실력완성 | 고1

2-3-4.이차부등식과 연립이차부등식

수학 계산력 강화

(2)판별식을 이용한 이차부등식의 풀이





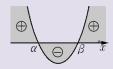
◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

- 1) 제작연월일 : 2018-02-15
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

판별식 D>0일 때 이차부등식의 풀이

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 이 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 를 가질 때,



 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로

- (1) $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해는 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$
- (2) $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해는 $\alpha < x < \beta$
- (3) $ax^2 + bx + c \ge 0$ 의 해는 $x \le \alpha$ 또는 $x \ge \beta$
- (4) $ax^2 + bx + c \le 0$ 의 해는 $\alpha \le x \le \beta$

☑ 다음 이차부등식을 풀어라.

- 1. $x^2 4x \ge 0$
- 2. $x^2 x > 0$
- 3. $x^2 + 2x 8 \le 0$
- **4.** $x^2 5x + 6 < 0$

$$5. x^2 + 2x - 3 < 0$$

6.
$$-x^2 - x + 6 \ge 0$$

7.
$$-3x^2 + 2x + 1 < 0$$

8.
$$x^2 + 8x + 15 \ge 0$$

9.
$$x^2 - 3x + 2 \le 0$$

10.
$$-x^2-3x+18>0$$

11.
$$-3x^2 - 5x + 2 \le 0$$

12.
$$6-x^2 < 0$$

13.
$$2-x^2 \ge x$$

14.
$$-x^2 - 6x + 7 \le 0$$

15.
$$x^2 - 12 \ge 4x$$

16.
$$x^2 + 5x - 14 \le 0$$

17.
$$x^2 - 11x + 30 < 0$$

18.
$$2x^2 - 7x + 3 < 0$$

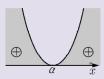
19.
$$-2x^2+7x+4>0$$

20.
$$2x^2 - 5x + 3 > 0$$

21.
$$-2x^2-x+6<0$$

02 / 판별식 D=0일 때 이차부등식의 풀이

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 이 중근 α 를 가질 때,



$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$
이므로

- (1) $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해는 $x \neq \alpha$ 인 모든 실수
- (2) $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해는 없다.
- (3) $ax^2 + bx + c \ge 0$ 의 해는 모든 실수
- (4) $ax^2 + bx + c \le 0$ 의 해는 $x = \alpha$

☑ 다음 이차부등식을 풀어라.

22.
$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

23.
$$x^2 + 4x + 4 < 0$$

24.
$$x^2 + 2x + 1 > 0$$

25.
$$x^2 - 8x + 16 > 0$$

26.
$$x^2 - 4x + 4 \ge 0$$

27.
$$x^2 + 4 \le 4x$$

28.
$$x^2 + 2x + 1 < 0$$

29.
$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0$$

30.
$$x^2 - 8x + 16 < 0$$

31.
$$x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 \ge 0$$

32.
$$-x^2 + 10x - 25 \le 0$$

33.
$$-4x^2+4x-1 \ge 0$$

34.
$$16x + x^2 > -64$$

35.
$$x(x-3) < 3x-9$$

36.
$$4x^2 \le 3(4x-3)$$

37.
$$9x^2 - 6x + 1 \ge 0$$

38.
$$16x^2 - 8x + 1 \ge 0$$

39.
$$-x^2 + 10x - 25 < 0$$

40.
$$-2x^2+4x-2>0$$

41.
$$-9x^2 + 12x - 4 > 0$$

42.
$$x^2 \le 10x - 25$$

43.
$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 > 0$$

03 / 판별식 D < 0일 때 이차부등식의 풀이

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0(a > 0)$ 이 두 허근을 가질 때,



- (1) $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해는 모든 실수
- (2) $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해는 없다.
- (3) $ax^2 + bx + c \ge 0$ 의 해는 모든 실수
- (4) $ax^2 + bx + c \le 0$ 의 해는 없다.

☑ 다음 이차부등식을 풀어라.

44.
$$-x^2 < x+1$$

45.
$$x^2-4x+5>0$$

46.
$$x^2 - x + 2 < 0$$

47.
$$x^2-2x+3>0$$

48.
$$2x-4 > x^2$$

49.
$$-x^2+3x-4<0$$

50.
$$x^2 - x + 3 < 0$$

51.
$$x^2 + 4x + 7 > 0$$

52.
$$x^2 + 3x + 9 \le 0$$

53.
$$x^2 - 2x + 8 \ge 0$$

54.
$$-x^2-2x-2>0$$

55.
$$2x^2 - 4x + 3 \ge 0$$

56.
$$2x^2 + x + 5 < 0$$

57.
$$4x^2 + 12x + 11 < 0$$

58.
$$-2x^2 \ge 3 - 2x$$

59.
$$x^2 + 3x + 4 > 0$$

60.
$$x^2 + x + 1 \le 0$$

61.
$$x^2 - 4x + 10 \ge 0$$

62.
$$3x^2 + 2x + 1 < 0$$

63.
$$-x^2+4x-5 \le 0$$

64.
$$-2x^2 \le 3 - 2x$$

65.
$$3x^2 < 2x - 1$$

66.
$$3x^2 - 2x + 2 \le 0$$

정답 및 해설

1)
$$x \le 0 \oplus x \ge 4$$

$$\Rightarrow x(x-4) \ge 0 : x \le 0$$
 $\exists x \ge 4$

2)
$$x < 0$$
 또는 $x > 1$

$$\Rightarrow x^2 - x > 0$$
에서

$$x(x-1) > 0$$
 : $x < 0$ 또는 $x > 1$

3)
$$-4 \le x \le 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 \le 0$$
에서 $(x+4)(x-2) \le 0$

$$\therefore -4 \le x \le 2$$

4)
$$2 < x < 3$$

$$\implies x^2 - 5x + 6 < 0 \, \text{에} \, \lambda \text{l}$$

$$(x-2)(x-3) < 0$$
 : $2 < x < 3$

5)
$$-3 < x < 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$$
에서

$$(x+3)(x-1) < 0$$
 : $-3 < x < 1$

6)
$$-3 \le x \le 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \le 0 : -3 \le x \le 2$$

7)
$$x < -\frac{1}{2}$$
 또는 $x > 1$

$$\Rightarrow \ -3x^2 + 2x + 1 < 0 \ \text{on } \ 3x^2 - 2x - 1 > 0$$

$$(3x+1)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{1}{3}$$
 또는 $x > 1$

8)
$$x \le -5$$
 $\pm \frac{1}{5}$ $x \ge -3$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 15 \ge 0$$
에서

$$(x+3)(x+5) \ge 0$$
 $\therefore x \le -5$ $\nsubseteq \ \ x \ge -3$

9)
$$1 \le x \le 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0 \text{ on } \lambda$$

$$(x-1)(x-2) \le 0 : 1 \le x \le 2$$

10)
$$-6 < x < 3$$

$$\Rightarrow -x^2 - 3x + 18 > 0 \text{ and } x^2 + 3x - 18 < 0$$

$$(x+6)(x-3) < 0$$
 : $-6 < x < 3$

11)
$$x \le -2$$
 또는 $x \ge \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow -3x^2 - 5x + 2 < 0$$
 에서 $3x^2 + 5x - 2 > 0$

$$(x+2)(3x-1) \ge 0$$
 $\therefore x \le -2$ $\nsubseteq \vdash x \ge \frac{1}{3}$

12)
$$x < -\sqrt{6}$$
 또는 $x > \sqrt{6}$

$$\Rightarrow 6 - x^2 < 0$$
에서 $x^2 - 6 > 0$

$$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) > 0$$
 $\therefore x < -\sqrt{6}$ $\text{ } \pm \text{ } \pm x > \sqrt{6}$

13)
$$-2 \le x \le 1$$

$$\Rightarrow 2-x^2 \ge x \text{ on } x - x^2 - x + 2 \ge 0$$

$$x^2 + x - 2 \le 0$$
, $(x+2)(x-1) \le 0$: $-2 \le x \le 1$

14)
$$x \le -7$$
 또는 $x \ge 1$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1) \ge 0 \quad \therefore x \le -7 \quad \text{ET}$$

$$x > 1$$

15)
$$x \le -2$$
 또는 $x \ge 6$

$$\Rightarrow x^2 - 12 \ge 4x \text{ on } x^2 - 4x - 12 \ge 0$$

$$(x+2)(x-6) \ge 0$$
 $\therefore x \le -2$ $\stackrel{\leftarrow}{}$ $x \ge 6$

16) $-7 \le x \le 2$

⇒ 부등식의 좌변을 인수분해하면

$$(x+7)(x-2) \le 0$$

따라서 부등식의 해는 $-7 \le x \le 2$

17) 5 < x < 6

$$\Rightarrow (x-5)(x-6) < 0 : 5 < x < 6$$

18)
$$\frac{1}{2} < x < 3$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x-3) < 0 : \frac{1}{2} < x < 3$$

19)
$$-\frac{1}{2} < x < 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = (2x+1)(x-4) < 0 : -\frac{1}{2} < x < 4$$

20)
$$x < 1$$
 또는 $x > \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow (2x-3)(x-1) > 0 : x < 1$$
 $\Xi = x > \frac{3}{2}$

21)
$$x < -2 \, \, \pm \pm \, \, x > \frac{3}{2}$$

22) $x \neq 3$ 인 모든 실수

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 > 0 \text{ odd } (x - 3)^2 > 0$$

따라서 부등식의 해는 $x \neq 3$ 인 모든 실수이다.

23) 해는 없다.

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = 2^2 - 4 = 0, \qquad x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 < 0$$

24) $x \neq -1$ 인 모든 실수

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = 1^2 - 1 = 0, \ x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$$

$$\therefore x \neq -1$$
인 모든 실수

25) $x \neq 4$ 인 모든 실수

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 > 0$$
에서 $(x-4)^2 > 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x \neq 4$ 인 모든 실수이 다.

- 26) 모든 실수
- \Rightarrow 이차방정식 $x^2-4x+4=0$ 의 판별식 $\frac{D}{4}$ 를 구하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \times 4 = 0$$

부등식의 좌변을 완전제곱꼴로 변형하면 $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

- 27) x = 2
- $\Rightarrow x^2 + 4 \le 4x \text{ oild} \quad x^2 4x + 4 \le 0$
- 그런데 항상 $x^2-4x+4=(x-2)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 x=2이다.
- 28) 해는 없다.
- $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 < 0$ 에서 $(x+1)^2 < 0$ 따라서 부등식의 해는 없다.
- 29) $x \neq \sqrt{2}$ 인 모든 실수
- $\Rightarrow x^2 2\sqrt{2}x + 2 > 0$ 에서 $(x \sqrt{2})^2 > 0$ 따라서 부등식의 해는 $x \neq \sqrt{2}$ 인 모든 실수이다.
- 30) 해는 없다.
- $\Rightarrow x^2 8x + 16 < 0$ 에서 $(x-4)^2 < 0$ 따라서 부등식의 해는 없다.
- 31) 모든 실수
- $\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 \ge 0$ 에서 $(x + \sqrt{5})^2 \ge 0$ 따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.
- 32) 모든 실수
- $\Rightarrow -x^2 + 10x 25 \le 0$ 에서 $x^2 - 10x + 25 \ge 0, (x - 5)^2 \ge 0$ 따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.
- 33) $x = \frac{1}{2}$
- $\Rightarrow -4x^2 + 4x 1 \ge 0 \text{ only}$

 $4x^2-4x+1 \le 0, (2x-1)^2 \le 0$

따라서 부등식의 해는 $x = \frac{1}{2}$ 이다.

- 34) $x \neq -8$ 인 모든 실수
- $\Rightarrow 16x + x^2 > -64$ 에서

 $x^2 + 16x + 64 > 0, (x+8)^2 > 0$

따라서 부등식의 해는 $x \neq -8$ 인 모든 실수이다.

- 35) 해는 없다.
- $\Rightarrow x(x-3) < 3x-9$ 에서 $x^2-3x < 3x-9$ $x^2 - 6x + 9 < 0$. $(x-3)^2 < 0$ 따라서 부등식의 해는 없다.

- 36) $x = \frac{3}{2}$
- $\Rightarrow 4x^2 \le 3(4x-3)$ 에서 $4x^2 \le 12x-9$ $4x^2 - 12x + 9 \le 0, (2x - 3)^2 \le 0$
- 따라서 부등식의 해는 $x = \frac{3}{2}$ 이다.
- 37) 모든 실수
- $\Rightarrow \frac{D}{4} = (-3)^2 9 = 0, \ 9x^2 6x + 1 = (3x 1)^2 \ge 0$
- 38) 모든 실수
- $\Rightarrow \frac{D}{4} = (-4)^2 16 = 0, \ 16x^2 8x + 1 = (4x 1)^2 \ge 0$
- 39) $x \neq 5$ 인 모든 실수
- $\Rightarrow x^2 10x + 25 > 0, \frac{D}{4} = (-5)^2 25 = 0$ $x^2-10x+25=(x-5)^2>0$... $x \neq 5$ 인 모든 실수
- 40) 해는 없다.
- $\Rightarrow x^2 2x + 1 < 0, \frac{D}{4} = (-1)^2 1 = 0$ $x^2-2x+1=(x-1)^2<0$: 해는 없다.
- 41) 해는 없다.
- $\Rightarrow 9x^2 12x + 4 < 0, \ \frac{D}{4} = (-6)^2 36 = 0$
- 42) x = 5
- $\Rightarrow x^2 10x + 25 \le 0, \frac{D}{4} = (-5)^2 25 = 0$ $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \le 0$ $\therefore x = 5$
- 43) $x \neq -\sqrt{3}$ 인 모든 실수
- $\frac{D}{4} = (\sqrt{3})^2 3 = 0$, $x^{2} + 2\sqrt{3}x + 3 = (x + \sqrt{3})^{2} > 0$ $\therefore x \neq -\sqrt{3}$ 인 모든 실수
- 44) 모든 실수
- $\Rightarrow -x^2 < x+1 \text{ odd } x^2+x+1>0$ 그런데 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.
- 45) 모든 실수
- $\Rightarrow x^2 4x + 5 > 0$ on $(x-2)^2 + 1 > 0$ 따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.
- 46) 해는 없다.
- $\Rightarrow x^2 x + 2 < 0 \text{ MeV} \left(x \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} < 0$ 따라서 부등식의 해는 없다.

47) 모든 실수

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = (-1)^2 - 3 = -2 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 1>0이므로 해는 모든 실수이다.

48) 해는 없다.

 $\Rightarrow 2x-4 > x^2$ of $|x| x^2 - 2x + 4 < 0$

그런데 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\geq 3$ 이므로 주어진 부 등식의 해는 없다.

49) 모든 실수

 $\Rightarrow -x^2 + 3x - 4 < 0$

$$x^{2}-3x+4>0, \left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}+\frac{7}{4}>0$$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

50) 해는 없다.

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = (-1)^2 - 4 \cdot 3 = -11 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 1>0이므로 해는 없다.

51) 모든 실수

 $\Rightarrow x^2 + 4x + 7 > 0$ of $(x+2)^2 + 3 > 0$ 따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

52) 해는 없다.

$$\implies x^2+3x+9 \leq 0 \text{ on } k \text{ } \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4} \leq 0$$

따라서 부등식의 해는 없다.

53) 모든 실수

 $\Rightarrow x^2 - 2x + 8 \ge 0$ 에서 $(x-1)^2 + 7 \ge 0$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

54) 해는 없다.

 $\Rightarrow -x^2-2x-2 > 0$ 에서

$$x^2 + 2x + 2 < 0$$
, $(x+1)^2 + 1 < 0$

따라서 부등식의 해는 없다.

55) 모든 실수

 $\Rightarrow 2x^2 - 4x + 3 \ge 0$ 에서

$$2(x^2 - 2x + 1) + 1 \ge 0 \quad \therefore 2(x - 1)^2 + 1 \ge 0$$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

56) 해는 없다.

 $\Rightarrow D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$

이때, x^2 의 계수는 2 > 0이므로 해는 없다.

57) 해는 없다.

 $\implies 4x^2 + 12x + 11 \le 0 \, \text{odd} \, \lambda \text{d}$

$$4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 2 \le 0 \quad \therefore 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2 \le 0$$

따라서 부등식의 해는 없다.

58) 해는 없다.

 $\Rightarrow -2x^2 \geq 3-2x$ 에서

$$-2x^2 + 2x - 3 \ge 0$$
, $2x^2 - 2x + 3 \le 0$

$$2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2} \le 0 \quad \therefore 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \le 0$$

따라서 부등식의 해는 없다

59) 모든 실수

ightharpoonup 이차방정식 $x^2+3x+4=0$ 의 판별식 D를 구하면

 $D=3^2-4\times1\times4=-7<0$

이때, x^2 의 계수는 1>0이므로 해는 모든 실수이다.

60) 해는 없다.

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 1>0이므로 해는 없다.

61) 모든 실수

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = (-2)^2 - 10 = -6 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 1>0이므로 해는 모든 실수이다.

62) 해는 없다.

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 3 > 0이므로 해는 없다.

63) 모든 실수

 $\Rightarrow x^2 - 4x + 5 \ge 0$

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 5 = -1 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 1>0이므로 해는 모든 실수이다.

64) 모든 실수

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 3 > 0$$

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2 \cdot 3 = -5 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 2 > 0이므로 해는 모든 실수이다.

65) 해는 없다.

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 3 \cdot 1 = -2 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 3>0이므로 해는 없다.

66) 해는 없다.

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = (-1)^2 - 3 \cdot 2 = -5 < 0$$

이때, x^2 의 계수는 3 > 0이므로 해는 없다.