단원 ISSUE

이 단원에서는 **충분(필요)조건, 필요충분조건을 판별하는 문제, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 합 또는 곱의 최솟값을 구하는 문제** 등이 자주 출제되며 충분조건과 필요조건에 대한 개념이 헷갈릴 수 있으므로 문제를 통한 정확한 개념 정립이 필요합니다.

평가문제

[스스로 마무리하기]

1. **모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{x^2+2axy+by^2}$이 항상 실수가 되도록 하는 실수 a, b의 조건은?**

① $a \le b^2$
② $a \ge b^2$
③ $b \le a^2$
④ $b \ge a^2$
⑤ $a = b$

[스스로 마무리하기]

2. **전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$에 대하여 $x \in U,\ y \in U$일 때, 다음 중 거짓인 명제는?**

① 모든 x에 대하여 $x+3<8$이다.
② 어떤 x에 대하여 $x^2-3>0$이다.
③ 어떤 x와 모든 y에 대하여 $x^2<y+1$이다.
④ 어떤 x, y에 대하여 $x^2+y^2<1$이다.
⑤ 모든 x,y에 대하여 $x^2+y^2<35$이다.

[스스로 확인하기]

3. **전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 중 조건과 그 조건을 만족하는 집합을 바르게 짝지은 것은?**

① $x^2-5x-6=0 \rightarrow \{1,6\}$
② x는 소수이다. $\rightarrow \{1,2,3,5\}$
③ $2x$는 짝수이다. $\rightarrow \{1,3,5\}$
④ $x \ne 2$이고 $1 \le x < 4$이다 $\rightarrow \{1,3\}$
⑤ x는 6의 약수이다. $\rightarrow \{1,2,3\}$

[스스로 확인하기]

4. **임의의 실수 x에 대하여 전체집합이 $U=\{k|x^2+2x+3=k\}$일 때, 조건 'k는 5이하의 자연수이다'의 진리집합은?**

① $\{1,2,3,4,5\}$
② $\{2,3,4,5\}$
③ $\{3,4,5\}$
④ $\{4,5\}$
⑤ $\{5\}$

[스스로 확인하기]

5. **다음은 조건 p와 그의 부정 $\sim p$를 각각 나타낸 것이다. 이 때, 바르게 짝지어진 것은? (단, x,y는 실수)**

① $x=-1$ 또는 $x=3 \rightarrow x \ne -1$ 또는 $x \ne 3$
② $x>2 \rightarrow x<2$
③ $-2<x<3 \rightarrow x \ge 3$이고 $x \le -2$
④ $x^2 \le 0 \rightarrow x^2 \ge 0$
⑤ $xy=0 \rightarrow x \ne 0$이고 $y \ne 0$

[스스로 확인하기]

6. **두 조건 $p: a<x<2$, $q: x \geq -3$에 대하여 명제 $p \to q$가 거짓이 되게 하는 a의 값이 될 수 있는 것은?**

① -4 ② -3
③ -2.5 ④ -2
⑤ -1

[스스로 확인하기]

7. **x, y가 실수일 때, 조건 $x^2+y^2=0$의 부정으로 옳은 것은?**

① x, y는 다르다.
② x, y는 모두 0이다
③ x, y는 모두 0이 아니다
④ x, y는 적어도 하나는 0이다
⑤ x, y는 적어도 하나는 0이 아니다

[스스로 마무리하기]

8. **조건 p: $x^2-ax+3a<0$, q: $x^2-2x<0$에 대하여 명제 $q \to p$가 참일 때, a의 값의 범위는?**

① $a \leq -4$ ② $-4 \leq a \leq -2$
③ $a \leq -2$ ④ $-4 \leq a \leq 0$
⑤ $a \leq 0$

[스스로 확인하기]

9. **두 조건**
$p: a+7 \leq x \leq 5$, $q: 3<x<-4a+1$
에 대하여 명제 $p \to q$가 참이 되게 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개
③ 3개 ④ 4개
⑤ 5개

[스스로 마무리하기]

10. **$x>a$는 $-2<x<0$ 또는 $x>5$가 되기 위한 필요조건이고 $x>b$는 충분조건일 때, 실수 a, b의 값의 범위는?**

① $a<-2,\ 0<b<5$ ② $a \leq -2,\ 0 \leq b \leq 5$
③ $a \geq -2,\ b \leq 5$ ④ $a<-2,\ b>5$
⑤ $a \leq -2,\ b \geq 5$

[스스로 확인하기]

11. **명제 '$-1<x<3$이면 $x \geq k$이다'의 대우가 참이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?**

① -10 ② -6
③ -5 ④ -3
⑤ -1

[스스로 확인하기]

12. **실수 x에 대한 두 조건 p, q와 u: '실수 x는 $x^2+1>0$ 이다.' 에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 참인 것은?**

① $p \to q$
② p또는 q이면 u가 아니다.
③ p중 q가 아닌 실수 x는 존재하지 않는다.
④ p 또는 q가 아닌 실수 x는 u이다.
⑤ p가 아닌 것들 중 q가 아닌 실수 x는 존재하지 않는다.

[스스로 확인하기]

13. **다음 명제 중에서 명제와 그 역이 모두 참인 것은?**

① 삼각형 ABC가 정삼각형이면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다.
② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
③ 두 실수 x, y에 대하여 $xy>0$이면 $x>0, y>0$이다.
④ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이면 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이다.
⑤ 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이면 $A \cup B=B$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

14. 조건 q가 성립하기 위한 조건 p는 필요조건이지만 충분조건은 아니다. 전체집합 U에서의 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, $P^C - Q^C =$(가) , $P \cup Q^C =$(나) 인 관계가 성립한다. 이 때 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 쓴 것은?

① $\varnothing, \varnothing$　② $\varnothing, U$
③ $U, \varnothing$　④ U, U
⑤ P^C, Q^C

[스스로 확인하기]

15. 세 조건 $p: x \neq 2$, $q: x^2 + ax + 4 \neq 0$, $r: x^2 - 2x + b \neq 0$에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건이고, r은 p이기 위한 충분조건일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다)

① -4　② -2
③ 0　④ 1
⑤ 5

[스스로 확인하기]

16. 전제집합 U에서 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, $P \cap Q^C = \varnothing, Q \cap R = Q$가 성립한다. 다음 중 항상 옳은 것은?

① q는 p이기 위한 충분조건이다.
② $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
③ r는 p이기 위한 충분조건이다.
④ q는 r이기 위한 필요조건이다.
⑤ $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

[스스로 마무리하기]

17. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 (가), (나)에 각각 들어갈 것으로 알맞은 것은?

$(A \cup B) \cap A^C = B$는 $A \cap B \neq \varnothing$이기 위한 (가)조건이고, $A^C = U$이기 위한 (나)조건이다.

① 필요, 필요충분
② 충분, 필요충분
③ 필요, 충분
④ 필요충분, 필요
⑤ 필요충분, 충분

[스스로 마무리하기]

18. a, b, c가 실수일 때, p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $p: (a-c)^2 + (a-b)^2 = 0$, $q: a = b = c$

ㄴ. $p: a \neq 0$, $q: \dfrac{a}{|a|} = 1$

ㄷ. $p: a = 2$, $c = 1$, $q: (a-3)^2 + (c+1)^2 = 5$

① ㄱ　② ㄴ
③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

[스스로 마무리하기]

19. $x^2 + y^2 = 1$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $3x + 4y$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M - m$의 값은?

① 5　② 10
③ 13　④ 17
⑤ 20

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 마무리하기]

20. $x>0,\ y>0$**일 때,** $\left(2x+\dfrac{1}{2y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$**의 최솟값은?**

① $\dfrac{5}{2}$　② 3　③ $\dfrac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\dfrac{9}{2}$

[스스로 마무리하기]

21. 다음은 n**이 자연수일 때, "** $\sqrt{n^2+1}$ **은 유리수가 아니다"를 증명한 것이다. (가), (나)에 각각 들어갈 것으로 옳은 것은?**

> $\sqrt{n^2+1}$ 이 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{n^2+1}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 서로소인 자연수) 로
> 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하면
> $n^2+1=\dfrac{a^2}{b^2}$ $\cdots\cdots$ ㉠
> ㉠의 양변은 자연수이고, a, b는 서로소이므로
> $b^2=1$ $\cdots\cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하고 변형하면
> $a^2-n^2=1,\ (a-n)\boxed{(가)}=1$
> $\therefore a-n=1,\ \boxed{(가)}=1$ 또는 $a-n=-1,\ \boxed{(가)}=-1$
> 이때, 어느 경우에나 $\boxed{(나)}$라는 가정에 모순이므로
> $\sqrt{n^2+1}$ 은 유리수가 아니다.

	(가)	(나)
①	$a+n$	n, a 가 자연수
②	$a-n$	n, a 가 자연수
③	$a+n,$	a, b 가 서로소
④	$a-n,$	n, a 가 서로소
⑤	$a+n,$	a, b 가 자연수

[스스로 확인하기]

22. 다음은 명제 'n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'를 증명한 것이다. $\boxed{}$ 안에 공통으로 들어갈 말로 알맞은 것은?

> 주어진 명제의 대우 'n이 $\boxed{}$이면 n^2도 $\boxed{}$이다.'가
> 참임을 증명하면 된다. n이 짝수이면
> $n=2k$ (k는 자연수) 로 나타낼 수 있고,
> $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$
> 즉, n^2은 2의 배수이므로 짝수이다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제
> 'n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'도 성립한다.

① 소수　② 합성수　③ 짝수　④ 홀수　⑤ 짝수 또는 홀수

[스스로 마무리하기]

23. 다음은 자연수 n에 대하여 명제 'n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.' 임을 증명한 것이다. $(1)\sim(3)$에 들어갈 말을 차례대로 적은 것은?

> 주어진 명제의 대우는
> 'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'
> 이므로, 이것이 참임을 보이면 된다. n이 3의 배수가
> 아니면
> $n=3k+1, n=3k+2$ (k는 0 또는 $\boxed{(1)}$)로 나타낼 수 있다.
> (i) $n=3k+1$일 때,
> $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$
> $=3(3k^2+2k)+\boxed{(2)}$이므로
> $\boxed{(3)}$은 3의 배수가 아니다.
> (ii) $n=3k+2$일 때,
> $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$
> $=3(3k^2+4k+1)+\boxed{(2)}$이므로 3의 배수가 아니다.
> (i), (ii)에서 n이 3의 배수가 아니면
> n^2도 3의 배수가 아니다.

① 정수, $1, n$　② 유리수, $1, n$　③ 실수 $1, 1$　④ 자연수, $1, n^2$　⑤ 소수, $1, n^2$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

24. **다음은 연속된 홀수의 곱은 3의 배수임을 증명하는 과정이다.**

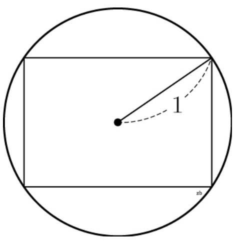
<증명>
연속된 세 홀수의 곱 P를 $P=(2k-1)(2k+1)(2k+3)$ (k는 정수)라 하고, P가 3의 배수가 아니라고 가정하자. 이때, 정수 k는 적당한 정수 m에 대하여 $3m, 3m+1, 3m+2$ 중 어느 하나로 나타낼 수 있다. 그런데 $k=3m$이면 $\boxed{\text{(가)}}$이 3의 배수이고, $k=3m+1$이면 $\boxed{\text{(나)}}$이 3의 배수이고 $k=3m+2$이면 $\boxed{\text{(다)}}$이 3의 배수이므로 임의의 정수 k에 대하여 P는 3으로 나누어 떨어진다. 따라서 가정에 모순이므로 연속된 세 홀수의 곱은 3의 배수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$2k-1$	$2k+1$	$2k+3$
②	$2k-1$	$2k+3$	$2k+1$
③	$2k+1$	$2k+3$	$2k-1$
④	$2k+3$	$2k-1$	$2k+1$
⑤	$2k+3$	$2k+1$	$2k-1$

[스스로 확인하기]

25. **다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 대하여 이 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?**



① 5　② 10
③ 3　④ 17
⑤ 2

[스스로 확인하기]

26. **임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2+y^2+2xy+ax+4y+b \ge 0$이 항상 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?**

① $a=4, b=4$　② $a=4, b \le 4$
③ $a=4, b \ge 4$　④ $a \ge 4, b=4$
⑤ $a \le 4, b=4$

[스스로 마무리하기]

27. **함수 $y=(x-1)+\dfrac{4}{(x-1)}$위의 점 $P(x,y)$에 대하여 y값이 될 수 없는 것은?**

① -4　② -2
③ 4　④ 8
⑤ 12

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $\sqrt{x^2+2axy+by^2}$가 모든 x,y에 대하여 실수이려면 모든 x,y에 대하여 $x^2+2axy+by^2 \geq 0$이다.

즉, 모든 x에 대하여 $x^2+2axy+by^2 \geq 0$이어야 하므로 x에 관하여 정리한 이차방정식

$x^2+2(ay)x+by^2=0$

의 판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore \frac{D}{4}=(ax)^2-by^2 \leq 0$

$\therefore (a^2-b)y^2 \leq 0$

모든 실수 y에 대하여 $y^2 \geq 0$이므로

$a^2-b \leq 0 \quad \therefore a^2 \leq b$

2) [정답] ④

[해설] ① $x=1,2,3,4$일 때, $x+3<8$이므로 모든 x에 대하여 성립한다. $\therefore$참

② $x=2,3,4$일 때, $x^2-3>0$이므로 어떤 x에 대하여 성립한다. $\therefore$참

③ $x=1$일 때, $1<y+1$에서 $y>0$이므로 모든 y에 대하여 성립한다. $\therefore$참

④ 모든 x,y에 대하여 $x^2+y^2>1$이다. $\therefore$거짓

⑤ $x=4$, $y=4$일 때에도 $x^2+y^2<35$ 이므로 모든 x,y에 대하여 성립한다. $\therefore$참

3) [정답] ④

[해설] ① $x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow (x-6)(x+1)=0$

따라서, 조건을 만족하는 집합은 $\{6\}$이다.

② 집합 U의 원소 중 소수는 $2,3,5$이다.

따라서 조건을 만족하는 집합은 $\{2,3,5\}$이다.

③ $2x$가 짝수가 되도록 하는 x의 값은 $1,2,3,4,5,6$이다.

따라서 조건을 만족하는 집합은 $\{1,2,3,4,5,6\}$이다.

⑤ 6의 약수는 $1,2,3,6$이므로 조건을 만족하는 집합은 $\{1,2,3,6\}$이다.

4) [정답] ②

[해설] 전체집합이 $U=\{k|x^2+2x+3=k\}$ 이고

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ 이므로

임의의 실수 x에 대하여 $k \geq 2$이다.

따라서 $U=\{k|k \geq 2\}$ 이고,

조건 'k는 5이하의 자연수이다' 의 진리집합은 $\{2,3,4,5\}$ 이다.

5) [정답] ⑤

[해설] ① $\sim p : x \neq -1$ 이고 $x \neq 3$

② $\sim p : x \leq 2$

③ $\sim p : x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

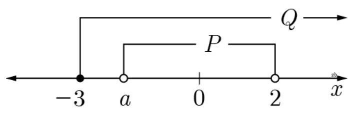
④ $\sim p : x^2>0$

⑤ $\sim p : xy=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$

따라서 $\sim p$는 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다.

6) [정답] ①

[해설] 두 조건 p,q를 만족하는 집합을 각각 P,Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위해서는 $P \subset Q$이어야 한다. 즉, $p : a<x<2$, $q : x \geq -3$이므로 다음 그림에서



$-3 \leq a<0$ ($\because a$는 음수)이고,

따라서 보기 중 주어진 명제가 거짓이 되도록 하는 a의 값은 -3보다 작은 -4이다.

7) [정답] ⑤

[해설] 실수의 제곱은 0보다 같거나 크므로 x,y가 실수일 때

$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ 이고 $y=0$

따라서 $x^2+y^2=0$의 부정은

'x,y 중 적어도 하나는 0이 아니다' 이다.

8) [정답] ①

[해설] 명제 $q \rightarrow p$가 참이므로

$\{x|x^2-ax+3a<0\} \supset \{x|x^2-2x<0\}$,

즉 $\{x|x^2-ax+3a<0\} \supset \{x|0<x<2\}$

이차방정식 $x^2-ax+3a=0$의 두 실근을 α, β ($\alpha<\beta$) 라 하면 $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 2$ 이어야 한다.

즉, $f(x)=x^2-ax+3a$로 놓으면

$f(0) \leq 0$, $f(2) \leq 0$

(i) $f(0)=3a \leq 0 \quad \therefore a \leq 0$

(ii) $f(2)=4-2a+3a \leq 0 \quad \therefore a \leq -4$

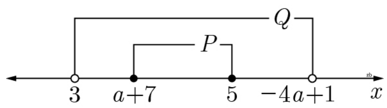
따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 a의 값의 범위는

$a \leq -4$

9) [정답] ②

[해설] 두 조건 p,q를 만족하는 집합을 각각 P,Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$이어야 한다.

즉, $p : a+7 \leq x \leq 5$, $q : 3<x<-4a+1$이므로



위의 그림에서 $a+7>3$, $-4a+1>5$

$\therefore -4<a<-1$

따라서 만족하는 정수 a의 값은

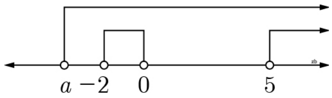
$-3,-2$의 2개이다.

10) [정답] ⑤

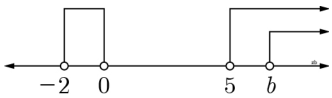
[해설] $x>a$는 $-2<x<0$ 또는 $x>5$가 되기 위한 필요조건이므로 명제 '$-2<x<0$ 또는

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$x>5$이면 $x>a$이다.'가 참이어야 한다.
즉, 다음 그림에서 $a\le -2$ 이고

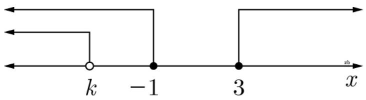


$x>b$는 $-2<x<0$ 또는 $x>5$가
되기 위한 충분조건이므로 명제
'$x>b$ 이면 $-2<x<0$ 또는 $x>5$이다'가
참이어야 한다.
즉 다음 그림에서 $b\ge 5$,



따라서 $a\le -2$이고 $b\ge 5$이다.

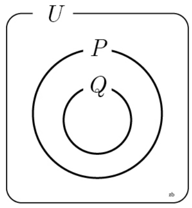
11) [정답] ⑤
[해설] 명제 '$-1<x<3$이면 $x\ge k$이다'의 대우는
'$x<k$이면 $x\le -1$또는 $x\ge 3$이다'이고 이것이
참이 되기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.
즉, $k\le -1$이므로 정수 k의 최댓값은 -1이다.



12) [정답] ④
[해설] p는 q이기 위한 충분조건이므로 $q\to p$
① $q\to p$이지만 $p\to q$인지는 알 수 없다.
② p또는 q이면 u이다.
③ $q\to p$이므로 p중 q가 아닌 실수 x가
존재할 수 있다.
⑤ p가 아닌 것들 중 q가 아닌 실수 x가
존재할 수 있다.

13) [정답] ⑤
[해설] ① 명제 : 삼각형 ABC가 정삼각형이면
$\overline{AB}=\overline{AC}$이다.(참)
역 : $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 삼각형 ABC가
정삼각형이다. (거짓)
(반례) : $\overline{AB}=\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$인 경우 $\overline{AB}=\overline{AC}$
이지만 삼각형 ABC는 정삼각형이 아닌
이등변삼각형이다.
② 명제 : 두 직사각형의 넓이가 같으면
두 직사각형은 합동이다. (거짓)
(반례) 한 변의 길이가 4인 정사각형과 가로,
세로의 길이가 각각 2,8인 직사각형의 넓이는
같지만, 두 직사각형은 합동이 아니다.
역 : 두 직사각형이 합동이면 두 직사각형의
넓이가 같다.(참)
③ 명제 : 두 실수 x,y에 대하여 $xy>0$이면
$x>0$이고 $y>0$ 이다. (거짓)
(반례) : $x=-1$, $y=-1$이면 $xy>0$이지만
$x<0$이고, $y<0$이다.
역 : $x>0$이고 $y>0$이면 $xy>0$이다. (참)
④ 명제 : $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$이면
$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이다. (참)
역 : $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ 이면
$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$이다. (거짓)
(반례) $\triangle ABC$가 한 변의 길이가 1인 정삼각형
이고 $\triangle DEF$가 한 변의 길이가 2인 정삼각형
이면 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ 이지만 합동이 아니다.
⑤ 명제 : 두 집합 A,B에 대하여 $A\subset B$이면
$A\cup B=B$이다. (참)
역 : $A\cup B=B$이면 $A\subset B$이다. (참)
따라서 명제와 그 역이 모두 참인 것은 ⑤이다.

14) [정답] ②
[해설] p는 q이기 위한 필요조건이므로
$Q\subset P \Rightarrow P^C\subset Q^C$, $P^C-Q^C=\varnothing$
또한, $Q-P=\varnothing$이므로
$P\cup Q^C=Q^C\cup P=(Q\cap P^C)^C$
$=(Q-P)^C=\varnothing^C=U$



15) [정답] ①
[해설] (i) p는 q이기 위한 필요조건이므로
$q\to p$ 즉 $\sim p\to\sim q$ 즉, $x=2$가
이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 근이므로
$4+2a+4=0$, $\therefore a=-4$
(ii) r은 p이기 위한 충분조건이므로
$r\to p$ 즉 $\sim p\to\sim r$
즉, $x=2$가 이차방정식 $x^2-2x+b=0$의
근이므로 $4-4+b=0$, $\therefore b=0$
(i), (ii)에서 $a+b=(-4)+0=-4$

16) [정답] ②
[해설] $P\cap Q^C=P-Q=\varnothing$ 에서 $P\subset Q$
$Q\cap R=Q$ 에서 $Q\subset R$, $\therefore P\subset Q\subset R$
① $p\Rightarrow q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이다.
② $q\Rightarrow r$이므로 $\sim r\Rightarrow\sim q$이다.
따라서, $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
③ $p\Rightarrow r$이므로 r는 p이기 위한 필요조건이다.
④ $q\Rightarrow r$이므로 q는 r이기 위한 충분조건이다.
⑤ $p\Rightarrow r$이므로$\sim r\Rightarrow\sim p$이다.
따라서, $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
그러므로 옳은 것은 ②이다.

17) [정답] ④
[해설] $(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$
$=\varnothing\cup(B\cap A^C)=B\cap A^C=B-A$
즉, $B-A=B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

또한 $A^C=U$에서 $A=\varnothing$이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ $A=\varnothing$

따라서 $(A\cup B)\cap A^C=B$ 는 $A\cap B=\varnothing$

이기 위한 필요충분조건이고,

$A^C=U$ 이기 위한 필요조건이다.

18) [정답] ②

[해설] ㄱ. $p:(a-c)^2+(a-b)^2=0$는 $q:a=b=c$

이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $p:a\neq 0$는 $q:\dfrac{a}{|a|}=1$ 이기 위한

필요조건이고 충분조건은 아니다.

ㄷ. $p:a=2,\ c=1$는 $q:(a-3)^2+(c+1)^2=5$

이기 위한 충분조건이다.

19) [정답] ②

[해설] x,y는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에

의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2,\ (3x+4y)^2\leq 25$

$\therefore -5\leq 3x+4y\leq 5,$

(단, 등호는 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$일 때 성립)

따라서 $M=5, m=-5$이므로

$M-m=5-(-5)=10$

20) [정답] ⑤

[해설] $\left(2x+\dfrac{1}{2y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$

$=2xy+2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2xy}=2xy+\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{5}{2}$

$2xy>0,\ \dfrac{1}{2xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2xy+\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{5}{2}\geq 2\sqrt{2xy\times\dfrac{1}{2xy}}+\dfrac{5}{2}$

$=2\times 1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

(단, 등호는 $2xy=\dfrac{1}{2xy}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

21) [정답] ①

[해설] $a^2-n^2=1,\ (a-n)(a+n)=1$

$\therefore a-n=1,\ a+n=1$

또는 $a-n=-1,\ a+n=-1$

이때 어느 경우에나 이러한 자연수 n,a가

존재하지 않고, 이는 n,a가 자연수라는 가정에

모순이므로 $\sqrt{n^2+1}$은 유리수가 아니다.

22) [정답] ③

[해설] 주어진 명제의 대우 'n이 짝수이면 n^2도

짝수이다.'가 참임을 증명하면 된다.

n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수

있고, $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$

즉, n^2은 2의 배수이므로 짝수이다.

따라서, 주어진 명제의 대우가 참이므로

명제 'n^2이 홀수이면 n도 홀수이다'도 성립한다.

23) [정답] ④

[해설] 주어진 명제의 대우는

'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가

아니다.' 이므로 이것이 참임을 보이면 된다.

n이 3의 배수가 아니면

$n=3k+1,\ n=3k+2$ (k는 0 또는 자연수)로

나타낼 수 있다.

(i) $n=3k+1$일 때,

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=3k+2$일 때,

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

이므로 3의 배수가 아니다.

(i), (ii)에서 n이 3의 배수가 아니면

n^2도 3의 배수가 아니다.

24) [정답] ⑤

[해설] (i) $k=3m$이면

$P=(2\times 3m-1)(2\times 3m+1)(2\times 3m+3)$

$=(6m-1)(6m+1)(6m+3)$

따라서 $k=3m$이면 $(2k+3)$이 3의 배수이다.

(ii) $k=3m+1$이면

$P=\{(2(3m+1)-1\}$

$\{(2(3m+1)+1\}\{(2(3m+1)+3\}$

$=(6m+1)(6m+3)(6m+5)$

따라서 $k=3m+1$이면 $(2k+1)$이 3의 배수이다.

(iii) $k=3m+2$이면

$P=\{(2(3m+2)-1\}$

$\{(2(3m+2)+1\}\{(2(3m+2)+3\}$

$=(6m+3)(6m+5)(6m+7)$

따라서 $k=3m+2$이면 $(2k-1)$이 3의 배수이다.

$\therefore$(가) $2k+3$ (나) $2k+1$ (다) $2k-1$

25) [정답] ⑤

[해설] 직사각형의 가로의 길이를 $2x$,

세로의 길이를 $2y$라 하면

피타고라스의 정리에 의해 $(2x)^2+(2y)^2=2^2$

즉, $x^2+y^2=1$이 성립한다.

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$에서 $1\geq 2xy,$

$\therefore xy\leq\dfrac{1}{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

따라서 직사각형의 넓이 $4xy$의 최댓값은 2이다.

26) [정답] ③

[해설] 주어진 부등식을 x에 대하여 정리하면

$x^2+(2y+a)x+y^2+4y+b\geq 0$

이 부등식이 x에 대한 절대부등식이어야 하므로

이차방정식 $x^2+(2y+a)x+y^2+4y+b=0$의
판별식을 D라 할 때, $D \le 0$이어야 한다.
즉, $D=(2y+a)^2-4(y^2+4y+b) \le 0$에서
$4y^2+4ay+a^2-4y^2-16y-4b \le 0$
$4(a-4)y+a^2-4b \le 0$ ⋯⋯ ㉠
이때, ㉠이 임의의 y에 대하여 성립해야 하므로
$a=4$이고 $a^2-4b \le 0$
$4^2-4b \le 0$에서 $16 \le 4b$ $\therefore b \ge 4$
즉, $a=4$, $b \ge 4$이다.

27) [정답] ②

[해설] $y=(x-1)+\dfrac{4}{(x-1)}$는
$x>1$일 때 산술, 기하 평균의 대소관계에 의해
$(x-1)+\dfrac{4}{(x-1)} \ge 4$이고,
$x<1$일 때 산술, 기하 평균의 대소관계에 의해
$(1-x)+\dfrac{4}{(1-x)} \ge 4$이므로
임의의 실수 x에 대하여
$|(x-1)+\dfrac{4}{(x-1)}| \ge 4$ 이다.
따라서 보기 중 y의 값이 될 수 없는 것은
-2이다.