4회차

01 ①	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ④
06 ④	07 ①	08 ①	09 ⑤	10 ②
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 ③	17 ③			

[서술형 1] -8
[서술형 2] 14번
[서술형 3] $-\frac{2}{5}$

01 $3\times 4^{\frac{3}{2}}=3\times(2^2)^{\frac{3}{2}}=3\times 2^3=24$

02 $2<a<3$에서 $-1<a-3<0$, $-1<2-a<0$이므로

$$\sqrt[3]{(a-3)^3}+\sqrt[4]{(2-a)^4}=(a-3)-(2-a)$$
$$=a-3-2+a$$
$$=2a-5$$

03 $A=\sqrt{2}$, $B=\sqrt[3]{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{31}}=\sqrt[6]{31}$에서
2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로
$A=\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $B=\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$, $C=\sqrt[6]{31}$
$8<25<31$이므로 $\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{31}$
$\therefore A<B<C$

다른 풀이

$A=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $B=\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{31}}=31^{\frac{1}{6}}$에서
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$의 분모를 최소공배수 6으로 통분하여 지수를 같게 하면
$A=2^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$, $B=5^{\frac{1}{3}}=(5^2)^{\frac{1}{6}}=25^{\frac{1}{6}}$, $C=31^{\frac{1}{6}}$
$8<25<31$이므로 $8^{\frac{1}{6}}<25^{\frac{1}{6}}<31^{\frac{1}{6}}$
$\therefore A<B<C$

Lecture 지수의 확장

(1) $a\neq 0$이고 n이 양의 정수일 때
$a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

(2) $a>0$이고 m, $n\ (n\geq 2)$이 정수일 때
$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

(3) $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때
① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

04 $\log_x 16=3$에서 $x^3=16$ $\therefore x=\sqrt[3]{16}$

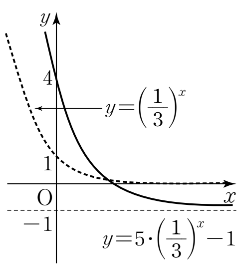
$$\therefore \log_2 x=\log_2\sqrt[3]{16}=\log_2 2^{\frac{4}{3}}$$
$$=\frac{4}{3}$$

05 함수 $f(x)=3^x$의 밑 3은 1보다 크므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 $3^{-2}=\frac{1}{9}$을 갖는다.
$\therefore A=\frac{1}{9}$
함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작은 양수이므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$를 갖는다.
$\therefore B=9$
$\therefore AB=\frac{1}{9}\cdot 9=1$

06 ㄷ. $5=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}5}$이므로

$$y=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\log_{\frac{1}{3}}5}-1$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-\log_3 5}-1$$

즉 함수 $y=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\log_3 5$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.
ㄴ. 함수 $y=5\cdot 3^x-1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=5\cdot 3^{-x}-1=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$
즉 함수 $y=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$의 그래프는
함수 $y=5\cdot 3^x-1$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

07 진수의 조건에서 $(x-1)^2>0$　　$\therefore x\neq 1$

$\log_2(x-1)^2=2$에서 $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2 2^2$

$x^2-2x+1=4$　　$\therefore x^2-2x-3=0$

위의 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$

오답 피하기

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 두 근은 진수의 조건을 만족시킨다.

08 진수의 조건에서 $x>0$

점 P의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면 $\log_{\frac{1}{3}} a=k$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^k=a$, 즉 $3^k=\frac{1}{a}$　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 점 Q의 x좌표가 $a+\frac{3}{2}$이므로

$\log_3\left(a+\frac{3}{2}\right)=k$에서

$3^k=a+\frac{3}{2}$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{a}=a+\frac{3}{2}$

$2a^2+3a-2=0$, $(a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $3^k=2$

$\therefore k=\log_3 2$

09 각 θ가 제4사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$ (n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{2}{3}\pi$

즉 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{7}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{4}{3}\pi$

즉 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{11}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+2\pi$

즉 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면이다.

10 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$, 호의 길이가 3π이므로

$3\pi=r\cdot\frac{3}{4}\pi$

$\therefore r=4$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\pi=6\pi$

11 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

12 함수 $y=-2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3$에 대하여

주기는 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$이므로 $a=\pi$

최댓값은 $b=|-2|+3=5$

최솟값은 $c=-|-2|+3=1$

$\therefore abc=\pi\cdot 5\cdot 1=5\pi$

13 $\pi\leq\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta\leq 0$, $\cos\theta<0$

$\tan\theta=\frac{3}{4}$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{4}\cos\theta$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\frac{9}{16}\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\frac{25}{16}\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{16}{25}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}$ $(\because \cos\theta<0)$

즉 $\sin\theta=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sin(\pi+\theta)\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\\ &\qquad\qquad -\cos(\pi+\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &=-\sin\theta\cdot(-\cos\theta)-(-\cos\theta)\cdot\sin\theta\\ &=2\sin\theta\cos\theta\\ &=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

Lecture **삼각함수의 각 변환하기**

(1) $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ (n은 정수)가 속한 사분면에서 삼각함수의 부호가 양이면 '$+$', 음이면 '$-$'를 붙인다.

(단, θ는 예각으로 생각한다.)

(2) $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$에서 n이 짝수이면 그대로, n이 홀수이면

$\sin\rightarrow\cos$, $\cos\rightarrow\sin$, $\tan\rightarrow\frac{1}{\tan}$로 바꾼다.

14 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$2\sin^2 x-3\cos x\geq 0$에서

$2(1-\cos^2 x)-3\cos x\geq 0$

$2\cos^2 x+3\cos x-2\leq 0$

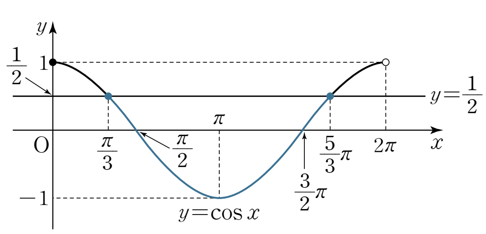
$(2\cos x-1)(\cos x+2)\leq 0$

이때 $\cos x+2>0$이므로 $2\cos x-1\leq 0$

$\therefore \cos x\leq\frac{1}{2}$

$0\leq x\leq 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{5}{3}\pi}{\frac{\pi}{3}}=5$

15 $B=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$이므로 $\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

16 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

위의 식을 $\overline{AB}\cos B=\overline{AC}\cos C$에 대입하면

$c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$c^2+a^2-b^2=a^2+b^2-c^2$

$b^2-c^2=0$

$(b+c)(b-c)=0$

$\therefore b=c$ $(\because b+c>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

17 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}$

[서술형 1] $\log_3\frac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$

❶

$\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$

❷

$\therefore \log_3\frac{1}{81}+\sqrt[3]{-64}=-4+(-4)=-8$

❸

채점 기준	배점
❶ 로그의 성질을 이용하여 $\log_3\frac{1}{81}$을 간단히 할 수 있다.	2점
❷ 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt[3]{-64}$를 간단히 할 수 있다.	2점
❸ $\log_3\frac{1}{81}+\sqrt[3]{-64}$의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] 처음 불순물의 양을 K라 하자. 이 액체가 여과기를 한 번 통과하면 남아 있는 불순물의 양은 $0.8\,K$이다. 즉 여과기를 n번 통과하면 남아 있는 불순물의 양은 $(0.8)^n K$

불순물의 양이 $4\,\%$ 이하이려면 $(0.8)^n K \le 0.04K$

$(0.8)^n \le 0.04$

······ ❶

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log(0.8)^n \le \log 0.04$

$n\log\left(\frac{8}{10}\right) \le \log\left(\frac{4}{100}\right)$

$n(3\log 2-1) \le 2\log 2-2$

$n(3\cdot 0.3-1) \le 2\cdot 0.3-2$

$-0.1n \le -1.4$

$\therefore n \ge 14$

따라서 최소한 여과기를 14번 통과시켜야 한다.

······ ❷

채점 기준	배점
❶ 조건을 만족시키는 식을 세울 수 있다.	3점
❷ 최소한 여과기를 몇 번 통과시켜야 하는지 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서

$a<0,\ b>0$

······ ❶

$\sin\theta = \frac{b}{2} = \frac{3}{5}$이므로 $b=\frac{6}{5}$

······ ❷

또 $\overline{\mathrm{OP}}=2$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=2$

$\therefore a^2+b^2=4$ ······ ㉠

$b=\frac{6}{5}$을 ㉠에 대입하면 $a^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2=4$

$a^2+\frac{36}{25}=4,\ a^2=\frac{64}{25}$

$\therefore a=-\frac{8}{5}\ (\because a<0)$

······ ❸

$\therefore a+b=-\frac{8}{5}+\frac{6}{5}=-\frac{2}{5}$

······ ❹

채점 기준	배점
❶ 점 P의 x좌표, y좌표의 부호를 알 수 있다.	1점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ a의 값을 구할 수 있다.	3점
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점