12

수학적 귀납법

예제 01

등차수열과 등비수열의 점화식

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, a_{10}의 값을 구하여라.

(1) $a_2=3a_1,\ a_5=18,\ a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_2={a_1}^2,\ a_5=32,\ \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

접근 방법

등차수열은 이웃한 두 항의 차가 일정하고, 등비수열은 이웃한 두 항의 비가 일정한 수열입니다. (1), (2)에서 a_{n+1}을 a_n, a_{n+2}를 이용하여 나타냅니다.

Bible

(1) $a_{n+1}-a_n=d\ (n\geq1) \Longleftrightarrow$ 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r\ (n\geq1) \Longleftrightarrow$ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열

상세 풀이

(1) $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n\ (n\geq1)$에서 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n\ (n\geq1)$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열입니다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=3a_1$에서 $a+d=3a \quad \therefore d=2a$ …… ㉠

또한 $a_5=a+4d=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=4$

$\therefore a_{10}=a+9d=2+9\times4=38$

(2) $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n\geq1)$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}\ (n\geq1)$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열입니다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2={a_1}^2$에서 $ar=a^2,\ a(r-a)=0$

$\therefore a=r\left(\because n\geq1\text{일 때 } \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r\text{이므로 } a_1=a\neq0\right)$ …… ㉠

또한 $a_5=ar^4=32$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $ar^4=a\times a^4=a^5=32$

$\therefore a=2,\ r=2$

$\therefore a_{10}=ar^{10-1}=2\times2^{10-1}=2^{10}=1024$

정답 ➡ (1) 38 (2) 1024

보충 설명

(1) $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=\cdots=a_2-a_1=d$ (일정) ➡ 등차수열

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\dfrac{a_2}{a_1}=r$ (일정) ➡ 등비수열

풀이집 p.240

숫자 바꾸기

01-1 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, a_{10}의 값을 구하여라.

(1) $a_2=4a_1$, $a_5=26$, $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_2^{\,2}=a_1^{\,3}$, $a_5=8$, $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (단, 모든 항은 양수이다.)

표현 바꾸기

01-2 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=1,\ a_{n+9}-a_{n+2}=35$$

가 성립할 때, a_{100}의 값은?

① 480 ② 484 ③ 488
④ 492 ⑤ 496

개념 넓히기 ★★☆

01-3 수열 $\{a_n\}$을

$$a_2=2a_1,\ a_5=16,\ \log a_n-2\log a_{n+1}+\log a_{n+2}=0\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하여라.

12

정답 **01-1** (1) 56 (2) $32\sqrt{2}$ **01-2** ⑤ **01-3** 1023

예제 02

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴의 점화식

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=n^2+n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

접근 방법

$a_{n+1}=a_n+f(n)$, 즉 $a_{n+1}-a_n=f(n)$과 같이 이웃하는 두 항의 차가 $f(n)$인 점화식이 주어지면 점화식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 얻은 식을 같은 변끼리 더하여 일반항을 구합니다.

> **Bible** $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴의 점화식은 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입한 후 같은 변끼리 더하여 일반항 a_n을 구한다.

상세 풀이

$a_{n+1}-a_n=n^2+n+1$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 같은 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=1^2+1+1\\
&a_3-a_2=2^2+2+1\\
&a_4-a_3=3^2+3+1\\
&\qquad\vdots\\
+)\ &\underline{a_n-a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)+1}\\
&a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k+1)\\
&=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)\\
&=\frac{n(n^2+2)}{3}
\end{aligned}$$

$a_{n+1}=a_n+f(n)$에서

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}=a_1+f(1)\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+f(2)\\
&\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+f(3)\\
&\qquad\vdots\\
+)\ &\underline{a_n=\cancel{a_{n-1}}+f(n-1)}\\
&a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)
\end{aligned}$$

정답 ➡ $a_n=\frac{n(n^2+2)}{3}$

보충 설명

$a_{n+1}-a_n=f(n)$에서 $f(n)$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 의미하므로

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

를 이용하여 풀 수도 있습니다.

또한 $f(n)$이 일정한 상수 d이면 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이 됩니다.

풀이집 p.240

숫자 바꾸기

02-1 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3n^2-n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

표현 바꾸기

◆다른 풀이 ◆보충 설명

02-2 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, a_{10}의 값을 구하여라.

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=0$, $a_n-a_{n-1}=n^2$ $(n\geq 2)$

개념 넓히기 ★★☆

◆다른 풀이

02-3 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ na_{n+1}=(n+1)a_n+1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

로 정의할 때, a_{100}의 값은?

① 1　② 99　③ 101

④ 199　⑤ 1010

12

정답

02-1 (1) $a_n=n(n-1)^2+1$ (2) $a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$

02-2 (1) 83 (2) 384　**02-3** ④

예제 03

$a_{n+1}=f(n)\times a_n$ 꼴의 점화식

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

접근 방법

$a_{n+1}=f(n)\times a_n$, 즉 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$과 같이 이웃하는 두 항의 비가 n에 대한 식으로 주어지면 양변의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 얻은 식을 같은 변끼리 곱하여 일반항을 구합니다.

Bible $a_{n+1}=f(n)\times a_n$ 꼴의 점화식은 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입하여 얻은 식을 같은 변끼리 곱하여 일반항 a_n을 구한다.

상세 풀이

$a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_n=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 같은 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{3}a_2$$
$$a_4=\frac{3}{4}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}$$
$$a_n=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)\times a_1$$
$$\therefore\ a_n=\frac{1}{n}\times 2=\frac{2}{n}$$

$a_{n+1}=f(n)\times a_n$에서

$$\cancel{a_2}=f(1)\times a_1$$
$$\cancel{a_3}=f(2)\times \cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=f(3)\times \cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=f(n-1)\times \cancel{a_{n-1}}$$
$$a_n=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)$$

정답 ➡ $a_n=\frac{2}{n}$

보충 설명

$a_{n+1}=f(n)\times a_n$ 꼴의 점화식에서 $f(n)$은 $(n-1)$개의 등식을 곱했을 때 약분할 수 있도록 곱의 꼴로 고치는 것이 중요합니다. 즉, 이 문제에서는 $f(n)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$과 같이 고쳐야 합니다.

또한 $f(n)$이 일정한 상수 r이면 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이 됩니다.

풀이집 p.242

숫자 바꾸기

03-1 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=2,\ a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}\ \ (n\geq 2)$

표현 바꾸기

03-2 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_{n+1}=3^n a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의할 때, 3^{55}은 제 몇 항인가?

① 제10항 ② 제11항 ③ 제54항
④ 제55항 ⑤ 제81항

개념 넓히기 ★★☆

◆ 다른 풀이

03-3 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때,

$$a_1=2,\ 2S_n=na_{n+1}\ (n\geq 1)$$

이 성립한다. a_{100}의 값을 구하여라.

정답 **03-1** (1) $a_n=\dfrac{4}{n+1}$ (2) $a_n=n+1$ **03-2** ② **03-3** 200

예제 04

$a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴의 점화식

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+2\ \ (n\geq 1)$$

로 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

접근 방법

$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1,\ q\neq 0)$ 꼴의 점화식을

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

꼴로 변형하면 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$이고 공비가 p인 등비수열이 됩니다.

Bible $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴의 점화식은 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하자.

상세 풀이

$a_{n+1}=3a_n+2$를

$$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

꼴로 변형해야 하므로 ㉠을 정리하면

$$a_{n+1}=3a_n-3\alpha+\alpha=3a_n-2\alpha$$

$-2\alpha=2$이므로 $\alpha=-1$이고, 이를 ㉠에 대입하면 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

$a_n+1=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=3b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1+1=2+1=3$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$$b_n=3\times 3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore\ a_n=b_n-1=3^n-1$$

정답 ➡ $a_n=3^n-1$

보충 설명

$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1)$를 변형한 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$에서

$$a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$$

즉, $q=-p\alpha+\alpha$에서 $\alpha=p\alpha+q$이므로 다음과 같이 α의 값을 구하면 편리합니다.

$$\underset{\alpha}{\underset{\uparrow}{a_{n+1}}}=p\,\underset{\alpha}{\underset{\uparrow}{a_n}}+q \ \Rightarrow\ \alpha=p\alpha+q \ \Rightarrow\ \alpha=\frac{q}{1-p}$$

또한 $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴의 점화식의 양변의 n에 $n+1$을 대입하여 얻은 식에서 원래의 점화식을 같은 변끼리 빼서 계차수열의 일반항을 구할 수도 있지만 위의 풀이처럼 점화식을 변형하여 등비수열 $\{a_n-\alpha\}$를 만드는 방법이 더 편리합니다.

풀이집 p.243

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

04-1 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3$ $(n\geq1)$

(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$ $(n\geq1)$

표현 바꾸기

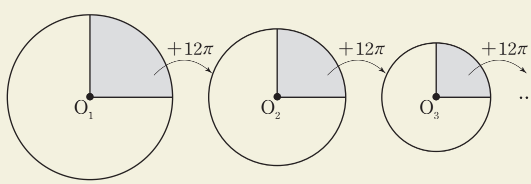
◆ 다른 풀이

04-2 $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n-2$ $(n\geq1)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{20}=3^p+q$일 때, 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? (단, q는 한 자리 자연수이다.)

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

개념 넓히기 ★★☆

04-3 넓이가 20π인 원 O_1의 사분원의 넓이보다 12π만큼 더 넓은 원 O_2를 그린다. 또 원 O_2의 사분원의 넓이보다 12π만큼 더 넓은 원 O_3을 그린다. 이와 같이 원 O_n의 사분원의 넓이보다 12π만큼 더 넓은 원 O_{n+1}을 계속하여 그려 간다. 원 O_n의 넓이를 S_n이라고 할 때, 수열 $\{S_n\}$의 일반항 S_n을 구하여라.



12

정답
04-1 (1) $a_n=2^{n+1}-3$ (2) $a_n=-\frac{1}{2^{n-1}}+4$
04-2 ③
04-3 $S_n=4\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+16\pi$

예제 05

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 꼴의 점화식

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0\ (n\geq 1)$$

으로 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

접근 방법

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\ (p+q+r=0)$ 꼴의 점화식이 주어지면 $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$ 꼴로 변형하여 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$의 일반항을 먼저 구합니다.

Bible $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 꼴의 점화식은 $p+q+r=0$임을 이용하여 $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$ 꼴로 변형한다.

상세 풀이

$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}-3a_{n+1}+3a_n=0$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=3b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_2-a_1=3-1=2$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$b_n=2\times 3^{n-1}$ $\quad\therefore a_{n+1}-a_n=2\times 3^{n-1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 같은 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=2 \\ & a_3-a_2=2\times 3^1 \\ & a_4-a_3=2\times 3^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_n-a_{n-1}=2\times 3^{n-2} \\ \hline & a_n-a_1=2(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-2}) \end{array}$$

$$\therefore a_n=a_1+2(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-2})=1+2\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$$

$$=1+2\times\frac{1\times(3^{n-1}-1)}{3-1}=3^{n-1}$$

정답 ➡ $a_n=3^{n-1}$

보충 설명

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $\cdots\cdots$ ㉠ 꼴의 점화식은 $p+q+r=0$일 때 $p(a_{n+2}-a_{n+1})=r(a_{n+1}-a_n)$ $\cdots\cdots$ ㉡ 꼴로 변형한다고 했습니다. ㉡에서 괄호를 풀어 정리하면 $pa_{n+2}-(p+r)a_{n+1}+ra_n=0$이고, 이 식이 ㉠과 같으려면 ㉠, ㉡에서 a_{n+2}, a_n의 계수가 각각 p, r로 같고, a_{n+1}의 계수가 같아야 하므로 $q=-(p+r)$, 즉 $p+q+r=0$이 성립해야 합니다. 따라서 위의 풀이는 $p+q+r=0$일 때에만 가능합니다.

풀이집 p.245

숫자 바꾸기

05-1 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0\ (n\ge 1)$

(2) $a_1=2,\ a_2=4,\ a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}\ (n\ge 1)$

표현 바꾸기

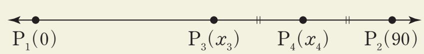
05-2 수열 $\{a_n\}$을

$$a_2=3a_1,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0\ (n\ge 1)$$

으로 정의하고 $a_8=85$일 때, a_4의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★★ ◆ 보충 설명

05-3 다음 그림과 같이 수직선 위에 두 점 $P_1(0)$, $P_2(90)$이 있다. 선분 P_1P_2의 중점을 $P_3(x_3)$, 선분 P_2P_3의 중점을 $P_4(x_4)$, …, 선분 P_nP_{n+1}의 중점을 $P_{n+2}(x_{n+2})$라고 할 때, 수열 $\{x_n\}$의 일반항 x_n을 구하여라.



12

정답

05-1 (1) $a_n=\dfrac{4^{n-1}+2}{3}$ (2) $a_n=\dfrac{10}{3}-\dfrac{4}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

05-2 5

05-3 $x_n=60\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

예제 06

$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 꼴의 점화식

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}\quad (n\ge 1)$$

으로 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

접근 방법

$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 꼴의 점화식은 양변의 역수를 취하여 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 일반항을 구한 후, 다시 역수를 취하여 일반항 a_n을 구합니다.

Bible $a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 꼴의 점화식은 양변의 역수를 취한다.

상세 풀이

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$에서 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+1$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=b_n+1$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$$b_n=b_1+(n-1)\times 1=\frac{1}{2}+(n-1)=n-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2n-1}$$

정답 ➡ $a_n=\dfrac{2}{2n-1}$

보충 설명

위의 예제에 주어진 수열 $\{a_n\}$은 각 항의 역수가 등차수열을 이루는 조화수열입니다.

그런데 $a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 꼴의 점화식에서 양변의 역수를 취했을 때, 등차수열이 아닌 **예제 02**의 점화식의 꼴을 적용하는 조금 까다로운 문제도 있습니다.

하지만 기본적으로 분자, 분모에 모두 a_n을 포함하고 있으면 역수를 취한다는 것에는 차이가 없음을 항상 명심합니다.

풀이집 p.247

숫자 바꾸기

06-1 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}\ (n\ge1)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+2a_n}\ (n\ge1)$

표현 바꾸기

06-2 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ {a_{n+1}}^2=\frac{{a_n}^2}{2{a_n}^2+1}\ (n\ge1)$$

으로 정의할 때, a_{10}의 값은? (단, $a_n>0$)

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

④ $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

개념 넓히기 ★★☆

06-3 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2(n+1)a_n+1}\ (n\ge1)$$

으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{99}a_k$의 값을 구하여라.

12

정답 **06-1** (1) $a_n=\dfrac{6}{3n-1}$ (2) $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ **06-2** ② **06-3** $\dfrac{99}{100}$

예제 07

같은 값이 반복되는 점화식

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $a_{n+p}=a_n$을 만족시키는 최소의 자연수 p를 구하여라.

(2) $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 값을 구하여라.

접근 방법

임의의 자연수 n에 대하여 $a_{n+p}=a_n$을 만족시키는 최소의 자연수 p를 찾는 문제로, 수열 $\{a_n\}$은 일정한 값이 반복된다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 주어진 점화식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 주기 p를 찾고, 반복되는 값들의 합을 구하면 됩니다.

Bible 처음 보는 수열은 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례대로 대입해서 수열의 규칙성을 찾는다!

상세 풀이

(1) $a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{a_n}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=\frac{1+a_2}{a_1}=\frac{1+2}{1}=3,$$

$$a_4=\frac{1+a_3}{a_2}=\frac{1+3}{2}=2,\ a_5=\frac{1+a_4}{a_3}=\frac{1+2}{3}=1,$$

$$a_6=\frac{1+a_5}{a_4}=\frac{1+1}{2}=1,\ a_7=\frac{1+a_6}{a_5}=\frac{1+1}{1}=2,\ \cdots$$

따라서 주어진 수열에서 1, 2, 3, 2, 1이 반복되고 있으므로 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{n+p}=a_n$을 만족시키는 최소의 자연수 p는 5입니다.

(2) $$\sum_{k=1}^{100} a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+\cdots+(a_{96}+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100})$$
$$=(1+2+3+2+1)\times 20=180$$

정답 ➡ (1) 5 (2) 180

보충 설명

함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

가 성립하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, p의 값 중에서 최소의 양수를 이 함수의 주기라고 합니다.

풀이집 p.248

숫자 바꾸기

07-1 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{300} a_k$의 값을 구하여라.

(1) $a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+1}a_{n-1}=a_n\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

표현 바꾸기

07-2 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}-a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의할 때, a_{100}의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

07-3 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\ (n\ge1)$$

로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{102} \cos\left(\frac{\pi}{2}a_k\right)$의 값은?

① -43 ② -41 ③ -40
④ -23 ⑤ -22

정답 **07-1** (1) 0 (2) 620 **07-2** 101 **07-3** ②

12

예제 08

피보나치 수열

108개의 계단으로 이루어진 탑을 한 걸음에 한 계단 또는 두 계단 오를 수 있다고 한다. n개의 계단을 오르는 방법의 수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 표의 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

계단의 수	1	2	3	4
계단을 오르는 방법의 수	1	2		
계단을 오르는 방법의 수의 증가량	╳	1		

(2) a_{n+2}를 a_n과 a_{n+1}로 나타내어라.

접근 방법

계단의 수가 적을 때의 계단을 오르는 방법의 수를 직접 계산해 보고, 이를 바탕으로 일반항을 구합니다.

상세 풀이

(1) 2개의 계단을 오르는 방법은 $1+1$, 2의 2가지

3개의 계단을 오르는 방법은 $1+1+1$, $1+2$, $2+1$의 3가지

4개의 계단을 오르는 방법은 $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$의 5가지

따라서 표의 빈칸을 모두 채우면 다음과 같습니다.

계단의 수	1	2	3	4
계단을 오르는 방법의 수	1	2	3	5
계단을 오르는 방법의 수의 증가량	╳	1	1	2

(2) $(n+2)$번째 계단까지 오르는 방법은 n번째 계단까지 오른 후, 두 계단을 한 번에 오르는 방법과 $(n+1)$번째 계단까지 오른 후, 한 계단을 오르는 방법의 두 가지입니다. (n번째 계단까지 오른 후, 한 계단씩 두 번 오르는 방법은 후자에 포함되므로 따로 생각하지 않습니다.)

따라서 $(n+2)$번째 계단까지 오르는 방법의 수는 n번째 계단까지 오르는 방법의 수와 $(n+1)$번째 계단까지 오르는 방법의 수를 더한 것과 같습니다.

$$\therefore a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

정답 ➡ (1) 풀이 참조 (2) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

보충 설명

이 문제처럼 앞의 연속한 두 항의 합을 나열하여 얻어지는 수열

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$

를 피보나치 수열이라고 합니다.

풀이집 p.249

숫자 바꾸기

08-1 일렬로 놓인 크기가 같은 n개의 정사각형 모양의 타일에 빨간색 또는 파란색을 칠하려고 한다. 파란색끼리는 이웃하지 않게 칠하려고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) n개의 타일을 색칠하는 방법의 수를 a_n이라고 할 때, a_1, a_2, a_3, a_4의 값을 차례대로 구하여라.

(2) a_{n+2}를 a_n과 a_{n+1}로 나타내어라.

표현 바꾸기

08-2 수열 $\{a_n\}$을

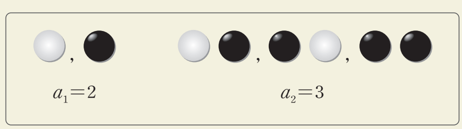
$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

으로 정의할 때, 다음 중 그 값이 $\sum_{k=1}^{100} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

① $a_{101}-a_1$　② $a_{101}-a_2$　③ $a_{101}+a_1$
④ $a_{102}-a_2$　⑤ $a_{102}+a_2$

개념 넓히기 ★★☆

08-3 흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 있다. 이 바둑돌 n개를 흰 바둑돌끼리는 이웃하지 않도록 일렬로 나열하는 방법의 수를 a_n이라고 하자. 예를 들어, $a_1=2$, $a_2=3$이다. a_{10}의 값을 구하여라.



정답 **08-1** (1) 2, 3, 5, 8 (2) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　**08-2** ④
08-3 144

예제 09

수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명

모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

접근 방법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 됩니다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

> **Bible** 자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 보일 때에는 수학적 귀납법을 이용한다.

상세 풀이

(i) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3},\ (\text{우변})=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$$

이므로 주어진 등식이 성립합니다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립합니다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립합니다.

정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

수학적 귀납법으로 등식을 증명할 때에는 $n=k+1$일 때의 식을 미리 써 놓은 후 $n=k$일 때의 등식의 양변에 적당한 것을 더하거나 곱하여 $n=k+1$일 때의 식의 꼴을 만듭니다.

이 문제에서도 ㉠의 양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면 좌변은 $n=k+1$일 때의 꼴이 바로 되는 것을 알 수 있으므로 우변을 적당히 변형하여 $n=k+1$일 때의 꼴을 만들도록 합니다.

풀이집 p.250

숫자 바꾸기

09-1 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

표현 바꾸기

09-2 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times 2+n\times 1$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

개념 넓히기 ★★☆

09-3 n이 자연수일 때, $3^{n+1}+4^{2n-1}$은 13으로 나누어떨어짐을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

정답 **09-1** p.544 참조 **09-2** p.545 참조 **09-3** p.545 참조

예제 10

수학적 귀납법을 이용한 부등식의 증명

모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ge 2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

접근 방법

등식의 증명과 마찬가지로 $n=k$일 때 부등식의 양변에 적당한 것을 더하여 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립함을 보입니다.
또한 부등식의 증명은 등식의 증명과 달리 $n=k+1$일 때의 증명이 까다로운 편이므로 다음의 Bible 내용을 생각하면서 증명합니다.

> **Bible** 수학적 귀납법으로 부등식을 증명할 때에는 ★> △이고 △> ☆이면 ★> ☆임을 이용한다.

상세 풀이

(ⅰ) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=1,\ (\text{우변})=2\times\frac{1}{1\times 2}=1$$

이므로 주어진 부등식이 성립합니다.

(ⅱ) $n=k\ (k\ge 1)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\ge 2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{k+1}$을 더하면

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}&\ge 2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}\\&\ge 2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+2}\\&=2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}\times\frac{k+1}{k+2}\\&\ge 2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{2}{(k+1)(k+2)}\\&=2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore\ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\ge 2\left\{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립합니다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립합니다.

정답 ➡ 풀이 참조

풀이집 p.251

숫자 바꾸기

10-1 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{n}{2} > \log_2 n$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

표현 바꾸기

10-2 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

(1) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

(2) $(1+h)^n > 1 + nh$ (단, $h > 0$)

개념 넓히기 ★★★

10-3 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + 1$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

12

정답 **10-1** p.545 참조 **10-2** p.546 참조 **10-3** p.546 참조