hw 5.

Example 0.1 Suppose $u : [0,1] \to [0,1]$ is Lebesgue measurable.

考虑这一 seq of function: (u^n).

容易发现 $u^n \to \chi_{\{u=1\}}$ p.w. 我们可以用 $g = 1$ 作为 bound function. 从而得到:

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n = \int_{\{u=1\}} 1 = m(\{\mu = 1\})$$

Example 0.2 compute

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}$$

令 $f_n(x) := \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}$, 有: $f_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for $x \in (0,1]$;

并且考虑 $g = 1$, 作为 bound.
因而有 $I = 0$

0.2 integration of real and complex functions-II [Fol 2.3]

0.2.1 corollaries of DCT

以下为 DCT 的 corollaries:

0.2.2 Fubini for series and integral

Corollary 0.1 (Fubini for series and integral)

对于 $L^1(\mu)$ 中的 sequence (f_n), 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{a.e.}{\to} F \in L^1(\mu)$$

并且

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int F = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Proof Recall **Tonelli for sum and integrals**: 对于 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^+(\mu)$, 有:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

(又是经典 Fubini 补充 Tonelli) 这个定理是 Tonelli for sum and integrals 在 L^1 上的推广.
我们 set

$$F_n := \sum_{i=1}^{n} f_j \quad G := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

By Tonelli for sum and integrals, 有:

$$\int G = \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|$$

由条件知道, $\int G < \infty$, 因而 $G \in L^1(\mu)$. 所以 G 可以作为 F_n 的 DCT bound:

$$\int |F| \leq \int G = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|$$

因而 by DCT::

$$\int F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int f_i = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Remark Fubini's for sum and integrals : 对于一个 seq of 可积函数, **如果它们的绝对积分和收敛, 那么它们的 infinite sum 函数也是可积的**, 并且可以交换积分和极限次序.
其实显然. 因为绝对积分和肯定 by tri ineq 是大于等于和的积分的, 绝对积分和能作为一个 bound function.

0.2.3 a function that is measurable in one var and ctn/diffble in another

Corollary 0.2

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ be a measure space.

如果 $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ 满足 $f(\cdot, t) \in L^1(\mu)$ for all $t \in [a, b]$, 令

$$F(t) := \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

则有:

1. 如果 $t \mapsto f(x, t)$ 对于任意 x 都连续, 并且存在一个 $g \in L^1(\mu)$ 使得 $|f(t, x)| \le g(x)$ for all t, x, 那么 F 也是 **ctn** 的.
2. 如果 $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ 对于任意 x, t 都存在, 并且存在一个 $g \in L^1(\mu)$ 使得 $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \le g(x)$ for all t, x, 那么 F 是 **differentiable** 的, 并且
$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

♡

Proof 这一证明并不困难.

For part(1), STS: $t_n \to t \implies F(t_n) \to F(t)$

Apply DCT with $f_n(x) = f(x, t_n)$, $f(x) = f(x, t)$.

For part(2), Suppose $t_n \to t$.

Apply DCT to

$$h_n(x) := \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

由可导得连续得 $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ measurable.

并且 **by MVT,**

$$|h_n(x)| \le \sup_{t \in [a,b]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \le g(x)$$

从而我们也用 g bound 住了 $h_n(x)$. **Apply DCT:**

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int h_n = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

Remark 由 DCT, 我们不仅可以交换积分和求极限的次序, 还可以在足够的条件下交换多变量的求导和积分的次序. 这一点是值得注意的, 因为 **DCT 描述的 sequential behavior 可以应用到证明函数 continuous 和 derivative 存在**, 使用 sequential definition.

如: 如果一个多变量函数对于 x 是 measurable 的, 并且满足对于 t 的 partial derivative 处处符合 DCT 条件. 那么我们可以**调换它对于 x 积分和对于 t 求导的顺序**.

看起来很雾但是我们看一个例子 (此为一个反例):

Example 0.3 是否有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}_{>0}} e^{-tx}\, dm(x) \overset{???}{=} \int_{\mathbb{R}_{>0}} -xe^{-tx}\, dm(x) = -\frac{1}{t^2}$$

Here

$$f(t, x) = e^{-tx}, \quad t > 0, x > 0$$

因而

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\right| = xe^{-tx}, \quad t>0, x>0$$

尝试找到它的 dominating $g(x)$: 这个函数在 $t\to 0$ 处的上极限是 $g(x,t)=x$, 但是这个 g 却不是一个 L^1 函数 (在半轴上积分为 ∞). 从而它不可以这么交换积分和求导顺序. 但是如果把 t 的范围限制在 $t\geq a\in\mathbb{R}_+$ 而不是 $t>0$, 我们就可以交换这个积分和求导顺序, 因为此时可以设定

$$g(x,t)=xe^{-ax}$$

0.2.4 L^1 as a Banach space

Theorem 0.2 ($L^1(\mu)$ 以 integral w.r.t. μ 作为 norm 是一个 normed VS)

在 $L^1(\mu)$ 上, 我们 set

$$||f|| := \int |f|$$

则 $(L^1(\mu), ||\cdot||)$ 为一个 **normed $\mathbb{C}$-vector space.** 即, 这是一个 **well-defined norm.**

Proof recall norm 的定义, 需要符合:

- Homogeneity:

$$||af|| = |a|\cdot||f||$$

- triangle ineq:

$$||f+g||\leq||f||+||g||$$

- nonnegativity:

$$||f||\geq 0, \quad = \text{ iff } f=0\in L^1 \text{ (i.e. } f(x)=0 \text{ a.e.)}$$

前两条是积分的 linearity 的下位推论. 后一条 by def.

Corollary 0.3 ($(L^1(\mu), ||\cdot||)$ 是一个 Banach space)

$(L^1(\mu), ||\cdot||)$ 的 induced metric space 是 complete 的. 即, every Cauchy seq converges.
(从而这是一个 **Banach space**.)

Proof 取一个 Cauchy seq (f_n) in L^1.
这里有一个值得 recall 的 proposition:

Proposition 0.5

在一个 metric space 中, 一个 Cauchy seq converges 当且仅当它存在一个 convergent 的 subsequence.

证明很简单. 对于任意的 ϵ, 可以取 $\max(N,M)$, 其中 N 为使得这个子序列所有元素距离 $x_* < \epsilon/2$ 的下标, M 为使得主序列所有元素两两之间距离 $<\epsilon/2$ 的下标.
因而我们只需要证明存在一个 **subseq** (f_{n_j}) **s.t.** $f_{n_j}\xrightarrow{j\to\infty} f\in L^1$ **即可.**
已知 Cauchy, WTS: f_n 收敛且极限在 L^1 中. 我们直觉: 用 Cachy 条件构造 $1/\epsilon^2$ argument.
我们 pick 子下标 $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 使得对于每个 j 都有

$$m,n\geq n_j \implies ||f_m-f_n||_1\leq\frac{1}{2^j}$$

并 set

$$g_j := f_{n_j} - f_{n_{j-1}}, \quad g_1 = f_{n_1}$$

则有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |g_j| \leq 1 < \infty$$

从而 **by Fubini's Thm for series and seqs,** 存在:

$$f := \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} g_j = \lim_{j\to\infty} f_{n_j} \in L^1 \quad \exists a.e.$$

同时有

$$\int |f - f_{n_j}| \leq \sum_{j+1}^{\infty} \int |g_j| \leq \frac{1}{2^j} \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

Remark 这里就发现了 Fubini for series and seq 的用处: 把求和与积分的换序从有限推广到无限求和上, 以绝对积分和有限为条件. 因而, **绝对积分和有限的 seq 是性质强大的.**

而我们可以运用这一点来发掘 function seq 的性质, 比如这里**把一个 function seq 通过构造前后项差的方式, induce 出一个绝对积分和有限的 seq, 从而用这个 seq 的积分和反向证明原 seq 的性质**.

0.2.5 density of simple function of $L^1(\mu)$

Theorem 0.3 (density of simple functions in $L^1(\mu)$)

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个 measure space, 令 $f \in L^1(\mu)$,
对于任意 $\epsilon > 0$, 都存在 simple $\phi : X \to \mathbb{C}$ in $L^1(\mu)$, 使得

$$\int |f - \phi| < \epsilon$$

♡

Proof 这是显然的, by 积分的定义. 我么首先把 f divide 为

$$f = u + iv, \quad u = u^+ - u^-, \quad v = v^+ - v^-$$

而后对这四个非负函数 u^+, u^-, v^+, v^- 分别使用 simple function seq approximation, 再使用 DCT:

$$\int \lim \phi_n = \int u^+ = \lim \int \phi_n$$

比方说 (ϕ_n) 为从下逼近 u^+ 的 simple function seq, 那么 u^+ 是它的 dominating function, 同时也是极限. 那么对于任意的 $\epsilon > 0$ 都存在一个 n 使得

$$||u^+ - \phi_n||_1 \leq \int u^+ - \int \phi_n < \epsilon$$

尤其是这一特殊情况:

0.2.6 density of step functions in $L^1(m)$

Theorem 0.4 (LS measure space 的 L^1 space 上的 density of step functions)

考虑 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m_s)$ where m_s 为一个 Lebesgue-Stieljes measure on $\mathbb{R}$, let $f \in L^1(\mu)$,
对于任意 $\epsilon > 0$, 都存在 step function $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$, 使得

$$\int (f - \phi) < \epsilon$$

where each I_j 都是 open intervals.

Proof 和 general case 相似. 利用 the fact that 任意一个 Lebesgue mble function 都可以用 step function 来 approximate.

0.3 integration of real and complex functions-III [Fol 2.3, finished]

0.3.1 another dense subspace of $L^1(m_s)$: $C_c(\mathbb{R})$

上一节课我们知道了: 所有的 simple functions 在 $L^1(\mu)$ 中构成了一个 dense subspace. 尤其是特殊情况: 对于 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m_s)$, **所有的 step functions 构成了一个 dense subspace of $L^1(m_s)$.**

今天我们先介绍另一个特殊情况 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m_s)$ 的 $L^1(m_s)$ 的 **另一个 dense subspace: 所有的 cpt supported continuous function.**

也就是说, **任意的 Lebesgue intble function 都可以用 ctn function with compact supp 来近似.** 一个可积函数可以是 supp 非常怪异的以及非常 unctn 的, 但是却可以用 ctn and cpt supp functions 来逼近, in L^1 sense. 当然这是一种弱逼近. 函数可以差异很大.

Def 0.6 ($C_c(X)$)

令 X be a metric space, 我们定义:

$$C_c(X) := \{\text{all ctn functions } f : X \to \mathbb{C} \text{ with cpt supp}\}$$

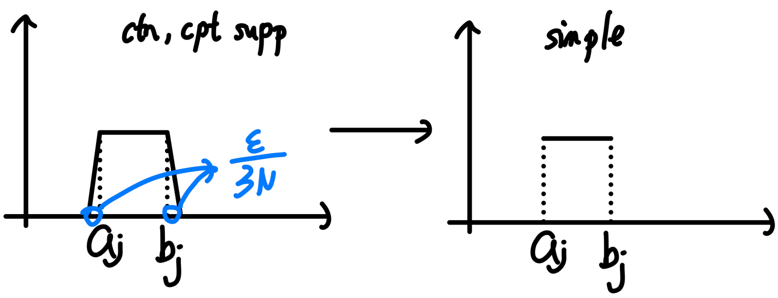
Theorem 0.5 ($C_c(X) \subset L^1(\mu)$ 是一个 dense linear subspace)

$C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mu_m)$ 为一个 dense linear subspace.

Proof 对于 $f \in L^1(m_s)$, let $\epsilon > 0$. 我们首先 pick 一个 step function 来 approximate f:

$$\phi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{I_j}, \quad s.t. ||f - \phi||_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

空出来的 $\frac{\epsilon}{2}$, 我们使用 ctn and cpt supp function f_j 对每个 χ_{I_j} 进行逼近, by:



从而 $||\sum_j f_j - \phi|| < \frac{\epsilon}{2}$, 因此 $||\sum_j f_j - f|| < \frac{\epsilon}{2}$ by tri ineq. 得证.

0.3.2 Riemann v.s. Lebesgue integral

我们已经完成了一个任意的 measure space 上的 Lebesgue 积分的定义, 以及可积空间的定义.
Recall: Riemann integral 是对于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的函数定义的, 经典定义为 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的函数.
现在我们比较对于 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的函数的 Riemann 和 Lebesgue 积分. 我们将会得出结论: **Riemann 积分是 Lebesgue 积分的特殊情况, 即, Riemann 可积的函数一定也 Lebesgue 可积, 并且积分值相同**. (对于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的函数也一样, 之后将展开.)

Recall Riemann integral 的定义:

Def 0.7

对于 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bdd, 一个 **partition** $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^n$ on $[a, b]$ 满足

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Define:

$$S_{\mathcal{P}}(f) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{[t_{j-1},t_j]} f(t_j - t_{j-1})$$

$$s_{\mathcal{P}}(f) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{[t_{j-1},t_j]} f(t_j - t_{j-1})$$

Define over all possible partition on $[a, b]$: **lower integral** and **upper integral**

$$\overline{I}(f) := \inf_{\mathcal{P} \text{ partition}} S_{\mathcal{P}}(f)$$
$$\underline{I}(f) := \sup_{\mathcal{P} \text{ partition}} s_{\mathcal{P}}(f)$$

注意到, 对于任意的 f, 总是有

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$$

我们称 f 是 **Riemann integrable** 的, if

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) := I(f)$$

这个 $I(f)$ 称为 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann integral. ♣

0.3.3 Riemann intble $\implies$ Lebesgue intble

Theorem 0.6 (Riemann integral 是 Lebesgue integral 的特殊情况)

$$f \text{ Riemann integrable } \implies \begin{cases} f \in L^1([a, b], \mathcal{L}.m) \\ I(f) = \int_{[a,b]} f \, dm \end{cases}$$

♡

Proof for (a): 对于给定 partition $\mathcal{P}$, 我们 set:

$$G_{\mathcal{P}} := \sum_j M_j \chi_{[t_{j-1},t_j]}, \quad g_{\mathcal{P}} := \sum_j m_j \chi_{[t_{j-1},t_j]}$$

从而有:

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \int G_{\mathcal{P}}\ dm, \quad s_{\mathcal{P}}(f) = \int g_{\mathcal{P}}\ dm$$

我们知道, refinement 能增加 $s_{\mathcal{P}}$, 减小 $S_{\mathcal{P}}$ 从而增加逼近精度, 这一点在 Lebesgue integral 中更加明显:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \implies g_{\mathcal{P}} \leq g_{\mathcal{P}'} \leq f \leq G_{\mathcal{P}'} \leq G_{\mathcal{P}} \tag{5}$$

$$\implies s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq I(f) \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} \tag{6}$$

由于 f Riem integrable, 存在一个 **seq of partitions** $(\mathcal{P}_n)$ 使得 $\mathcal{P}_\setminus \subset \mathcal{P}_{n+1}$**,** $||\mathcal{P}|| \to 0$ **(mesh),** 并且

$$s_{\mathcal{P}_\setminus}, S_{\mathcal{P}_\setminus} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} I(f)$$

因而 settiing

$$g := \lim_{n\to\infty} g_{\mathcal{P}_n}$$

为一个 increasing limit;

$$G := \lim_{n\to\infty} G_{\mathcal{P}_n}$$

为一个 decreasing limit; 由 mble seq 的 limit behvior 得 $g, G \in L^1(m)$ 且 $g \leq f \leq G$ 并且 by DCT:

$$\int g\ dm = \lim_n \int g_{\mathcal{P}_n} = I(f)$$

$$\int G\ dm = \lim_n \int G_{\mathcal{P}_n} = I(f)$$

从而

$$g \leq f \leq G, \quad \text{and} \quad \int (G-g)\ dm = 0$$

因而

$$g = G \ \ a.e. \ \ (\implies = f \ \ a.e.)$$

因而

$$I(f) = \int f\ dm$$

(由于 m complete, f 是 Lebesgue mble 的.)

Remark 整体 intuitive. 对定义域的切分是对值域的切分的特殊情况.

0.3.4 Lebesgue's criterion for Riemann integrability

Theorem 0.7 (Lebesgue's characterization of Riemann integrability)

定义

$$D_f = \{x \text{ where } f \text{ is not ctn at}\}$$

则有

$$f \text{ Riemann intble } \iff m(D_f) = 0$$

♡

Proof 在 395 中已经证明一次. 这里再回顾一次.

Backward direction: trivial.

Forward direction: assume f Riemann intble .

对于 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, 我们 define:

$$H(x) := \lim_{\delta \to 0} \sup_{|y-x| \le \delta} f(y), \quad h(x) := \lim_{\delta \to 0} \inf_{|y-x| \le \delta} f(y)$$

即 f 在 x 处的上下极限. 从而:

$$f \text{ ctn at } x \iff \lim_{y \to x} f(y) = f(x) \iff H(x) = h(x)$$

因而要证明 $m(D_f) = 0$, STS: $H(x) = h(x)$ a.e.

To prove this: 见 395.

0.4 modes of convergence [Fol 2.4, finished]

0.4.1 convergence family

对于 $f_n, f : X \to \mathbb{C}$, 我们目前有 4 种不同的 convergence.

2 **general ones**:

- **pointwise convergence**: 字面意思.
- **uniform convergence** (on a subset): 对于任意 error bound ϵ, 存在同一个序号 N 可以 ϵ-bound 住这个集合里所有的 x 的函数值和 limit 函数值的 error.

2 **in a measure space**:

- **a.e. convergence**: ptwise convergence for a.e. x, 即 outside a null E.
- **convergence in L^1**: $\int |f_n - f| \to 0$

  我们 recall trivial relation:

$$\text{uni. conv} \implies \text{ptwise. conv} \implies \text{conv. a.e.}$$

但是我们不清楚 L^1-convergence 和它们之间的关系.

我们看以下的 examples:

0.4.2 examples showing a.e. ptwise conv 和 L^1 conv 不能互推

Example 0.4 on $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, m)$, 以下 (f_n):

- **escape to width**

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{(0,n)}$$

  $f_n \to 0$ **uniformly 但** $\not\to 0$ **in** L^1
- **escape to hat**:

$$f_n = \chi_{(n,n+1)}$$

  $f_n \to 0$ **ptwisely** 但并不 uniformly, 并且 $\not\to 0$ **in** L^1
- **escape to height**:

$$f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n})}$$

$f_n \to 0$ **a.e., 但是并不 ptwisely,** 当然也并不 uniformly, 并且 $\not\to 0$ in L^1

- **typewriter**: 我们把区间 $[0,1]$ 划分成 2^k 个等长子区间, 对于 $1 \le n \le 2^k$ 令 $f_{k,n}(x)$ 交替取 1, 其他取 0.

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}\right] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

即, for given k, f_n is the indicator function of the n-th dyadic interval.

$$\|f_{n,k}\|_1 = \frac{1}{2^k} \to 0$$

因而 $f_{n,k} \to 0$ in L^1, 但是 $\forall x \in [0,1]$, $f_{n,k}(x) \not\to 0$ ptwisely. (也不 a.e.) (这个例子, 在推广至 L^p 空间的时候, 也有 $\|f_{n,k}\|_p \to 0$, 也可以说明 L^p **convergence 并不能推导 a.e. convergence, 除了 L^∞ 的例外**.)

在这些例子中, 我们发现, L^1-convergence 和 uniform, ptwise, a.e. 这三个 modes of covergence 都互不推导. 对于 uniform convergence 和 ptwise convergence, 这是很合理的, 因为可以函数越来越宽和扁使得积分不变但是却 uni conv; 也可以函数积分收敛但是在一个零测集上反复跳跃.

并且我们进一步发现, 就算是 a.e. 收敛, 也和 L^1 收敛没有互推关系. 比如 ex (3), 这个函数只在 0 处不收敛至 0, 但是整体的积分却是 const 1.
我们 recall: 两个函数 a.e. 相等, 等价于它们的 L^1 distance 为 0. 但是**它们作为函数列极限行为, 并不相干**.

关于 L^1-convergence 和 uniform, ptwise, a.e. convergence 的关系我们已经讨论完了.
接下来我们将关于 L^1-convergence 这一条线, 引入一些新的 convergence modes, 在更大的 convergence family 中讨论这些 convergence 的关系.

0.4.3 3 new modes of convergence: fast L^1-conv, conv measure and subseq a.e. conv

Def 0.8 (fast L^1-convergence, convergence in measure, subseq a.e. convergence)

对于 $f_n, f : X \to \mathbb{C}$, 我们定义以下三种 convergence:

- **fast L^1-convergence**: if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n - f| < \infty$$

- **convergence in measure**: if

$$\mu(x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- **subseq a.e. convergence**: if 存在一个 subseq (f_{n_j}) 使得

$$f_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} f \quad a.e.$$

♣

显然, **fast L^1-convergence $\Longrightarrow$ L^1-convergence;**
我们接下来将说明, **fast L^1-convergence 也 $\Longrightarrow$ a.e. convergence** (于是它同时作为 a.e. convergence 和 L^1-convergence 的上位收敛, 作为这两条线路的上位交汇.)
而我们也将说明: **L^1-convergence 和 a.e. convergence 都 $\Longrightarrow$ subseq a.e. convergence, 作为这两条线路的下位交汇.**

以及, L^1-convergence $\implies$ convergence in measure.

Remark 对于 convergence in measure, 还有一个可提及的定义是 **Cachy in measure**: 对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\mu(x : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

我们可以证明 (Folland 2.30)

$$\text{Cauchy in measure} \implies \text{convergent in measure}$$

但是反向并不成立. examples 中, **escape to width, escape to hat 以及 typewritter 是 convergent to 0 in measure 的, 但不 Cauchy in measure;**
这里和我们在 metric space 上 distance function 的定义中的 "convergent" 和 "Cauchy" 是不同的, **在以 distance 为收敛条件的意义上, convergent 是比 Cauchy 更强的性质.**

以下的标记将在之后几个定理的证明中用到: 我们现在 define:

$$B_{n,k} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}\}$$

这个集合表示**对第 nth term, error 控制在 $\frac{1}{k}$ 以内的点.**
从而我们可以用交并的形式来表示 ptwise 收敛点的集合:

$$\{x \mid f_n(x) \to f(x)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge N} B_{n,k}$$

Recall Chebyshev:

$$g \in L^1 \implies \mu(\{|g| \ge c\}) \le \frac{1}{c} \int |g|$$

Proposition 0.6 (fast L^1-conv $\implies$ a.e. conv.)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_n - f| < \infty \implies f_n \to f \ a.e.$$

Proof 我们取

$$\{x \mid f_n(x) \to f(x)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge N} B_{n,k}$$

的 complement

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\ge N} B_{n,k}^c = \{f_n \not\to f\}$$

By Cheb, for each n, k we have:

$$\mu(B_{n,k}^c) \le k \int |f_n - f|$$

因而由 fast L^1-convergence 的条件可得

$$\forall k \forall N, \quad \mu(\bigcup_{n\ge N} B_{n,k}^c) \le k \sum_{n=N}^{\infty} \int |f_n - f| \quad (\to 0 \text{ as } N \to \infty)$$

因而 by ctn from above,

$$\mu(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\ge N} B_{n,k}^c) = 0$$

因而

$$\mu(E) = 0$$

Remark 我们知道, L^1-convergence 和 a.e. convergence 互不能推, 因为这一个是逐点的性质, 一个是整体的性质. 但是 L^1-convergence 作为一个整体的性质又不够强大 (它允许用函数的纵深来换取宽度, 从而在收敛的情况下保持积分不变.). 然而, fast L^1-convergence 则是一个足够强大的整体性质. 因而它可以 imply a.e. convergence.

Corollary 0.4 (L^1-convergence ($\implies$ conv. in measure) $\implies$ subseq a.e. conv.)

if $f_n \to f$ in L^1, then there exists subseq $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ s.t. $f_{n_j} \to f$ a.e.
(即 L^1 **convergence implies subseq a.e. convergence**)

Proof 注意: 对于 L^1**-convergent 的 seq, 我们可以 pick 出一个 fast** L^1**-convergent 的 subseq.**
Pick $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ s.t.

$$\int |f_{n_j} - f| \leq \frac{1}{j^n}$$

Then

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_{n_j} - f| < \infty$$

由刚才的 prop 得, $f_{n_j} \to f$ a.e.

0.4.4 a.u. conv.(并非 uni. conv. a.e.) 和 Egoroff's Theorem

Def 0.9

我们称 $f_n \to f$ almost uniformly (a.u.), 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $E \subseteq A$ s.t. $\mu(E) < \varepsilon$ 并且 $f_n \to f$ uniformly on E^C

Remark 和 a.e. convergence 的定义不同, **a.u. convergence 并不能保证在一个零测集外都 uniform convergence, 但是它仍然 imply a.e. convergence.**
也有更强的一种 convergence: **uniform convergence a.e.**, 表示在一个零测集外都 uniform convergence, 其强度在 uni. conv. 和 a.u. conv. 中间. 但在这里, 对于我们即将介绍的 Egoroff's Theorem 而言不需要这么强的 convergence.
我们将在 L^p space 的部分讨论 uniform convergence a.e. 这个 convergence mode, 并表示它等价于 L^∞ convergence.

Theorem 0.8 (Egoroff's Theorem)

如果 μ 是个 finite measure ($\mu(X) < \infty$), 那么

$$f_n \to f \quad a.e. \iff f_n \to f \quad a.u.$$

Proof a.u. $\implies$ a.e.: DIY (显然)
a.e. $\implies$ a.u.: Fix $\varepsilon > 0$, 我们有

$$f_n \to f \quad a.e. \iff \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} B^c_{n,k}\right) = 0$$

因而

$$\forall k,\quad \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N} B_{n,k}^c)=0$$

By Ctn from Above:

$$\forall k,\quad \lim_{N\to\infty}\mu(\bigcup_{n\geq N} B_{n,k})=0$$

Then:

$$\forall k,\quad \exists N_k\ \ s.t.\ \ \mu(\bigcup_{n\geq N} B_{n,k})<\frac{\varepsilon}{2^k}$$

Set

$$E:=\bigcup_{K=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N_k} B_{n,k}^c$$

Then we have:

$$\begin{cases}\mu(E)<\sum_1^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon\\ f_n\to f\ \ \text{unif. on } E^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq N_k}B_{n,k}\end{cases}$$

Remark 在 Prob Theory 中很有用, 因为 prob space 是 finite measure space.

Example 0.5 $\mu=\infty$ 时的反例: 考虑 escape to hat function $f_n:=\chi_{(n,n+1)}$ on $(\mathbb{R},\mathfrak{L},m)$.
$f_n\to 0$ a.e. 但是并不 a.u., 因为 $\mu(X)=\infty$.

Theorem 0.9 (Lusin's Theorem)

If $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是 Leb. mble 的, 那么 $\forall\varepsilon>0$, 都存在 compact $K\subseteq[a,b]$ s.t. $m(K^c)<\varepsilon$ 并且 $f|_K$ ctn.

Proof 这里我们 restrict $(\mathbb{R},\mathfrak{L},m)$ to $[a,b]$, 得到这个 subspace 是一个 finite $(=b-a)$ 的 measure space. 我们知道 $C_c([a,b])\subseteq L^1(m)$ 是 dense subset.
First assume f bounded, then $f\in L^1(m)$, $\int|f|<\infty$.
Then:

$$\exists(f_n)\subseteq C_c([a,b])\ \ s.t.\ \ f_n\to f \text{ in } L^1$$

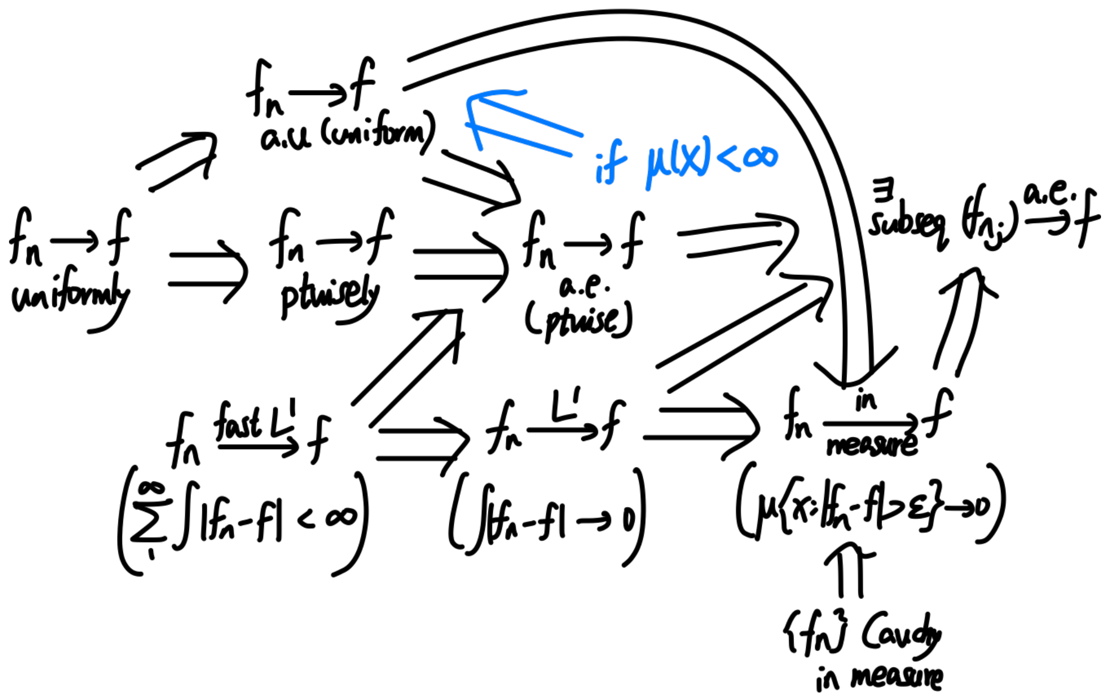
Pass to subseq: $(f_{n_j})\to f$ a.e.
Then by **Egorov**:

$$\exists F\subseteq[a,b]\text{ mble } s.t.\ \ \mu(F)<\frac{\varepsilon}{2}$$

并且 $(f_{n_j})\to f$ uniformly on F^c.
By inner regu: 存在 $K\subseteq[a,b]$ cpt s.t. $K\subseteq F^c$ 并且 $m(F^c\setminus K)<\frac{\varepsilon}{2}$, 从而 $m(K^c)<\varepsilon$ 并且 f_n **conv unif. on K, so f ctn on K.**

Remark 这个定理的证明中展示了 subseq a.e. convergence 的用处.
我们可以从一个 L^1-convergent 的 seq 中 "蒸馏" 出一个 a.e. convergent 的 subseq, conv to 同一个函数.
并且如果把空间限制在 measure finite 的 subset 上, 还能获取到一个 a.u. convergent 的 seq.
a.u. convergent 的作用很大, 比如可以保留函数在一个比较大的空间上的 ctn 性质.
因而 **subseq convergent 的性质可以 as good as convergent, a.u. 的性质可以 as good as uniform.**

0.4.5 summary: convergence mode relations



一条线是函数值方面的收敛, 一条线是测度和积分方面的收敛, 第一次交汇是 fast L^1 conv, 汇聚在 subseq a.e. conv.

subseq a.e. conv. 是最弱的 convergence, 这里所有的 convergence 都可以推到它.

这里可能还有其他的 convergence 关系. 但是我们不关心. 因为不太会用到它们的关系. **Remark** 那我们不禁想要问: 如果没有 fast L^1 convergence, 但是还是想 show L^1 convergence, 怎么办呢? 这个常用的 convergence 难道只能从定义来证明吗?

有以下两个方法:

- DCT. DCT 就是专门为了证明 L^1 convergence 定制的.
  DCT 表明:
  $$f_n \to f \text{ a.e.} + \text{ dominating function } \implies f_n \to f \text{ in } L^1$$
- 如果作为底的 measure space 是 finite measure 的, 那么 uniform conv. a.e. (which is equiv to L^∞ conv.) 可以推出 L^1 convergence. (以及任意的 L^p convergence).