第一部分 初等数学

一、初等代数

1、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），

(1) 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相同的实根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相同实根；

当 $\Delta<0$ 时，方程有共轭复根。

(2) 求根公式为 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(3) 韦达定理 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$； $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

2、对数运算性质（$a>0$， $a\neq1$）

(1) 若 $a^y=x$，则 $y=\log_a x$；

(2) $\log_a a=1$， $\log_a 1=0$， $\ln e=1$， $\ln 1=0$；

(3) $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$；

(4) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；　(5) $\log_a x^b=b\log_a x$；

(6) $a^{\log_a x}=x$， $e^{\ln x}=x$；　(7) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

3、指数运算性质

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　(2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；　(3) $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$；

(4) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$；　(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$；　(6) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$；

(7) $a^0=1$；　(8) $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$.

4、常用不等式及其运算性质

⑴若$a>b$，则

①$a\pm c>b\pm c$， $c-a<c-b$；

②$ac>bc$（$c>0$）， $ac<bc$（$c<0$）；

③$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$（$c>0$）， $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$（$c<0$）；

④$a^n>b^n$（$n>0$，$a>b>0$），$a^n<b^n$（$n<0$，$a>b>0$）；

⑤$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n为正整数，$a>b>0$）.

⑵绝对值不等式：设a，b为任意实数，则

①$|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$；

②$|a|\le b$（$b>0$）等价于$-b\le a\le b$，特别$-|a|\le a\le|a|$；

③$|a|\ge b$（$b>0$）等价于$a\ge b$或$a\le -b$；

⑶某些重要不等式

①设a，b为任意实数，则 $a^2+b^2\ge 2ab$；（$a+b>2\sqrt{ab}$）

②设a_1，a_2，…，a_n均为正数，n为正整数，则$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

5、常用二项式展开及因式分解公式

⑴ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

⑵ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；

⑶ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

⑷ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$；

⑸ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

⑹ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

⑺ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

⑻ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

6、牛顿二项式展开公式（n 为正整数）

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots C_n^n b^n .$$

其中组合系数 $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$， $C_n^0 = 1$，$C_n^n = 1$.

7、常用数列公式

⑴等差数列：a_1，a_1+d，a_1+2d，…，$a_1+(n-1)d$.

首项为 a_1，第 n 项为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，公差为 d，前 n 项的和为

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]$$

$$= na + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}.$$

⑵等比数列：a_1，$a_1 q$，$a_1 q^2$，…，$a_1 q^{n-1}$.

首项为 a_1，公比为 q，前 n 项的和为

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

8、一些常见数列的前 n 项和

⑴ $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$；

⑵ $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$；

⑶ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$；

⑷ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$；

⑸ $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

9、阶乘 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

二、三角函数

1、基本关系

(1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$；

(2) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$；

(3) $1+\cot^2 x=\csc^2 x$；

(4) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$；

(5) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$；

(6) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$；

(7) $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；

(8) $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

2、倍角公式

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$；

(2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$；

(3) $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

3、半角公式

(1) $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$；

(2) $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$；

(3) $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

4、和角公式

(1) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$；

(2) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$；

(3) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$；

(4) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$；

(5) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$.

5、差化和积公式

(1) $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$；

(2) $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$；

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$；

(4) $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

6、和积化差公式

(1) $\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$；

(2) $\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$；

(3) $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$；

(4) $\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$.

7、特殊三角函数值

角 / 函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

三、初等几何

下面初等几何公式中：字母r表示圆半径，h表示高，l表示斜高，θ表示角度.

1、三角形面积$=\frac{1}{2}ah$（a为底边长）

$$=\frac{1}{2}ah\sin\theta.$$

2、梯形面积$=\frac{1}{2}(a+b)h$（a，b为梯形两底边长）.

3、圆周长$=2\pi r$；圆面积$=\pi r^2$.

4、圆扇形周长$=r\theta$；圆扇形面积$=\frac{1}{2}r^2\theta$.

5、正圆柱体体积$=\pi r^2 h$；正圆柱体侧面积$=2\pi rh$.

6、正圆锥体体积$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$；正圆锥体侧面积$=\pi rl$.

7、球体体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$；球体表面积$=4\pi r^2$.

四、平面解析几何

1、基本公式

⑴给定点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，则M_1与M_2间的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

⑵设有两直线，其斜率分别为k_1，k_2，则

两直线平行的充要条件为$k_1=k_2$.

两直线垂直的充要条件为$k_1\cdot k_2=-1$.

2、平面直线的各种方程

⑴点斜式：直线过点(x_0,y_0)，其斜率为k，则直线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

⑵斜截式：直线斜率为k，在y轴上截距为b，则直线方程为

$$y=kx+b.$$

⑶两点式：直线过点$M_1(x_1,y_1)$与$M_2(x_2,y_2)$，则直线方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

⑷截距式：设直线在x轴与y轴上的截距分别为a，b，则直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

3、曲线方程

⑴圆周方程：圆心在点(x_0,y_0)，半径为r的圆周方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

⑵抛物线方程：

顶点在圆点，焦点在$(\frac{p}{2},0)$的方程为 $y^2=2px$.

顶点在圆点，焦点在$(0,\frac{p}{2})$的方程为 $x^2=2py$.

顶点在(a,b)，对称轴为$y=b$的方程为 $(y-b)^2=2p(x-a)$.

顶点在(a,b)，对称轴为$x=a$的方程为 $(x-a)^2=2p(y-b)$.

⑶椭圆方程：中心在原点，a为长半轴，b为短半轴，焦点在x轴上的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 .$$

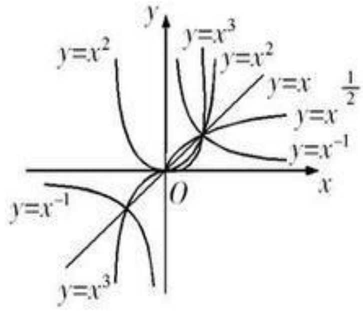
⑷双曲线方程：中心在原点，a为实半轴，b为虚半轴，焦点在x轴上的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 .$$

⑸等边双曲线方程：中心在原点，以坐标轴为渐近线的双曲线方程为

$$xy=a \text{（}a\text{为常数）}.$$

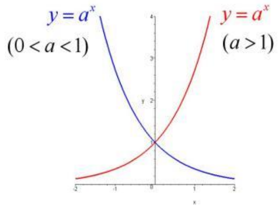
第二部分 专接本数学知识考点大全



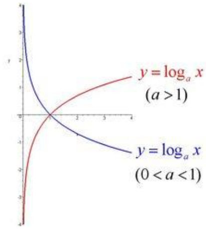
一、基本初等函数

1、常值函数：$y=c(c\text{为常数})$，其定义域$\left(-\infty,+\infty\right)$.

2、幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为常数），性质随α 改变，x 在$(0,+\infty)$总有定义且$\alpha>0$时，函数在定义域内单调增加；当$\alpha<0$时，$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$单调减少. 图像必过点（1,1）.



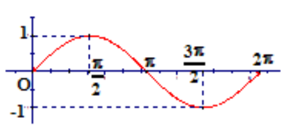
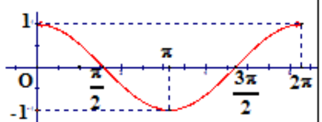
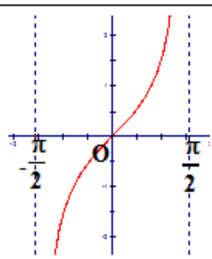
3、指数函数：$y=a^x\ (a>0,a\neq1)$，定义域$\left(-\infty,+\infty\right)$，值域$(0,+\infty)$。当$a>1$时，单调增加，当$0<a<1$时，单调减少，常用函数$y=e^x$.



4、对数函数：$y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$，是指数函数的反函数， 定义域$(0,+\infty)$，值域$\left(-\infty,+\infty\right)$，当$a>1$时，单调增加，当$0<a<1$时，单调减少.

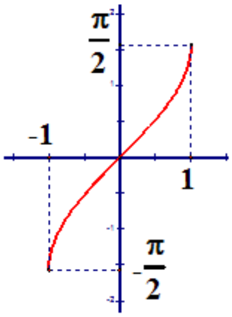
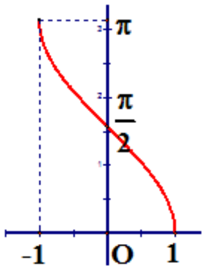
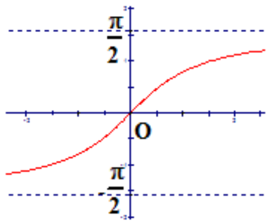
5、三角函数：

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

$k\in Z$	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
一个周期的图像			
定义域	R	R	$\left\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期	2π	2π	π

6、反三角函数

$y=arc\sin x, y=arc\cos x, y=arc\tan x, y=arc\cot x$

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	[0， π]	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
单调性	在$[-1,1]$上单调递增 无减区间	在$[-1,1]$上单调递减 无增区间	在 R 上单调递增 无减区间
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
图象			

二、函数极限

1、极限收敛及其性质：$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$或$a_n \to A(n\to\infty)$.

性质有：唯一性、有界性、奇偶子列均收敛、保序性.

2、函数极限两边夹定理：如果函数$f(x), g(x), h(x)$满足：

$(1) f(x)\le g(x)\le h(x)$（在x_0的某空心邻域内成立即可）;

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

3、重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

4、无穷大（小）量

当$x\to x_0$时，$f(x)$与$g(x)$都是无穷小量，且$f(x)\neq 0$.

则：（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$时，称$g(x)$是比$f(x)$较高阶的无穷小；

或$f(x)$是$g(x)$的低阶无穷小. 记$g(x)=o(f(x))\quad(x\to x_0)$

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=c\neq 0$时，称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小；

当$c=1$时，称两者为等价无穷小．记：$g(x)\sim f(x)\quad(x\to x_0)$

5、等价无穷小替换公式：$x\to 0$时

$\sin x\sim x$； $\tan x\sim x$； $\arcsin x\sim x$； $\arctan x\sim x$；

$\ln(1+x)\sim x$； $e^x-1\sim x$； $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$； $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$.

6、连续：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 极限值等于函数值.

间断点的分类：

第一类间断点：左右极限均存在，又分为：

（1）可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$或$f(x_0)$没意义；

（2）跳跃间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

第二类间断点：不属于第一类间断点的都是第二类.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 称为无穷型间断点.

7、零点定理：

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使

得 $f(\xi)=0$.

三、导数

1、定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f_-'(x_0), f_+'(x_0)$ 都存在且相等.

2、基本初等函数求导公式：

（1）$(C)'=0$（C 是常数）　　（2）$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

（3）$(\sin x)'=\cos x$　　（4）$(\cos x)'=-\sin x$

（5）$(\tan x)'=\sec^2 x$　　（6）$(\cot x)'=-\csc^2 x$

（7）$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　（8）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

（9）$(a^x)'=a^x\ln a$　　（10）$(e^x)'=e^x$

（11）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　（12）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(-\arccos x)'$　　$(-\arccos x)'$

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　（16）$(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

3、切线与法线：

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\quad (y_0=f(x_0))$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (f'(x_0)\neq 0)$$

4、中值定理

（1）罗尔定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 可导，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

（2）拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$（该式又称拉格朗日中值公式）.

5、洛必达法则对于未定型函数极值 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$， $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}=A$.

6、函数凹凸性及拐点

（1）凹凸性判定：$[a,b]$ 内 $f''(x)>0$，函数图形凹；反之 <0 为凸函数.

（2）拐点判定：① 求 $f''(x)$；

② $f''(x)=0$，求根或 $f''(x)$ 不存在的点 x_0；

在 x_0 两侧异号时，点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 是函数 $f(x)$ 的拐点.

（3）渐近线

①若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则直线 $y=A$ 是曲线 $f(x)$ 的水平渐近线；

② $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则直线 $x=a$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线.

7、函数极值问题

（1）费马定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值则 $f'(x)=0$，导数值为 0 点即驻点.（注可导函数极值点必是驻点，反之不一定成立）

（2）两个充分条件：

第一条件：x_0 两端导数异号，左增右减为极大值点，反之，极小值点；

第二条件：函数在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x)=0$， $f''(x)\neq0$，则当

$f''(x)>0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；当 $f''(x)<0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

（$f''(x_0)=0$ 时条件失效）

（3）应用题中极值题解题步骤：

①设变量②函数表达式③化简④值域开区间⑤求导⑥找驻点⑦求最值

8、导数的经济应用：

（1）需求的价格弹性：称$\eta=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\bullet\frac{p}{Q}$为该商品的需求价格弹性，简称为需求弹性.

需求弹性的经济含义：价格每上涨1%时所引起的需求量减少的百分数.

（2）边际函数：经济函数对其自变量的导数，称为该经济函数的边际函数（边际值）.

（3）几个重要经济函数：

总成本函效：$C=C(Q)=C_1+C_2(Q)$

（C_1为固定成本，C_2为可变成本）

平均成本函数$\overline{C}=\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2(Q)}{Q}$

边际成本函数$C'=C'(Q)$

商品价格：$P=P(Q)$

总收益函数：$R=R(Q)=QP(Q)$

平均收益函数$\overline{R}=\overline{R}(x)=\frac{R(Q)}{Q}=P(Q)$

边际收益函效$R'=R'(x)=QP'(Q)+P(Q)$

利润函数：$L=R-C$

当边际收益与边际成本相等时，利润最大，即$R'=C'$.

四、积分

1、不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

一、常用公式

（1）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$；

（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$；

（3）$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$；

（4）$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$；

（5）$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$；

（6）$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$；

（7）$\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$；

（8）$\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$；

（9）$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$；

（10）$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$；

（11）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$；

正（12）$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$；；$= -\mathrm{arccot}\, x + C$

一 (13) $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

（14）$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

（15）$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

丁（16）$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

二、换元方法

（1）凑微分 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C$.

（2）换元法：设函数 $x = \varphi(t)$ 单调、可导，并且 $\varphi'(t) \neq 0$；

又设 $\int f[\varphi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t$ 具有原函数 $G(t)$，

则有 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C = G[\varphi^{-1}(x)] + C$.

（3）三角换元法：

$f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ 令 $x = a\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$　令 $x=a\tan t$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$　令 $x=a\sec t$　$\left(0\le t<\dfrac{\pi}{2}\text{或}\dfrac{\pi}{2}<t\le\pi\right)$

三、分部积分法：

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad \int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	$u=P_n(x)$，$\mathrm{d}v=\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	降低 n 次多项式 $P_n(x)$ 的次数
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	$u=\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{Bmatrix}$，$\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$	“消”函数符号 ln，arcsin x 等
$\int e^x\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	$\begin{cases} u=\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u=e^x \\ \mathrm{d}v=\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x \end{cases}$	“回头积分”

2、定积分　注意：仅与被积函数法则和积分区间有关；

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0;\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

定积分中值定理：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)\qquad (a\le\xi\le b).$

一、性质：

（1）$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

（2）$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 是常数）.

（3）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$　（c 是常数）.

（4）如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$．则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$．

（5）如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$．则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$（$a<b$）.

推论 1　如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\le g(x)$．则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$（$a<b$）.

推沦 2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$　（$a<b$）.

（6）设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 茌区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$（$a<b$）.

（7）奇函数、偶函数的定积分计算：

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

二、积分上限的函数：$\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)\quad (a\le x\le b)$

积分上限函数的导数公式：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}\left[\int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]}{\mathrm{d}x} = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

（2）$\dfrac{\mathrm{d}\left[\int_{\varphi(x)}^{b} f(t)\mathrm{d}t\right]}{\mathrm{d}x} = -f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

（3）$\dfrac{\mathrm{d}\left[\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]}{\mathrm{d}x} = f[\phi(x)]\cdot\phi'(x) - f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

3、广义积分　$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$

（1）$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

（2）$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$.

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$,

上述极限存在，则称反常积分收敛，反之，称其发散.

（数一）4、向量（既有大小又有方向）

1、线性运算

1.1　加法：　交换律、结合律

　　乘法：　结合律、分配律

数乘 $a=|a|a^0$ ，则单位向量 $a^0=\dfrac{a}{|a|}$.

1.2 空间向量

两点间距离公式 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

1.3 数量积

$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$ 满足交换律 、结合律、分配律

坐标式 $a=(a_x,a_y,a_z)$， $b=(b_x,b_y,b_z)$

则 $a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$a\perp b\Leftrightarrow a.b=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

向量积：令 $c=a\times b$，

则① $|c|=|a\times b|=|a||b\sin(a\wedge b)|$；

②c 与 a， b 都垂直；

③a， b， c 符合右手定则.

5、平面方程

（1）法向量是垂直于平面 π 的非零向量 $n=\{A,B,C\}$.

点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

（2）平面关系：相交、平行、重合.

平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$\pi_1//\pi_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；

$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

两平面夹角用θ表示，则

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right),$$

点$M(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

6、空间直线方程 （点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量$s=\{l,m,n\}$）

①直线标准式 （对称式、点向式）

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$ （$l=0$则直线垂直于x轴）.

②参数方程

令$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$，

则$\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt,(-\infty<t<\infty).\\ z=z_0+nt\end{cases}$

③直线一般（交面式）方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},s=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}\neq 0$$

④线面夹角L与它在平面上投影直线间的夹角$\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\theta$为$L$与法向量间夹角，

$$\sin\varphi=\sin\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|=\cos\theta=\frac{|s\cdot n|}{|s||n|}=\frac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\begin{cases}L\perp\pi\Leftrightarrow\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}\\ L//\pi\Leftrightarrow mA+nB+pC=0\end{cases}$$

7、曲面方程

椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ （$a=b$时旋转椭球面）.

抛物面：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ （p,q 同号），

用 $z=z_1$（$z_1>0$）截得截痕为双曲抛物面或马鞍面

锥面方程：$x^2+y^2=k^2z^2$.

五、多元微分

1、偏导：在某一点处极限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 即为在该点处对 x 的偏导数.

二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

2、全微分 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$（即线性主部）

①可微充分条件： 偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续；

②必要条件：可微 $\Rightarrow$ 在该点偏导存在，且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=A(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=B(x,y)$

从而 $z=f(x,y)$ 在该点全微分 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$；

3、复合求导：

（1）如果函数 $u==\varphi(t),v=\psi(t)$ 都在在点 t 处可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在 t 点可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

如果函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4、隐函数求导：

一元隐函数：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

二元隐函数：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$.

5、多元极值：

（1）无条件极值

存在的必要条件：$z=f(x,y)$偏导存在，且在(x_0,y_0)处有极值，则该点偏导必为零，即$f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$.

极值存在充分条件：$z=f(x,y)$二阶偏导连续，一阶导为零，令

$A=f_{xx}''(x_0,y_0),B=f_{xy}''(x_0,y_0),C=f_{yy}''(x_0,y_0)$.

1)当$B^2-AC<0$时，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取极值，且当$A>0$时，$f(x_0,y_0)$为极小值，当$A<0$（或$C<0$）时，$f(x_0,y_0)$取极大值；

2)当$B^2-AC>0$时，$f(x_0,y_0)$不是$f(x,y)$的极值；

3)当$B^2-AC=0$时，不能断定$f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否取极值.

（2）条件极值 ：拉格朗日乘数法（自变量间存在约束关系时）

求$z=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值步骤：

①构造函数：$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$（$\lambda$为参数，称拉格朗日常数）

1) 写方程组：

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ F'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ F'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

2)解得驻点 (x_0, y_0)

六、二重积分（体积）

1、性质：线性、积分区域可加性、保号性、保序性.

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma \quad mS_D \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le MS_D$$

2、X 型区域上二重积分“先 y 后 x”的二次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \overset{\Delta}{=} \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Y 型“先 x 后 y”

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \overset{\Delta}{=} \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

3、极坐标计算

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

先 r 后 θ： $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\theta \mathrm{d}\theta \int_{r_2(\theta)}^{r_1(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

先 θ 后 γ： $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\theta \mathrm{d}\theta \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$

4、曲线积分计算公式：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

5、格林公式：

闭区域由光滑或分段光滑的简单闭曲线 L（正向）围成，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上一阶偏导则：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

6、积分曲线与路径无关：$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

等价命题：二元函数在 G 一阶连续偏导：

①$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

②光滑闭曲线 L，$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

③曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关

七、级数

1、常数项无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$

部分和数列 $\{S_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数收敛，S 为级数的和，若极限不存在则发散.

2、等比级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n==a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^n+\cdots=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q} & 当|q|<1\\ 发散 & 当|q|\ge 1\end{cases}$$

3、性质：

性质 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于和 s，则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于和 s、σ，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s\pm\sigma$.

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

级数收敛的必要条件：

性质 5 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于零，即 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

4、正项级数收敛的充要条件是：部分和数列有界.

5、判定方法：

（1）比较审敛法：

两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且 $u_n \le v_n$，当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

极限形式：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0<l<+\infty)$ 两级数同时收敛或发散.

（2）比值审敛法（达朗贝尔）

正项级数且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\ (0<\rho\le+\infty)$，则当

① $\rho<1$ 时收敛；

② $\rho>1$ 时发散；

③ $\rho=1$ 时无法判断.

6、交错级数：$u_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

①莱布尼茨定理：交错级数满足

（1）$u_n \ge u_{n+1}$；　$(n=1,2,3\cdots)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数收敛，且其和 $s\le u_1$，

②绝对收敛与条件收敛：

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是条件收敛.

7、幂级数：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$

取 $x_0=0$，得 x 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

（2）收敛半径判定：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，

则①当 $\rho\neq 0,+\infty$ 时，$R=\dfrac{1}{\rho}$ ；

②当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；③当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

（3）计算：和函数逐项求导 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

（4）逐项求积分：$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

（5）泰勒展开：

①$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$，$(x\in R)$

②$\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，$(|x|<1)$

③$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$，

$=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$，$(-1<x\le 1)$

八、微分方程

1、通解：若 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots C_n)$ 为某个 n 阶常微分方程的解，且含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots C_n$，则称这个解为方程的通解.（注：通解未必是全部解）

特解：确定了解中任意常数，或满足一定的条件.

隐式解：$\varphi(x,y,c)=0$.

2、一阶微分方程

（1）变量可分离方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\varphi(y)$ （$f(x),\varphi(y)$ 为连续函数）

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=f(x)\mathrm{d}x$.

（2）一阶线性微分方程：

$y'+P(x)y=Q(x)$ （非齐次）

$y'+P(x)y=0$ （齐次）

齐次通解：$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ （C 为任意常数）.

非齐次通解：$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$.

（3）二阶线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$

①齐次两线性无关解的组合是齐次的通解；

②非齐次的特解与齐次的通解构成非齐次的通解：$y=Y+y^*$

3、二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$

对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$

特征根	方程 $y''+py'+qy=0$ 的解
r_1,r_2 为相异实根	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
r_1,r_2 二重实根	$y=(C_1+C_2)e^{rx}$
$r=\alpha\pm i\beta(\beta\neq 0)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$

求解方法：已知齐次相应解，再求一个特解，利用待定系数法，
求特解过程如下：

1．若 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$，其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式.

则特解有形式 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}\quad \alpha\in R$.

其中 k 为 α 为特征根时的重数，即若 α 不是特征根（零重根），取 $k=0$； α 为特征单根，取 $k=1$； α 为特征重根（二重根），取 $k=2$． $Q_m(x)$ 为一个 m 次多项式.

2．若 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),\alpha,A,B\in R$，则方程有特解形式

$y^*=x^ke^{ax}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$.

其中 k 为 $\alpha+i\beta$ 是特征根的重数，即若 $\alpha+i\beta$ 不是特征根，取 $k=0$；若 $\alpha+i\beta$ 是特征根，取 $k=1$.

九、行列式 （数表，正负各半）

1、概念：

1.1 主对角线 ：左上角到右下角的连线；

次对角线：右上角到左下角的连线.

1.2 余子式：行列式中划去元素 a_{ij} 所在的那一行和列所剩的子式，记为 M_{ij}，而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}$ M_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

2、性质：

（1）行列式与其转置相等；

（2）互换行列式两行（列），行列式变号

（3）行列式两行（列）对应元素相同，值为 0；

（4）用一个数乘以行列式每一行（列）=用该数乘以行列式每一行（列）中所有元素；

（5）行列式两行（列）对应成比例，行列式值为 0；

（6）行列式某一行（列）中各元素乘以同一数，然后加到令一行（列）对应元素上去，行列式值不变.

3、克莱姆法则： D 为系数行列式值

若非其次线性方程的系数行列式 $D\neq 0$，则方程有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}，\quad x_2=\frac{D_2}{D}，\quad \ldots，\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中$D_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$是把系数行列式$D$中第$j$列元素依次用方程右边常数$b_1,b_2,\cdots,b_n$代替后得到的$n$阶行列式.

齐次线性方程组解的定理：$\begin{cases}D\neq 0\Leftrightarrow \text{仅零解}\\ D=0\Leftrightarrow \text{非零解}\end{cases}$.

十、矩阵

1、对角矩阵：$A=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$

2、数量矩阵：$A=\begin{pmatrix}a&&&\\&a&&\\&&\ddots&\\&&&a\end{pmatrix}$

3、单位矩阵：$I_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$

4、三角形矩阵：$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix}b_{11}&&&\\b_{21}&b_{22}&&\\\cdots&\cdots&\ddots&\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$

5、矩阵运算：

①加法：两矩阵均为$m\times n$阶，对应位置相加减；

②数与矩阵相乘：$kA=\ k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$，

$$2\times\begin{bmatrix}5&0&1\\1&3&1\\0&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times5&2\times0&2\times1\\2\times1&2\times3&2\times1\\2\times0&2\times2&2\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&0&2\\2&6&2\\0&4&8\end{bmatrix}$$

③两矩阵相乘：设矩阵$A=(a_{ik})_{m\times l}$的列数与矩阵$B=(b_{kj})_{l\times n}$的行数相同，则由元素

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\ldots m;j=1,2,\ldots,n)$ 构成的 m 行 n 列矩阵

$$C=(c_{ij})_{mxn}=(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj})=A\times B.$$

$AB\neq BA$，若 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换.

④可交换矩阵：满足 $AB=BA$；注意：$AB=0$ 不能推出：$A=0$ 或 $B=0$.

⑤方阵的幂：$A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$ $\quad (A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$

⑥矩阵转置：

$$A^T=A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22}\cdots & am_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n}\cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

⑦方阵行列式：由方阵中元素按原来的位置所构成的行列式，记为 $|A|$

性质：$|A^T|=|A|$，$|\lambda A_{n\times n}|=\lambda^n|A_{n\times n}|$，$|AB|=|A||B|$

6、逆矩阵：$AB=BA=I$ 称矩阵 A 可逆，B 为 A 的逆矩阵

伴随矩阵：$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}$；

$$AA^*=A^*A=|A|I$$

方阵 A 可逆充要条件：$|A|\neq 0$，若 A 可逆则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

逆矩阵性质及公式：

性质：(1) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ （2）$(A^{-1})^{-1}=A$ （3）$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

(4) $(kA)^T=kA^T$ (5) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

公式：(1) $AA^*=|A|E$ (2) $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ (3) $|A^*|=|A|^{n-1}$

(4) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$　　　(5) $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$

7、矩阵初等行变换：三种形式：

①对换变换：互换两行

②倍数变换：用非零数乘以某一行；

③倍加变换：数 k 乘以某行元素后加到另一行对应元素上去

等价矩阵：A 经初等变换成 B，则称等价 $A\sim B$；

具有反身性、对称性、传递性

行最简形：非零行的首非零元素是 1；

首非零元素所在列其余元素都为零

标准形：主对角元素 1，1 的个数小于等于列数其余 0.

两矩阵等价充要条件：具有相同标准形.

8、矩阵的秩：矩阵 A 中存在一个 r 阶子式不为零，而高于 r 的子式全为零则称 r 为矩阵 A 的秩，记做 $R(A)=r$，当 $A=0$ 时，$R(A)=0$.

若 $r=n$，则称 A 为满秩矩阵，否则称为不满秩；

满秩充要条件 $|A|\neq 0$.

十一、向量组

1、线性表示的定义：对于给定向量 β，$a_1,a_2,\ldots\ldots a_n$，若存在一组数使

$\beta=\mathrm{k}_1a_1+\mathrm{k}_2a_2+\mathrm{k}_3a_3+\ldots\ldots\mathrm{k}_na_n$ 成立．则称 β 是 $a_1,a_2,\ldots\ldots a_n$ 的线形组合，或称 β 可为 $a_1,a_2,\ldots\ldots a_n$ 的线性表示.

线性表示的充分必要条件：以 $a_1,a_2\ldots\ldots a_n$ 为列向量的矩阵与以 $a_1,a_2\ldots\ldots a_n$，β 为列向量的矩阵有相同的秩.

2、线性相关定义：向量组 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$，若存在一组不全为 0 的 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 时，使得 $\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\ldots\ldots+\mathrm{k}_n\alpha_n=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ 线性相关.

线性无关定义：向量组 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$，当且仅当 $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$ 时，使得 $\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\ldots\ldots+\mathrm{k}_n\alpha_n=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ 线性无关.

（1）n 个 m 维向量线性相关的充要条件是：$R(A)<n$.

（2）n 个 n 维向量线性相关的充要条件是：$|A|=0$.

（3）当向量组中所含向量个数大于向量维数时，此向量组相关.

（4）如果向量组中有一部分向量（部分组）线性相关，则整个向量组相关.

（5）含有 0 向量的向量组线性相关.

（6）向量组 $\alpha_1,\alpha_2......\alpha_s\,(s\geq 2)$ 线性相关的充要条件是：其中至少有一个向量是其余 $s-1$ 个向量的线性组合.

（7）如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2......\alpha_s$， β 线性相关，而 $\alpha_1,\alpha_2......\alpha_s$ 线性无关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3......\alpha_s$ 线性表示且表示法唯一.

3、极大无关组定义：

如果 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2...\alpha_s$ 中的一个线性无关的部分组 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},..,\alpha_{jr}\,(r\leq s)$，$r$ 已达到最大可能，即如果 r 个向量以外向量组中还有向量，那么任意 $r+1$ 个向量构成的部分组均线性相关，则 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},...,\alpha_{jr}$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2......\alpha_s$ 的一个极大线性无关部分组，简称极大无关组.

向量组的极大无关组可能不只一个，但由定义可知，其向量个数是相同的.

矩阵 A 的秩=行向量组的秩=列向量组的秩.

十二、方程组

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix},\quad a_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j=0,1,\cdots,n$$

1、齐次线性方程组 $Ax=0$

$r(A)=n$ 时 $\Leftrightarrow$ 仅有零解；$r(A)<n$ 时 $\Leftrightarrow$ 有非零解.

1．解的性质：

① 如果 V_1,V_2 是齐次线性方程组的两个解，则 V_1+V_2 也是它的解；

② 如果 V 是齐次线性方程组的解，则 cV 也是它的解（c 为常数）；

③如果 $V_1,V_2,...,V_s$ 都是齐次线性方程组的解，则其线性组合：

$c_1V_1+c_2V_2+...+c_sV_s$ 也是它的解，其中 $c_1,c_2,...,c_s$ 都是任意常数.

2．基础解系：齐次线性方程组解向量组的一个极大无关组（$V_1,V_2,...,V_s$）.

2、非齐次线性方程组 $Ax=b$

$r(A)=r(A|b)=n$ 时 $\Leftrightarrow$ 有且仅有唯一解；

$r(A)=r(A|b)<n$ 时 $\Leftrightarrow$ 有无穷解；$r(A)\neq r(A|b)$ 时 $\Leftrightarrow$ 无解.

1．导出组：令 $b=0$,得到的齐次线性方程组 $Ax=0$， 称为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组.

2．非齐次线性方程组的解与它的导出组的解之间有下列性质：

（1）如果 η 是非齐次线性方程组的一个解，ξ 是其导出组的一个解，则 $\eta+\xi$ 也是方程组的一个解.

（2）如果 η_1、η_2 是非齐次线性方程组的两个解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是其导出组的解.

（3）如果 η 是非齐次线性方程组的一个解，ξ 是其导出组的全部解，则 $x=\eta+\xi$ 是非齐次线性方程组的全部解.