01 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.
① 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
② $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

◪ 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

1. $y=x^2-1$ $(2,\ 3)$

2. $y=x^2-3x$ $(2,\ -2)$

3. $y=x^2-4x$ $(1,\ -3)$

4. $y=x^2-5x+1$ $(1,\ -3)$

5. $y=-x^2+3x-5$ $(-1,\ -9)$

6. $y=-2x^2+3x+1$ $(1,\ 2)$

7. $y=3x^2+2x-1$ $(1,\ 4)$

8. $y=x^3+x$ $(2,\ 10)$

9. $y=x^3-4x$ $(2,\ 0)$

10. $y=x^3-2x^2+2$ $(2,\ 2)$

11. $y=-x^3-2x^2+1$ $(-2,\ 1)$

12. $y=2x^3-4x+3$ $(1,\ 1)$

13. $y=2x^3-x^2+1$ $(-1,\ -2)$

14. $y=x^3-2x^2+3x-1$ $(1,\ 1)$

15. $y=x^4+3x^3-6x^2+4$ $(1,\ 2)$

16. $y=-x^4+2x^3-3x^2+x+2$ $(0,\ 2)$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

02 기울기가 주어질 때의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.
① 접점의 좌표를 $(\alpha, f(\alpha))$로 놓는다.
② $f'(\alpha)=m$임을 이용하여 α의 값과 접점의 좌표를 구한다.
③ $y-f(\alpha)=m(x-\alpha)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

◪ 다음 곡선에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 모두 구하여라.

17. $y=x^2+x,\ m=-5$

18. $y=-x^2+2x-1,\ m=-2$

19. $y=-x^2+3x+1,\ m=-1$

20. $y=-x^2+4x-3,\ m=-2$

21. $y=-x^3+5x,\ m=2$

22. $y=-x^3+x+2,\ m=-2$

23. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-2x,\ m=1$

◪ 다음 직선의 방정식을 구하여라.

24. 곡선 $y=-x^2+4x+1$에 접하고 직선 $y=-2x+7$과 평행한 직선

25. 곡선 $y=2x^2-x+1$에 접하고 직선 $y=2x+5$와 평행한 직선

26. 곡선 $y=x^3+1$에 접하고 직선 $y=3x+5$에 평행한 직선

27. 곡선 $y=x^3+3x-2$에 접하고 직선 $y=6x+1$과 평행한 직선

28. 곡선 $y=x^2-4x+3$에 접하고 직선 $y=-\frac{1}{2}x-7$과 수직인 직선

29. 곡선 $y=2x^2-3x+3$에 접하고 직선 $y=-\frac{1}{5}x+2$와 수직인 직선

30. 곡선 $y=x^2-3x+4$에 접하고 직선 $x+5y-3=0$과 수직인 직선

31. 곡선 $y=x^3-4x+1$에 접하고 직선 $x+8y-1=0$에 수직인 직선

32. 곡선 $y=-x^3+1$ 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선

33. 곡선 $y=x^3-2x^2+3x-4$ 위의 점 $(1,\ -2)$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선

03 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (x_1, y_1)에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

② 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ …㉠

③ ㉠에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 t의 값을 구한다.

④ ③에서 구한 t의 값을 다시 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

◪ 다음 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 모두 구하여라.

34. $y=x^2+1$, $(1, -2)$

35. $y=-x^2-3x$, $(0,\ 1)$

36. $y=x^2+x-2$, $(0,\ -3)$

37. $y=-x^2-x+2$, $(1, 4)$

38. $y=x^2+2x-1$, $(-1,\ -3)$

39. $y=x^2-3x+4$, $(0, 0)$

40. $y=x^3+2$, $(0,\ 0)$

41. $y=x^3-2x$, $(0, 2)$

42. $y=x^3-2x+2$, $(0,\ 0)$

43. $y=x^3-3x^2-5$, $(0, 0)$

44. $y=2x^3-3x^2-1$, $(0,\ 6)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

45. 점 $(0, -1)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 할 때, $m_1 \cdot m_2$의 값을 구하여라.

46. 점 $(0,\ -1)$에서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 할 때, $m_1 \cdot m_2$의 값을 구하여라.

47. 점 $(0, -1)$에서 곡선 $y=x^2+3$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 할 때, $m_1 \cdot m_2$의 값을 구하여라.

48. 점 $(-1,\ 2)$에서 곡선 $y=2x^2-5x$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 $m_1,\ m_2$라 할 때, m_1+m_2의 값을 구하여라.

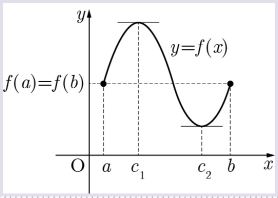
49. 점 $(0, -27)$에서 곡선 $y=3x^2-4x$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 $m_1,\ m_2$라고 할 때, m_1+m_2의 값을 구하여라.

04 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



◪ 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구하여라.

50. $f(x)=x^2-3x+4 \qquad [0,\ 3]$

51. $f(x)=3x-x^2 \qquad [0, 3]$

52. $f(x)=-x^2+5x \qquad [1,\ 4]$

53. $f(x)=x^2-5x+4 \qquad [1, 4]$

54. $f(x)=x^2-6x+1 \qquad [1, 5]$

55. $f(x)=(x+2)(x-6) \qquad [-2,\ 6]$

56. $f(x)=x^3-x \qquad [0,\ 1]$

57. $f(x)=-x^3+9x \qquad [0, 3]$

58. $f(x)=x^3-4x+1 \qquad [0, 2]$

59. $f(x)=x^3-x^2-5x-3 \qquad [-1,\ 3]$

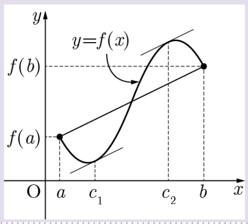
60. $f(x)=x^4-2x^2+1 \qquad [-1,\ 1]$

05 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



◪ 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구하여라.

61. $f(x)=(2x+1)(x-1) \qquad [-1,\ 1]$

62. $f(x)=x^2+3x \qquad [0, 2]$

63. $f(x)=-x^2+x \quad [-3,\ 2]$

64. $f(x)=-x^2-2x \quad [-1,\ 1]$

65. $f(x)=-x^2+3x \quad [0, 2]$

66. $f(x)=x^2-5x \quad [1,\ 4]$

67. $f(x)=x^2-2x-1 \quad [0, 3]$

68. $f(x)=x^3 \quad [-3,\ 0]$

69. $f(x)=2x^3 \quad [0,\ 3]$

70. $f(x)=x^3-2x+1 \quad [-1,\ 2]$

71. $f(x)=x^3-3x^2+2x \quad [0,\ 3]$

정답 및 해설

1) $y=4x-5$
⇨ $f(x)=x^2-1$이라고 하면
$f'(x)=2x$
점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=4$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-3=4(x-2)$
$\therefore y=4x-5$

2) $y=x-4$
⇨ $f(x)=x^2-3x$라 하면 $f'(x)=2x-3$
점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=2\cdot 2-3=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=1\cdot(x-2)$
$\therefore\ y=x-4$

3) $y=-2x-1$
⇨ $f(x)=x^2-4x$라 하면 $f'(x)=2x-4$
즉, $f'(1)=-2$이므로 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은
$y+3=-2(x-1)$ $\therefore\ y=-2x-1$

4) $y=-3x$
⇨ $f(x)=x^2-5x+1$이라 하면 $f'(x)=2x-5$
즉, $f'(1)=-3$이므로 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은
$y+3=-3(x-1)$ $\therefore\ y=-3x$

5) $y=5x-4$
⇨ $f(x)=-x^2+3x-5$라 하면 $f'(x)=-2x+3$
점 $(-1,\ -9)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-9)=5(x+1)$
$\therefore\ y=5x-4$

6) $y=-x+3$
⇨ $f(x)=-2x^2+3x+1$이라고 하면 $f'(x)=-4x+3$
점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-2=-1\times(x-1)$
$\therefore y=-x+3$

7) $y=8x-4$
⇨ $f(x)=3x^2+2x-1$이라 하면 $f'(x)=6x+2$
점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=6+2=8$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-4=8(x-1)$
$\therefore\ y=8x-4$

8) $y=13x-16$
⇨ $y=x^3+x$라고 하면 $f'(x)=3x^2+1$
점 $(2, 10)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=13$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-10=13(x-2)$
$\therefore y=13x-16$

9) $y=8x-16$
⇨ $f(x)=x^3-4x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$
점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=8$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-0=8(x-2)$
$\therefore y=8x-16$

10) $y=4x-6$
⇨ $f(x)=x^3-2x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$
즉, $f'(2)=4$이므로 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $y-2=4(x-2)$ $\therefore\ y=4x-6$

11) $y=-4x-7$
⇨ $f(x)=-x^3-2x^2+1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2-4x$
점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-2)=-3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)=-4$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-4(x+2)$
$\therefore\ y=-4x-7$

12) $y=2x-1$
⇨ $f(x)=2x^3-4x+3$이라고 하면 $f'(x)=6x^2-4$
점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=2\times(x-1)$
$\therefore y=2x-1$

13) $y=8x+6$
⇨ $f(x)=2x^3-x^2+1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-2x$
즉, $f'(-1)=8$이므로 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은
$y+2=8(x+1)$ $\therefore\ y=8x+6$

14) $y=2x-1$
⇨ $f(x)=x^3-2x^2+3x-1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-4x+3$
즉, $f'(1)=2$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=2(x-1)$ $\therefore\ y=2x-1$

15) $y=x+1$
⇨ $f(x)=x^4+3x^3-6x^2+4$라 하면
$f'(x)=4x^3+9x^2-12x$
즉, $f'(1)=1$이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $y-2=1\times(x-1)$ $\therefore\ y=x+1$

16) $y=x+2$
⇨ $f(x)=-x^4+2x^3-3x^2+x+2$라 하면
$f'(x)=-4x^3+6x^2-6x+1$
즉, $f'(0)=1$이므로 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $y-2=x$ $\therefore\ y=x+2$

17) $y=-5x-9$

⇨ $f(x)=x^2+x$라고 하면

$f'(x)=2x+1$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(a)=2a+1=-5$

$\therefore a=-3$

이때, $f(-3)=6$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-6=-5\{x-(-3)\}$

$\therefore y=-5x-9$

18) $y=-2x+3$

⇨ $f(x)=-x^2+2x-1$이라고 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=-2a+2=-2$ $\therefore a=2$

이때, $f(2)=-4+4-1=-1$이므로

구하는 접선의 방정식은 $y-(-1)=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+3$

19) $y=-x+5$

⇨ $f(x)=-x^2+3x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+3$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a+1)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=-2a+3=-1$ $\therefore\ a=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-(x-2)$ $\therefore\ y=-x+5$

20) $y=-2x+6$

⇨ $f(x)=-x^2+4x-3$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a-3)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=-2a+4=-2$ $\therefore\ a=3$

따라서 접점의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-2(x-3)$ $\therefore\ y=-2x+6$

21) $y=2x-2$ 또는 $y=2x+2$

⇨ $f(x)=-x^3+5x$라고 하면

$f'(x)=-3x^2+5$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+5a)$라고 하면

접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=-3a^2+5=2$ $\therefore a=\pm 1$

따라서 접점의 좌표는 각각 $(-1,-4)$ 또는 $(1,4)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y=2x-2$ 또는 $y=2x+2$

22) $y=-2x$ 또는 $y=-2x+4$

⇨ $f(x)=-x^3+x+2$라 하면 $f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+a+2)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=-3a^2+1=-2,$ $a^2=1$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2(x+1)$, $y-2=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x$ 또는 $y=-2x+4$

23) $y=x+\dfrac{5}{3}$ 또는 $y=x-9$

⇨ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-2x$라 하면 $f'(x)=x^2-2x-2$

이때, 접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{3}a^3-a^2-2a\right)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a)=a^2-2a-2=1$에서

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ 또는 $(3,\ -6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\dfrac{2}{3}=x+1$ 또는 $y+6=x-3$

$\therefore\ y=x+\dfrac{5}{3}$ 또는 $y=x-9$

24) $y=-2x+10$

⇨ $f(x)=-x^2+4x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a+1)$이라 하면 직선 $y=-2x+7$과 평행한 접선의 기울기는 -2이므로 $f'(a)=-2a+4=-2$ $\therefore\ a=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-2(x-3)$

$\therefore\ y=-2x+10$

25) $y=2x-\dfrac{1}{8}$

⇨ $f(x)=2x^2-x+1$이라고 하면 $f'(x)=4x-1$

접점의 좌표를 $(a, 2a^2-a+1)$이라고 하면,

직선 $y=2x+5$와 평행한 접선의 기울기는 2이므로

$f'(a)=4a-1=2$ $\therefore a=\dfrac{3}{4}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{11}{8}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-\dfrac{11}{8}=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$ $\therefore y=2x-\dfrac{1}{8}$

26) $y=3x+3$ 또는 $y=3x-1$

⇨ $f(x)=x^3+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3+1)$이라 하면 직선 $y=3x+5$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$f'(a)=3a^2=3,$ $a^2=1$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=3(x+1)$, $y-2=3(x-1)$
$\therefore$ $y=3x+3$, $y=3x-1$

27) $y=6x-4$ 또는 $y=6x$
⇨ $f(x)=x^3+3x-2$라 하면 $f'(x)=3x^2+3$
이때, 접점의 좌표를 $(a,\ a^3+3a-2)$라 하면
직선 $y=6x+1$과 평행한 접선의 기울기는 6이므로
$f'(a)=3a^2+3=6$에서 $3a^2=3$, $a^2=1$
$\therefore$ $a=1$ 또는 $a=-1$
따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$, $(-1,\ -6)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-2=6(x-1)$ 또는 $y+6=6(x+1)$
$\therefore$ $y=6x-4$ 또는 $y=6x$

28) $y=2x-6$
⇨ $f(x)=x^2-4x+3$이라 하면 $f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2-4a+3)$이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{2}x-7$과 수직인 직선의 기울기는 2이므로
$f'(a)=2a-4=2$ $\therefore$ $a=3$
따라서 구하는 접선은 점 $(3,\ 0)$을 지나고 기울기가 2인 직선이므로 $y-0=2(x-3)$
$\therefore$ $y=2x-6$

29) $y=5x-5$
⇨ $f(x)=2x^2-3x+3$이라 하면 $f'(x)=4x-3$
이때, 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-3a+3)$이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{5}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 5이므로
$f'(a)=4a-3=5$ $\therefore$ $a=2$
따라서 접점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=5(x-2)$ $\therefore$ $y=5x-5$

30) $y=5x-12$
⇨ $f(x)=x^2-3x+4$라고 하면 $f'(x)=2x-3$
직선 $x+5y-3=0$에 수직인 직선의 기울기는 5이므로 접점을 (a, a^2-3a+4)라고 하면
$f'(a)=2a-3=5$ $\therefore a=4$
따라서 접점의 좌표는 $(4, 8)$이므로
구하는 접선의 방정식은
$y-8=5(x-4)$ $\therefore y=5x-12$

31) $y=8x+17$ 또는 $y=8x-15$
⇨ $f(x)=x^3-4x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4$
이때, 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-4a+1)$이라 하면 직선 $x+8y-1=0$에 수직인 직선의 기울기는 8이므로
$f'(a)=3a^2-4=8$에서 $a^2=4$
$\therefore$ $a=-2$ 또는 $a=2$
따라서 접점의 좌표가 $(-2,\ 1)$ 또는 $(2,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=8(x+2)$ 또는 $y-1=8(x-2)$
$\therefore$ $y=8x+17$ 또는 $y=8x-15$

32) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
⇨ $f(x)=-x^3+1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$
점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=-3$
따라서 점 $(1,\ 0)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$ $\therefore$ $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

33) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
⇨ $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$라 하면
$f'(x)=3x^2-4x+3$
점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-4+3=2$
따라서 점 $(1,\ -2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore$ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

34) $y=-2x$ 또는 $y=6x-8$
⇨ $f(x)=x^2+1$이라고 하면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 (t, t^2+1)이라고 하면
접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+1)=2t(x-t)$
이 접선이 점 $(1, -2)$를 지나므로
$-2-(t^2+1)=2t(1-t)$ $\therefore$ $t=-1$ 또는 $t=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=-2x$ 또는 $y=6x-8$

35) $y=-x+1$ 또는 $y=-5x+1$
⇨ $f(x)=-x^2-3x$라 하면 $f'(x)=-2x-3$
이때, 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-3t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-3$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^2-3t)=(-2t-3)(x-t)$
이 접선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1-(-t^2-3t)=(-2t-3)(0-t)$, $t^2=1$
$\therefore$ $t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=-(x+1)$ 또는 $y+4=-5(x-1)$
$\therefore$ $y=-x+1$ 또는 $y=-5x+1$

36) $y=-x-3$ 또는 $y=3x-3$
⇨ $f(x)=x^2+x-2$라 하면 $f'(x)=2x+1$
이때, 접점의 좌표는 $(t,\ t^2+t-2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+t-2)=(2t+1)(x-t)$
이 접선의 점 $(0,\ -3)$을 지나므로
$-3-(t^2+t-2)=(2t+1)(0-t)$

$t^2=1$ $\therefore$ $t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y+2=-1\times(x+1)$ 또는 $y-0=3(x-1)$
$y=-x-3$ 또는 $y=3x-3$

37) $y=x+3$ 또는 $y=-7x+11$
⇨ $f(x)=-x^2-x+2$라고 하면 $f'(x)=-2x-1$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-t+2)$라고 하면
접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-1$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^2-t+2)=(-2t-1)(x-t)$
이 접선이 점 $(1,4)$를 지나므로
$4-(-t^2-t+2)=(-2t-1)(1-t)$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=x+3$ 또는 $y=-7x+11$

38) $y=2x-1$ 또는 $y=-2x-5$
⇨ $f(x)=x^2+2x-1$이라 하면 $f'(x)=2x+2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$ ⋯ ㉠
이 직선이 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로
$-3-(t^2+2t-1)=(2t+2)(-1-t)$
$t^2+2t=0,$ $t(t+2)=0$
$\therefore$ $t=0$ 또는 $t=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$t=0$일 때, $y+1=2x$ $\therefore$ $y=2x-1$
$t=-2$일 때, $y+1=-2(x+2)$ $\therefore$ $y=-2x-5$

39) $y=-7x$ 또는 $y=x$
⇨ $f(x)=x^2-3x+4$라고 하면
$f'(x)=2x-3$
접점의 좌표를 (t,t^2-3t+4)라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t)$
이 접선이 점 $(0,0)$을 지나므로
$0-(t^2-3t+4)=(2t-3)(0-t)$
$\therefore t=\pm 2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=-7x$ 또는 $y=x$

40) $y=3x$
⇨ $f(x)=x^3+2$이라 하면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$ ⋯ ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$-(t^3+2)=3t^2\cdot(-t),$ $2t^3=2$
$t^3=1$ $\therefore$ $t=1$
이것을 ㉠에 대입하면
$y-3=3(x-1)$ $\therefore$ $y=3x$

41) $y=x+2$
⇨ $f(x)=x^3-2x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$
접점의 좌표를 (t,t^3-2t)라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$
이 접선이 점 $(0,2)$를 지나므로
$2-(t^3-2t)=(3t^2-2)(0-t)$ $\therefore t=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+2$

42) $y=x$
⇨ $f(x)=x^3-2x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
이때, 접점의 좌표는 $(t,\ t^3-2t+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-2t+2)=(3t^2-2)(x-t)$
이 접선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0-(t^3-2t+2)=(3t^2-2)(0-t),$ $t^3=1$
$\therefore$ $t=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=x-1$
$\therefore$ $y=x$

43) $y=9x$
⇨ $f(x)=x^3-3x^2-5$라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x$
접점의 좌표를 (t,t^3-3t^2-5)라고 하면
접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-3t^2-5)=(3t^2-6t)(x-t)$
이 접선이 점 $(0,0)$을 지나므로
$0-(t^3-3t^2-5)=(3t^2-6t)(0-t)$ $\therefore t=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=9x$

44) $y=12x+6$
⇨ $f(x)=2x^3-3x^2-1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-6x$
이때, 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-3t^2-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=6t^2-6t$이므로 접선의 방정식은
$y-(2t^3-3t^2-1)=(6t^2-6t)(x-t)$
이 접선이 점 $(0,\ 6)$을 지나므로
$6-(2t^3-3t^2-1)=(6t^2-6t)(0-t),$ $4t^3-3t^2+7=0$
$(t+1)(4t^2-7t+7)=0$
$\therefore$ $t=-1$ $(\because\ 4t^2-7t+7>0)$
따라서 구하는 점선의 방정식은 $y+6=12(x+1)$
$\therefore$ $y=12x+6$

45) -4
⇨ $f(x)=x^2$이라고 하면 $f'(x)=2x$
이때, 곡선 위의 접점의 좌표를 (a,a^2)이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$
이 접선이 점 $(0,-1)$을 지나므로
$-1-a^2=2a(0-a)$
$\therefore a=\pm 1$
따라서 접선의 기울기는 2, -2
$\therefore\ m_1 \cdot m_2=-4$

46) -1

⇨ $f(x)=\frac{1}{4}x^2$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

이때, 접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{4}a^2\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=\frac{1}{2}a$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a(x-a)$
이 접선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로
$-1-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a(0-a),\ a^2=4$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-2$
따라서 접선의 기울기 1 또는 -1이므로
$m_1 \cdot m_2=-1$

47) -16
⇨ $f(x)=x^2+3$이라고 하면 $f'(x)=2x$
접점을 (a, a^2+3)이라고 하면 접선의 방정식은
$y-(a^2+3)=2a(x-a)$
이 접선이 점 $(0,-1)$을 지나므로
$-1-(a^2+3)=2a(0-a)\quad \therefore a=\pm 2$
따라서 접선의 기울기는 4, -4
$\therefore\ m_1 \cdot m_2=-16$

48) -18
⇨ $f(x)=2x^2-5x$라 하면 $f'(x)=4x-5$
이때, 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-5a)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=4a-5$이므로 접선의 방정식은
$y-(2a^2-5a)=(4a-5)(x-a)$
이 접선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로
$2-(2a^2-5a)=(4a-5)(-1-a)$
$\therefore\ 2a^2+4a-3=0 \qquad \cdots$ ㉠
㉠의 두 근을 $a_1,\ a_2$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a_1+a_2=-2$
한편, $m_1=4a_1-5,\ m_2=4a_2-5$이므로
$m_1+m_2=4(a_1+a_2)-10=-18$

49) -8
⇨ $f(x)=3x^2-4x$라고 하면 $f'(x)=6x-4$
접점을 $(a, 3a^2-4a)$라고 하면 접선의 방정식은
$y-(3a^2-4a)=(6a-4)(x-a)$
이 접선이 점 $(0,-27)$를 지나므로
$-27-(3a^2-4a)=(6a-4)(0-a)\quad \therefore a=\pm 3$
따라서 접선의 기울기는 14, -22
$\therefore m_1+m_2=-8$

50) $\frac{3}{2}$

⇨ 함수 $f(x)=x^2-3x+4$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-3$이므로 $\qquad f'(c)=2c-3=0$
$\therefore\ c=\frac{3}{2}$

51) $\frac{3}{2}$

⇨ 함수 $f(x)=3x-x^2$은 닫힌구간 $[0,3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,3)$에서 미분가능하다.
$f(0)=f(3)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 상수 c가 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3-2x$에서
$f'(c)=3-2c=0\quad \therefore c=\frac{3}{2}$

52) $\frac{5}{2}$

⇨ 함수 $f(x)=-x^2+5x$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=-2x+5$이므로 $\qquad f'(c)=-2c+5=0$
$\therefore\ c=\frac{5}{2}$

53) $\frac{5}{2}$

⇨ 함수 $f(x)=x^2-5x+4$는 닫힌구간 $[1,4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,4)$에서 미분가능하다.
$f(1)=f(4)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 상수 c가 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-5$에서
$f'(c)=2c-5=0\quad \therefore c=\frac{5}{2}$

54) 3
⇨ 함수 $f(x)=x^2-6x+1$은 닫힌구간 $[1,5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,5)$에서 미분가능하다.
$f(1)=f(5)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 상수 c가 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-6$에서
$f'(c)=2c-6=0$
$\therefore c=3$

55) 2

⇨ 함수 $f(x)=(x+2)(x-6)=x^2-4x-12$는 닫힌구간 $[-2,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 6)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(6)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-2,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-4$이므로 $f'(c)=2c-4=0$

$\therefore\ c=2$

56) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⇨ 함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.

$f(0)=f(1)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-1$에서 $f'(c)=3c^2-1=0,\ c^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ 0<c<1)$

57) $\sqrt{3}$

⇨ 함수 $f(x)=-x^3+9x$는 닫힌구간 $[0,3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,3)$에서 미분가능하다.

$f(0)=f(3)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-3x^2+9$에서

$f'(c)=-3c^2+9=0\ \ \therefore c=\sqrt{3}\,(\because 0<c<3)$

58) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

⇨ 함수 $f(x)=x^3-4x+1$은 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,2)$에서 미분가능하다.

$f(0)=f(2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-4$에서

$f'(c)=3c^2-4=0\ \ \therefore c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ \ (\because 0<c<2)$

59) $\dfrac{5}{3}$

⇨ 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$은 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=0$이다. 따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2x-5$이므로 $f'(c)=3c^2-2c-5=0$

$(c+1)(3c-5)=0$

$\therefore\ c=\dfrac{5}{3}\ (\because\ -1<c<3)$

60) 0

⇨ 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x^3-4x$이므로 $f'(c)=4c^3-4c=0$

$4c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore\ c=0\ (\because\ -1<c<1)$

61) 0

⇨ 함수 $f(x)=(2x+1)(x-1)=2x^2-x-1$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x-1$이므로 $\dfrac{0-2}{1-(-1)}=4c-1$

$\therefore\ c=0$

62) 1

⇨ 함수 $f(x)=x^2+3x$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 실수 c가 구간 $(0,2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^2+3x$에서 $f'(x)=2x+3$이므로

$\dfrac{10-0}{2}=2c+3\ \ \therefore c=1$

63) $-\dfrac{1}{2}$

⇨ 함수 $f(x)=-x^2+x$는 닫힌구간 $[-3,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+1$이므로 $\dfrac{-2-(-12)}{2-(-3)}=-2c+1$

$\therefore\ c=-\dfrac{1}{2}$

64) 0

⇨ 함수 $f(x)=-x^2-2x$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=-2x-2$이고 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=-2$이므로 $f'(c)=-2$에서

$-2c-2=-2\ \ \ \therefore\ c=0$

65) 1

⇨ 함수 $f(x)=-x^2+3x$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속

이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 실수 c가 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-x^2+3x$에서 $f'(x)=-2x+3$이므로

$\frac{2-0}{2}=-2c+3 \quad \therefore c=1$

66) $\frac{5}{2}$

⇨ $f(x)=x^2-5x$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$인 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=2x-5$이고 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=0$이므로

$f'(c)=0$에서 $2c-5=0 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$

67) $\frac{3}{2}$

⇨ 함수 $f(x)=x^2-2x-1$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 실수 c가 구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^2-2x-1$에서 $f'(x)=2x-2$이므로

$\frac{2-(-1)}{3}=2c-2 \quad \therefore c=\frac{3}{2}$

68) $-\sqrt{3}$

⇨ 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[-3, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2$이므로 $\quad \frac{0-(-27)}{0-(-3)}=3c^2$

$c^2=3 \qquad \therefore c=-\sqrt{3} \ (\because -3<c<0)$

69) $\sqrt{3}$

⇨ $f(x)=2x^3$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=6x^2$이고 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=18$이므로

$f'(c)=18$에서 $6c^2=18$, $c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3} \ (\because 0<c<3)$

70) 1

⇨ 함수 $f(x)=x^3-2x+1$은 닫힌구간$[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $\qquad \frac{5-2}{2-(-1)}=3c^2-2$

$c^2=1 \qquad \therefore c=1 \ (\because -1<c<2)$

71) 2

⇨ 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-6x+2$이므로 $\qquad \frac{6-0}{3-0}=3c^2-6c+2$

$3c^2-6x=0, \qquad 3c(c-2)=0$

$\therefore c=2 \ (\because 0<c<3)$