개념check

[함수의 최대와 최소]

• 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 함수의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
① 주어진 구간에서 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.
② 주어진 구간의 양 끝에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.
③ ①, ②에서 구한 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

[방정식의 실근의 개수]

1. 방정식 $f(x)=0$의 실근
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표이다.
(2) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

2. 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근
(1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수이다.

[부등식에의 활용]

• 모든 실수 x에 대하여
(1) 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면
⇨ ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
(2) 부등식 $f(x)\leq 0$이 성립하려면
⇨ ($f(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.

• $x\geq a$일 때,
(1) 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면
⇨ ($x\geq a$일 때, $f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
(2) 부등식 $f(x)\leq 0$이 성립하려면
⇨ ($x\geq a$일 때, $f(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.

[속도와 가속도]

• 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$
(2) $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

기본문제

[문제]

1. 함수 $f(x)=3x^4+4x^3$의 최솟값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[예제]

2. 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)=x^3+6x^2+9x+5$의 최댓값은?

① 5　② 9　③ 13　④ 17　⑤ 21

[문제]

3. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $y=x^4-4x^3+4x^2+1$의 최솟값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

[예제]

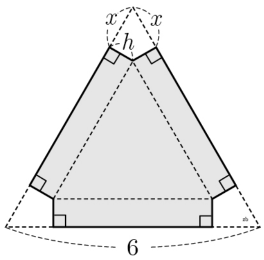
4. 한 변의 길이가 12인 정사각형 모양의 종이의 네 귀퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라 내고, 나머지 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값과 이 때 잘라낸 정사각형의 한 변의 길이의 합은?

① 126　② 128　③ 130　④ 132　⑤ 134

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 모양의 종이의 세 꼭짓점에서 합동인 사각형을 잘라 내어 뚜껑이 없는 삼각기둥 모양의 상자를 만들려고 한다.



삼각기둥의 부피가 최대가 될 때의 h의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

[예제]

6. 방정식 $x^3-3x^2-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

[문제]

7. 방정식 $x^4-2x^2-2=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

[예제]

8. 방정식 $x^3+6x^2-15x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 정수 k 값의 개수는?

① 103　② 105
③ 107　④ 109
⑤ 111

[문제]

9. 방정식 $2x^3+3x^2-12x-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

[예제]

10. $x \geq 0$일 때, 부등식 $2x^3 \geq 3x^2+a$가 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -3　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 1

[문제]

11. 부등식 $3x^4 \geq 4x^3-a$가 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① -3　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 1

[문제]

12. $x>0$일 때, 부등식 $x^3-2x^2+x-k>0$이 성립하게 하는 정수 k의 최댓값은?

① -3　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 1

[문제]

13. $x \geq 0$일 때, 부등식 $-x^3+2x^2-x+2 \leq a$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은?

① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[예제]

14. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-48t$일 때, 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[문제]

15. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=6t-t^2$일 때, $t=1$에서 점 P의 가속도는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[문제]

16. 지상에서 지면과 수직인 방향으로 공을 던지려고 한다. 공을 던진 지 t초 후의 공의 높이 h가 $h=-5t^2+20t$일 때, 공의 운동 방향이 변하는 순간의 시간 t의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[예제]

17. 함수 $f(x)=x^3-x^2-x+2$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

평가문제

[스스로 확인하기]

18. 닫힌구간 $[-1, 5]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$의 최댓값은?

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

[스스로 확인하기]

19. 닫힌구간 $[-1,\ 5]$에서 함수 $f(x)=2x^3-6x+k$의 최솟값이 7일 때, 상수 k의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

[스스로 확인하기]

20. 곡선 $y=6-x^2$ 위의 한 점을 $\mathrm{A}(a, 6-a^2)$이라 하자. 점 A를 y축에 대하여 대칭이동 한 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은? (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, O는 원점이다.)

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

[스스로 확인하기]

21. 원기둥 모양의 음료수 용기를 만들고자 한다. 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이의 합이 9로 일정할 때, 원기둥의 부피의 최댓값은?

① 96π　② 100π　③ 104π　④ 108π　⑤ 112π

[스스로 확인하기]

22. **다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?**

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $\boxed{\text{(ㄱ)}}$의 교점의 x좌표와 같다. (2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $\boxed{\text{(ㄴ)}}$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

① (ㄱ) : $x=0$, (ㄴ) : $y=g(x)$
② (ㄱ) : $x=0$, (ㄴ) : $y=0$
③ (ㄱ) : $y=0$, (ㄴ) : $x=0$
④ (ㄱ) : $y=0$, (ㄴ) : $y=0$
⑤ (ㄱ) : $y=0$, (ㄴ) : $y=g(x)$

[스스로 확인하기]

23. **방정식 $x^3-6x^2+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 정수 k의 개수는?**

① 30 ② 31
③ 32 ④ 33
⑤ 34

[스스로 확인하기]

24. **곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$에 대하여, 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서만 만날 때, 양의 상수 k의 값은?**

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

25. **방정식 $9x^3-3x=k$가 하나의 양의 실근과 서로 다른 두 음의 실근을 갖게 하는 실수 k 값의 범위는?**

① $0<k<\frac{1}{4}$ ② $0<k<\frac{1}{3}$
③ $0<k<\frac{1}{2}$ ④ $0<k<\frac{2}{3}$
⑤ $0<k<1$

[스스로 확인하기]

26. **함수 $f(x)=x^3-27x+2$이다. 방정식 $|f(x)|=k$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, 양수 k의 값은?**

① 52 ② 54
③ 56 ④ 58
⑤ 60

[스스로 확인하기]

27. **원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-6t^2+12t$일 때, 점 P의 속도가 처음으로 12가 되는 순간의 점 P의 가속도는?**

① 8 ② 10
③ 12 ④ 14
⑤ 16

[스스로 확인하기]

28. **다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?**

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도는 * 속도 $v=\dfrac{\boxed{\text{(ㄱ)}}}{dt}$ * 가속도 $a=\dfrac{\boxed{\text{(ㄴ)}}}{dt}$

① (ㄱ) : dx, (ㄴ) : dx
② (ㄱ) : dx, (ㄴ) : dv
③ (ㄱ) : dv, (ㄴ) : dx
④ (ㄱ) : dv, (ㄴ) : dv
⑤ (ㄱ) : dv, (ㄴ) : da

[스스로 확인하기]

29. **원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-2t^2+t$일 때, 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 순간의 가속도는?**

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 확인하기]

30. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각 $f(t)=t^2-6t$, $g(t)=-2t^2+8t$일 때, 두 점 P, Q가 동일한 방향으로 움직이는 t 값의 범위는?

① $0<t<1$ ② $1<t<2$
③ $2<t<3$ ④ $3<t<4$
⑤ $4<t<5$

[스스로 확인하기]

31. 도로 위를 달리는 자동차가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 $x\,\mathrm{m}$라 하면

$x=-0.5t^2+10t$

라 한다. 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는?

① $50\,\mathrm{m}$ ② $55\,\mathrm{m}$
③ $60\,\mathrm{m}$ ④ $65\,\mathrm{m}$
⑤ $70\,\mathrm{m}$

[스스로 확인하기]

32. 지면으로부터 $20\mathrm{m}$ 높이에서 공을 떨어뜨린다. 이 공이 자유 낙하 할 때, t초 후 지면으로부터 공의 중심까지의 높이를 $h\,\mathrm{m}$라 하면 $h=20-5t^2$이라 한다. 공이 지면에 닿는 순간의 속도는?

① $-50\,\mathrm{m/s}$ ② $-40\,\mathrm{m/s}$
③ $-30\,\mathrm{m/s}$ ④ $-20\,\mathrm{m/s}$
⑤ $-10\,\mathrm{m/s}$

[스스로 마무리하기]

33. 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+a$의 최댓값이 3일 때 최솟값은? (단, a는 상수)

① -3 ② -4
③ -5 ④ -6
⑤ -7

[스스로 마무리하기]

34. 두 함수 $f(x)=-x^2-8x+k$, $g(x)=x^4+2x^2+2x$가 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $f(x)<g(x)$를 만족시킬 때, 정수 k의 최댓값은?

① -4 ② -5
③ -6 ④ -7
⑤ -8

[스스로 마무리하기]

35. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치는 각각 $f(t)=t^3+12t-2$, $g(t)=6t^2-5$이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는?

① 9 ② 11
③ 13 ④ 15
⑤ 17

[스스로 마무리하기]

36. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖는다.
(나) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=29$는 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] $f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.

$\therefore f(-1)=3-4=-1$

2) [정답] ⑤

[해설] $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=3x^2+12x+9$

$=3(x+1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=-1$

닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	21

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 21을 갖는다.

3) [정답] ②

[해설] $y'=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$y'=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 y의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

따라서 함수 y는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $x=0$일 때 극소이면서 최소이며, 최솟값은 1이다.

4) [정답] ③

[해설] 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 x의 값의 범위는

$x>0,\ 12-2x>0$에서

$0<x<6$

상자의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$f'(x)$를 구하면

$f'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=6$

열린구간 $(0,\ 6)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	128	$\searrow$	

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 부피의 최댓값은 128이다.

따라서 구하고자 하는 값은 130이다.

5) [정답] ③

[해설] 한 모퉁이에서 잘라낸 도형을 두 개의 합동인 직각삼각형으로 나눈 경우, 한 내각이 30°이므로

$x : h = \sqrt{3} : 1$

즉, $x=\sqrt{3}h$

$0<x<3$이므로 $0<h<\sqrt{3}$

삼각기둥의 밑면의 길이는 $6-2\sqrt{3}h$이므로

삼각기둥의 부피 $V(h)$는

$V(h)=h\dfrac{\sqrt{3}}{4}(6-2\sqrt{3}h)^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}h(12h^2-24\sqrt{3}h+36)$

$=3\sqrt{3}h^3-18h^2+9\sqrt{3}h$

$V'(h)=9\sqrt{3}h^2-36h+9\sqrt{3}$

$=9\sqrt{3}\left(h-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(h-\sqrt{3})$

$V'(h)=0$에서 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $h=\sqrt{3}$

열린구간 $(0,\ \sqrt{3})$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 함수 $V(h)$는 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

6) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-3x^2-1$라 하면

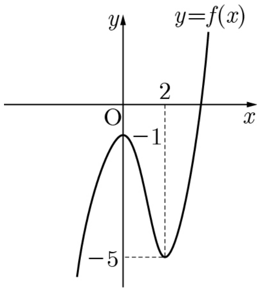
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125



함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

7) [정답] ③

[해설] $f(x)=x^4-2x^2-2$라 하면

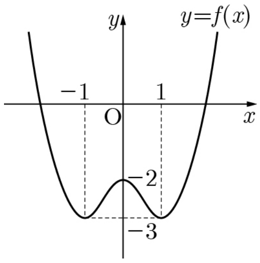
$f'(x)=4x^3-4x$

$f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $-1, 0, 1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	-2	↘	-3	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^4-2x^2-2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

8) [정답] ③

[해설] $x^3+6x^2-15x-k=0$에서 $x^3+6x^2-15x=k$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=x^3+6x^2-15x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3+6x^2-15x$라 하고 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

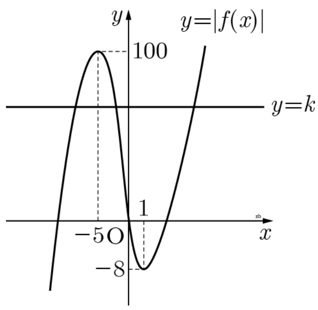
$f'(x)=0$에서

$x=-5$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	100	↘	-8	↗



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 실수 k의 값의 범위는

$-8<k<100$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 107이다.

9) [정답] ④

[해설] $2x^3+3x^2-12x-1=0$에서 $2x^3+3x^2-12x=1$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=2x^3+3x^2-12x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같다.

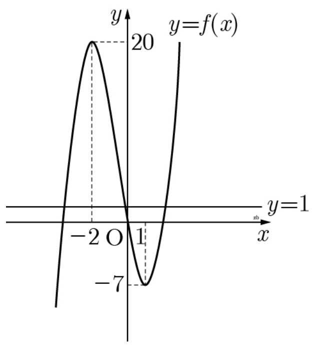
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗



$y=f(x)$는 $y=1$과 서로 다른 세 개의 교점을 갖는다.

즉, 방정식을 만족하는 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

10) [정답] ③

[해설] $2x^3-3x^2\geq a$

$f(x)=2x^3-3x^2$이라 하면

$f'(x)=6x(x-1)$

반닫힌구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$x \geq 0$일 때 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-1$이므로
$2x^3 \geq 3x^2+a$가 항상 성립하는 a의 범위는
$a \leq -1$이다.
따라서 a의 최댓값은 -1이다.

11) [정답] ⑤
[해설] $3x^4-4x^3 \geq -a$
$f(x)=3x^4-4x^3$이라 하면
$f'(x)=12x^2(x-1)$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이며, 최솟값은 $f(1)=-1$이다.
부등식 $3x^4 \geq 4x^3-a$가 항상 성립하려면
$-a \leq -1$을 만족해야한다.
즉 $a \geq 1$, 따라서 a의 최솟값은 1이다.

12) [정답] ③
[해설] $x^3-2x^2+x>k$
$f(x)=x^3-2x^2+x$라 하면
$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$
열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 최소이며, 최솟값은 0이다.
즉, $0>k$ 이므로 정수 k의 최댓값은 -1이다.

13) [정답] ⑤
[해설] $-x^3+2x^2-x \leq a-2$에서
$x^3-2x^2+x \geq -a+2$
$f(x)=x^3-2x^2+x$라 하면
$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$
반닫힌구간 $[0, \infty)$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 최소이며, 최솟값은 $f(1)=0$이다.
부등식 $x^3-2x^2+x \geq -a+2$이 성립하려면
$-a+2 \leq 0$
즉, $a \geq 2$ 이므로 실수 a의 최솟값은 2이다.

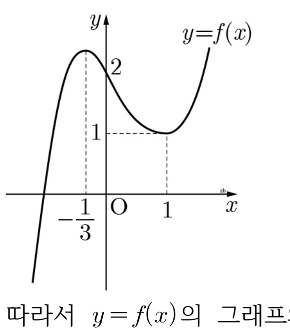
14) [정답] ④
[해설] $t>0$이고, 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로
$v=3t^2-48=3(t+4)(t-4)$
$v=0$에서 $t=4$
따라서 $0<t<4$일 때 $v<0$이고,
$t>4$일 때 $v>0$이므로
점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 4이다.

15) [정답] ①
[해설] $v=\frac{dx}{dt}=6-2t$
$a=\frac{dv}{dt}=-2$이므로
$t=1$에서 점 P의 가속도는 -2이다.

16) [정답] ②
[해설] $h=-5t^2+20t$
$v=\frac{dh}{dt}=-10t+20$
운동 방향이 변하는 순간 $v=0$ 이므로
$-10t+20=0$
$\therefore t=2$

17) [정답] ③
[해설] $f'(x)=3x^2-2x-1$
$f'(x)=(3x+1)(x-1)$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고
$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{59}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 2개의 교점을 갖는다.

18) [정답] ⑤
[해설] $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 1, 3이다.
닫힌구간 $[-1. 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

따라서 닫힌구간 $[-1.\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 19이다.

19) [정답] ⑤

[해설] $f'(x)=6x^2-6$이므로
$f'(x)=0$인 x의 값은 $-1, 1$이다.
닫힌구간 $[-1.\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1		1		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.
즉, $f(1)=k-4=7$
$\therefore k=11$

20) [정답] ④

[해설] $\mathrm{A}(a, 6-a^2)$, $\mathrm{B}(-a, 6-a^2)$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이고 변 AB의 중점을 H라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}=2a$, $\overline{\mathrm{OH}}=6-a^2$
이므로 삼각형의 넓이를 $S(a)$라 하면
$S(a)=\frac{1}{2}\times 2a\times(6-a^2)$
$=-a^3+6a \quad (0<a<\sqrt{6})$
$S'(a)=-3a^2+6$
$=-3(a^2-2)=-3(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$
$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{2}$ 또는 $a=-\sqrt{2}$
열린구간 $(0,\ \sqrt{6})$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{6})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$S(a)$는 열린구간 $(0,\ \sqrt{6})$에서 $a=\sqrt{2}$일 때 최댓값을 갖는다.
$S(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

21) [정답] ④

[해설] 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면 $r+h=9$이므로 $h=9-r$
$r>0,\ 9-r>0$이므로
$0<r<9$
원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면
$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(9-r)$
$=\pi(9r^2-r^3)$
$V'(r)=\pi(18r-3r^2)=-3\pi r(r-6)$이므로
$V'(r)=0$에서 $r=0$ 또는 $r=6$
열린구간 $(0,\ 9)$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	6	$\cdots$	(9)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(r)$는 $r=6$에서 극대이면서 최대이다.
따라서 원기둥의 부피의 최댓값은
$V(6)=\pi\times 6^2\times 3=108\pi$

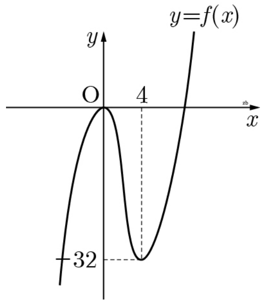
22) [정답] ⑤

[해설] (1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=0$의 교점의 x좌표와 같다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

23) [정답] ②

[해설] $x^3-6x^2+k=0$에서 $x^3-6x^2=-k$
$f(x)=x^3-6x^2$이라 하면
$f'(x)=3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고
$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$



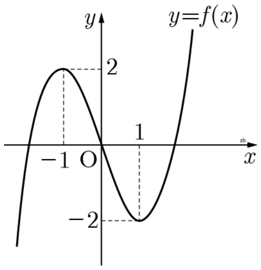
따라서 $f(x)=-k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 $-32<-k<0$
$0<k<32$이므로 정수 k는 31개다.

24) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-3x$라 하면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고
$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125



$k=2,\ -2$일 때 직선과 곡선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

25) [정답] ④

[해설] $9x^3-3x=k$에서

$f(x)=9x^3-3x$라 하면

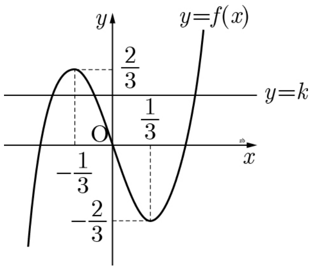
$f'(x)=27x^2-3=3(3x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{2}{3}$	↘	$-\dfrac{2}{3}$	↗



방정식 $9x^3-3x=k$가 하나의 양의 실근과 서로 다른 두 음의 실근을 갖게 하는 k 값의 범위는

$\therefore 0<k<\dfrac{2}{3}$

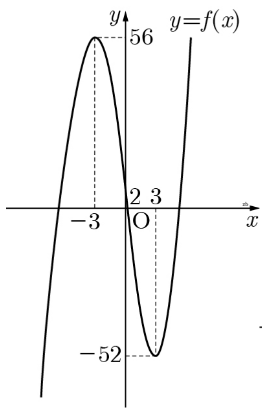
26) [정답] ③

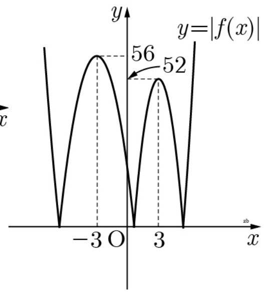
[해설] (1) $f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	56	↘	-52	↗





$y=|f(x)|$의 그래프와 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 양수 k의 값은 56이다.

$\therefore\ k=56$

27) [정답] ③

[해설] $x=t^3-6t^2+12t$이므로 점 P의 속도와 가속도는

$v=3t^2-12t+12=3(t-2)^2$

$a=6t-12$이다.

점 P의 속도가 처음으로 12가 되는 순간은

$3(t-2)^2=12$

$(t-2)^2=4$

$t-2=\pm 2$

$t=4\ (\because t>0)$

따라서 $t=4$에서의 가속도는 12

28) [정답] ②

[해설] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때,

시각 t에서 점 P의 속도와 가속도는

* 속도 $v=\dfrac{dx}{dt}$

* 가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}$

29) [정답] ⑤

[해설] $x=t^3-2t^2+t=t(t-1)^2$이므로 점 P의 속도와 가속도는

$v=3t^2-4t+1=(3t-1)(t-1)$

$a=6t-4$

다시 원점에 돌아오는 순간은

$x=0$이므로 $t=1$

이때의 가속도는

$\therefore a=6-4=2$

30) [정답] ③

[해설] $f(t)=t^2-6t,\ g(t)=-2t^2+8t$

이므로 각각의 속도는

$f'(t)=2t-6,\ g'(t)=-4t+8$

두 점 P, Q가 동일한 방향으로 움직일 때

이 둘의 부호가 같으므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$(2t-6)(-4t+8)>0$

$(t-2)(t-3)<0$

$\therefore 2<t<3$

31) [정답] ①

[해설] $x=-0.5t^2+10t$

$v=-t+10$

자동차가 정지하는 시간은 $t=10$

따라서 10초동안 움직인 거리는

$\therefore -0.5\times 10^2+10\times 10=50\ \mathrm{m}$

32) [정답] ④

[해설] $h=20-5t^2$ 이므로 공의 속도는

$v=-10t$이다.

공이 지면에 닿는 순간의 높이는 0이므로

$20-5t^2=0$

$t^2-4=0$

$(t-2)(t+2)=0$

$t=2(\because t>0)$

따라서 그 순간의 속도는

$\therefore v=-20\ \mathrm{m/s}$

33) [정답] ③

[해설] $f(x)=2x^3-6x^2+a$

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘		↗	a

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(0)=f(3)=a$이므로 $a=3$

따라서 최솟값은

$f(2)=16-24+3=-5$

34) [정답] ④

[해설] 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $f(x)<g(x)$이어야 하므로

$h(x)=g(x)-f(x)$라 하면

$h(x)=x^4+3x^2+10x-k$이고

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $h(x)>0$이어야 한다.

$h'(x)=4x^3+6x+10=2(x+1)(2x^2-2x+5)$이므로 $h'(x)=0$에서 $x=-1$

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$8-k$	↘	$-6-k$	↗	$-k$

즉 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이다.

이때 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $h(x)>0$이 성립해야 하므로 $h(-1)=-6-k>0$에서 $k<-6$

$\therefore$ 정수 k의 최댓값은 -7

35) [정답] ②

[해설] 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{d}{dt}f(t)=3t^2+12$

$v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{d}{dt}g(t)=12t$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은

$3t^2+12=12t$

$3t^2-12t+12=0$

$t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0,\ t=2$

이 때 두 점 P, Q의 위치는

$f(2)=8+24-2=30$

$g(2)=19$

따라서 두 점 P, Q사이의 거리는 $|30-19|=11$

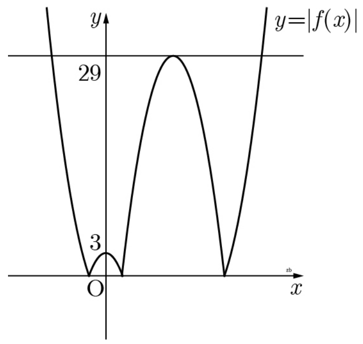
36) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f(0)=c=3,\ f'(0)=b=0$

조건 (나)에서 방정식 $|f(x)|=29$의 실근은 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=29$의 교점의 x좌표이므로 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



즉, $f(x)$의 극솟값이 -29이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}a$

$x=0$에서 극대이므로 $x=-\dfrac{2}{3}a$에서 극소이다.

$f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^3+a\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^2+3$

$=\dfrac{4}{27}a^3+3=-29$

즉 $a^3=-216$이므로 $a=-6$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+3$이므로

$f(1)=1-6+3=-2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125