Module 1 sigma-algebra 与 measure

1.1 σ-algebra [Fol 1.2]

我们 (见 my Math 395 notes) 已经证明: 在 $\mathbb{R}$ 上不存在一个 measure function $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. translate invariant
3. countably additivite

因而, 对于比如 $\mathbb{R}$ 的这种无法在其幂集上定义良好的 measure function 的集合, 我们要定义一个 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, 使得我们能在这个 power set 的子集上, 定义一个 make sense 的 measure.

首先, 为了对于一个任意的集合 X 都能在其上定义 measure, 我们要考虑在 X 的一个什么样的子集簇上有希望定义这样的 measure.

Def 1.1 (algera, σ-algebra)

对于 set X, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ 被称为 X 上的一个 σ-algebra, if 其满足:

1. $\emptyset \in X$;
2. **closed under complement**: if $E \in S$ then $X \setminus E \in S$;
3. **closed under countable union**: if $E_1, E_2, \dots \in S$ then $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in S$.

如果第三条并不满足, 而是只满足 **closed under finite union**, 则称 S 是 X 上的一个 algebra. 当然, σ-algebra 是比 algebra 严格更强的条件. ♣

我们定义 X 的一个子集簇为一个 σ-algebra 如果它包含空集并 closed under complement and countable union. 但这并不是 σ-algebra 的全部性质. 这三个性质还蕴涵了: σ-algebra 也一定包含 X, 且 **closed under set difference, symmetric difference** 以及 **countable intersection**.

对于 algebra, 它也有以上的所有性质的 finite version.

Theorem 1.1 (σ-algebra also closed under set difference, symmetric difference and countable intersection)

Let S be a σ-algebra on set X.

Claim:

1. $X \in S$

   Proof Directly from def.

2. $D, E \in S \implies D \cup E, D \cap E, D \setminus E \in S$

   Proof union: from def by leaving others as $\emptyset$;

   intersection:
   $$(D \cap E)^C = D^C \cup E^C \in S$$
   setminus:
   $$D \setminus E = D \cap (X \setminus E) \in S$$

3. $D, E \in S \implies D \Delta S \in S$

Proof

$$D\Delta E = (D \setminus E)\bigcup(E \setminus D)$$

4. $A_1, A_2, \cdots \in S \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

Proof

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty})^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C \in S$$

♡

Remark 我们发现 σ-algerbra 很像是 topology. 实际上 σ-algerbra 和 topology 的区别就是: σ-algebra 只保证了 closed under countable union 而 topology closed under any union; topology 只保证 closed under finite intersection 而 σ-algebra closed under countable intersection.

Lemma 1.1 (任意 σ-algebra 的 intersection 仍是 σ-algebra)

Let $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ be a collection of σ-algebra on X, then $\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha$ is a σ-algebra on X.

♡

Proof 这是个 trivial proof. 但是它具有一定理解上的启发.

我们对 σ-algebra 有一个直观理解: 如果我们想把一些集合做成一个 σ-algebra, 那么首先我们把它们的补集放进这个 σ-algebra 里, 其次我们把这些集合的 up to countable 的任意组合的并集也放进这个 σ-algebra 里.

因而即便我们把一些 σ-algebra 给 intersect 起来, 其中每个集合的补集和这些集合的 up to ctbl 的任意组合的并集也在这个 intersection 里.

这是个重要的直观理解. 我们想到, 如果我们要把一个 sigma-algebra 里的一部分去掉，并保持它仍然是一个 sigma-algebra，那么我们得把这些集合的补集, 以及能够 ctbly union 成这些集合的小集合也去掉, 并对这些小集合也 recursively 进行这个操作.

Corollary 1.1 (unique smallest σ-algebra containing a collection of subsets)

Given $\varepsilon \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$<\varepsilon>:= \bigcap_{\varepsilon\subseteq S\subseteq\mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

♡

Def 1.2 (σ-algebra generated by a subset)

We call

$$<\varepsilon>:= \bigcap_{\varepsilon\subseteq S\subseteq\mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

the σ-algebra generated by ε

♣

1.2 Borel σ-algebra on $\mathbb{R}$ and measure [Fol 1.2, finished; 1.3]

Recall: the σ-algebra generated by ε

$$<\varepsilon>:= \bigcap_{\varepsilon\subseteq S\subseteq\mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma\text{-algebra on } X} S$$

is the smallsest σ-algebra containing ε.

Example 1.1

$$< \{E\} >= \{\emptyset, E, E^c, X\} \tag{1.1}$$

Lemma 1.2 (inclusion properties of generated σ-algebra)

1. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ where $\mathcal{A}$ is a σ-algebra, then $< \mathcal{E} > \subseteq \mathcal{A}$.
2. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, then $< \mathcal{E} > \subseteq < \mathcal{F} >$.
3. if $\mathcal{E} \subseteq < \mathcal{F} >$, then $< \mathcal{E} > \subseteq < \mathcal{F} >$.

♡

Proof trivial.

Def 1.3 (Borel σ-algebra defined on a topological space)

For topological space $(X, \mathcal{T})$, we define:

$$\mathcal{B}_X := < \mathcal{T} >$$

♣

Borel σ-algebra on a topological space 就是 σ-algebra generated by the topology. Its members are called **Borel sets**. 当然, 所有的 open sets 和 closed sets 都是 Borel sets.

1.2.1 generating Borel σ-algebra on $\mathbb{R}$

Example 1.2 Let $\mathcal{E}_1$: $\mathbb{R}$ 上所有的 open intervals;
$\mathcal{E}_2$: $\mathbb{R}$ 上所有的 closed intervals;
$\mathcal{E}_3$: $\mathbb{R}$ 上所有的左开右闭 intervals;
$\mathcal{E}_4$: $\mathbb{R}$ 上所有的左闭右开 intervals;
$\mathcal{E}_5$: $\mathbb{R}$ 上所有的左开右无界 intervals;
$\mathcal{E}_6$: $\mathbb{R}$ 上所有的左闭右无界 intervals;
$\mathcal{E}_7$: $\mathbb{R}$ 上所有的左无界右开 intervals;
$\mathcal{E}_8$: $\mathbb{R}$ 上所有的左无界右闭 intervals;
$\bigcup_{i=1,\cdots,8} \mathcal{E}_i$ 即 $\mathbb{R}$ 上的所有形式的 interals.

Lemma 1.3

任意以上 $\mathcal{E}_i, i = 1, \cdots, 8$ 都可以 generate $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

♡

Proof 我们 recall: 所有的 countable 以及 second countable 的 topological space 都具有 **Lindelöf property**: 任意 open covering 都存在一个 countable 的 subcovering.

Lindelöf property 的一个推论就是, 在具有 Lindelöf property 的 metric space 或者 second countable 的 space 中, 任意 open set 都可以写成 countable 个 open balls 的 union.

我们在 elementary 的 real analysis 中已经学过, $[a, b) = \cap_{n\geq 1}(a - 1/n, b)$, 以其作为例子, 这些 intervals 彼此之间都可以相互转换.

1.2.2 measure

Def 1.4 (measurable space and measure space)

Let X be a set, $\mathcal{M}$ be a σ-algebra on X.

A measure on (X, A) is a function $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. countable additive:
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$
for disjoint seq of $E_i \in \mathcal{M}$.

如果这样的 μ 存在, 我们则称 $(X, \mathcal{M})$ 为一个 measurable space, 并称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个 measure space.

Remark 一个 probability space 就是一个 measure space, satisfying $\mu(X) = 1$.

Example 1.3

1. 对于任意的 $(X, \mathcal{M})$, 我们可以定义:
$$\mu(A) := \#A \quad (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$
这个 measure 叫做 **counting measure**.
2. Fix $x_0 \in M$, 可以 define
$$\mu(A) := \delta_x := \begin{cases} 1 \text{ , if } x_0 \in A \\ 0 \text{ , if } x_0 \notin A \end{cases}$$
这个 measure 叫做 the **Dirac measure at** x_0.
3. 给定一个 X 上的函数 $f : X \to [0, \infty)$, 我们可以通过这个函数来定义:
$$\mu(A) := \sum_{x \in A} f(x)$$
这个测度依赖于函数值来表示每个点的单点集的 measure, 并通过一个集合上所有点的单点集 measure 相加得到这个集合在这个函数下的 measure. (缺点: 我们已经知道, 如果一个函数在一个集合上的正集是 uncountable 的, 那么这个集合上的这个测度一定是 ∞.)

以下是 measure function 由它的定义的两条性质 (空集为 0 以及 ctbl additivity) 推导出的一些基本性质:

Lemma 1.4 (measure is finitely additive)

Measure is finitely additive.

Proof 显然, ctbl additive implies finite additive.

Remark 反向则不成立. 这让我们想起: Jordan measure 和 Lebesgue measure.

Lemma 1.5

$A, B \in \mathcal{M} \implies$
$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$

Proof
$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

而后使用 finite additive 可得. 这是一个 direct corollary of countable additivity.

Corollary 1.2

$A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \implies$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Theorem 1.2 (properties of measure)

对于任何 measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$:

1. **monotonicity**: $A \subseteq B \in \mathcal{M} \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

   Proof trivial.

2. **countable subadditivity**:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

   Proof By setting $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, 而后通过 ctbl disjoint additivity 与 monotonicity 可得

3. **continuous from above**: 如果 $A_i \subseteq A_{i+1} \forall i \geq 2 \implies$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

   Proof 使用 same trick as 2.

4. **countinuous from below**: 如果 $A_i \supseteq A_{i+1} \forall i$ 且存在某个 j 使得 $\mu(A_j) < \infty$, 则

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

   Proof 前面的都无视, 直到第一个 measure $< \infty$ 的集合, 是可能出现在最后的 intersection 里的最大集合. 我们 Fix 这个 A_j. 通过构造补集的方式, 把交转为并, 从而用 (3) 得证. Define: $E_i := A_j \setminus A_i \forall i \geq j$ 从而

$$\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = A_j \setminus (\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i)$$

   进而

$$\mu(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i) = \mu(A_j) - \mu(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i)$$

   进而 by (3)

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i) = \mu(A_j) - \lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \mu(A_j) - \lim_{i\to\infty} (\mu(A_j) - \mu(A_i)) = \lim_{i\to\infty} A_i$$

Recall: the σ-algebra generated by ε

$$< \varepsilon >:= \bigcap_{\varepsilon \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(X), S \text{ is } \sigma \text{ -algebra on } X} S$$

is the smallsest σ-algebra containing ε.

Example 1.4

$$< \{E\} >= \{\emptyset, E, E^c, X\} \tag{1.2}$$

Lemma 1.6 (inclusion properties of generated σ-algebra)

1. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ where $\mathcal{A}$ is a σ-algebra, then $<\mathcal{E}>\subseteq \mathcal{A}$.
2. if $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, then $<\mathcal{E}>\subseteq<\mathcal{F}>$.
3. if $\mathcal{E} \subseteq<\mathcal{F}>$, then $<\mathcal{E}>\subseteq<\mathcal{F}>$.

♡

Proof trivial.

Def 1.5 (Borel σ-algebra defined on a topological space)

For topological space $(X, \mathcal{T})$, we define:

$$\mathcal{B}_X :=<\mathcal{T}>$$

♣

Borel σ-algebra on a topological space 就是 σ-algebra generated by the topology. Its members are called **Borel sets**. 当然, 所有的 open sets 和 closed sets 都是 Borel sets.

1.2.3 generating Borel σ-algebra on $\mathbb{R}$

Example 1.5 Let $\mathcal{E}_1$: $\mathbb{R}$ 上所有的 open intervals;
$\mathcal{E}_2$: $\mathbb{R}$ 上所有的 closed intervals;
$\mathcal{E}_3$: $\mathbb{R}$ 上所有的左开右闭 intervals;
$\mathcal{E}_4$: $\mathbb{R}$ 上所有的左闭右开 intervals;
$\mathcal{E}_5$: $\mathbb{R}$ 上所有的左开右无界 intervals;
$\mathcal{E}_6$: $\mathbb{R}$ 上所有的左闭右无界 intervals;
$\mathcal{E}_7$: $\mathbb{R}$ 上所有的左无界右开 intervals;
$\mathcal{E}_8$: $\mathbb{R}$ 上所有的左无界右闭 intervals;
$\bigcup_{i=1,\cdots,8} \mathcal{E}_i$ 即 $\mathbb{R}$ 上的所有形式的 interals.

Lemma 1.7

任意以上 $\mathcal{E}_i, i=1,\cdots,8$ 都可以 generate $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

♡

Proof 我们 recall: 所有的 countable 以及 second countable 的 topological space 都具有 **Lindelöf property**: 任意 open covering 都存在一个 countable 的 subcovering.
Lindelöf property 的一个推论就是, 在具有 Lindelöf property 的 metric space 或者 second countable 的 space 中, 任意 open set 都可以写成 countable 个 open balls 的 union.
我们在 elementary 的 real analysis 中已经学过, $[a,b)=\cap_{n\geq 1}(a-1/n, b)$, 以其作为例子, 这些 intervals 彼此之间都可以相互转换.

1.2.4 measure

Def 1.6 (measurable space and measure space)

Let X be a set, $\mathcal{M}$ be a σ-algebra on X.
A measure on (X, A) is a function $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty)$ satisfying:

1. $\mu(\emptyset)=0$

2. countable additive:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

for disjoint seq of $E_i \in \mathcal{M}$.

如果这样的 μ 存在, 我们则称 $(X, \mathcal{M})$ 为一个 measurable space, 并称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个 measure space.

Remark 一个 probability space 就是一个 measure space, satisfying $\mu(X) = 1$.

Example 1.6

1. 对于任意的 $(X, \mathcal{M})$, 我们可以定义:

$$\mu(A) := \#A \quad (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$

这个 measure 叫做 **counting measure**.

2. Fix $x_0 \in M$, 可以 define

$$\mu(A) := \delta_x := \begin{cases} 1 \text{ , if } x_0 \in A \\ 0 \text{ , if } x_0 \notin A \end{cases}$$

这个 measure 叫做 the **Dirac measure at** x_0.

3. 给定一个 X 上的函数 $f : X \to [0, \infty)$, 我们可以通过这个函数来定义:

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} f(x)$$

这个测度依赖于函数值来表示每个点的单点集的 measure, 并通过一个集合上所有点的单点集 measure 相加得到这个集合在这个函数下的 measure. (缺点: 我们已经知道, 如果一个函数在一个集合上的正集是 uncountable 的, 那么这个集合上的这个测度一定是 ∞.)

以下是 measure function 由它的定义的两条性质 (空集为 0 以及 ctbl additivity) 推导出的一些基本性质:

Lemma 1.8 (measure is finitely additive)

Measure is finitely additive.

Proof 显然, ctbl additive implies finite additive.

Remark 反向则不成立. 这让我们想起: Jordan measure 和 Lebesgue measure.

Lemma 1.9

$A, B \in \mathcal{M} \implies$

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$

Proof

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

而后使用 finite additive 可得. 这是一个 direct corollary of countable additivity.

Corollary 1.3

$A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \implies$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

♡

Theorem 1.3 (properties of measure)

对于任何 measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$:

1. **monotonicity**: $A \subseteq B \in \mathcal{M} \implies \mu(A) \le \mu(B)$

   Proof trivial.

2. **countable subadditivity**:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

   Proof By setting $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, 而后通过 ctbl disjoint additivity 与 monotonicity 可得

3. **continuous from above**: 如果 $A_i \subseteq A_{i+1} \forall i \ge 2 \implies$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

   Proof 使用 same trick as 2.

4. **countinuous from below**: 如果 $A_i \supseteq A_{i+1} \forall i$ 且存在某个 j 使得 $\mu(A_j) < \infty$, 则

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

   Proof 前面的都无视, 直到第一个 measure $< \infty$ 的集合, 是可能出现在最后的 intersection 里的最大集合. 我们 Fix 这个 A_j. 通过构造补集的方式, 把交转为并, 从而用 (3) 得证. Define: $E_i := A_j \setminus A_i \forall i \ge j$ 从而

$$\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = A_j \setminus (\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i)$$

   进而

$$\mu(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i) = \mu(A_j) - \mu(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i)$$

   进而 by (3)

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=j}^{\infty} A_i) = \mu(A_j) - \lim_{i \to \infty} \mu(E_i) = \mu(A_j) - \lim_{i \to \infty} (\mu(A_j) - \mu(A_i)) = \lim_{i \to \infty} A_i$$

♡