

2024 年下北泽市新高一暑假适应性测逝

数学

姓名_____

注意事项:

1. 本卷共有 7 题，满分 150 分
2. 考试过程中，禁止吃试卷、发射核弹、操纵航天器撞向木星、加速航天器进入黑洞以进入高维空间、使用曲率飞船、操纵战舰前进四、玩《崩坏》及其有关游戏、《原神》、《绝区零》等二游、看 BiliBili、使用大脑等危险行为。一经发现，满分处理。

1. (16 分) 集合和逻辑用语是高中数学的基础知识。阅读必修一课本 1-34 页，回答问题。
(1) 集合 $A = \{x \mid (m - 2)x^2 + 2mx - 1 = 0\}$ 有且仅有一个元素，则实数 $m = \underline{\pm 2 \text{ 或 } 1}$ (1 分)。
(2) 集合 $M = \{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 。求：集合 M 的子集个数、集合 M 的所有子集的元素之和的和 (5 分)。

解 (2) 设其中一个子集为 A 。则对于 M 中每一个元素 i ，都有 2 种情况： $i \in M$ 、 $i \notin M$ ，所以有 2^{100} 个子集.....**2 分**
另外，注意到每个元素 i 都被算了 2^{99} 次，所以所有子集的元素之和的和是

$$\sum_{i=1}^{100} i \times 2^{99} = 5050 \times 2^{99} \cdots \cdots$$

5 分

- (3) 已知集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \cdots, n\} (n \geq 2)$ 。
对于 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n), B = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S_n$ ，
定义 A 与 B 的差为:
-

$$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \cdots, |a_n - b_n|)$$

A 与 B 之间的距离为:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

设 $P \subseteq S_n$ ，P 中有 $m(m \geq 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间距的平均值为 $\bar{d}(P)$ 。
证明: $\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$ 。(10 分)

证明 注意到 P 中有 $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ 个距离。.....**2 分**
则我们不妨设在第 i 个位置上有 r_i 个 1，就有 $(m - r_i)$ 个 0。.....**5 分**
所以

$$\begin{aligned} \bar{d}(P) &= \frac{1}{C_m^2} \cdot \sum d(A, B) \\ &= \frac{1}{C_m^2} \cdot \sum_{i=1}^n r_i(m - r_i) \\ &\leq \frac{1}{C_m^2} \cdot \sum_{i=1}^n (\frac{r_i + m - r_i}{2})^2 \\ &= \frac{mn}{2(m-1)} \cdots \cdots \end{aligned}$$

10 分

-
2. (30 分) 函数是函数。阅读必修一课本 36-159 页，回答问题。
(1) 比大小： $x = \ln \pi, y = \log_5 2, z = e^{-\frac{1}{2}}$ (1 分)

答案 $y < z < x$**1 分**

- (2) 函数 $f(x)$ 满足 $f(2 + x) \cdot f(2 - x) = 4$ ，当 $x \in [0, 2], f(x) = x^2 - ax + 2a - 2(a > 0)$ 。
 $\forall x \in [0, 4], 1 \leq f(x) \leq 3$ 。求 a 取值范围。(5 分)

答案 没算错的话应为 $[2, \frac{5}{2}]$**5 分**

- (3) $f(x) = e^x, a \neq b$ 。
证明: $\exists \xi \in (a, b), \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = e^\xi$ 。(提示: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ ，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立)。(9 分)

证明 由于对称性不妨设 $a < b$ 。记

$$F(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} - e^x = \frac{e^a - e^b}{a - b} - e^x$$

则注意到 $F(a) > 0, F(b) < 0$ 。又 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续，所以原命题成立。.....**9 分**

阅读选修二课本 58-103 页，回答问题。

- (4) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x - 1)^3$ 。
若 $f(x) > -2$ ，当且仅当 $1 < x < 2$ ，求 b 的取值范围。(15 分)

解 易得 $a = -2$ 。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + 3b(x-1)^2 - 2 \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$= (x-1)^2 [\frac{2}{x(2-x)} + 3b]$$

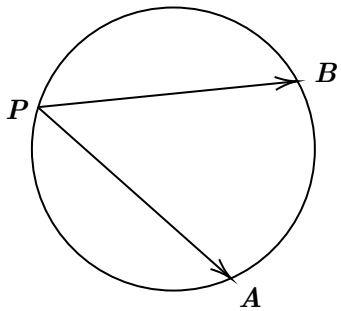
记

$$g(x) = \frac{2}{x(2-x)} + 3b$$

在 $(1, 2)$ 上 \nearrow 。设 $g(x)$ 有零点 x_0 ，则必有 $x_0 \notin (1, 2)$ 。
否则当 $x \in (1, x_0)$ 时， $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow \Rightarrow \forall x \in (1, x_0), f(x) < -2$ ，与题设不符。
则 $g(1) \geq 0, b \geq -\frac{2}{3}$**充分性，12 分**

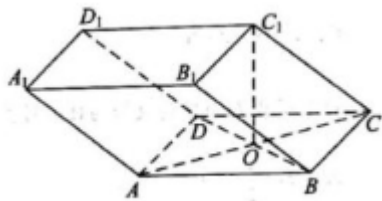
如果 $b \geq -\frac{2}{3}$, 则在 $(1, 2)$, $f'(x) \geq 0$, $f(x) \nearrow$
 $\Rightarrow f(x) \geq f(1) = -2$, 又 $f(x) \neq -2$, 则原命题成立。..... 必要性, 14 分
 综上 $b \in [-\frac{2}{3}, +\infty)$ 15 分
 □

3. (15 分) 向量是向量, 复数是复数。阅读必修二课本 1-94 页, 回答问题。
 (1) 如图, 圆的半径是 1, A, P, B 在圆上, 求 $(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})_{min}$ 。(5 分)



答案 $-\frac{1}{2}$ □
 (2) 利用向量证明: 圆外接四边形两个对角线的中点与圆心三点共线。(10 分)
 证明 略。(言之有理即可) □

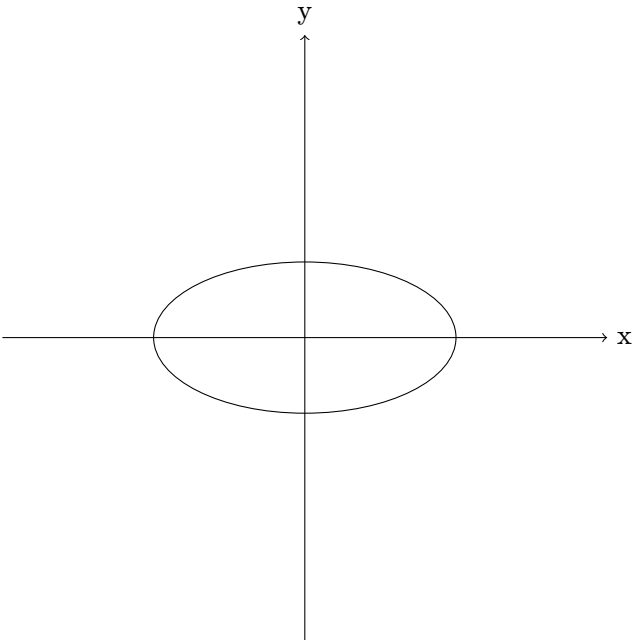
4. (15 分) 立体几何是立体几何。阅读必修二课本 96-121 页及选修一课本 1-47 页, 回答问题。
 如图, 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, $AA_1 = 2, \angle C_1CB = \angle C_1CD, \angle C_1CO = 45^\circ$ 。
 (1) 证明: $C_1O \perp$ 平面 $ABCD$:
 (2) 求二面角 $B - AA_1 - D$ 的正弦值.



图

答案 (1) 略。(2) 略, 答案为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ □

5. (14 分) 解析几何是解析几何。阅读选修一课本 50-145 页, 回答问题。
 (1) 地球运行的轨道是离心率为 0.017 的椭圆. 椭圆的半长轴的长是 $1.5 \times 10^8\text{km}$ (即: $c = 1.5 \times 10^8$). 太阳在其中一个焦点上. 求: 地球到太阳的最长距离与最短距离的差. (4 分)
 (2) (5 分) 已知椭圆 $E: x^2 + 4y^2 = 4$ 与 x 轴交于 M, N (M 在 N 左). 过 $P(-2, 2)$ 作直线与椭圆 E 交于第一象限的 A, B 两点, 且 A 在线段 BP 上. 直线 OP 与直线 NA 交于点 C , 连结 MB, MC, AM .
 设直线 AM, AC, MB, MC 的斜率分别是 $k_{AM}, k_{AC}, k_{MB}, k_{MC}$.
 证明: $\frac{k_{AM}}{k_{AC}} = \frac{k_{MB}}{k_{MC}}$.



自己画图!
 (3) 已知长方形 $ABCD$ 的边 AB, AD 上有点 E, F . 若 $BE : BA = AF : AD$. 求 CE, BF 交点 P 的轨迹. (5 分)
 答案 略 □
 6. (15 分) 数列是数列。阅读选修二课本 1-54 页, 回答问题。
 求斐波那契数列的通项公式。
 解 略。 □
 7. (45 分) 开放题。
 使用任意一个编程语言 (包括但不限于: C/C++, Python、HTML+Javascript、伪代码/流程图、C#、红石电路、机器码、汇编 ...), 完成以下两个要求之一, 给出代码 (不超过 1000 行)。
 (1) 给出一个多项式, 在给定的精确度下求解方程的近似解。
 (2) 生成 1-114514 的所有素数。
 我们将会根据代码的长度、时间复杂度、空间复杂度等方面综合赋分。
 答案 略。 □