

## Lec 3 random variables

### Def 3.1 (random variable)

对于 probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 一个 random variable 是一个 **Borel measurable function**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Remark** 回顾 measurable function 的定义: 即对于任意 Borel set  $B \subset \mathbb{R}$ , 有  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . 例如:  $X(\omega) = \omega^2$  是一个 measurable function, 因为对于任意 Borel set  $B \subset \mathbb{R}$ , 有  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | \omega^2 \in B\} \in \mathcal{F}$ . 其 cdf  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  就是  $X$  这个 real-valued measurable function 对于  $(-\infty, x]$  的 preimage, 意义是 “随机变量的值小于等于  $x$  的概率”

$$F_X(x) = P(X^{-1}((-\infty, x]))$$

discrete random variable 的 pmf, 表示每个离散点  $x$  的  $P(X^{-1}(\{x\}))$ . 即

$$p(x) := P(X^{-1}(\{x\})) = P(X = x)$$

continuous random variable 的 pdf, 表示在某个点上概率分布的密度有多大

$$f_X(x) := \frac{dF_X(x)}{dx}$$

或者写作:

$$f_X(x) := \frac{dF_X(x)}{dm}$$

是这个  $F_X$  对于 Lebesgue measure  $m$  的 Radon-Nikodym derivative.

随机变量的 expectation 是它在这个 prob space 上的积分, 表示它的值的 prob-weighted average

$$E(X) := \int_{\Omega} X dP$$

随机变量的 variance 是  $(X - E(X))^2$  这个 induced 随机变量在这个 prob space 上的积分, 表示原随机变量值离它的值的 weighted average 的聚集程度.

$$Var(X) = \int_{\Omega} (X - E(X))^2 dP$$