1 塑性本构理论

1.1 应力空间下塑性本构的一般形式

”we regard plastic flow as an *irreversible process* in a material body, typically a metal, characterized in terms of the history of the *strain tensor* $\boldsymbol{\varepsilon}$ and two additional variables: the *plastic strain* $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ and a suitable set of *internal variables* generically denoted by $\boldsymbol{\alpha}$ and often referred to as *hardening parameters*.”

应变分解 总应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可以分解为弹性部分 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 与塑性部分 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p.$$

应力响应 应力与弹性应变关联, 若应力与弹性应变满足线弹性本构, 那么应力张量 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}$ 定义为

$$\boldsymbol{\sigma} := \mathbb{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \tag{1}$$

$\mathbb{S}$ 为二阶对称张量空间.

屈服准则 屈服函数 $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ 是关于变量 $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ 的函数, 其中 $\boldsymbol{q}$ 为内变量, 是关于 $(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha})$ 的函数. 屈服函数将应力表示的状态空间 $\mathbb{S} \times \mathbb{R}^m$ 划分成两个区域, 所有可能由塑性阶段达到的状态 $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ 构成的区域定义为:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} := \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \le 0\}. \tag{2}$$

当材料的状态在区域 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的内部时, 只会发生弹性变形, 因此称 $\operatorname{int} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 为弹性区域. $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的边界 $\partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 为屈服面, 在屈服面上 $f = 0$, 是可能发生塑性变形的状态.

流动法则与硬化律 状态变量 $(\varepsilon^p, \boldsymbol{q})$ 分别通过流动法则 $\boldsymbol{r} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{S}$ 与硬化律 $\boldsymbol{q} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ 进行更新:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}^p} = \gamma \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}), \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\gamma \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}). \tag{4}$$

式中, $\gamma \ge 0$ 称为 consistency parameter, 满足

加/卸载条件 (Kuhn-Tucker 条件)

$$\gamma \ge 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \le 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0. \tag{5}$$

由此得到

$$\begin{cases} 若 f < 0,\ 那么 (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \in \operatorname{int} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}},\ \gamma = 0; \\ 若 f = 0,\ 那么 (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \in \partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}},\ \gamma \geq 0. \end{cases}$$

因此, 对于二元组 $\{f, \gamma\}$, 一共有三种可能的符号组合:

$$\{\mathrm{Sign}\{f, \gamma\} \mid (-, 0), (0, 0), (0, +)\}.$$

对 $(0,0)$ 情况, 还可以通过引入屈服函数关于时间导数的信息 $\dot{f}$ 进一步进行区分, 这就需要

一致性条件

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0. \tag{6}$$

这样就得到如下四种情况:

1. $\mathrm{Sign}\{f, \dot{f}, \gamma\} = (-, \cdot, 0)$ **弹性阶段**;
2. $\mathrm{Sign}\{f, \dot{f}, \gamma\} = (0, -, 0)$ **弹性卸载**;
3. $\mathrm{Sign}\{f, \dot{f}, \gamma\} = (0, 0, 0)$ **中性加载**;
4. $\mathrm{Sign}\{f, \dot{f}, \gamma\} = (0, 0, +)$ **塑性加载**.

1.2 理论等效刚度模量

一致性条件要求

$$\dot{f} \leq 0,$$

将上式屈服函数对时间的全导数展开:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{q}(t)) &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \boldsymbol{r} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{h} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

若规定函数 $f, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}$ 满足

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \boldsymbol{r} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{h} > 0,$$

那么当 $f = 0$, $\dot{f} = 0$ 时,

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \boldsymbol{r} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \boldsymbol{h}}, \tag{7}$$

并且 γ 的符号与 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 保持一致. 如果计算塑性的算法是以应变驱动的, 那么这一结论将帮助我们通过应变增量判断材料是否处于塑性加载阶段.

进一步分析还可以得到率形式下的刚度模量:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbb{L}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)=\mathbb{L}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\gamma\boldsymbol{r}),$$

通过张量运算, 可以得到

$$\gamma\mathbb{L}:\boldsymbol{r}=\frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{L}:\boldsymbol{r}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{h}}\mathbb{L}:\boldsymbol{r}=\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}:\mathbb{L}\otimes\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{L}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{L}:\boldsymbol{r}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{h}}}_{:=\mathbb{L}^p}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

当材料处于塑性加载阶段时, 率形式下的应力应变关系就等于

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbb{L}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)=(\mathbb{L}-\mathbb{L}^p):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

式中的 $\mathbb{L}^p$ 可以看作是在塑性阶段折减的刚度模量.

1.3 应变空间下塑性本构

之间讨论的塑性本构是将 $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{q}$ 作为独立变量, 讨论的空间是 $\mathbb{S}\times\mathbb{R}^m$, 而应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以通过式(1) 用变量 $(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ 表示. 因此, 我们也可以选取独立变量为 $(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{q})\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}\times\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{q})&\coloneqq f(\mathbb{L}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p),\boldsymbol{q});\\ \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{q})&\coloneqq \boldsymbol{r}(\mathbb{L}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p),\boldsymbol{q});\\ \bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{q})&\coloneqq \boldsymbol{h}(\mathbb{L}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p),\boldsymbol{q}).\end{aligned}$$

再根据链式法则, 可以得到

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbb{L}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{q}}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{q}},$$

应变空间中的屈服函数 $\bar{f}$ 关于时间的导数为

$$\dot{\bar{f}}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{q})=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\gamma\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\boldsymbol{r}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\right).$$

当 $\gamma>0$ 时,

$$\gamma=\frac{\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\boldsymbol{r}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{h}},\tag{8}$$

并且, γ 的符号与 $\frac{\partial\bar{f}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 一致.

1.4 加/卸载条件的等价表述

在 1.1 中, 我们通过 $\{f, \dot{f}, \gamma\}$ 的符号, 确定材料四种可能的加载状态, 而式 (7) 和式 (8) 表达式的符号与 γ 是一致的:

$$\gamma > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0. \tag{9}$$

假设在当前时刻, 材料不发生塑性应变, 此时假想的应力状态定义为:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{trial}} \coloneqq \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

那么式 (9) 就可以重新记为

$$\gamma > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{trial}} > 0.$$

1.5 $\mathbf{J_2}$ 流动理论

这一节将基于上文讨论的塑性理论框架, 根据 J_2 塑性理论, 给出 f, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{h}$ 的具体函数形式. 我们准备实现的本构需要用到的材料参数为

PROPS	1	2	3	4
	E-杨氏模量	ν-泊松比	σ_{yl}-屈服应力	N-硬化指数

状态变量 $\boldsymbol{q}$ 为等效塑性应变 ϵ^p:

$$\boldsymbol{q} \coloneqq \epsilon^p \in \mathbb{R}.$$

应力空间上屈服函数 $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 定义为

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \coloneqq \|\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{yl}} \left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}\epsilon^p\right)^N.$$

定义函数 $\boldsymbol{h} : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 为:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \coloneqq -1,$$

由此得到硬化律:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\gamma \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = \gamma,$$

所以

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma.$$

假设塑性应变流动方向与应力空间中屈服面的法向一致, 那么

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \tag{10}$$

式 (10) 又被称为 associative flow rule. 如果定义 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}$ 的法向为

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}) := \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\|} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

那么塑性应变率等于

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}).$$

综合上述讨论, 得到

$$\boxed{\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \epsilon^p) &= \|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\mathrm{yl}}\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\mathrm{yl}}}\epsilon^p\right)^N; \quad (11) \\ \dot{\epsilon}^p &= \gamma; \quad (12) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}). \quad (13) \end{aligned}}$$

注 1. *Von Mises 等效应力与 $\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\|$ 的关系为:*

$$\sigma_{\mathrm{vm}} := \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\|.$$

2 塑性本构算法

塑性本构中关于时域的微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \nabla \dot{\boldsymbol{u}}; \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}); \\ \dot{\boldsymbol{q}} &= -\gamma \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}). \end{aligned}$$

使用隐式 Euler 方法对时域进行离散, 得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \nabla(\boldsymbol{u}_n + \Delta \boldsymbol{u}); \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^p_n + \Delta\gamma \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1}); \quad (15)$$

$$\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n - \Delta\gamma \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1}); \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1}). \quad (17)$$

式中, $\Delta\gamma = \Delta t \gamma_{n+1}$. 在有限元的计算框架中, 每一个加载步的 $\Delta \boldsymbol{u}$ 是给定的, 因此式 (14) 中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ 是已知量, 需要求解的是(15)-(17)三个耦合的非线性方程.

除了更新状态变量的方程之外, 还需要对加/卸载条件进行时间域上的离散:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1}) &\le 0; \\ \Delta\gamma &\ge 0; \\ \Delta\gamma f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1}) &= 0. \end{aligned}$$

式 (15) 和 (16) 的更新需要知道 $\Delta\gamma$ 的符号, 但是, 用来判断 $\Delta\gamma$ 符号的离散加/卸载条件需要 $n+1$ 时刻 $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1})$ 的信息, $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1})$ 只有在 (15) 和 (16) 更新之后才能获得. 为确定 $\Delta\gamma$ 的符号, 我们假设 $\Delta\gamma=0$, 也即假设材料在第 $n+1$ 步加载过程中处于弹性阶段, 并引入以下 trial 状态变量:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ \text{trial}} &:= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p;\\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ \text{trial}} &:= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ \text{trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p;\\
\boldsymbol{q}_{n+1}^{\text{trial}} &:= \boldsymbol{q}_n;\\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} &:= \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ \text{trial}}) = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p);\\
f_{n+1}^{\text{trial}} &:= f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{\text{trial}}).
\end{aligned}
$$

trial 变量可完全由初始值 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \boldsymbol{q}_n\}$ 和已知量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ 得到. 如果 f 是凸函数, 那么通过 f_{n+1}^{trial} 的数值就可以判断 $\Delta\gamma$ 的符号:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f_{n+1}^{\text{trial}} < 0 \Rightarrow \Delta\gamma = 0;\\
f_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \Rightarrow \Delta\gamma > 0.
\end{aligned}
}
$$

现在我们讨论 J_2 塑性本构的应力更新过程. 若 $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$, 此时材料处于塑性阶段, $\Delta\gamma > 0$, 第 $n+1$ 步的塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ 和状态变量 ϵ_{n+1}^p 满足

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \boldsymbol{n}_{n+1};\\
\epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \Delta\gamma.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

式中, $\boldsymbol{n}_{n+1} := \frac{\boldsymbol{s}_{n+1}}{\|\boldsymbol{s}_{n+1}\|}$, $\boldsymbol{s}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{dev}}$. $\boldsymbol{s}_n$, $\boldsymbol{s}_{n+1}$, $\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}$ 之间的关系为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}} &= \boldsymbol{s}_n + 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{dev}};\\
\boldsymbol{s}_{n+1} &= \boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma\boldsymbol{n}_{n+1}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

而根据定义, $\boldsymbol{s}_{n+1} = \|\boldsymbol{s}_{n+1}\|\boldsymbol{n}_{n+1}$, 因此 $\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}$ 在应力空间中的方向和 $\boldsymbol{s}_{n+1}$ 相同, 如图所示. 将式 (19) 左右两端分别乘 $\boldsymbol{n}_{n+1}$, 得到

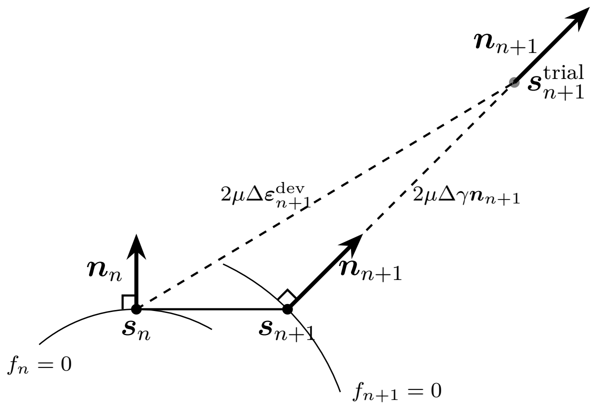
$$
\|\boldsymbol{s}_{n+1}\| = \|\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\Delta\gamma,
\tag{20}
$$

根据加/卸载条件, 当 $\Delta\gamma > 0$ 时, 屈服函数 $f_{n+1} \equiv 0$:

$$
f_{n+1} = \|\boldsymbol{s}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{yl}}\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}\epsilon_{n+1}^p\right)^N \equiv 0.
\tag{21}
$$

联立式 (18), (20) 和 (21), 得到关于变量 $\Delta\gamma$ 的非线性方程 $g(\Delta\gamma) \equiv 0$:

$$
g(\Delta\gamma) := \|\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{yl}}\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}(\epsilon_n^p + \Delta\gamma)\right)^N \equiv 0.
\tag{22}
$$



使用 Newtion 迭代法求解第 $(k+1)$ 步 $\Delta\gamma^{(k+1)}$, 需要用到函数 g 在 $\Delta\gamma^{(k)}$ 的导数信息 $\mathrm{D}g(\Delta\gamma^{(k)})$:

$$\mathrm{D}g(\Delta\gamma^{(k)}) = -2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}}EN\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}(\epsilon_n^p + \Delta\gamma^{(k)})\right)^{N-1} \tag{23}$$

第 $(k+1)$ 步的迭代结果为:

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{g(\Delta\gamma^{(k)})}{\mathrm{D}g(\Delta\gamma^{(k)})}.$$

Radial Return 算法

1. **计算 trial 弹性状态量**. 给定时刻 t_{n+1} 的总应变: $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, 时刻 t_n 的状态变量: $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \epsilon_n^p\}$, 计算 $n+1$ 时刻 trial 状态量为

$$\epsilon_{n+1}^{p\ \text{trial}} = \epsilon_n^p; \quad \boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p).$$

2. **检验屈服条件**.

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}, \epsilon_{n+1}^{p\ \text{trial}}) = \|\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{yl}}\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}\epsilon_{n+1}^{p\ \text{trial}}\right)^N.$$

$$\begin{aligned}&\text{IF } f_{n+1}^{\text{trial}} \le 0\\ &\text{THEN set } (\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} \text{ and EXIT}\end{aligned}$$

3. **运行子程序** *solvegamma*, **求解非线性方程** $g(\Delta\gamma) \equiv 0$.

4. **更新应力与状态变量**.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \Delta\gamma;\\
\boldsymbol{n}_{n+1} &= \frac{\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|};\\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma\boldsymbol{n}_{n+1};\\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= K\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}]\,\mathbf{I} + \boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma\boldsymbol{n}_{n+1}.
\end{aligned}$$

子程序 *solvegamma*

0. 初始化: $\Delta\gamma^{(0)} = 0$.

1. 第 $(k+1)$ 次迭代:

   i. IF $g(\Delta\gamma^{(k)}) < \text{TOL}$ EXIT

   ii. 计算 $\Delta\gamma^{(k+1)}$.

$$\begin{aligned}
g(\Delta\gamma^{(k)}) &= \|\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\Delta\gamma^{(k)} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{yl}}\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}(\epsilon_n^p + \Delta\gamma^{(k)})\right)^N;\\
\mathrm{D}g(\Delta\gamma^{(k)}) &= -2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}}EN\left(1 + \frac{E}{\sigma_{\text{yl}}}(\epsilon_n^p + \Delta\gamma^{(k)})\right)^{N-1};\\
\Delta\gamma^{(k+1)} &= \Delta\gamma^{(k)} - \frac{g(\Delta\gamma^{(k)})}{\mathrm{D}g(\Delta\gamma^{(k)})}.
\end{aligned}$$

附录

二阶张量 deviatoric 分解　对于二阶张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 总可以做如下分解:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right]\mathbf{I}}_{:=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right]\mathbf{I}}_{:=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}},$$

deviatoric 分解的性质为:

1. 算子 $(\cdot)^{\mathrm{vol}}$ 和 $(\cdot)^{\mathrm{dev}}$ 是线性算子, *i.e.*

$$(\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mu\boldsymbol{\varepsilon}_2)^{\mathrm{vol}} = \lambda\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{vol}} + \mu\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{vol}}, \quad (\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mu\boldsymbol{\varepsilon}_2)^{\mathrm{dev}} = \lambda\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{dev}} + \mu\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{dev}},$$

2. 偏张量的迹等于 0:

$$\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}\right] = \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right]\mathrm{tr}\left[\mathbf{I}\right] = 0;$$

3. volumatric 部分和 deviatoric 部分双点积结果为 0:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right]\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \mathbf{I} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right]\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} \cdot \mathbf{I}\right] = 0.$$

性质 2 使得在计算材料的应变能密度时, 能量可以分解为由静水压力引起的应变能, 和材料畸变导致的应变能:

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{vol}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}},$$

四阶单位张量　四阶单位张量有三种, 写成分量形式为:

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \mathcal{B}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \mathcal{C}_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}.$$

定义如下两种四阶张量符号:

$$\{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\}_{ijkl} = \mathcal{A}_{ijkl}, \quad \{\mathbb{I}\}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\mathcal{B}_{ijkl} + \mathcal{C}_{ijkl}).$$

二阶对称张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别与四阶单位张量 $\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$, $\mathbb{I}$ 双点积的结果为

$$\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}\otimes\mathbf{I} = \delta_{ij}\delta_{kl}\sigma_{kl} = \delta_{ij}\sigma_{kk} = \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\sigma}\right]\mathbf{I};$$
$$\mathbb{I} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{I} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}\sigma_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}\sigma_{kl}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) = \boldsymbol{\sigma}.$$

如果用 Voigt 记法将四阶单位张量表示为矩阵的形式, 那么

$$[\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbb{I}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

注 2. $[\mathbb{I}]$ 在 *Voigt* 记法中并不是 $\mathbb{R}^{6\times 6}$ 的单位矩阵, 这是因为 *Voigt* 映射规则将张量 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别映射为

$$[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{C}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

各向同性弹性张量的不同表示方法　对于各向同性材料, 四阶弹性模量张量 L_{ijkl} 可以用 Lame 系数表示为

$$L_{ijkl} := \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk},$$

将上式写成张量形式 $\mathbb{L}$ 为

$$\mathbb{L} := \lambda\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\mathbb{I}.$$

也可以用常数 K 与 μ, 将 $\mathbb{L}$ 写成类似于二阶张量 deviatoric 分解的形式:

$$\mathbb{L} := K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right). \tag{25}$$

式中, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. 又因为

$$\begin{gathered} \mathbf{I}\otimes\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} = 3\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}}, \quad \mathbf{I}\otimes\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}} = 0, \\ \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} = 0, \quad \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}, \end{gathered}$$

所以如果使用式 (25) 的表示方法, 对应变的 deviatoric 分解作双点积运算, 可以得到更紧凑的结果:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}) &= K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} + 2\mu\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}} \\ &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{vol}} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}. \end{aligned}$$

张量导数　二阶对称张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 对自身的导数为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{I}.$$

张量的迹 $\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\sigma}]$ 对张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的导数为

$$\frac{\partial\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\sigma}]}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial\sigma_{ij}} = \delta_{ij} = \mathbf{I}.$$

偏张量 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}$ 对张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,[\sigma]\,\mathbf{I}\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

若二阶张量的范数定义为张量的双点积

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \coloneqq \mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = \sigma_{ij}\sigma_{ij}.$$

那么张量范数的导数为

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\sigma}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\|\boldsymbol{\sigma}\|}(\mathbb{I} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{I}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \coloneqq \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\sigma}}.$$

注意到

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\right]\mathbf{I} = 0,$$

因此

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\|} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\|}.$$

张量法向 $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 对张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 求导数, 得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}\|}(\mathbb{I} - \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\sigma}}).$$