● 3회차

01 ①	02 ④	03 ②	04 ④	05 ③
06 ①	07 ④	08 ④	09 ②	10 ⑤
11 ⑤	12 ①	13 ③	14 ②	15 ④
16 ③	17 ④			

[서술형 1] $\frac{5}{3}\pi-1$

[서술형 2] (1) $a_n=2n+8$ (2) 제46항 (3) 190

[서술형 3] 12800

01 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin B}$

$\therefore \sin B=2\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2\sqrt{2}}=2\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<135^\circ$이므로

$B=30^\circ$

02 코사인법칙에 의하여

$a^2=8^2+7^2-2\cdot8\cdot7\cdot\cos 120^\circ$

$=64+49-112\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=169$

$\therefore a=13\ (\because a>0)$

03 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2\cdot3}=\frac{a}{6}$

$\sin B=\frac{b}{2\cdot3}=\frac{b}{6}$

$\sin C=\frac{c}{2\cdot3}=\frac{c}{6}$

위의 세 식을 $\sin A+\sin B+\sin C=2$에 대입하면

$\frac{a}{6}+\frac{b}{6}+\frac{c}{6}=2 \qquad \therefore a+b+c=12$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 12이다.

Lecture 사인법칙의 변형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

(1) $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

04 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ=\frac{1}{2}a\cdot2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

이때 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=2\sqrt{3}$, $a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=4$에서 $a+d=4$ …… ㉠

$a_6=8$에서 $a+5d=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=1$

따라서 $a_n=3+(n-1)\cdot1=n+2$이므로

$a_{14}=14+2=16$

06 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$x=2+d$, $y=2+2d$, $z=2+3d$

위의 식을 $7x-z=4y$에 대입하면

$7(2+d)-(2+3d)=4(2+2d)$

$4d=4 \qquad \therefore d=1$

따라서 $x=3$, $y=4$, $z=5$이므로

$x+y+z=3+4+5=12$

07 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=a+ar=3$에서

$a(1+r)=3$ …… ㉠

$a_5+a_6=ar^4+ar^5=12$에서

$ar^4(1+r)=12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3r^4=12 \qquad \therefore r^4=4$

$\therefore a_9+a_{10}=ar^8+ar^9=ar^8(1+r)$

$=3\cdot(r^4)^2$

$=3\cdot4^2=48$

08 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_6=3$에서 $ar^5=3$

$\therefore a_1a_2a_3\cdot \cdots \cdot a_{11}=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot \cdots \cdot ar^{10}$
$=a^{11}r^{1+2+\cdots+10}$
$=a^{11}r^{\frac{10\cdot 11}{2}}$
$=(ar^5)^{11}=3^{11}$

09 수열 $\frac{1}{2}$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 32는 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 제7항이 32인 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$\frac{1}{2}r^6=32$, $r^6=64$

$\therefore r^3=8\ (\because r>0)$

$\therefore \frac{a_1a_5}{a_3}=\frac{\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}r^5}{\frac{1}{2}r^3}=\frac{r^3}{2}=\frac{8}{2}=4$

다른 풀이

세 수 $\frac{1}{2}$, a_3, 32가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

${a_3}^2=\frac{1}{2}\cdot 32=16 \qquad \therefore a_3=4\ (\because a_3>0)$

또 세 수 a_1, a_3, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

${a_3}^2=a_1a_5$

$\therefore \frac{a_1a_5}{a_3}=\frac{{a_3}^2}{a_3}=a_3=4$

10 $\sum_{k=1}^{6}k(k-1)=\sum_{k=1}^{6}(k^2-k)$
$=\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k$
$=\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}-\frac{6\cdot 7}{2}$
$=70$

11 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(9{a_k}^2-6a_k+1)$
$=9\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2-6\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=9\cdot 7-6\cdot 4+1\cdot 10$
$=49$

Lecture Σ의 성질

상수 p, q, r에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k+r)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k+rn$

12 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=6$에서 $a+d=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=-4$에서 $a+6d=-4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=-2$

따라서 $a_n=8+(n-1)\cdot(-2)=-2n+10$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(-2k+10)$
$=-2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}10$
$=-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10\cdot 10$
$=-10$

13 수열 $\frac{1}{2^2-2}$, $\frac{1}{3^2-3}$, $\frac{1}{4^2-4}$, $\cdots$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{1}{(k+1)^2-(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$
$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
$+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$
$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

14 $a_1=S_1=1^2+2=3$

$a_5=S_5-S_4=5^2+2-(4^2+2)$
$=27-18=9$

$\therefore a_1+a_5=3+9=12$

15 $a_{n+1}=2a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비가 2인 등비수열이므로 $a_2=2a_1$

따라서 $a_1=a_2-1$에서

$a_1=2a_1-1 \qquad \therefore a_1=1$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 등비가 2인 등비수열이므로

$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore a_9=2^8=256$

16 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 \ (a_n\text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n \ \ (a_n\text{이 짝수}) \end{cases}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\cdot 40=20$

$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\cdot 20=10$

$a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\cdot 10=5$

$a_5=a_4+1=5+1=6$

$\therefore a_6=\frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2}\cdot 6=3$

17 (ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

$<2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

이때

$\left\{2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\boxed{(나)\ -\frac{1}{k(k+1)^2}}<0$

이므로

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

즉 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

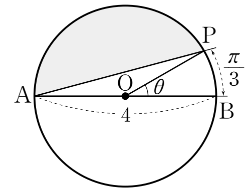
$\therefore$ (가) $\frac{1}{(k+1)^2}$ (나) $-\frac{1}{k(k+1)^2}$

따라서 $f(k)=\frac{1}{(k+1)^2}$, $g(k)=-\frac{1}{k(k+1)^2}$이므로

$f(0)+g(1)=1-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

[서술형 1] $\angle POB=\theta$라 하면 부채꼴 BOP의 반지름의 길이가 2이므로



$\frac{\pi}{3}=2\theta \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

❶

이때 $\angle AOP=\pi-\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$이므로 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 AOP의 넓이)$-$(삼각형 AOP의 넓이)

❷

$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{5}{6}\pi$

$=\frac{5}{3}\pi-1$

❸

채점 기준	배점
❶ 부채꼴 BOP의 중심각의 크기를 구할 수 있다.	3점
❷ 색칠한 부분의 넓이가 (부채꼴 AOP의 넓이)$-$(삼각형 AOP의 넓이)임을 알 수 있다.	3점
❸ 색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] (1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=14$에서 $a+2d=14$ …… ㉠

$a_{11}=30$에서 $a+10d=30$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=2$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=10+(n-1)\cdot 2=2n+8$

❶

(2) $a_n\geq 100$에서 $2n+8\geq 100$

$2n\geq 92 \qquad \therefore n\geq 46$

따라서 처음으로 100 이상이 되는 항은 제46항이다.

❷

(3) 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\{2\cdot 10+(10-1)\cdot 2\}}{2}=190$

❸

채점 기준	배점
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	3점
❷ 처음으로 100 이상이 되는 항은 제몇 항인지 구할 수 있다.	2점
❸ 첫째항부터 제10항까지의 합을 구할 수 있다.	2점

[서술형 3] $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$a_{n+1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$에서

$a_{n+1}=S_n$이고, $S_1=a_1=5$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 $S_n=S_{n+1}-S_n$

$\therefore S_{n+1}=2S_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

❶

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n=5\cdot 2^{n-1}$

❷

$\therefore a_{11}+a_{13}=S_{10}+S_{12}$

$=5\cdot 2^9+5\cdot 2^{11}$

$=12800$

❸

채점 기준	배점
❶ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 할 때, S_n과 S_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3점
❷ 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	2점
❸ $a_{11}+a_{13}$의 값을 구할 수 있다.	1점