华中师范大学

实验报告书

2022 年 9 月 22 日

课程名称:	时间序列分析
专　　业:	统计学
年　　级:	2020 级
学生姓名:	陈启源
学　　号:	2020211946
指导教师:	张晓飞

华中师范大学数学与统计学学院

1 问题 2.6

1.1 问题重述

设 $\{X_t\}$ 是平稳的时间序列，并且定义 $Y_t = \begin{cases} X_t & \text{当 } t \text{ 是奇数时} \\ X_t + 3 & \text{当 } t \text{ 是偶数时} \end{cases}$

(a) 证明对所有的滞后 k，$Cov(Y_t, Y_{t-k})$ 与 t 无关。

(b)$\{Y_t\}$ 平稳吗?

1.2 问题求解

1.2.1 (a)

当 t 与 $t-k$ 均为偶数时

由于 $\{X_t\}$ 是平稳的时间序列，所以 $Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(X_0, X_k)$ 与 t 无关。

$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t + 3, X_{t-k} + 3) = Cov(X_0 + 3, X_k + 3) = Cov(X_0, X_k)$ 与 t 无关。

当 t 与 $t-k$ 均为奇数时

$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(X_0, X_k)$ 与 t 无关。

当 t 为奇数与 $t-k$ 为偶数时

$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k} + 3) = Cov(X_0, X_k + 3) = Cov(X_0, X_k)$ 与 t 无关。

当 t 为偶数与 $t-k$ 为奇数时

同理。可以证明与 t 无关。

1.2.2 (b)

由于平稳需要满足，均值在所有时间上恒为常数。$\{X_t\}$ 是平稳的时间序列，所以 $\mathbb{E}\{X_t\}$ 恒为常数，不妨设为 c。当 t 是奇数时，$\mathbb{E}\{Y_t\} = c$；当 t 是偶数时，$\mathbb{E}\{Y_t\} = c + 3$。均值随着时间改变，不为常数，以不平稳。

2 问题 2.9

2.1 问题重述

假设 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，具有自协方差函数 γ_k，并且 β_0 和 β_1 是常数。

(a) 证明：$\{Y_t\}$ 非平稳，但是 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 平稳。

(b) 一般地，证明：如果 $Y_t = \mu_t + X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，μ_t 是 t 的 d 阶多项式，那么当 $m \geq d$ 时，$\nabla^m Y_t = \nabla(\nabla^{m-1} Y_t)$ 是平稳的，而当 $0 \leq m < d$ 时非平稳。

2.2 问题求解

2.2.1 (a)

$\mathbb{E}\{Y_t\} = \beta_0 + \beta_1 t + \mathbb{E}\{X_t\}$，结果和时间 t 有关，不是一个常数，所以不是平稳的。

$\mathbb{E}\{W_t\} = \beta_1 + \mathbb{E}\{X_t\} - \mathbb{E}\{X_{t-1}\}$，是一个常数。

且 $Cov(W_t, W_{t-k}) = Cov(\beta_1 + X_t - X_{t-1}, \beta_1 + X_{t-k} - X_{t-k-1}) = Cov(X_t, X_{t-k}) - Cov(X_t, X_{t-k-1}) - Cov(X_{t-1}, X_{t-k}) + Cov(X_{t-1}, X_{t-k-1}) = 2\gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}$。仅与时间间隔 k 有关。

综上，$\{Y_t\}$ 非平稳，但是 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 是平稳的。

2.2.2 (b)

当 $m \geq d$ 时，$\nabla^m Y_t = \nabla^m \beta_1 + \nabla^m X_t = \nabla^m X_t$，由于 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，所以 $\nabla^m Y_t = \nabla^m X_t$ 也是平稳的。

$0 \leq m < d$ 时，$\nabla^m Y_t = \nabla^m \beta_1 + \nabla^m X_t$，其中 $\nabla^m \beta_1$ 是一个关于 t 的多项式，不妨记作 β_t，由 (a) 可知，$\nabla^m Y_t$ 非平稳。

3 问题 2.13

3.1 问题重述

令 $Y_t = e_t - \theta(e_{t-1})^2$。这里假设白噪声序列是正态分布。

(a) 求 $\{Y_t\}$ 的自相关函数。

(b)$\{Y_t\}$ 平稳吗?

3.2 问题求解

3.2.1 (a)

不妨设 $1 \le t \le s$，那么有 $\gamma_{t,t} = Cov(e_t - \theta(e_{t-1})^2, e_t - \theta(e_{t-1})^2) = \mathbb{D}\{e_t - \theta(e_{t-1})^2\} = \mathbb{D}e_t + \theta^2\mathbb{D}(e_{t-1})^2$

由于 $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{D}X - (\mathbb{E}X)^2, \mathbb{D}X^2 = \mathbb{E}X^4 - 2(\mathbb{E}X)^2$

所以 $\mathbb{D}(e_{t-1})^2 = 2\sigma_e^4, \gamma_{t,t} = 2\theta^2\sigma_e^4 + \sigma_e^2$，同理可知 $\gamma_{s,s} = 2\theta^2\sigma_e^4 + \sigma_e^2$

$\gamma_{t,s} = Cov(e_t - \theta(e_{t-1})^2, e_s - \theta(e_{s-1})^2)$，当 $t = s-1$ 时，$\gamma_{s-1,s} = Cov(e_{s-1} - \theta(e_{s-2})^2, e_s - \theta(e_{s-1})^2) = Cov(e_{s-1}, -\theta(e_{s-1})^2) = \mathbb{E}\{e_{s-1} - \mathbb{E}e_{s-1}\}\mathbb{E}\{-\theta(e_{s-1}^2) - \mathbb{E}\{-\theta(e_{s-1})^2)\}\} = 0$

综上，当 $t = s$ 时，$\rho_{t,s} = 1$；其他情况下，$\rho_{t,s} = 0$。

3.2.2 (b)

由 (a) 可知，$\gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k}$。

$\mathbb{E}Y_t = \mathbb{E}\{e_t - \theta(e_{t-1})^2\} = \mathbb{E}e_t - \theta^2\mathbb{E}(e_{t-1})^2 = 0 - \theta^2(\mathbb{D}e_{t-1} - (\mathbb{E}e_{t-1})^2) = -\theta^2\sigma_e^2$，由此可知，均值函数在所有时间上恒为常数。

综上，由二阶矩平稳的定义可知，$\{Y_t\}$ 是平稳的。

4 问题 2.27

4.1 问题重述

对固定的正整数 r 和常数 ϕ，考虑定义为 $Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \cdots + \phi^r e_{t-r}$ 的时间序列。
(a) 证明对 ϕ 的任意取值，过程都是平稳的。
(b) 求其自相关函数。

4.2 问题求解

4.2.1 (a)

$\mathbb{E}Y_t = \mathbb{E}\{e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \cdots + \phi^r e_{t-r}\} = 0$，所以均值函数在所有时间上恒为常数。
$\gamma_{t,t-k} = Cov(e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \cdots + \phi^r e_{t-r}, e_{t-k} + \phi e_{t-k-1} + \phi^2 e_{t-k-2} + \cdots + \phi^r e_{t-k-r}) = Cov(\phi^1 + \cdots + \phi^k e_{t-k} + \phi^{k+1} e_{t-k-1} + \cdots + \phi^r e_{t-r}, e_{t-k} + \phi e_{t-k-1} + \phi^2 e_{t-k-2} + \cdots + \phi^r e_{t-k-r})$
当 $r < k$ 时，$(\phi^k + \phi^{k+2} + \cdots + \phi^{k+2r})\sigma_e^2$；
当 $r \geq k$ 时，$(\phi^k + \phi^{k+2} + \cdots + \phi^{k+2(r-k)})\sigma_e^2$
所以，$\gamma_{t,t-k} = \gamma_{k,0}$。综上，过程是平稳的。

4.2.2 (b)

$\mathbb{D}Y_t = \mathbb{D}\{e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \cdots + \phi^r e_{t-r}\} = (1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots + \phi^2 r)\phi_e^2$
$\mathbb{D}Y_{t-k} = \mathbb{D}\{e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \cdots + \phi^r e_{t-r}\} = (1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots + \phi^{2r})\phi_e^2$
所以 $\rho_{t,t-k} = \frac{Cov(t,t-k)}{\sqrt{\mathbb{D}Y_t \mathbb{D}Y_{t-k}}} = \frac{Cov(t,t-k)}{(1+\phi^2+\phi^4+\cdots+\phi^2 r)\phi_e^2}$
当 $r < k$ 时，$\rho_{t,t-k} = \frac{(\phi^k+\phi^{k+2}+\cdots+\phi^{k+2r})}{(1+\phi^2+\phi^4+\cdots+\phi^{2r})}$；
当 $r \geq k$ 时，$\rho_{t,t-k} = \frac{(\phi^k+\phi^{k+2}+\cdots+\phi^{k+2(r-k)})}{(1+\phi^2+\phi^4+\cdots+\phi^{2r})}$

5 实验题

5.1 问题重述

分别写程序模拟长度为 100 的随机游走序列和滑动平均序列，画出相应时序图，并类似图 1-2 那样分析连续时间点之间的相关性。

5.2 问题求解

5.2.1 随机游走

```
y<-array(0,dim = 100)
e<-rnorm(100)
for(i in 1:100){
  y[i+1] <- y[i]+e[i+1]
}
y<-ts(y[1:100])
plot(y)
```

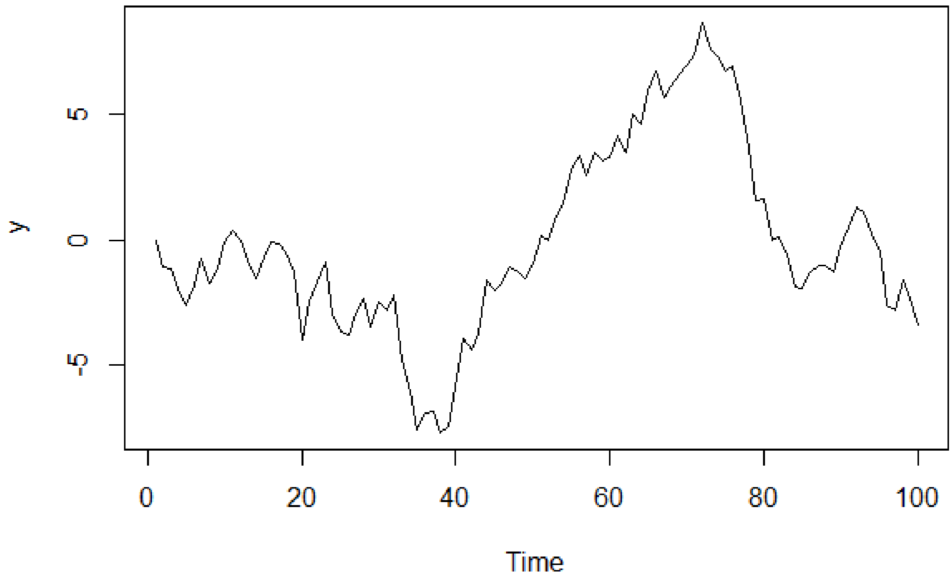

图 1: 随机游走

5.2.2 滑动平均

```
y<-array(0,dim = 100)
e<-rnorm(101)
for(i in 1:100){
  y[i+1] <- (e[i]+e[i+1])/2
}
y<-ts(y[1:100])
plot(y)
```

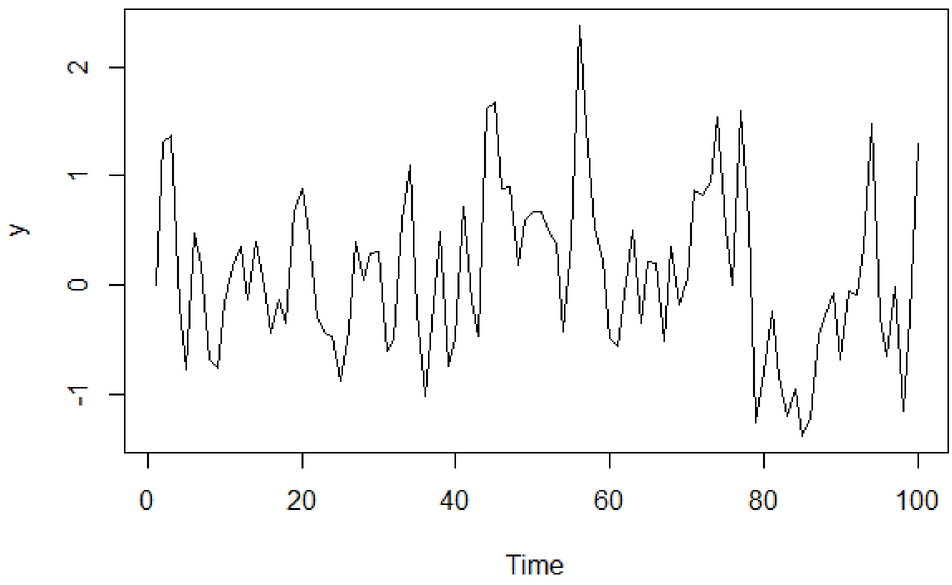

图 2: 滑动平均