01 함수의 최댓값과 최솟값

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$가 연속이면 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 구간의 양 끝의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$의 크기를 비교하여 그 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

◪ 주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

1. $f(x)=x^3-3x^2+1,\quad [-2,\ 3]$

2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+7}{x-3},\quad [4, 9]$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1},\quad [2,\ 5]$

4. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1},\quad [-2,\ 2]$

5. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1},\quad [-2,\ 3]$

6. $f(x)=x\sqrt{6-x^2},\quad [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

7. $f(x)=x^2+\sqrt{1-x^2},\quad [0,\ 1]$

8. $f(x)=x+\sqrt{1-x^2},\quad [0, 1]$

9. $f(x)=x\sqrt{1-x^2},\quad [-1, 1]$

10. $f(x)=x+2\cos x,\quad [0, \pi]$

11. $f(x)=x+2\cos x,\quad \left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$

12. $f(x)=\sin x-x\cos x,\quad [0,\ 2\pi]$

13. $f(x)=\sin x(1+\cos x)$, $[0, 2\pi]$

14. $f(x)=xe^{-x}$, $[-1, 3]$

15. $f(x)=(x^2-2)e^{-2x}$, $[-3,\ 3]$

16. $f(x)=(x^2-3)e^{x}$, $[-2,\ 2]$

17. $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, $[-1,\ 2]$

18. $f(x)=e^{2x}-2e^{x}-4x$, $[0,\ \ln 4]$

19. $f(x)=(x^2-x-1)e^{x}$, $[-1,\ 2]$

20. $f(x)=e^{x}\sin x$, $[0,\ \pi]$

21. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $[1, 3e]$

22. $f(x)=3x-x\ln x$, $[1,\ e^3]$

◪ 주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M+m$의 값을 구하여라.

23. $f(x)=x^4-4x^3+1$, $[-1,\ 4]$

24. $f(x)=x+2\sin x$, $[0,\ \pi]$

25. $f(x)=2xe^{-x}$, $[-1,\ 2]$

26. $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$, $[0,\ 2]$

27. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $[-1,\ 3]$

28. $f(x)=(1+\cos x)\sin x$, $[\pi,\ 2\pi]$

29. $f(x)=2\cos x+\cos 2x$, $[0,\ \pi]$

30. $f(x)=\dfrac{x}{2}+\sin x$, $[0,\ \pi]$

31. $f(x)=x+\ln x$, $[e,\ e^2]$

◪ 다음 물음에 답하여라.

32. 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ $(0\le x\le a)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이고 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이 되도록 하는 양수 a의 최댓값을 구하여라.

33. 구간 $0<x\le e^2$에서 함수 $y=x\ln x+2x$의 최댓값을 m, 최솟값을 n이라고 할 때, mn의 값을 구하여라.

34. 함수 $f(x)=x\ln x-2x+k$의 최솟값이 0일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

35. 함수 $f(x)=x\ln x-2x+a$의 최솟값이 3일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

36. 함수 $f(x)=x\ln x+x+a(x>0)$의 최솟값이 1일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

37. 구간 $-2\le x\le 1$에서 함수 $f(x)=xe^x$의 최댓값을 m, 최솟값을 n이라고 할 때, mn의 값을 구하여라.

38. 구간 $\frac{1}{e^2} \le x \le e^2$에서 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$의 최댓값을 m, 최솟값을 n이라고 할 때, mn의 값을 구하여라.

39. 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$는 $x=\alpha$일 때, 최솟값 m을 가진다. $\alpha+m$의 값을 구하여라.

40. 구간 $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $f(x)=\sin 2x+2\cos x$의 최댓값을 m, 최솟값을 n이라고 할 때, $m-n$의 값을 구하여라.

41. 함수 $f(x)=x\ln x-\frac{x}{2}+a$의 최솟값이 0일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

42. 함수 $f(x)=a(x-\sin 2x)$의 최댓값이 π일 때, 양의 상수 a의 값을 구하여라. (단, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$)

43. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 $f(x)=ax-a\sin 2x$의 최댓값이 π일 때, 최솟값을 구하여라.(단, a는 $a>0$인 상수)

44. $-2 \le x \le 2$에서 $f(x)=x^2e^{ax}$의 최댓값이 $4e^4$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.(단, a는 $a>1$인 정수)

45. 함수 $f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$은 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 이 때, $a+3^b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

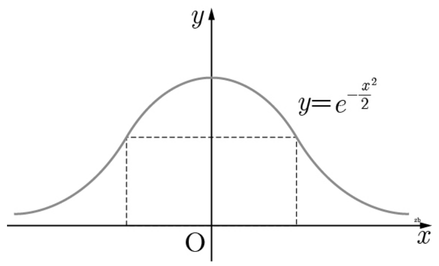
46. 함수 $f(x)=9x^{2-\log_3 a}(x>1)$은 $x=a$일 때 최댓값 M을 가진다. $a+M$의 값을 구하여라.

47. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2$에 대하여 $y=(f\circ f)(x)$ $(0 \le x \le 3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

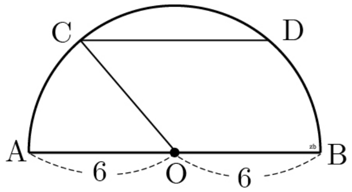
02 함수의 최댓값과 최솟값의 활용

◪ 다음 물음에 답하여라.

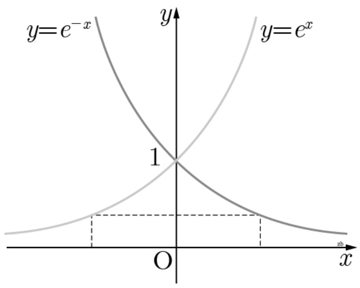
48. 그림과 같이 두 꼭짓점은 x축 위에 있고 다른 두 꼭짓점은 곡선 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 위에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



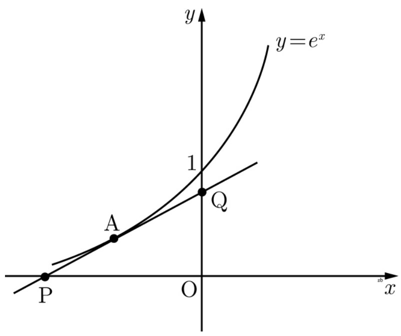
49. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 12인 반원에서 지름에 평행한 현 CD를 그을 때 생기는 도형 OBDC의 넓이의 최댓값을 구하여라.



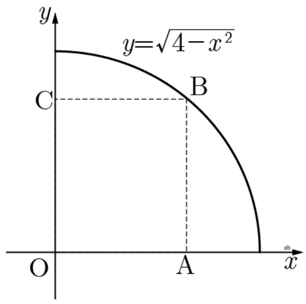
50. 그림과 같이 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 위에 두 꼭짓점이 각각 놓여 있고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



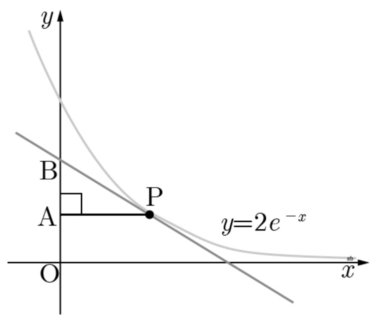
51. 다음 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 점 A에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 A는 제2사분면 위의 점이다.)



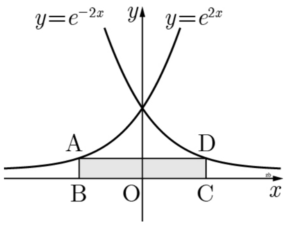
52. 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(x\ge 0)$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형 OABC가 있다. 이 때, 점 A가 x축 위의 점일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.(단, O는 원점이다.)



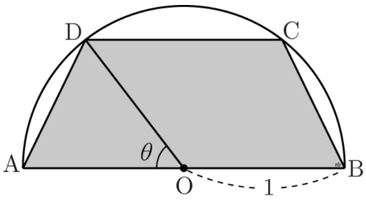
53. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$ $(t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값을 구하여라.



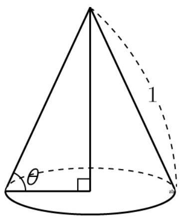
54. 그림과 같이 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=e^{-2x}$ 위에 두 꼭짓점이 각각 놓여 있고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형 $ABCD$가 있을 때, 직사각형 $ABCD$의 넓이의 최댓값을 구하여라.



55. 다음 그림은 반지름의 길이가 1인 반원에서 지름 AB를 한 변으로 하고 반원에 내접하는 등변사다리꼴 ABCD를 나타낸 것이다. $\angle\mathrm{AOD}=\theta$라고 할 때, 등변사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$의 최댓값을 구하여라.



56. 모선의 길이가 1이고, 밑면과 모선 사이의 각이 θ인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 부피가 최대가 될 때, 원뿔의 높이를 구하여라.



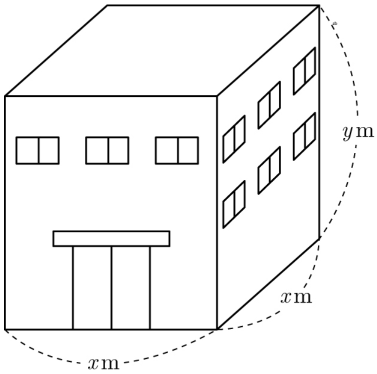
57. 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=-x+3$의 교점을 A, B라 하자. 점 P가 포물선 위의 점 A에서 B까지 움직일 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하여라.

58. 어느 회사에서 만든 상품의 가격을 1톤에 x만원으로 정하면 $\sqrt{100-x}$ 톤이 팔린다고 한다. 이 상품 1톤을 만드는 데 4만 원이 들 때, 이 상품을 팔아서 생기는 최대 이익을 구하여라.

59. 어느 회사에서 만든 상품의 가격을 $1kg$에 x만 원으로 정하면 $\sqrt{50-x}\,kg$이 팔린다고 한다. 이 상품 $1kg$을 만드는 데 2만 원이 들 때, 이 상품을 팔아서 생기는 최대 이익을 구하여라. (단, $0<x<50$)

60. 크기가 다른 직사각형 모양의 철판 두 장을 구입하여 한 장은 원 모양으로 오려 밑면으로 사용하고, 나머지 한 장은 옆면으로 하여 원기둥 모양의 물통을 만들려고 한다. 철판의 가격이 $1m^2$당 만 원일 때, 부피가 $108m^3$인 물통을 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용을 구하여라.

61. 다음 그림과 같이 바닥이 한 변의 길이가 $x\,m$인 정사각형이고 높이가 $y\,m$인 직육면체 모양의 창고를 만들려고 한다. 창고의 바닥과 천장을 만드는 데 $1\,m^2$당 4만원, 옆면을 만드는 데 $1\,m^2$당 2만원의 비용이 든다고 한다. 이때 72만원으로 만들 수 있는 창고의 부피의 최댓값을 구하여라.



62. 어떤 약을 복용하면 혈액 속에 들어간 약의 농도는 시간에 따라 변하게 된다. 약을 복용한지 t시간 후의 혈액 속 주사약의 농도를 $C(t)$라고 할 때, $C(t)=te^{-\frac{1}{2}t}$가 성립한다고 한다. 혈액속의 약의 농도가 가장 높을 때를 m, 그 때의 농도를 n이라 할 때, 두 상수의 곱 mn의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 최댓값 1, 최솟값 -19

⇨ $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-19	↗	1	↘	-3	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=3$에서 최댓값 1, $x=-2$에서 최솟값 -19를 갖는다.

2) 최댓값: 35, 최솟값: 19

⇨ $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x-3)-(x^2+3x+7)}{(x-3)^2}$

$=\dfrac{x^2-6x-16}{(x-3)^2}=\dfrac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=8(\because 4\le x\le 9)$

x	4	$\cdots$	8	$\cdots$	9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	35	↘	19	↗	$\dfrac{115}{6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 35, $x=8$에서 최솟값 19를 갖는다.

3) 최댓값: 8, 최솟값: 7

⇨ $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)+4}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=3(\because 2\le x\le 5)$

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	7	↗	8

극솟값은 $f(3)=7$, 양 끝값은 $f(2)=8$, $f(5)=8$

$\therefore$ 최댓값 : 8, 최솟값 : 7

4) 최댓값 1, 최솟값 $-\dfrac{1}{3}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{2}{7}$	↘	$-\dfrac{1}{3}$	↗	1	↘	$\dfrac{2}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1, $x=-1$에서 최솟값 $-\dfrac{1}{3}$를 갖는다.

5) 최댓값: 1, 최솟값: $-\dfrac{1}{3}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=-\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{2}{7}$	↘	$-\dfrac{1}{3}$	↗	1	↘	$\dfrac{3}{7}$

극댓값은 $f(1)=1$, 극솟값은 $f(-1)=-\dfrac{1}{3}$

양 끝값은 $f(-2)=-\dfrac{2}{7}$, $f(3)=\dfrac{3}{7}$

$\therefore$ 최댓값 : 1, 최솟값 : $-\dfrac{1}{3}$

6) 최댓값: 3, 최솟값: -3

⇨ $f'(x)=\sqrt{6-x^2}+x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{6-x^2}}=\dfrac{6-2x^2}{\sqrt{6-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-3	↗	3	↘	0

극댓값은 $f(\sqrt{3})=3$, 극솟값은 $f(-\sqrt{3})=-3$

양 끝값은 $f(-\sqrt{6})=0$, $f(\sqrt{6})=0$

$\therefore$ 최댓값 : 3, 최솟값 : -3

7) 최댓값 $\dfrac{5}{4}$, 최솟값 1

⇨ $f'(x)=2x-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{5}{4}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{5}{4}$,

$x=0$ 또는 $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

8) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: 1

⇨ $f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $2x^2=1$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\because 0\le x\le 1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

극댓값은 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$, 양 끝값은

$f(0)=f(1)=1$

$\therefore$ 최댓값 : $\sqrt{2}$, 최솟값 : 1

9) 최댓값: $\dfrac{1}{2}$, 최솟값: $-\dfrac{1}{2}$

⇨ $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $1-2x^2=0$

$\therefore x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}$,

$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

10) 최댓값: $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 최솟값: $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi(\because 0\le x\le\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\pi-2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$에서 최댓값 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$,

$x=\dfrac{5}{6}\pi$에서 최솟값 $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

11) 최댓값: $\dfrac{\pi}{2}$, 최솟값: $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=\dfrac{5}{6}\pi\left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\pi-2$

극솟값은 $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

양 끝값은 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, $f(\pi)=\pi-2$

$\therefore$ 최댓값 : $\dfrac{\pi}{2}$, 최솟값 : $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

12) 최댓값: π, 최솟값: -2π

⇨ $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

극댓값은 $f(\pi)=\pi$

양 끝값은 $f(0)=0$, $f(2\pi)=-2\pi$

$\therefore$ 최댓값 : π, 최솟값 : -2π

13) 최댓값: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값: $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

⇨ $f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$
$=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$
$=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$
$=2\cos^2 x+\cos x-1$
$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$,

$x=\dfrac{5}{3}\pi$에서 최솟값 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

14) 최댓값: $\dfrac{1}{e}$, 최솟값: $-e$

⇨ $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-e$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{e^3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=-1$에서 최솟값 $-e$를 갖는다.

15) 최댓값: $7e^6$, 최솟값: $-e^2$

⇨ $f'(x)=2xe^{-2x}-2(x^2-2)e^{-2x}$
$=-2(x^2-x-2)e^{-2x}$
$=-2(x+1)(x-2)e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$7e^6$	↘	$-e^2$	↗	$\frac{2}{e^4}$	↘	$\frac{7}{e^6}$

극댓값은 $f(2)=\frac{2}{e^4}$, 극솟값은 $f(-1)=-e^2$

양 끝값은 $f(-3)=7e^6$, $f(3)=\frac{7}{e^6}$

$\therefore$ 최댓값 : $7e^6$, 최솟값 : $-e^2$

16) 최댓값: e^2, 최솟값: $-2e$

⇨ $f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x=e^x(x^2+2x-3)$
$=e^x(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$f(-2)=e^{-2}$, $f(1)=-2e$, $f(2)=e^2$이므로 최댓값은 e^2, 최솟값은 $-2e$

17) 최댓값 $e^2-\frac{1}{e^2}$, 최솟값 $\frac{1}{e}-e$

⇨ $f'(x)=e^x+e^{-x}$

$f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $e^2-\frac{1}{e^2}$, $x=-1$에서 최솟값 $\frac{1}{e}-e$를 갖는다.

18) 최댓값: $8-8\ln2$, 최솟값: $-4\ln2$,

⇨ $f'(x)=2e^{2x}-2e^x-4$

$f'(x)=0$에서 $2e^{2x}-2e^x-4=0$

$e^{2x}-e^x-2=0$

$(e^x-2)(e^x+1)=0$, $x=\ln2$

$f(\ln2)=4-4-4\ln2=-4\ln2$

$f(0)=1-2=-1$

$f(\ln4)=16-8-4\ln4=8-8\ln2$

따라서 최솟값 $-4\ln2$, 최댓값 $8-8\ln2$를 가진다.

19) 최댓값: e^2, 최솟값: $-e$

⇨ $f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x^2+x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$,

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$f(-1)=\frac{1}{e}$, $f(1)=-e$, $f(2)=e^2$

따라서 최댓값은 e^2, 최솟값은 $-e$이다.

20) 최댓값: $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, 최솟값: 0

⇨ $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f'(x)=0$, $\sin x+\cos x=0$

$\sin x=-\cos x$ $\quad\therefore x=\frac{3}{4}\pi$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	0

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$이 극댓값이자 최댓값이고, $f(0)=f(\pi)=0$이므로 최솟값은 0이다.

21) 최댓값: $\frac{1}{e}$, 최솟값: 0

⇨ $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$3e$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{1+\ln3}{3e}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=1$에서 최솟값 0을 갖는다.

22) 최댓값: e^2, 최솟값: 0

⇨ $f'(x)=3-\ln x-1=2-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=e^2$

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	e^2	↘	0

극댓값은 $f(e^2)=e^2$, 양 끝값은

$f(1)=3$, $f(e^3)=0$

$\therefore$ 최댓값 : e^2, 최솟값 : 0

23) -20

⇨ $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$이므로, $f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=0$, 3. $x<0$에서 $f'(x)<0$, $0<x<3$에서 $f'(x)<0$, $x>3$에서 $f'(x)>0$이므로, $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖

는다.
$f(3)=3^4-4\times3^3+1=-26$,
$f(-1)=1+4+1=6$, $f(4)=4^4-4\times4^3+1=1$이므로, $f(x)$는 $[-1,\ 4]$에서 $m=-26$, $M=6$을 갖는다.
$\therefore\ M+m=6+(-26)=-20$.

24) $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

⇨ 최댓값: $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$, 최솟값 0

25) $\frac{2}{e}-2e$

⇨ $f'(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}=2e^{-x}(1-x)$이므로,
$f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=1$이다.
$x<1$에서 $f'(x)>0$, $x>1$에서 $f'(x)<0$이므로,
$f(x)$는 $x=1$에서 극대이고,
$f(1)=2\times1\times e^{-1}=\frac{2}{e}$이므로
$-1\le x\le2$에서 $f(x)$의 최댓값 M은 $M=\frac{2}{e}$.
한편, $f(-1)=-2e$, $f(2)=\frac{4}{e^2}$이고, $-2e<\frac{4}{e^2}$이므로, $-1\le x\le2$에서 $f(x)$의 최솟값 m은 $m=-2e$
$\therefore\ M+m=\frac{2}{e}-2e$.

26) $\frac{6}{5}$

⇨ $f'(x)=\frac{3(2x+1)-3x\times2}{(2x+1)^2}=\frac{3}{(2x+1)^2}$.
임의의 실수 x에 대해 $(2x+1)^2\ge0$이므로,
$x\ne\frac{1}{2}$인 실수 x에 대해 $f'(x)>0$.
따라서 $f(x)$는 정의역 내의 모든 실수에서 증가함수이다.
그러므로 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=0$을, $x=2$에서 최댓값 $f(2)=\frac{6}{4+1}=\frac{6}{5}$을 갖는다.
$\therefore\ M+m=\frac{6}{5}+0=\frac{6}{5}$.

27) $1+\frac{\sqrt{10}}{10}$

⇨ $f(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$이므로,
$f'(x)=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\times2x=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
$=-\frac{x\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2}$
따라서 $f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 0이고,
$x<0$일 때 $f'(x)>0$, $x>0$일 때 $f'(x)<0$.
그러므로 $x=0$에서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
구간 $[-1,\ 3]$에서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 가지므로 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{1+0^2}}=1$.
또한 $f(-1)=\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,
$f(3)=\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.
$\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{10}}$이므로 주어진 구간에서 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1+\frac{\sqrt{10}}{10}$이다.

28) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

⇨ $f'(x)=-\sin^2x+(1+\cos x)\cos x$
$=-(1-\cos^2x)+\cos x+\cos^2x$
$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$
$f'(x)=0$을 만족하는 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$
따라서 $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$,
$f(\pi)=f(2\pi)=0$이므로 최댓값 $M=0$, 최솟값 $m=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$이고 합은 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

29) $\frac{3}{2}$

30) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

31) e^2+e+3

⇨ $f'(x)=1+\frac{1}{x}$. $e\le x\le e^2$일 때 $f'(x)>0$이므로,
$f(x)$는 증가함수이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최솟값 $m=f(e)=e+\ln e=e+1$을, 최댓값 $M=f(e^2)=e^2+\ln e^2=e^2+2$를 갖는다.
$M+m=(e^2+2)+(e+1)=e^2+e+3$

32) 3

⇨ $f'(x)=\frac{(x^2+3)-(x+1)\times2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$
따라서 $f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은
$x=-3$ 또는 $x=1$
$x<-3$일 때 $f'(x)<0$,
$-3<x<1$일 때 $f'(x)>0$,
$x>1$일 때 $f'(x)<0$이므로,
$f(x)$는 $x=-3$일 때 극소, $x=1$일 때 극대이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

따라서 $x \geq 0$일 때 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값을 가지고, $f(1)=\frac{1+1}{1^2+3}=\frac{1}{2}$.

한편, $x=0$일 때 $f(0)=\frac{0+1}{0^2+3}=\frac{1}{3}$이므로, 주어진 함수의 최솟값이 $\frac{1}{3}$이기 위해서는 $f(a)=\frac{1}{3}$일 때 a가 최댓값을 갖는다. $f(a)=\frac{a+1}{a^2+3}=\frac{1}{3}$에서

$3a+3=a^2+3$이므로, $a^2-3a=a(a-3)=0$.

따라서 $a=0$ 또는 3.

$a>1$이어야 하므로, $a=3$.

33) $-\frac{4}{e}$

⇨ $f(x)=x\ln x+2x$라고 할 때,

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+2=\ln x+3$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e^3}$

$x=\frac{1}{e^3}$에서의 극값을 구하면

$f\left(\frac{1}{e^3}\right)=\frac{1}{e^3}\ln\frac{1}{e^3}+2\cdot\frac{1}{e^3}=-\frac{3}{e^3}+\frac{2}{e^3}=-\frac{1}{e^3}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^3}$	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e^3}$	↗	$4e^2$

따라서 최댓값 m은 $4e^2$, 최솟값 n은 $-\frac{1}{e^3}$이므로

$mn=4e^2\cdot\left(-\frac{1}{e^3}\right)=-\frac{4}{e}$

34) e

⇨ $f'(x)=\ln x-1$이므로 $x=e$에서 최솟값을 갖는다.

즉, $f(e)=-e+k=0$ $\quad\therefore k=e$

35) $e+3$

⇨ $f'(x)=\ln x+1-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e+a$	↗

함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최솟값이 $-e+a$이므로

$-e+a=3$ $\quad\therefore a=e+3$

36) $1+e^{-2}$

⇨ $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+1=\ln x+2$

$f'(x)=0$에서 $x=e^{-2}$

x	0	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e^{-2}+a$	↗

$x=e^{-2}$일 때, 극소이고 최소이다.

최솟값이 1이므로

$f(e^{-2})=-e^{-2}+a=1$ $\qquad\therefore a=1+e^{-2}$

37) -1

⇨ $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	e

따라서 최댓값 m은 e, 최솟값 n은 $-\frac{1}{e}$이므로

$mn=e\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)=-1$

38) $-2e$

⇨ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2e^2$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$

따라서 최댓값 m은 $\frac{1}{e}$, 최솟값 n은 $-2e^2$이므로

$mn=\frac{1}{e}\cdot(-2e^2)=-2e$

39) 1

⇨ $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$이고

$f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖고

$f(0)=1$이 최솟값이다.

따라서 $\alpha+m=0+1=1$이다.

40) $3\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=2\cos2x-2\sin x$

$=2(1-2\sin^2x)-2\sin x=-4\sin^2x-2\sin x+2$

$=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\sin x=-1$이면 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	
$f(x)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0	↗	2

따라서 최댓값 m은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최솟값 n은 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

이므로 $m-n=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$

41) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

⇨ $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{2}=\ln x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{\sqrt{e}}+a$	↗

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$일 때 최솟값이 0이므로

$-\frac{1}{\sqrt{e}}+a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{\sqrt{e}}$

42) 2

⇨ $f'(x)=a(1-2\cos 2x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}a$	↗	$a\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↘

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	−	0	+	
$f(x)$	↘	$a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↗	$\frac{\pi}{2}a$

이때, $\frac{\pi}{2}a-a\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$

이므로

$\frac{\pi}{2}a>a\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값이 π이므로 $\frac{\pi}{2}a=\pi \quad \therefore a=2$

43) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=a-2a\cos 2x$

$f'(x)=0$에서

$\cos 2x=\frac{1}{2}$ 이므로 $x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$\frac{\pi}{6}a-$	↗	$\frac{a}{2}\pi$

$a>0$이므로 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a}{2}\pi=\pi \qquad \therefore a=2$

최솟값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}\times 2-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

44) 2

⇨ $f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=x(2+ax)e^{ax}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{a}$

$a>1$이므로 $-2<-\frac{2}{a}<0$이고, $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$4e^{-2a}$	↗	$\frac{4}{a^2e^2}$	↘	0	↗	$4e^{2a}$

최댓값이 $4e^4$이고 a는 $a>1$인 정수이므로 최댓값은 $f(2)=4e^{2a}=4e^4 \quad \therefore a=2$

45) 16

⇨ 진수 조건에 의하여 $x>1$

$f(x)=\log_3(x+2)^2-\log_3(x-1)=\log_3\frac{(x+2)^2}{x-1}$

$g(x)=\frac{(x+2)^2}{x-1}$이라 하자.

$g'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)-(x+2)^2}{(x-1)^2}$

$=\frac{(x+2)(2x-2-x-2)}{(x-1)^2}=\frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}$

따라서 $x=4$에서 $g'(x)=0$이다.
따라서 $x=4$일 때, $g(x)$는 최솟값을 가지고,
이때 $f(x)$도 최솟값을 갖는다.

$f(4)=\log_3\frac{36}{3}=\log_3 12$

$\therefore\ a=4,\ b=\log_3 12,\ 3^b=12$
따라서 $a+3^b=4+12=16$이다.

46) 18

⇨ $f'(x)=9(2-\log_3 a)x^{1-\log_3 a}$
$f'(a)=0$이므로 $2-\log_3 a=0 \quad \therefore\ a=9$
$f(9)=9\times 9^{2-\log_3 9}=9\times 1=9 \quad \therefore\ M=9$
$\therefore\ a+M=18$

47) -16

⇨ $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로, $f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 0, 2이고, $x<0$에서 $f'(x)>0$, $0<x<2$에서 $f'(x)<0$, $x>2$에서 $f'(x)>0$이므로, $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.
$f(0)=2$, $f(2)=-2$, $f(3)=2$이므로, $0\le x\le 3$에서 $-2\le f(x)\le 2$.
한편 $f(-2)=-18$이므로, $-2\le f(x)\le 2$에서 $-18\le f(f(x))\le 2$
$\therefore\ M=2,\ m=-18.\quad \therefore\ M+m=-16$

48) $\frac{2}{\sqrt{e}}$

⇨ 곡선 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$은 y축에 대하여 대칭인 곡선이므로 직사각형도 y축 대칭이다. 제 1 사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $\mathrm{P}\left(a,\ e^{-\frac{a^2}{2}}\right)$이라 하고, 직사각형의 넓이를 $S(a)$라고 하면

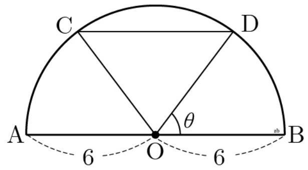
$S(a)=2ae^{-\frac{a^2}{2}}\ (a>0)$

$S'(a)=2e^{-\frac{a^2}{2}}+2ae^{-\frac{a^2}{2}}(-a)=2(1-a^2)e^{-\frac{a^2}{2}}$
$S'(a)=0$에서 $a=1\ (\because a>0)$
함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$		↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘

따라서 $S(a)$의 최댓값은 $S(1)=\frac{2}{\sqrt{e}}$

49) $6\pi+9\sqrt{3}$

⇨ 

$\angle\mathrm{BOD}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고
도형 OBDC의 넓이를 $S(\theta)$라고 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\theta+\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$
$\quad=18(\theta+\sin 2\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$S'(\theta)=18(1+2\cos 2\theta)$이므로 $S'(\theta)=0$에서
$\cos 2\theta=-\frac{1}{2}\qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$
함수 $S(\theta)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$6\pi+9\sqrt{3}$	↘	

따라서 $S(\theta)$의 최댓값은 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\pi+9\sqrt{3}$

50) $\frac{2}{e}$

⇨ 곡선 $y=e^{-x}$ 위에 있는 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ e^{-a})\ (a>0)$이라고 하면 직사각형의 가로의 길이는 $2a$, 세로의 길이는 e^{-a}이므로 직사각형의 넓이 $S(a)$는
$S(a)=2ae^{-a}\ (a>0)$
$S'(a)=2e^{-a}-2ae^{-a}=2(1-a)e^{-a}$
$S'(a)=0$에서 $a=1$
함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

따라서 $S(a)$의 최댓값은 $S(1)=\frac{2}{e}$

51) $\frac{2}{e}$

⇨ 점 A를 (a, e^a)라 하면 A를 지나는 접선의 방정식은 $y=e^a(x-a)+e^a=e^a\cdot x+(1-a)e^a$이므로
점 P의 좌표는 $(a-1,\ 0)$,
점 Q의 좌표는 $(0,\ (1-a)e^a)$이다.
따라서 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$라 하면
$S(a)=\frac{1}{2}(1-a)(1-a)e^a=\frac{1}{2}(1-a)^2e^a$

$S'(a)=\frac{1}{2}e^a(a^2-1)=\frac{1}{2}e^a(a+1)(a-1)$이므로

$a=-1\,(a<0)$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $S(a)$의 최댓값은

$S(-1)=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times e^{-1}=\frac{2}{e}$이다.

52) 2

⇨ 점 B의 좌표를 $(t,\ \sqrt{4-t^2})$이라 하고

직사각형 OABC의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=t\sqrt{4-t^2}\quad(0<t<2)$

$S'(t)=\sqrt{4-t^2}+t\cdot\frac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}=\frac{2(2-t^2)}{\sqrt{4-t^2}}$

$S'(t)=0$에서 $t=\sqrt{2}\quad(\because 0<t<2)$

함수 $S(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	2	↘	

따라서 $S(t)$의 최댓값은 $S(\sqrt{2})=2$

53) 2

⇨ 곡선 $f(x)=2e^{-x}$이라고 하면 $f'(x)=-2e^{-x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

이 접선이 y축과 만나는 점은 접선의 방정식에 $x=0$을 대입한다. 즉, $y=2e^{-t}(t+1)$

$\therefore \mathrm{B}(0,\ 2e^{-t}(t+1))$

또한 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서 y축에 내린 수선의 발은 $\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$이다. 삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\{2e^{-t}(t+1)-2e^{-t}\}=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=te^{-t}(2-t)$

$S'(t)=0$에서 $t=2\quad(\because t>0)$

함수 $S(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

$t>0$에서 $t=2$일 때, 극대이자 최대가 된다.

즉, 함수 $S(t)$는 $t=2$일 때, 최댓값을 갖는다.

54) $\frac{1}{e}$

⇨ 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=e^{-2x}$은 y축에 대하여 대칭이므로 점 D의 좌표를 $D(t,e^{-2t})(t>0)$이라 하면

$\overline{BC}=2t$, $\overline{DC}=e^{-2t}$

직사각형 $ABCD$의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2te^{-2t}$

$S'(t)=2e^{-2t}-4te^{-2t}$

$\quad=2e^{-2t}(1-2t)$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

$t=\frac{1}{2}$일 때, $S(t)$는 극대이고 최대이므로 직사각형 $ABCD$의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

55) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

⇨ $S(\theta)=2\cdot\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin(\pi-2\theta)$

$\quad=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$

$0<\theta<\pi$일 때,

$S'(\theta)=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\quad=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

θ	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$
$S'(\theta)$	$+$	0	$-$
$S(\theta)$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 최댓값 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

56) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

⇨ 원뿔의 반지름 $\cos\theta$, 높이 $\sin\theta$이므로 부피는

$f(\theta)=\frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta=\frac{1}{3}\pi(1-\sin^2\theta)\sin\theta$

$\quad=\frac{1}{3}\pi(\sin\theta-\sin^3\theta)$

$f'(\theta)=\frac{1}{3}\pi(\cos\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)=0$

$1-3\sin^2\theta=0$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$인 θ에서 최대 부피이므로

이때의 높이는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

57) 1

⇨ 두 함수의 그래프의 교점을 구해보자.

$-x^2+3x=-x+3$에서

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$이므로, 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는 $x=1,\ 3$.

점 A, B의 좌표를 각각 $(1,\ 2)$, $(3,\ 0)$이라 하자.

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$ 이고,
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$에서 $\overline{AB}$와 점 P 사이의 거리가 가장 멀기 위해서는 $x=2$여야 한다.
즉, $\triangle ABP$의 넓이가 최대가 되기 위한 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$. 점 $(2,\ 2)$와 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|2+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
따라서 $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값은
$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$.

58) $256\sqrt{2}$ 만원
⇨ 상품을 판매하고 이익을 $f(x)$라 하면
$f(x)=(x-4)\sqrt{100-x}$
$f'(x)=\sqrt{100-x}-\dfrac{x-4}{2\sqrt{100-x}}=0$
$2(100-x)-(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=68$
따라서 최대이익은 $f(68)=64\sqrt{32}=256\sqrt{2}$ (만원)이다.

59) 128만 원
⇨ 가격 x만원에서 제품생산 비용 2만원을 빼면 이 상품을 팔아서 생기는 이익은 다음과 같다.
$f(x)=(x-2)\sqrt{50-x}$
이 식을 미분하면
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{50-x}}(102-3x)\ \ (0<x<50)$

x	$\cdots$	34	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−

따라서 $x=34$에서 극대이자 최대가 되므로 최대 이익은 $f(34)=128$만원이다.

60) 108만 원
⇨ 밑변의 반지름을 x, 물통의 높이를 h라 하면
$V=\pi x^2h=108$이므로 $h=\dfrac{108}{\pi x^2}$
원기둥 모양의 물통을 만들기 위해 필요한 철판의 넓이를 $S(x)$라 하면
$S(x)=(2x)^2+2\pi xh=4x^2+2\pi x\dfrac{108}{\pi x^2}=4x^2+\dfrac{216}{x}$
$S'(x)=8x-\dfrac{216}{x^2}$
$S'(x)=0,\ 8x^3=216,\ x^3=27 \qquad \therefore\ x=3$
즉 $x=3$에서 최솟값
$S(3)=4\times 3^2+\dfrac{216}{3}=36+72=108$을 갖는다.
따라서 최소 비용은 108만 원이다.

61) $6\sqrt{3}\,m^3$
⇨ 창고를 만드는 비용을 이용한 식을 나타내면
$4\times(2x^2)+2\times 4xy=72$이므로
$x^2+xy=9$
부피 $V=x^2y=x(9-x^2)=-x^3+9x$이므로 부피의 최댓값을 구하기 위해
$V'=-3x^2+9=0$을 만족하는 $x=\pm\sqrt{3}$ 이고
$V''=-6x$는 $x=\sqrt{3}$ 일 때 $V''(x)<0$이므로 부피는 최댓값을 갖는다.
따라서 부피의 최댓값은
$V(\sqrt{3})=-3\sqrt{3}+9\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ 이다.

62) $\dfrac{4}{e}$

⇨ $C'(t)=e^{-\frac{1}{2}t}+t\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}t}$

$C'(t)=0$에서 $1-\dfrac{t}{2}=0 \qquad \therefore\ t=2$
이 점의 좌우에서 $C'(t)$가 양에서 음으로 바뀌므로 $t=2$일 때 최댓값 $C(2)=\dfrac{2}{e}$을 가진다.

$\therefore\ m=2,\ n=\dfrac{2}{e}$

$\therefore\ mn=\dfrac{4}{e}$