Sovling the Possion Equation

主讲人　邱欣欣
幻灯片制作　邱欣欣

中国海洋大学　信息科学与工程学院

2014 年 3 月 28 日

Contents

Poisson Equation

$$-\nabla^2 u = f$$

$$\int_\Omega (\nabla^2 u + f) v = 0$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega vf + \int_{\partial\Omega} vg$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad on \quad \partial\Omega$$

Galerkin finite element method

- 选择 $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$ 为试探函数的一组基，同时定义附加函数 $\phi_{n+1}, \cdots, \phi_{n+n_\partial}$.

$$u_h \sum_{j=1}^{n} u_j\phi_j + \sum_{j=n+1}^{n+n_\partial} u_j\phi_j$$

- $\phi_i, i = 1, \cdots, n$ 被称作形状函数.

Galerkin finite element method

- $$\sum_{j=1}^{n} u_j \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i = \int_\Omega \phi_i f + \int_{\partial\Omega_N} \phi_i g_N - \sum_{j=n+1}^{n+n_\partial} u_j \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i$$

- $$Au = f$$

  $$Au = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i$$

- $$f = [f_i]$$

  $$f_i = \int_\Omega \phi_i f + \int_{\partial\Omega_N} \phi_i g_N - \sum_{j=n+1}^{n+n_\partial} u_j \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i$$

三角形元与矩形元

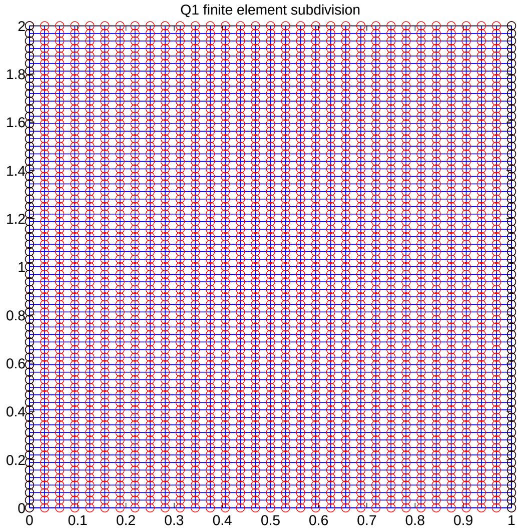
- 求解二维问题的常用单元的形状函数及构造方法，包括矩形元、三角形元等。
- 将区域分割成有限个三角形之和，使不同三角形无重叠的内部，且任一三角形的顶点不属于其他三角形的内部，这样称之为三角剖分。
- 假定区域可以分割成有限个矩形的和，且每个小矩形的边和坐标轴平行，任意两个矩形，或者不相交，或者有公共的边或公共的顶点，我们把每一小矩形叫做单元，称如此的分割为矩形剖分。

Contents

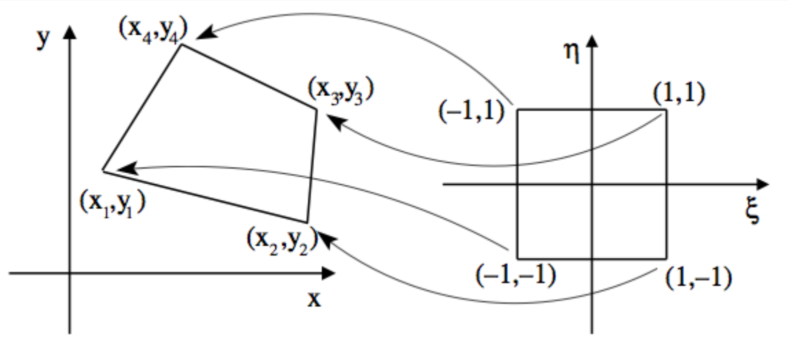
定义结构 – 设置网格

- 设置矩形域 $[0, L] \times [0, H]$, 输入域高 H 与域宽 L（默认 H=2, L=1）
- 选择边界条件 – Neumann 边界条件
- 设置单元个数（默认 16），默认共 $33 \times 65 = 2145$ 个坐标点，512 个矩形元
- 程序生成：mv, xy, bound, mbound

定义结构－设置网格


Q1 finite element subdivision
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0.1
0.3
0.5
0.7
0.9

Contents



y
(x_4,y_4)
(x_3,y_3)
(x_1,y_1)
(x_2,y_2)
x
η
(–1,1)
(1,1)
ξ
(–1,–1)
(1,–1)

建立矩阵－ $Au = f$

- 矩形元的所有点的局部－全局映射由下式给出

$$\begin{aligned}
x(\xi,\eta) &= x_1\chi_1(\xi,\eta) + x_2\chi_2(\xi,\eta) + x_3\chi_3(\xi,\eta) + x_4\chi_4(\xi,\eta) \\
y(\xi,\eta) &= y_1\chi_1(\xi,\eta) + y_2\chi_2(\xi,\eta) + y_3\chi_3(\xi,\eta) + y_4\chi_4(\xi,\eta)
\end{aligned}$$

- $\chi_1(\xi,\eta), \chi_2(\xi,\eta), \chi_3(\xi,\eta), \chi_4(\xi,\eta)$ 是 Q1 基函数。
-

$$a_{ij}^{(k)} = \int_{\square^*} \left\{ \frac{\partial\psi_{*,i}}{\partial x}\frac{\partial\psi_{*,j}}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{*,i}}{\partial y}\frac{\partial\psi_{*,j}}{\partial y} \right\} |J_k| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$f_i^{(k)} = \int_{\square^*} f\psi_{*,i} |J_k| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

建立矩阵— $Au = f$

- 使用高斯求积法来求解上述的定积分

$$\bar{a}_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{m} w_{st}|J_k(\xi_s,\eta_t)| \left\{ \frac{\partial\psi_{*,i}}{\partial x}\frac{\partial\psi_{*,j}}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{*,i}}{\partial y}\frac{\partial\psi_{*,j}}{\partial y} \right\}\Bigg|_{(\xi_s,\eta_t)}$$

$$\bar{f}_i^{(k)} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{m} w_{st} f(\xi_s,\eta_t)\psi_{*,i}(\xi_s,\eta_t)|J_k(\xi_s,\eta_t)|$$

Contents

求解方程－ TR

- 使用稳定梯形法则

$$M\dot{u} + Au = f \qquad u(0) = u_0$$

给出向量 $u_n \approx u(t_n)$, $u_{n+1} \approx u(t_n + \triangle t_n)$, 求解隐式系统

$$u_{n+1} = u_n + M^{-1}(f - \frac{1}{2}A(u_{n+1} + u_n))$$