2-1-2.이차방정식의 근과 판별식_천재(이준열)

◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-03-05
2) 제작자 : 교육지대㈜
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[이차방정식의 실근과 허근]

• 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$의 근:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(1) 이차방정식의 실근: $b^2-4ac\geq 0$

(2) 이차방정식의 허근: $b^2-4ac<0$

[이차방정식의 근의 판별]

• 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때

(1) $D>0$: 서로 다른 두 실근

(2) $D=0$: 중근 (서로 같은 두 실근)

(3) $D<0$: 서로 다른 두 허근

기본문제

[예제]

1. 다음 중 허근을 해로 갖는 이차방정식은?

① $4x^2-4x+1=0$　② $x^2-2x-3=0$
③ $x^2+5x+2=0$　④ $x^2+4x+5=0$
⑤ $3x^2+4x-1=0$

[문제]

2. 이차방정식 $2x^2-3x-4=0$을 풀면?

① $\frac{3\pm\sqrt{37}}{4}$　② $\frac{3\pm\sqrt{39}}{2}$
③ $\frac{3\pm\sqrt{39}}{4}$　④ $\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$
⑤ $\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$

[예제]

3. 다음 중 서로 다른 두 실근을 해로 갖는 이차방정식은?

① $x^2+4x+4=0$　② $x^2-3x+1=0$
③ $x^2-6x+9=0$　④ $x^2+2x+3=0$
⑤ $x^2+x+1=0$

[문제]

4. 다음 중 서로 같은 두 실근(중근)을 해로 갖는 이차방정식은?

① $x^2-2x+3=0$　② $5x^2-2x-1=0$
③ $4x^2-12x+9=0$　④ $3x^2+2x-1=0$
⑤ $2x^2+5x+1=0$

[예제]

5. 이차방정식 $x^2+8x+2(a-2)=0$이 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a\leq 10$　② $a<10$
③ $a\geq 10$　④ $a\leq 8$
⑤ $a<8$

[문제]

6. 이차방정식 $x^2-4x-2(a+1)=0$이 허근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$　② $a<-3$
③ $a>-2$　④ $a<-2$
⑤ $a>-1$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[소단원 확인 문제]

7. 다음 중 허근을 해로 갖는 이차방정식은?

① $x^2-4x-3=0$ ② $2x^2-3x-2=0$
③ $4x^2-3x+1=0$ ④ $8x^2-6x+1=0$
⑤ $16x^2+8x+1=0$

[소단원 확인 문제]

8. 이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값은?

① $k<0$ 또는 $k>8$ ② $-1<k<7$
③ $k<-1$ 또는 $k>7$ ④ $-2<k<6$
⑤ $k<-2$ 또는 $k>6$

[중단원 연습 문제]

9. 이차방정식 $2x^2-4x+a+3=0$이 허근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a<-1$
③ $a>0$ ④ $a<0$
⑤ $a>1$

[중단원 연습 문제]

10. 다음은 계수 a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 것을 설명하는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 내용으로 옳지 않은 것은?

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라고 하면 서로 다른 두 실근을 가지므로
> $D_1=\boxed{(가)}-\boxed{(나)}\times a\times c=b^2-\boxed{(다)}>0$
> 한편 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 판별식을 D_2라고 하면
> $D_2=(\boxed{(라)})^2-4\times c\times\boxed{(마)}=b^2-\boxed{(다)}>0$이므로
> 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다.

① (가): b^2 ② (나): 4
③ (다): $4ac$ ④ (라): b
⑤ (마): a

[중단원 연습 문제]

11. 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2+ak+b=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 3
③ 5 ④ 7
⑤ 9

[대단원 종합 문제]

12. x에 대한 이차방정식 $x^2-4mx+m^2+12=0$이 허근을 가질 때, 모든 정수 m의 합은?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

유사문제

13. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+3k-2=0$이 실근을 가지도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

14. 이차방정식 $x^2-6x+k+2=0$ 은 실근을 갖고, 이차방정식 $kx^2-4x+8=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 정수 k 의 최댓값은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

15. 다음 <보기>의 이차방정식 중에서 허근을 갖는 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $5x^2+2x+1=0$

ㄴ. $x^2+3x-1=0$

ㄷ. $x^2-3x+4=0$

ㄹ. $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ, ㄷ　④ ㄴ, ㄹ

⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-k+9=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 자연수 k의 개수는? (단, k는 상수)

① 1　② 2

③ 3　④ 4

⑤ 5

17. 이차방정식 $x^2+3x+(k-2)=0$이 실근을 갖도록 하는 서로 다른 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 1　② 3

③ 6　④ 10

⑤ 15

18. 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, k의 값이 될 수 없는 것은?

① -1　② $-\frac{1}{8}$

③ 0　④ 1

⑤ 2

Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co,.Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] (i) $4x^2-4x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\times1=4-4=0$
따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
(ii) $x^2-2x-3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-3)=1+3=4>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(iii) $x^2+5x+2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=5^2-4\times1\times2=25-8=17>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(iv) $x^2+4x+5=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times5=4-5=-1<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(v) $3x^2+4x-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=2^2-3\times(-1)=4+3=7>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2) [정답] ⑤
[해설] 근의 공식에 의하여
$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}$
$=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$

3) [정답] ②
[해설] (i) $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=4-4=0$
따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
(ii) $x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times1=9-4=5>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(iii) $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=9-9=0$
따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
(iv) $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times3=1-3=-2<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(v) $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

4) [정답] ③
[해설] (i) $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times3=1-3=-2<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $5x^2-2x-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-5\times(-1)=1+5=6>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(iii) $4x^2-12x+9=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\times9=36-36=0$
따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
(iv) $3x^2+2x-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2-3\times(-1)=1+3=4>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(v) $2x^2+5x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=5^2-4\times2\times1=25-8=17>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

5) [정답] ①
[해설] $\frac{D}{4}=4^2-1\times2(a-2)=-2a+20$
실근을 가지려면 $\frac{D}{4}\geq0$이어야 하므로
$-2a+20\geq0$, $a\leq10$

6) [정답] ②
[해설] $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times\{-2(a+1)\}=2a+6$
허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로
$2a+6<0$, $a<-3$

7) [정답] ③
[해설] (i) $x^2-4x-3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-3)=4+3=7>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(ii) $2x^2-3x-2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(iii) $4x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4\times4\times1=9-16=-7<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(iv) $8x^2-6x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-8\times1=9-8=1>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(v) $16x^2+8x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=4^2-16\times1=16-16=0$
따라서 서로 같은 두 실근(중근)을 갖는다.

8) [정답] ⑤

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[해설] 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
$D=k^2-4\times1\times(k+3)=k^2-4k-12$
서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로
$k^2-4k-12>0$, 즉 $(k+2)(k-6)>0$
따라서 $k<-2$ 또는 $k>6$

9) [정답] ①
[해설] $2x^2-4x+a+3=0$
$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times(a+3)=-2a-2$
허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로
$-2a-2<0$, $a>-1$

10) [정답] ④
[해설] 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라고 하면
서로 다른 두 실근을 가지므로
$D_1=b^2-4\times a\times c=b^2-4ac>0$
한편 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 판별식을 D_2라고 하면
$D_2=(-b)^2-4\times c\times a=b^2-4ac>0$이므로
이차방정식 $cx^2-bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다.

11) [정답] ②
[해설] $x^2+2(k-3)x+k^2+ak+b=0$
주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k-3)^2-1\times(k^2+ak+b)$
$=k^2-6k+9-k^2-ak-b$
주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 $\frac{D}{4}=0$
즉 $-(a+6)k+9-b=0$이 실수 k의 값과 관계없이 성립한다.
따라서 $a=-6$, $b=9$
$a+b=3$

12) [정답] ④
[해설] $x^2-4mx+m^2+12=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2m)^2-1\times(m^2+12)$
$=3m^2-12<0$
$m^2-4=(m+2)(m-2)<0$
따라서 $-2<m<2$이므로 모든 정수 m의 합은
$(-1)+0+1=0$

13) [정답] ②
[해설] 실근을 가질 조건은 $D\geq0$이므로
$D/4=4-(3k-2)\geq0$
$\therefore k\leq2$
자연수 k의 개수는 2개다.

14) [정답] ②
[해설] 방정식 $x^2-6x+k+2=0$이 실근을 갖는다면
판별식 D_1에 대해 $D_1/4=9-k-2\geq0$이므로
$k\leq7$이다.
방정식 $kx^2-4x+8=0$이 서로 다른 두 허근을
가지려면 판별식 D_2에 대해 $D_2/4=4-8k<0$이므로
$k>\frac{1}{2}$이다.
따라서 k의 범위는 $\frac{1}{2}<k\leq7$이므로
정수 k의 최댓값은 7이다.

15) [정답] ②
[해설] 각 보기의 판별식을 D라 하자.
ㄱ. $D/4=1-5=-4<0$
서로 다른 두 허근을 갖는다.
ㄴ. $D=9+4=13>0$
서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $D=9-16=-7<0$
서로 다른 두 허근을 갖는다.
ㄹ. $D/4=3-3=0$
중근을 갖는다.
따라서 보기에서 허근을 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16) [정답] ④
[해설] 주어진 방정식이 실근을 갖지 않으려면
판별식 D에 대해 $D/4<0$이다.
즉, $4-(-k+9)<0$이므로 $k<5$이다.

17) [정답] ④
[해설] 실근을 가질 조건은 $D\geq0$이므로
$D=9-4(k-2)\geq0$
$\therefore k\leq\frac{17}{4}$
모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

18) [정답] ①
[해설] 서로 다른 두 실근을 가질 조건은
$D>0$이므로
$D=(2k+1)^2-4k^2>0$
$\therefore k>-\frac{1}{4}$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125