



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-03-05
2) 제작자 : 교육지대(주)
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

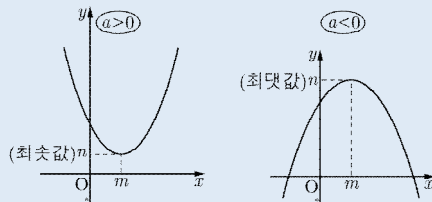
[이차함수의 최대, 최소]

• 모든 함수값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 최대값이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 최소값이라 한다.

• $y = a(x-m)^2 + n$ 의 최대값과 최소값

① $a > 0$ 이면 $y = a(x-m)^2 + n$ 은 $x = m$ 일 때 최소값 n 을 갖고 최대값은 없다.

② $a < 0$ 이면 $y = a(x-m)^2 + n$ 은 $x = m$ 일 때 최대값 n 을 갖고 최소값은 없다.



• 제한된 범위 $\alpha \leq x \leq \beta$ 에서 이차함수 $f(x) = a(x-m)^2 + n$ 의 최대값, 최소값은 다음과 같다.

① $\alpha \leq m \leq \beta$ 이면 $f(\alpha)$, $f(m)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최대값이고 가장 작은 값이 최소값이다.

② $m < \alpha$ 또는 $\beta < m$ 이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최대값이고 가장 작은 값이 최소값이다.

기본문제

[문제]

1. $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2 + 3a + 2$ 에서 $f(x)$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

[예제]

2. $1 \leq x \leq 3$ 일 때, $y = x^2 + 4x + a$ 의 최솟값이 6이다. a 의 값은?

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[문제]

3. $3 \leq x \leq 7$ 에서 $f(x) = x(10-x) + a$ 의 최대값과 최솟값의 차이는?

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

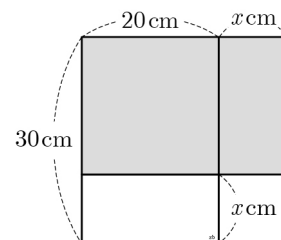
[문제]

4. $1 \leq x \leq a$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 최대값이 4이고 최솟값이 -5이다. 이때, a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[예제]

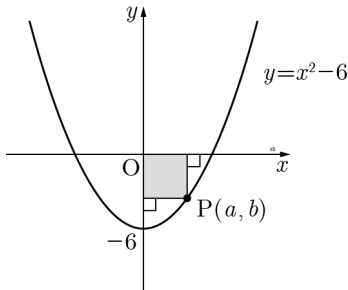
5. 다음 그림과 같이 가로 길이가 20cm, 세로 길이가 30cm인 직사각형에서 가로 길이는 x cm만큼 늘리고 세로 길이는 x cm만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들려고 한다. 이때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?



- ① 225 ② 324
③ 361 ④ 625
⑤ 810

[문제]

6. 다음 그림의 색칠된 직사각형에서 점 P 는 이차함수 $y = x^2 - 6$ 의 그래프 위의 점이다. 이때 색칠된 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하면?



- ① $\frac{21}{2}$ ② 11
 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12
 ⑤ $\frac{25}{2}$

[문제]

7. 어느 과일 가게에서 사과 한 개의 가격이 300원 일 때 하루에 1000개씩 팔린다고 한다. 이 사과 한 개의 가격을 x 원 올리면 하루 판매량은 $2x$ 개 감소한다고 할 때, 사과의 하루 판매액이 최대가 되게 하려면 사과 한 개의 가격은?

- ① 100(원) ② 200(원)
 ③ 300(원) ④ 400(원)
 ⑤ 500(원)

평가문제

[중단원 마무리]

8. $f(x) = x^2 + 2(k+3)x + k^2 + 8k + 12$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 9를 가질 때, a 의 값은?

- ① -3 ② -4
 ③ -5 ④ -6
 ⑤ -7

[중단원 마무리]

9. $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2$ 가 $x = -1$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4
 ③ 6 ④ 8
 ⑤ 10

[중단원 마무리]

10. 스프링보드 다이빙은 수면으로부터 b m 높이에 있는 스프링보드에서 뛰어올랐다가 다이빙하는 수상 경기 종목이다. 어떤 선수가 스프링보드에서 뛰어오른 지 t 초 후의 수면으로부터의 높이 h m가 $h = -t^2 + at + b$ 이라고 할 때, 이 선수가 2초 후에 가장 높이 올라갔고, 5초 후에 수면으로 들어갔다. 이때, $a+b$ 의 값은?

- ① 5 ② 7
 ③ 9 ④ 11
 ⑤ 13

[중단원 마무리]

11. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = (x-3)(x+1) + k$ 의 최솟값이 2일 때, 최댓값은?

- ① 3 ② 5
 ③ 7 ④ 9
 ⑤ 11

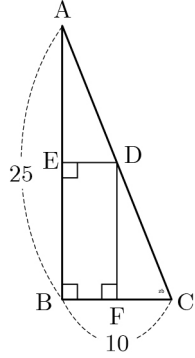
[중단원 마무리]

12. 어느 상점에서 의자판매가격을 x 만 원, 한 달 동안의 이익금을 y 만 원이라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = -2x^2 + ax + b$ 인 관계가 성립한다고 한다. 의자가 2만원 일 때, 이익금이 최대수익 50만원이 된다. $a+b$ 의 값은?

- ① 10 ② 20
 ③ 30 ④ 40
 ⑤ 50

[중단원 마무리]

13. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=25$, $\overline{BC}=10$ 인 직각삼각형 ABC의 빗변 AC 위의 점 D에서 두 변 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. 이때 직사각형 DEBF의 넓이가 최대일 때의 둘레길이를 구하면?



- ① 30 ② 35
③ 40 ④ 45
⑤ 50

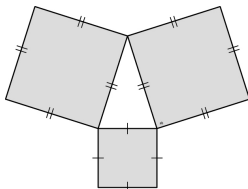
[대단원 마무리]

14. $1 \leq x \leq 5$ 에서 이차함수 $y = -x^2 + 4x + a$ 의 최솟값이 5일 때, 실수 a 의 값은?

- ① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

[대단원 마무리]

15. 다음 그림과 같이 이등변삼각형의 둘레의 길이가 m 이다. 이때, 이등변삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형들의 넓이의 합의 최솟값이 48일 때, m 의 값은?



- ① 8 ② 10
③ 12 ④ 14
⑤ 16

유사문제

16. $-3 \leq x \leq 0$ 의 범위에서 이차함수 $y = x^2 + 4x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

17. 주어진 x 의 값의 범위에서 이차함수

$y = x^2 - 4x + 6$ ($-2 \leq x \leq 4$)의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 16 ② 17
③ 18 ④ 19
⑤ 20

18. $a+1 \leq x \leq a+3$ 에서 이차함수

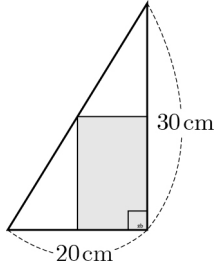
$y = x^2 - 6x + 2a + 5$ 의 최솟값이 -1 일 때, 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$
③ 0 ④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{2}$

19. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $y = -5x^2 + 10x + k$ 의 최솟값이 -1 일 때, 이 함수의 최댓값은? (단, k 는 실수이다.)

- ① 19 ② 20
③ 21 ④ 22
⑤ 23

20. 그림과 같이 밑변의 길이가 20cm, 높이가 30cm 인 직각삼각형 모양의 색종이에서 직사각형 모양을 잘라내려고 한다. 잘라낼 수 있는 직사각형의 최대 넓이는?



- ① 100cm^2 ② 120cm^2
 ③ 150cm^2 ④ 180cm^2
 ⑤ 200cm^2



정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2 + 3a + 2$
 $= (x + (a+1))^2 + a + 1$ 이므로
 $x = -a - 1$ 에서 최솟값을 가진다.
 그러므로 $-a - 1 = 3$ 이고 $a = -4$
 따라서 최솟값은 $a + 1 = -3$

2) [정답] ①

[해설] $y = x^2 + 4x + a = (x+2)^2 + a - 4$ 이므로
 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $x = 1$ 일 때 최솟값을 갖는다.
 따라서 $x = 1$ 을 대입하면 $5 + a = 6$ 에서 $a = 1$

3) [정답] ④

[해설] $f(x) = x(10-x) + a$ 에서
 $f(x) = x(10-x) + a$
 $= -x^2 + 10x + a = -(x-5)^2 + a + 25$
 이므로 주어진 함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가
 $(5, a+25)$ 이다.
 $3 \leq x \leq 7$ 에서
 $x = 3$ 일 때, $y = a + 21$
 $x = 5$ 일 때, $y = a + 25$
 $x = 7$ 일 때, $y = a + 21$ 이므로
 최댓값 $M = a + 25$, 최솟값 $m = a + 21$ 이고
 $M - m = (a + 25) - (a + 21) = 4$

4) [정답] ⑤

[해설] 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 에서
 $y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$
 이므로 주어진 함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가
 $(2, 4)$ 이다.
 한편 최댓값이 4이므로 $2 \leq a$ 가 된다.
 $1 \leq x \leq a$ 에서
 $x = 1$ 일 때, $y = 3$
 $x = 2$ 일 때, $y = 4$
 $x = a$ 일 때, $-(a-2)^2 + 4$ 이므로
 최솟값 $m = -(a-2)^2 + 4 = -5$
 따라서 $a^2 - 4a - 5 = (a-5)(a+1) = 0$ 이고 $2 \leq a$
 이므로 $a = 5$

5) [정답] ④

[해설] 새로운 직사각형의 가로의 길이: $(20+x)$ cm
 새로운 직사각형의 세로의 길이: $(30-x)$ cm
 이때 새로운 직사각형의 넓이를 y cm²라고 하면
 $y = (20+x)(30-x) = -x^2 + 10x + 600$
 $= -(x-5)^2 + 625$
 따라서 y 는 $x = 5$ 일 때 최댓값 625을 갖는다.

6) [정답] ⑤

[해설] 점 $P(a, b)$ 에 대해서 $b = a^2 - 6 < 0$ 이므로
 직사각형의 세로의 길이: $6 - a^2$ cm

직사각형의 가로의 길이: a cm
 직사각형의 둘레의 길이를 y cm 라고 하면
 $y = 2 \times \{(6 - a^2) + a\}$

$$= -2a^2 + 2a + 12 = -2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{25}{2}$ 를 갖는다.

7) [정답] ④

[해설] 사과 가격: $300 + x$
 판매량: $1000 - 2x$
 판매액을 y 라고 하면
 $y = (300 + x)(1000 - 2x) = -2x^2 + 400x + 300000$
 $= -2(x - 100)^2 + 320000$
 따라서 $x = 100$ 일 때, 판매량이 최대가 된다.
 이때 사과의 가격은 400(원)이다.

8) [정답] ④

[해설] $f(x) = x^2 + 2(k+3)x + k^2 + 8k + 12$
 $= (x + k + 3)^2 + 2k + 3$ 이므로
 $x = -k - 3$ 일 때, 최솟값 $2k + 3$ 을 가진다.
 그러므로 $2k + 3 = 9$, $k = 3$
 따라서 $-k - 3 = -6$ 이므로 $a = -6$

9) [정답] ④

[해설] $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2$
 $= (x - a - 2)^2 + a^2 - (a+2)^2$
 $= (x - a - 2)^2 - 4a - 4$ 이므로
 $x = a + 2 = -1$ 일 때, 최솟값을 가지므로 $a = -3$
 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때, 최솟값 8을 가진다.

10) [정답] ③

[해설] 2초 후에 높이가 최대이므로
 $h = -t^2 + at + b = -(t-2)^2 + b + 4 = -t^2 + 4t + b$
 그러므로 $a = 4$
 한편 5초 후에 수면에 닿으므로
 $t = 5$ 일 때, $h = -5^2 + 4 \times 5 + b = -5 + b = 0$
 그러므로 $b = 5$
 따라서 $a + b = 9$

11) [정답] ⑤

[해설] 이차함수 $y = (x-3)(x+1) + k$ 에서
 $y = (x-3)(x+1) + k = x^2 - 2x + k - 3$
 $= (x-1)^2 + k - 4$
 이므로 주어진 함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가
 $(1, k-4)$ 이다.
 한편 최솟값이 2이므로 $k - 4 = 2$ 이고 $k = 6$
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서
 $x = -2$ 일 때, $y = 11$
 $x = 1$ 일 때, $y = 2$
 $x = 2$ 일 때, $y = 3$ 이므로
 최댓값 $M = 11$

12) [정답] ⑤

[해설] $y = -2x^2 + ax + b$ 에서

$$y = -2(x-2)^2 + 50 = -2x^2 + 8x + 42 \text{이므로}$$

따라서 $a = 8$, $b = 42$ 이고 $a + b = 50$

13) [정답] ②

[해설] $\triangle ABC \sim \triangle DFC$ (AA 닮음)이므로 $\overline{CF} = 2m$ 이라고 하면

$$\overline{DF} = 5m \text{이고 } \overline{BF} = 10 - 2m$$

이때 $\square DEBF$ 의 넓이를 y 라고 하면

$$y = 5m(10 - 2m) = -10\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{125}{2}$$

그러므로 $m = \frac{5}{2}$ 일 때, $\square DEBF$ 의 넓이가 최대가 된다.

따라서 $m = \frac{5}{2}$ 일 때, $\square DEBF$ 의 둘레의 길이는

$$2\{5m + (10 - 2m)\} = 2 \times (3m + 10) = 35$$

14) [정답] ⑤

[해설] $y = -x^2 + 4x + a = -(x-2)^2 + a + 4$

$$1 \leq x \leq 5 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{일 때, } y = a + 3$$

$$x = 2 \text{일 때, } y = a + 4$$

$$x = 5 \text{일 때, } y = a - 5 \text{이므로}$$

$$\text{최솟값 } m = a - 5 = 5$$

$$\text{따라서 } a = 10$$

15) [정답] ③

[해설] 이등변삼각형의 길이를 a , a , $m - 2a$ 이라 하면

$$(\text{색칠된 부분의 넓이}) = a^2 + a^2 + (m - 2a)^2$$

$$= 6a^2 - 4ma + m^2$$

$$= 6\left(a^2 - \frac{2}{3}ma\right) + m^2 = 6\left(a - \frac{1}{3}m\right)^2 + \frac{1}{3}m^2$$

$$\text{그러므로 } \frac{1}{3}m^2 = 48, m^2 = 144$$

$$\text{따라서 } m = 12$$

16) [정답] ⑤

[해설] $y = (x+2)^2 - 5$ ($-3 \leq x \leq 0$)

$x = -2$ 에서 최솟값 -5 , $x = 0$ 에서 최댓값 -1 를 가진다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 $-5 \times (-1) = 5$ 이다.

17) [정답] ⑤

[해설] $f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$ 라 하면

$$f(2) = 2, f(-2) = 18, f(4) = 6$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4 \text{의 범위에서 최솟값은 } 2,$$

$$\text{최댓값은 } 18 \text{이므로 그 합은 } 20 \text{이다.}$$

18) [정답] ①

[해설] $f(x) = x^2 - 6x + 2a + 5 = (x-3)^2 + 2a - 4$ 라

하자.

(i) $a + 3 \leq 3$ 즉, $a \leq 0$ 일 때

$$x = a + 3 \text{에서 최소이므로}$$

$$\text{최솟값 } f(a+3) = a^2 + 2a - 4 = -1,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, (a+3)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -3$$

(ii) $a + 1 < 3 < a + 3$ 즉, $0 < a < 2$ 일 때

$$x = 3 \text{에서 최소이므로}$$

$$\text{최솟값 } f(3) = 2a - 4 = -1$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

(iii) $a + 1 \geq 3$ 즉, $a \geq 2$ 일 때

$$x = a + 1 \text{에서 최소이므로}$$

$$\text{최솟값 } f(a+1) = (a-2)^2 + 2a - 4 = -1,$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore \text{해가 없다.}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $-3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ 이다.

19) [정답] ①

[해설] $y = -5x^2 + 10x + k = -5(x-1)^2 + k + 5$ 이므로 이차함수의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

$x = -1$ 에서 최솟값을 갖고

$$k - 15 = -1 \text{이므로 } k = 14 \text{이다.}$$

따라서 최댓값은 대칭축인 $x = 1$ 에서 $k + 5 = 19$ 이다.

20) [정답] ③

[해설] 직사각형의 가로의 길이를 a , 세로의 길이를 b 라 하자.

$$(20 - a) : b = 20 : 30 \text{이므로}$$

$$b = \frac{3(20 - a)}{2}$$

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = ab = a \cdot \frac{3(20 - a)}{2} = -\frac{3}{2}(a^2 - 20a)$$

$$= -\frac{3}{2}(x - 10)^2 + 150$$

따라서 S 의 최대 넓이는 150이다.