目录

[小学数学 2](#_Toc87900410)

[教学大纲 2](#_Toc87900411)

[速算技巧 3](#_Toc87900412)

[基本知识点 4](#_Toc87900413)

[数论 10](#_Toc87900414)

[组合 13](#_Toc87900415)

[小学技巧及难题 14](#_Toc87900416)

[初中数学 18](#_Toc87900417)

[教学大纲 18](#_Toc87900418)

[代数 19](#_Toc87900419)

[因式分解 19](#_Toc87900420)

[一元多次方程 23](#_Toc87900421)

[一元高次不等式 26](#_Toc87900422)

[几何 29](#_Toc87900423)

[三角形 29](#_Toc87900424)

[平行四边形，多边形和圆 30](#_Toc87900425)

[立体几何 31](#_Toc87900426)

[初中技巧及难题 31](#_Toc87900427)

[高中数学 35](#_Toc87900428)

[教学大纲 35](#_Toc87900429)

[函数 35](#_Toc87900430)

[函数性质 36](#_Toc87900431)

[幂函数： 36](#_Toc87900432)

[指数函数： 37](#_Toc87900433)

[对数函数： 37](#_Toc87900434)

[三角函数 37](#_Toc87900435)

[不等式 40](#_Toc87900436)

[向量及解析几何 40](#_Toc87900437)

[平面向量及解析几何 40](#_Toc87900438)

[空间向量及立体几何 41](#_Toc87900439)

[空间向量与解析几何 （大学知识点） 42](#_Toc87900440)

[数列 44](#_Toc87900441)

[复数 45](#_Toc87900442)

[微积分应用 46](#_Toc87900443)

[解题策略： 47](#_Toc87900444)

[一般到特殊(特殊值代入)，特殊到一般(数学归纳法) 47](#_Toc87900445)

[主元变更（避免思维定势） 48](#_Toc87900446)

[参考书 49](#_Toc87900447)

# 小学数学

## 教学大纲

数及运算，式与方程，量、比和比例， 统计与概率，空间和图形

数的运算，简易方程，不等式，对称，简单作图，统计，集合，对应，函数等数学思想

**一~三年级：**

数的组成（个位，十位…），顺序(第几个)，大小（>…），读写法；加减法，加减混合

十百千万亿，时间（时分秒），人民币，长度(米分米厘米毫米)，质量(吨/千克/公斤/克)，面积（平方米，平方分数，平方厘米）；体积

几何：长方体、正方体、圆柱、球； 长方形、正方形、平行四边形、梯形、三角形和圆（面积和周长）；直线（平行线相交线）、线段、角

两位数加减，乘法表（乘除），四则混合运算

两位数乘除法，分数，分数加减法

**四年级：**

自然数，整数，计数法（十进制，六十进制，24时计时法…）, 速算，四则混合运算(运算定律)

小数，三角形性质

**五年级：**

整除：能被10以内的数整除的特征；奇数和偶数；质数和合数；分解质因数；约数和倍数；

小数四则混合运算

分数：真分数和假分数，带分数；分数与小数互化

代数初步解应用题：一元一次方程

几何：面积，周长，表面积，体积等

统计初步：统计表，条形图，折线图，饼图；平均值

**六年级：**

比例

几何：圆和扇形，轴对称图形，组合图形，周长和面积；圆柱、圆锥和球，表面积和体积

应用题

## 速算技巧

* 两位数平方

个位是5的两位数平方：先把十位上的数与比其大1的数相乘，然后后面接着写25

证明：设十位是a, 则

比如： 15\*15 = (1\*2)25 = 225, 25\*25 = (2\*3)25 = 625, 35\*35=1225, 45\*45=2025, …

16\*16=256, 16\*32=512, 32\*32=1024, 32\*64=2048, 64\*64=4096

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 112=121 | 122=144 | 132=169 | 142=196 | 152=225 | 162=256 | 172=289 | 182=324 | 192=361 |
| 212=441 | 222=484 | 232=529 | 242=576 | 252=625 | 262=676 | 272=729 | 282=784 | 292=841 |
| 312=961 | 322=1024 | 332=1089 | 342=1156 | 352=1225 | 362=1296 | 372=1369 | 382=1444 | 392=1521 |
|  |  |  |  | 452=2025 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 552=3025 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 652=4225 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 752=5625 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 852=7225 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 952=9025 |  |  |  |  |

* 两位数相乘

1. 首数相同，尾数相加是十的两位数乘数： 首数\*(首数+1) 连着 尾数相乘 （凑齐两位，前面补0）

* 证明：(10a+b) \* (10a+c) = 100a(a+1) + bc (其中c=10-b)
* 11\*19 = (1\*2)0(1\*9) = 209, 12\*18 = (1\*2)(2\*8) = 216, 13\*17=221, 14\*16=224
* 21\*29 = 609, 22\*28 = 616, 23\*27 = 621, 24\*26 = 624
* 31\*39 = 1209, 32\*38 = 1216, 33\*37 = 1221, 34\*36 = 1224

1. 两位数和为偶数：ab\*cd = (ab+cd)/2的平方- (ab-cd)/2的平方

* 证明： ,

35\*37 =362 – 1 = 1295, 33\*39 = 362-32 = 1296-9 = 1287

1. 任意两位数相乘

* ab\*cd = (10a+b)\*(10c+d) = (ad+bc)\*10 + (a\*c)连上(b\*c) 凑齐两位，前面补0
* 43\*85 = 440+3215 = 3655
* 15\*19 = 140 + 0140

1001是的公倍数

## 基本知识点

* **整数**

前n个整数的平方和：12 + 22 + 32 + … + n2 = n(n+1)(2n+1)/6

前n个整数的立方和：13 + 23 + 33 + … + n3 = (1 + 2 + 3 + … + n)2  (n个整数和的平方)

正整数N (>1) 可以唯一分解成有限个质数的乘积

两个正整数相乘可以分解成最大公因数\*最小公倍数

任何一个大于2的偶数都可以表示成两个质数之和 （哥德猜想）

* **倍数和约数(因数)，公倍数和公因数**

带余数除法：

若余数, 则a整除b即, 也称b称为a的倍数，a称为b的约数

判断整除（倍数）？

2的倍数：　 末尾是2的倍数， 即偶数（0，2，4，6，8）

4的倍数：　 末两位是4的倍数

8的倍数：　 末三位是8的倍数

16的倍数： 末四位是16的倍数

…

5的倍数：　 末位是5的倍数，即0或5

25的倍数： 末两位是25的倍数

125的倍数： 末三位是125的倍数

…

3的倍数：　 数字和是3的倍数

9的倍数：　 数字和是9的倍数

11的倍数： 奇数位和与偶数位和的差（大减小）是11的倍数

如：

7的倍数： 末三位与前面隔出数的差是7的倍数

截去个数，余下数减去个位2倍是7的倍数，若太大不容易判断，继续以上过程

11的倍数： 末三位与前面隔出数的差是11的倍数

13的倍数： 末三位与前面隔出数的差是13的倍数

截去个数，余下数加上个位4倍是13的倍数，若太大不容易判断，继续以上过程

17的倍数： 末三位与前面3倍隔出数的差是17的倍数

截去个数，余下数减去个位5倍是17的倍数，若太大不容易判断，继续以上过程

19的倍数： 末三位与前面7倍隔出数的差是19的倍数

截去个数，余下数加上个位2倍是19的倍数，若太大不容易判断，继续以上过程

23的倍数： 末四位与前面5倍隔出数的差是23的倍数

如：

如：

27、37的倍数： 每三位一组，组和是27(37)的倍数

如：

10的倍数： 末位是10的倍数，即0

25的倍数： 末两位是25的倍数，即00，25，50，75

整除性质：

若

如：

如果数a能同时被数b,c整除，且b,c互质，则a一定能被b和c的积整除

如6的倍数：　同时被2和3整除

15的倍数： 同时被3和5整除

最大公因数：两个数的公因数中最大的一个 d = (a1, a2) ⬄ d|a1 and d|a2

最小公倍数：两个或多个整数的公倍数里最小的一个

定理：两个正整数相乘可以分解成最大公因数\*最小公倍数

即a\*b = (a,b) \* [a, b] 整数a,b, 最大公因子(a,b), 最小公倍数[a,b]

最大公因数与最小公倍数求法？

短除法

(12, 18) = 2\*3 （除数乘积）

[12, 18] = 2\*3 \* 2\*3 （除数与商乘积）

欧几里得算法

假定a > b, 令a = r0, b = r1

r2 = r0 (mod r1) 求余运算：q = int(r0/r1), r2 = r0 – r1\*q

r3 = r1 (mod r2)

…

直至整除为止，最后一个非零余数即为最大公因数

如 求{12, 18}的最大公因数(12, 18)和最小公倍数[12, 18]

6 = 18 (mod 12)

0 = 12 (mod 6) 从而{12, 18}的最大公因数为(12, 18) = 6

{12, 18}的最小公倍数为[12, 18]= 12\*18/(12, 18) = 36

* **质数（素数）：只有1和它本身两个因数的自然**数

100以内共25个质数：2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97...

判断是否质数？

若m不能被2~sqrt(m)间任一整数整除，则m必定是素数

如17不能被range(2, 5)之间的每一个整数整除

Eratosthenes筛法求质数集：

1. 寻找10以内的质数集：2, 3, 5, 7
2. 寻找以内的质数集：在[10, 100]内 remove 10以内质数集的倍数
3. 寻找以内的质数集：在[100, 1000]内 remove 100以内质数集的倍数

合数：除了1与本身以外，还有其他约数

{质数} + {合数} + {1} = 正整数

{质数} + {合数} + {±1} + {0}= 整数

孪生素数就是差为2的素数对，例如11和13

定理：

1. 正整数N (>1) 可以**唯一分解**成有限个质数的乘积

N = p1a1 \* p2a2 \* ...\*pnan

1. 任何一个大于2的偶数都可以表示成两个质数之和？（哥德巴赫猜想1+1 = 2）

如4 = 2+2， 6 = 3+3， 8 = 3+5， 10 = 5+5 (or 3+7), 12 = 5+7, …

目前为止，陈景润证明1 + 2 即大偶数等于1个质数+2个质数乘积。

哥氏猜想很难证明，采取等价题目：所有的大偶数可以表示成a个质数的乘积+b个质数的乘积，即a+b, 然后逐步减小至a=b=1, 目前最接近的是陈景润1+2

大于3的素数只分布在6n-1和6n+1两数列中

所有大于10的质数中，个位数只有1,3,7,9

* **奇数**

定理：

1. 任意两个奇数的平方差是8的倍数

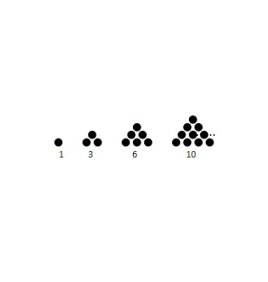
证明：设任意奇数2n+1, 2m+1, 其中m, n ∈ N

(2m+1)2 – (2n+1)2 = 4(m+n+1)(m-n)

当m, n都是奇数或都是偶数时，m-n是偶数，被2整除

当m, n一奇一偶时，m+n+1是偶数，被2整除

1. 三角形数:一定数目的点或圆在等距离的排列下可以形成一个等边三角形



第n个三角形数的公式是n(n+1)/2 或者 [(2n+1)2 – 1]/8

如：{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, …}

判断是否是三角形数？

求n = [sqrt(8x+1) – 1 ]/2

若n是整数，那么x就是第n个三角形数。

若n不是整数，那么x不是三角形数。

三角形数特点：

* 第n个三角形数是开始的n个自然数的和。

1 = 1

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = 1 + 2 + 3 + 4

15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5

…

* 开始的n个立方数的和是第n个三角形数的平方

12 = 13

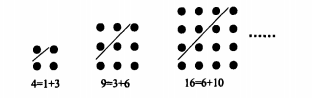
32 = 13 + 23

62 = 13 + 23 + 33

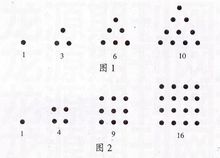
102 = 13 + 23 + 33 + 43

…

* 所有三角形数的倒数之和是2
* 任何三角形数乘以8再加1是一个平方数
* 两个相继的三角形数之和是平方数

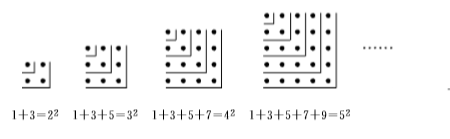
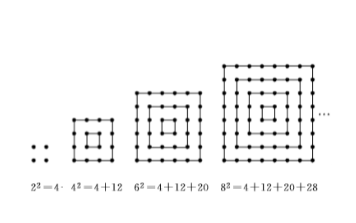
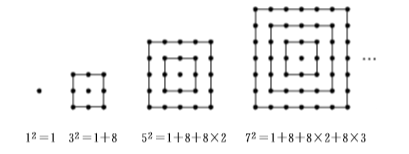


1. 平方数，正方形数: 平方根为整数的数



如：{1, 4, 9, 16, 25, …}

平方数特点：

* 平方数都可以表示为从“1”开始的连续奇数之和的形式
* 
* 任何一个非零偶数的平方数都可以表示为首项为4，公差为8的一串数之和
* 
* 任何一个奇数的平方都可以表示为从1开始，然后依次是8的连续倍数的几个数之和
* 
* 每4个连续的自然数相乘加 1，必定会等于一个平方数，

即a(a+ 1)(a+ 2)(a+ 3) + 1 = (a+ 3a+ 1)。

* 四平方和定理说明所有正整数均可表示为最多四个平方数的和
* 平方数必定是3的倍数或者3的倍数+1。
* 平方数必定是4的倍数或者4的倍数+1。

1. 完全数，完美数，完备数: 真约数之和恰好等于自已

* 真约数，真因子：除了自身以外的约数

如：{6, 28, 496, 8128, …}, 截至2018年，相关研究仅找到51个完全数

6 = 1+2+3

28 = 1+2+4+7+14

496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248

8128

完全数特点：

* 所有的完全数都是三角形数
* 完全数的所有约数的倒数和等于2

1/1+1/2+1/3+1/6 = 2

1/1+1/2+1/4+1/7+1/14 = 2

…

* 完全数(>6)可以表示成连续奇数的立方和

28 = 13 + 33

496 = 13 + 33 + 53 + 73

8128 = 13 + 33 + 53 + 73 + ...153

* 完全数可以表示2的连续正整数次幂和

6 = 21 + 22

28 = 22 + 23  + 24

496 = 24 + 25 + 26 + 27 + 28

8128 = 26 + 27 + 28 + … + 212

* 完全数都是以6或8结尾,如果以8结尾，那么就肯定是以28结尾

1. 亲和数(a,b)： a的真约数之和 = b， 且a = b的真约数之和

如： (220 284), (1184 1210), (2620 2924), …

## 数论

* **最大公约数理论**

最大公约数：

Euclid算法(欧几里得)求最大公约数：

假定a > b, 令a = r0, b = r1

r2 = r0 (mod r1) 求余运算：q = int(r0/r1), r2 = r0 – r1\*q

r3 = r1 (mod r2)

…

直至整除为止，最后一个非零余数即为最大公因数

1. 两个数的最小公倍数乘以它们的最大公约数就等于这两个数的乘积的绝对值
2. 若干数的最大公约数一定等于这些数的整系数线性组合，且是这些数的所有整系数线性组合里的最小正整数

特别地：两个整数的最大公约数一定可以表示成这两个整数的整系数线性组合

252 = 1\*198 + 54 18 = 4\*252 + (-5)\*198

198 = 3\*54 + 36 18 = -1 \* 198 + 4\*54

54 = 1\*36 + 18 18 = 1\*54 + (-1)\*36

36 = 2\*18

* **K元一次不定方程:**

变量个数多于方程个数，且变量取整数值的方程（或方程组）称为不定方程（或组）

求

解：

1. 判断是否有解：
2. 转成k-1个二元不定方程组

其中

1. 用Euclid算法求二元不定方程

或者用观察法求特解，然后求二元不定方程 通解：

1. 从而求k元一次不定方程解

如：

求的全部整数解

由(18, 24) = 6 not | 9, 所以无解

求 的全部整数解 （观察法）

由(10, 7) | 17 说明有解

观察容易得 是一组特解

因此全部解是

求的全部整数解 （Euclid算法）

由(907, 731) | 2107 说明有解

若有解，则731必整除 （**取系数绝对值较小的变量**）, 所以

= 从而原方程等价于如下不定方程

=

=

（**直到不定方程变元系数为为止，从而可以直接解出**）

逆推：

求的全部整数解

, 从而转化为方程组

由的通解是

由的通解是

消去, 得原不定方程通解：

**非负解或正整数解**

令通解, 从而求出自由变量t的取值范围，从而确定t的整数解

例：1只公鸡15元，1只母鸡9元，1只小鸡1元，想300元买一百只鸡，怎么买？

解：令 分别代表买公鸡，母鸡，小鸡的数目，列出不定方程组

由Euclid方法可以求出通解

由

最终解为：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 公鸡 | 0 | 4 | 8 | 12 |
| 母鸡 | 25 | 18 | 11 | 4 |
| 小鸡 | 75 | 78 | 81 | 84 |

* **求平方根**

连分数

有理分数可以表示为有限简单连分数

无理数可以唯一表示为无限简单连分数

实数（有理数和无理数） -> 连分数：

在<>，小数写成分数表示

如：求13/5的有限简单连分数

连分数 -> 实数

有 限简单连分数，往回推，如

## 组合

计数原理

从N个不同元素中取出m个元素的排列数

从N个不同元素中取出m个元素的组合数

二项式展开

## 小学技巧及难题

* 整除

例：若整数能被99整除，求x和y各是什么数字？

99 = 9\*11， 99整除等价于9整除和11整除

由9整除 =>, 由

由11整除 =>, 由

例：若整数能被88整除，求x,y

88=8\*11

由8整除 => 8整除末三位, 得

由11整除 => , 由

or

例：某整数能同时被2,3,4,5,6,7,8,9整除，求x,y,z

由8=2\*4 => 被8整除，必然被2，4整除

由9=3\*3 => 被9整除，必然被3整除

能否8，9整除，必然被因子{2,2,2,4,3,3}的乘积整除，即6=2\*3

如果一个数能被5和8整除，那么其末位数字必然是0

那么题目等价于某整数能同时被5,7,8,9整除

7整除特点最麻烦，一般放在最后考虑

由9整除

由8整除 => 8整除末三位， 由末位为0

从而求出

例：已经41位数（5和9各有20个）能被7整除，求x？

由 说明7整除6位相同的数

由

注：最后一步推导是由

只要x的个数是6的倍数，

例：如果一个六位回文数除以95的商也是一个回文数，那么这个六位数是多少？

分析：

由5整除 (0不符合题意,舍去)

由

由末位不是5，故

遍历e=0-9, 可知

余数

例：97和79除以一个数，余数都是7，那么这个数可能是多少？

由

例：100和84除以同一个数，得到的余数相同，但余数不为0，这个除数可能是多少？

q为16的因子{1,2,4,8,16}, 代入验证，{1,2,4}都能被整除，所以

* 求和

前n个整数的和：

前n个整数的平方和：

前n个整数的立方和：

求和等差数列：

方法：

求和等比数列：

方法：

求

求

注意到 =>

=>

=>

寻找一下规律： 代入上式

求

观察到被除数和除数的分母都是一样的，能否从被除数中提取类似除数这样的因子？

寻找一下规律： 改写被除数形式

* 求整数部分 (需要用到缩放技巧)

只需要求分数转小数，两位精确值即可

* 比较大小

1. , ，

A的每一应都小于B的对应项，所有

, 由, assume 代入左式

, 由

,

先将小数化为整数

, 很明显A > B

容易判断, 就像

, 很明显A > B

1. 证明

设,

小数，带分数等转换

, 其中为整数部分，为小数部分或真分数

纯循环小数化为分数：

先设这 个数为x, 把小数点挪到第一个循环结束的地方，不妨设挪了p位，那么就把x扩大到10的p次方倍，然后移项解方程即可

如

令, 两边同时乘以1 000 000， 即

混循环小数化为分数：

将有限的非循环部分剥离出来; 把剩下的循环乘以10的若干次幂，使之变成纯循环小数；还原回去，加上不循环的部分，再化成分数

如

求满足的正整数解

解：分母为2和5只会影响小数点一位，说明分母为11影响小数点两位0.37, 被11除，一共就10种情况{1, … 10}，遍历一下保留两位小数，看哪个分子满足两位小数四舍五入为0.c7形式？

,

从而原问题等价于 等价于求解不定方程

用Euclid算法：

, 由正整数解限制, 取

例：求证100…01（共1991个0）是合数

分析：即证明100…01（共1991个0）= , 且

100…01（共1991个0）=

比例性质

合分比性质：

等比性质：

证明：令

# 初中数学

## 教学大纲

代数：

有理数，实数（数轴）；四则运算；平方和立方、平方根和立方根

代数式，整式，分式和二次根式；运算和因式分解

方程和方程组：一元一次方程，二元一次方程组，一元二次方程；一元一次 不等，一元一次不等式组

函数及其图像：平面直角坐标系， 正比例函数，反比例函数，一次函数，二次函数

统计：总体，样本，众数，中位数，平均数，方差与标准差，频率分布

几何：

相交线，平行线，三角形（全等三角形，相似三角形），四边形（多边形，平行四边形（矩形、菱形和正方形），中心对称图形，梯形），圆

空间直线，平面垂直与平行，圆柱圆锥侧面积

相似形：比例线段（合比性质，等比性质），相似三角形

## 代数

### 因式分解

**重要公式：**

常常

整数幂：

例：计算

分析：前后项是平方差公式

例：分解因式：

令,

**长除法：**

整数幂：

例如：

也可以构造等比数列证明如下：

由等比数列的前n项和等于，从而推出

整数幂：

任何一个有理函数都可写成部分分式之和

* 若(x-r)是g(x)的一个线性因子，假定是除尽g(x)的x-r的最高次幂，则对这一因子指定m个部分分式之和
* 若是g(x)的一个二次因子，假定是除尽g(x)的x-r的最高次幂，则对这一因子指定m个部分分式之和

如

**分组分解法：**

在分组的时候应该尽量把次数相同的项分在一起。对于高次的多项式，有平方差、立方差、立方和等公式

例分解因式：

**十字相乘法：**

=

当且仅当

什么时候可以用十字相乘法，仅当是完全平方

例分解因式：

由可完全平方，故可以十字相乘法

(

例分解因式：

**求根法：**

**换元法：**

把式子中重复出现的部分用简单字母来代替

例因式分解： 第一项第四项相乘，第二项第三项相乘

令

例因式分解：

令

**试根法：**

一元高次多项式所有的一次因式，其一次项系数只可能是最高次项系数的因数，常数是多项式常数的因数

最高次项系数是3,其因数1, 3

常数项是18, 其因数1, 2, 3, 6, 9, 18

所有可能的一次因式为：

注意与同因式，与同因式，…

例因式分解：

由试根法：均不是

原式子必分解成

由待定系数法求得

若多项式各项系数和为0, 必然含有因子

例分解因式：

**待定系数法：**

确定待分解式子的部分分解后的样子，未知系数设为变量，利用多项式乘法展开猜测的表达式，并和原来式子对照，从而确定系数

例分解因式：

四次多项式可以分解成四个一次式，或者两个一次式和一个二次式，或者两个二次式的形式

用试根法求可能的一次因式：不符合，那么一定是两个二次多项式的乘积

假设分解为 or

例分解因式：

四次多项式可以分解成四个一次式，或者两个一次式和一个二次式，或者两个二次式的形式

用试根法求可能的一次因式：,都不符合，那么一定是两个二次多项式的乘积

假设分解为 or

齐次轮换对称式：指多项式每项的次数相等，并且轮换之后（例如结果不变的多项式。

基本原理： 对称的式子，乘积或分解完了还是对称的

以三元为例：一次对称式是; 二次对称式是; 三次对称式是, 如果某个齐次轮换式含有, 必含有其余两个分量

例分解因式：

分析：很明显不是因子，因为令, 上式不一定为0

同理都不是因子

判断是否有因子, 发现令，则原式=0, 故原式一定含有因子, 其余的因子必然是的线性组合

令

令

从而

### 一元多次方程

1. 一元一次方程

方程解与系数关系：

当 时，等式恒成立 方程有无数解

当时， 方程有唯一解

当时，等式不成立 方程无解

1. **一元二次**方程

方程解与系数关系：

若, 转化为一元一次方程讨论

若

判别式

当时 方程有两个不同实数根

当时 方程有两个相等根

当时 方程无实数解

**求根公式（**配方法推导）

**韦达定理**

假定方程两个根： , , 则方程等价于：

从而推导出韦达定理：

,

也可以由方程两个共轭根, ， 直接推导

两个共轭根之和，或之积可以抵消根号

假定知道两个变量之和 和两个变量之积, 那么这两个变量就是方程

的两个根

例：若满足方程组 求

分析：

方法一：第二行-第一行，且令 不难求出

方法二：方程组等效为，是关于t的一元二次方程两个根

整理得

由韦达定理得

例：若一元二次方程的系数满足, 求证这两个方程中至少有一个有实数解

分析：两个方程至少有一个实数解，意味着这两个方程中至少有一个判别式是不小于0

即证明 or

由 至少一个判别式非负

例：证明方程的两个根都是有理数，其中是有理数，且

分析：欲证根为有理数，即为有理数

, 由是有理数也是理数,从而全是有理数

例：若二次方程有实根，其中为奇数，求证方程必有两个无理数根

分析：无理数根，说明不是完全平方数

反证法：假设判别式是完全平方数，即令

很明显k是个偶数，不妨设, 于是

因为都是奇数，所以只能是奇数

*，*左边是4的倍数，而右边是2的倍数，存在矛盾

例：求的最大值和最小值

分析：y的最值保证了方程一定有实数解，说明判别式>=0

另一种方法：基本不等式

由函数曲线知

例：若方程的两根都大于a，求m的取值范围

分析：假设两根， 题目要求， 还有隐含条件判别式不小点于a

m取值范围满足条件

例：已知实数满足, 求证中必有一个大于3/2

分析：轮换对称，

由三个数之和为0，那它们肯定有正有负

由三个数之积为2，那它们肯定一正两负

由三个变量对称，不妨设

由, 说明是一元二次方程的两个根

例：若, 求证中至少有一个是1.

分析：轮换对称

,

所以是一元二次方程的两个根

说明一定有一个是1

例：已知实数 满足 ， 其中.

求证：

分析：轮换对称

所以 是一元二次方程…的两根

由判别式非负，可以推导出, 由轮换对称性，也是

1. **一元三次**方程

**韦达定理**

假定方程三个根： , , 则方程等价于：

从而推导出韦达定理：

,

1. 一元n次方程

韦达定理

假定方程三个根： , , 则方程等价于：

从而推导出韦达定理：

,

例：解方程

分析：换元法

很明显不是解，方程两边除以

令 代入上式，从而化为一元二次方程

例：解方程

分析： 由合比性质

例：解方程

分析：换元法

令,

### 一元高次不等式

一元二次不等式与二次函数

化标准形

二次函数，开口向上，二次函数在x轴上方>0

数轴穿根法：

所有的多项式在实系数范围内一定能分解成若干个一次和二次多项式幂的乘积

因为一元二次多项式如果不能在实系数内分解，那就意味着其判别式小于0；而且二次项系数均为1，因此所有二次式及若干次幂都是>0 (一元二次函数开口朝上，与x轴无交点，恒大于0)。 所以一元高次不等式等价于

1. 求过零点的根, 并在数轴上标出
2. 画穿根线（从右到左）

* 若最高次项系数,从上方开始；若,从下方开始
* 奇穿偶不穿

1. 上半轴的范围都是>0, 下半轴的范围都是<0

例：解不等式

分析：常规方法是去绝对值，分段函数求解

例：解不等式

分析：常规方法是去绝对值，然后分段函数求解

数轴穿根法：

四个零点：

容易求得不等式的解为：, ,

带参数讨论

例：解不等式

分析：

需要分析几个零点的位置

当时，解为

当时，解为

当时，无解

例：设为参数，解不等式

分析：

需要分析几个零点的位置

当 即, 此时解为

当, 此时解为

当, 即当, 此时解为的全体实数

例：要使不等式的解包含, 求的取值范围

分析：

需要分析几个零点的位置

当, 此时解为

当, 此时解为

当, 此时无解

然后我们考虑如何包含

当, 问题等价于

当, 问题等价于

综合以上，当 or , 不等式的解包含

多元一次方程组

1. 二元一次方程组

方程组解与系数关系：

当 时 方程有无数解

当时 方程有唯一解

当 时 方程无解

1. N元一次方程组

## 几何

### 三角形

**三角形面积**：

因为平行四边形由向量叉积表示，则平行四边形面积

其中 即半周长

其中r: 三角形内切圆半径，p为半周长

因为, 内切圆圆心是三角平分线交点（即内心）

其中R:三角形外接圆半径

注意外接圆圆心是三边垂直平分线交点（即外心）

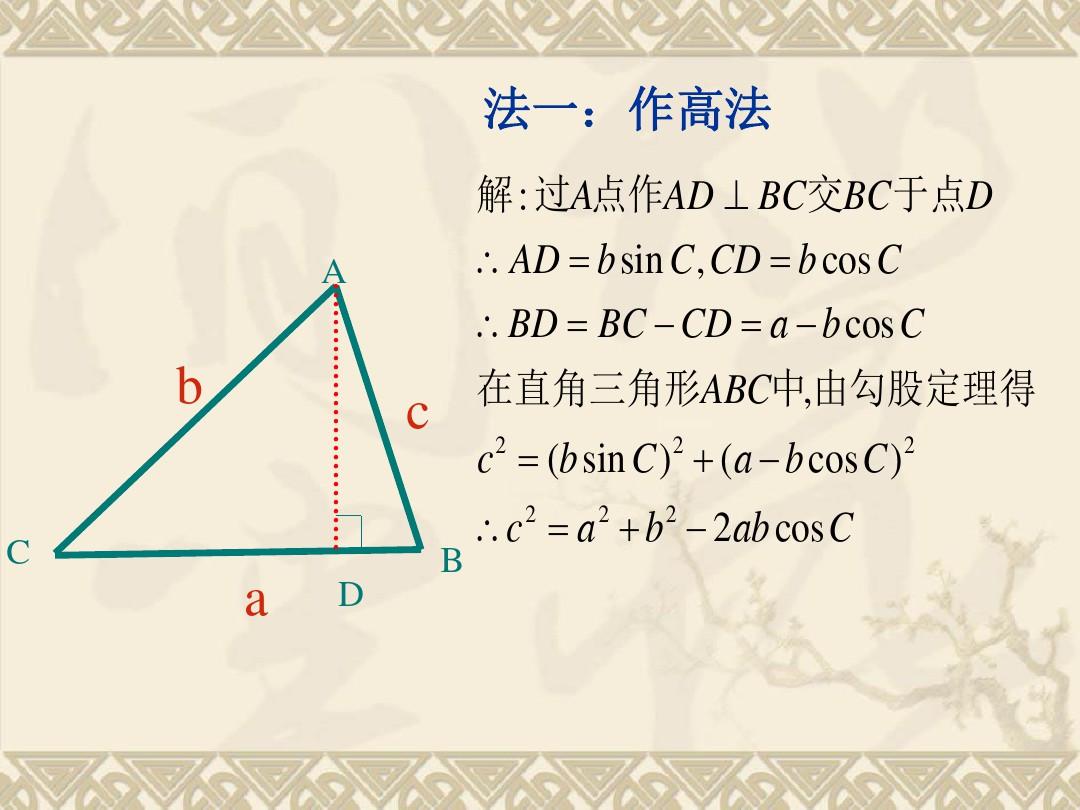
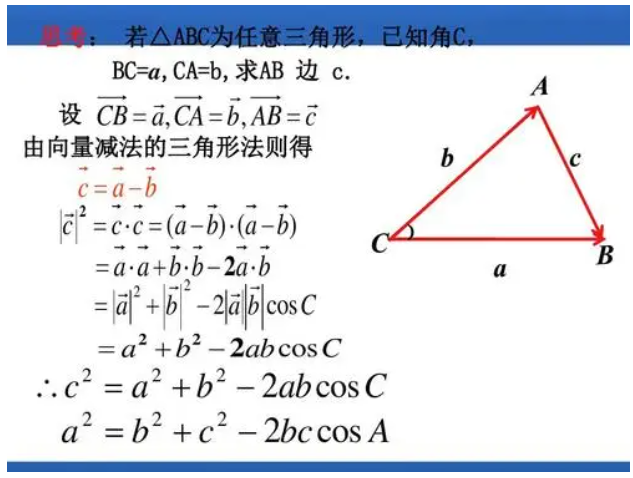
其中： 三角形三条中线（即顶点到对角边中点的连接）

三角形三中线交点即重心，重心落在中线1：2位置

中线分割的两个三角形面积相等

**余弦定理**：

推导：作高法，向量法

**正弦定理**： while R是三角形外接圆的外径

推导：作高法

,

三角形等边对等角，大边对大角，小边对小角

例：在中，角ABC所对应的边分别为, 已知, 则

分析：由正弦定理

三角形四心：

**内心（三角平分线交点）**

**重心（三边中线交点）**

**垂心（三边高线交点）**

**外心（三边垂直平分线交点）**

1. 不在同一条直线上的三个点可以确定一个圆，即三角形有唯一的外接圆，外接圆的圆心是三边垂直平分线的交点
2. 三角形有唯一的内接圆，圆心是角平分线交点
3. 三角形三条中线相交于一点即重心，且重心是中线的三等分点

向量法证明

证明：

中线分割的两个三角形相等

Ceva’s theorem （塞瓦定理）

燕尾定理

中线定理

### 平行四边形，多边形和圆

1. 平行四边形面积 , 对角线划分的四个三角形面积相等
2. 任意四边形各边中点，所得图形为平行四边形
3. 四边平方和等于对角线平方和 （向量法证明）

梯形面积A = 1/2 \* (上底+下底) \* 高

多边形：

N边形一个顶点有n-3条对角线 N边形共有条对角线

N边形过一个顶点引出所有对角线后，可以分割成N-2个三角形

N边形的内角和等于

任意凸多边形的外角和等于360

证明：取多边形内部任意点O,将多边形划分成N个三角形

内角和 = N个三角形 – 360 = (N-2) \* 180

由内角和 + 外角和 = N\*180 => 外角和=180\*2=360

圆：

同圆或等圆中，等孤对等圆周角，圆周角是圆心角一半

孤长： 其中圆心角

其中孤度制rad =

扇形面积：

### 立体几何

*其中是上底面积， 下底面积， 为高*

1. 柱体，底平行的棱柱体，或直立圆柱， 则, 即底面积 \* 高

平行六面体的体积：

1. 锥，棱锥，或直立圆锥, , 即 1/3 \* 底面积 \* 高
2. 若圆为底，则

表面积 (其中s为棱边)

球体表面积

解析几何

两条线互相垂直 ⬄ 其斜率

## 初中技巧及难题

* **对称的多元多项式**

如果把多项式中任意两个字母互换，得到的结果不变，那么就称该多项式是对称多项式

对称在数学或者物理中有着很重要的地位。所谓数学的美感经常就体现在对称上，人类对于对称的东西天然就有一种亲切感

齐次轮换对称式：指多项式每项的次数相等，并且轮换之后（例如结果不变的多项式。

基本原理： 对称的式子，乘积或分解完了还是对称的

以三元为例：一次对称式是; 二次对称式是; 三次对称式是, 如果某个齐次轮换式含有, 必含有其余两个分量

例：已知, 计算

若是选择或填空题，尝试特殊值, 则原式=3

分析：轮换对称式， 一般转换为

例：是实数，并且满足, 求的最小值

分析：

由三个数之和为0，那它们肯定有正有负

由三个数之积为2，那它们肯定一正两负

由三个变量对称，不妨设 , 于是 就是一元二次方程 的两个根

由判别式

例：求证

令, 由

由得证

例：已知为非零实数，, 且, 求

分析：连等式一般设这个连等式为, 然后再化简+整体代换

, 由 代入求解式子为8

例：已知, 求

分析：若是选择题或填空题，尝试特殊值代入, 原式=1

式子具有轮换对称性

注意到前两个式子， 出题者一般给出优美解，那么第三个式子即有可能

* **化简根式**

共轭根式：形如

分母有理化：分子分母同乘以分母的共轭根式

分子有理化：分子分母同乘以分子的共轭根式

例：化简根式

令 = =

, 转化为是一元二次方程的两个根

若满足， 则 =

如 =

例：化简根式

令 = 求解

如 =

例：计算

分析：这个式子里所有数只含三个根式, 看能否用因式分解法

令,

例：化简

分析：两个根式是共轭根式，共轭根式最大的好处就是，一对共轭根式相乘就能把根式去掉

令

0

由左边各项系数之和为0，所以必然有因子

0

后面的一元二次方程判别式小于0，所以方程只有一个实数根, 即

例：设， 求x的个位数字

分析：两个根号里的式子互为相反数，且根号里的式子必须非负。一个数既要非正又要非负，于是它只能等于0, 所以

由导致分母为0，舍去，故代入求得

例：解方程

分析：没有明显的换元，注意到左右两边，根式内相减相等，试一下分子有理化

（ 不满足，去除）

由

* **绝对值=>分段函数**

如果碰到多个绝对值，那么就把每个绝对值的零点计算出来，然后从大到小排好，分别讨论

和普通的方程相比，绝对值方程可能会产生增根，从函数的观点看：因为绝对值把函数图像位于y轴下半部分直接翻上来，而另一个函数其实是和被翻上来的那部分相交了，因此这些根就是增根

例：若关于x的方程有三个整数解，则a的值是多少？

分析：去绝对值符号，转化为

分段函数

画图：以x作横轴，a为纵横，建立直角坐标系，画水平线即, 恰好与分段直线相交3三个点

* **换元法+整体代换+待定系数法+**

连等式一般设这个连等式为, 然后再化简+整体代换

例：解方程

分析：换元法，把根号去除

令

, 易求

例：已知, 求

分析: 换元法

求原式

例：解方程组

分析：换元法

令

令

由是的两个根

例：解方程

分析：很容易会想到换元 , 另一个分母为. 能否换元成对称型比如，就能体现对称之美，比如乘积是平方差公式，之和抵消常数等

例：设a,b是有理数，且, 求证是一个有理数的平方

分析：即证明, 其中是有理数

*注意到*

例：设, 求

分析：这种题目一般不硬算，而是通过整体代换来化简计算

例：已知, 求

分析：待求式子都是的表达式，

容易求出

例：已知, 求

分析：化简+整体代换

关键如何求

由 容易求,

故可以考虑 (

例：已知, 用含y的式子表示

分析：化简+整体代换

真分式不好化简，其倒数假分式容易

例：设 且

, 求

分析：连等式一般设这个连等式为, 然后再化简+整体代换

, 观察恒等式两边数字比较多

代入恒等式

# 高中数学

## 教学大纲

## 函数

**三角函数**描述循环、重复的运动

**指数、对数和logist函数**描述了增长和衰减

**多项式函数**可用来近似这些函数或其他函数

### 函数性质

定义域和值域

单调性

奇偶性

偶函数图形关于y轴对称，因为f(-x) = f(x)

奇函数图形关于原点对称，因为f(-x) = -f(x)

反函数图形关于直线y=x对称

每个函数都可以唯一地分解成一个偶函数和一个奇函数之和

周期性

移位图形

若k>0, 则向上移k个单位；若k<0, 则向下移|k|个单位

若h>0,则向左移h个单位；若h<0,则向右移|h|个单位

反函数：函数f和g是反函数对，当且仅当

比如指数与对数函数互为反函数

反函数对的图形关于直线对称

### 幂函数：

图示, 工程绘图

描述已自动生成

### 指数函数：

表格

描述已自动生成

建模函数：

### 对数函数：

图示

描述已自动生成

指数函数与对数函数互逆，即互为反函数

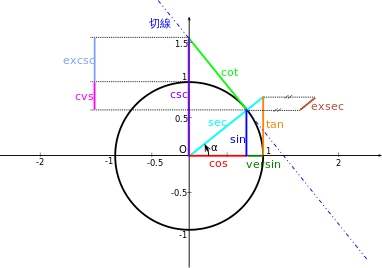
超越方程（如指数方程和对数方程），五次以上的高次代数方程，不能用代数运算求解，常用数值解法

### 三角函数

定义为直角三角形中两个边的比率

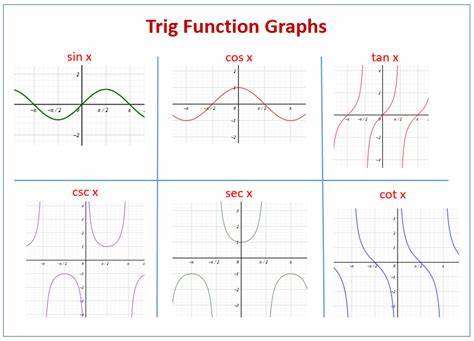


定义为单位圆上的各种线段的长度



定义为无穷级数或特定微分方程的解

三角函数图像



->平移-> -> x轴缩放 -> -> y轴缩放 ->

三角函数关系式

据定义得:

周期函数化大角为小角

1. 弧度：圆弧等于半径长时的圆心角 = 1 rad

圆心角n度

孤长

扇形面积

由三角函数图像得 (如将 向左平移 得)

诱导公式记法：奇变偶不变，符号看象限

若k是奇数，则奇变为；若k是偶数，则偶不变为

假定在第1象限，判断在第几象限，若在第一二象限即x轴上方，则符号为正，下方符号为负

如

如何推导

向量法：单位圆上取点得

则

由

=>

=>

=>

由

=>

令 即 代入上式

参数化方程

若平面上曲线 ，存在与曲线相交多于一次的垂直线，则该曲线无法用来描述

可以用参数化表达

## 不等式

绝对值不等式：

均值不等式：

调和平均值 几何平均值 算术平均值 平方平均

若是n个正数：

等号成立仅当

柯西施瓦茨不等式：

由向量内积

等号成立仅当

排序不等式：若有序

则倒序和 乱序和 顺序和

等号成立仅当

Weitzenbock 不等式（外林比克不等式）:

其中为三角形边长，面积为A，等号成立仅当等边三角形

内斯比特不等式：

对, 有

证明：由算术平均值大于等于调和平均值

其中

Minkowshi不等式 （闵可夫斯基不等式）

若, 且, 则有

## 向量及解析几何

### 平面向量及解析几何

几何问题 -> 代数问题

建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何要素，如点线圆

**直线：**

1. 2点确定一条直线

点斜式： 截距式：

斜截式： 一般式：

1. 点和方向确定一条直线

视为以出发，速度匀速运动后的位移

常见题型：

1. 直线平行
2. 直线垂直
3. 点到直线距离：

圆：

直线与圆相交，相切，相离

椭圆： 平面内与两个定点距离和等于常数

其中a为横轴右交点，b为纵轴上交点，c为椭圆右焦点

双曲线：平面内与两个定点距离差绝对值等于常数

渐进线

椭圆，双曲线，抛物线：动点M的轨迹

离心率

其中是动点M到定点F的距离，是动点M到定直线l的距离

椭圆： 椭圆扁平程度

双曲线： 双曲线开口程度

抛物线： 焦点, 准线

### 空间向量及立体几何

向量仅与大小和方向有关，与位置无关

任意两个空间向量都可以平移到同一个平面表示

空间向量基本定理： 空间内任意向量

其中不共面， 且

立体几何中的向量方法：

1. 用向量表示相应点线面等立体几何元素
2. 向量运算

若四面体，平行六面体…等，一般选择不共面的3个向量，作为基底

若正方体，长方体，或…等，可以建立直角坐标系OXYZ，从而点坐标A(x,y,z)， 用向量法+坐标法求解

线段向量

平面法向量

常见题型：

1. 证明多点EFGH共面 多线共面
2. 求线段长度
3. 点到直线距离，点到平面距离
4. 直线与直线平行，垂直，夹角，距离
5. 平面与平面平行，垂直，夹角，距离

### 空间向量与解析几何 （大学知识点）

定义：

数量积（点积，内积）

注意：数量积是个数值,

向量积（叉积，外积）

注意：向量积是个向量，同时垂直于, 且符合右手法则

混合积

向量位置关系：

判定两向量垂直：

判定两向量平行：

判定三向量共面**：共面**

向量几何应用：

两个向量夹角：

两向量为邻边的平行四边形面积：

两向量为棱的平行六面体体积：

平面方程

一般式方程: ,

其中平面法向量

点法式方程: ,

其中平面法向量 和平面上点

截距式方程：

其中平面在三个坐标轴上的截距

直线方程

一般式方程： 两平面交线

对称式方程：

其中直线方向线量 和直线上点

参数式方程：

其中直线方向线量 和直线上点

平面与平面位置

若两平面平行两法线平行

若两平面垂直两法线垂直

两平面夹角：

直线与直线位置

若两直线平行两方向向量平行

若两直线垂直两方向向量垂直

两直线夹角：

平面与直线位置

若平面直线平行法向量与方向向量垂直

若平面直线垂直法向量与方向向量平行

平面与直线夹角：

点到平面距离公式：

点到直线距离公式：

两不相交直线间距离公式：

其中直线方向向量，点A在上**；**直线方向向量，点B在上**，**

## 数列

数列： 定义在正整数子集上的离散函数

前n个整数的和：

前n个整数的平方和：

前n个整数的立方和：

证明：

求和等差数列：

倒序相加法（高斯法）：

求和等比数列：

错位相减法：

Fibonacci 数列 （斐波那契数列）

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

如：

由等比数列的前n项和等于，从而推出

整数幂：

1. 已知数列
2. 求证

比较两数大小，转为作差或作商比较

由, 欲证, 只需要证

与同号，所以与同号

1. 令, 求证

即证

由

由

1. 令 ，求证

对于数列求和，主要是用等差或等比数列来处理，一般对数列进行放缩来化简

从已知式的结构特征来看，转化为等比是首选，对通项进行放缩

由

例：已知不等式, 其中n为大于2的整数，表示不超过的最大整数，设数列的各项为正，且满足. 证明

分析：

等价于证明

, , …,

## 复数

代数形式： *其中i为虚数单位,*

三角形式：

指数形式： 其中

**所有实数能用一条数轴表示，复数用平面上的点表示**

复数可以视为复平面上的点(a, b), 也可以看作是平面向量 (a, b)， 横轴为实轴，竖轴为虚轴

向量z的幅度为r, 与实轴正方向的夹角为

复数乘法：

复数除法：

复数幂公式：

棣莫弗定理：

开方公式：

1的n次方根：

*复平面上单位圆的n等分，是x正半轴*

欧拉公式：

据麦克劳林展开式

将代入指数展开式，即证

二项式定理

## 微积分应用

求带约束条件下的函数极值

函数， 约束条件,

Lagrange乘子法：求解方程组

例：若正数满足, 则的最小值为

分析：构造拉格朗日函数

令, ,

解得, 代入即为最小值

# 解题策略：

## 一般到特殊(特殊值代入)，特殊到一般(数学归纳法)

例：已知, 计算

若是选择或填空题，尝试特殊值, 则原式=3

例：已知, 求

分析：若是选择题或填空题，尝试特殊值代入, 原式=1

例：若函数, 求证

分析：高斯法

证明： , 有

*, , …*

例：设数列的前n项和为, 且方程有一根为, 求

分析：

把根代入方程得

从特殊一般，猜想,用数学归纳法证明：

i)当时成立

ii)假设时成立，即

当时，, 故时结论也成立

综上，由i), ii)可知对所有正整数都成立。

当, 方程有一根为即，根代入方程

同理当

当, 由，根代入方程

反证法 (常常用于唯 一性，存在性等证明)

若直接证法 （若从条件出发，经过推理，得到结论）不容易，那么反证法（从结论的反面出发来考虑）

原命题（若A则B） 转化为 证明原命题的逆否命题 （若非B,则非A, 即）

例：已知为二次函数，且成正项等比数列，求证：

分析：假设, 由成正项等比数列，得

由比例性质

所以三点 满足, 即A,B,C三点共线，这与A,B,C在二次函数的图像抛物线上矛盾

因此，假设不成立 ，所以

## 主元变更（避免思维定势）

若不等式对一切均成立，试求实数的取值范围？

我们经常会遇到有多个变量的问题，我们常常对主元进行处理。有时候需要变更主元，比如这里若将思维定势的主动x 变更为p, 就容易解决

*令*

对, 均有, 只要有 解得

例：若满足方程组 求

分析：

方法一：第二行-第一行，且令 不难求出

方法二：方程组等效为，是关于t的一元二次方程两个根

整理得

由韦达定理得

# 参考书

[1] 不焦虑的数学