考虑空气阻力的抛体运动

物理 2412　　王启翔

一、没有空气阻力的情况

首先我们考虑没有空气阻力的情况。假设物体的抛射角为 θ，初速度为v_0，则 x，y 方向上有：

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

解得：

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos\theta} x^2$$

也可以算出，滞空时间t_1为：

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

最大高度 H 为：

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta$$

令 y=0，射程为：

$x_0 = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin 2\theta$

由此可知，使射程最大的抛射角$\theta_0 = 45^0$，此时最大射程$x = \frac{v_0^2}{g}$.

二、有空气阻力的情况

假设：空气阻力与速度成正比，即$\vec{f} = -\gamma m \vec{v}$，同样是抛射角为 θ，初速度为$v_0$.

则在 x，y 方向上的加速度可表示为：

$$\begin{cases} a_x = -\gamma v_x \\ a_y = -g - \gamma v_y \end{cases}$$

接下来让我们推导 x，y 方向上速度和位移的参数方程：

Ⅰ．速度

（1）x 方向上:

$$-\gamma v_x = \frac{dv_x}{dt}\text{，即}-\gamma\, dt = \frac{dv_x}{v_x}$$

两边积分：

$$-\gamma \int_0^t dt = \int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x}$$

得

$$-\gamma t = ln\frac{v_x}{v_{x_0}}$$

带入$v_{x_0} = v_0 \cos\theta$，得

$$v_x = v_0 \cos\theta \cdot e^{-\gamma t}$$

（2）y 方向上同理:

$$\frac{dv_y}{\frac{g}{\gamma} + v_y} = -\gamma dt$$

积分得

$$ln\frac{\frac{g}{\gamma} + v_y}{\frac{g}{\gamma} + v_{y_0}} = -\gamma t$$

带入$v_{y_0} = v_0 \sin\theta$，得

$$v_y = \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}$$

因此有阻力时，速度的参数方程为：

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \cdot e^{-\gamma t} \\ v_y = \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \end{cases}$$

ⅠⅠ．位移

（1）x 方向上：

$$x = \int_0^t v_x\, dt = \int_0^t v_0 \cos\theta \cdot e^{-\gamma t}\, dt = \frac{v_0 \cos\theta}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

（2）y 方向上：

$$y=\int_0^t v_y\,dl=\int_0^t\left[\left(v_0\sin\theta+\frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}-\frac{g}{\gamma}\,)\right]dt=\frac{1}{\gamma}\left(V_0\sin\theta+\frac{g}{\gamma}\right)\cdot(1-e^{-\gamma t})-\frac{g}{\gamma}t$$

因此有阻力时，运动轨迹的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{v_0\cos\theta}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}) \\ y=\dfrac{1}{\gamma}\left(V_0\sin\theta+\dfrac{g}{\gamma}\right)\cdot(1-e^{-\gamma t})-\dfrac{g}{\gamma}t \end{cases}$$

下面我们来计算射高 H：

令t_1时，$v_y=0$，得

$$e^{-\gamma t_1}=\frac{1}{\frac{\gamma}{g}\cdot v_0\sin\theta-1}$$

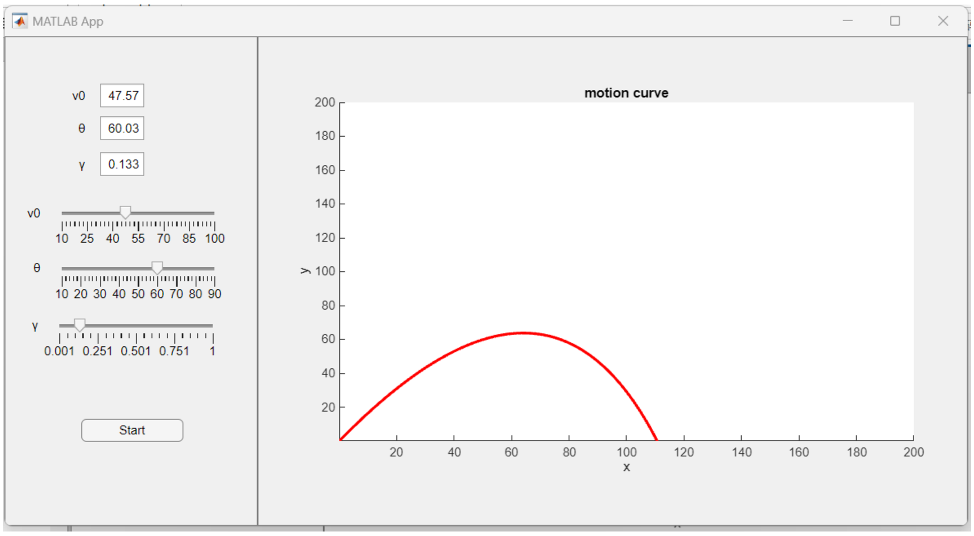
$$t_1=\frac{1}{\gamma}ln\left(1+\frac{\gamma}{g}v_0\sin\theta\right)$$

将$e^{-\gamma t_1}$和t_1带入 y，得

$$H=\frac{1}{\gamma}\left(V_0\sin\theta+\frac{g}{\gamma}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\gamma}{g}\cdot v_0\sin\theta-2}{\frac{\gamma}{g}\cdot v_0\sin\theta-1}\right)-\frac{g}{\gamma^2}ln\left(1+\frac{\gamma}{g}v_0\sin\theta\right)$$

现有数学工具难以计算射程，故尝试通过 MATLAB 模拟，聚焦于相同初速度下，抛射角与射程的关系，给出相对现实的指导意义：

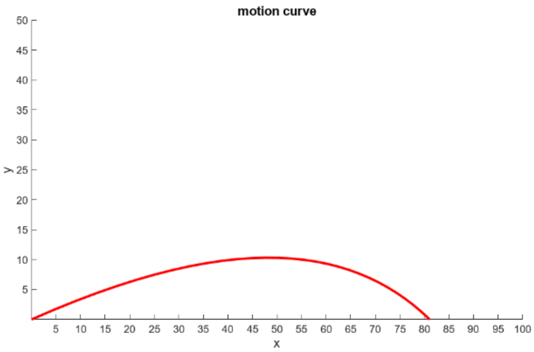
如图，已制作 MATLAB 软件，可以实现对v_0, θ和γ的设定和调节。



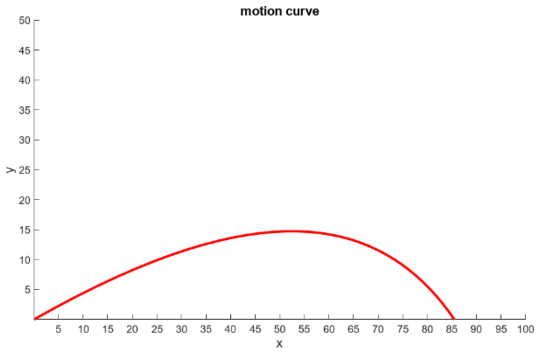
将γ设定为$0.4s^{-1}$，v_0设定为$50m/s$，查看系列θ值的射程：

发现该种情况下，使射程最远的抛射角θ_0满足：$25^0 < \theta_0 < 35^0$

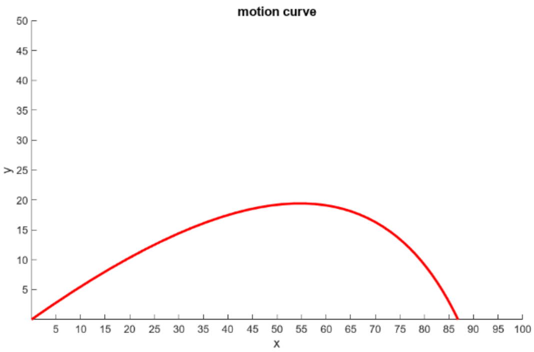
这启示我们在实际的生活中，在做斜抛运动时（如掷铅球），由于空气阻力的存在，我们应该稍微减小投掷角度以获得更好的成绩。



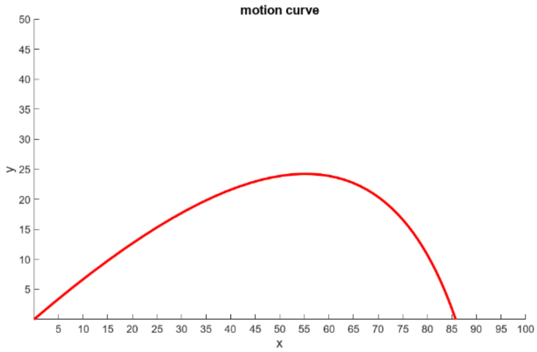
$\theta = 20^0, x \approx 81m$



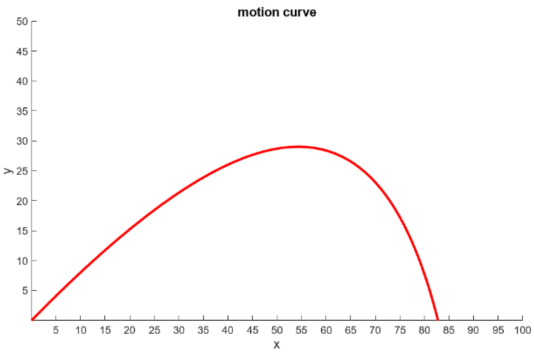
$\theta = 25^0, x \approx 85m$



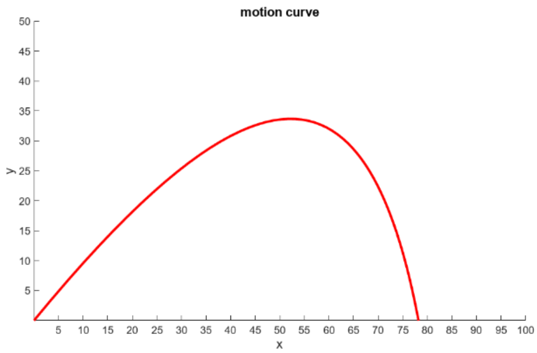
$\theta = 30^0, x \approx 87m$



$\theta = 35^0, x \approx 86m$



$\theta = 40^0, x \approx 83m$



$\theta = 45^0, x \approx 78m$

假设二：空气阻力与速度平方成正比，即$\vec{f} = -\gamma m v \cdot \vec{v}$，同样是抛射角为 θ，初速度为$v_0$.

建立自然坐标系，设路程为s时，速度与水平方向夹角为φ，速度为v，速度水平分量为u，依牛顿第二定律：

$$m\ddot{x} = -\gamma v^2 \cos\varphi = -\gamma u v$$

变形并两边积分：

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\gamma \int v\, \mathrm{d}t = -\gamma \int \mathrm{d}s$$

代入：$u = v_0 \cos\theta$

$$u = v_0 \cos\theta \cdot \mathrm{e}^{-\gamma s}$$

此外，在自然坐标系，有：

$$\begin{cases} a_\tau = -g\cos\varphi = \dfrac{v^2}{\rho} \\ v = \dfrac{u}{\cos\varphi} = v_0 \cdot \dfrac{\cos\theta}{\cos\varphi} \cdot \mathrm{e}^{-\gamma s} \\ \rho = \dfrac{ds}{d\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\sec^3\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot \mathrm{e}^{2\gamma s}\, \mathrm{d}s$$

积分得：

$$-\int_\theta^{\varphi(s)} \sec^3\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \int_0^s \mathrm{e}^{2\gamma s}\, \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \sec\varphi \tan\varphi + \ln(\sec\varphi + \tan\varphi)\Big|_{\varphi(s)}^{\varphi=\theta} = \frac{g}{v_{02} \cos^2\alpha}(1 - \mathrm{e}^{2\gamma s})$$