필수유형 01 함수의 뜻

두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 대응 중 X에서 Y로의 함수인 것을 찾아라.

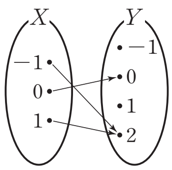
(1) $x \longrightarrow 2|x|$　　(2) $x \longrightarrow 2x+1$　　(3) $x \longrightarrow x^2+1$

풍쌤 POINT

X에서 Y로의 함수 ➡ X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응한다는 뜻이야.

풀이

(1) STEP1 대응을 그림으로 나타내기



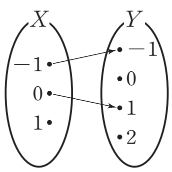
❶

❶ $x=-1$일 때, $2|x|=2\times|-1|=2$
$x=0$일 때, $2|x|=2\times|0|=0$
$x=1$일 때, $2|x|=2\times|1|=2$

STEP2 대응이 함수인지 확인하기

집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

(2) STEP1 대응을 그림으로 나타내기



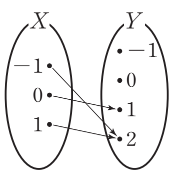
❷

❷ $x=-1$일 때, $2x+1=2\times(-1)+1=-1$
$x=0$일 때, $2x+1=2\times0+1=1$
$x=1$일 때, $2x+1=2\times1+1=3$

STEP2 대응이 함수인지 확인하기

집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(3) STEP1 대응을 그림으로 나타내기



❸

❸ $x=-1$일 때, $x^2+1=(-1)^2+1=2$
$x=0$일 때, $x^2+1=0^2+1=1$
$x=1$일 때, $x^2+1=1^2+1=2$

STEP2 대응이 함수인지 확인하기

집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 (1), (3)이다.

답 (1), (3)

풍쌤 강의 NOTE

X에서 Y로의 대응 — X의 각 원소에 대응하는 Y의 원소가 — 1개이면 → 함수이다. / 없는 경우가 있으면, 2개 이상인 경우가 있으면 → 함수가 아니다.

01-1 유사

집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 대응 중 X에서 X로의 함수인 것을 찾아라.

(1) $x \longrightarrow 2x$

(2) $x \longrightarrow x-1$

(3) $x \longrightarrow |x|-1$

01-2 유사

두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 대응 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 찾아라.

(1) $x \longrightarrow x^2$

(2) $x \longrightarrow |x|+2$

(3) $x \longrightarrow x^3+2$

01-3 변형

집합 $X=\{-2,\ 0,\ 2\}$에 대하여 다음 중 X에서 X로의 함수가 아닌 것은?

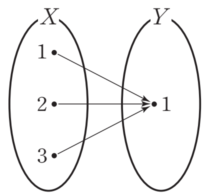
① $f(x)=-x$　　② $f(x)=|x|$

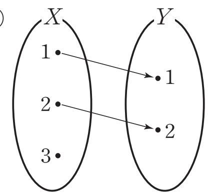
③ $f(x)=-|x|$　　④ $f(x)=x^2$

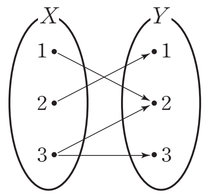
⑤ $f(x)=x^2-2$

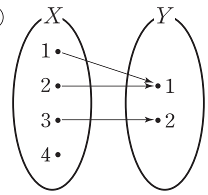
01-4 변형

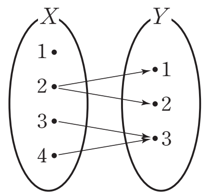
다음 대응 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

①


②


③


④


⑤


01-5 변형

두 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 |보기| 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 골라라.

|보기|

ㄱ. $f(x)=x$　　ㄴ. $f(x)=-x$

ㄷ. $f(x)=x^2-2$　　ㄹ. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

필수유형 02 함숫값과 치역

함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 정의역이 $\{x \mid -4 \le x \le 4\}$, 치역이 $\{y \mid -7 \le y \le 17\}$이 되도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

(2) 정의역이 $\{x \mid -6 \le x \le -2\}$, 치역이 $\{y \mid 2 \le y \le 10\}$이 되도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

풍쌤 POINT

정의역이 $\{x \mid \alpha \le x \le \beta\}$인 함수 $f(x)=ax+\beta$의 치역이 $\{y \mid c \le y \le d\}$

→ $a>0$ → $f(\alpha)=c$, $f(\beta)=d$

→ $a<0$ → $f(\alpha)=d$, $f(\beta)=c$

풀이

(1) STEP1 **$f(-4)$, $f(4)$의 값 구하기**

함수 $f(x)=ax+b$에서 $a>0$이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.❶

$\therefore f(-4)=-7$, $f(4)=17$❷

STEP2 **a, b의 값 구하기**

$f(-4)=-7$에서 $-4a+b=-7$ …… ㉠

$f(4)=17$에서 $4a+b=17$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2b=10$ $\quad \therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면 $-4a+5=-7$ $\quad \therefore a=3$

STEP3 **$a+b$의 값 구하기**

$\therefore a+b=3+5=8$

(2) STEP1 **$f(-6)$, $f(-2)$의 값 구하기**

함수 $f(x)=ax+b$에서 $a<0$이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.❸

$\therefore f(-6)=10$, $f(-2)=2$

STEP2 **a, b의 값 구하기**

$f(-6)=10$에서 $-6a+b=10$ …… ㉠

$f(-2)=2$에서 $-2a+b=2$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $4a=-8$ $\quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $4+b=2$ $\quad \therefore b=-2$

STEP3 **$a+b$의 값 구하기**

$\therefore a+b=-2+(-2)=-4$

답 (1) 8 (2) -4

❶ 함수 $y=ax+b$에서 $a>0$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

❷ x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 x의 값이 최소일 때 y의 값도 최소이고, x의 값이 최대일 때 y의 값도 최대이다.

❸ 함수 $y=ax+b$에서 $a<0$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

풍쌤 강의 NOTE

일차함수나 이차함수에서 치역을 구하는 문제는 정의역에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 것과 같다.

02-1 유사

정의역이 $\{x|0\le x\le 3\}$인 함수 $y=ax+b$의 치역이 $\{y|-5\le y\le 1\}$이 되도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

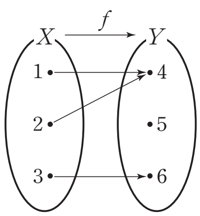
02-2 유사

정의역이 $\{x|-2\le x\le 2\}$인 함수 $y=ax^2+2ax+b$의 치역이 $\{y|-3\le y\le 6\}$이 되도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

02-3 변형

기출

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 다음 그림과 같을 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.



02-4 변형

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{12, 22, 32\}$에 대하여 $f(x)=ax+2$가 X에서 Y로의 함수가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

02-5 변형

실수 전체의 집합에서 함수 f를

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & (x\text{는 유리수}) \\ x^2 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

으로 정의할 때, $f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$의 값을 구하여라.

02-6 실력

자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$f(x)=$(x 이하의 자연수 중 양의 약수의 개수가 홀수인 수의 개수)

일 때, $f(8)+f(20)$의 값을 구하여라.

필수유형 03 서로 같은 함수

다음 물음에 답하여라.

(1) 집합 $X=\{1, 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=2x^3-1$이 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

(2) 집합 $X=\{-1, a\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x+b$가 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $n(X)=2$)

풍쌤 POINT

두 함수 f, g가 모두 집합 X를 정의역으로 하고 있으므로 두 함수가 서로 같으려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같은지만 확인하면 돼.

풀이

(1) STEP1 서로 같은 함수임을 이용하여 관계식 찾기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 같으므로❶ 정의역의 원소인 1, 2에 대하여

$f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$

STEP2 a, b에 대한 식 세우기

$f(1)=g(1)$에서 $a+b=2\times1^3-1$ $\quad\therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $2a+b=2\times2^3-1$ $\quad\therefore 2a+b=15$ ⋯⋯ ㉡

STEP3 $a-b$의 값 구하기

㉡$-$㉠을 하면 $a=14$

$a=14$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $b=-13$

$\therefore a-b=14-(-13)=27$

(2) STEP1 서로 같은 함수임을 이용하여 관계식 찾기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 같으므로 정의역의 원소인 -1, a에 대하여

$f(-1)=g(-1)$, $f(a)=g(a)$❷

STEP2 a, b의 값 구하기

$f(-1)=g(-1)$에서 $(-1)^2+(-1)+1=-1+b$

$\therefore b=2$ ⋯⋯ ㉠

$f(a)=g(a)$에서 $a^2+a+1=a+b$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2+a+1=a+2$

$a^2-1=0$, $(a+1)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

이때 집합 X의 원소가 2개❸이어야 하므로 $a=1$

STEP3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=1+2=3$

❶ 두 함수 f, g가 서로 같으면
(i) 정의역과 공역이 각각 같다.
(ii) 정의역에 속하는 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$

❷ 정의역에 미지수가 있더라도 풀이 방법은 (1)과 마찬가지로 두 함숫값이 같음을 이용한다.

❸ $n(X)=2$에서 $a\neq-1$

답 (1) 27 (2) 3

풍쌤 강의 NOTE

정의역이 같은 두 함수가 서로 같다는 것은 두 함수의 함수식이 같다는 것이 아니라, 정의역에 속하는 모든 원소에 대하여 두 함수의 함숫값이 같다는 뜻이다.

03-1 유사

집합 $X=\{-1, 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수

$$f(x)=x+a,\ g(x)=\frac{b}{x+2}$$

가 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

03-2 유사

집합 $X=\{-2, a\}$를 정의역으로 하는 두 함수

$$f(x)=x^3+bx^2,\ g(x)=4x-8$$

로 정의하자. 두 함수 f와 g가 서로 같도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a\neq-2$)

03-3 변형

정의역이 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$인 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 함수 f와 서로 같은 함수인 것만을 |보기|에서 모두 골라라.

(단, 세 함수 g, h, k의 정의역은 집합 X이다.)

|보기|

ㄱ. $g(x)=x-1$

ㄴ. $h(x)=x^2$

ㄷ. $k(x)=\sqrt{x^2}$

03-4 변형

두 실수를 원소로 하는 집합 X에서 정의된 두 함수

$$f(x)=-x^2+8x,\ g(x)=x^2+6$$

이 서로 같을 때, 집합 X의 모든 원소의 합을 구하여라.

03-5 변형

공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수

$$f(x)=x^2-1,\ g(x)=4x+20$$

에 대하여 $f=g$가 되도록 하는 집합 X를 |보기|에서 모두 골라라.

|보기|

ㄱ. $\{-3\}$　　ㄴ. $\{3\}$

ㄷ. $\{7\}$　　ㄹ. $\{-3, 7\}$

03-6 실력

공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수

$$f(x)=x^3+4,\ g(x)=4x^2+x$$

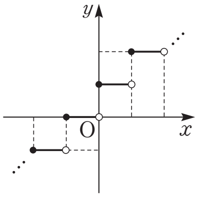
가 서로 같도록 하는 집합 X의 개수를 구하여라.

필수유형 04 함수의 그래프

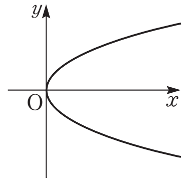
다음 |보기| 중 함수의 그래프인 것을 모두 골라라.

|보기|

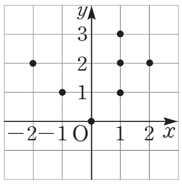
ㄱ.



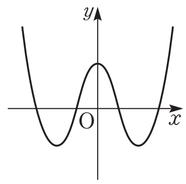
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



풍쌤 POINT

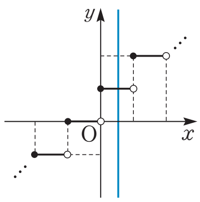
함수의 그래프는 y축에 평행한 직선을 그었을 때, 그래프와 직선의 교점이 오직 하나뿐인 그래프야.

풀이

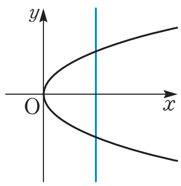
STEP 1 그래프에 y축에 평행한 직선 그어 보기

주어진 그래프에 y축에 평행한 직선을 그어 보면 다음과 같다.❶

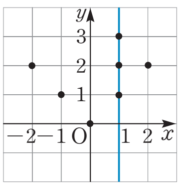
ㄱ.



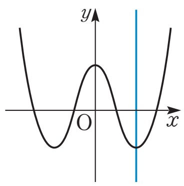
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



❶ 임의의 직선을 긋되, 그래프와 직선의 교점이 두 개 이상인 경우를 찾아본다.

STEP 2 함수의 그래프 찾기

함수의 그래프이면 y축에 평행한 직선과 그래프의 교점이 오직 하나뿐이어야 한다.❷

따라서 이를 만족시키는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

❷ 한 곳에서 교점이 하나인 것이 아니라, 모든 x에 대하여 y축에 평행한 직선과 교점이 하나뿐이어야 한다.

답 ㄱ, ㄹ

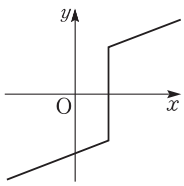
풍쌤 강의 NOTE

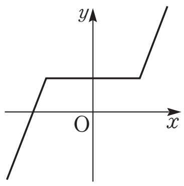
함수의 그래프인지 아닌지를 판단하려면 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그어 보면 된다. 이때 교점이 1개이면 함수의 그래프이고, 교점이 없거나 2개 이상이면 함수의 그래프가 아니다.

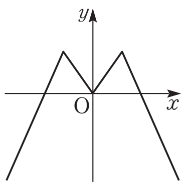
04-1 유사

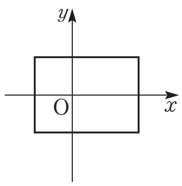
다음 |보기| 중 함수의 그래프인 것을 모두 골라라.

|보기|

ㄱ. 

ㄴ. 

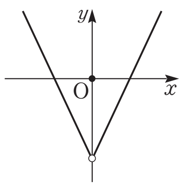
ㄷ. 

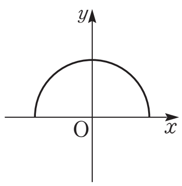
ㄹ. 

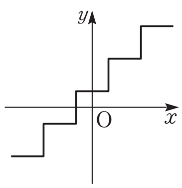
04-2 유사

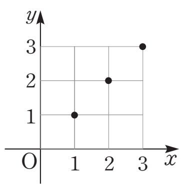
다음 |보기| 중 함수의 그래프인 것을 모두 골라라.

|보기|

ㄱ. 

ㄴ. 

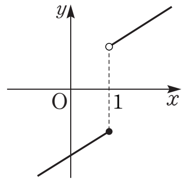
ㄷ. 

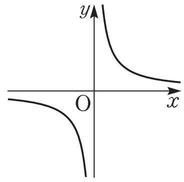
ㄹ. 

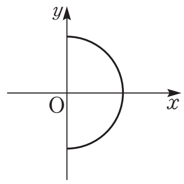
04-3 변형

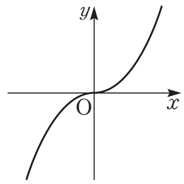
다음 |보기| 중 실수 전체의 집합에서 정의된 함수의 그래프인 것을 모두 골라라.

|보기|

ㄱ. 

ㄴ. 

ㄷ. 

ㄹ. 

04-4 변형

두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 |보기|에서 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 그래프가 될 수 있는 것을 골라라.

|보기|

ㄱ. $\{(-1, 2), (1, 5)\}$

ㄴ. $\{(-1, 1), (0, 3), (1, 3)\}$

ㄷ. $\{(-1, -1), (0, 2), (1, 1), (1, 4)\}$

필수유형 05 일대일함수와 일대일대응

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 집합 $X=\{x|1\le x\le 2\}$, $Y=\{y|4\le y\le 7\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} ax & (x\ge 0) \\ (3-a)x & (x<0) \end{cases}$가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

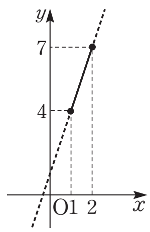
풍쌤 POINT

함수 f가 일대일대응이 되려면 f가 일대일함수이고 (치역)=(공역)이어야 해.

풀이

(1) **STEP1 일대일대응이 되는 조건 찾기**

함수 f가 일대일대응[1]이고 $a>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 이때 치역과 공역이 같아야 하므로 그래프가 두 점 $(1, 4)$, $(2, 7)$을 지나야 한다.



$\therefore f(1)=4$, $f(2)=7$

STEP2 a, b에 대한 식 세우기

$f(1)=4$에서 $a+b=4$ ······ ㉠

$f(2)=7$에서 $2a+b=7$ ······ ㉡

STEP3 ab의 값 구하기

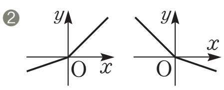
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$ $\therefore ab=3\times 1=3$

> ❶ 함수 f가 일대일대응이 되려면
> (i) x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.
> (ii) 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값이 공역에서의 양 끝 값과 같아야 한다.

(2) **STEP1 일대일대응이 되는 조건 찾기**

두 직선 $y=ax$, $y=(3-a)x$는 모두 원점을 지나므로 치역과 공역이 같다. 이때 함수 f가 일대일대응[2]이 되려면 x의 값이 증가할 때, $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.

즉, 두 직선 $y=ax$, $y=(3-a)x$의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 한다.

> ❷


STEP2 a에 대한 부등식 세우기

두 직선의 기울기의 부호가 같아야 하므로 $a(3-a)>0$

STEP3 정수 a의 개수 구하기

$a(a-3)<0$ $\therefore 0<a<3$

따라서 정수 a는 1, 2의 2개이다.

답 (1) 3 (2) 2

풍쌤 강의 NOTE

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수라고 해서 반드시 일대일대응인 것은 아니다.
따라서 일대일대응인지 판별할 때에는 일대일함수의 그래프인지 알아본 후 치역과 공역이 같은지를 확인한다.

05-1 유사

두 집합 $X=\{x\,|\,-3\le x\le 3\}$, $Y=\{y\,|\,-2\le y\le 10\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

05-2 유사

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x\ge 0) \\ (4-a)x+3 & (x<0) \end{cases}$$

가 일대일대응이 되도록 하는 자연수 a의 개수를 구하여라.

05-3 변형 기출

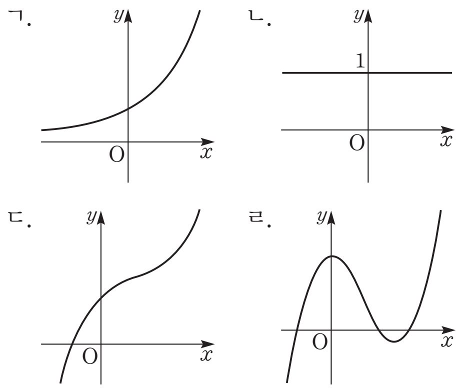
두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 f는 집합 X에서 집합 Y로의 일대일대응이다. $f(1)=7$, $f(2)-f(3)=3$일 때, $f(3)+f(4)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

05-4 변형

다음 실수 전체의 집합에서 정의된 |보기|의 함수의 그래프 중 일대일대응의 그래프인 것을 모두 골라라.

|보기|



05-5 실력

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=a|x-2|+2x-1$이 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

필수유형 06 항등함수와 상수함수

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x)$는 상수함수이다. 다음을 구하여라.

(1) $f(1)=g(1)=1$일 때, $f(2)+g(3)$의 값

(2) $f(2)=g(2)$일 때, $f(4)+g(5)$의 값

(3) $f(8)=g(5)$일 때, $f(10)+g(10)$의 값

풍쌤 POINT

- 항등함수는 $f(x)=x$와 같아. ➡ $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $\cdots$
- 상수함수는 $g(x)=c$ (c는 상수)와 같아. ➡ $g(1)=g(2)=g(3)=\cdots=c$

풀이

(1) STEP 1 $f(2)$의 값 구하기

$f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$❶ $\quad \therefore f(2)=2$

STEP 2 $g(3)$의 값 구하기

$g(x)$가 상수함수이고, $g(1)=1$이므로 $g(x)=1$

$\therefore g(3)=1$

STEP 3 $f(2)+g(3)$의 값 구하기

$\therefore f(2)+g(3)=2+1=3$

(2) STEP 1 $f(4)$의 값 구하기

$f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$ $\quad \therefore f(4)=4$

STEP 2 $g(5)$의 값 구하기

$g(x)$가 상수함수이고, $f(2)=2=g(2)$이므로 $g(x)=2$❷

$\therefore g(5)=2$

STEP 3 $f(4)+g(5)$의 값 구하기

$\therefore f(4)+g(5)=4+2=6$

(3) STEP 1 $f(10)$의 값 구하기

$f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$ $\quad \therefore f(10)=10$

STEP 2 $g(10)$의 값 구하기

$g(x)$가 상수함수이고, $f(8)=8=g(5)$이므로 $g(x)=8$

$\therefore g(10)=8$

STEP 3 $f(10)+g(10)$의 값 구하기

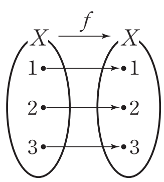
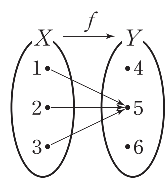
$\therefore f(10)+g(10)=10+8=18$

❶ 항등함수이면 함수식은 반드시 $f(x)=x$로 나타난다.

❷ $g(x)$는 상수함수이므로 $g(2)=2$에서 $g(5)=5$로 착각하지 않도록 주의한다.

답 (1) 3 (2) 6 (3) 18

풍쌤 강의 NOTE

항등함수	자신의 짝이 자신인 함수 	상수함수	모두가 하나를 선택하는 함수 

06-1 유사

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x)$는 상수함수이다. $f(6)=g(6)$일 때, $f(11)+g(7)$의 값을 구하여라.

06-2 변형 기출

집합 $X=\{-3,\ 1\}$에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<0) \\ x^2-2x+b & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 항등함수일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4　　② 6　　③ 8
④ 10　　⑤ 12

06-3 변형

실수 전체의 집합에서 정의된 |보기|의 함수 중에서 다음 함수를 모두 골라라.

|보기|

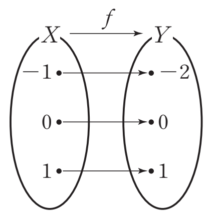
ㄱ. $y=1$　　ㄴ. $y=x$
ㄷ. $y=|x|$　　ㄹ. $y=-3$

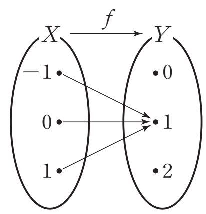
(1) 항등함수　　(2) 상수함수

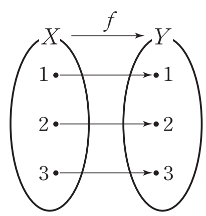
06-4 변형

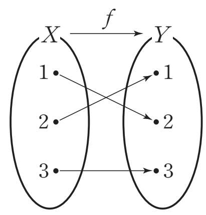
|보기|에서 다음 함수를 모두 골라라.

|보기|

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


(1) 항등함수　　(2) 상수함수

06-5 실력

집합 $X=\{1,\ 2,\ 4\}$에서 정의된 세 함수 f_1, f_2, f_3에 대하여 f_1은 항등함수, f_2는 일대일대응, f_3은 상수함수이다. $f_1(2)=f_2(4)=f_3(2)$, $f_2(4)=f_2(2)-2f_2(1)$일 때, $f_1(1)+f_2(1)+f_3(1)$의 값을 구하여라.

필수유형 07 함수의 개수

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중 다음을 구하여라.

(1) 함수의 개수 (2) 일대일대응의 개수

(3) 항등함수의 개수 (4) 상수함수의 개수

풍쌤 POINT

두 집합 X, Y에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는 정의역 X의 각 원소의 함숫값을 정하는 방법의 수를 생각하면 돼.

풀이

(1) STEP 1 정의역의 각 원소의 함숫값이 될 수 있는 원소 구하기

1의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 3개

2의 함숫값이 될 수 있는 것도 a, b, c의 3개

3의 함숫값이 될 수 있는 것도 a, b, c의 3개

STEP 2 함수의 개수 구하기

따라서 함수의 개수는

$3\times3\times3=27$ ❶

(2) STEP 1 정의역의 각 원소의 함숫값이 될 수 있는 원소 구하기

1의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 3개

2의 함숫값이 될 수 있는 것은 1의 함숫값을 제외한 2개

3의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2의 함숫값을 제외한 1개

STEP 2 일대일대응의 개수 구하기

따라서 일대일대응의 개수는

$3\times2\times1=6$

(3) 1, 2, 3 각각의 함숫값 1, 2, 3이 공역 Y의 원소가 아니므로 항등함수는 없다. ❷

따라서 항등함수의 개수는 0이다.

(4) 1, 2, 3 모두의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 3개 ❸ 이다.

따라서 상수함수의 개수는 3이다.

❶ 각각의 함숫값이 될 수 있는 경우는 동시에 일어나므로 곱의 법칙을 이용한다.

❷ 항등함수는 $f(x)=x$이어야 하므로 집합 X의 원소가 집합 Y에도 있어야 한다.

❸ 상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.

답 (1) 27 (2) 6 (3) 0 (4) 3

풍쌤 강의 NOTE

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때,

① 함수의 개수: $\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{m\text{개}}=n^m$

② 일대일함수의 개수: $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times\{n-(m-1)\}$ (단, $n\ge m$)

③ 일대일대응의 개수: $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$(단, $n=m$)

④ 상수함수의 개수: n

07-1 유사

두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중 다음을 구하여라.

(1) 함수의 개수
(2) 일대일함수의 개수
(3) 항등함수의 개수
(4) 상수함수의 개수

07-2 유사

집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d\}$에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 함수 중 다음을 구하여라.

(1) 함수의 개수
(2) 일대일대응의 개수
(3) 항등함수의 개수
(4) 상수함수의 개수

07-3 변형

세 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2\}$, $Z=\{4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수를 a, 집합 X에서 집합 Z로의 일대일대응의 개수를 b, 집합 Z에서 집합 Y로의 상수함수의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

07-4 변형

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가

$$\{f(1)-1\}\{f(2)-2\} \neq 0,$$
$$\{f(1)-1\}\{f(3)-3\}=0$$

을 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하여라.

07-5 실력

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응이고 $f(2) \neq a$일 때, 함수 f의 개수를 구하여라.

07-6 실력 기출

집합 $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.

(가) 함수 f는 A에서 A로의 함수이다.
(나) A의 모든 원소 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

풍산자
유형 특강

절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프를 그리는 방법에 대해 배우고, 그 특징을 알아보자.

함수 $y=|f(x)|$ 꼴의 그래프를 그리는 방법

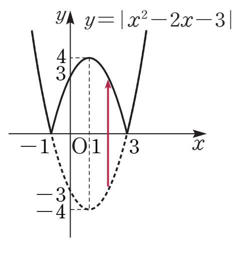
$y=|f(x)|$에서
(i) $f(x)\geq 0$이면 $y=f(x)$
(ii) $f(x)<0$이면 $y=-f(x)$

❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ $f(x)\geq 0$인 구간에서는 그래프를 그대로 둔다.
❸ $f(x)<0$인 구간에서는 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한다.

예시 1 함수 $y=|f(x)|$ 꼴의 그래프

함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프를 그려라.

함수 $f(x)=x^2-2x-3$이라 하면
$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$
(i) $f(x)\geq 0$인 구간의 그래프는 그대로 둔다.
(ii) $f(x)<0$인 구간의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한다.
➡ $f(x)<0$인 구간에서는 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$의 그래프와 같다.



확인 1 정답과 풀이 81쪽

함수 $y=|x^2-4x|$의 그래프를 그려라.

함수 $y=f(|x|)$ 꼴의 그래프를 그리는 방법

$y=f(|x|)$에서
(i) $x\geq 0$이면 $y=f(x)$
(ii) $x<0$이면 $y=f(-x)$

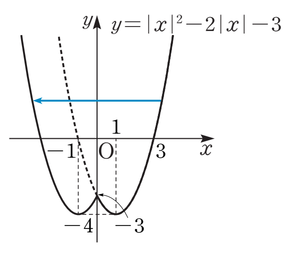
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ $x\geq 0$인 구간에서는 그래프를 그대로 둔다.
❸ $x<0$인 구간에서는 ❷의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한다.

예시 2 함수 $y=f(|x|)$ 꼴의 그래프

함수 $y=|x|^2-2|x|-3$의 그래프를 그려라.

$y=|x|^2-2|x|-3$
$=|x^2|-2|x|-3$
$=x^2-2|x|-3$

함수 $f(x)=x^2-2x-3$이라 하면
$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$
(i) $x\geq 0$인 구간의 그래프는 그대로 둔다.
(ii) $x<0$인 구간에서는 (i)의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한다.
➡ $x<0$인 구간에서는 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$의 그래프와 같다.



확인 2 정답과 풀이 81쪽

함수 $y=|x|^2-4|x|$의 그래프를 그려라.

함수 $|y|=f(x)$ 꼴의 그래프를 그리는 방법

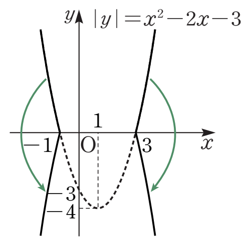
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ $y\geq0$인 구간에서는 그래프를 그대로 둔다.
❸ $y<0$인 구간에서는 ❷의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한다.

$|y|=f(x)$에서
(i) $y\geq0$이면 $y=f(x)$
(ii) $y<0$이면 $-y=f(x)$에서 $y=-f(x)$

예시 3 함수 $|y|=f(x)$ 꼴의 그래프

함수 $|y|=x^2-2x-3$의 그래프를 그려라.

함수 $f(x)=x^2-2x-3$이라 하면
$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$
(i) $y\geq0$인 구간의 그래프는 그대로 둔다.
(ii) $y<0$인 구간에서는 (i)의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨다. ➡ $y<0$인 구간에서는 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$의 그래프와 같다.



$|y|=\pm y$이므로 y의 부호에 따라 구간을 나누어 생각한다.

확인 3 정답과 풀이 81쪽

함수 $|y|=x^2-4x$의 그래프를 그려라.

함수 $|y|=f(|x|)$ 꼴의 그래프를 그리는 방법

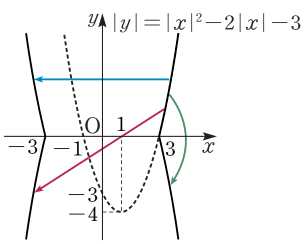
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ $x\geq0$, $y\geq0$인 구간에서는 그래프를 그대로 둔다.
❸ $x<0$, $y\geq0$인 구간에서는 ❷의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한다.
❹ $x\geq0$, $y<0$인 구간에서는 ❷의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한다.
❺ $x<0$, $y<0$인 구간에서는 ❷의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한다.

$|y|=f(|x|)$에서
(i) $x\geq0$, $y\geq0$이면 $y=f(x)$
(ii) $x<0$, $y\geq0$이면 $y=f(-x)$
(iii) $x\geq0$, $y<0$이면 $-y=f(x)$에서 $y=-f(x)$
(iv) $x<0$, $y<0$이면 $-y=f(-x)$에서 $y=-f(-x)$

예시 4 함수 $|y|=f(|x|)$ 꼴의 그래프

함수 $|y|=|x|^2-2|x|-3$의 그래프를 그려라.

함수 $f(x)=x^2-2x-3$이라 하면
$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$
(i) $x\geq0$, $y\geq0$인 구간의 그래프는 그대로 둔다.
(ii) 그 외의 구간에서는 (i)의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.



$|x|=\pm x$, $|y|=\pm y$이므로 구간을 나누어 생각한다.

확인 4 정답과 풀이 81쪽

함수 $|y|=|x|^2-4|x|$의 그래프를 그려라.