단원 ISSUE

이 단원에서는 **원의 방정식과 원과 직선의 위치관계, 접선의 방정식을 묻는 문제**가 주로 출제됩니다.
앞에서 학습한 직선의 방정식과 마찬가지로 원의 방정식을 구하는 공식 역시 여러 가지가 있으므로 주어진 문제에 따라 올바른 방정식을 세워 문제를 해결할 수 있도록 반복적인 학습이 필요합니다.
원과 직선의 위치관계 및 접선의 방정식도 마찬가지로 문제에서 요구하는 바를 정확히 파악하여 식을 세워나가는 것이 중요합니다. 또한, 종종 복잡한 계산을 요구하는 문제가 출제되므로 반복적인 연습을 통해 실수를 최소화하도록 합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. 두 점 $(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$를 잇는 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형의 외접원의 방정식이 $(x-2)(x-6)+(y+a)(y+b)=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하면?

① 5 ② 10
③ 13 ④ 25
⑤ 26

[스스로 확인하기]

2. 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원의 넓이의 합을 구하면?

① 16π ② 17π
③ 18π ④ 26π
⑤ 34π

[스스로 확인하기]

3. 중심이 직선 $y=2x+2$ 위에 있고 두 점 $(2,\ 3)$, $(-1,\ 4)$를 지나는 원의 넓이를 구하면?

① 4π ② 5π
③ 9π ④ 25π
⑤ 36π

[스스로 확인하기]

4. 방정식 $ax^2+y^2+2ax-by=0$이 반지름의 길이가 3인 원을 나타낼 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 32 ② 33
③ 34 ④ 35
⑤ 36

[스스로 확인하기]

5. 중심이 직선 $x+y+1=0$ 위에 있고, 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 4)$를 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$
③ $2\sqrt{2}$ ④ 3
⑤ $\sqrt{10}$

[스스로 확인하기]

6. 중심이 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이 점 $(a,\ 1)$을 지날 때, 상수 a의 값의 합을 구하면?

① 3 ② 5
③ 6 ④ 8
⑤ 12

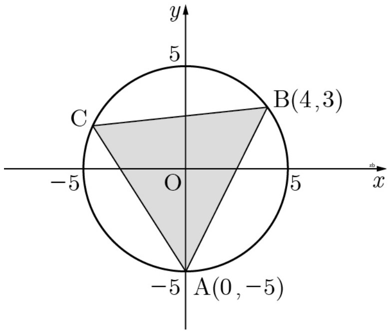
[스스로 마무리하기]

7. 점 $\mathrm{Q}(5,\ 3)$에서 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 위를 움직이는 점 P까지의 거리가 정수가 되는 점P의 개수는?

① 4 ② 6
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[스스로 마무리하기]

8. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(0,-5)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$이 있다. $\triangle CAB$의 넓이가 최대가 되도록 하는 원 위의 한 점 C와 원의 중심을 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면?



① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

[스스로 확인하기]

9. 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=2x+k$의 위치관계에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $k<-3\sqrt{5}$이면 교점은 2개이다.
② $k=\pm\sqrt{5}$이면 교점은 1개이다.
③ $k=\pm3\sqrt{5}$이면 교점은 1개이다.
④ $k>3\sqrt{5}$이면 교점은 2개이다.
⑤ $k<-\sqrt{5}$이면 교점은 0개이다.

[스스로 확인하기]

10. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$과 직선 $4x+3y=9$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 자연수 r의 최솟값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[스스로 확인하기]

11. 점 $(0,\ -4)$에서 y축에 접하고 중심이 제3사분면 위에 있는 원이 직선 $3x-4y+8=0$에 접할 때, 이 원의 넓이를 구하면?

① 4π　② 6π　③ 8π　④ 9π　⑤ 10π

[스스로 확인하기]

12. 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 직선 $y=3x+7$에 평행한 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ 8　④ $8\sqrt{2}$　⑤ 20

[스스로 확인하기]

13. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+2x+4y+k=0$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하면?

① 2　② -5　③ -8　④ -15　⑤ 4

[스스로 확인하기]

14. 어떤 태풍이 시속 $200\,\mathrm{km}$의 속력으로 북쪽을 향하여 진행하고 있고, 이 태풍의 눈에서 $100\,\mathrm{km}$ 이내의 영역이 태풍의 영향권이다. 태풍의 눈으로부터 동쪽으로 $400\,\mathrm{km}$ 떨어진 지점에서 헬기가 비행을 시작하여 1시간 30분 후에 태풍의 경계선에 접하면서 지나갔다. 헬기의 속력이 시속 $a\,\mathrm{km}$로 일정할 때, a의 값을 구하면? (단, 태풍의 눈의 크기와 헬기의 크기, 높이는 무시하고 $\sqrt{6}=2.4$로 계산한다.)

① 180　② 200　③ 320　④ 420　⑤ 480

[스스로 마무리하기]

15. **원 $x^2+y^2+ax-3ay+4=0$이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 둘레의 길이를 이등분할 때, 양수 a의 값은?**

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

16. **두 점 $(0,-3)$, $(4,1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 직선 $y=x+k$와 만나지 않을 때, 자연수 k의 최솟값은?**

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

17. **원 $x^2+y^2+2ax+2by-16=0$이 직선 $y=mx$와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하면? (단, a, b, m은 실수이고, O는 원점이다.)**

① 4
② 9
③ 16
④ 32
⑤ 48

실전문제

18. **세 점 $A(-3,2)$, $B(5,4)$, $C(0,k)$를 지나는 원에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 실수이고, $k\neq\dfrac{11}{4}$이다.)**

<보기>

ㄱ. $k=-10$일 때 원의 중심은 $\left(\dfrac{5}{2},-3\right)$이다.

ㄴ. 원의 중심이 제 3 사분면 위에 있도록 하는 k는 존재하지 않는다.

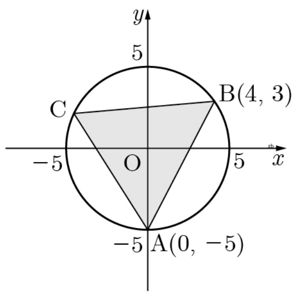
ㄷ. 원의 넓이가 최소가 되게 하는 모든 k의 값의 합은 6이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. **좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$와 함수 $y=m|x|$의 그래프의 교점의 개수를 $f(m)$이라고 하자. $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값은?**

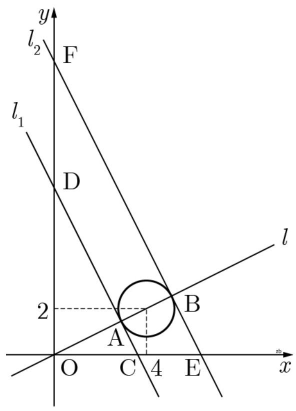
① 6
② 7
③ 13
④ 17
⑤ 19

20. **다음 그림과 같이 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 $A(0,-5)$, $B(4,3)$과 원 위를 움직이는 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되게 하는 점 C의 좌표를 (a,b)라 할 때, $3a+7b$의 값은?**



① 1
② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$
④ 2
⑤ $\sqrt{5}$

21. 다음 그림과 같이 제1사분면 위에 중심의 좌표가 $(4,2)$인 원이 있다. 이 원의 중심과 원점을 지나는 직선 l이 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 또한 두 점 A, B를 각각 접점으로 하는 두 접선 l_1, l_2가 x축과 y축과 만나는 점을 각각 C, D, E, F라 하자. 사다리꼴 $DCEF$의 넓이가 $\frac{50\sqrt{5}}{3}$일 때, 원의 반지름의 길이는?



① $\frac{5}{3}$　② $\frac{31}{18}$　③ $\frac{16}{9}$　④ $\frac{11}{6}$　⑤ $\frac{17}{9}$

22. 좌표평면 위에 원 $C: x^2+y^2=r^2$과 점 $A(3,-3)$이 있다. 점 A에서 원 C에 그은 접선 l이 원 C와 만나는 접점을 점 P라 하고, 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 원 C와 만나는 다른 한 점을 Q라 하자. 삼각형 APQ가 이등변삼각형이 되도록 하는 점 P의 좌표를 (a,b)라 할 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?
(단, $0<r<3\sqrt{2}$)

① $\frac{23}{25}$　② $\frac{24}{25}$　③ 5　④ $\frac{26}{25}$　⑤ $\frac{27}{25}$

23. 직선 $y=m(x+n)$이 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+5)^2+y^2=4$에 동시에 접할 때, 두 실수 m, n에 대하여 m^2n의 값은?

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

24. y축 위의 점 $(0,n)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 접선을 그을 때, 제1사분면에 있는 접점을 (x_n, y_n)이라 하자.
$\frac{{x_3}^2}{4}\times\frac{{x_4}^2}{4}\times\frac{{x_5}^2}{4}\times\cdots\cdots\times\frac{{x_9}^2}{4}\times\frac{{x_{10}}^2}{4}=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, $n\geq 3$인 자연수이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 51　② 53　③ 54　④ 55　⑤ 56

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)=(4,\ 3)$이다.

외접원의 반지름의 길이는 두 점 $(2,\ 1)$, $(4,3)$ 사이의 거리이므로 $\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$이다.

따라서 외접원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=8$이고 $x^2+y^2-8x-6y+17=0$이다.

$(x-2)(x-6)+(y+a)(y+b)=0$에서

$x^2+y^2-8x+(a+b)y+12+ab=0$이다.

따라서 $a+b=-6$, $ab=5$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-6)^2-2\cdot5=26$

2) [정답] ④

[해설] 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 제2사분면에 존재한다. 반지름의 길이를 $a(a>0)$라 하고 원의 중심의 좌표를 $(-a,a)$라 하면 원의 방정식은 $(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$이다.

이 원은 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$(-2+a)^2+(1-a)^2=a^2$, $a^2-6a+5=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 반지름의 길이가 각각 $1,5$이므로 두 원의 넓이의 합은 $\pi+25\pi=26\pi$이다.

3) [정답] ②

[해설] 중심이 직선 $y=2x+2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(k,\ 2k+2)$라 하고 반지름의 길이를 r라 하면 구하는 원의 방정식은

$(x-k)^2+(y-2k-2)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(2,\ 3)$, $(-1,\ 4)$를 지나므로

$(2-k)^2+(3-2k-2)^2=r^2$에서

$5k^2-8k+5=r^2 \quad \cdots ㉠$

$(-1-k)^2+(4-2k-2)^2=r^2$에서

$5k^2-6k+5=r^2 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=0$, $r^2=5$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=5\pi$이다.

4) [정답] ②

[해설] x^2과 y^2의 계수가 같아야 하므로 $a=1$이다.

$x^2+y^2+2x-by=0$에서

$(x+1)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1+\frac{b^2}{4}$이므로

$1+\frac{b^2}{4}=3^2$이고 $b^2=32$이다.

따라서 $a^2+b^2=33$이다.

5) [정답] ⑤

[해설] $x+y+1=0$에서 $y=-x-1$이므로 원의 중심을 $(a,\ -a-1)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y+a+1)^2=r^2$이다.

두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 4)$를 지나므로

$(1-a)^2+(a+1)^2=r^2$

$(-1-a)^2+(4+a+1)^2=r^2$이고 두 식을 연립하면 $a=-2$, $r^2=10$이다.

따라서 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

6) [정답] ③

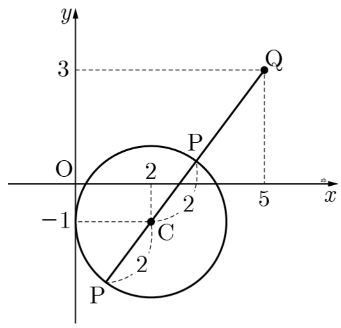
[해설] 중심이 $(3,2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$이다. 이 원이 점 $(a,1)$을 지나므로 $(a-3)^2+(1-2)^2=5$

$(a-3)^2=4 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 실수 a의 값의 합은 6이다.

7) [정답] ③

[해설] 그림과 같이 원 위의 점 P에서 Q까지의 길이가 최소, 최대가 되는 경우는 점 P가 원의 중심 $(2,-1)$을 지나는 직선 위에 있을 때이다. 주어진 원의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(2,\ -1)$이고 원의 반지름의 길이는 2이다.



$\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{(5-2)^2+\{3-(-1)\}^2}=5$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값 M은

$M=\overline{\mathrm{CQ}}+$(반지름의 길이)$=5+2=7$이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값 m은

$m=\overline{\mathrm{CQ}}-$(반지름의 길이)$=5-2=3$이므로

$3\le \overline{PQ}\le 7$이다. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 정수가 되는 점 P를 찾아보면

(i) $\overline{\mathrm{PQ}}=4,5,6$을 만족하는 점 P는 각각 2개

(ii) $\overline{\mathrm{PQ}}=3,7$을 만족하는 점 P는 각각 1개

따라서 구하는 점P의 개수는 8개이다.

8) [정답] ②

[해설] $\overline{AB}$의 길이가 고정되어 있으므로 점 C에서 직선 AB까지의 거리인 높이가 최대일 때 $\triangle CAB$의 넓이가 최대가 된다.

이때 점 C에서 직선 AB까지의 거리는 점 C에서 원의 중심 $(0,0)$까지 그린 선분의 연장선이

직선 AB와 수직일 때 최대이므로 구하는 직선은 AB의 수직이등분선이 된다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{3-(-5)}{4-0}=2$이므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고, 원의 중심 $(0,0)$을 지나므로 $y=-\frac{1}{2}x$이다. 따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$이고 $a+b=-\frac{1}{2}$이다.

9) [정답] ③

[해설] $y=2x+k$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면 $x^2+(2x+k)^2=9$이고 $5x^2+4kx+k^2-9=0$이다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-9)=-k^2+45$

(ⅰ) $D>0$, $-k^2+45>0$, $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

따라서 $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$일 때, 교점은 2개이다.

(ⅱ) $D=0$, $-k^2+45=0$, $k=\pm 3\sqrt{5}$

따라서 $k=\pm 3\sqrt{5}$일 때, 교점은 1개이다.

(ⅲ) $D<0$, $-k^2+45<0$

$k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$

따라서 $k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$일 때, 교점은 없다.

10) [정답] ③

[해설] 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $4x+3y=9$ 사이의 거리는 $\frac{|4-6-9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{11}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 점에서 만나려면 $r>\frac{11}{5}$이다.

따라서 자연수 r의 최솟값은 3이다.

11) [정답] ④

[해설] 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r,\ -4)$이다. 원의 중심 $(-r,\ -4)$와 직선 $3x-4y+8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3r+16+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-3r+24|}{5}$이므로 원과 직선이 접하려면 $\frac{|-3r+24|}{5}=r$, $-3r+24=\pm 5r$이므로 $r=3$이다. 따라서 구하는 원의 넓이는 9π이다.

12) [정답] ⑤

[해설] 직선 $y=3x+7$에 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$, $y=3x\pm 10$이다. 따라서 접선이 y축과 만나는 점의 좌표가 각각 $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이므로 $\overline{PQ}=20$이다.

13) [정답] ④

[해설] 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $x+2y=5$이다. $x^2+y^2+2x+4y+k=0$에서 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$이다.

직선 $x+2y=5$과 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$의 중심 $(-1,\ -2)$ 사이의 거리는

$\frac{|-1-4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$이다.

직선 $x+2y=5$과 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$이 접하므로 $5-k=(2\sqrt{5})^2$이고 $k=-15$이다.

14) [정답] ③

[해설] 좌표평면 위에 태풍의 눈의 처음 위치가 원점, 1시간 30분 후의 태풍의 눈의 위치가 y축 위에 오도록 놓고, 헬기의 처음 위치를 A, 1시간 30분 후의 태풍의 눈의 위치를 B라 하면 $\mathrm{A}(400,0)$, $\mathrm{B}(0,300)$

1시간 30분 후의 태풍의 영향권의 경계선을 나타내는 방정식은 $x^2+(y-300)^2=100^2$

점 A에서 원 $x^2+(y-300)^2=100^2$에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$\overline{\mathrm{BP}}=100$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{400^2+300^2}=500$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BP}}^2}=\sqrt{500^2-100^2}=480$

따라서 헬기는 점 A의 위치에서 1시간 30분 동안 480km를 이동하였으므로 헬기의 속력 a는

$a=\frac{480}{1.5}=320$이다.

15) [정답] ②

[해설] 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x^2+y^2+ax-3ay+4$
$-(x^2+y^2+2ax-4ay+16)=0$이고
$ax-ay+12=0$이다.

$x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$에서

$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-16$

이때 직선 $ax-ay+12=0$이

원 $(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-16$의

중심 $(-a,2a)$를 지나면 원의 둘레를 이등분하므로 $a\times(-a)-a\times 2a+12=0$, $3a^2=12$

$\therefore\ a=2$

16) [정답] ②

[해설] 두 점 $(0,-3)$, $(4,1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{4}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)=(2,\ -1)$이고, 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{4^2+(1+3)^2}}{2}=2\sqrt{2}$이다.

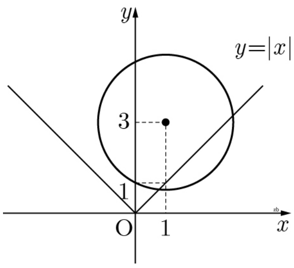
원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}$이다. 원의 반지

름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면 $\dfrac{|3+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|3+k|>4$이고 $3+k<-4$ 또는 $3+k>4$이다.
따라서 $k<-7$ 또는 $k>1$이므로 자연수 k의 최솟값은 2이다.

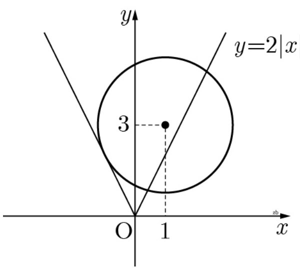
17) [정답] ③
[해설] $y=mx$를 $x^2+y^2+2ax+2by-16=0$에 대입하여 정리하면 $(1+m^2)x^2+2(a+bm)x-16=0$이다. $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$라 하면 x_1, x_2는 이차방정식 $(1+m^2)x^2+2(a+bm)x-16=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $x_1x_2=-\dfrac{16}{1+m^2}$이다.
두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$는 직선 $y=mx$ 위에 있으므로 $y_1=mx_1$, $y_2=mx_2$이다.
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+m^2x_1^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x_1|$
$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_2^2+m^2x_2^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x_2|$
$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=(1+m^2)\,|x_1x_2|$
$=(1+m^2)\cdot\left|-\dfrac{16}{1+m^2}\right|$
$=(1+m^2)\cdot\dfrac{16}{1+m^2}=16$

18) [정답] ⑤
[해설] 세 점을 지나는 원의 중심은 삼각형 ABC의 외심이다.
즉, 세 변의 수직이등분선의 교점과 같으므로
$\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식을 구하자.
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(1,\ 3)$이고
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{4-2}{5+3}=\dfrac{1}{4}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.
따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식은
$y-3=-4(x-1)$, 즉 $y=-4x+7$이다.
그러므로 세 점을 지나는 원의 중심은 직선 $y=-4x+7$위의 점이다.
ㄱ. 원의 중심의 좌표를 $P(a,\ -4a+7)$이라 하면
$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a+3)^2+(-4a+5)^2=a^2+(-4a+17)^2$
$\therefore a=\dfrac{5}{2}$
따라서 원의 중심은 $\left(\dfrac{5}{2},\ -3\right)$이다. (참)
ㄴ. 직선 $y=-4x+7$은 제 3 사분면을 지나지 않으므로 원의 중심은 제 3 사분면 위에 존재하지 않는다. (참)
ㄷ. 원의 반지름의 길이가 최소일 때, 원의 넓이도 최소이다.
원의 중심을 $P(a,\ -4a+7)$이라 하면
반지름의 길이는
$\overline{PA}=\sqrt{(a+3)^2+(-4a+5)^2}$
$=\sqrt{17a^2-34a+34}$
$=\sqrt{17(a-1)^2+17}$
따라서 $\overline{PA}$는 $a=1$일 때 최솟값 $\sqrt{17}$을 갖는다.
따라서 $P(1,\ 3)$이고
$\overline{PC}=\sqrt{17}$에서 $\overline{PC}^2=17$이므로
$1+(3-k)^2=17$
$(k-3)^2=16$
$k^2-6k-7=0$, $(k+1)(k-7)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=7$
따라서 모든 k의 값의 합은 6이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19) [정답] ④
[해설] 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$와 직선 $y=-mx$가 접하면 원의 중심 $(1,3)$과 직선 $mx+y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$와 같다.
$\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$
$|m+3|=\sqrt{5m^2+5}$
$m^2+6m+9=5m^2+5$
$2m^2-3m-2=0$
$(2m+1)(m-2)=0$
$m=-\dfrac{1}{2}$, $m=2$
$m>0$이므로 $m=2$이다.

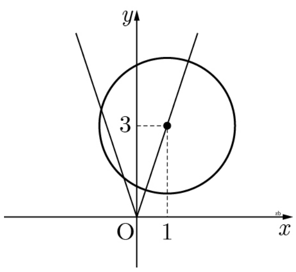


위 그림에서 $m=1$일 때 $f(1)=2$이다.



$m=2$일 때 함수 $y=2|x|$와
원 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$는 접하므로 $f(2)=3$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

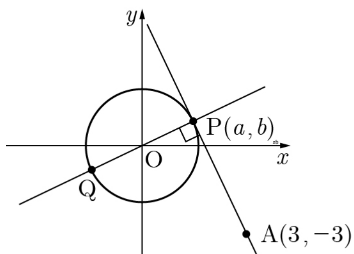


위 그림에서 $m \geq 3$일 때 $f(3)=4$이다.
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
$=2+3+4+4+4=17$

20) [정답] ⑤
[해설] 삼각형 ABC의 넓이가 최대이려면
직선 AB에서 원 위의 점 C까지의 길이가 최대가 될 때이다. 따라서 점 C는 직선 AB에 수직이면서 점 $(0,0)$을 지나는 직선 위에 있다.
직선 AB의 기울기가 $\frac{3+5}{4-0}=2$이므로
직선 AB에 수직이면서 점 $(0,0)$을 지나는 직선의
방정식은 $y=-\frac{1}{2}x$이다.
즉, 점 C는 직선 $y=-\frac{1}{2}x$와 원 $x^2+y^2=25$와의 교점이므로 $x=-2y$를 $x^2+y^2=25$에 대입하면
$4y^2+y^2=25$이다.
따라서 $y=\pm\sqrt{5}$이고
$y>0$이므로 $y=\sqrt{5}$, $x=-2\sqrt{5}$이다.
$a=-2\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$
$\therefore 3a+7b=\sqrt{5}$

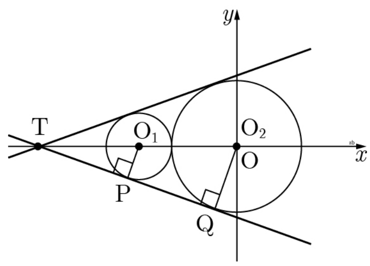
21) [정답] ①
[해설] 직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로
직선 l_1, l_2의 기울기는 -2이다.
따라서 l_1, l_2의 방정식은 중심이 $(4,2)$이고
반지름이 r인 원에 접하는 접선의 방정식이므로
$y-2=-2(x-4)\pm r\sqrt{4+1}$이다.
즉, $y=-2x+10\pm r\sqrt{5}$이다.
따라서 점 $F(0,10+r\sqrt{5})$, $D(0,10-r\sqrt{5})$,
$C\left(\frac{10-r\sqrt{5}}{2},0\right)$, $E\left(\frac{10+r\sqrt{5}}{2},0\right)$이다.
그러므로 사다리꼴 $DCEF$의 넓이는
$\frac{50\sqrt{5}}{3}=\triangle FOE-\triangle DOC$이다.
즉, $\frac{50\sqrt{5}}{3}=\frac{(10+r\sqrt{5})^2}{4}-\frac{(10-r\sqrt{5})^2}{4}$이므로
방정식을 풀면 $r=\frac{5}{3}$이다.

22) [정답] ⑤



[해설]
그림으로부터 $\overline{OP}=r$, $\overline{PQ}=2r$이고 삼각형 APQ가 이등변삼각형이므로 $\overline{AP}=2r$이다.
직각삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리로부터
$\overline{OA}=\sqrt{5}r$
$\overline{OA}^2=5r^2=(3^2+3^2)=18 \quad \therefore r^2=\frac{18}{5}$
또한 $P(a,b)$는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=\frac{18}{5}$ $\cdots$ ㉠
한편, 접선의 방정식 l은 $ax+by=\frac{18}{5}$이다.
직선 l이 $(3,\ -3)$을 지나므로 $3a-3b=\frac{18}{5}$
$\therefore a-b=\frac{6}{5}$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$을 이용하면
$\frac{36}{25}=\frac{18}{5}-2ab$
$\therefore ab=\frac{27}{25}$

23) [정답] ③
[해설]



두 원의 중심을 O_1, O_2,
두 접점을 P, Q, 점 $T(-n,0)$라고 하자.
삼각형 TPO_1과 삼각형 TQO_2는 닮음이고
$\overline{PO_1}:\overline{QO_2}=2:3$이므로 $\overline{TO_1}:\overline{TO_2}=2:3$이다.
$\overline{O_1O_2}=5$이므로 $\overline{TO_2}:\overline{O_1O_2}=3:1$에서 $\overline{TO_2}=15$
$\therefore n=15$
원 $O_2(0,0)$과 직선 $y=m(x+15)$ 사이의 거리는
$\frac{|15m|}{\sqrt{m^2+1}}$이고 반지름은 3이므로 $\frac{|15m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$이다.
$|5m|=\sqrt{m^2+1}$
$m^2+1=25m^2$

$m^2 = \frac{1}{24}$

$\therefore\ m^2n = \frac{1}{24} \times 15 = \frac{5}{8}$

24) [정답] ⑤

[해설] 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이 (x_n, y_n)이므로
점 (x_n, y_n)를 지나는
접선의 방정식은 $x_n x + y_n y = 4$
이고 접선이 점 $(0, n)$을 지나므로 $ny_n = 4$,
$y_n = \frac{4}{n}$이고 ${x_n}^2 + {y_n}^2 = 4$에서
${x_n}^2 = 4 - \frac{16}{n^2}$이다.
$\frac{{x_n}^2}{4} = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{16}{n^2}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)$이므로
$\frac{{x_3}^2}{4} \times \frac{{x_4}^2}{4} \times \frac{{x_5}^2}{4} \times \cdots \times \frac{{x_9}^2}{4} \times \frac{{x_{10}}^2}{4}$
$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{6}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{5}$
$\times \cdots \times \frac{7}{9} \times \frac{11}{9} \times \frac{8}{10} \times \frac{12}{10}$
$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{11}{9} \times \frac{12}{10} = \frac{11}{45}$
이다.
따라서 $q = 11$, $p = 45$이므로 $p + q = 56$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574