

## 0.1 the dual of $L^p$ -I [Fol 6.2]

对应: Folland 5.1, 6.2.

(原本这是在 lec 25 的位置讲的, 但是当时由于没有 Radon-Nikodym Thm, 没有足够的工具去完成

$$(L^p)^* = L^q$$

的证明 (差了一个 proof surjectivity of the isometry  $g \rightarrow \ell_g$ ). 因而我把它放在这里, 衔接下面几个 lectures, 完成 6.2 这一节.

我们首先练习一个 example of Hölder's ineq 来回忆一下:

recall Hölder's ineq: for  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

**Example 0.1** Prove:

$$f \in L^3([-1, 1], m) \implies \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{|x|}} dx < \infty$$

**Proof** Apply Hölder's: 既然  $f \in L^3$ , 那么我们就拉满, take  $p = 3$ , correspondingly  $q = 3/2$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{|x|}} dx \leq \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left( \int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^{\frac{3}{4}}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

both integrals evaluate  $< \infty$

### 0.1.1 intro to dual space

这里只讨论  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$ .

recall, 对于一个  $\mathbb{K}$ -vector space  $V$ , 一个 linear functional of  $V$  就是一个 linear function

$$f : V \rightarrow \mathbb{K}$$

对于作为 NVS 的  $V$ , 我们还可以定义一个 linear functional 的 boundedness.

#### Def 0.1 (bounded linear functional)

Let  $V$  be a  $\mathbb{K}$ -NVS,  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  be a linear functional.

我们称  $f$  bounded, if exist  $C > 0$  s.t.

$$|f(v)| \leq C\|v\|, \quad \forall v \in V$$



**Remark** 注意, linear functional 的 boundedness 和它作为函数的 boundedness 是不一样的概念.

作为函数的 boundedness 表示函数值的有界性, 而作为 linear map 的 boundedness (此处) 表示它的作用效果的 boundedness, 不会把一个 vector 放大太多倍.

#### Proposition 0.1 (linear functional bounded $\iff$ ctn at 0)

if  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  is a linear functional, TFAE:

- $f$  bounded
- $f$  continuous
- $f$  continuous at  $0 \in V$



**Proof** (ii) to (iii): trivial.

(i) to (ii): 假设  $f$  bounded, 那么可以 pick  $C$  s.t.  $|f(v)| \leq C\|v\|$ .

Pick  $v_0 \in V, \epsilon > 0$ . Set  $\delta := \frac{\epsilon}{C}$ . Then

$$\|v - v_0\| < \delta \implies |f(v) - f(v_0)| = |f(v - v_0)| \leq C\|v - v_0\| < \epsilon$$

从而 ctn.

(iii) to (i):  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\|v\| \leq \delta \implies |f(v)| \leq 1$ .

于是  $\forall v \in V \setminus \{0\}$ , 都有

$$|f(v)| = \frac{|f(v \cdot \frac{\delta}{\|v\|})|}{\frac{\delta}{\|v\|}} \leq \frac{\delta}{\|v\|}$$

taking  $C = \frac{1}{\delta}$ , 得到 boundedness.

**Remark** 这个 proposition 看起来很神奇, 把一个整体性质和局部性质等价了, 但是我们知道 linear map 就是局部决定整体的, by its def.

recall in 395: 实际上这个性质应该对所有的 linear map 都成立, 不只是 linear functionals.

通常我们认为 linear map 总是 ctn 的, 但是其实它 ctn iff bounded, unbounded 的时候就不 ctn.

以及: **linear map between finite dim spaces 总是 bounded 的, 从而总是 ctn 的.** 不过这里我们要讨论的就是 infinite dim spaces. 比如  $L^p$ .

### Def 0.2 (dual space)

If  $V$  is a NVS, 我们定义它的 **dual space** as:

$$V^* := \{\text{bounded linear functionals } f : V \rightarrow \mathbb{K}\}$$



### Def 0.3 (norm of dual space: 即 dual norm)

Given  $f \in V^*$ , set

$$\|f\|_* := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)|$$

where  $\|v\|$  表示的是  $V$  上使用的 norm. 这个 norm 被称为 dual norm.



这个形式是我们在各种地方见过非常多次的 operator norm, 只不过这里, 指定一个 NVS, 对于其 dual space 上的 linear functional, 它是固定的, 不需要指定  $v$  和  $f(v)$  使用哪个 norm, 因为  $f(v)$  就是标量, 而  $v$  from 原 NVS, 已经指定好 norm. **Remark** 从定义中我们可知, 对于任意的  $v \in V, f \in V^*$ , 都有:

$$|f(v)| \leq \|f\|_* \|v\|$$

## 0.1.2 $V^*$ being a Banach space

### Theorem 0.1 (dual space is always Banach)

对于任意的 NVS  $V: V^*$  都是一个 Banach space. (not assuming  $V$  Banach).



**Proof** First we can confirm  $V^*$  is a VS, 因为它由 linear functions of the same size 组成.

**Claim 1:**  $V^*$  是一个 NVS.

因为任取  $v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$  都有  $|f(\lambda v)| = |\lambda| \cdot |f(v)|$ , 从而

$$f \in V^*, \lambda \in \mathbb{K} \implies \|\lambda f\|_* = |\lambda| \cdot \|f\|_*$$

以及

$$f, g \in V^*, v \in V \implies |(f+g)(v)| = |f(v) + g(v)| \leq |f(v)| + |g(v)|$$

因而

$$f, g \in V^* \implies \|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

下面我们 verify  $V^*$  Banach.

**Claim 2:** 一个 Cauchy seq in  $V^*$  一定 pointwise converge to some  $f$ .

Pick  $(f_n)_1^\infty$ , 一个 Cauchy seq in  $V^*$ . Let  $\epsilon < 0$ , 存在  $N$  使得对于任意  $m, n \geq N$  都有  $\|f_n - f_m\|_* < \epsilon$ , 我们简写为:

$$\|f_n - f_m\|_* \rightarrow 0$$

因而对于任意  $v \in V$ , we have

$$|f_n(v) - f_m(v)| \leq \|f_n - f_m\|_* \|v\| \rightarrow 0$$

并且我们知道  $\mathbb{K}$  是 **complete** 的, 因而  $f_n(v)$  converges in  $\mathbb{K}$  to some element, declared to be  $f(v)$ .

即  $f_n \rightarrow f$  pointwisely:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(v) = f(v)$$

(这是自然的, 因为如果 linear function  $f - g$  的 operator norm 是 0, 那么说明它们毫无差别, 否则一定有某个地方  $f, g$  的 image 不一样, 使得这个 norm 不是 0.)

**Claim 3:**  $f$  是 **linear** 的, 并且 **bounded** (从而 **ctn**), 即  $f \in V^*$ .

linearity: 由于每个  $f_n$  都是 linear 的,

$$f_n(x + \alpha y) = f_n(x) + \alpha f_n(y)$$

因而

$$f(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) + \alpha f_n(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(x) + \alpha f(y)$$

因此  $f$  是线性的.

(Note: 这里证明了 **linear map** 的 **pointwise** 极限一定也是 **linear map**.)

**Boundedness:** Note a standard fact from metric spaces: **every Cauchy sequence is bounded**.

因而  $f_n$  是一个 bounded seq, 即存在  $M > 0$  such that  $\|f_n\| \leq M$  for all  $n$ . Then

$$|f(x)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_* \|x\| \leq M \|x\|$$

Hence  $f$  is bounded (continuous), and  $\|f\|_* \leq M$ . **Claim 4:**  $\|f_n - f\|_* \rightarrow 0$ , proving  $V^*$  是 **Banach** 的.

WTS:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|=1} |(f_n - f)(x)| \rightarrow 0$$

//TO BE DONE.

Actually 这个 Theorem 有更 general 的形式:

**Theorem 0.2**

对于任意 nvm  $V$  和 Banach  $W$ ,  $\mathcal{L}(V, W)$  一定是 Banach 的.



Proof 见 Folland 5.4.

**0.1.3**  $(L^p)^* = L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ **Theorem 0.3** (对于互为 conjugate exponent 的  $p, q$ ,  $L^p$  是  $L^q$  的 dual space)

For  $1 < p, q < \infty$  with  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , we have:

$$(L^p)^* = L^q$$

In particular the Hilbert space:

$$(L^2)^* = L^2$$



**Proof** Define map

$$L^q \rightarrow (L^p)^* \tag{2}$$

$$g \mapsto \varnothing_g \tag{3}$$

where

$$\varnothing_g(f) := \int fg, \quad f \in L^p$$

It is well-defined by Hölder:

$$f \in L^p, g \in L^q \implies fg \in L^1$$

and

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Easy:

$$\varnothing_g(f_1 + f_2) = \varnothing_g(f_1) + \varnothing_g(f_2)$$

Also

$$|\varnothing_g(f)| = \left| \int fg \right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Thus

$$\varnothing_g \in (L^p)^*$$

**0.2 the dual of  $L^p$ -II [Fol 6.2]****0.3 the dual of  $L^p$ -III [Fol 6.2, finished]**