

2024 年下北泽市新高一暑假适应性测逝

数学

姓名_____

注意事项：

1. 本卷共有 7 题，满分 150 分
2. 考试过程中，禁止吃试卷、发射核弹、操纵航天器撞向木星、加速航天器进入黑洞以进入高维空间、使用曲率飞船、操纵战舰前进四、玩《崩坏》及其有关游戏、《原神》、《绝区零》等二游、看 BiliBili、使用大脑等危险行为。一经发现，满分处理。

1. （16 分）集合和逻辑用语是高中数学的基础知识。阅读必修一课本 1-34 页，回答问题。
（1）集合 $A = \{x \mid (m - 2)x^2 + 2mx - 1 = 0\}$ 有且仅有一个元素，则实数 $m = \underline{\hspace{1cm}}$ （1 分）。
（2）集合 $M = \{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 。求：集合 M 的子集个数、集合 M 的所有子集的元素之和的和（5 分）。
（3）已知集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \cdots, n\} (n \geq 2)$ 。
对于 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n), B = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S_n$ ，
定义 A 与 B 的差为：

$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \cdots, |a_n - b_n|)$

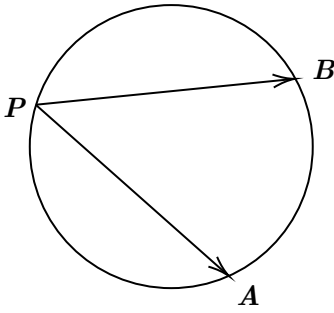
A 与 B 之间的距离为：

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

- 设 $P \subseteq S_n$ ，P 中有 $m(m \geq 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间距的平均值为 $\bar{d}(P)$ 。
证明: $\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$ 。（10 分）

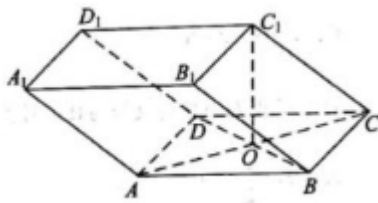
2. （30 分）函数是函数。阅读必修一课本 36-159 页，回答问题。
（1）比大小： $x = \ln \pi, y = \log_5 2, z = e^{-\frac{1}{2}}$ （1 分）
（2）函数 $f(x)$ 满足 $f(2 + x) \cdot f(2 - x) = 4$ ，当 $x \in [0, 2], f(x) = x^2 - ax + 2a - 2(a > 0)$ 。
 $\forall x \in [0, 4], 1 \leq f(x) \leq 3$ 。求 a 取值范围。（5 分）
（3） $f(x) = e^x, a \neq b$ 。
证明： $\exists \xi \in (a, b), \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = e^\xi$ 。（提示： $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ ，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立）。（9 分）
阅读选修二课本 58-103 页，回答问题。
（4）已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x - 1)^3$ 。
若 $f(x) > -2$ ，当且仅当 $1 < x < 2$ ，求 b 的取值范围。（15 分）

3. （15 分）向量是向量，复数是复数。阅读必修二课本 1-94 页，回答问题。
（1）如图，圆的半径是 1，A, P, B 在圆上，求 $(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})_{min}$ 。（5 分）



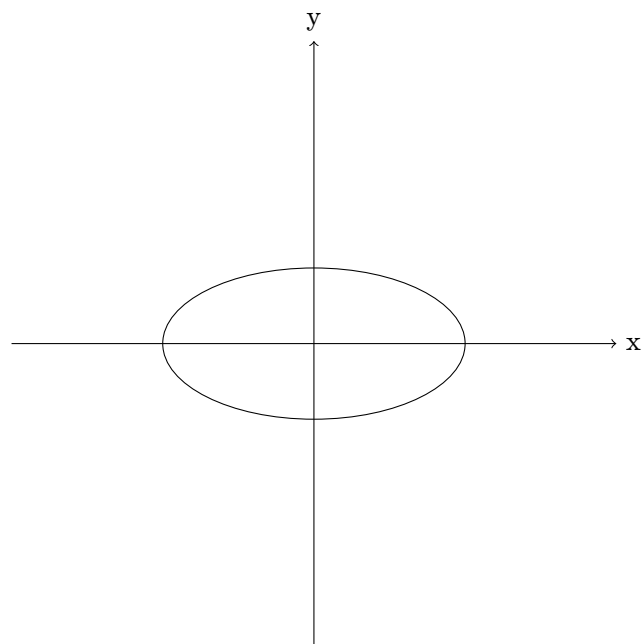
（2）利用向量证明：圆外接四边形两个对角线的中点与圆心三点共线。（10 分）

4. （15 分）立体几何是立体几何。阅读必修二课本 96-121 页及选修一课本 1-47 页，回答问题。
如图, 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, O 为 A C 与 B D 的交点, $AA_1 = 2, \angle C_1CB = \angle C_1CD, \angle C_1CO = 45^\circ$ 。
（1）证明: $C_1O \perp$ 平面 $ABCD$:
（2）求二面角 $B - AA_1 - D$ 的正弦值。



图

5. （14 分）解析几何是解析几何。阅读选修一课本 50-145 页，回答问题。
（1）地球运行的轨道是离心率为 0.017 的椭圆. 椭圆的半长轴的长是 $1.5 \times 10^8 \text{km}$ (即: $c = 1.5 \times 10^8$). 太阳在其中一个焦点上. 求：地球到太阳的最长距离与最短距离的差.（4 分）
（2）（5 分）已知椭圆 $E : x^2 + 4y^2 = 4$ 与 x 轴交于 $M, N(M$ 在 N 左). 过 $P(-2, 2)$ 作直线与椭圆 E 交于第一象限的 A, B 两点, 且 A 在线段 BP 上. 直线 OP 与直线 NA 交于点 C , 连结 MB, MC, AM .
设直线 AM, AC, MB, MC 的斜率分别是 $k_{AM}, k_{AC}, k_{MB}, k_{MC}$.
证明: $\frac{k_{AM}}{k_{AC}} = \frac{k_{MB}}{k_{MC}}$.



自己画图!

(3) 已知长方形 $ABCD$ 的边 AB, AD 上有点 E, F . 若 $BE : BA = AF : AD$. 求 CE, BF 交点 P 的轨迹. (5 分)

6. (15 分) 数列是数列。阅读选修二课本 1-54 页，回答问题。
求斐波那契数列的通项公式。

7. (45 分) 开放题。

使用任意一个编程语言 (包括但不限于: C/C++, Python、HTML+Javascript、伪代码/流程图、C#、红石电路、机器码、汇编 ...), 完成以下两个要求之一, 给出代码 (不超过 1000 行)。

- (1) 给出一个多项式, 在给定的精确度下求解方程的近似解。
- (2) 生成 1-114514 的所有素数。

我们将会根据代码的长度、时间复杂度、空间复杂度等方面综合赋分。