Module 12 differentiation on real spaces

12.1 differentiation of regular Borel measures on $\mathbb{R}^n$ [Fol 3.4, finished]

Def 12.1 (regular Borel measure)

一个 Borel measure ν on $\mathbb{R}^n$ 被称为 regular 的, if ν is locally finite (finite on every compact set). ♣

Theorem 12.1 (regular Borel measure: 蕴含了 regularity)

一个 regular Borel measure ν on $\mathbb{R}^n$ 一定满足:

1. outer regularity:
$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) \mid E \subset U \text{ open}\}$$
2. inner regularity:
$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) \mid E \subset U \text{ open}\}$$

♡

Remark 这里不证明这两个性质. 因为目前的知识不够.

regular $\implies$ outer regularity: Hard, 其推导需要 Ch7 regular 和 inner regularity $\implies$ outer regularity: 这个简单, same as proof of Thm 1.18 on Folland.

Example 12.1 任何 LS measure on $\mathbb{R}$ (restrict to Borel sets) 都是 regular measure. Lebesgue measure m on $\mathbb{R}^n$ (restrict to Borel sets) 是 regular measure.

当然, 这个概念也可以推广至 signed/coplex measure 上.

Def 12.2 (regular signed/complex measure)

一个 signed/complex measure ν on $\mathbb{R}^n$ 被称为 regular measure, if $|\nu|$ is regular 的. ♣

Lemma 12.1

如果 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f\,dm$ 是一个 regular measure. 如果 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 extended-integrable 的, 则
$$f \in L^1_{loc}(m) \iff f\,dm \text{ is a regular measure}$$
♡

Proof Folland p99. 这显然, 因为 f locally integrable 就说明 $f\,dm$ 是 locally finite 的.

Lemma 12.2

如果 ρ, λ 是 signed/complex measure 并且 $\rho \perp \lambda$, 那么
$$\rho, \lambda \text{ are regular measures} \iff \rho + \lambda \text{ is a regular measure}$$
♡

Proof 在 hw 10 中.

Note: STS it for positive measure, 这是因为对于 regular signed / complex measure 而言,
$$\lambda \perp \rho \quad \iff \quad \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } |\lambda|(A^c) = 0 \text{ and } |\rho|(A) = 0 \quad \iff \quad |\lambda| \perp |\rho|$$
并且从而
$$\nu = \lambda + \rho, \lambda \perp \rho \implies |\nu| = |\lambda + \rho| = |\lambda| + |\rho|$$

这一命题的证明也在 hw 10 中,

12.1.1 LDT meets LRNT: 任何 regular Borel measure ν on $\mathbb{R}^n$ 对于 m 的 RN-derivative = relative density

Theorem 12.2 (LDT meets LRNT: computing RN derivative on $\mathbb{R}^n$)

Let ν be a regular Borel measure on $\mathbb{R}^n$, with LRN decomposition

$$\nu = \lambda + \rho, \quad d\rho = f\,dm, \quad \lambda \perp m$$

即

$$d\nu = d\lambda + f\,dm$$

那么: 对于 m-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 都有:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = f(x)$$

♡

Remark Also true with $B(x,r)$ replaced with shrinking E_r.

这一 Thm 一句话概括即: **如果 ν 是一个 regular measure, 那么几乎处处, 我们都可以用这一点上的 density of ν over m 来获得它对 m 的 RN derivative f.**

Proof 由 $\nu = \lambda + \rho$ 得到:

$$\frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} + \frac{\rho(B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

By LDT, 我们有**:**

$$\lim_{r\to 0} \frac{\rho(B(x,r))}{m(B(x,r))} = f(x), \quad \text{for } m\text{-a.e. } x.$$

于是, 原命题即转化为 WTS:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} = 0, \quad \text{for } m\text{-a.e. } x.$$

(Notice: 这里 0 也就是 $d\lambda/dm$, 因为两个 mutually singular 的 measure, 其 RN derivative = 0 a.e.).

By lemma: 因为 ν regular, 且 $\lambda \perp \rho$, 可以推出: λ, ρ 也是 regular 的.

WLOG 我们可以 suppose λ 是 positive measure, 因为 $\lambda \perp m \iff |\lambda| \perp m$, 并且 $|\lambda(E)| \le |\lambda|(E)$ for any E. 因而 λ 是 positive measure 的情况中这个极限为 0 也自然推广到 complex measure 上.

注意: 由于 $\lambda \perp m$, 我们可以选取 Borel set A such that

$$\lambda(A) = 0, \quad m(A^c) = 0$$

从而: 只需要证明 $\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} = 0$ for a.e. $x \in A$ 就可以了, 因为 A^c 本身也是 m 的 null set.

我们 set:

$$F_k := \left\{ x \in A : \lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} \ge \frac{1}{k} \right\}$$

从而 STS: 对于任意 k, $m(F_k) = 0$.

我们 Fix 一个 k, by λ 的 inner regularity, STS: 对于任意的 cpt $K \subset F_k$ compact, 都有 $m(K) = 0$.

于是我们 fix 一个 compact set $K \subset F_k$, 并 fix $\epsilon > 0$, STS: $m(K) < \epsilon$.

By λ 的 outer regularity, 存在 $U_\epsilon \supset A$ open 使得

$$\lambda(U_\epsilon) < \frac{\epsilon}{3^n k}$$

By F_k 的定义, 对于任意的 $x \in F_k$, 都存在某个 $r_x > 0$ 使得

$$\nu(B(x, r_x)) > \frac{1}{k} m(B(x, r_x))$$

Since

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$$

从而 by finite open covering thm, 一定存在某个 finite set K' 使得

$$K \subset \bigcup_{x \in K'} B(x, r_x)$$

我们 recall VItali covering lemma: For given collection of balls $\{B_j \subset \mathbb{R}^n\}_{j=1}^k$, 存在 **disjoint** subcollection $\{B_{j_1}, \cdots, B_{j_m}\}$ 使得

$$\bigcup_{j=1}^k B_j \subset \bigcup_{i=1}^m (3B_{j_i})$$

代入这里, 得到: 存在 $K'' \subset K'$ s.t. for all $x \in K''$, $B(x, r_x)$ 都是 disjoint 的, with

$$K \subset \bigcup_{x \in K''} 3B(x, r_x)$$

于是

$$\begin{aligned} m(K) &\leq \sum_{x \in K''} m(3B(x, r_x)) \\ &= 3^n \sum_{x \in K''} m(B(x, r_x)) \\ &\leq 3^n k \sum_{x \in K''} \lambda(B(x, r_x)) \\ &\leq 3^n k \lambda(U_\epsilon) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Since ϵ 任意, $m(K) = 0$.
Since K 任意, $m(F_k) = 0$.
Since k 任意,

$$m\left(\left\{x \in A : \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} > 0\right\}\right) = 0$$

从而得证.

Remark 这实际上是一件比较自然的事情. 因为 $\lambda \perp m$, 那么存在一个划分: 使得某边 λ null, m 具有全测度. 在这一边几乎每一点上, λ 相对于 m 的密度理应为 0; 而另一边, m 是零测度的; 从而整体, 在至多一个 m 的 null set 外, λ 相对于 m 的密度为 0.

在这个证明中, 我们巧妙地同时运用了 inner 和 outer regularity 来简化要证明的结论, 最后 reduce to finite open covering 并自然地使用 VItali covering lemma 来 bound measure. 属于比较好看的证明.

12.1.2 Differentiation on $\mathbb{R}$

12.1.3 $\{$positive regular Borel measures on $\mathbb{R}\} \simeq \{$distribution functions $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$

Recall that: **每个 distribution function (非严格 increasing, right ctn function) 都对应了唯一的一个 regular Borel measures μ_F on $\mathbb{R}$, 反之亦然.**

给定一个 regular Borel measures μ_F,

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0,x]) & ,x \geq 0 \\ -\mu((x,0]) & ,x < 0 \end{cases}$$

为它的 unique distribution function. 即 $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$, for all h-intervals.

而给定对于 distribution function F, 我们 define μ_0 by:

$$\mu_0(\bigcup_{i=1}^n (a_i,b_i]) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i))$$

然后 **by Hahn-Kolmogrov, extend to a regular Borel measure** μ_F, 使得 $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ for any h-interval, i.e. F 是 μ_F 的 distribution function, 并且 unique in the sense that 任意其他的 such function G 如果也是 μ_F 的 distribition function, 则必然有 $F - G$ 为 const. 从而

$$\mu_F \longleftrightarrow F$$

之间构成了一个 measures 和 functions 的空间的 bijection.

distribution function 和 regular measure 之间的对应关系, 关键用处在于什么呢? 我们 recall 刚刚才证明的定理, 不过使用一个更 general 的 version (can easily be extended from what we proved):

Theorem 12.3 (slightly more general version of LRNT meets LDT)

Let ν be a regular Borel measure on $\mathbb{R}^n$, with LRN decomposition

$$\nu = \lambda + \rho, \quad d\rho = f\,dm, \quad \lambda \perp m$$

那么: 对于 m-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 取任意 nicely shrinking $\{E_r\}$ to x, 都有:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x)$$

♡

因而如果我们有一个 $\mathbb{R}$ 上的 regualr measure μ_G, 那么考虑 $E_r := (x, x+r]$, 我们有:

$$\frac{\mu_G(E_r)}{m(E_r)} = \frac{G(x+r) - G(x)}{r}$$

从而我们发现 for a.e. x, 都有:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_G(E_r)}{m(E_r)} = G'(x)$$

我们可以得到: **这个 regualr measure μ_G 相对于 m 的 LRN derivative, 就等于它的 distribution function 的 derivative!** 甚至, 我们可以由此判断: **如果 $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个 distribution function (increasing, right ctn), 那么它的 derivative 一定是 a.e. 存在的!** Since μ_G regular $\implies$ G locally intble $\implies$ by LDT, 这个 density limit 是 a.e. 存在的.

至此, 我们发现了 Monotone Differentiation Theorem.

12.1.4 Monotone Differentiation Theorem

Theorem 12.4 (Monotone Differentiation Theorem)

令 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个 increasing (nondecreasing) function, set:

$$G(x) := F(x+)$$

即 F 的右极限函数. (note: G 一定是 **increasing** 且 **right ctn** 的, 因而是一个 distribution function)
则有:

- $D_F := \{x : F \text{ disctn at } x\}$ 是至多 ctbl 的 (从而一定 zero measure)
- F, G 都 differentaitble m-a.e., 并且

$$F' = G' \text{ a.e.}$$

Proof of (a): STS that, 对于任意 $m,n\in\mathbb{N}$,

$$Z_{m,n} := \left\{x\in[-m,m] : F(x+)-F(x-)\geq \frac{1}{n}\right\}$$

是一个 finite set. 从而 $D_F = \bigcup_{m,n} Z_{m,n}$ 是 at most ctbl 的.
而 $Z_{m,n}$ 确实是 finite 的, 因为 $F(-m)-F(m)$ 是 bounded 的, 所以 $Z_{m,n}$ 一定是 finite 的. (至多经历 $F(-m)-F(m)/(1/n)$ 个这样的点).

Proof of (b): 首先我们知道, G right ctn + increasing $\implies$ μ_G 是一个 LS (thus regular when restricted to Borel sets) measure on $\mathbb{R}$.
Apply LDT to μ_G, take $E_r := (x, x+r]$ as the shrinking family to x.
于是

$$\frac{\mu_G(E_r)}{m(E_r)} = \frac{G(x+r)-G(x)}{r}$$

由 LDT $\implies$ 上式的 limit exist for a.e. x (μ_G w.r.t. m 的 RN derivative), 它就是 G', 且 G' a.e. 存在, 等于其 induce 的 LS measure 的 RN derivaive.
现在 remains to show: F 的 derivative 也 a.e. 存在, 并且和 G 的相等. 我们 set:

$$H := G - F$$

从而 STS: H' a.e. 存在且为 0.
首先, $H>0$ 并且 $H\neq 0$ 只有可能在 discontinuous points (which is at most ctbl) 上. We set:

$$\mu := \sum_{x\in D_F} H(x)\delta_x$$

从而对于任意区间 I,

$$\mu(I) = \sum_{x\in D_F\cap I} H(x)$$

由于 F, G locally intble, 这个 μ 是一个 **regular Borel measure**.
并且, 这个 μ 的 null set 为 D_f^c, 而 D_f, as we have proved, is at most ctbl, 因而是 m 的 null set. 从而得到:

$$\mu\perp m$$

于是

$$\frac{d\mu}{dm} = 0 \quad a.e$$

从而由 LDT 得:

$$\frac{\mu((x-r,x+r))}{2r} \overset{r\to 0}{\to} 0 \quad a.e.$$

因而对于任意的 $h>0$,

$$\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right| \le \frac{H(x+h)+H(x)}{|h|} \le \frac{\mu((x-2|h|,x+2|h|))}{4|h|} \overset{h\to 0}{\to} 0$$

finishing the proof.

Remark As conclusion: $\mathbb{R}$ 上的任意 increasing 函数 F, 其 right limit induce 的 LS measure 对于 m 的 RN derivative, 就等于它的 derivative a.e.

12.2 functions of bounded variation: $F \in BV$ [Fol 3.5]

上一节课我们证明了 Monotone Differentiation Theorem: 它表明的是, 任何 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的 non-decreasing function 都是 differentiable a.e. 的.

我们知道一个函数在一整个区间上 differentiable 其实是一个比价严格的条件, 但是 differentiable a.e. 的条件就略好达到一些.

Question: 如果一个函数在 $[a,b]$ 上 differentiable a.e., 那么 in a.e. sense, 可以在 $[a,b]$ 上定义它的 derivative F'. 那么, 是否一定有

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dx$$

呢? 答案肯定是不一定的. 以下是三个反例: 1. Heaviside function; 2. Cantor function; 3.$F'(x)=0$ a.e., but not 0 on a null set.

这也很显然: 因为单点的值是无法控制的. 我们只能控制 in sense of a.e. , 因而有 outlier 的 a,b 是很正常的.

我们之后将 revisit 这一问题, 给出这个等式成立的 condition.

接下来我们将

12.2.1 total variation function T_F of a function F

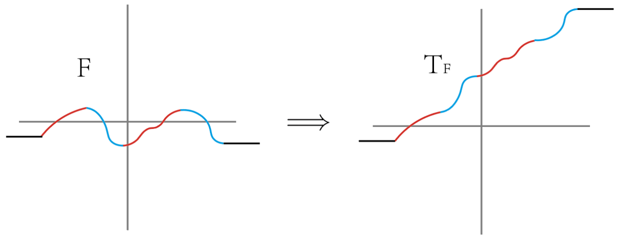
Def 12.3 (total variation function)

给定一个 function $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 我们定义它的 total variation function T_F 为:

$$T_F:\mathbb{R}\to[0,\infty]$$
$$x\mapsto \sup\{\sum_{j=1}^{n}|F(x_j)-F(x_{j+1})| : -\infty<x_0<\cdots<x_n=x\}$$

♣

Remark Total variation 是一个很形象的定义. $T_F(x)$ 表示的是 F 从 $-\infty$ 到当前 x 的这段定义域上, 总的变化量. 它 count into 所有的变化, 包括离散的和连续的, 正方向的和负方向的.



Lemma 12.3

对于任意的 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T_F 都是 increasing 的; 并且对于任意 $a < b$, 有:

$$T_F(b) = T_F(a) + T_F(a; b)$$

where

$$T_F(a; b) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j+1})| : b = x_0 < \cdots < x_n = a\}$$

表示 F 的定义域限制在 $[a, b]$ 上的 total variation.

Proof 显然, 由于 total variation 是 increasing 的, 我们总是可以 **greedyly** 选择 **partition**. 对于一个 partition, 总是可以插入一个中间点把它分成两半, 而这两半的 sub partition 的 total variation 的和 $\geq$ 原先的 partition 的 total variation.

12.2.2 space of functions of bounded variation: BV 的基本性质

Def 12.4 (function of bounded variation)

如果 $T_F(\infty) < \infty$, 我们称 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is **of bounded variation** 的, 写作 $F \in BV$.

Def 12.5 (function of bounded variation on an interval)

如果 $T_F(a; b) < \infty$, 我们称 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is **of bounded variation** on $[a, b]$, 写成 $F \in BV([a, b])$.

首先显然, $F \in BV$ 可以 reduce to real-valued 的情况来讨论.

Proposition 12.1

$$F \in BV \iff \operatorname{Re} f \in BV \text{ and } \operatorname{Im} f \in BV$$

12.2.3 BV as a vector space

Lemma 12.4 (BV 是一个 complex vector space)

如果 $F, G \in BV$, 那么对于任意的 $a, b \in \mathbb{C}$, we have

$$T_{aF+bG} \leq |a| T_F + |b| T_G$$

从而

$$aF + bG \in BV$$

Proof 易得. 显然, 函数的 total variation 是线性可加的.

12.2.4 $F \in BV$ 的 T_F 的 limit behavior

我们知道，$F \in BV$ if $T_F(\infty) < \infty$. 而关于 $T_F(-\infty)$, 同样有强结论:

Proposition 12.2

$$F \in BV \implies T_F(-\infty) = 0$$

Proof Let $\epsilon > 0$.
从而对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, since $F \in BV$ 那么 T_F bounded, $T_F(x)$ 是一个 real number.
因而我们可以找到一组 partition points $x_0 < \cdots < x_n$ 使得

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \epsilon$$

从而

$$T_F(x) - T_F(x_0) \geq T_F(x) - \epsilon$$

从而

$$T_F(y) \leq \epsilon, \quad \forall y \leq x_0$$

Since $\epsilon > 0$ arbitrary, 这证明了 $T_F(-\infty) = 0$

Remark F bounded variation 的必要条件是它在 $x \to \infty$ 时, 截止 x 处的 variation $\to 0$.

Lemma 12.5 ($F \in BV$ right ctn $\implies T_F$ right ctn)

$F \in BV$ right ctn $\implies T_F$ 也 right ctn

Proof Let $x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$.
Let

$$\alpha := T_F(x+) - T_F(x)$$

WTS: $\alpha = 0$.
By right ctnity of F 和 T_F increasing, 我们可以选择 $\delta > 0$, 同时满足: $|F(x+h) - F(x)| < \epsilon, T_F(x+h) - T_F(x+) < \epsilon$ whenever $0 < h < \delta$.
Fix 一个满足 $0 < h < \delta$ 的 h. 其后的证明见 Folland 104.

12.2.5 属于 $BV, BV(I)$ 的函数

Lemma 12.6 (哪些函数一定 BV or $BV(I)$)

1. 如果 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bounded 且 increasing, 那么 $F \in BV$ 且 $T_F(x) = F(x) - F(-\infty)$.
2. 如果 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz countinuous 的, 那么 $F \in BV(I)$ for 任意的 cpt interval I
3. 如果 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 differentiable 且 F' bounded 的, 那么 $F \in BV(I)$ for 任意的 cpt interval I

Proof (1) trivial.
(2) by def: 考虑 Lipschitz const M, 则 $T_F(a; b) \leq M(b - a)$.

(3): 这是 (2) 的推论, 因为 recall: by MCT 可得: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 differentiable 且 F' bounded $\implies$ F Lipstchiz ctn.

Proposition 12.3

以下是一些经典的函数的 variational behavior:

1. $f(x) = \sin(x)$: 属于 $BV(I)$ for 任意 cpt I, 但不属于 BV.
2. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(0) = 0$: 属于 $BV(I)$ **iff** $0 \notin I$.
3. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, f(0) = 0$: 属于 $BV(I)$ **iff** $0 \notin I$.

Proof (1) 显然; (2),(3) 见 HW 11. 其实它们基本相同. ($\implies$): if $0 \notin I$ then $F \in BV(I)$. 是简单的, we differentiate $F(x) = x \sin(1/x)$ for $x \neq 0$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

在不含 0 的区间上, 它是 bounded 的. 于是 by lemma 得证.

($\impliedby$): if $F \in BV(I)$ then $0 \notin I$. This is equiv to: if $0 \in I$ then $F \notin BV(I)$.

Suppose $0 \in I = [a, b]$ then $a \leq 0$ and $b \geq 0$, one of which is strict. WLOG we suppose $b > 0$.

我们的 idea 是 harmonic series. 考虑

$$y_n := \frac{1}{n\pi + \pi/2} \to 0^+$$

we have:

$$F(y_n) = y_n \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{n\pi + \pi/2} \cdot \sin(n\pi + \pi/2)$$

For odd n, $F(y_n) = \frac{-1}{n\pi + \pi/2}$, for even n, $F(y_n) = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$. Since $b > 0$, for some N_0 we have $y_{N_0} < b$. Then we consider the partition: pick $N \in \mathbb{N}$, and use $x_0 = 0, x_1 = y_{N_0+N-1}, x_2 = y_{N_0+N-2}, \cdots, x_N = y_{N_0}, x_{N+1} = b$ as the partition points of $[0, b]$.

Then we have

$$\sum_{n=1}^{N+1} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq \sum_{n=N_0}^{N_0-2+N} \frac{1}{\pi n + \pi/2} + \frac{1}{\pi(n+1) + \pi/2} \geq 2 \sum_{n=N_0}^{N_0-2+N} \frac{1}{\pi n + \pi/2}$$

As $N \to \infty$, this sum $\sum_{n=1}^{N+2} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \to \infty$, by the harmonic series.

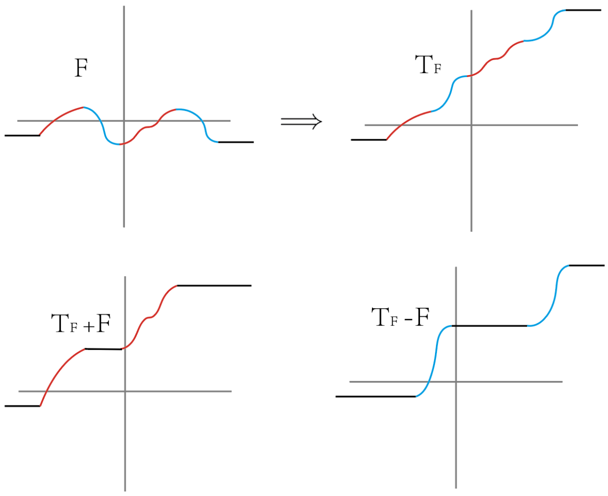
12.2.6 Jordan decomposition for $f \in BV$: $f = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$

Lemma 12.7

如果 real-valued $F \in BV$, 那么 $T_F + F, T_F - F$ 都是 increasing 的.

Remark $T_F + F$ 即: F increasing 的地方加倍 increasing, F decreasing 的地方 const;

$T_F - F$ 即: F decreasing 的地方反向加倍 increasing, F increasing 的地方 const;



Proof 任取 $x < y$.

Let $\epsilon > 0$.

Can find $x_0 < x_1 < \cdots < x_N = x$, s.t.

$$\sum_1^N |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \epsilon$$

从而

$$\begin{aligned} T_F(y) &\geq \sum_1^N |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(y) - F(x)| \\ &\geq T_F(x) - \epsilon + |F(y) - F(x)| \end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 可以得到:

$$T_F(y) - T_F(x) \geq |F(y) - F(x)|$$

因而:

$$(T_F(y) - F(y)) - (T_F(x) - F(x)) \geq |F(y) - F(x)| - (F(y) - F(x)) \geq 0$$

Theorem 12.5 (Jordan decomposition for $F \in BV$)

对于 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (注意是 real-valued):

$$F \in BV \iff F \text{ 等于两个 bounded increasing functions 的差}$$

Specially,

$$F \in BV \iff T_F \pm F \text{ bounded}$$

因而 for $F \in BV$, 我们总是可以把它写作

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$$

where we call it as the **Jordan decomposition** of $F \in BV$. 其中, $\frac{1}{2}(T_F + F)$ 被称为 F 的 **positive variation**; $\frac{1}{2}(T_F - F)$ 被称为 F 的 **negative variation**. ♡

Proof 显然, $F \in BV \implies F$ bdd, 因为

$$|F(y) - F(x)| \leq T_F(\infty) - T_F(-\infty)$$

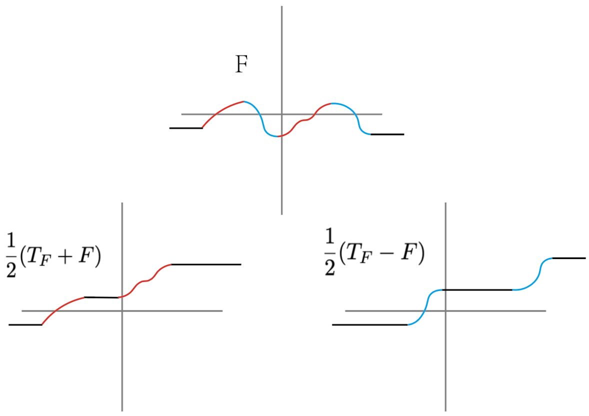


Figure 12.1: positive/negative variation

For $F \in BV$, we have $T_F(\infty) < \infty,\ T_F(-\infty) = 0$.
又 $F \in BV \implies T_F$ bdd by def, 我们得到:

$$F \in BV \implies T_F \pm F \text{ bounded}$$

而反向 trivial (bounded function 的差仍然 bounded).
Remark 我们可以通过 F 和 0 的 min, max 取到它的正负部分, 把它按正负部分分解成

$$F = F^+ - F^-$$

而这里, Jordan decomposition 则是按照它正负方向上的 variation 来分:

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$$

F 的 **positive variation, negative variation** 和 total variation 一样也是很形象. 我们把

$$F_+ := \frac{1}{2}T_F + F, \quad F_- := \frac{1}{2}T_F - F$$

(这和正负部分的拆分的记号差别在正负号的上下.)

12.2.7 corollaries of Jordan decomposition

Corollary 12.1

Let $F \in BV$. By Jordan decomposition, F 等于两个 bounded increasing functions 的差. 从而我们 **by MDT** 得:

- $F(x+), F(x-)$ 存在 for all x; $F(\pm\infty)$ 也存在.
- $D_F = \{x : F \text{ disctn at } x\}$ 是 at most ctbl 的.
- 定义 $G(x) := F(x+)$, 则 F, G 都 a.e. differentiable 且 $F' = G'$ m-a.e.

这里最重要的是:

$$F \in BV \implies F \text{ a.e. differentiable}$$

12.3 NBV & AC 空间, 以及其上的 FTC for Lebesgue integral [Fol 3.5, finished]

12.3.1 NBV 及其性质

Def 12.6 (NBV)

For $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 我们定义: $F\in NBV$, if $F\in BV$ 且 F right ctn, $F(-\infty)=0$.

Remark 这个要求中 $F(-\infty)=0$ 这一条并不要紧, 因为我们知道 for $F\in BV$, $F(-\infty)=c$ for some const c 是一定的 (因为 $T_F(-\infty)=0$), 因而 right ctn 的 $F\in BV$ 减去一个常数一定是 NBV 的. $F\in NBV$ 的

Proposition 12.4

$NBV\subset BV$ 是一个 linear subspace.

Remark 我们容易发现

$$F\in BV \iff T_F\in BV \iff F_+,F_-\in BV$$

又因为, $T_F(-\infty)=0$ 对于 $F\in BV$ 总是成立, 且我们知道 F right ctn $\implies T_F$ right ctn; 于是:

$$F\in BV \text{ and right ctn} \implies T_F\in NBV \implies F_+,F_-\in NBV$$

我们已经知道:

$$\{\text{positive regular Borel measures on } \mathbb{R}\}\simeq\{\text{distribution functions } F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$

Notice: 这一点 is achieved by

$$F_\mu(x):=\begin{cases}\mu((0,x]) & ,x\ge 0\\ -\mu((x,0]) & ,x<0\end{cases}$$

等同于:

$$\mu_F((a,b])=F(b)-F(a)$$

注意: positive regular Borel measure 和 distribution functions 都有一个共同点: 它们在 bounded set 上是 bounded 的, 但是整体可以 unbounded.

而现在我们证明:

12.3.2 $\{$complex Borel measures on $\mathbb{R}\}\simeq NBV$

注意: 一个 complex Borel measure 和一个 $F\in NBV$ 都是 finite 的.

Theorem 12.6 ($\{$complex Borel measures on $\mathbb{R}\}\simeq NBV$)

1. 对于 $\mathbb{R}$ 上的 complex measure μ, defining

$$F(x):=\mu((-\infty,x])$$

则有:

$$F\in NBV$$

2. 对于 $F \in NBV$, 一定存在某个 unique complex measure μ_F on $\mathbb{R}$, 使得

$$\mu((-\infty, x]) = F(x) \quad \forall x$$

Proof (1): 当 μ 是 positive 的情况下, 是显然的. complex 的情况就是 re/im 部分分别叠加即可.
(2): 同样, WLOG 我们可以假设 F 是 real-valued 的.
$F \in NBV \implies F = F_+ - F_-$, 这两个都是 bounded increasing functions 且 NBV, 从而存在两个 finite signed measure 满足:

$$\mu_\pm((-\infty, x]) = F_\pm(x) - F_\pm(-\infty)$$

再定义

$$\mu := \mu_+ - \mu_-$$

即可

Remark 这里其实和 positive regular measure 关联 distribution function 的 way:

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & , x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) & , x < 0 \end{cases}$$

是等价的, 只不过**差了一个常数** $\mu((-\infty, 0])$ 而已.
之所以我们这里可以直接定义

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

是因为, **对于 complex measure (thus finite) 而言, 这个常数** $\mu((-\infty, 0])$ **一定是 finite 的. 但是对于 regular positive regular measure 而言, 这个常数可能是无穷** (且很可能). 因而对于 regular positive regular measure 我们采用这种迂回的定义方式来避开无穷值, 但是对于 complex measure 我们可以直接爽快地定义

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

Theorem 12.7 (μ_F **的 total variation measure** $= \mu_{T_F}$)

对于任意的 $F \in NBV$, 我们有:

$$|\mu_F| = \mu_{T_F}$$

Specially when F 是 real-valued 情况下, 那么 μ_F 是一个 finite positive measure, 且有

$$\mu_\pm = \mu_{F_\pm}$$

Now: Given $F \in NBV$ with associated c.m. μ_F, 什么时候 $\mu_F \perp m$, 什么时候 $\mu_F \ll m$?

Theorem 12.8 (characterization of $\mu_F \perp m$ **和** $\mu_F \ll m$**, for** $F \in NBV$ **)**

对于 $F \in NBV$, 我们已经知道: F' m-a.e. 存在, 且 $F' \in L^1(m)$.
Now we claim, 有:

$$\mu_F \perp m \iff F' = 0 \quad m\text{-a.e.}$$

以及

$$\mu_F \ll m \iff F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt \quad \forall x$$

Proof Let $x \in \mathbb{R}$. Applying LDT and LRNT, with $E_r := (x, x+r]$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)} = \lim_{r \to 0} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} = F'$$

因而 F' 就是这个 RN derivative. 对于

$$\mu_F = \lambda + \rho$$

where $\lambda \perp m, \rho \ll m$, 我们有:

$$F(x) := \mu_F((-\infty, x]) = \lambda((-\infty, x]) + \rho((-\infty, x])$$

我们知道, $\mu_F \perp m \iff \rho = 0$, 从而 by LDT meets LRNT, we know that

$$F' = 0 \ a.e.$$

而 $\mu_F \ll m \iff \lambda = 0$, 从而直接:

$$F(x) := \rho((-\infty, x]) = F' dm((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt$$

12.3.3 AC 及其性质

Def 12.7 (absolutely continuous function)

我们定义 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 absolutely ctn 的, if 对于任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得对于任意的 disjoint intervals $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N)$, 都有:

$$\sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_1^N |b_j - a_j| < \delta$$

♣

Remark absolutely continuous 是比 uniformly continuous 严格更强的条件: 我们只考虑 $N = 1$ 而非任意正整数时这个 def 就 reduce 为 uniform ctn.

absolutely continuous 表示了一种更强的控制性: 选取任意一些地方的变化足够小的 x, 其引发的 y 的变化一定可控. (y 的变化的可控性完全由 x 的变化量决定, 不由 x 的位置决定)

这一看就和 measure 有关系.

Def 12.8 (absolutely continuous function on a cpt interval)

我们定义 $F : I \to \mathbb{C}$ 是 absolutely ctn 的, if 对于任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得对于任意的 disjoint intervals $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N) \subset I$, 都有:

$$\sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_1^N |b_j - a_j| < \delta$$

♣

Lemma 12.8 ($F \in NBV$ abs ctn $\iff \mu_F \ll m$)

对于 $F \in NBV$,

$$F \in AC \iff \mu_F \ll m$$

♡

Proof 我们 recall, abs ctn 除了 "m 的 nullsets 也一定是 μ_F 的 null sets" 之外, 还有另一个 characterization: $\mu_F \ll m$ 当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得 $m(E) < \delta \implies |\mu_F(E)| < \epsilon$.

显然, 这个 characterization 和这里的命题有关. 我们发现, $\mu_F \ll m \implies F \in AC$ 直接 naturally follows from 这个 form. Let $\epsilon > 0$, 存在 δ 使得 $m(E) < \delta \implies |\mu_F(E)| < \epsilon$. 那么考虑 $E = \bigsqcup_1^N (a_j, b_j)$ with $m(E) < \delta$, 直接有

$$|\mu_F(E)| = \sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon$$

从而得证.

而反向, 我们考虑 $m(E) = 0$, 并利用 outer regularity 取一个逼近它的 open set (每个是 union of finite disjoint open intervals) seq, 逼近 E, with $m(U_1) < \delta$. 由 $F \in AC$ 可以得到

$$\mu_F(U_j) \leq \mu_F(U_1) < \epsilon$$

for all j, 从而 $\mu_F(E) \leq \epsilon$. 从而得证, since ϵ arbitrary.

12.3.4 FTC for Lebesgue integral on $\mathbb{R}$: requires $NBV + AC$

Corollary 12.2 ()

如果 $f \in L^1(m)$, 那么

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \in NBV \cap AC, \quad f = F' \quad a.e.$$

Conversely, 如果 $F \in NBV \cap AC$, 那么

$$F' \in L^1(m), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt$$

Remark forward 方向即: $f \in L^1(m)$ 则它的累积函数 $\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ 具有良好的连续性和变差有界性, 从而满足 FTC: a.e. 有

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\right) = f(x)$$

并且 for $F(x) := \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$, 这个函数是 $NBV \cap AC$ 的. 这可以推出:

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)\, dt$$

backward 方向即: 如果 F 具有良好的连续性和变差有界性, 那么它的导数满足:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt$$

简而言之: **FTC-I for Lebesgue integral 在整个 $\mathbb{R}$ 上都成立当且仅当 $F \in NBV \cap AC$.**

12.3.5 FTC for Lebesgue integral on a cpt interval: 只需要 AC

比起刚才的 FTC-I, FTC-II 的条件要宽松很多, 只需要 F 在它需要被用到的 compact interval 上 AC 即可以. 这是因为, 我们不需要用到 NBV 只需要 BV, 并且在 cpt interval 上, AC 本身就可以推出 BV.

Lemma 12.9

如果 $F \in AC([a,b])$, 那么 $F \in BV([a,b])$.

即

$$AC([a,b]) \subset BV([a,b])$$

Proof 这是显然的. 我们看到 $F \in AC([a,b])$ 的定义: on $[a,b]$ we have:

$$\sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_1^N |b_j - a_j| < \delta$$

我们不妨考虑 $\epsilon = 1$, 然后可以划分 $[a,b]$ into 一个个总长度为 $\frac{\delta}{2}$ 的由 disjoint intervals 构成的块 (补空缺没事), 从而 Bound 住这个划分上的 variation by parition $\sum_1^{N_0} |F(b_j) - F(a_j)|$. 而我们发现: 这个时候我们不论怎么 fine 这个划分, 每个块的总长度总归是不变的, 从而仍然可以使用原先的 bound.

我们 recall: for total variation, partition 的选取是 greddy 的. 从而这就足以得证.

Remark 这里没有仔细证明, 但是理解这个 idea 即可. 这表现了 locally, AC 是一个比 BV 更强的条件, 因为 total variation 就是 sup of variations over 所有划分, 而 AC **的定义正好就是: 无视划分的方法, 只要这个集合的总长度小于 δ, 它上面的 variation by partition 就要小于 ϵ.**

Theorem 12.9 (FTC-II for Lebesgue integral on a cpt interval)

TFAE:

- $F \in AC[a,b]$
- F 是 diffble a.e. on $[a,b]$ 的, 且 $F' \in L^1([a,b], m)$, 且

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\, dt$$

for all $x \in [a,b]$.

Proof 首先, $F \in AC[a,b] \implies F \in BV[a,b] \implies F$ diffble a.e. on $[a,b]$.

Notice that: 这里我们只考虑 $F|_{[a,b]}$, 于是我们可以将其他部分的值都设为 smooth 的, 并 normalize it: 把 $F(x) := 0$ for $x < a$, $F(x) := b$ for $x > b$.

又 $F \in AC \implies F$ right ctn for sure, 我们 then have: $F \in NBV$, 从而

12.3.6 characterization for Lipschitz ctn

Theorem 12.10 (characterization for Lipschitz ctn)

对于 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, we have:

$$F \text{ Lipschitz ctn with const } M \iff F \in AC \text{ and } |F'(x)| \le M \text{ a.e.}$$

Proof 见 HW 12.

从而我们得到: ctnity 条件的递推关系:

$$\text{Lipschitz ctn} \implies \text{abs ctn} \implies \text{uniformly ctn} \implies \text{ctn}$$

关于连续函数的可导性: Lipschitz ctn 可以推得 a.e. diffble + bounded derivative; abs ctn 可以推得 a.e. diffble 且在 cpt interval 上 derivative L^1; 而往后的 uniform ctn 则不蕴含可导性条件.

而关于和可导性紧密相关的变差性质: abs ctn 在 bounded interval 上是比 BV, NBV 更强的条件, 而在 $\mathbb{R}$ 上则并不是.

在 $\mathbb{R}$ 上, NBV + AC 的函数可运用 FTC. 而在 bounded area 上 AC 的函数就可以运用 FTC.