

飞盘运动的分析

——更高、更远、更稳定的飞盘

王启翔 物理 2412 524072910012

引言

在飞盘运动中，飞盘的运动轨迹和稳定性一直是研究和实践中的核心问题。飞盘飞行过程涉及复杂的空气动力学原理和物理现象，尤其是升力、倾斜角度变化以及飞行距离等方面。人们对于飞盘的兴趣，不仅来源于其飞行特性，还源于其运动中的一些有趣现象。

首先，飞盘在飞行过程中，升力是如何由飞盘的运动和空气相互作用所产生的呢？这些问题涉及到空气动力学中的升力生成机制。其次，飞盘的稳定性问题也是一个常见的现象。当飞盘的飞行角度发生轻微倾斜时，倾斜角度往往会不断增大，最终导致飞盘失稳下落。最后，飞盘飞行的距离问题也是许多飞盘爱好者关注的焦点。如何通过调整飞盘的初速度、角度和旋转速度，使飞盘飞得更远？优化飞盘的飞行轨迹达到最远的飞行距离需要精确的角度控制、适当的升力和最小的空气阻力。

因此，研究飞盘的运动不仅可以揭示其飞行原理，还能够为飞盘的设计和运动技巧提供指导。本文将依照实验探讨飞盘升力的生成机制，分析飞盘在倾斜状态下的失稳现象，并探讨影响飞盘飞行距离的因素，最终进行软件模拟，帮助更好地理解飞盘的飞行特性。

一、飞盘的建模

1.1 飞盘的尺寸

为了了解真实飞盘的形状，购买市面上常见的一个飞盘，并对其形状和参数进行了测量（图 1），以实现对飞盘更加真实的建模。

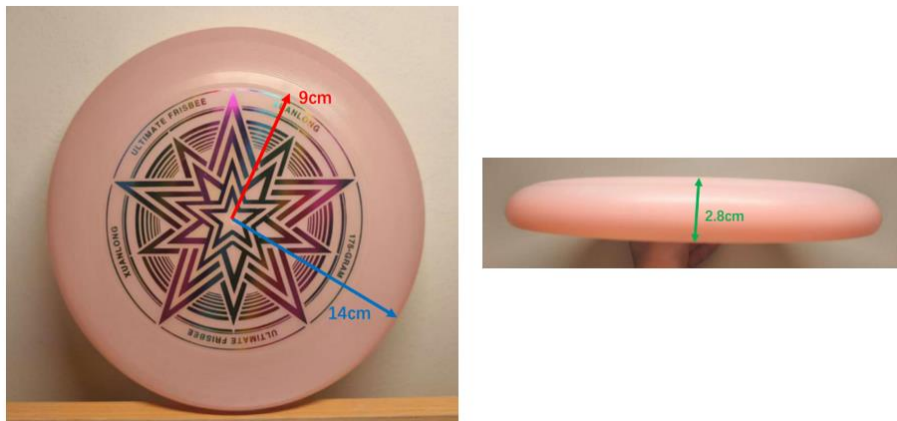


图 1. 飞盘的尺寸

1.2 飞盘的形状

由于升力系数通常和攻角相关，因此测定飞盘的形状是必要的。采取 tracker 进行图像分析，用 excel 进行拟合，可得迎风面形状的近似为一个对数函数（图 2）。

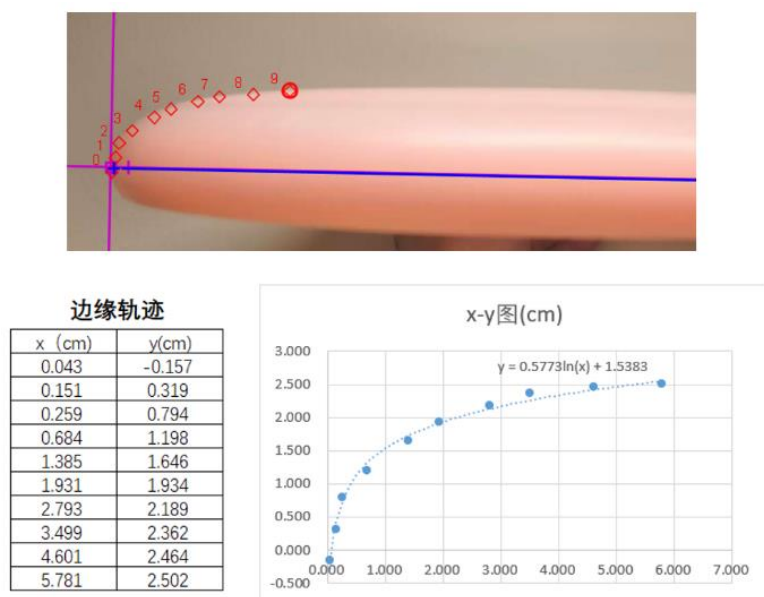


图 2. 飞盘边缘的轨迹

这意味着，在之后的迎风面计算中可以使用对数函数进行计算，既可以较好的模拟真实飞盘的形状，也可以有效减少计算量，简化模型。

同时，飞盘各处的平均厚度在 0.5cm 左右，可以当作薄片处理。

1.3 飞盘的建模

飞盘模型可以简化为，由一条直线和两侧对数函数的组合图像，绕该平面内垂直于直线的轴旋转一周的旋转体（图 3）。

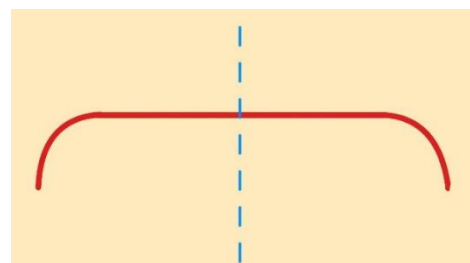


图 3. 旋转体的截面和旋转轴

二、实验数据

2.1 实验处理

平稳 1：水平飞行，角速度较大

平稳 2：水平飞行，速度和平稳 1 相同，角速度较小

偏斜：飞盘向左倾斜，并加大坠落趋势

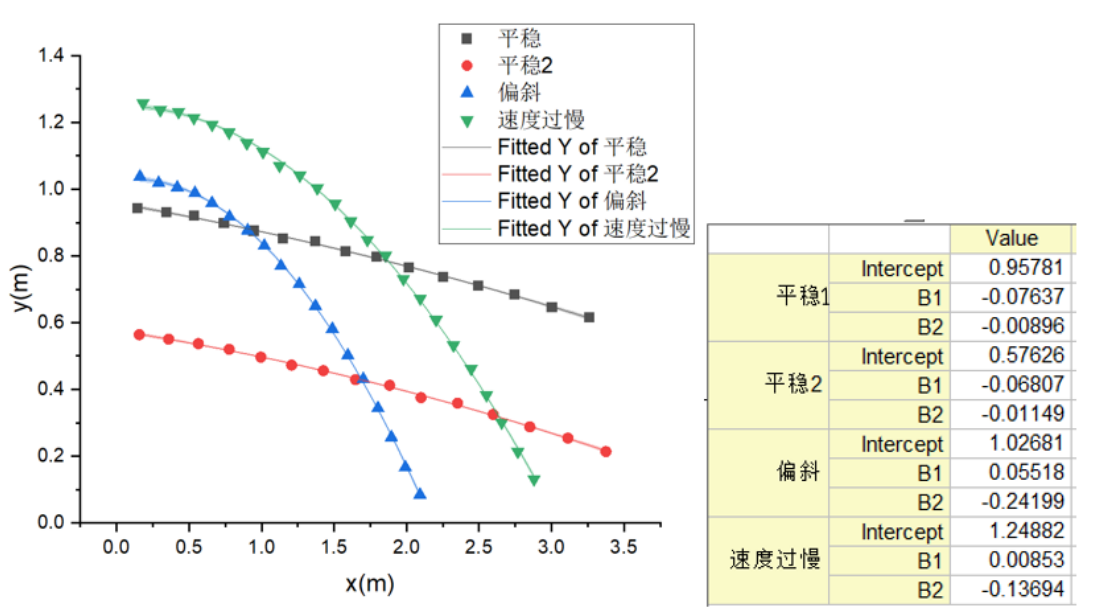
速度过慢：水平飞行，但速度较小

2.2 数据的获取

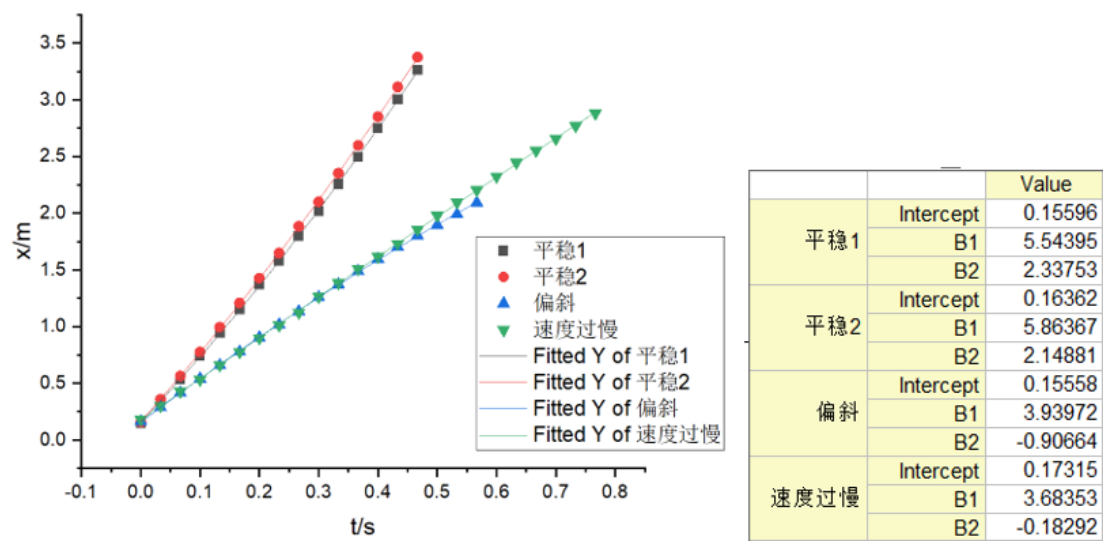
录制飞盘不同飞行姿态的视频，使用 tracker 进行飞行轨迹追踪（如下图），以探究飞盘飞行姿态对飞行效果的影响。



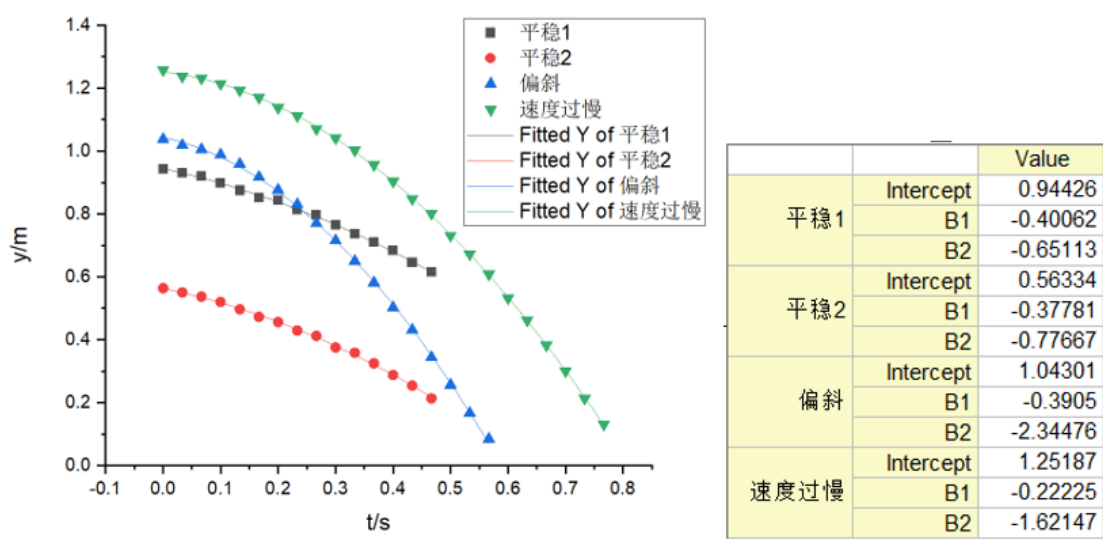
2.3 实验结果（使用 origin 处理）



上图是飞盘的 y-x 图像，尝试进行二次函数拟合，发现效果很好；显然地，在飞盘运动中想要飞盘飞的更远更久，二次函数的二次项系数绝对值要尽量的小。对比平稳 1 和平稳 2，可知相同速度下，角速度较大时，飞盘可以飞的更远，可以证明马格努斯效应的存在。偏斜和速度过慢与平稳相比，明显飞行距离较短，说明出手速度和稳定性是飞行距离的关键。



上图清晰的表明了平稳与偏斜和速度过慢的区别--在平稳状态下，飞盘有向前的倾角，升力有向前的分力，因此速度会越来越快。偏斜时没有这一效果，反而会增加侧向的力，使飞盘偏离航线；速度过慢时，飞盘有向后仰的趋势，因此速度不增反降，这也说明了飞盘的攻角与空气阻力和升力分量的方向有很大的关系。



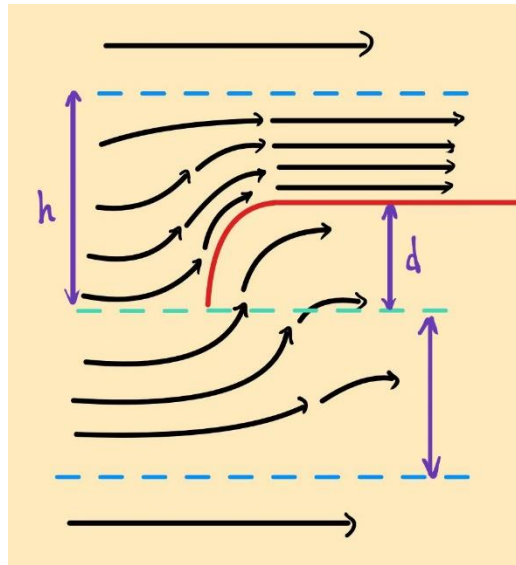
计算得到四组图像纵向加速度分别为：

$$a_1 = 1.30m/s^2, a_2 = 1.55m/s^2, a_3 = 4.69m/s^2, a_4 = 3.24m/s^2$$

上图直观的表现了飞行高度与时间的关系。对比平稳 1 和 平稳 2，正好验证了刚刚的假设，即在角速度较大时，飞盘可能具有较大的升力。同时，可以发现在偏斜时的纵向加速度比速度过慢时大，这说明飞盘的失衡会导致纵向加速度的骤升，比直接水平下落（速度过慢要差得多。将平稳与速度过慢相比，容易得出在速度较快时飞盘下落的加速度较

小，可能是伯努利效应或马格努斯效应提供了升力。

三、飞盘的升力



3.1 伯努利效应

飞盘的上表面空气流速较快，气压较低；飞盘的下表面流速较慢气压较高，形成压力差，产生升力。由于只有飞盘附近的空气会受到飞盘的影响（远处的空气的存在对飞盘飞行影响小），考虑如图的建模：用箭头代表空气流向，假设受影响较大的空气主要分布在其上下 h 处（蓝色虚线范围内，蓝色虚线范围外将不受飞盘影响），绿色虚线（辅助线）上方的空气均到达飞盘的上方，绿色虚线下方的空气均到达飞盘的下方，则在迎风面会形成压力差。

当飞盘速度为 v 时：

上方压强：

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \\ v h = v_1 (h - d) \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_0 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{h - d}{h} \right)^2$$

同理，下方压强：

$$\begin{cases} p_2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \\ v h = v_1 (h + d) \end{cases} \Rightarrow p_2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{h + d}{h} \right)^2$$

压强差为：

$$p_1 - p_2 = \frac{2 \rho d}{h}$$

定量说明了气压差的存在，因此可以提供升力。可以解释速度较快时，飞盘下落的加速度较小。

四、失稳现象

4.1 稳定性的来源

飞盘在旋转时，会因自身的角动量而具有稳定性。如果扔出时旋转速率足够快，即便受到外界干扰，如侧风的影响，它也能够保持稳定的飞行角度，而不至于翻滚或偏离飞行轨迹。这种物理特性让飞盘能够在风中，依然能够保持理想状态，飞行得更远。（经实验，飞盘无角速度的抛出会立即翻倒并落地）

4.2 马格努斯效应

由于课内没有涉及，在此仅做定性分析。可以产生横向力：

$$F = s(\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad \text{or} \quad F = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_L$$

其中 S 是由整个物体表面决定的空气阻力平均系数，升力系数 C_L 可以从使用雷诺数和旋转比率的实验数据图表确定， A 是飞盘的横截面积。产生了有意思的结果：尽管前面提到需要更大的速度提高射程以及更大的角速度以提高稳定性，但实际上侧向力会引起飞盘偏航，其与速度和角速度正相关。这意味着过快的速度和角速度对提高射程优势没有帮助的，表明控制速度，角速度在最佳范围有助于飞得更远。（但在实际飞盘运动中，由于飞盘侧向面积较小，物体表面决定的空气阻力系数较小，飞盘受其影响较小）

4.3 失稳的原因

①角速度

角速度小时其角动量较小，抵抗外界干扰的能力弱，在气流的扰动或出手角度稍有偏差时无法保持水平。

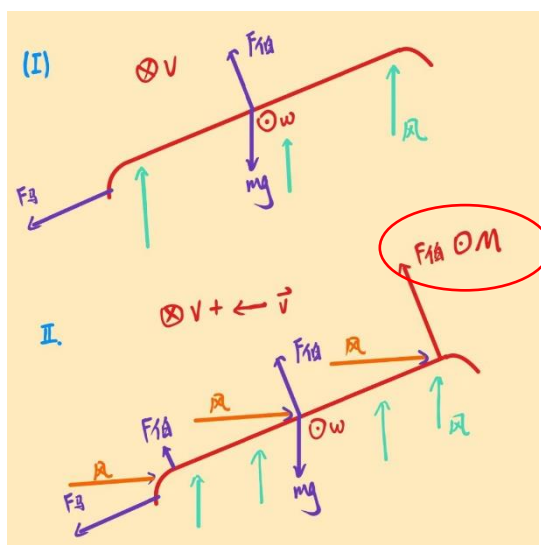
②环境因素

风力和风向对飞盘的飞行稳定性影响较大。强风或不稳定的风向可能导致飞盘偏离预定轨迹，影响其稳定性。

③正反馈

飞盘倾斜时横截面上的受力方向（I）所示。（青色的风为可能的风力）

可以看出伯努利效应和马格努斯效应的合力效果方向，有水平向左的分力，因而飞盘产生向左的加速度。当飞盘具有水平向左的速度时（II），理论上风力和马格努斯利



的力矩可以纠偏，但在实际实验中并没有显示，很可能是由飞盘侧面积太小导致的。那么经过排除可以发现，其实飞盘不断偏离原有轨道源自于一个非常简单的效应——伯努利效应。由于飞盘具有了向左的加速度，其运动是存在曲率半径的，而外侧的运动速度要大于内侧，在外侧产生了比内侧更大的气压差，因此外侧有更多的向上的气体压力，从而产生垂直纸面向外的力矩，使飞盘进一步的倾倒。

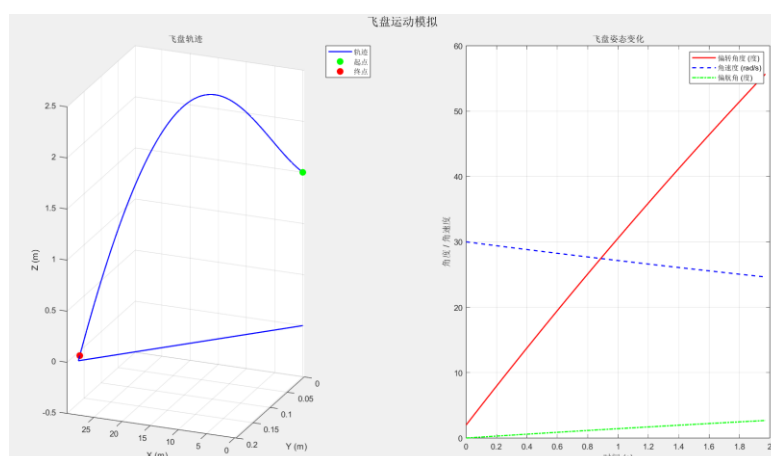
五、脚本模拟

编写 MATLAB 程序模拟理想状态下三维空间中的飞行轨迹，核心代码如下（球坐标系转平面直角坐标系）：

```
% 初始赋值
x(1) = x0; y(1) = y0; z(1) = z0;
vx(1) = v0 * cosd(theta0) * cosd(phi0);
vy(1) = v0 * cosd(theta0) * sind(phi0);
vz(1) = v0 * sind(theta0);
theta(1) = theta0; phi(1) = phi0; omega(1) = omega0;

%% 模拟主循环
for i = 1:n-1
    % 速度和角度
    v = sqrt(vx(i)^2 + vy(i)^2 + vz(i)^2);
    alpha = atan2(vz(i), sqrt(vx(i)^2 + vy(i)^2)); % 仰角 (rad)
    % 空气动力学
    Lift = 0.5 * rho * v^2 * A * Cl; % 升力
    Drag = 0.5 * rho * v^2 * A * Cd; % 阻力
    SideForce = Lift * sind(phi(i)); % 侧滑力由偏航角引起
    % 力的分解
    Fx = -Drag * (vx(i) / v);
    Fy = SideForce - Drag * (vy(i) / v);
    Fz = Lift * cos(alpha) - m * g - Drag * (vz(i) / v);
```

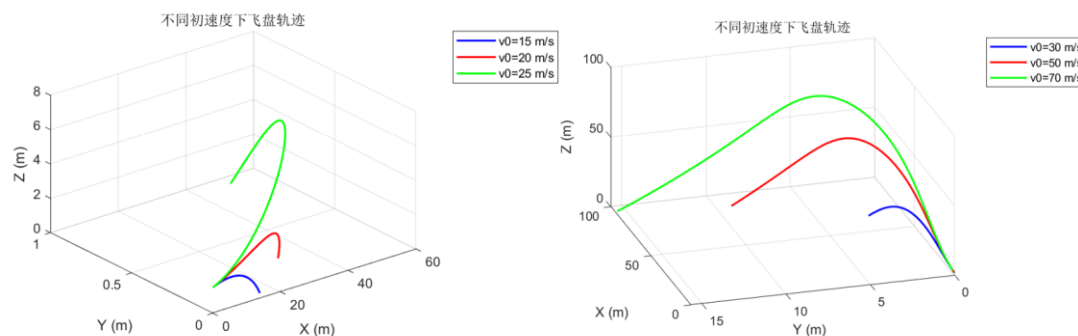
界面设置如图：



该模型中仅考虑飞盘不发生倾斜的情况，显示出由马格努斯效应造成的飞盘偏航角增大但侧向位移很小（y 轴位移），和实际情况相符。飞盘前半段升力较大，呈现复杂运动

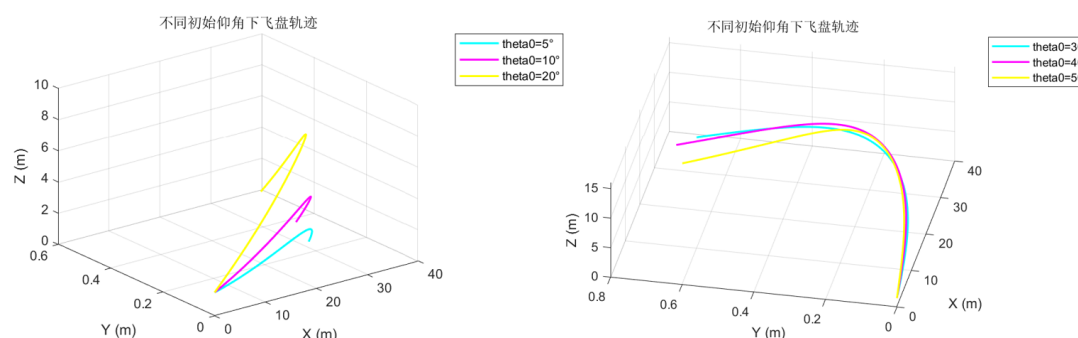
趋势，后半段更趋近于二次曲线，说明实验中用二次曲线拟合的重要性。空气阻力引起的角速度减小和偏转角度增大图中也有体现，下面我们开始进行大量模拟。

6 种速度下的飞行轨迹



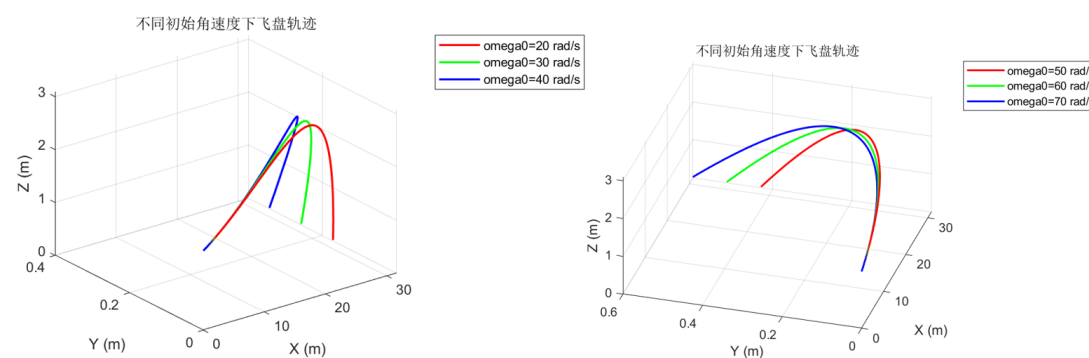
上图揭示了很简单的道理——“大力出奇迹”，速度越大，距离越远，但由于空气阻力的存在，边界效应明显。

六种仰角下的飞行轨迹



仰角是一个很重要的初始因素，当仰角过大时，升力向后的分力会过早的让向前的速度降下来，导致飞行距离的减少，本模型中约 25° 飞行距离最远。

6 种角速度下的飞行轨迹



由于该模型中仅考虑飞盘不发生倾斜的情况，角速度仅影响了马格努斯效应，故射程没有提升，但角动量对飞行稳定性的保持仍有着不可忽视的的重要作用

六、启示

影响飞盘飞行距离的因素

①出手角度

出手角度稍有偏差时无法保持水平，翻滚或偏离飞行轨迹

②速度

动能越大，飞盘能够抵抗空气阻力并飞得更远。并且相同时间内可以走过更大的位移，也会提供更大的升力

③角速度

更快的旋转使飞盘更稳定，能够减少空气扰动导致的偏离，从而增加距离。

④环境因素

顺风可以增加飞盘飞行距离，逆风会大幅减少距离。侧风可能导致飞盘偏离轨迹。

⑤仰俯角

仰俯角决定了升力分量的方向，可以决定飞盘是否加速向前。

结语

通过对飞盘运动的全面分析，我们不仅揭示了飞盘飞行的物理原理，还探索了影响其飞行性能的关键因素。本文的研究结果对于飞盘爱好者、运动员以及相关领域的研究者都具有重要的实际意义。

首先，我们通过实验和模拟发现，飞盘的升力主要来源于伯努利效应，即飞盘上下表面的空气流速差异造成的气压差。这一发现对于理解飞盘在空中的稳定性和飞行轨迹至关重要。同时，马格努斯效应在飞盘的侧向力产生上也起到了一定的作用，这对于飞盘的飞行控制和轨迹调整提供了理论支持。

其次，飞盘的稳定性与其旋转速率密切相关。高速旋转的飞盘具有较大的角动量，能够在一定程度上抵抗外界干扰，保持飞行角度。这一发现对于飞盘运动员在实际操作中如何控制飞盘的稳定性提供了指导。

通过软件模拟，我们进一步验证了实验结果，并发现了飞盘飞行距离与出手角度、速度、角速度等因素之间的关系。模拟结果表明，适当的出手角度、足够的速度和角速度，

以及考虑环境因素，都是提高飞盘飞行距离的关键。这些发现对于飞盘运动员在实际比赛中如何调整技巧以获得更远的飞行距离提供了科学依据。

综上所述，飞盘运动不仅是一项有趣的休闲活动，更蕴含着丰富的物理知识。通过对飞盘运动的分析，我们不仅能够更好地理解其背后的科学原理，还能够提升飞盘运动的技巧和体验。希望本次研究能够为飞盘爱好者和相关领域的研究者提供有价值的参考和启发。随着科技的进步和研究的深入，我们期待未来能够有更多的发现，进一步优化飞盘的设计和飞行性能，推动飞盘运动的发展。

附：matlab 源码：

```
clc; clear; close all;

%% 参数设置
m = 0.175; % 飞盘质量 (kg)
r = 0.14; % 飞盘半径 (m)
Cd = 0.1; % 阻力系数
Cl = 0.15; % 升力系数
rho = 1.225; % 空气密度 (kg/m^3)
g = 9.80; % 重力加速度 (m/s^2)
I = 0.00235; % 飞盘的转动惯量 (kg*m^2)
A = pi * r^2; % 飞盘截面积 (m^2)

% 初始条件设置
v0_list = [30, 50, 70]; % 初速度列表 (m/s)
theta0_list = [30, 40, 50]; % 初始仰角列表 (度)
omega0_list = [50, 60, 70]; % 初始角速度列表 (rad/s)
x0 = 0; y0 = 0; z0 = 1.5; % 初始位置 (m)

% 模拟参数
t_max = 10; % 最大模拟时间 (s)
dt = 0.01; % 时间步长 (s)

%% 模拟主循环
figure;

% 不同初速度
subplot(2, 2, 1);
hold on; grid on; view(3);
xlabel('X (m)'); ylabel('Y (m)'); zlabel('Z (m)');
title('不同初速度下飞盘轨迹');
colors_v0 = ['b', 'r', 'g']; % 初速度曲线颜色
legend_entries_v0 = cell(1, length(v0_list));
for vi = 1:length(v0_list)
    v0 = v0_list(vi);
```

```
[x, y, z, ~, ~, ~] = simulate_frisbee(v0, 5, 30, t_max, dt, m, Cd, Cl,
rho, g, A);
plot3(x, y, z, [colors_v0(vi) '-'], 'LineWidth', 1.5);
legend_entries_v0{vi} = sprintf('v0=%d m/s', v0);
end
legend(legend_entries_v0);

% 不同初始仰角
subplot(2, 2, 2);
hold on; grid on; view(3);
xlabel('X (m)'); ylabel('Y (m)'); zlabel('Z (m)');
title('不同初始仰角下飞盘轨迹');
colors_theta0 = ['c', 'm', 'y']; % 仰角曲线颜色
legend_entries_theta0 = cell(1, length(theta0_list));
for ti = 1:length(theta0_list)
    theta0 = theta0_list(ti);
    [x, y, z, ~, ~, ~] = simulate_frisbee(20, theta0, 30, t_max, dt, m, Cd,
Cl, rho, g, A);
    plot3(x, y, z, [colors_theta0(ti) '-'], 'LineWidth', 1.5);
    legend_entries_theta0{ti} = sprintf('theta0=%d°', theta0);
end
legend(legend_entries_theta0);

% 不同初始角速度
subplot(2, 2, 3);
hold on; grid on; view(3);
xlabel('X (m)'); ylabel('Y (m)'); zlabel('Z (m)');
title('不同初始角速度下飞盘轨迹');
colors_omega0 = ['r', 'g', 'b']; % 初始角速度曲线颜色
legend_entries_omega0 = cell(1, length(omega0_list));
for oi = 1:length(omega0_list)
    omega0 = omega0_list(oi);
    [x, y, z, ~, ~, ~] = simulate_frisbee(20, 5, omega0, t_max, dt, m, Cd,
Cl, rho, g, A);
    plot3(x, y, z, [colors_omega0(oi) '-'], 'LineWidth', 1.5);
    legend_entries_omega0{oi} = sprintf('omega0=%d rad/s', omega0);
end
legend(legend_entries_omega0);

% 姿态图绘制
subplot(2, 2, 4);
hold on; grid on;
xlabel('时间 (s)'); ylabel('角度 (度) / 角速度 (rad/s)');
title('飞盘姿态变化');
```

```
for ti = 1:length(theta0_list)
    theta0 = theta0_list(ti);
    [~, ~, ~, t, theta, ~] = simulate_frisbee(20, theta0, 30, t_max, dt, m,
Cd, Cl, rho, g, A);
    plot(t, theta, [colors_theta0(ti) '-'], 'LineWidth', 1.5);
end
legend(theta0_list, 'Location', 'Best');
```

%% 飞盘模拟函数

definition

```
function [x, y, z, t, theta, omega] = simulate_frisbee(v0, theta0, omega0,
t_max, dt, m, Cd, Cl, rho, g, A)
```

% 初始化变量

t = 0:dt:t_max;

n = length(t);

x = zeros(1, n); y = zeros(1, n); z = zeros(1, n);

vx = zeros(1, n); vy = zeros(1, n); vz = zeros(1, n);

theta = zeros(1, n); phi = zeros(1, n); omega = zeros(1, n);

% 初始赋值

x(1) = 0; y(1) = 0; z(1) = 1.5;

vx(1) = v0 * cosd(theta0);

vy(1) = 0;

vz(1) = v0 * sind(theta0);

theta(1) = theta0; phi(1) = 0; omega(1) = omega0;

% 时间步进模拟

```
for i = 1:n-1
```

v = sqrt(vx(i)^2 + vy(i)^2 + vz(i)^2);

alpha = atan2(vz(i), sqrt(vx(i)^2 + vy(i)^2));

% 空气动力学

Lift = 0.5 * rho * v^2 * A * Cl;

Drag = 0.5 * rho * v^2 * A * Cd;

SideForce = Lift * sind(phi(i));

% 力的分解

Fx = -Drag * (vx(i) / v);

Fy = SideForce - Drag * (vy(i) / v);

Fz = Lift * cos(alpha) - m * g - Drag * (vz(i) / v);

% 加速度

ax = Fx / m;

ay = Fy / m;

```
az = Fz / m;

% 更新速度
vx(i+1) = vx(i) + ax * dt;
vy(i+1) = vy(i) + ay * dt;
vz(i+1) = vz(i) + az * dt;

% 更新位置
x(i+1) = x(i) + vx(i) * dt;
y(i+1) = y(i) + vy(i) * dt;
z(i+1) = z(i) + vz(i) * dt;

% 更新角速度和偏转角度
domega = -0.1 * omega(i);
omega(i+1) = omega(i) + domega * dt;
dtheta = omega(i) * dt;
theta(i+1) = theta(i) + dtheta;
dphi = 0.05 * omega(i) * dt;
phi(i+1) = phi(i) + dphi;

% 停止条件
if z(i+1) < 0
    x = x(1:i); y = y(1:i); z = z(1:i);
    theta = theta(1:i); omega = omega(1:i);
    break;
end
end
end
```