

华中师范大学

实验报告书

2022 年 11 月 16 日

课程名称:	时间序列分析
专 业:	统计学
年 级:	2020 级
学生姓名:	陈启源
学 号:	2020211946
指导教师:	张晓飞

华中师范大学数学与统计学学院

1 问题 1

1.1 问题重述

根据 4.4.5 式写出计算 ARMA(1,1) 模型自相关函数的程序，并完成 4.10 题。

1.2 问题分析

1. 对于 ARMA(1,1) 模型：

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + e_t - \theta$$

其中需要给定的参数有 ϕ 和 θ ，对应函数输出的 phi 和 theta。

2. 由于 ARMA 写成一般线性形式后，是有无穷项的。所以求自相关函数也有无穷项。因此，此处需要给定最大滞后 max.lag，默认值设置为 30，也就是说函数会计算从 1 到 max.lag 阶滞后的自相关函数值。
3. 模型的输出为对应滞后的自相关函数值。

1.3 问题求解

综上，可以按照要求写出要求函数。代码如下：

```
1 AutoCor_ARMA11 = function(phi, theta, max.lag = 30) {  
2   rho = rep(NA, max.lag)  
3   for (k in 1:max.lag) {  
4     rho[k] = (phi^(k-1))*(1-theta*phi)*(phi-theta)/(1-2*phi*theta+theta^2)  
5   }  
6   rho  
7 }
```

1.4 使用函数 AutoCor_ARMA11 解决习题 4.10

1.4.1 (a)

ARMA(1,1), $\phi = 0.7, \theta = 0.4$

代码:

```
1 source("./ARMA11.R")
2 (rho1 = AutoCor_ARMA11(phi = 0.7, theta = 0.4))
3 plot(c(1:30), rho1, ylab = "自相关函数值", xlab = "滞后数",
4      col = "red", cex = 1, pch = 16)
```

结果:

```
1 [1] 3.600000e-01 2.520000e-01 1.764000e-01 1.234800e-01
2 [5] 8.643600e-02 6.050520e-02 4.235364e-02 2.964755e-02
3 [9] 2.075328e-02 1.452730e-02 1.016911e-02 7.118376e-03
4 [13] 4.982863e-03 3.488004e-03 2.441603e-03 1.709122e-03
5 [17] 1.196386e-03 8.374699e-04 5.862289e-04 4.103602e-04
6 [21] 2.872522e-04 2.010765e-04 1.407536e-04 9.852749e-05
7 [25] 6.896924e-05 4.827847e-05 3.379493e-05 2.365645e-05
8 [29] 1.655952e-05 1.159166e-05
```

绘制的自相关函数图如下:

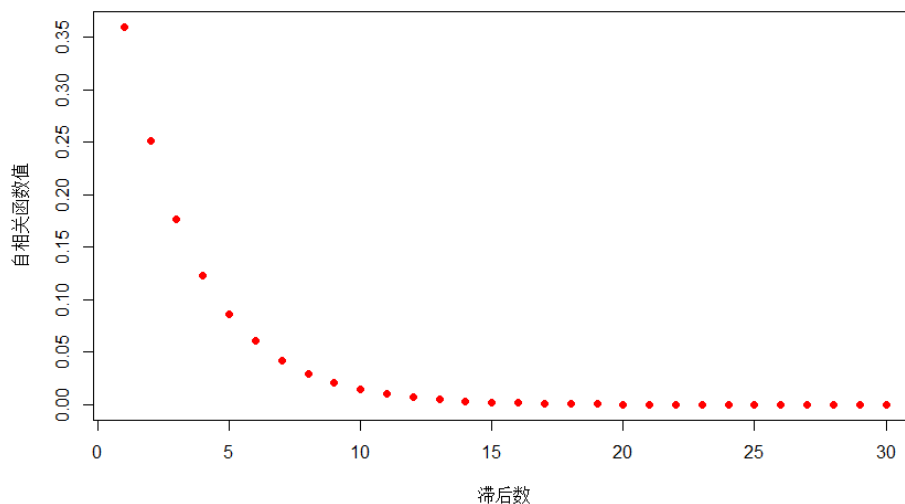


图 1: 4.10(a) 自相关函数图

1.4.2 (b)

ARMA(1,1), $\phi = 0.7, \theta = -0.4$

代码:

```
1 source("./ARMA1.R")
2 (rho2 = AutoCor_ARMA1(phi = 0.7, theta = -0.4))
3 plot(c(1:30), rho2, ylab = "自相关函数值", xlab = "滞后数",
4      col = "red", cex = 1, pch = 16)
```

结果:

```
1 [1] 8.186047e-01 5.730233e-01 4.011163e-01 2.807814e-01
2 [5] 1.965470e-01 1.375829e-01 9.630802e-02 6.741561e-02
3 [9] 4.719093e-02 3.303365e-02 2.312356e-02 1.618649e-02
4 [13] 1.133054e-02 7.931379e-03 5.551966e-03 3.886376e-03
5 [17] 2.720463e-03 1.904324e-03 1.333027e-03 9.331189e-04
6 [21] 6.531832e-04 4.572282e-04 3.200598e-04 2.240418e-04
7 [25] 1.568293e-04 1.097805e-04 7.684635e-05 5.379245e-05
8 [29] 3.765471e-05 2.635830e-05
```

绘制的自相关函数图如下:

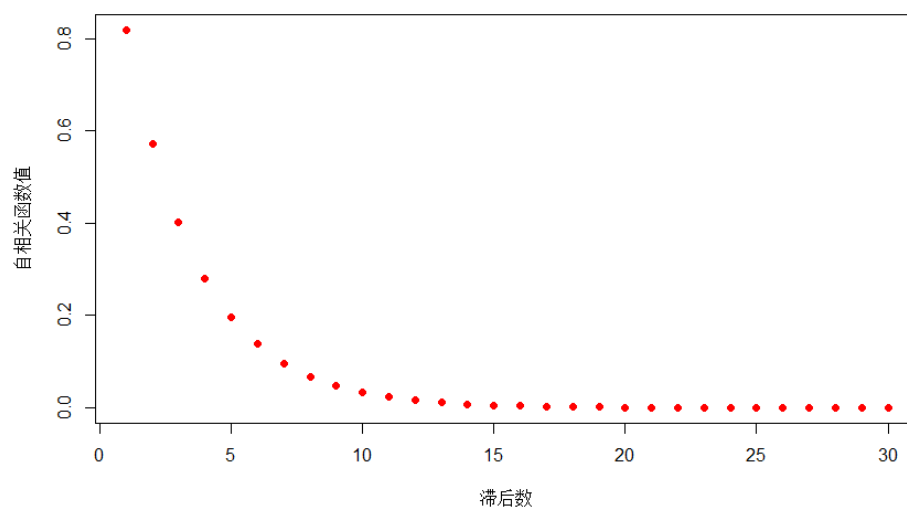


图 2: 4.10(a) 自相关函数图

2 问题 2

2.1 问题重述

根据 4.1.13 式写出计算 AR(2) 模型自相关函数的程序，并完成 4.9 题

2.2 问题分析

1. 对于 AR(2) 模型：

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$$

其中需要给定的参数有 ϕ_1 和 ϕ_2 ，对应函数输出的 phi1 和 phi2。

2. 由于 AR(2) 写成一般线性形式后，是有无穷项的。所以求自相关函数也有无穷项。因此，此处需要给定最大滞后 max.lag，默认值设置为 30，也就是说函数会计算从 1 到 max.lag 阶滞后的自相关函数值。
3. 模型的输出为对应滞后的自相关函数值。

2.3 问题求解

综上，可以按照要求写出要求函数。代码如下：

```
1 # 自相关函数计算函数
2 AutoCor_AR2 = function(phi1, phi2, max.lag = 30) {
3   rho = rep(NA, max.lag)
4   rho[1] = phi1 / (1 - phi2)
5   rho[2] = (phi2 * (1 - phi2) + phi1 ^ 2) / (1 - phi2)
6   for (k in 3:max.lag) {
7     rho[k] = phi1 * rho[k - 1] + phi2 * rho[k - 2]
8   }
9   rho
10 }
11
12 # 自相关函数绘图函数
13 plot_rho = function(rho) {
14   plot(
15     c(1:30),
16     rho,
17     ylab = "自相关函数值",
18     xlab = "滞后数",
```

```

19     col = "red",
20     cex = 1,
21     pch = 16
22   )
23 }
24
25 # 特征方程
26 Charac_func = function(phi1, phi2) {
27   delta = sqrt(complex(real = phi1 ^ 2 + 4 * phi2))
28   if (Im(delta) == 0) {
29     # 虚部为0, 换言之 delta 大于0
30     roots = c((phi1 - Re(delta)) / (-2 * phi2),
31              (phi1 + Re(delta)) / (-2 * phi2))
32     return(roots)
33   }
34   else{
35     roots = c((phi1 - delta) / (-2 * phi2),
36              (phi1 + delta) / (-2 * phi2))
37     R = sqrt(-phi2) # 阻尼因子
38     theta = acos(phi1/(2*R)) # 频率
39     return(list(roots, R, theta))
40   }
41 }

```

2.4 使用函数 AutoCor_AR2 解决习题 4.9

2.4.1 (a)

$$\text{AR}(2), \phi_1 = 0.6, \phi_2 = 0.3$$

代码:

```
1 # 4.9
2 source("./AR2.R")
3 # a
4 rho=AutoCor_AR2(0.6,0.3)
5 (root=Charac_func(0.6,0.3))
6 plot_rho(rho)
```

结果:

```
1 [1] 1.081666 -3.081666
```

此时特征根为实数，分别是 1.081666 和-3.081666。

绘制的自相关函数图如下:

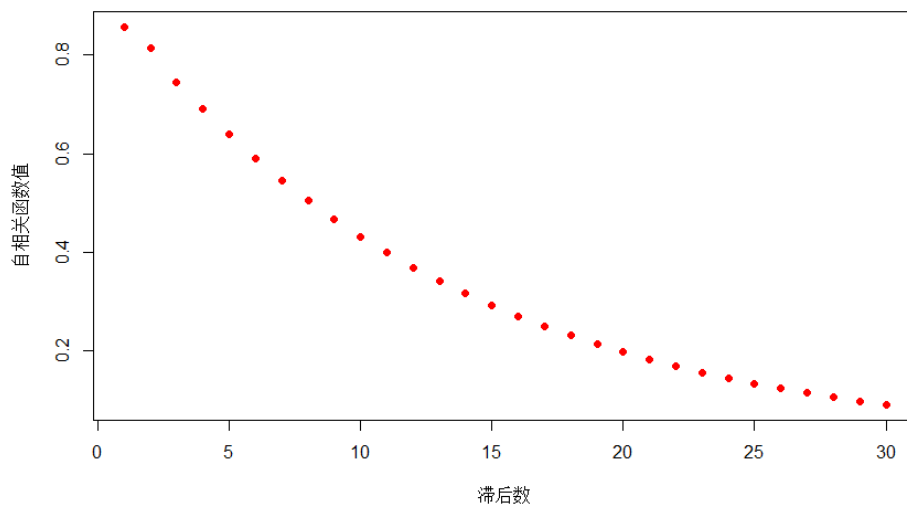


图 3: 4.9(a) 自相关函数图

2.4.2 (b)

$\text{AR}(2), \phi_1 = -0.4, \phi_2 = 0.5$

代码:

```
1 # b
2 rho=AutoCor_AR2(-0.4,0.5)
3 (root=Charac_func(-0.4,0.5))
4 plot_rho(rho)
```

结果:

```
1 [1] 1.869694 -1.069694
```

此时特征根为实数，分别是 1.869694 和-1.069694。

绘制的自相关函数图如下:

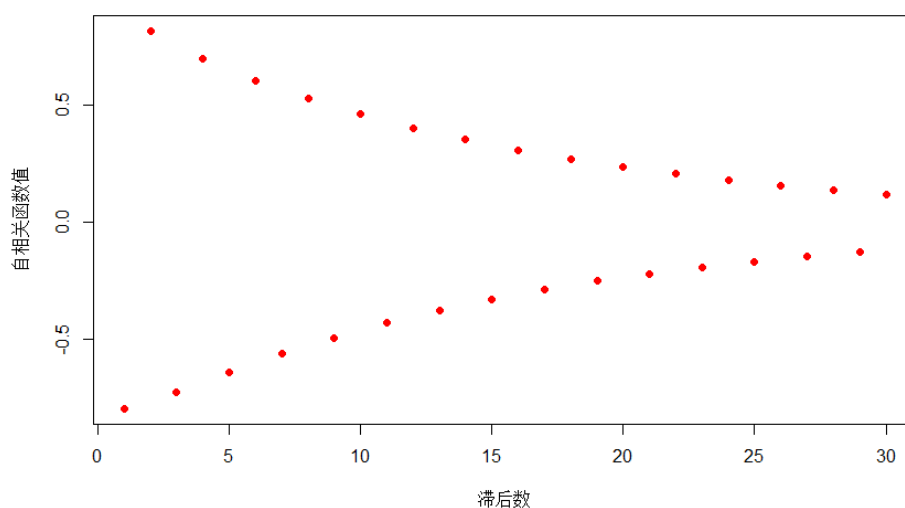


图 4: 4.9(b) 自相关函数图

2.4.3 (c)

$\text{AR}(2), \phi_1 = 1.2, \phi_2 = -0.7$

代码:

```
1 # c
2 rho=AutoCor_AR2(1.2,-0.7)
3 (root=Charac_func(1.2,-0.7))
4 plot_rho(rho)
```

结果:

```
1 [[1]]
2 [1] 0.8571429-0.8329931i 0.8571429+0.8329931i
3
4 [[2]]
5 [1] 0.83666
6
7 [[3]]
8 [1] 0.7711105
```

此时特征根为虚数，分别是 $0.8571429-0.8329931i$ 和 $0.8571429+0.8329931i$ 。阻尼因子是 0.83666，频率是 0.7711105。

绘制的自相关函数图如下:

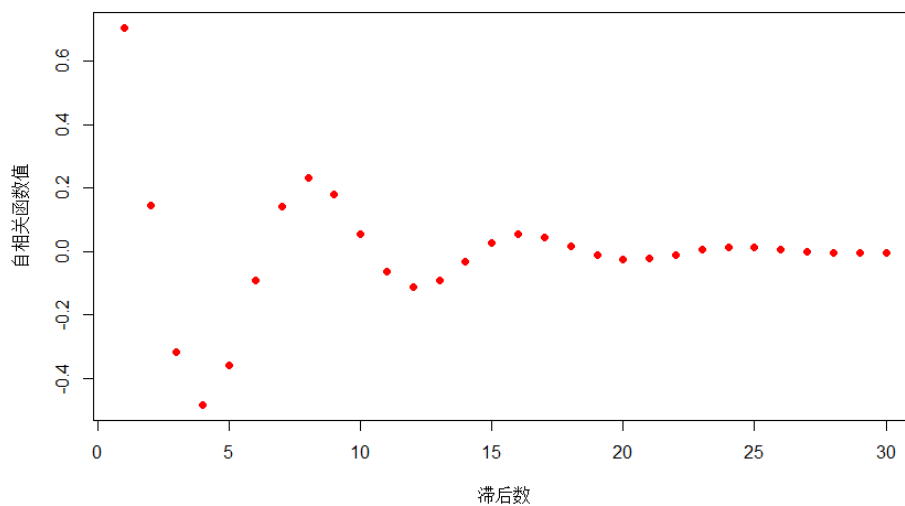


图 5: 4.9(c) 自相关函数图

2.4.4 (d)

$\text{AR}(2), \phi_1 = -1, \phi_2 = -0.6$

代码:

```
1 # d
2 rho=AutoCor_AR2(-1,-0.6)
3 (root=Charac_func(-1,-0.6))
4 plot_rho(rho)
```

结果:

```
1 [[1]]
2 [1] -0.8333333-0.9860133i -0.8333333+0.9860133i
3
4 [[2]]
5 [1] 0.7745967
6
7 [[3]]
8 [1] 2.27247
```

此时特征根为虚数，分别是 $-0.8333333-0.9860133i$ 和 $-0.8333333+0.9860133i$ 。阻尼因子是 0.7745967，频率是 2.27247。

绘制的自相关函数图如下:

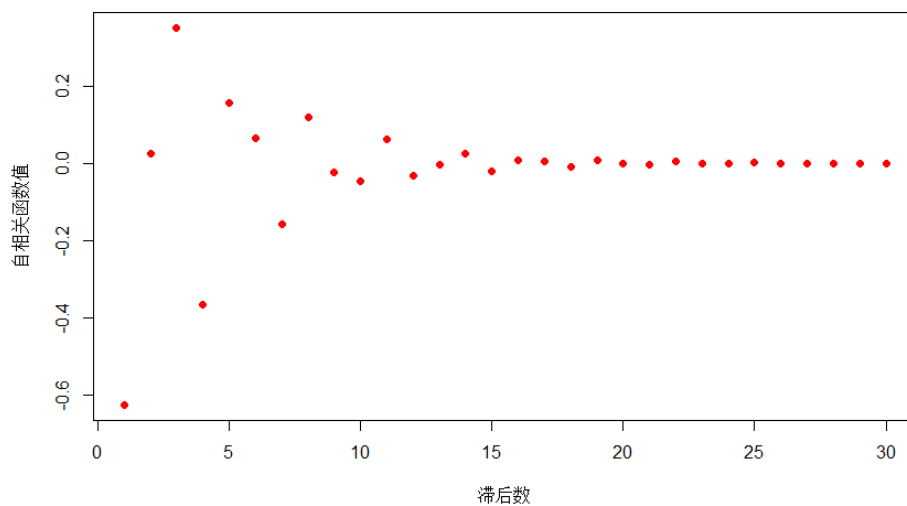


图 6: 4.9(d) 自相关函数图

2.4.5 (e)

$\text{AR}(2), \phi_1 = 0.5, \phi_2 = -0.9$

代码:

```
1 # e
2 rho=AutoCor_AR2(0.5,-0.9)
3 (root=Charac_func(0.5,-0.9))
4 plot_rho(rho)
```

结果:

```
1 [[1]]
2 [1] 0.277778-1.016834i 0.277778+1.016834i
3
4 [[2]]
5 [1] 0.9486833
6
7 [[3]]
8 [1] 1.304124
```

此时特征根为虚数，分别是 $0.277778-1.016834i$ 和 $0.277778+1.016834i$ 。阻尼因子是 0.9486833，频率是 1.304124。

绘制的自相关函数图如下:

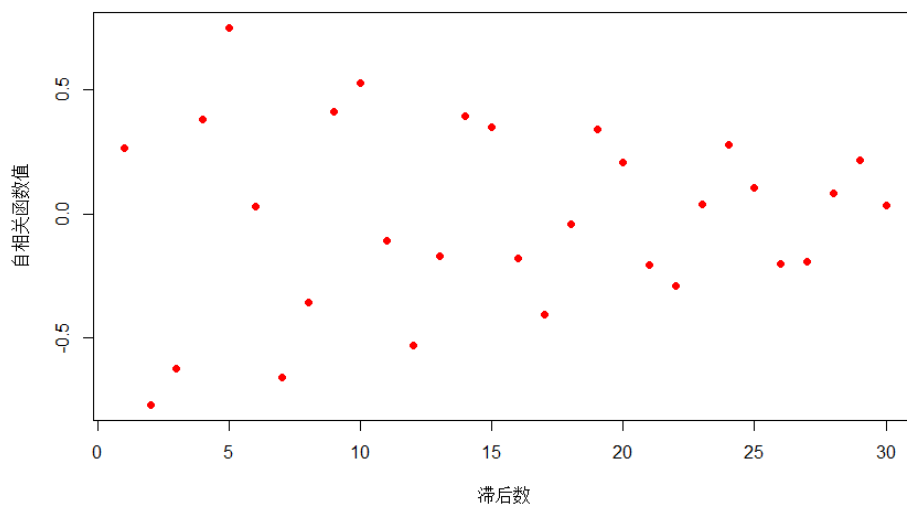


图 7: 4.9(e) 自相关函数图

2.4.6 (f)

$\text{AR}(2), \phi_1 = -0.5, \phi_2 = -0.6$

代码:

```
1 # f
2 rho=AutoCor_AR2(-0.5,-0.6)
3 (root=Charac_func(-0.5,-0.6))
4 plot_rho(rho)
```

结果:

```
1 [[1]]
2 [1] -0.416667-1.221907i -0.416667+1.221907i
3
4 [[2]]
5 [1] 0.7745967
6
7 [[3]]
8 [1] 1.899428
```

此时特征根为虚数，分别是-0.416667-1.221907i 和-0.416667+1.221907i。阻尼因子是 0.7745967，频率是 1.899428。

绘制的自相关函数图如下:

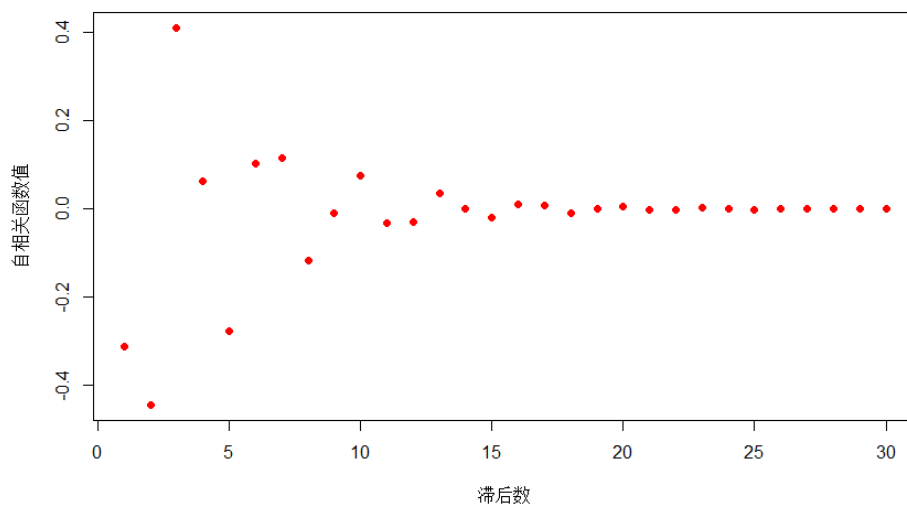


图 8: 4.9(f) 自相关函数图