时间序列分析作业与第二次实验报告

姓名：康江睿

学号：2018213779

指导老师： 张晓飞

2020 年 10 月 13 日

1 奇数尾号学号对应习题（2.4，2.7，2.12，2.22）

1.1 习题2.4

(a) 假设零均值白噪声序列$\{e_t\}$满足:

$$cov(e_t, e_s) = \begin{cases} \sigma_e^2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

若要得到$\{Y_t\}$的自相关函数，先要计算$\{Y_t\}$的自协方差函数$Cov(Y_t, Y_t)$。为此，首先考虑$t = s$的情形，也即$Var(Y_t)$：

$$Cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t) = Var(e_t) + \theta^2 Var(e_t) = (1 + \theta^2)\sigma_e^2$$

对于$t \neq s$的情形，当$t - s = 1$，应有：

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(e_t + \theta e_{t-1}, e_{t-1} + \theta e_{t-2}) = \theta Cov(e_{t-1}, e_{t-1}) = \theta\sigma_e^2$$

当$t - s = k, k \geq 2$时，由$\{e_t\}$的序列不相关性，很容易得到：

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(e_t + \theta e_{t-1}, e_{t-k} + \theta e_{t-k-1}) = 0$$

于是可以发现，$\{Y_t\}$的自协方差函数$\gamma_{t,s}$仅与$t - s$的值有关，结合过程$\{Y_t\}$的常数均值与有界方差，易知$\{Y_t\}$平稳。于是$\{Y_t\}$的k阶滞后自协方差函数γ_k由以下表达式给出：

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_e^2 & k=0 \\ \theta\sigma_e^2 & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

因此，易得$\{Y_t\}$的自相关函数ρ_k为：

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

当$\theta=3$时，$\{Y_t\}$的自相关函数ρ_k为：

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{3}{10} & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

当$\theta=\frac{1}{3}$时，$\{Y_t\}$的自相关函数ρ_k为：

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{3}{10} & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

(b) 不能。因为$\{Y_t\}$的自相关函数取值在两种情形下都相等，只有ρ_k的估计值并不足以确定θ的取值。

1.2 习题2.7

(a) 由$\{Y_t\}$平稳，知：

$$E(Y_t) = m, \quad where\ m\ is\ an\ arbitary\ constant, t \in T$$

于是

$$\begin{aligned} E(W_t) &= E(Y_t - Y_{t-1}) = E(Y-t) - E(Y_{t-1}) = m - m = 0 \\ Cov(W_t, W_t) &= Var(W_t) = Var(Y_t - Y_{t-1}) \\ &= Var(Y_t) + Var(Y_{t-1}) - 2Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\ &= 2(\gamma_0 - \gamma_1) < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov(W_t, W_{t-k}) &= Cov(Y_t - Y_{t-1}, Y_{t-k} - Y_{t-k-1}) \\ &= 2\gamma_k - \gamma_{k-1} - \gamma_{k+1}, \quad k \geq 1\end{aligned}$$

因此，$W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$平稳。

(b) 记$\{W_t\}$的自协方差函数为$\hat{\gamma_k}$，则$U_t = \nabla W_t$。又因为$\{W_t\}$平稳，故由(a)的结论可以立刻得出：$\{U_t\}$平稳。

1.3 习题2.12

首先，假设:

$$cov(e_t, e_s) = \begin{cases} \sigma_e^2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

于是有：

$$E(Y_t) = E(e_t) - E(e_{t-12}) = 0 - 0 = 0$$

$$Cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t) = Var(e_t) + Var(e_{t-12}) = 2\sigma_e^2$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-12}) = Cov(e_t - e_{t-12}, e_{t-12} - e_{t-24}) = -Cov(e_{t-1}, e_{t-1}) = -\sigma_e^2$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(e_t - e_{t-12}, e_{t-k} - e_{t-k-12}) = 0, \quad k \neq 12$$

可以发现，$\{Y_t\}$的自协方差函数$\gamma_{t,s}$仅与$t-s$的值有关，结合过程$\{Y_t\}$的常数均值与有界方差，知$\{Y_t\}$平稳。其中，$\{Y_t\}$的自协方差函数γ_k为：

$$\gamma_k = \begin{cases} 2\sigma_e^2 & k = 0 \\ -\sigma_e^2 & k = 12 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

于是，$\{Y_t\}$的自相关函数ρ_k为：

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\frac{1}{2} & k = 12 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$k > 0$时，ρ_k只在滞后$k = 12$时非零（$\rho_{12} = -\frac{1}{2}$）。

1.4 习题2.22

(a)

$$E(Y_t) = cE(Y_{t-1}) + E(e_t) = cE(Y_(t-1)) = \cdots = c^{t-1}E(Y_1) = c^{t-1}E(e_1) = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}Y_t &= cY_{t-1} + e_t = c^2Y_{t-2} + ce_{t-1} + e_t \\ &= \cdots \\ &= c^{t-1}e_1 + c^{t-2}e_2 + \cdots + ce_{t-1} + e_t\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}Var(Y_t) &= Var(c^{t-1}e_1 + c^{t-2}e_2 + \cdots + ce_{t-1} + e_t) \\ &= Var(c^{t-1}e_1) + Var(c^{t-2}e_2) + \cdots + Var(ce_{t-1}) + Var(e_t) \\ &= \sigma_e^2(1 + c^2 + c^4 + \cdots + c^{2t-2})\end{aligned}$$

而$\{Y_t\}$的自协方差函数$Cov(Y_t, Y_k)$为

$$\begin{aligned}Cov(Y_t, Y_k) &= Cov(c^{t-1}e_1, c^{k-1}e_1) + \cdots + Cov(c^{t-k}e_k, e_k) \\ &= \sigma_e^2(c^{t+k-2} + c^{t+k-4} + \cdots + c^{t-k})\end{aligned}$$

可以发现，$Cov(Y_t, Y_k)$不只跟时间差$t-k$有关。故$\{Y_t\}$不平稳。

(c)首先，证明Y_{t-1}与e_t独立：

$$Cov(e_t, Y_{t-1}) = Cov(e_t, c^{t-2}e_1 + c^{t-3}e_2 + \cdots + e_{t-1}) = 0$$

于是，有

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(cY_{t-1} + e_t, Y_{t-1}) = cVar(Y_{t-1})$$

以及

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{cVar(Y_{t-1})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-1})}} = c\sqrt{\frac{Var(Y_{t-1})}{Var(Y_t)}}$$

进一步地，对于任何$k > 0$，应有

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(c^kY_{t-k}, Y_{t-k}) = c^kVar(Y_{t-k})$$

以及

$$Corr(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{c^k Y_{t-k}}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-k})}} = c^k\sqrt{\frac{Var(Y_{t-k})}{Var(Y_t)}}$$

(d)化简$Var(Y_t)$，得

$$Var(Y_t) = \sigma_e^2(1 + c^2 + c^4 + \cdots + c^{2t-2}) = \frac{\sigma_e^2(1-c^{2t})}{1-c^2}$$

于是对于取值大的t，可以认为$1 - c^{2t} \approx 1$，进而

$$Var(Y_t) \approx \frac{\sigma_e^2}{1-c^2}$$

基于以上的近似关系，又可以得出

$$Corr(Y_t, Y_{t-k}) = c^k\sqrt{\frac{Var(Y_{t-k})}{Var(Y_t)}} \approx c^k, \quad k \geq 0$$

(e)若初始条件改变后有$Y_1 = \frac{e_1}{\sqrt{1-c^2}}$，则由(b)的推导过程可以直接得到

$$Y_t = \frac{c^{t-1}e_1}{\sqrt{1-c^2}} + c^{t-2}e_2 + \cdots + ce_{t-1} + e_t$$

于是可以得到$\{Y_t\}$的方差：

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= \sigma_e^2(1 + c^2 + c^4 + \cdots + c^{2t-4} + \frac{c^{2t-2}}{1-c^2}) \\ &= \sigma_e^2(\frac{c^{2t-2}}{1-c^2} + \frac{1-c^{2t-2}}{1-c^2}) = \sigma_e^2\frac{1}{1-c^2} \end{aligned}$$

于是，对于任何$k > 0$的情形，有

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = c^k Var(Y_{t-k}) = c^k\sigma_e^2\frac{1}{1-c^2}$$

可以看出，$\{Y_t\}$的自协方差函数只与时间差k有关。又因为

$$E(Y_t) = E(\frac{c^{t-1}e_1}{\sqrt{1-c^2}} + c^{t-2}e_2 + \cdots + ce_{t-1} + e_t) = 0$$

$$Var(Y_t) = \sigma_e^2\frac{1}{1-c^2} < \infty$$

所以$\{Y_t\}$平稳。

2 对随机游走序列与滑动平均序列的模拟仿真

2.1 模拟与可视化

首先，假定白噪声序列$\{e_t\}$服从标准正态分布；接下来进行模拟仿真。使用R语言的实现如下：

```
windows(40,20); #设置图窗参数
split.screen(c(1,2)); #将Graph Device分屏为1×2的大小
screen(1); #设置当前绘图屏幕
n <- 2;x <- numeric(100);x[1] <- rnorm(1,0,1); #初始化随机游走序列
while (n<=100){
  x[n] <- x[n-1]+rnorm(1,0,1);
  n <- n+1;
} #生成长度为100的随机游走序列
y1=ts(x);plot.ts(y1,xlab = "Time",ylab = "Value",main = "随机游走模拟"); #绘制时间序列图像
points(y1,pch = 21); #设置点型
screen(2); #设置当前绘图屏幕
x <- rnorm(101,0,1); #生成101个独立同分布于标准正态分布的随机数
y <- numeric(100); #初始化滑动平均序列
for (i in 1:100){
  y[i] <- (x[i]+x[i+1])/2;
} #通过随机数向量x生成长度为100的滑动平均序列
y2=ts(y);plot.ts(y2,xlab = "Time",ylab = "Value",main = "滑动平均模拟"); #绘制时间序列图像
points(y2,pch = 21); #设置点型
close.screen(all = TRUE); #退出split.screen模式
```

绘制的图像如下：

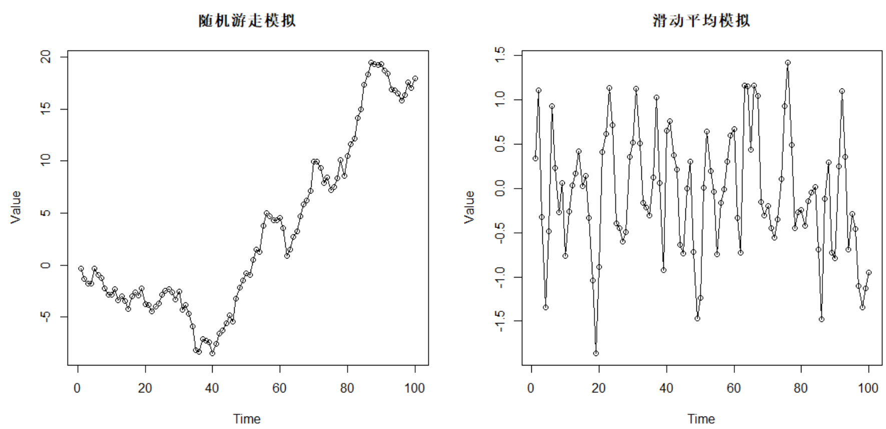

图 1: 对模拟随机游走序列与模拟滑动平均序列的可视化

2.2 连续时间点之间的相关性分析

使用R语言的实现如下：

```
library("TSA") #加载程辑包
windows(40,20); #设置图窗参数
split.screen(c(1,2)); #将Graph Device分屏为1×2的大小
screen(1); #设置当前绘图屏幕
plot(y1,x=zlag(y1,1),xlab = "Previous Value",ylab = "Value",main = "随机游走序列的一阶滞后自相关图");
#绘制随机游走序列的一阶滞后自相关图
screen(2); #设置当前绘图屏幕
plot(y2,x=zlag(y2,1),xlab = "Previous Value",ylab = "Value",main = "滑动平均序列的一阶滞后自相关图")
#绘制滑动平均序列的一阶滞后自相关图
```

绘制的图像如下：

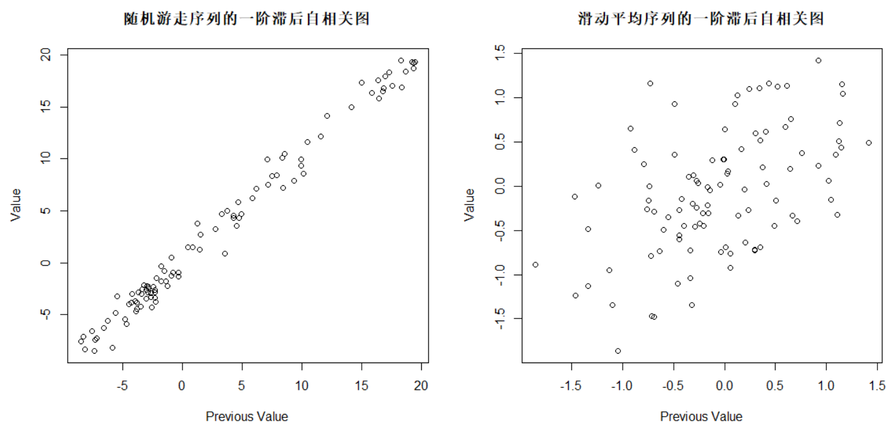

图 2: 对随机游走序列与滑动平均序列绘制一阶滞后自相关图

我们从图像中分析，可以发现：在随机游走序列中，相邻时间的序列取值有很强烈的正相关性，具体表现为在其一阶滞后自相关图中，所有点几乎分布在一条斜率为正的直线上；在滑动平均序列中，相邻时间的序列取值有明显但不强烈的相关性，具体表现为在其一阶滞后自相关图中，散点的分布稍微显现了一个向上的趋势。

2.3 小结

首先，由已知的结论，有：对于随机游走序列，其自相关函数为

$$\gamma_{t,s}=\sqrt{\frac{t}{s}}$$

从表达式中可以发现，相邻时点上序列取值是正相关的，且随着时间的推移，相邻时点上序列取值的正相关程度越来越强（相关系数趋于1）；这些特征在随机游走序列的时序图与一阶滞后自相关图中得到了充分的体现。

而对于滑动平均序列，其自相关函数为

$$\rho_k=\begin{cases}1 & k=0\\ 0.5 & k=1\\ 0 & k\geq 1\end{cases}$$

从表达式中可以发现，滑动平均序列（仅指代要求的形式）只存在一阶滞后自相关（正相关），且相关系数并不很高，故其一阶滞后自相关性明显但不强烈；这些特征在滑动平均序列的时序图与一阶滞后自相关图中得到了充分的体现。

3 偶数尾号学号对应习题（2.6，2.9，2.13，2.27）

本部分非单数尾号学号要求习题，但自己也还是做了，希望能巩固自己对知识点的把握。

3.1 习题2.6

(a) 由于$\{X_t\}$平稳，故可以假设：

$$E(X_t)=m_1,\quad Var(X_t)<\infty$$

$$Cov(X_t,X_{t-k})=\gamma_k$$

基于此假设，讨论$Cov(Y_t,Y_{t-k})$：由协方差性质知，

$$Cov(Y_t,Y_{t-k})=Cov(X_t+m,X_{t-k}+n)=Cov(X_t,X_{t-k})=\gamma_k$$

其中$m=0\ or\ 3$,$n=0\ or\ 3$。因此不管t和k如何取值，都有$Cov(Y_t,Y_{t-k})=\gamma_k$。

(b) 显然$\{Y_t\}$本身是不平稳的，因为

$$E(Y_t) = \begin{cases} m_1 + 3 & if\ 2|t \\ m_1 & othewise \end{cases}$$

3.2 习题2.9

(a) 由于$E(Y_t) = E(X_t) + \beta_0 + \beta_1 t = \beta_0 + \beta_1 t$不是定值，因此$\{Y_t\}$非平稳。

对于$W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$，知：

$$\nabla Y_t = X_t - X_{t-1} + \beta_1$$

已知$\{X_t\}$平稳，由习题2.7中的结论，$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$是平稳的，从而$W_t = \nabla X_t + \beta_1$也平稳。

(b) 由差分的性质，知$\nabla^m Y_t = \nabla^m X_t + \nabla^m \mu_t$。由习题2.7的结论，立刻得到$\nabla^m X_t$平稳；对于$\nabla^m \mu_t$，由$d(\mu_t) = d$，有：

$$d(\nabla^m \mu_t) = \begin{cases} d - m & 0 \le m < d \\ 0 & m \ge d \end{cases}$$

因此在$0 \le m < d$时，有$d(\nabla^m \mu_t) > 1$，此时$E(\nabla^m Y_t) = \nabla^m \mu_t + E(\nabla^m X_t) = \nabla^m \mu_t$非常数，故$\nabla^m Y_t$不平稳；在$m \ge d$时，$\nabla^m \mu_t$为常数，由$\nabla^m X_t$平稳知$\nabla^m Y_t$平稳。

3.3 习题2.13

(a) 假定白噪声序列$\{e_t\}$满足$e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$，于是

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-k}) = &Cov(e_t, e_{t-k}) - \theta Cov(e_t, e_{t-k-1}^2) \\ &- \theta Cov(e_{t-k}, e_{t-1}^2) + \theta^2 Cov(e_{t-1}^2, e_{t-k-1}^2) \end{aligned}$$

注意到，由于$e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$，故$(\frac{e_t}{\sigma_e})^2 \sim \chi(1)$。

于是，当$k = 0$时，有

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \sigma_e^2 + \theta^2 \sigma_e^4 Var((\frac{e_t}{\sigma_e})^2) = \sigma_e^2 + 2\theta^2 \sigma_e^4$$

当$k = 1$时，有

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = -\theta Cov(e_{t-1}, e_{t-1}^2) = -\theta E(e_{t-1}^3) = 0$$

其余情况下，恒有$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$。汇总以上结果，得到$\{Y_t\}$的自协方差函数：

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_e^2 + 2\theta^2\sigma_e^4 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

以及$\{Y_t\}$的自相关函数：

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

(b) 计算$\{Y_t\}$的均值与方差：

$$E(Y_t) = E(e_t) + \theta E(e_{t-1}^2) = 0$$
$$Var(Y_t) = \gamma_0 = \sigma_e^2 + 2\theta^2\sigma_e^4$$

又因为$\{Y_t\}$的自协方差函数只与时间差有关，所以$\{Y_t\}$平稳。进一步还可以发现，$\{Y_t\}$其实是方差为$\gamma_0 = \sigma_e^2 + 2\theta^2\sigma_e^4$的白噪声序列。

3.4 习题2.27

(a) 假设白噪声序列$\{e_t\}$满足：

$$cov(e_t, e_s) = \begin{cases} \sigma_e^2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

则

$$E(Y_t) = E(e_t) + \phi E(e_{t-1}) + \cdots + \phi^r E(e_{t-r}) = 0$$

对于$\{Y_t\}$的方差，当$\phi \neq 1$时，

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= Var(e_t) + \phi^2 Var(e_{t-1}) + \cdots + \phi^{2r} Var(e_{t-r}) \\ &= \sigma_e^2(1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2r}) = \sigma_e^2 \frac{1 - \phi^{2r+2}}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

当$\phi = 1$时，

$$Var(Y_t) = (r+1)\sigma_e^2$$

对于$\{Y_t\}$的自协方差函数，当$k \le r$且$\phi \ne 1$时，有

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t-k}) &= \phi^k Cov(e_{t-k}, e_{t-k}) + \phi^{k+2} Cov(e_{t-k-1}, e_{t-k-1}) + \cdots \\
&\quad + \phi^{2r-k} Cov(e_{t-r}, e_{t-r}) \\
&= \sigma_e^2(\phi^k + \phi^{k+2} + \cdots + \phi^{2r-k}) \\
&= \sigma_e^2 \phi^k (1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2r-2k}) \\
&= \sigma_e^2 \phi^k \frac{1 - \phi^{2r-2k+2}}{1 - \phi^2}
\end{aligned}$$

当$k \le r$且$\phi = 1$时，有

$$Var(Y_t) = (r-k+1)\sigma_e^2$$

而在$k > r$时，显然$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$。于是$\{Y_t\}$的自协方差函数γ_k在给定了ϕ和r的取值后仅与k有关。

综上：

$$E(Y_t) = 0$$

$$Var(Y_t) = \begin{cases} \sigma_e^2 \frac{1-\phi^{2r+2}}{1-\phi^2} & \phi \ne 1 \\ (r+1)\sigma_e^2 & \phi = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_e^2 \phi^k \frac{1-\phi^{2r-2k+2}}{1-\phi^2} & k \le r \& \phi \ne 1 \\ (r-k+1)\sigma_e^2 & k \le r \& \phi = 1 \\ 0 & k > r \end{cases}$$

而对于任意给定的ϕ的取值，$\{Y_t\}$平稳。

(b)$\{Y_t\}$的自相关函数ρ_k为

$$\rho_k = \begin{cases} \phi^k \frac{1-\phi^{2r-2k+2}}{1-\phi^{2r+2}} & k \le r \& \phi \ne 1 \\ \frac{r-k+1}{r+1} & k \le r \& \phi = 1 \\ 0 & k > r \end{cases}$$