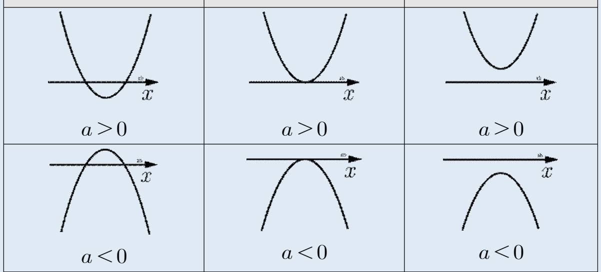
2-2-1.이차방정식과 이차함수_천재(이준열)

개념check

[이차방정식과 이차함수의 관계]

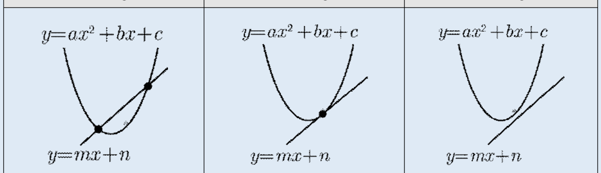
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 다음과 같이 결정된다.



$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$	$a>0$	$a>0$
$a<0$	$a<0$	$a<0$
서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

[이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계]

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계



$D>0$	$D=0$	$D<0$
서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

기본문제

[문제]

1. 다음 중 이차함수의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나는 것은?

① $y=x^2-6x+9$　② $y=-x^2+4x-4$
③ $y=3x^2-x+1$　④ $y=2x^2-3x-2$
⑤ $y=3x^2-2x+1$

[문제]

2. 이차함수 $y=-x^2+6x-k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은?

① 3　② 6
③ 9　④ 12
⑤ 15

[예제]

3. 다음 중 이차함수 $y=x^2+3x$의 그래프와 한 점에서 만나는 직선은?

① $y=x+4$　② $y=x-4$
③ $y=-x-1$　④ $y=-x+4$
⑤ $y=-x-4$

[문제]

4. 다음 중 이차함수 $y=-x^2+2x-3$의 그래프와 만나지 않는 직선은?

① $y=-x+1$　② $y=-x-1$
③ $y=2x-3$　④ $y=4x-2$
⑤ $y=4x-3$

[문제]

5. 이차함수 $y=2x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 범위는?

① $k>-\frac{1}{2}$　② $k<-\frac{1}{2}$
③ $k>\frac{1}{2}$　④ $k<\frac{1}{4}$
⑤ $k>\frac{1}{4}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[소단원 확인 문제]

6. 다음 중 이차함수 $y=2x^2+5x+3$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나는 직선은?

① $y=x-1$
② $y=x-2$
③ $y=-x-1$
④ $y=-x-2$
⑤ $y=-x-3$

[소단원 확인 문제]

7. 이차함수 $y=x^2+3x+a$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{3}{2}$
② $a>\frac{3}{2}$
③ $a<\frac{9}{4}$
④ $a>\frac{9}{4}$
⑤ $a>-\frac{9}{4}$

[소단원 확인 문제]

8. 이차함수 $y=-x^2$의 그래프와 직선 $y=ax+4$가 한 점에서 만날 때, 양의 실수 a의 값은?

① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

[소단원 확인 문제]

9. 이차함수 $y=-x^2-4x$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만날 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k\geq\frac{5}{2}$
② $k\leq\frac{5}{2}$
③ $k<\frac{25}{4}$
④ $k\geq\frac{25}{4}$
⑤ $k\leq\frac{25}{4}$

[소단원 확인 문제]

10. 다음은 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 조건 (가), (나)를 만족할 때, 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하는 것을 설명하는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 내용으로 옳지 않은 것은? (단, a, b는 실수)

(가) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 0이다.
(나) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 직선 $y=-5$와 한 점에서 만난다.

(i) 조건 (가)를 이용하여 실수 a의 값을 구하면
$-\frac{a}{2}=\boxed{(가)}$, 즉 $a=\boxed{(가)}$
(ii) 조건 (나)를 이용하여 실수 b의 값을 구하면
$x^2+b=-5$, 즉 $x^2+\boxed{(나)}=0$
이 이차방정식의 판별식은 0이므로
$\frac{D}{4}=0^2-1\times(b+5)=-b-5=0$, 즉 $b=\boxed{(다)}$
(iii) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에 (i), (ii)에서 구한 a, b의 값을 대입하면
$\boxed{(라)}=0$, 즉 $x^2=5$, $x=\pm\sqrt{5}$
따라서 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는
$\boxed{(마)}$ 또는 $-\sqrt{5}$

① (가): 0
② (나): $b-5$
③ (다): -5
④ (라): x^2-5
⑤ (마): $\sqrt{5}$

[중단원 연습 문제]

11. 이차함수 $y=-x^2+6x-9$의 그래프와 x축의 위치 관계는?

① 서로 다른 두 점에서 만난다.
② 만나지 않는다.
③ $x=-3$에서 접한다.
④ $x=3$에서 접한다.
⑤ $x=6$에서 접한다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[중단원 연습 문제]

12. 다음 중 이차함수 $y=2x^2+3x+1$의 그래프와 한 점에서 만나는 직선은?

① $y=x-1$ ② $y=x$
③ $y=-x-1$ ④ $y=-x$
⑤ $y=-x+1$

[중단원 연습 문제]

13. 이차함수 $y=-x^2+4x+k-5$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k>-1$ ② $k<-1$
③ $k>1$ ④ $k<1$
⑤ $k>2$

[중단원 연습 문제]

14. 이차함수 $y=x^2+ax+2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A의 x좌표가 1일 때, 점 B의 x좌표는? (단, a는 실수)

① 0 ② 1
③ -1 ④ 2
⑤ -2

[중단원 연습 문제]

15. 이차함수 $y=-x^2$의 그래프와 직선 $y=4x-k$가 만날 때, 실수 k의 최솟값은?

① -4 ② -3
③ -2 ④ -1
⑤ 0

[중단원 연습 문제]

16. 이차함수 $y=x^2-3x+10$의 그래프와 접하는 기울기가 3인 직선의 방정식은?

① $y=3x-3$ ② $y=3x-2$
③ $y=3x-1$ ④ $y=3x$
⑤ $y=3x+1$

[중단원 연습 문제]

17. 이차함수 $y=x^2+3x+a$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y=2kx-k^2+bk$와 한 점에서 만날 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{11}{2}$
③ $\frac{23}{4}$ ④ 6
⑤ $\frac{25}{4}$

[대단원 종합 문제]

18. 이차함수 $y=x^2-2x+5$의 그래프가 직선 $y=mx+1$과 접할 때, 모든 실수 m의 값의 곱은?

① -12 ② -10
③ -8 ④ -6
⑤ -4

[대단원 종합 문제]

19. 직선 $y=x$는 이차함수 $y=x^2-5x+k$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=x^2+x+k$의 그래프와 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] 상수인 a, b, c에 대하여 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야하므로 판별식 $D=b^2-4ac>0$이어야한다.
(i) $\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times 9=0$
따라서 x축과 한 점에서 만난다.
(ii) $\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(-4)=0$
따라서 x축과 한 점에서 만난다.
(iii) $D=(-1)^2-4\times 3\times 1=-11<0$
따라서 x축과 만나지 않는다.
(iv) $D=(-3)^2-4\times 2\times(-2)=25>0$
따라서 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
(v) $\frac{D}{4}=(-1)^2-3\times 1=-2<0$
따라서 x축과 만나지 않는다.

2) [정답] ③
[해설] $y=-x^2+6x-k$에서
이차방정식 $-x^2+6x-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=3^2-(-1)(-k)=9-k$
이차함수 $y=-x^2+6x-k$가 x축과 한 점에서 만나므로 $\frac{D}{4}=0$
즉 $9-k=0$
따라서 $k=9$

3) [정답] ⑤
[해설] 주어진 이차함수와 직선의 방정식에서
(i) $x^2+3x=x+4$, 즉 $x^2+2x-4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=1^2-1\times(-4)=5>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
(ii) $x^2+3x=x-4$, 즉 $x^2+2x+4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=1^2-1\times 4=-3<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
(iii) $x^2+3x=-x-1$, 즉 $x^2+4x+1=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=2^2-1\times 1=3>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
(iv) $x^2+3x=-x+4$, 즉 $x^2+4x-4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-4)=8>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
(v) $x^2+3x=-x-4$, 즉 $x^2+4x+4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=2^2-1\times 4=0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.

4) [정답] ①
[해설] 주어진 이차함수와 직선의 방정식에서
(i) $-x^2+2x-3=-x+1$, 즉 $x^2-3x+4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$D=(-3)^2-4\times 1\times 4=-7<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
(ii) $-x^2+2x-3=-x-1$, 즉 $x^2-3x+2=0$
이 이차방정식의 판별식은
$D=(-3)^2-4\times 1\times 2=1>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
(iii) $-x^2+2x-3=2x-3$, 즉 $x^2=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=0^2-1\times 0=0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.
(iv) $-x^2+2x-3=4x-2$, 즉 $x^2+2x+1=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=1^2-1\times 1=0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.
(v) $-x^2+2x-3=4x-3$, 즉 $x^2+2x=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=1^2-1\times 0=1>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

5) [정답] ②
[해설] $y=x-1$을 $y=2x^2-x+k$에 대입하면
$x-1=2x^2-x+k$, 즉 $2x^2-2x+k+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times(k+1)=-2k-1>0$
따라서 $k<-\frac{1}{2}$

6) [정답] ③
[해설] 주어진 이차함수와 직선의 방정식에서
(i) $2x^2+5x+3=x-1$, 즉 $2x^2+4x+4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=2^2-2\times 4=-4<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
(ii) $2x^2+5x+3=x-2$, 즉 $2x^2+4x+5=0$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=2^2-2\times5=-6<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(iii) $2x^2+5x+3=-x-1$, 즉 $2x^2+6x+4=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=3^2-2\times4=1>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(iv) $2x^2+5x+3=-x-2$, 즉 $2x^2+6x+5=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=3^2-2\times5=-1<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(v) $2x^2+5x+3=-x-3$, 즉 $2x^2+6x+6=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=3^2-2\times6=-3<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

7) [정답] ④

[해설] $D=3^2-4\times1\times a=-4a+9<0$

즉 $a>\frac{9}{4}$일 때, 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않는다.

8) [정답] ②

[해설] $-x^2=ax+4$, 즉 $x^2+ax+4=0$

이 이차방정식의 판별식은

$D=a^2-4\times1\times4=0$, $a^2=16$

즉 $a=4$ 또는 $a=-4$일 때, 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.

따라서 양의 실수 $a=4$

9) [정답] ⑤

[해설] $-x^2-4x=x+k$, 즉 $x^2+5x+k=0$

이 이차방정식의 판별식은

$D=5^2-4\times1\times k\geq0$, $4k\leq25$

즉 $k\leq\frac{25}{4}$일 때, 이차함수의 그래프와 직선은 만난다.

10) [정답] ②

[해설] (i) 조건 (가)를 이용하여 실수 a의 값을 구하면

$-\frac{a}{2}=0$, 즉 $a=0$

(ii) 조건 (나)를 이용하여 실수 b의 값을 구하면

$x^2+b=-5$, 즉 $x^2+b+5=0$

이 이차방정식의 판별식은 0이므로

$\frac{D}{4}=0^2-1\times(b+5)=-b-5=0$, 즉 $b=-5$

(iii) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에 (i), (ii)에서 구한 a, b의 값을 대입하면

$x^2-5=0$, 즉 $x^2=5$, $x=\pm\sqrt{5}$

따라서 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $\sqrt{5}$ 또는 $-\sqrt{5}$

11) [정답] ④

[해설] 이차함수 $y=-x^2+6x-9$에서

이차방정식 $-x^2+6x-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-1)\times(-9)=0$이므로

이차함수의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

한편 $y=-x^2+6x-9=-(x^2-6x+9)$

$=-(x-3)^2$

따라서 이차함수의 그래프는 $x=3$에서 접한다.

12) [정답] ③

[해설] 주어진 이차함수와 직선의 방정식에서

(i) $2x^2+3x+1=x-1$, 즉 $2x^2+2x+2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=1^2-2\times2=-3<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(ii) $2x^2+3x+1=x$, 즉 $2x^2+2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=1^2-2\times1=-1<0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(iii) $2x^2+3x+1=-x-1$, 즉 $2x^2+4x+2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=2^2-2\times2=0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.

(iv) $2x^2+3x+1=-x$, 즉 $2x^2+4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=2^2-2\times1=2>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(v) $2x^2+3x+1=-x+1$, 즉 $2x^2+4x=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=2^2-2\times0=4>0$이므로 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

13) [정답] ③

[해설] $y=-x^2+4x+k-5$에서

이차방정식 $-x^2+4x+k-5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-1)(k-5)=k-1$

이차함수 $y=-x^2+4x+k-5$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $\frac{D}{4}>0$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

즉 $k-1>0$
따라서 $k>1$

14) [정답] ④
[해설] 이차함수 $y=x^2+ax+2$에서
$x=1$일 때, x축과 만나므로 $1+a+2=a+3=0$
즉 $a=-3$, $y=x^2-3x+2$
한편 이차방정식 $x^2-3x+2=0$은
$(x-1)(x-2)=0$이므로
이차함수 $y=x^2-3x+2$는 $x=1$ 또는 $x=2$에서 x축과 만난다.

15) [정답] ①
[해설] 이차함수 $y=-x^2$의 그래프와 직선 $y=4x-k$가 만나므로
$-x^2=4x-k$, 즉 $x^2+4x-k=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-k)\geq 0$, $k\geq -4$
따라서 실수 k의 최솟값은 -4

16) [정답] ⑤
[해설] 이차함수 $y=x^2-3x+10$의 그래프와 접하는 기울기가 3인 직선을 상수인 b에 대하여 $y=3x+b$라고 하면
$x^2-3x+10=3x+b$, 즉 $x^2-6x-b+10=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(-b+10)=b-1=0$,
즉 $b=1$이므로 이차함수 $y=x^2-3x+10$의 그래프와 접하는 직선의 방정식은 $y=3x+1$

17) [정답] ①
[해설] 이차함수 $y=x^2+3x+a$의 그래프와 직선 $y=2kx-k^2+bk$가 만나므로
$x^2+3x+a=2kx-k^2+bk$,
즉 $x^2+(3-2k)x+k^2-bk+a=0$
이 이차방정식의 판별식은
$D=(3-2k)^2-4\times1\times(k^2-bk+a)$
$=4k^2-12k+9-4k^2+4bk-4a$
$=4(b-3)k+9-4a=0$
$4(b-3)k+9-4a=0$은 k의 값에 관계없이 성립하므로
$b=3$, $a=\frac{9}{4}$
따라서 $a+b=\frac{21}{4}$

18) [정답] ①
[해설] $x^2-2x+5=mx+1$, 즉 $x^2-(m+2)x+4=0$
이 이차방정식의 판별식은
$D=\{-(m+2)\}^2-4\times1\times4=0$,
$m^2+4m-12=(m+6)(m-2)=0$
즉 $m=-6$ 또는 $m=2$일 때, 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.
따라서 모든 실수 m의 값의 곱은
$(-6)\times2=-12$

19) [정답] ③
[해설] (i) $y=x$를 $y=x^2-5x+k$에 대입하면
$x=x^2-5x+k$, 즉 $x^2-6x+k=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times k=9-k>0$
즉 $k<9$
(ii) $y=x$를 $y=x^2+x+k$에 대입하면
$x=x^2+x+k$, 즉 $x^2+k=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=0^2-1\times k=-k<0$
즉 $k>0$
따라서 $0<k<9$이고 k는 정수이므로 8개다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125