01 함수의 증가와 감소

1.함수의 증가와 감소: 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

(1) $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

(2) $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

2. 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

◪ **다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.**

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

4. $f(x) = x\sqrt{x+1}$ $(x > -1)$

5. $f(x) = x\ln x$

6. $f(x) = x - \ln x$

7. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

8. $f(x) = e^x - x$

9. $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$ $(0 < x < 2\pi)$

10. $f(x) = \sin x - \cos x$ $(0 < x < \pi)$

11. $f(x) = \tan x - 2x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

02 함수의 극대와 극소

1. 함수의 극대와 극소: 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여
(1) 함수 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.
(2) 함수 $f(x)$는 감소상태에서 증가상태로 변하면 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라 한다.
(3) 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

2. 도함수의 극대와 극소 판정: 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서
(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

◪ **다음 함수의 극값을 구하여라.**

12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

13. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

14. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

15. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

16. $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

17. $f(x)=xe^{2x}$

18. $f(x)=x-e^x$

19. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$

20. $f(x)=x\ln x$

21. $f(x)=e^x\cos x$(단, $0\le x\le 2\pi$)

22. $f(x)=x+2\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$

23. $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

24. 함수 $f(x)=2\ln x+\ln(6-x)$의 극댓값을 구하여라.

25. 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\alpha-2\beta$의 값을 구하여라.

26. 함수 $f(x)=(x^2-x)e^{2x}$의 극댓값과 극솟값의 곱을 구하여라.

27. 함수 $f(x)=e^{2x}+2ke^x+2x$의 극댓값과 극솟값의 합이 -38일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

28. 함수 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$는 $x=a$에서 극댓값 $\frac{1}{4}$을 갖고, $x=b$에서 극솟값 k를 갖는다. 이때, 세 상수 a, b, k에 대하여 $a+b-12k$의 값을 구하여라.

29. 함수 $f(x)=e^x+9e^{-x}$이 $x=a$에서 극솟값 b를 가질 때, ab의 값을 구하여라.

30. 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$이 $x=a$에서 극댓값 M을 갖는다고 할 때, aM의 값을 구하여라.

31. 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$이 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$가 질 때, 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

32. 함수 $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$는 $x=3$에서 극값 -1을 갖는다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값을 구하여라.

33. 함수 $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$가 $x=-1$에서 극댓값 4를 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하여라.

34. 함수 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+3}{x+2}$가 $x=-1$에서 극댓값 2를 가질 때, 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

35. 함수 $f(x)=\ln 2x+\dfrac{a}{x}-3x$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$이다. 이때, $24(\beta-\alpha)$의 값을 구하여라.

36. 함수 $f(x)=e^x(x^2-2x+a)$의 극솟값을 m, 극댓값을 M이라 하자. $x=a$에서 극댓값 M을 가질 때, mM의 값을 구하여라.

37. 함수 $f(x)=a\sin x+b\cos x\ (0<x<\pi)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\sqrt{2}$를 가진다. 이때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

38. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$는 $x=1$, $x=-1$에서 극값을 갖는다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

39. 함수 $f(x)=ax^2+bx+\ln x\ (x>0)$가 $x=1$에서 극솟값 -4를 가진다. 이때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

04 이계도함수의 극대와 극소 판정

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때
(1) $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
(2) $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

◪ 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 극값을 구하여라.

40. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

41. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

42. $f(x)=e^x+e^{-x}$

43. $f(x)=xe^{-x}$

44. $f(x)=x^2e^x$

45. $f(x)=x^2e^{-x}$

46. $f(x)=x^2\ln x$

47. $f(x)=x+\cos 2x\ (0<x<\pi)$

48. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

49. $f(x)=\ln x+x^2-3x$

50. $f(x)=x\ln x\ (x>0)$

◪ 이계도함수를 이용하여 다음 물음에 답하여라.

51. 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, $\cos a$의 값을 구하여라.

52. 함수 $f(x)=e^x+9e^{-x}+a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

53. 함수 $f(x)=x+2\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$의 극댓값을 p, 극솟값을 q라고 할 때, $p-q$의 값을 구하여라.

54. $f(x)=x-\sqrt{x-1}$의 극값을 $\dfrac{q}{p}$(p, q는 서로소)라고 할 때, $|p+q|$의 값을 구하여라.

05 극값을 가질 조건

◪ 다음 물음에 답하여라.

55. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+(2\ln a)x^2+x+3$이 극값을 갖지 않을 때, a의 값의 범위를 구하여라.

56. 함수 $f(x)=a\sin x+2\cos x+3x+1$이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

57. 함수 $f(x)=ax+\cos 2x$가 극값을 갖지 않도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하여라.

58. 함수 $f(x)=e^{-x}(x^2-3x+k)$이 극값을 가질 때, 상수 k의 값의 범위를 구하여라.

59. 함수 $f(x)=\frac{k}{x}-4x$이 극값을 가질 때, 상수 k의 값의 범위를 구하여라

60. 함수 $f(x)=2x^2+\frac{k}{x}-12\ln x$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

61. 함수 $f(x)=(x-a)e^{x^2}$이 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값 중 가장 큰 정수를 구하여라.

62. 함수 $f(x)=\sin x+ax+1$이 극값을 가질 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

63. 함수 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}-x$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

64. 함수 $y=e^{2x}+4ae^x+8x$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

정답 및 해설

1) 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$에서 감소,
구간 $[1, \infty)$에서 증가

⇨ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$에서 $x \neq 0$이고

$f'(x)=x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

2) 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가, 구간 $[0, \infty)$에서 감소

⇨

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

$f(x)=\frac{1}{x^2+3}$에서 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

3) 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$에서 감소,

구간 $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 증가

⇨ $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$에서

$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $2x+1=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 증가한다.

4) 구간 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right]$에서 감소,

구간 $\left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$에서 증가

⇨ $f(x)=x\sqrt{x+1}$에서

$f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $3x+2=0$ $\therefore x=-\frac{2}{3}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$에서 증가한다.

5) 구간 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$에서 감소, 구간 $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 증가

⇨ $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고 $f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x+1=0$ $\therefore x=\frac{1}{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 증가한다.

6) 구간 $(0, 1]$에서 감소, 구간 $[1, \infty)$에서 증가

⇨ $f(x)=x-\ln x$에서 $x>0$이고 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $1-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

7) 구간 $(-\infty, -1]$에서 증가,
구간 $[-1, 0)$, $(0, \infty)$에서 감소

⇨ $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$에서 $x \neq 0$이고

$f'(x)=\frac{-e^{-x}\times x-e^{-x}\times 1}{x^2}=-\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x+1=0$ $\therefore x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↗		↘		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 증가하고, 구간 $[-1, 0)$, $(0, \infty)$에서 감소한다.

8) 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소, 구간 $[0, \infty)$에서 증가

⇨ $f(x)=e^x-x$에서 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x-1=0$ $\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

9) 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right)$에서 증가,

구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 감소

⇨ $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$에서 $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$

$f'(x) = 0$에서 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ $(\because 0 < x < 2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 감소한다.

10) 구간 $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right]$에서 증가, 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$에서 감소

⇨ $f(x) = \sin x - \cos x$에서

$f(x)' = \cos x + \sin x$

$f'(x) = 0$에서 $\cos x = -\sin x$

$\therefore x = \frac{3}{4}\pi (\because 0 < x < \pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$에서 감소한다.

11) 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가,

구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 감소

⇨ $f(x) = \tan x - 2x$에서 $f'(x) = \sec^2 x - 2$

$f'(x) = 0$에서 $\sec^2 x = 2$, $\sec x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore x = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 감소한다.

12) 극댓값: $\frac{1}{2}$, 극솟값: $-\frac{1}{2}$

⇨ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0$에서 $x^2 = 1$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1) = \frac{1}{2}$, 극솟값은 $f(-1) = -\frac{1}{2}$이다.

13) 극솟값 $-\frac{1}{6}$, 극댓값 $\frac{1}{2}$

⇨ 함수 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$에서

$f'(x) = \frac{(x^2+3) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x) = 0$에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x = -3$에서 극솟값 $-\frac{1}{6}$, $x = 1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

14) 극댓값: -4, 극솟값: 4

⇨ $f'(x) = 1 + \frac{-4}{x^2}$이므로 그래프의 개형을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$

따라서 $x = -2$일 때, 극댓값 -4, $x = 2$일 때 극솟값 4이다.

15) 극댓값: $\frac{3}{2}$, 극솟값: $-\frac{3}{2}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{3(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=0$인 $x=1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 변하므로 극솟값, $x=1$의 좌우에서는 양에서 음으로 변하므로 극댓값을 갖는다.

즉, 극댓값은 $f(1)=\dfrac{3}{2}$, 극솟값은 $f(-1)=-\dfrac{3}{2}$

16) 극솟값: $\sqrt{3}$

⇨ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ 에서 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=\sqrt{3}$ 이다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\sqrt{3}$	↗

17) 극솟값: $-\dfrac{1}{2e}$

⇨ $f(x)=xe^{2x}$ 에서

$f'(x)=e^{2x}+x\times 2e^{2x}=(2x+1)e^{2x}$

$f'(x)=0$에서 $2x+1=0$ $\quad\therefore x=-\dfrac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{2e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2e}$ 이다.

18) 극댓값 -1

⇨ 함수 $f(x)=x-e^x$에서

$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 -1을 갖는다.

19) 극솟값: e

⇨ $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이고 극솟값은 $f(1)=e$

20) 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

⇨ 함수 $f(x)=x\ln x$에서

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{e}$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

21) 극댓값: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, 극솟값: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$

⇨ $f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=-e^x(\sin x-\cos x)$

$=-\sqrt{2}e^x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$e^{2\pi}$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $x=\dfrac{5}{4}\pi$에서 극솟값 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$을 갖는다.

22) 극댓값: $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$, 극솟값: $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗	2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$일 때 극대이고

극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$, $x=\frac{4}{3}\pi$일 때 극소

이고, 극솟값은 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

23) 극댓값: $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$f(x)$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 극댓값은 $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$이고,

극솟값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

24) $5\ln2$

⇨ $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{-1}{6-x}=\frac{12-3x}{x(6-x)}$이므로

$x=4$일 때 극댓값을 갖는다.

그러므로 $f(4)=2\ln4+\ln2=5\ln2$이다.

25) 5

⇨ $f'(x)=\frac{-(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2}$이고,

$f'(x)=0$인 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로 $\alpha-2\beta=5$이다.

26) $-\frac{1}{4}$

⇨ $f'(x)=e^{2x}(2x^2-1)$이므로 $f'(x)=0$인

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

극댓값과 극솟값은 각각

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{\sqrt{2}}$,

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\sqrt{2}}$

$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4}$

27) -6

⇨ $f(x)=e^{2x}+2ke^x+2x$, $f'(x)=2e^{2x}+2ke^x+2$

$f'(x)=0$이 되는 두 실근 α, β라 하면

$e^\alpha+e^\beta=-k$이므로 $-k>0$이므로 $k<0$이다.

$e^\alpha \cdot e^\beta=e^{\alpha+\beta}=1$이고, $\alpha+\beta=0$

$f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(\alpha)+f(\beta)=e^{2\alpha}+2ke^\alpha+2\alpha+e^{2\beta}+2ke^\beta+2\beta$

$=(e^\alpha+e^\beta)^2-2e^\alpha \cdot e^\beta+2k(e^\alpha+e^\beta)$

$+2\alpha+2\beta$

$=(-k)^2-2+2k(-k)=-k^2-2$

$-k^2-2=-38$, $k^2=36$ $\quad\therefore k=-6$ ($\because k<0$)

28) 3

⇨ $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$에서 $f'(x)=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{4}$을 갖고,

$x=-2$에서 극솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

$\therefore a=2$, $b=-2$, $k=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 값은

$a+b-12k=2+(-2)-12\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=3$

29) $6\ln3$

⇨ $f'(x)=e^x-9e^{-x}$

$f'(x)=0$, $(e^x)^2-9=0$ $\quad\therefore x=\ln3$

따라서 극솟값은 $f(\ln3)=e^{\ln3}+9e^{-\ln3}=6$이다.

$\therefore ab=6\ln3$

30) $\frac{8}{e^2}$

⇨ $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$

$f'(x)=0$인 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$는 $x=2$일 때, 극댓값 $M=f(2)=\frac{4}{e^2}$을 가

지므로$aM=2\times\frac{4}{e^2}=\frac{8}{e^2}$

31) 1

⇨ $f(x)=xe^{ax+b}$이므로

$f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=(1+ax)e^{ax+b}$

이 때, $x=-1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-1)=(1-a)e^{-a+b}=0 \qquad \therefore\ a=1$

$f(-1)=-e^{-1+b}=-e^{-1} \qquad \therefore\ b=0$

$\therefore\ a+b=1$

32) 13

⇨ $f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)\cdot 1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값 -1을 가지므로

$f(3)=\dfrac{9+3a+b}{2}=-1$에서 $3a+b=-11$ ……㉠

$f'(3)=\dfrac{9-6-a-b}{4}=0$에서 $a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=10$

따라서 구하는 값은

$a+2b=(-7)+2\cdot 10=13$

33) 9

⇨ $f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$

$f'(-1)=\dfrac{(-2+a)(-2)-(1-a+b)}{4}=0$

$4-2a-1+a-b=0$

$-a-b=-3$, $a+b=3$

$f(-1)=\dfrac{1-a+b}{-2}=4$

$1-a+b=-8$, $-a+b=-9$

$\therefore\ b=-3$, $a=6$

$\therefore\ 2a+b=12-3=9$

34) -1

⇨ $f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x+2)-(ax^2+bx+3)}{(x+2)^2}$

$f'(-1)=0$, $f(-1)=2$이므로

$(-2a+b)-(a-b+3)=0$, $a-b+3=2$

$-3a+2b-3=0$, $a-b=-1$

$a=-1$, $b=0 \qquad \therefore\ a+b=-1$

35) 2

⇨ $f'(x)=\left(\ln 2+\ln x+\dfrac{a}{x}-3x\right)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}-3$

$=\dfrac{-3x^2+x-a}{x^2}$

이고 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-3x^2+x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 $-3x^2+x-a=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=1-12a>0 \quad \therefore a<\dfrac{1}{12}$

(ⅱ) 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{1}{3}>0$

(두 근의 곱)$=\dfrac{a}{3}>0 \quad \therefore a>0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 값의 범위는 $0<a<\dfrac{1}{12}$이므로

$\alpha=0$, $\beta=\dfrac{1}{12}$

따라서 구하는 값은

$24(\beta-\alpha)=24\left(\dfrac{1}{12}-0\right)=2$

36) -12

⇨ $f'(x)=e^x(x^2-2x+a)+e^x(2x-2)=e^x(x^2+a-2)$

$x=a$에서 극댓값을 가지므로

$f'(a)=e^a(a^2+a-2)=0$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0 \qquad \therefore\ a=-2$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=1$일 때, $f'(x)=e^x(x^2-1)=0$

$\therefore\ x=\pm 1$

$f(x)$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값 $f(a)=M=f(-1)$이지만, $a\neq-1$이므로 성립하지 않는다.

(ⅰ) $a=-2$일 때, $f'(x)=e^x(x^2-4)=0$

$\therefore\ x=\pm 2$

$f(x)$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값 $f(a)=M=f(-2)$이고, $a=-2$이므로 성립

따라서 $f(x)=e^x(x^2-2x-2)$이므로

$M=f(-2)=6e^{-2}$, $m=f(2)=-2e^2$

$\therefore\ mM=-12$

37) $a=1$, $b=1$

⇨ $f'(x)=a\cos x-b\sin x$

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\sqrt{2}$를 가지므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=\sqrt{2}$

$\therefore a+b=2\cdots$ ㉠

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=0$

$\therefore a-b=0\cdots$ ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

38) $a=2$, $b=1$

⇨ $f'(x)=e^{-x}(2x+a-x^2-ax-b)$이므로

$f'(1)=\frac{1}{e}(2+a-1-a-b)=\frac{1}{e}(1-b)=0$이므로

$b=1$

$f'(-1)=e(-2+a-1+a-1)=e(2a-4)=0$이므로

$a=2$

39) $a=3$, $b=-7$

⇨ $f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$x=1$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(1)=-4$, $f'(1)=0$

$f(1)=-4$에서 $a+b+\ln 1=-4$

$\therefore a+b=-4\cdots$ ㉠

$f'(1)=0$에서 $2a+b+1=0$

$\therefore 2a+b=-1\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-7$

40) 극댓값: -2, 극솟값: 2

⇨ $f(x)=x+\frac{1}{x}$에서 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $f''(-1)=-2<0$, $f''(1)=2>0$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=-2$, 극솟값은 $f(1)=2$이다.

41) 극댓값 -4, 극솟값 4

⇨ $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$f''(x)=\frac{8}{x^3}$이므로

(ⅰ) $x=-2$일 때, $f''(-2)=-1<0$

(ⅱ) $x=2$일 때, $f''(2)=1>0$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=-4$를 갖고

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=4$를 갖는다.

42) 극솟값: 2

⇨ $f(x)=e^x+e^{-x}$에서

$f'(x)=e^x-e^{-x}$, $f''(x)=e^x+e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=e^{-x}$ $\therefore x=0$

이때 $f''(0)=2>0$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=2$이다.

43) $x=1$일 때, 극댓값 $\frac{1}{e}$

⇨ $f'(x)=e^{-x}(1-x)$, $f''(x)=(x-2)e^{-x}$

따라서 $f'(1)=0$이므로 $f(1)=\frac{1}{e}$로 극값을 가지며

$f''(1)<0$이므로 극댓값을 갖는다.

44) 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, 극솟값 0

⇨ $f'(x)=(x^2+2x)e^x$이므로 $f'(x)=0$에서

$x(x+2)e^x=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$이므로

(ⅰ) $x=-2$일 때, $f''(-2)=-2e^{-2}<0$

(ⅱ) $x=0$일 때, $f''(0)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=\frac{4}{e^2}$을 갖고

$x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 갖는다.

45) 극솟값: 0, 극댓값: $4e^{-2}$

⇨ $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)$

$f''(x)=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x)$

$=e^{-x}(x^2-4x+2)$

$f'(x)=-x(x-2)e^{-x}=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(0)=2>0$, $f''(2)=-2e^{-2}<0$

따라서 $x=0$일 때 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$

$x=2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(2)=4e^{-2}$

46) 극솟값: $-\frac{1}{2e}$

⇨ $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

$f''(x)=2\ln x+1+x\times\frac{2}{x}=2\ln x+3$

$f'(x)=0$에서 $2\ln x+1=0$ $(\because x>0)$

$\ln x=-\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

이때 $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=2>0$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$이다.

47) 극댓값: $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $f(x)=x+\cos 2x$에서

$f'(x)=1-2\sin 2x$, $f''(x)=-4\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $2x=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0<2x<2\pi)$

$\therefore x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$

이때 $f''\left(\frac{\pi}{12}\right)=-2\sqrt{3}<0$, $f''\left(\frac{5}{12}\pi\right)=2\sqrt{3}>0$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

극솟값은 $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

48) 극댓값 $\frac{1}{e}$

⇨ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e$

$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$이므로

$f''(e)=\frac{2\ln e-3}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값 $f(e)=\frac{1}{e}$을 갖는다.

49) 극댓값 $-\ln 2-\frac{5}{4}$, 극솟값 -2

⇨ $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3$이므로 $f'(x)=0$에서

$\frac{1}{x}+2x-3=\frac{1+2x^2-3x}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+2$이므로

(i) $x=\frac{1}{2}$일 때, $f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+2=-2<0$

(ii) $x=1$일 때, $f''(1)=-\frac{1}{1^2}+2=1>0$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{2}$에서 극댓값 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{5}{4}$를 갖고,

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=-2$를 갖는다.

50) 극솟값: $-\frac{1}{e}$

⇨ $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e}$

$f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$

따라서 $x=\frac{1}{e}$일 때, 극소이고 극솟값은

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

51) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

⇨ $f(x)=\frac{\cos x}{e^{2x}}$에서 $f'(x)=-\frac{\sin x+2\cos x}{e^{2x}}$이고,

$f'(x)=0$인 x를 구하면 $e^{2x}\neq 0$이고,

$\sin x+2\cos x=0$, $\sqrt{5}\sin(x+\alpha)=0$

$\therefore\ x=n\pi-\alpha$ $\left(\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 만족하는

$x=\pi-\alpha$ 또는 $x=2\pi-\alpha$

$f''(x)=\frac{4\sin x+3\cos x}{e^{2x}}$일 때,

$f''(\pi-\alpha)>0$, $f''(2\pi-\alpha)<0$이므로

$f(x)$는 $x=2\pi-\alpha$에서 극댓값을 가진다.

따라서 $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

52) -4

⇨ $f'(x)=e^x-9e^{-x}$, $f''(x)=e^x+9e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=9e^{-x}$

양변에 e^x을 곱하면 $e^{2x}=9$, 즉 $(e^x)^2=9$

즉, $e^x=3(\because e^x>0)$이므로 $x=\ln 3$

그런데 $f''(\ln 3)=e^{\ln 3}+9e^{-\ln 3}=3+3=6>0$이므로 $x=\ln 3$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 가진다.

$f(\ln 3)=2$이므로

$e^{\ln 3}+9e^{-\ln 3}+a=2$, $3+3+a=2$ $\therefore a=-4$

53) $-\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$

⇨ $f(x)=x+2\cos x$이므로 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$f''(x)=-2\cos x$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}<0$

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-2\cos\frac{5}{6}\pi=\sqrt{3}>0$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 극솟값은 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$이다.

$$\begin{aligned}\therefore p-q&=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{5}{6}\pi\right)\\&=\left(\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}\pi+2\cos\frac{5}{6}\pi\right)\\&=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)-\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)\\&=-\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

54) 7

⇨ $f(x)=x-\sqrt{x-1}$에서 $x-1\geq 0$이므로 $x\geq 1$

$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$이므로 $f'(x)=0$에서

$1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=0$, $2\sqrt{x-1}=1$, $4(x-1)=1$

$\therefore x=\frac{5}{4}$

$f''(x)=\left(1-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$이므로

$x=\frac{5}{4}$일 때, $f''\left(\frac{5}{4}\right)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{4}$에서

극솟값 $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{5}{4}-1}=\frac{3}{4}$을 갖는다.

$\therefore p=4,\ q=3$

$\therefore |p+q|=|4+3|=7$

55) $e^{-\frac{1}{2}} \le a \le e^{\frac{1}{2}}$

⇨ 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하므로 $f'(x) \ge 0$ 또는 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

$f'(x)=x^2+(4\ln a)x+1$이고 방정식 $f'(x)=0$이 중근이나 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\ln a)^2-1 \le 0$

$(2\ln a+1)(2\ln a-1) \le 0$

$-\frac{1}{2} \le \ln a \le \frac{1}{2}$

$\therefore e^{-\frac{1}{2}} \le a \le e^{\frac{1}{2}}$

56) 5

⇨ 극값을 갖지 않으려면 모든 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$ 또는 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

$f'(x)=a\cos x-2\sin x+3$

$\quad =\sqrt{a^2+4}\cos(x+\alpha)+3$

$\sqrt{a^2+4}>0$이고, $-1<\cos(x+\alpha)<1$이므로

$-\sqrt{a^2+4}+3<f'(x)<\sqrt{a^2+4}+3$

따라서 $f'(x) \le 0$은 성립하지 않고

$f'(x) \ge 0$이려면 $3-\sqrt{a^2+4} \ge 0$

$3 \ge \sqrt{a^2+4}$ 양변을 제곱하면

$a^2+4 \le 9,\ a^2 \le 5 \qquad \therefore\ -\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

따라서 만족하는 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$로 5개이다.

57) 2

⇨ 극값을 갖지 않는 함수가 되려면 양수 a에 대하여 모든 실수에서 $f'(x) \ge 0$이므로

즉 $f'(x)=a-2\sin 2x \ge 0$가 항상 성립해야 하므로 $a \ge 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

58) $k<\frac{13}{4}$

⇨ $f'(x)=-e^{-x}(x^2-3x+k)+e^{-x}(2x-3)$

$\quad =e^{-x}(-x^2+5x-k-3)$

$e^{-x}>0$이므로 $f'(x)=0$이려면

$x^2-5x+k+3=0\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 ㉠의 실근이 존재하고, 그 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다. 즉, ㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k+3)>0 \quad \therefore k<\frac{13}{4}$

59) $k<0$

⇨ $f'(x)=-\frac{k}{x^2}-4=-\frac{4x^2+k}{x^2}$

$f'(x)=0$이려면 $4x^2+k=0\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=-16k>0 \qquad \therefore k<0$

60) 15

⇨ $f'(x)=4x-\frac{k}{x^2}-\frac{12}{x}=\frac{4x^3-12x-k}{x^2}$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값이 모두 존재하려면 방정식 $4x^3-12x-k=0$이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$g(x)=4x^3-12x-k$라 놓으면 삼차함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 서로 달라야 한다.

$g'(x)=12x^2-12$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=-1$

$g(1)g(-1)<0$이어야 하므로

$(-8-k)(8-k)<0,\ (k-8)(k+8)<0$

$\therefore\ -8<k<8$

따라서 만족하는 정수 k는 $-7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7$로 15개이다.

61) 1

⇨ $f'(x)=e^{x^2}+(x-a)2xe^{x^2}=e^{x^2}(2x^2-2ax+1)$

$f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서

$2x^2-2ax+1=0$이 중근 혹은 허근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-2 \le 0,\ (a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) \le 0$

$-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$

따라서 가장 큰 정수는 1이다.

62) $-1 \le a \le 1$

⇨ $f'(x)=\cos x+a=0$

즉 $\cos x=-a$를 만족하는 a의 범위는

$-1 \le \cos x=-a \le 1$이므로 $-1 \le a \le 1$이다.

63) $0<a<\frac{1}{4}$

⇨ $f'(x)=\frac{1}{x}-a\frac{1}{x^2}-1=\frac{-x^2+x-a}{x^2}$

극댓값과 극솟값을 모두 가지기 위해서

$-x^2+x-a=0$

$x^2-x+a=0$이

$x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $D=1-4a>0 \quad \therefore\ \frac{1}{4}>a$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

(ⅱ) (두 근의 합)$=1>0$
(ⅲ) (두 근의 곱)$=a>0$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 $0<a<\frac{1}{4}$이다.

64) $a<-2$
⇨ $y'=2e^{2x}+4ae^{x}+8$
$e^{x}=t(t>0)$로 치환하자. $y'=2t^2+4at+8$
$2t^2+4at+8=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 주어진 함수가 극댓값과 극솟값을 모두 가진다.
$t^2+2at+4=0$
$\frac{D}{4}=a^2-4>0$
$\therefore\ a<-2$ 또는 $a>2$
이때, $a>2$일 때 $t<0$이 될 수 있으므로 조건에 맞지 않는다.
따라서 상수 a의 값의 범위는 $a<-2$이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110