01 방정식의 실근의 개수

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수
⇔ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수
⇔ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수

◪ **다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.**

1. $\dfrac{x}{x^2+4}=\dfrac{1}{5}$

2. $e^x-x=1$

3. $e^x-x-2=0$

4. $e^x=x-1$

5. $e^x-x=0$

6. $2x-\sqrt{x}-1=0$

7. $x-\sqrt{x+1}+1=0$

8. $x=\ln x$

9. $\ln x-3x=0$

10. $x+\sin x=\dfrac{1}{2}$

11. $x-\cos x=0$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하여라.

12. $e^x = kx$ $(x > 0)$

13. $e^x - x - k = 0$

14. $ke^{2x} - e^x + 1 = 0$

15. $x - \ln x - k = 0$

16. $\ln x = kx$

17. $(k-2)e^x = x - 2$

18. $\dfrac{\ln x}{x} = kx$

◪ 다음 물음에 답하여라.

19. 방정식 $\ln x - x - k = 0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구하여라.

20. 방정식 $\ln x - x + 3 - n = 0$이 실근을 갖도록 하는 자연수 n의 개수를 구하여라.

21. x에 대한 방정식 $\ln x - x + n - 15 = 0$이 실근을 갖지 않을 때, 자연수 n의 개수를 구하여라.

22. 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 방정식 $\sin x = kx$가 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 상수 k의 값의 범위를 구하여라.

23. 방정식 $2x^2 - ke^x = 0$이 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

24. 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위를 구하여라.

25. 방정식 $x^2=ke^x$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

26. x에 대한 방정식 $e^x=kx$가 오직 하나의 실근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하여라.

27. 방정식 $4x^2e^{-x+2}=k$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 정수 k의 개수를 구하여라.

28. 방정식 $e^{2x}-nx=0$가 실근을 가지지 않도록 하는 정수 n의 개수를 구하여라.

29. 두 방정식 $\ln x-2=kx$, $e^{x+3}=kx$가 모두 실근을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a<k<b$일 때, ab의 값을 구하여라.

02 부등식에서의 활용

(1) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명하는 경우
⇨ 함수 $f(x)$에 대하여 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

(2) $x>a$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명하는 경우
① 함수 $f(x)$의 극값이 존재할 때 ⇨ $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
② 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때 ⇨ $x>a$에서 함수 $f(x)$가 증가하고 $f(x)\geq 0$임을 보인다.

(3) 주어진 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$이 성립함을 증명하는 경우
⇨ $h(x)=f(x)-g(x)$라 하고, 그 구간에서 $h(x)\geq 0$임을 보인다.

◪ 다음 주어진 부등식이 성립함을 증명하여라.

30. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\geq x+1$이 성립함을 증명하여라.

31. $x>0$일 때, 부등식 $2\ln x<x+1$가 성립함을 증명하여라.

32. $x>0$일 때, 부등식 $\sin x < x^2 + x$ 가 성립함을 증명하여라.

33. $x>0$일 때, 부등식 $e^x > \sin x + 1$가 성립함을 증명하여라.

34. 모든 실수 x에 대하여 $2e^x > x+1$이 성립함을 증명하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

35. 양의 실수 x에 대하여 부등식 $3x\ln x + x + k \ge 0$이 성립할 때, 상수 k의 최솟값을 구하여라.

36. $x>0$일 때, 부등식 $x\ln x \ge a - x$가 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하여라.

37. $x>0$일 때, 부등식 $ex - \ln ax \ge 0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라. (단, $e=2.7$로 계산한다.)

38. $1 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\alpha x \le e^x \le \beta x$가 성립하도록 α, β를 정할 때, $\beta - \alpha$의 최솟값을 구하여라.

39. $e \le x \le e^2$일 때, 부등식 $x\ln x - 3x + 2 + k \le 0$이 성립하기 위한 상수 k의 최댓값을 구하여라.

40. $x>0$일 때, 부등식 $x \ge \ln ax$가 항상 성립하도록 하는 양수 a의 값의 범위를 구하여라.

41. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x \ge x + k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

42. $0<x<8$일 때, 부등식 $2\sqrt{x+1}>x+a$가 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하여라.

43. 모든 실수 t에 대하여 부등식 $2t^2-4t\cos x+3\sin x>0$이 성립하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하여라. (단, $0\le x<2\pi$)

44. 모든 양수 x에 대하여 부등식 $e^x+\sin x-a\ge 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하여라.

45. 모든 양수 x에 대하여 $x^2-2\ln x-a\ge 0$가 성립하도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

46. $x>0$일 때, 부등식 $(\ln x)^2-4\ln x>a$를 만족하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

03 속도와 가속도

1. 직선 운동에서의 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

① $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ ② $a=\dfrac{dv}{dt}=f''(t)$

2. 평면 운동에서의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는

① 속도: $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$, 즉 $(f'(t),\ g'(t))$

② 가속도: $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$, 즉 $(f''(t),\ g''(t))$

참고 속도의 크기(속력)

: $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

가속도의 크기

: $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

◪ 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 (x, y)에 대하여 $x=\cos t$, $y=\sin 2t$일 때, 다음 물음을 구하여라.

47. $t=\dfrac{\pi}{6}$에서의 속도

48. $t=\dfrac{\pi}{6}$에서의 속력

49. $t=\dfrac{\pi}{6}$에서의 가속도

50. $t=\dfrac{\pi}{6}$에서의 가속도의 크기

◪ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 다음과 같을 때, [ ]안의 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하여라.

51. $f(t)=e^t-2t$ $[t=3]$

52. $f(t)=1-e^{-2t}$ $[t=1]$

53. $f(t)=4\sin\frac{\pi}{2}t+3\cos\frac{\pi}{2}t$ $[t=5]$

54. $f(t)=3t-\sin 2t$ $\left[t=\frac{\pi}{6}\right]$

55. $f(t)=2t+\sin\frac{\pi}{2}t$ $[t=1]$

56. $f(t)=t+\ln(t^2+4)$ $[t=2]$

◪ 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,y)$의 시각 t에서의 위치가 다음과 같을 때, [ ]안의 시각 t에서의 점 P의 속력을 구하여라.

57. $x=t^2+1$, $y=2t$ $[t=2]$

58. $x=-t^2+2t$, $y=e^{-2t}$ $[t=1]$

59. $x=4t^3$, $y=5t+3$ $[t=1]$

60. $x=2t-\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{2}{t}$ $(t>0)$ $[t=1]$

61. $x=\sqrt{t}$, $y=2\ln t$ $[t=4]$

62. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ $[t=\pi]$

63. $x=5(1-\cos t)$, $y=t-\sin t$ $[t=\pi]$

◪ 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 다음과 같을 때, [ ]안의 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하여라.

64. $x=3t-2,\ y=\frac{2}{3}t^3-2 \quad [t=2]$

65. $x=1+\sqrt{t},\ y=\ln t \ [t=1]$

66. $x=2t-1,\ y=e^t+e^{-t} \quad [t=2]$

67. $x=t-2\sin t,\ y=t-2\cos t \ [t=\pi]$

68. $x=2t-\cos t,\ y=1+\sin t \ \left[t=\frac{\pi}{2}\right]$

69. $x=e^t+e^{-2t},\ y=e^t-e^{-2t} \ [t=\ln 2]$

◪ 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 다음과 같을 때, [ ]안의 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기를 구하여라.

70. $x=\frac{2}{3}t^3,\ y=\frac{1}{4}t^4-3t^2+1 \ [t=1]$

71. $x=20+\cos 2t,\ y=16+\sin 2t \ [t=10]$

72. $x=5(1-\cos t),\ y=5(t-\sin t) \ [t=\pi]$

73. $x=2t^2+\cos 2t,\ y=3-\frac{1}{2}\sin 2t \ \left[t=\frac{\pi}{2}\right]$

74. $x=t+\cos t,\ y=2t-2\sin t \ \left[t=\frac{\pi}{6}\right]$

75. $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t \ [t=3]$

◪ 다음 물음에 답하여라.

76. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 $f(t)=\sin\frac{t}{3}+\frac{t}{6}$일 때, 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각을 구하여라.

77. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점P의 좌표가 시각 t일 때, $x=-2t^3-3t^2+36t$이다. 이 때, 점 P의 운동방향이 바뀌는 시각을 구하여라.

78. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 $f(t)=3\sin t-4\sin^3 t$ 일 때, 점 P가 처음으로 방향을 바꾸는 시각을 구하여라.

79. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 $t(t>0)$에서의 위치가 $x=2\sqrt{2}t$, $y=t^2-\ln 2t$이다. 점 P의 속력이 최소일 때, 시각을 구하여라.

80. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=8t$, $y=2t^2-4t$이다. 점 P의 속력이 8일 때의 시각을 구하여라.

81. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=-1+\sin 3t$, $y=\cos 3t+t$일 때, 점 P의 속력의 최댓값을 구하여라.

82. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=\frac{1}{2}t^2+t$, $y=t^2-2t-1$일 때, 점 P의 속력의 최솟값을 구하여라.

83. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=2t+1$, $y=\frac{1}{2}t^2-\ln t$일 때, 점 P의 속력의 최소가 되는 순간의 속도를 구하여라. (단, $t>0$)

84. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$일 때, 점 P의 속력이 최대가 되는 시각을 구하여라.
(단, $0\le t\le 2\pi$)

85. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 t에서의 좌표가 $x=\frac{t^2}{2}-\ln t$, $y=2t$이다. 속력이 최소가 되는 순간의 점 P의 가속도의 크기를 구하여라.

86. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$이다. 점 P의 속력이 $\sqrt{2}\,e^3$일 때의 시각을 구하여라.

87. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치는 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$이다. 점 P의 속력이 $4\sqrt{2}$인 점에서의 가속도의 크기를 구하여라.

88. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 $x=4\sqrt{2}\,t$, $y=(t+1)^2-4\ln(t+1)$일 때, 속력이 최소가 되는 시각을 구하여라.

89. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=t+\sin t$, $y=2\cos t$일 때, 점 P의 속력이 최대가 되는 시각에서의 가속도의 크기를 구하여라.

정답 및 해설

1) 2

⇨ $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$라 놓으면

$f'(x)=\dfrac{(x^2+4)-x\times 2x}{(x^2+4)^2}$

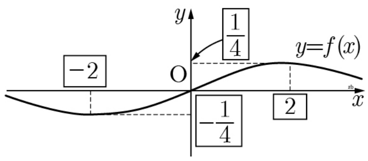
$f'(x)=\dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$이고

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{5}$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $\dfrac{x}{x^2+4}=\dfrac{1}{5}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

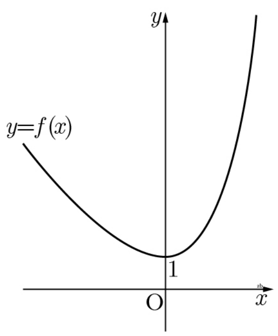
2) 1

⇨ $f(x)=e^x-x$라 놓으면 $f'(x)=e^x-1$이고

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 한 점에서 만나므로 방정식 $e^x-x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

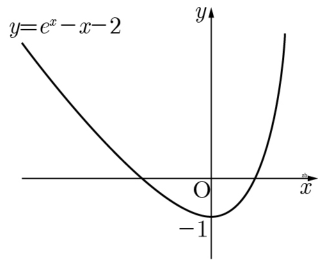
3) 2

⇨ $f(x)=e^x-x-2$라고 하면 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗



따라서 함수 $f(x)=e^x-x-2$의 그래프와 x축과의 교점이 2개이므로 방정식 $e^x-x-2=0$의 실근의 개수는 2개이다.

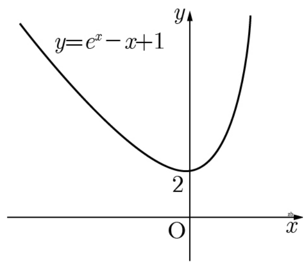
4) 0

⇨ $f(x)=e^x-x+1$이라고 하면 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗



따라서 함수 $f(x)=e^x-x+1$의 그래프와 x축이 만나지 않으므로 주어진 방정식의 실근은 없다. 즉, 실근의 개수는 0개다.

5) 0

⇨ $f(x)=e^x-x$라 하면

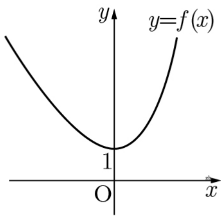
$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

이때 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.

6) 1

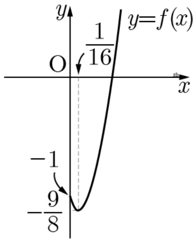
⇨ $f(x)=2x-\sqrt{x}-1$이라 하면 $x\geq 0$이고

$f'(x)=2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $4\sqrt{x}-1=0$, $\sqrt{x}=\dfrac{1}{4}$ $\therefore x=\dfrac{1}{16}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{9}{8}$	↗

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

7) 2

⇨ $f(x)=x-\sqrt{x+1}+1$이라 하면 $x\geq -1$이고

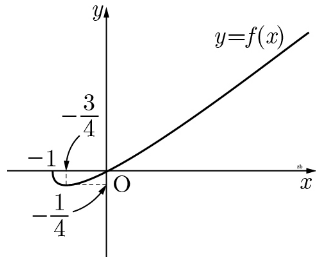
$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{x+1}=1$, $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}$

$x+1=\dfrac{1}{4}$ $\qquad\therefore x=-\dfrac{3}{4}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

8) 0

⇨ $f(x)=\ln x-x$라 하면 $x>0$이고

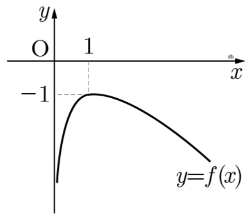
$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

이때 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	-1	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.

9) 0

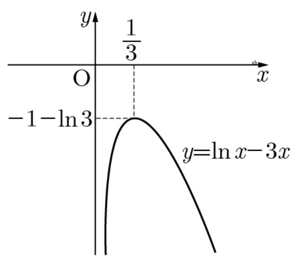
⇨ $f(x)=\ln x-3x$라고 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-3$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{3}$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$-1-$	↘

한편, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

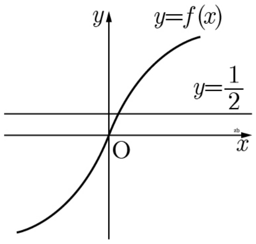


따라서 함수 $f(x)=\ln x-3x$의 그래프는 x축과

만나지 않으므로 방정식 $\ln x-3x=0$의 실근의 개수는 0개이다.

10) 1

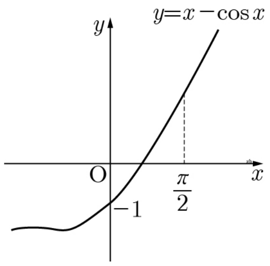
⇨ 방정식 $x+\sin x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x+\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=x+\sin x$라 하면
$f'(x)=1+\cos x$
$f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

11) 1

⇨ $f(x)=x-\cos x$로 놓으면 $f'(x)=1+\sin x\ge 0$
$(\because -1\le \sin x\le 1)$이므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.
이때, $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



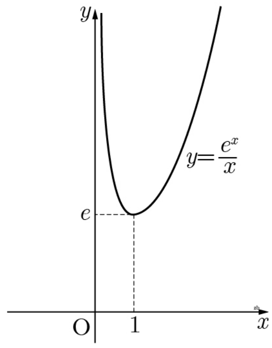
즉, 함수 $f(x)=x-\cos x$와 x축과의 교점이 1개이므로 방정식 $x-\cos x=0$의 실근의 개수는 1개다.

12) $k>e$

⇨ $x\ne 0$이므로 $e^x=kx$의 근은 곡선 $y=\frac{e^x}{x}$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.
$f(x)=\frac{e^x}{x}$라고 하면
$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$
$f'(x)=0$에서 $x=1$
$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	e	↗

한편, $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $e^x=kx$가 서로 다른 두 실근을 갖는 k의 범위는 $k>e$이다.

13) $k>1$

⇨ $f(x)=e^x-x$라고 하면 $f'(x)=e^x-1$
$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 $k>1$이면 곡선 $y=e^x-x$와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

14) $0<k<\frac{1}{4}$

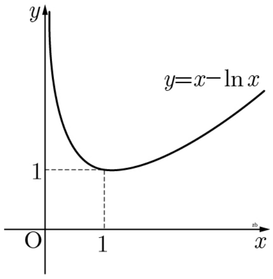
⇨ $e^x=t$라 하면 $t>0$이고
$kt^2-t+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$1-4k>0$ $\quad\therefore k<\frac{1}{4}$
또 $k=0$이면 $e^x=1$은 하나의 근을 가지므로 $k>0$이어야 한다.
따라서 구하고자 하는 범위는 $0<k<\frac{1}{4}$이다.

15) $k>1$

⇨ $x-\ln x-k=0$에서 $x-\ln x=k$이므로 주어진 방정식의 근은 곡선 $y=x-\ln x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.
$f(x)=x-\ln x$라고 하면 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$
$f'(x)=0$에서 $x=1$
$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

한편, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $x-\ln x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 k의 범위는 $k>1$이다.

16) $0<k<\dfrac{1}{e}$

⇨ $x\neq0$이므로 $\ln x=kx$의 근은 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

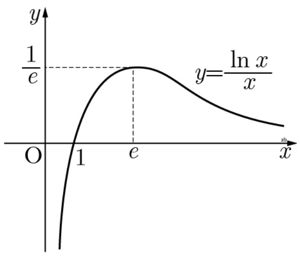
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라고 하면 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

한편, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $\ln x=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지는 k의 범위는 $0<k<\dfrac{1}{e}$이다.

17) $2<k<e^{-3}+2$

⇨ $f(x)=(k-2)e^x-x+2$라 하면

$f'(x)=(k-2)e^x-1$

$f'(x)=0$이 되는 $x=\ln\dfrac{1}{k-2}$이므로

$f\left(\ln\dfrac{1}{k-2}\right)=1-\ln\dfrac{1}{k-2}+2<0$이 극솟값이자 최솟값이다.

따라서 이를 만족하는 k는

$\ln(k-2)<-3$

$\therefore\ 2<k<e^{-3}+2$

18) $0<k<\dfrac{1}{2e}$

⇨ $\dfrac{\ln x}{x}=kx$에서 $\ln x=kx^2$

$f(x)=\ln x-kx^2$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2kx$

$f'(x)=0$, $x^2=\dfrac{1}{2k}$ $\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ $(\because x>0)$

따라서 최댓값이 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$일 때이므로

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2k}}-k\cdot\dfrac{1}{2k}<0$이므로

$\ln\dfrac{1}{\sqrt{2k}}>\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 0<k<\dfrac{1}{2e}$

19) -1

⇨ $f(x)=\ln x-x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$ $\qquad\therefore\ x=1$

따라서 $f(1)=-1=k$이므로 $k=-1$

20) 2

⇨ $\ln x-x+3-n=0$에서 $\ln x-x+3=n$

$f(x)=\ln x-x+3$ $(x>0)$이라고 하면

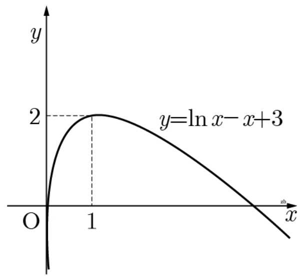
$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$

한편, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $\ln x-x+3-n=0$이 실근을 가질 조건은 $n\leq2$

따라서 자연수 n은 1, 2로 2개이다.

21) 15

⇨ $f(x)=\ln x-x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$ $\quad \therefore x=1$

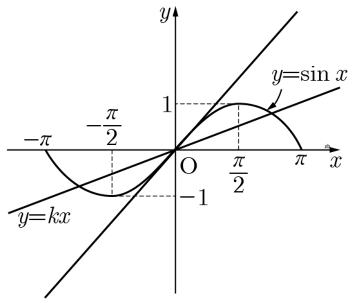
$f(x)$는 $x=1$일 때, 극대이므로

$f(x)=15-n>f(1)$

$15-n>-1$ $\quad \therefore n<16$

따라서 자연수 n의 개수는 15개이다.

22) $0\le k<1$

⇨ 

닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 방정식 $\sin x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점이 3개이어야 하므로 k는 $k\ge 0$이고, 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기보다 작아야 한다. 이때, $y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\cos 0=1$이다.

따라서 구하는 상수 k의 값의 범위는 $0\le k<1$이다.

23) $0<k<\dfrac{8}{e^2}$

⇨ $f(x)=2x^2$, $g(x)=ke^x$라 하면

$f'(x)=4x$, $g'(x)=ke^x$

$f(x)$의 $g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$4t=ke^t$이고 $2t^2=ke^t$이므로 $4t=2t^2$이다.

$2t^2-4t=0$, $2t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

ⅰ) $t=0$이면 $k=0$

ⅱ) $t=2$이면 $k=\dfrac{8}{e^2}$

서로 다른 세 실근을 가지는 실수 k의 범위는 $0<k<\dfrac{8}{e^2}$이다.

24) $0<k<\dfrac{1}{3e}$

⇨ 방정식 $\dfrac{\ln x}{x^2}=kx$에서 $x\ne 0$이므로 양변을 x로 나누면 $\dfrac{\ln x}{x^3}=k$이고 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k값의 범위를 구한다.

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$라고 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{1-3\ln x}{x^4}$$

$f'(x)=0$에서 $x=e^{\frac{1}{3}}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{3e}$	↘

한편, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로

$0<k<\dfrac{1}{3e}$일 때, 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 $0<k<\dfrac{1}{3e}$일 때, 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$와 직선 $y=kx$도 서로 다른 두 점에서 만난다.

25) $\dfrac{4}{e^2}$

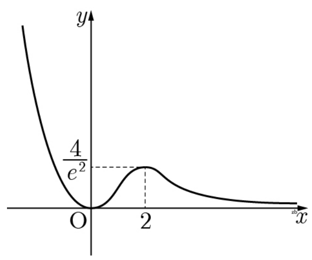
⇨ $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$라 하고 $g(x)=k$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

$f'(x)=0$인 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 그래프는



방정식 $x^2=ke^x$이 서로 다른 세 실근을 가지므로 즉 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가지므로

$\therefore\ 0<k<\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore\ \alpha+\beta=0+\dfrac{4}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$

26) $k=e$ 또는 $k<0$

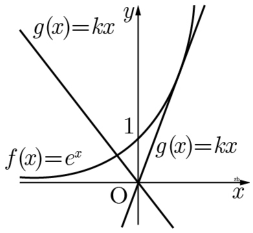
⇨ 방정식 $e^x=kx$가 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=kx$가 한 점에서 만나야 한다.

먼저, 두 함수의 그래프가 접하는 경우를 구해 보

자.

$f(x)=e^x$, $g(x)=kx$라 놓으면

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=k$



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 a라 하면 함숫값이 같으므로

$f(a)=g(a)$에서 $e^a=ka\cdots$ ㉠

접선의 기울기가 같으므로 $f'(a)=g'(a)$에서

$e^a=k\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $k=e$

즉, $k=e$일 때, 두 함수의 그래프가 접한다.

한편, 두 함수의 그래프로부터 $k<0$일 때 교점이 한 개임을 알 수 있다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값 또는 범위는 $k=e$ 또는 $k<0$이다.

27) 15

⇨ $f(x)=4x^2e^{-x+2}-k$라 하면

$f'(x)=8xe^{-x+2}+4x^2(-e^{-x+2})=0$ 을 만족하는 $x=0$과 $x=2$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대를 갖고

$f(0)f(2)=-k(16-k)<0$이어야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 k의 범위는 $k(k-16)<0$이므로 $0<k<16$이고, 정수 k의 정수는 15개이다.

28) 5

⇨ $f(x)=e^{2x}-nx$라 하면 $f'(x)=2e^{2x}-n$이므로

$f'(x)=0$을 만족하는 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}$

또한 $f''(x)=4e^{2x}>0$이므로 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

그러므로

$f\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\left(1-\ln\frac{n}{2}\right)>0$을

만족하는 n은 $1-\ln\frac{n}{2}>0$이므로 $0<n<2e<5.5$

이고 이에 해당하는 자연수 n은 5개이다.

29) e

⇨ 주어진 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않으므로 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=\ln x-2$, $y=e^{x+3}$과 모두 만나지 않아야 한다.

(ⅰ) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x-2$와 접할 때,

$y=\ln x-2$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 $y=\ln x-2$ 위의 점 $(t, \ln t-2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(\ln t-2)=\frac{1}{t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln t+2=-1$ $\quad\therefore t=e^3$

따라서 직선 $y=kx$가 점 $(e^3, 1)$을 지나므로

$k=\frac{1}{e^3}$

(ⅱ) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^{x+3}$과 접할 때,

$y=e^{x+3}$에서 $y'=e^{x+3}$이므로 $y=e^{x+3}$ 위의 점 (s, e^{s+3})에서의 접선의 방정식은

$y-e^{s+3}=e^{s+3}(x-s)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^{s+3}=-s\cdot e^{s+3}$ $\quad\therefore s=1$

따라서 직선 $y=kx$가 점 $(1, e^4)$를 지나므로

$k=e^4$

즉 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{e^3}<k<e^4$

$\therefore ab=\frac{1}{e^3}\times e^4=e$

30) $f(x)=e^x-x-1$이라 하면

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

또, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$, 즉 $e^x-x-1\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\ge x+1$이 성립한다.

31) $f(x)=2\ln x-x-1$이라 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{x}-1$

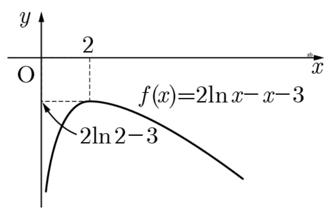
$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$2\ln 2-3$	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 이 함수는 $x=2$에서 최댓값 $2\ln 2-3$을 가진다.

$2\ln 2-3=\ln 4-\ln e^3<0$

따라서 $2\ln x-x-1<0$이므로 $2\ln x<x+1$이다.



32) $f(x)=\sin x-x^2-x$라고 하면

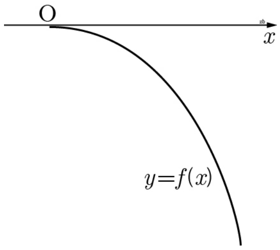
$f'(x)=\cos x-2x-1$

$x>0$이고, $|\cos x|\le 1$이므로 $f'(x)<0$

또, $f'(0)=0$

따라서 $x>0$에서 $f(x)<0$이므로

$\sin x<x^2+x$



33) $f(x)=e^x-\sin x-1$로 놓으면

$f'(x)=e^x-\cos x$

이때, 도함수 $f'(x)$는 $x>0$에서 $e^x>1$이고

$-1<\cos x<1$이므로 $f'(x)>0$이다.

따라서 $f(x)$는 양의 실수 전체의 구간에서 증가한다.

또, $f(0)=0$

따라서 $x>0$에서 $f(x)>0$이므로

$e^x>\sin x+1$

34) $f(x)=2e^x-x-1$이라 놓으면

$f'(x)=2e^x-1$

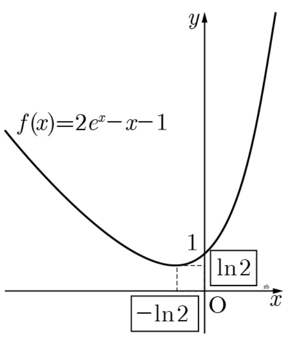
$f'(x)=0$에서 $x=-\ln 2$

x	$\cdots$	$-\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 이 함수는 $x=-\ln 2$에서 최솟값 $\ln 2$를 가진다.

$2e^x-x-1\ge \ln 2>0$

$\therefore 2e^x>x+1$



35) $3e^{-\frac{4}{3}}$

⇨ $f(x)=3x\ln x+x+k\ (x>0)$라고 하면

$f'(x)=3\ln x+3x\cdot\dfrac{1}{x}+1=3\ln x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=e^{-\frac{4}{3}}$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{4}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(x)$의 최솟값은

$f\left(e^{-\frac{4}{3}}\right)=3\cdot e^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)+e^{-\frac{4}{3}}+k=-3e^{-\frac{4}{3}}+k$

이때 $f\left(e^{-\frac{4}{3}}\right)\ge 0$이어야 하므로

$-3e^{-\frac{4}{3}}+k\ge 0\quad \therefore k\ge 3e^{-\frac{4}{3}}$

36) $-\dfrac{1}{e^2}$

⇨ $f(x)=x\ln x+x-a$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+1=\ln x+2$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{e^2}$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{e^2}-a$	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{e^2}-a$이므로 $f(x)\ge 0$에서 $-\dfrac{1}{e^2}-a\ge 0$, 즉 $a\le-\dfrac{1}{e^2}$이다.

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{1}{e^2}$이다.

37) 7

⇨ $f(x)=ex-\ln ax$라고 하면

$f'(x)=e-\dfrac{a}{ax}=e-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{e}$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(x)$의 최솟값은

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=e\cdot\dfrac{1}{e}-\ln\left(a\cdot\dfrac{1}{e}\right)=1-(\ln a-1)=2-\ln a$

이므로 $x>0$에서 $f(x)\ge 0$이려면,

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)\ge 0,\ 2-\ln a\ge 0,\ \ln a\le 2$

$\therefore 0 < a \le e^2$ $(\because x > 0)$
이때, $e = 2.7$이므로 $e^2 = 7.29$이고,
구하는 정수 a는 1, 2, 3, ⋯, 7로 7개이다.

38) $e\left(\frac{e}{2}-1\right)$

⇨ $1 \le x \le 2$이므로 $x \ne 0$이다.
따라서 $\alpha x \le e^x \le \beta x$에서 x로 나누면,

$\alpha \le \frac{e^x}{x} \le \beta$

이때, $f(x) = \frac{e^x}{x}$이라고 하면 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$
$1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	⋯	2
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	e	↗	$\frac{e^2}{2}$

최솟값은 $x = 1$일 때, $f(1) = e$,
최댓값은 $x = 2$일 때, $f(2) = \frac{e^2}{2}$

$\therefore \alpha \le e$, $\beta \ge \frac{e^2}{2}$

따라서 $\beta - \alpha$의 최솟값은 $\frac{e^2}{2} - e = e\left(\frac{e}{2}-1\right)$

39) $2e-2$
⇨ $f(x) = x\ln x - 3x + 2 + k$라고 하면
$f'(x) = \ln x + 1 - 3 = \ln x - 2$
$e \le x \le e^2$에서 $f'(x) \le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. 따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(e)$이고,
$f(e) \le 0$에서 $e\ln e - 3e + 2 + k = -2e + 2 + k \le 0$,
$-2e + 2 + k \le 0$, $k \le 2e - 2$
따라서 구하는 상수 k의 최댓값은 $2e-2$

40) $0 < a \le e$

⇨ $f(x) = x - \ln ax$로 놓으면 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$
$x > 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	⋯	1	⋯
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$1-\ln a$	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1) = 1 - \ln a$이므로
$1 - \ln a \ge 0$, 즉 $\ln a \le 1$이다.
$\therefore 0 < a \le e$

41) 1
⇨ $f(x) = e^x - x - k$라 놓으면 $f'(x) = e^x - 1$
$f'(x) = 0$에서 $x = 0$

x	⋯	0	⋯
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$1-k$	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0) = 1 - k$이므로
$1 - k \ge 0$ $\quad \therefore k \le 1$
따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

42) -2
⇨ $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x - a$라 놓으면
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$
$0 < x < 8$에서 $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$는 $0 < x < 8$에서 감소하는 함수이다.
$0 < x < 8$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이 성립하려면 $f(8) = 2\sqrt{9} - 8 - a = -2 - a \ge 0$
$\therefore a \le -2$
따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

43) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$
⇨ 부등식에서 이차식이 항상 양수가 되려면
이 이차식의 판별식은 0보다 작아야 하므로
$D/4 = 4(1-\sin^2 x) - 6\sin x < 0$
$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) > 0$
$\therefore$ $\sin x > \frac{1}{2}$

따라서 이를 만족하는 범위는 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$가 된다.

44) 1
⇨ $f(x) = e^x + \sin x$라 하고 $f(x) \ge a$가 항상 성립하는 것을 확인하면
$f'(x) = e^x + \cos x$이고, $x > 0$일 때, $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 $x > 0$일 때 증가함수이다.
따라서 $f(0) = 1 \ge a$이므로 실수 a의 최댓값은 1이다.

45) 1
⇨ $x^2 - 2\ln x \ge a$가 성립해야 하므로
$f(x) = x^2 - 2\ln x$에서 $x > 0$일 때, $f(x)$의 최솟값을 구하면
$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$
$f'(x) = 0$인 $x = 1$이고, 이때 $f(x)$가 최솟값을 $f(1) = 1$을 가지므로 $1 \ge a$이다.
따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

46) -5
⇨ 주어진 부등식이 성립하려면
$f(x) = (\ln x)^2 - 4\ln x$라 할 때, $f(x)$의 최솟값이 a보다 커야한다.

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{x}$이고, $f'(x)=0$인 $x=e^2$이다.

$x>0$일 때, $f(x)$의 최솟값은 $f(e^2)=-4$이므로 $a<-4$이다.
따라서 정수 a의 최댓값은 -5이다.

47) $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

⇨ $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(-\sin t, 2\cos 2t)$이므로 $t=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

48) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

⇨ $t=\frac{\pi}{6}$에서의 속력은 $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

49) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-2\sqrt{3}\right)$

⇨ $\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(-\cos t, -4\sin 2t)$이므로 $t=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-2\sqrt{3}\right)$

50) $\frac{\sqrt{51}}{2}$

⇨ $t=\frac{\pi}{6}$에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+12}=\frac{\sqrt{51}}{2}$

51) 속도: e^3-2, 가속도: e^3

⇨ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면 $v=f'(t)=e^t-2$, $a=f''(t)=e^t$
이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=e^3-2$, $a=e^3$

52) 속도: $\frac{2}{e^2}$, 가속도: $-\frac{4}{e^2}$

⇨ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=f'(t)=2e^{-2t}$, $a=f''(t)=-4e^{-2t}$이므로
$t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=2e^{-2}=\frac{2}{e^2}$, $a=-4e^{-2}=-\frac{4}{e^2}$

53) 속도: $-\frac{3}{2}\pi$, 가속도: $-\pi^2$

⇨ $x(t)=4\sin\frac{\pi}{2}t+3\cos\frac{\pi}{2}t$

$v(t)=2\pi\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{2}t$

$a(t)=-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{4}\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t$

따라서 $t=5$일 때 속도 $v(5)=-\frac{3}{2}\pi$, $a(5)=-\pi^2$ 이다.

54) 속도: 2, 가속도: $2\sqrt{3}$

⇨ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면 $v=f'(t)=3-2\cos 2t$, $a=f''(t)=4\sin 2t$이므로 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3-2\cos\frac{\pi}{3}=2$, $a=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

55) 속도: 2, 가속도: $-\frac{\pi^2}{4}$

⇨ $f'(t)=2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$, $f''(t)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}t$
따라서 $t=1$에서 점 P의 속도는 $f'(1)=2$
가속도는 $f''(1)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{4}$

56) 속도: $\frac{3}{2}$, 가속도: 0

⇨ 시각 t에서 점 P의 속도를 $v(t)$,
가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(t)=\frac{dx}{dt}=1+\frac{2t}{t^2+4}$

$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)$

$=\frac{2(t^2+4)-(2t)\times(2t)}{(t^2+4)^2}=-\frac{2(t^2-4)}{(t^2+4)^2}$

따라서 점 P의 $t=2$에서의 속도와 가속도는
$v(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $a(2)=0$

57) $2\sqrt{5}$

⇨ 시각 t에서 점 P의 속도는 $(2t,\ 2)$이다.
따라서 $t=2$일 때, 점 P의 속도는 $(4,\ 2)$이고,
속력은 $\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이다.

58) $\frac{2}{e^2}$

⇨ $\frac{dx}{dt}=-2t+2$, $\frac{dy}{dt}=-2e^{-2t}$이므로,

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=4t^2-8t+4$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4e^{-4t}$에서

$v(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sqrt{(t-1)^2+e^{-4t}}$.

따라서 $t=1$일 때의 속력은

$v(1)=2\sqrt{(1-1)^2+e^{-4}}=2\sqrt{\frac{1}{e^4}}=\frac{2}{e^2}$

59) 13

⇨ $\frac{dx}{dt}=12t^2$, $\frac{dy}{dt}=5$이므로 $t=1$일 때, 점 P의 속력

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

은 $\sqrt{144t^4+25}$ 에 $t=1$을 대입하여 구한다.
$\therefore \sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$이다.

60) $\sqrt{10}$

⇨ $\frac{dx}{dt}=2-(-1)t^{-2}=2+\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt}=1-2t^{-2}=1-\frac{2}{t^2}$

따라서 속력은

$\sqrt{\left(2+\frac{1}{t^2}\right)^2+\left(1-\frac{2}{t^2}\right)^2}$

$=\sqrt{4+2\times2\times\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}+1-2\times1\times\frac{2}{t^2}+\frac{4}{t^4}}$

$=\sqrt{5+\frac{5}{t^4}}$

따라서 구하는 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은

$\sqrt{5+\frac{5}{1}}=\sqrt{10}$ 이다.

61) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

⇨ $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{t}$이므로

속도 v는 $v=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}},\ \frac{2}{t}\right)$

즉 시각 $t=4$에서의 속도는 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$이고,

따라서 시각 $t=4$에서의 속력 $|v|$는

$|v|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

62) $\sqrt{2}\,e^{\pi}$

⇨ $\vec{v}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})=(e^t(-\sin t+\cos t),e^t(\sin t+\cos t))$

$\therefore |\vec{v}|=\sqrt{e^{2t}(-\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}$

$=\sqrt{e^{2t}(2\sin^2 t+2\cos^2 t)}=\sqrt{2}\,e^t$

$\therefore t=\pi$일 때 속력은 $\sqrt{2}\,e^{\pi}$

63) 속력: 2

⇨ 점 $(10,\ \pi)$를 지날 때는 $t=\pi$일 때 이므로 $t=\pi$일 때 속도를 구하면 $(5\sin\pi,\ 1-\cos\pi)$ $=(0,\ 2)$이므로 속력은 2이다.

64) 속도: $(3,8)$, 가속도: $(0,8)$

⇨ $\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=2t^2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(3,2t^2)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(3,8)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=4t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(0,4t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0,8)$

65) 속도: $\left(\frac{1}{2},1\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$

⇨ $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}},\frac{1}{t}\right)$이므로

$t=1$을 대입하면 속도: $\left(\frac{1}{2},1\right)$

$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(-\frac{1}{4t\sqrt{t}},-\frac{1}{t^2}\right)$이므로

$t=1$을 대입하면 가속도: $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$

66) 속도: $(2,e^2-e^{-2})$, 가속도: $(0,e^2+e^{-2})$

⇨ $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(2,e^t-e^{-t})$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(2,e^2-e^{-2})$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^t+e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(0,e^t+e^{-t})$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0,e^2+e^{-2})$

67) 속도: $(3,\ 1)$, 가속도: $(0,\ -2)$

⇨ $\frac{dx}{dt}=1-2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1+2\sin t$이므로

속도는 $(1-2\cos t,\ 1+2\sin t)$

따라서 $t=\pi$를 대입하면 속도는 $(3,\ 1)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2\cos t$이므로

$t=\pi$를 대입하면 가속도는 $(0,\ -2)$

68) 속도: $(3,\ 0)$, 가속도: $(0,\ -1)$

⇨ $\frac{dx}{dt}=2+\sin t, \frac{dy}{dt}=\cos t$이며

$t=\frac{\pi}{2}$일 때, 속도는 $(3,\ 0)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t, \frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 가속도는 $(0,\ -1)$

69) 속도: $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$, 가속도: $(3,\ 1)$

⇨ $\frac{dx}{dt}=e^t-2e^{-2t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+2e^{-2t}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t+4e^{-2t}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^t-4e^{-2t}$

점 P의 시각 t에서의 속도는 $(e^t-2e^{-2t},\ e^t+2e^{-2t})$

$t=\ln 2$에서의 속도는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이고,

가속도는 $(e^t+4e^{-2t},\ e^t-4e^{-2t})$이므로

$t=\ln 2$에서의 가속도는 $(3,\ 1)$이다.

70) 5

⇨ 속도는 $(2t^2,\ t^3-6t)$, 가속도는 $(4t,\ 3t^2-6)$이므로

$t=1$일 때 가속도는 $(4,\ -3)$이므로

가속도의 크기는 $\sqrt{4^2+3^2}=5$이다.

71) 4

⇨ $\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t, \frac{dy}{dt}=2\cos 2t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=(-2\cos 2t)\times 2=-4\cos 2t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=2\times(-\sin 2t)\times 2=-4\sin 2t$

따라서 $\vec{a}=(-4\cos 2t, -4\sin 2t)$이므로

$|\vec{a}|=\sqrt{16\cos^2 2t+16\sin^2 2t}=\sqrt{16\times 1}=4$

72) 5

⇨ 시각 t에서의 속도는 $(5\sin t,\ 5-5\cos t)$이고,
시각 t에서의 가속도는 $(5\cos t,\ 5\sin t)$이므로
$t=\pi$일 때 가속도가 $(-5,\ 0)$이므로 가속도의 크기는 5이다.

73) 8

⇨ $x=2t^2+\cos 2t$, $y=3-\frac{1}{2}\sin 2t$

t초 후의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\right)=(4t-2\sin 2t\ ,\ -\cos 2t)$

t초 후의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(4-4\cos 2t\ ,\ 2\sin 2t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 가속도의 크기는

$\therefore |a|=\sqrt{(4-4\cos\pi)^2+(2\sin\pi)^2}$

$=\sqrt{(4+4)^2}=8$

74) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

75) $2e^3$

⇨ $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t+e^t(-\sin t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$이고

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t\cos t+e^t(-\sin t)+e^t(-\sin t)+e^t(-\cos t)$

$=-2\sin te^t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t\sin t+e^t\cos t+e^t\cos t+e^t(-\sin t)=2\cos te^t$

$\vec{v}=(-2\sin te^t, 2\cos te^t)$이므로 $|\vec{v}|=2e^t$

$t=3$을 대입하면 $2e^3$이다.

76) 2π

⇨ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}+\frac{1}{6}$

$t=a$일 때, 점 P의 속력을 0이라 하면

$\left|\frac{1}{3}\cos\frac{a}{3}+\frac{1}{6}\right|=0$, $\cos\frac{a}{3}=-\frac{1}{2}$

이때 $a\geq 0$이므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \cdots$

따라서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각은 2π이다.

77) 2

⇨ 주어진 식을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=-6t^2-6t+36=-6(t^2+t-6)=-6(t-2)(t+3)$

따라서 $x>0$에서 $\frac{dx}{dt}=0$을 만족하는 t의 값은

$t=2$.

78) $\frac{\pi}{6}$

⇨ 처음으로 방향을 바꾸는 시각은 처음으로 속도의 부호가 바뀌는 시각을 말한다.

$v(t)=f'(t)=3\cos t-12\cos t\sin^2 t=3\cos t(1-4\sin^2 t)$

에 대해 $t=0$에서 시작하므로

처음으로 바뀌는 시각은 $\sin t=\frac{1}{2}$ 인 $t=\frac{\pi}{6}$ 일 때

이다.

79) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}, \frac{dy}{dt}=2t-\frac{1}{t}$이므로 속력의 값은

$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=2t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{2}$이며 $2t=\frac{1}{t}$일 때, 속력이 최소이다.

$\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

80) 1

⇨ $\frac{dx}{dt}=8, \frac{dy}{dt}=4t-4$이다.

P의 속력은 $\sqrt{(4t-4)^2+8^2}=8$이므로

이때 $t=1$이다.

81) 4

⇨ $\frac{dx}{dt}=3\cos 3t, \frac{dy}{dt}=-3\sin 3t+1$이므로 속력은

$\sqrt{(3\cos 3t)^2+(1-3\sin 3t)^2}=\sqrt{10-6\sin 3t}$ 이므로

$\sin 3t=-1$일 때 최댓값을 가지므로 4이다.

82) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

⇨ $\frac{dx}{dt}=t+1$, $\frac{dy}{dt}=2t-2$이므로 속도 v는

$v=(t+1,\ 2t-2)$

$|v|=\sqrt{(t+1)^2+(2t-2)^2}=\sqrt{5t^2-6t+5}$

$=\sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$

따라서 $t=\frac{3}{5}$일 때 점 P의 속력은 최소이고,

최솟값은 $\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

83) (2, 0)

⇨ $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=t-\frac{1}{t}$이므로 속도 v는

$v=\left(2,\ t-\frac{1}{t}\right)$

$|v|=\sqrt{2^2+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}=\sqrt{t^2+2+\frac{1}{t^2}}$

$=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=t+\frac{1}{t}\quad(\because t>0)$

$t>0$, $\frac{1}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2$

이때 등호는 $t=\frac{1}{t}$일 때 성립하므로

$t^2=1\quad\therefore t=1(\because t>0)$

따라서 점 P의 속력이 최소가 되는 순간의 속도는 시각 $t=1$이 때의 속도이므로 $v=(2,\ 0)$

84) π

⇨ $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 속도 v는

$v=(1-\cos t,\ \sin t)$

속력 $|v|=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=\sqrt{2-2\cos t}$

$0\leq t\leq 2\pi$에서 $-1\leq\cos t\leq 1$이므로

$0\leq 2-2\cos t\leq 4\quad\therefore 0\leq|v|\leq 2$

이때 속력 $|v|$가 최대가 되는 것은 $2-2\cos t=4$, 즉 $\cos t=-1$일 때이다.

따라서 속력이 최대가 되는 시각은 $t=\pi$이다.

85) 2

⇨ $\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로

속력은 $\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+4}=t+\frac{1}{t}$이다.

$t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{1}=2$이므로 $t=1$일 때 최소이다.

$\frac{d^2x}{dt^2}=1+\frac{1}{t^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$이므로 $t=1$일 때,

P의 가속도의 크기는 2이다.

86) 3

⇨ $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$이므로

속력은 $\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{2}\,e^t$이므로 P의 속력이 $\sqrt{2}\,e^3$일 때의 시각은 $\therefore 3$이다.

87) 8

⇨ $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\cos t+\sin t)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{2t}\{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2\}$

$=e^{2t}(2\cos^2 t+2\sin^2 t)=2e^{2t}$이므로,

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}\,e^t$

따라서 속력의 크기가 $4\sqrt{2}$인 t의 값을 구해보면

$\sqrt{2}\,e^t=4\sqrt{2}\quad\Rightarrow e^t=4.\ \therefore t=\ln 4.$

한편,

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t(\cos t+\sin t)+e^t(-\sin t+\cos t)=2e^t\cos t$

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=4e^{2t}\sin^2 t+4e^{2t}\cos^2 t=4e^{2t}$

$\therefore\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=2e^t$

여기에 $t=\ln 4$를 대입하면 $2e^{\ln 4}=8$이다.

88) $\sqrt{2}-1$

⇨ $\frac{dx}{dt}=4\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt}=2(t+1)-\frac{4}{t+1}$이므로 속력의 크기는

$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{4(t+1)^2+\frac{16}{(t+1)^2}-16+32}$

이며 정리하면 $2(t+1)+\frac{4}{t+1}\geq 2\sqrt{2\times 4}=4\sqrt{2}$

이며 $2(t+1)=\frac{4}{t+1}$일 때, 최소가 되므로

$t=\sqrt{2}-1$이다.

89) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

⇨ $x=t+\sin t,\ y=2\cos t$이므로

$\frac{dx}{dt}=1+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$이다.

속력의 크기는

$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{-3\cos^2 t+2\cos t+5}$이므로

최대는 $\cos t=\frac{1}{3}$일 때이다.

따라서 가속도의 크기는

$\sqrt{(-\sin t)^2+(-2\cos t)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.