

Lec 3 random variables

Def 3.1 (random variable)

对于 probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 一个 random variable 是一个 **Borel measurable function** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.



Remark 回顾 measurable function 的定义: 即对于任意 Borel set $B \subset \mathbb{R}$, 有 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. 例如: $X(\omega) = \omega^2$ 是一个 measurable function, 因为对于任意 Borel set $B \subset \mathbb{R}$, 有 $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | \omega^2 \in B\} \in \mathcal{F}$.

Proposition 3.1

Prob space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 random variables $X_1, X_2, \dots, X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 任取 Borel measurable function $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto g(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_k(\omega))$$

也是一个 random variable.



Proof 我们在 measure theory 中证明过: 对于任意的 finite seq of Borel measurable functions $(f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{i=1}^k$, 其各作为一个维度组成的函数 $f = (f_1, \dots, f_k)$ 也是一个 Borel measurable function (from Ω 到 \mathbb{R}^k).

而这里的 X 就是 $g \circ f$, 是两个 Borel measurable function 的 composition, 因而也是一个 Borel measurable function (即 random variable).

3.1 distributions

Def 3.2 (probability distribution)

对于 random variable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 其 probability distribution 是 X 这个 measurable function 对于 probability measure \mathbb{P} 的 pushforward measure, 记作 P_X . 即对于任意 Borel set $B \subset \mathbb{R}$, 有

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

q

