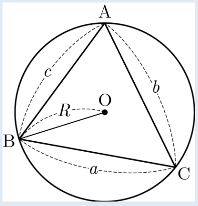
개념check

[사인법칙]

• 사인법칙

삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$



• 사인법칙의 변형

(1) $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

(2) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

(3) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

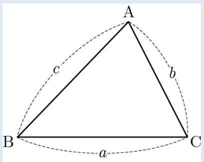
[코사인법칙]

• 코사인법칙: 삼각형 ABC에서

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



• 코사인법칙의 변형

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

기본문제

[예제]

1. **삼각형 ABC에서 $b=6$, $\angle A=\theta^\circ$, $\angle B=(\theta+15)^\circ$, $\angle C=(\theta+30)^\circ$일 때, a의 길이는?**

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{6}$
③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{6}$
⑤ $3\sqrt{6}$

[문제]

2. **삼각형 ABC에서 $\angle A=15^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $c=6\sqrt{2}$일 때, b의 값과 외접원의 반지름의 길이 R의 합 $b+R$의 값은?**

① $6\sqrt{2}$　② $6\sqrt{3}$
③ 12　④ $12\sqrt{2}$
⑤ $12\sqrt{3}$

[예제]

3. **삼각형 ABC에서 $a\sin A=b\sin B$이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?**

① $a=b$인 이등변삼각형　② $b=c$인 이등변삼각형
③ $c=a$인 이등변삼각형　④ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형
⑤ $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

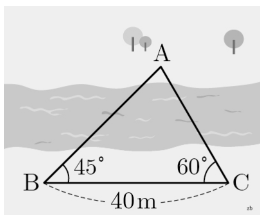
[문제]

4. **삼각형 ABC에서 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2(A+B)$이 성립하면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?**

① 정삼각형　② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형　④ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형
⑤ $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

[예제]

5. **다음 그림과 같이 강을 사이에 두고 있는 두 지점 A, B 사이의 거리를 구하기 위하여 B 지점에서 40 m 떨어진 곳에 C 지점을 정하였다. 두 지점 B, C에서 측정한 각의 크기가 각각 $\angle ABC=45^\circ$, $\angle ACB=60^\circ$일 때, 두 지점 A, B 사이의 거리를 구하시오. (단, $\sin 75^\circ=0.96$)**

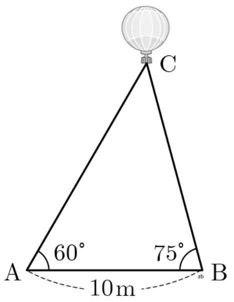


① $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$ m　② $\dfrac{55\sqrt{3}}{3}$ m
③ $\dfrac{115\sqrt{3}}{6}$ m　④ $20\sqrt{3}$ m
⑤ $\dfrac{125\sqrt{3}}{6}$ m

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

6. 다음 그림과 같이 두 지점 A, B에서 열기구를 올려본각의 크기가 각각 60° 75°이었다. 두 지점 A, B 사이의 거리가 10 m일 때, B지점에서 열기구까지의 거리를 구한 것은?



① $5\sqrt{2}$ m ② $5\sqrt{3}$ m
③ $5\sqrt{6}$ m ④ $10\sqrt{2}$ m
⑤ $10\sqrt{3}$ m

[예제]

7. 삼각형 ABC에서 $a=4$, $b=3$, $\angle A=20^\circ$, $\angle B=40^\circ$일 때, c의 값은?

① $\sqrt{35}$ ② 6
③ $\sqrt{37}$ ④ $\sqrt{38}$
⑤ $\sqrt{39}$

[문제]

8. 삼각형 ABC에서
$a=3$, $c=\sqrt{2}$, $\angle B=45^\circ$일 때, b의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 2
③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$
⑤ $\sqrt{7}$

[예제]

9. 삼각형 ABC에서 $a=\sqrt{13}$, $b=4$, $c=3$일 때, $\angle A$의 크기를 구하시오.

① 150° ② 135°
③ 120° ④ 60°
⑤ 45°

[문제]

10. 삼각형 ABC에서 $a=\sqrt{13}$, $b=2\sqrt{2}$, $c=5$일 때, $\angle A$의 크기를 구한 것은?

① 150° ② 135°
③ 120° ④ 60°
⑤ 45°

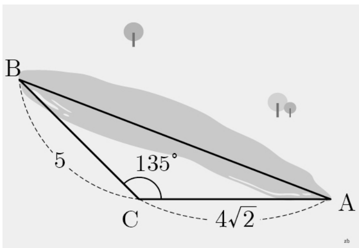
[문제]

11. 삼각형 ABC에서 $a:b:c=2:3:4$일 때, $\sin C$의 값은?

① $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
③ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{11}}{4}$

[예제]

12. 다음 그림과 같이 두 지점 A, B 사이의 거리를 구하기 위하여 C지점에서 측정한 결과가 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$ m, $\overline{BC}=5$ m, $\angle ACB=135^\circ$이었다. 두 지점 A, B 사이의 거리를 구한 것은?

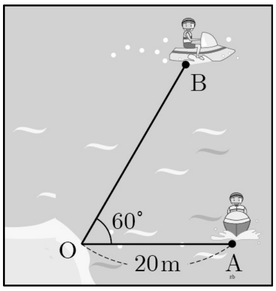


① $4\sqrt{6}$ m ② $\sqrt{97}$ m
③ $7\sqrt{2}$ m ④ $3\sqrt{11}$ m
⑤ 10 m

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

13. 다음 그림과 같이 두 제트 스키 A, B가 선착장 O를 동시에 출발하여 $\angle \mathrm{AOB}=60^{\circ}$가 되도록 각각 직선 모양으로 달리고 있다. 두 제트 스키 A, B는 각각 초속 $4\,\mathrm{m}$, $9\,\mathrm{m}$의 속력으로 일정하게 달리고 제트 스키 A가 $20\,\mathrm{m}$ 이동하였을 때, 두 제트 스키 A, B 사이의 거리를 구한 것은?



① $5\sqrt{61}\,\mathrm{m}$
② $5\sqrt{62}\,\mathrm{m}$
③ $15\sqrt{7}\,\mathrm{m}$
④ $40\,\mathrm{m}$
⑤ $5\sqrt{65}\,\mathrm{m}$

평가문제

[스스로 확인하기]

14. 삼각형 ABC에 대하여 $a=5$, $b=3$, $\angle C=60^{\circ}$일 때, c의 길이와 외접원의 반지름의 길이 R의 곱 $c\times R$의 값은?

① $\dfrac{17\sqrt{3}}{3}$
② $6\sqrt{3}$
③ $\dfrac{19\sqrt{3}}{3}$
④ $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$
⑤ $7\sqrt{3}$

[스스로 확인하기]

15. 삼각형 ABC에서 $\angle A : \angle B : \angle C=5:7:18$, $a=10$일 때, c의 길이는? (단, $\sin 42=0.67$, $\sin 108=0.95$)

① 16
② 17
③ 18
④ 19
⑤ 20

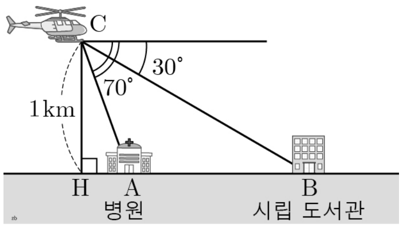
[스스로 확인하기]

16. 삼각형 ABC에서 $b\cos A=a\cos B$이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ $\angle C=90^{\circ}$인 직각삼각형
⑤ $\angle A=90^{\circ}$인 직각삼각형

[스스로 확인하기]

17. 다음 그림과 같이 지면의 한 지점 H로부터 수직으로 $1\,\mathrm{km}$ 상공에 떠 있는 헬리콥터에서 병원의 한 지점 A와 시립 도서관의 한 지점 B를 내려본 각의 크기가 각각 70°, 30°이었다. 다음 삼각함수의 값을 이용하여 두 지점 A, B 사이의 거리는 몇 km인지 사인법칙을 이용하여 구한 것은? (단, $\sin 40=0.64$, $\sin 70^{\circ}=0.94$이며 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 구한다.)



① $1.36\,\mathrm{km}$
② $1.46\,\mathrm{km}$
③ $1.56\,\mathrm{km}$
④ $1.66\,\mathrm{km}$
⑤ $1.76\,\mathrm{km}$

유사문제

18. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CA}}=4$인 삼각형 ABC가 있다. 이 삼각형의 외접원의 반지름의 길이는?

① $\dfrac{4\sqrt{14}}{7}$
② $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$
③ $\dfrac{11\sqrt{15}}{15}$
④ $\dfrac{7\sqrt{15}}{16}$
⑤ $\dfrac{8\sqrt{14}}{17}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

19. $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $a=6$, $\angle \mathrm{A}=30^{\circ}$, $\angle \mathrm{B}=45^{\circ}$이고 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 할 때, $\frac{b}{\mathrm{R}}$의 값은?

① $\sqrt{2}$
② $\sqrt{3}$
③ 2
④ $\sqrt{5}$
⑤ $\sqrt{6}$

20. $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\angle \mathrm{C}=60^{\circ}$, $a=3$, $c=7$일 때, b의 값은?

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

21. $\triangle \mathrm{ABC}$에서 등식 $a\sin\mathrm{A}=b\sin\mathrm{B}+c\sin\mathrm{C}$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $\angle \mathrm{A}=90^{\circ}$ 인 직각삼각형
② $\angle \mathrm{B}=90^{\circ}$ 인 직각삼각형
③ $\angle \mathrm{C}=90^{\circ}$ 인 직각삼각형
④ $a=b$인 이등변삼각형
⑤ $b=c$인 이등변삼각형

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로
$A+B+C=(3\theta+45)^\circ=180^\circ$, $\theta=45^\circ$
사인법칙에 따라 $\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=\dfrac{a}{\sin 45^\circ}$이므로
$a=\sin 45^\circ\times\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{6}$

2) [정답] ③
[해설] 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로
$C=180^\circ-(15^\circ+30^\circ)=135^\circ$
사인법칙에 따라 $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{b}{\sin 30^\circ}=2R$이므로
$b=\sin 30^\circ\times\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=6$이고,
$\dfrac{b}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=12=2R$이므로 $R=6$
따라서 $b+R=12$

3) [정답] ①
[해설] 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 따라
$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$
이를 주어진 식에 대입하면
$\dfrac{a^2}{2R}=\dfrac{b^2}{2R}$, $a^2=b^2$
따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

4) [정답] ⑤
[해설] $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2(A+B)$에서
$A+B=180^\circ-C$이므로
$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2(180^\circ-C)=\sin^2 C$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 따라
$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$
이를 주어진 식에 대입하면
$\dfrac{a^2}{4R^2}+\dfrac{b^2}{4R^2}=\dfrac{c^2}{4R^2}$, $a^2+b^2=c^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

5) [정답] ⑤
[해설] $\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$이므로 사인법칙에 따라
$\dfrac{40}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 60^\circ}$
$\overline{\mathrm{AB}}=\sin 60^\circ\times\dfrac{40}{\sin 75^\circ}$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{40}{0.96}=\dfrac{125\sqrt{3}}{6}$ (m)

6) [정답] ③
[해설] 열기구가 있는 위치를 C라 했을 때
$\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$
사인법칙에 의해
$\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ}$에서
$\overline{\mathrm{BC}}=\sin 60^\circ\times\dfrac{10}{\sin 45}{}^\circ=5\sqrt{6}(m)$

7) [정답] ③
[해설] 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로
$C=180^\circ-(20^\circ+40^\circ)=120^\circ$
코사인법칙에 따라
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
$=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos 120^\circ$
$=37$
그런데 $c>0$이므로 $c=\sqrt{37}$

8) [정답] ③
[해설] 코사인법칙에 따라
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$
$=3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ$
$=5$
그런데 $c>0$이므로 $c=\sqrt{5}$

9) [정답] ④
[해설] 코사인법칙으로부터
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
$=\dfrac{4^2+3^2-\sqrt{13}^2}{2\times4\times3}=\dfrac{1}{2}$
이때 $0^\circ<A<180^\circ$ 이므로 $0<x<\pi$일 때 방정식 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 의 해를 구하면 $x=\dfrac{1}{3}\pi$
따라서 $\dfrac{1}{3}\pi=60^\circ$ 이므로
$\angle A=60^\circ$

10) [정답] ⑤
[해설] 코사인법칙으로부터
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
$=\dfrac{(2\sqrt{2})^2+5^2-\sqrt{13^2}}{2\times2\sqrt{2}\times5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
이때 $0^\circ<A<180^\circ$ 이므로 $0<x<\pi$일 때 방정식 $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해를 구하면 $x=\dfrac{1}{4}\pi$
따라서 $\dfrac{1}{4}\pi=45^\circ$ 이므로
$\angle A=45^\circ$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

11) [정답] ①
[해설] $a:b:c=2:3:4$이므로
$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$로 놓으면 코사인법칙으로 부터

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{4k^2+9k^2-16k^2}{2\times 2k\times 3k}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin^2 C=1-\cos^2 C=1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$

그런데 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

12) [정답] ②
[해설] 코사인법칙에 따라

$\overline{AB}^2=(4\sqrt{2})^2+5^2-2\times 4\sqrt{2}\times 5\times\cos 135^\circ$

$=32+25-40\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=97$

그런데 $\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{97}$
따라서 두 지점 A, B사이의 거리는 $\sqrt{97}\,\mathrm{m}$

13) [정답] ①
[해설] 두 제트스키의 속력은 일정하므로
$\overline{OA}$가 $20\,\mathrm{m}$일 때, $\overline{OB}$는 $45\,\mathrm{m}$이다.
코사인법칙에 의해

$\overline{AB}^2=45^2+20^2-2\times 45\times 20\times\cos 60^\circ$

$=2025+400-1800\times\dfrac{1}{2}=1525$

그런데 $\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{1525}=5\sqrt{61}$ (m)

14) [정답] ③
[해설] 코사인법칙에 의해

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cdot\cos 60^\circ$

$=34-15=19$

$c=\sqrt{19}$

또한 사인법칙에 의해 $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$R=\dfrac{c}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$

따라서 구하고자 하는 값은

$c\times R=\sqrt{19}\times\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}=\dfrac{19}{\sqrt{3}}=\dfrac{19\sqrt{3}}{3}$

15) [정답] ④
[해설] $\angle A:\angle B:\angle C=5:7:18$이므로
$A=5k^\circ,\ B=7k^\circ,\ C=18k^\circ$
삼각형의 내각의 합은 180°이므로
$5k+7k+18k=30k=180,\ k=6$
$A=30^\circ,\ B=42^\circ,\ C=108^\circ$

사인법칙에 따라 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로

$c=\dfrac{a}{\sin A}\times\sin C=\dfrac{10}{\dfrac{1}{2}}\times 0.95=19$

16) [정답] ②

[해설] $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$를
$b\cos A=a\cos B$에 대입하면

$b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

정리하면 $b^2=a^2,\ a=b$
따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

17) [정답] ①
[해설] 헬리콥터의 위치를 C, 병원의 위치를 A, 시립 도서관의 위치를 B라 하면 삼각형 CHA에서

$\sin 70^\circ=\dfrac{1}{\overline{AC}}$이므로 $\overline{AC}=\dfrac{1}{\sin 70^\circ}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 따라

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 40^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}$이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}\times\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{1}{\sin 70^\circ}\times\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}$

$=\dfrac{1}{0.94}\times\dfrac{0.64}{0.5}=1.361\cdots$ (km)

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 구하면 $1.36\,\mathrm{km}$

18) [정답] ②
[해설] $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하면

$\cos B=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3}=-\dfrac{1}{4}.$

$0<B<\pi$이므로,

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}.$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름을 R이라 할 때

사인법칙에 의하면 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$에서

$R=\dfrac{4}{2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}.$

19) [정답] ①

[해설] 사인법칙에 의하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$에서

$\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=2R$이므로, $R=\dfrac{6}{2\sin 30^\circ}=6$

이고, $\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=12$이므로, $b=12\sin 45^\circ=6\sqrt{2}.$

$\therefore\ \dfrac{b}{R}=\dfrac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}.$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

20) [정답] ④
[해설] 코사인법칙에 의하면
$7^2 = 3^2 + b^2 - 2\times 3\times b\times \cos 60^\circ$
$\Rightarrow b^2 - 3b - 40 = (b-8)(b+5) = 0.$
$b > 0$이므로 $b = 8.$

21) [정답] ①
[해설] $\triangle ABC$의 외접원의 반지름을 R이라 하자.
사인법칙에 의하면
$\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$이므로,
$a\times \dfrac{a}{2R} = b\times \dfrac{b}{2R} + c\times \dfrac{c}{2R}$에서 $a^2 = b^2 + c^2.$
즉, $\triangle ABC$는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.