



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-12

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 복잡한 수열의 수렴, 발산 판정(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수렴과 발산

① (분자의 차수)=(분모의 차수)

⇒ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

② (분자의 차수)<(분모의 차수) ⇒ 극한값은 0이다.

③ (분자의 차수)>(분모의 차수) ⇒ 발산한다.

(2) $\infty - \infty$ 꼴의 수렴과 발산

① 다항식일 경우, 최고차항으로 묶는다.

② 무리식을 포함한 경우, 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

■ 다음 극한을 조사하여라.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n}{2n+4}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{n-3}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4n-2n^3}{1+3n}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2-4}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-5}{2n+3}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n+3n^3}{1-2n^3}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{n+1}$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n+1} + \sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{n-1}}$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 2n^2)$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{4n^2+1} - n}$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{9n^2+1}-n}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-n)$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n}-n^2)$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+2n})$$

02 미정계수의 결정

- (1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴인 분수식의 극한값이 0이 아닌 실수이면
 \Rightarrow 분모, 분자의 차수가 같다.
 (2) $\infty - \infty$ 꼴인 무리식의 극한값이 0이 아닌 실수이면
 \Rightarrow 무리식을 유리화한다.

■ 다음을 만족하는 상수 a , b 의 값을 구하여라.

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+1}{5n-2} = 4$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+1}{3n+2} = 2$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+1}{an^2+4n+3} = 3$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+3}{an^2-7n+5} = 2$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3+bn^2+1}{n^2+4n} = 3$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3+bn^2+3}{(n-1)^2} = 2$$

■ 다음을 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an}-n) = 2$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = 4$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 9$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = 3$$

■ 다음 물음에 답하여라.

29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 2n - 1}{an^3 + bn^2 + 10n} = 2$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

30. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 - an + 1} - n) = b$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

31. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n - a) = b$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수이고, $b \neq 0$)

03 일반항을 포함한 식의 극한값

- ① 수렴하는 수열에 대한 극한값이 주어진 문제는 극한값의 기본 성질을 이용한다.
 ② 일반항 a_n 을 포함한 식의 극한값이 주어진 문제는 먼저 극한값의 기본 성질을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

■ 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 8$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 2$ 일 때, 다음 극한값을 구하여라.

32. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

33. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

34. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n)$

35. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 4b_n)$

■ 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 3$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 2$ 일 때, 다음 극한값을 구하여라.

36. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2)$

37. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2$

■ 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음을 구하여라.

38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{2a_n + 1} = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{2a_n - 1} = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 5}{2a_n + 1} = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{a_n + 1} = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 4}{a_n - 1} = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

43. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{a_n + 4} = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 1}{a_n - 3} = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 1}{a_n + 1} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{3a_n + 2} = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 6}{3a_n + 1} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

48. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 1}{3a_n - 2} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

49. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 5}{6 - 2a_n} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

50. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 1)a_n = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1)a_n$ 의 값

51. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 1)a_n = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1)a_n$ 의 값

52. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1)a_n = 6$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 의 값

53. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1)a_n = 8$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 의 값

54. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 5)a_n = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 의 값

55. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1)a_n = 12$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 a_n}{2n + 1}$ 의 값

56. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n + 2}$ 의 값

57. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n - 4} = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값

58. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 + 7} = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)a_n}{n^3}$ 의 값

59. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n} + 2n} = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)a_n}{n^2 + 3n}$ 의 값

60. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)a_n}{\sqrt{n} + \sqrt{4n + 1}}$ 의 값

04 수열의 극한값의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)일 때

(1) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n$ 이면 $\alpha \leq \beta$

(2) 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$

▣ 다음을 구하여라.

61. $\frac{n-1}{n} \leq a_n \leq \frac{n+1}{n}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

62. $\frac{3n-1}{n} < a_n < \frac{3n+4}{n}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

63. $\frac{n}{4n+5} < a_n < \frac{n+6}{4n+3}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

64. $\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n^2+3n+1}{n^2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

65. $\frac{4n-1}{n} < a_n < \frac{4n^2+3n+1}{n^2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

66. $\frac{5n-2}{n+1} < a_n < \frac{5n+1}{n-2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+1)$ 의 값

67. $\frac{10n-2}{n+2} < a_n < \frac{10n+1}{n+1}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+4)$ 의 값

68. $2n-1 < na_n < 2n+4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

69. $3n+1 < (n+2)a_n < 3n+3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

70. $5n^2-2n < n^2a_n < 5n^2+2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

71. $4n^2+2 < a_n < 4n^2+3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2+1}$ 의 값

72. $3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n}{n^2+2n}$ 의 값

73. $3n^2-2n+1 < n^2a_n < 3n^2+2n+3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

74. $6n-1 < a_n < 6n+1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2}$ 의 값

05 수렴 판정 문제

(1) 극한값이 존재하는 경우에만 극한값이 기본 성질을 이용할 수 있다.

(2) ∞ 는 실수가 아니지만 극한값을 계산할 때 다음과 같이 생각하면 편리하다. (단, a 는 상수)

① $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$

② $a > 0$ 이면 $a \times \infty = \infty$, $a \times (-\infty) = -\infty$

$a < 0$ 이면 $a \times \infty = -\infty$, $a \times (-\infty) = \infty$

③ $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

■ 다음 명제의 참, 거짓을 () 안에 써넣어라.

75. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$ 이다.
()

76. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이다.
()

77. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ 이다.
()

78. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ 이다. (단, α 와 β 는 상수)
()

79. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이다.
()

80. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 3$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ 이다.
()

81. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 도 수렴한다.
()

82. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ 이다.
()

83. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 도 수렴한다.
()

84. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 모두 발산하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 도 발산한다.
()

85. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 같은 값으로 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ 이다.
()

86. $a_n < b_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 도 수렴한다.
()

87. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < c_n < b_n$ 이고
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 이면 $\{c_n\}$ 은 수렴한다. ()



정답 및 해설

1) $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

2) ∞

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2+\frac{4}{n}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

3) ∞

$$\Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴로 (분자의 차수) > (분모의 차수) 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{n-3} = \infty$$

4) $-\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4n-2n^3}{1+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-4-2n^2}{\frac{1}{n}+3} = \frac{-\infty}{3}$$

$$= -\infty$$

5) 0

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

6) ∞

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-5}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \infty$$

7) $-\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴로 (분자의 차수) = (분모의 차수) 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n+3n^3}{1-2n^3} = -\frac{3}{2}$$

8) 0

$$\Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴로 (분자의 차수) < (분모의 차수) 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{n+1} = 0$$

9) $\frac{5}{3}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n+1} + \sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}} + \sqrt{4-\frac{1}{n}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{3+2}{2+1} = \frac{5}{3}$$

10) ∞

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 2n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \infty$$

11) ∞

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$$

12) ∞

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{3}$$

$$= \frac{\infty}{3} = \infty$$

13) 3

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1} = 3$$

14) 1

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}-1}$$

$$= \frac{2}{3-1} = 1$$

15) 2

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{9n^2+1}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}-1} = \frac{4}{3-1}$$

$$= 2$$

16) $-\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1}-n)(\sqrt{n+1}+n)}{\sqrt{n+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n^2}{\sqrt{n+1}+n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - n}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

17) $-\infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n^2) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} - 1 \right) \\ = -\infty \end{aligned}$$

18) -2

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 2n}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 2n})(\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2n})}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - (n^2 + 2n)}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

19) $a=0, b=20$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 1}{5n - 2} \text{의 극한값이 유한 확정값이므로 } a=0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 1}{5n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n}}{5 - \frac{2}{n}} = \frac{b}{5} = 4 \text{이므로 } b=20$$

20) $a=0, b=6$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 1}{3n + 2} \text{이 극한값을 가지려면 } a=0 \text{이어야 한다. 이때의 극한값은}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 1}{3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{b}{3} = 2 \text{이므로 } b=6$$

 $\therefore a=0, b=6$ 21) $a=0, b=12$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 1}{an^2 + 4n + 3} \text{이 0이 아닌 극한값을 가지려면 } a=0 \text{이어야 한다. 이때의 극한값은}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 1}{4n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{b}{4} = 3 \text{이므로 } b=12$$

 $\therefore a=0, b=12$ 22) $a=0, b=-14$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 2}{an^2 - 7n + 5} \text{의 극한값이 유한 확정값이므로 } a=0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 3}{-7n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{3}{n}}{-7 + \frac{5}{n}} = \frac{b}{-7} = 2 \text{이므로}$$

 $b=-14$ 23) $a=0, b=3$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 1}{n^2 + 4n} \text{의 극한값이 유한 확정값이므로}$$

분모, 분자의 차수가 같다. $\therefore a=0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 + 1}{n^2 + 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}} = \frac{b}{1} = 3 \therefore b=3$$

24) $a=0, b=2$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 3}{(n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + 3}{n^2 - 2n + 1} \dots \textcircled{1}$$

 $\textcircled{1}$ 이 극한값을 가지려면 $a=0$ 이어야 한다. 이때의 극

$$\text{한값은 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 + 3}{n^2 - 2n + 1} = \frac{b}{1} = 2 \text{이므로 } b=2$$

 $\therefore a=0, b=2$

25) 4

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an} - n)(\sqrt{n^2 + an} + n)}{\sqrt{n^2 + an} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + an) - n^2}{\sqrt{n^2 + an} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1} = \frac{a}{2} = 2 \\ \therefore a=4 \end{aligned}$$

26) 16

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an+1}}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{n(n+1 - n+1)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{2n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a + \frac{1}{n}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)}{2} \\ = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{1})}{2} = \sqrt{a} \\ \sqrt{a}=4 \text{이므로 } a=16 \end{aligned}$$

27) 9

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+a} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})(\sqrt{n+a} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+a} + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a-n)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}\right)}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1}} = \frac{2a}{2} = a = 9
\end{aligned}$$

28) 6

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a-n)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(n+2-n)(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})} \\
&= \frac{a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1} = \frac{a}{2} \\
&\frac{a}{2} = 3 \text{ 이므로 } a = 6
\end{aligned}$$

29) 16

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2+2n-1}{an^3+bn^2+10n}$ 의 값이 0이 아니므로 $a=0$ 이어야 한다. 이때의 극한값은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2+2n-1}{bn^2+10n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{b+\frac{10}{n}} = \frac{8}{b} = 2$$

이므로 $b=4$

$$\therefore a^2+b^2=0+4^2=16$$

30) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2-an+1}-n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\{(n^2-an+1)-n^2\}}{\sqrt{n^2-an+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-an^2+n}{\sqrt{n^2-an+1}+n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-an+1}{\sqrt{1-\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = b \text{ 이므로 } a=0 \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = b \text{ 이므로 } b = \frac{1}{2} \\
&\therefore a+b = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

31) 2

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+2n+3}-n-a)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\{(n^2+2n+3)-(n+a)^2\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\{(n^2+2n+3)-(n^2+2an+a^2)\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\{2(1-a)n+3-a^2\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1-a)n+3-a^2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{a}{n}} = b
\end{aligned}$$

이므로 $1-a=0$ 에서 $a=1$ 이고, 극한값은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{1}{n}} = 1 = b$$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

32) 5

\Rightarrow 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α 와 β 는 상수)라 하자.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n-b_n) \\
&= (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta) \\
&= 2\alpha = 10 \\
&\therefore \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5
\end{aligned}$$

33) 3

\Rightarrow 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α 와 β 는 상수)라 하자.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n-b_n) \\
&= (\alpha+\beta) - (\alpha-\beta) \\
&= 2\beta = 6 \\
&\therefore \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3
\end{aligned}$$

34) 1

\Rightarrow 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α 와 β 는 상수)라 하자.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n-3b_n) = 2\alpha-3\beta \\
&= 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1
\end{aligned}$$

35) 17

\Rightarrow 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α 와 β 는 상수)라 하자.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+4b_n) = \alpha+4\beta \\
&= 5+4 \times 3 = 17
\end{aligned}$$

36) 5

\Rightarrow 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \quad (\text{단, } \alpha \text{와 } \beta \text{는 상수라 하면})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = \alpha^2 + \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 3^2 - 2 \times 2 = 5$$

37) 1

\Rightarrow 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \quad (\text{단, } \alpha \text{와 } \beta \text{는 상수라 하면})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$$

$$= 5 - 2 \times 2 = 1$$

38) 0

$$\Rightarrow \frac{a_n + 1}{2a_n + 1} = b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $a_n + 1 = b_n(2a_n + 1)$ 에서

$$(2b_n - 1)a_n = 1 - b_n, \quad a_n = \frac{1 - b_n}{2b_n - 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - b_n}{2b_n - 1} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{2\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 1}$$

$$= \frac{1 - 1}{2 \times 1 - 1} = 0$$

39) 0

$$\Rightarrow \frac{a_n - 1}{2a_n - 1} = b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $a_n - 1 = b_n(2a_n - 1)$ 에서

$$(2b_n - 1)a_n = b_n - 1 \quad \therefore a_n = \frac{b_n - 1}{2b_n - 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - 1}{2b_n - 1}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 1}{2\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 1}$$

$$= \frac{1 - 1}{2 \times 1 - 1} = 0$$

[다른 풀이]

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{2a_n - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 1}{2\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 1} = \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} = 1$$

$$\alpha - 1 = 2\alpha - 1$$

$$\therefore \alpha = 0, \quad \text{즉 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

40) $\frac{2}{5}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\text{단, } \alpha \text{는 상수}) \text{로 놓으면 } \frac{\alpha + 5}{2\alpha + 1} = 3$$

$$6\alpha + 3 = \alpha + 5, \quad 5\alpha = 2$$

$$\therefore \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{5}$$

41) -2

$$\Rightarrow \frac{2a_n + 1}{a_n + 1} = b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $2a_n + 1 = b_n(a_n + 1)$ 에서

$$a_n = \frac{1 - b_n}{b_n - 2} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - b_n}{b_n - 2} = \frac{1 - 3}{3 - 2} = -2$$

[다른 풀이]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{로 놓으면 } \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} = 3$$

$$2\alpha + 1 = 3\alpha + 3 \quad \therefore \alpha = -2 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$$

42) 4

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{로 놓으면 } \frac{2\alpha + 4}{\alpha - 1} = 4$$

$$2\alpha + 4 = 4\alpha - 4, \quad 2\alpha = 8 \quad \therefore \alpha = 4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

43) -11

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{로 놓으면 } \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 4} = 3$$

$$2\alpha + 1 = 3\alpha + 12 \quad \therefore \alpha = -11$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -11$$

44) $\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{2a_n - 1}{a_n - 3} = b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $2a_n - 1 = b_n(a_n - 3)$ 에서

$$(b_n - 2)a_n = 3b_n - 1 \quad \therefore a_n = \frac{3b_n - 1}{b_n - 2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n - 1}{b_n - 2} = \frac{3\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 2}$$

$$= \frac{-3 - 1}{-1 - 2} = \frac{4}{3}$$

45) 3

$$\Rightarrow \frac{3a_n - 1}{a_n + 1} = b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $3a_n - 1 = b_n(a_n + 1)$ 에서

$$(3 - b_n)a_n = b_n + 1 \quad \therefore a_n = \frac{b_n + 1}{3 - b_n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 1}{3 - b_n} = \frac{2 + 1}{3 - 2} = 3$$

$$46) -\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_n+1}{3a_n+2}=b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $2a_n+1=b_n(3a_n+2)$ 에서

$$(3b_n-2)a_n=1-2b_n \therefore a_n=\frac{1-2b_n}{3b_n-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2b_n}{3b_n-2} = \frac{1-2\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3\lim_{n \rightarrow \infty} b_n-2} \\ &= \frac{1-2 \times 3}{3 \times 3-2} = -\frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$47) 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{로 놓으면 } \frac{2\alpha+6}{3\alpha+1}=2$$

$$2\alpha+6=6\alpha+2, 4\alpha=4 \therefore \alpha=1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$48) \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_n-1}{3a_n-2}=b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

a_n 을 b_n 으로 나타내면 $2a_n-1=b_n(3a_n-2)$ 에서

$$a_n=\frac{2b_n-1}{3b_n-2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n-1}{3b_n-2} = \frac{2\lim_{n \rightarrow \infty} b_n-1}{3\lim_{n \rightarrow \infty} b_n-2} = \frac{2 \times 2-1}{3 \times 2-2} = \frac{3}{4}$$

[다른 풀이]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{로 놓으면 } \frac{2\alpha-1}{3\alpha-2}=2$$

$$2\alpha-1=6\alpha-4 \therefore \alpha=\frac{3}{4} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$$

$$49) 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{로 놓으면 } \frac{3\alpha+5}{6-2\alpha}=2$$

$$3\alpha+5=12-4\alpha \therefore \alpha=1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$50) \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (3n-1)a_n=b_n \text{ 이라고 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, a_n = \frac{b_n}{3n-1} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \times \frac{b_n}{3n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} \times b_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

$$51) 1$$

$$\Rightarrow (3n+1)a_n=b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

$$a_n = \frac{b_n}{3n+1} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (n-1) \times \frac{b_n}{3n+1} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$= \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

$$52) 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} (2n+1)a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$53) 4$$

$$\Rightarrow (2n+1)a_n=b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 8$$

$$a_n = \frac{b_n}{2n+1} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times \frac{b_n}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

[다른 풀이]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{2n+1} \times (2n+1)a_n \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$54) \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (2n+5)a_n=b_n \text{ 이라고 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, a_n = \frac{b_n}{2n+5} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times \frac{b_n}{2n+5} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

55) 6

 $\Rightarrow (n^2+1)a_n = b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 12, \quad a_n = \frac{b_n}{n^2+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 a_n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2n+1} \times \frac{b_n}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(2n+1)(n^2+1)} \times b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \\ &= 6 \end{aligned}$$

56) $\frac{1}{6}$
 $\Rightarrow \frac{a_n}{n} = b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}, \quad a_n = n b_n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n b_n}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

57) 3

 $\Rightarrow \frac{a_n}{3n-4} = b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \quad a_n = (3n-4)b_n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)b_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

58) 3

 $\Rightarrow \frac{a_n}{n^2+7} = b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3, \quad a_n = (n^2+7)b_n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2+7)b_n}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n^2}\right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

59) 8

 $\Rightarrow \frac{a_n}{\sqrt{n}+2n} = b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4, \quad a_n = (\sqrt{n}+2n)b_n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{n^2+3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\sqrt{n}+2n)b_n}{n^2+3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+2\right)}{1+\frac{3}{n}} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 2 \times 4 = 8 \end{aligned}$$

60) 1

 $\Rightarrow \sqrt{n} a_n = b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3, \quad a_n = \frac{b_n}{\sqrt{n}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}} \times \frac{b_n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+\sqrt{4n^2+n}} \times b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\sqrt{4+\frac{1}{n}}} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{1+2} \times 3 = 1 \end{aligned}$$

61) 1

 $\Rightarrow \frac{n-1}{n} \leq a_n \leq \frac{n+1}{n}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

62) 3

 $\Rightarrow \frac{3n-1}{n} < a_n < \frac{3n+4}{n}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n} = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

63) $\frac{1}{4}$
 $\Rightarrow \frac{n}{4n+5} < a_n < \frac{n+6}{4n+3}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4+\frac{5}{n}} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{6}{n}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{1}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$$

64) 2

$$\Rightarrow \frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n^2+3n+1}{n^2} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

65) 4

$$\Rightarrow \frac{4n-1}{n} < a_n < \frac{4n^2+3n+1}{n^2} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n} = 4, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3n+1}{n^2} = 4 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

66) 6

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{n-2} = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 5 + 1 = 6$$

67) 14

$$\Rightarrow \frac{10n-2}{n+2} < a_n < \frac{10n+1}{n+1} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n-2}{n+2} = 10, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+1}{n+1} = 10 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 10$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 4) = 10 + 4 = 14$$

68) 2

 \Rightarrow 부등식의 각 변을 n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{n} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

69) 3

 \Rightarrow 부등식의 각 변을 $n+2$ 로 나누면

$$\frac{3n+1}{n+2} < a_n < \frac{3n+3}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{n+2} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

70) 5

 \Rightarrow 부등식의 각 변을 n^2 으로 나누면

$$\frac{5n^2-2n}{n^2} < a_n < \frac{5n^2+2n}{n^2} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+2n}{n^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$$

71) 1

 $\Rightarrow 4n^2+2 < a_n < 4n^2+3$ 에서 각 변을 $4n^2+1$ 로 나누

면

$$\frac{4n^2+2}{4n^2+1} < \frac{a_n}{4n^2+1} < \frac{4n^2+3}{4n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2}{4n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3}{4n^2+1} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2+1} = 1$$

72) 12

$$\Rightarrow 3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n \text{의 각 변에 } \frac{4}{n^2+2n} \text{를}$$

$$\text{곱하면 } \frac{4(3n^2+2n)}{n^2+2n} < \frac{4a_n}{n^2+2n} < \frac{4(3n^2+3n)}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(3n^2+2n)}{n^2+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(3n^2+3n)}{n^2+2n} = 12 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n}{n^2+2n} = 12$$

73) 3

 \Rightarrow 부등식의 각 변을 n^2 으로 나누면

$$\frac{3n^2-2n+1}{n^2} < a_n < \frac{3n^2+2n+3}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

74) 6

 \Rightarrow 부등식의 각 변을 $n+2$ 으로 나누면

$$\frac{6n-1}{n+2} < a_n < \frac{6n+1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{n+2} = 6 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2} = 6$$

75) 거짓

$$\Rightarrow (\text{반례}) a_n = n, b_n = -2n \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{2}$$

 \therefore 거짓

76) 거짓

$$\Rightarrow (\text{반례}) a_n = \frac{1}{n+1}, b_n = \frac{1}{n} \text{이면 모든 자연수 } n \text{에}$$

$$\text{대하여 } a_n < b_n \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \therefore \text{거짓}$$

77) 참

$$\Rightarrow c_n = a_n - b_n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, b_n = a_n - c_n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha - 0 = \alpha$$

∴ 참

78) 거짓

⇒ (반례) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n+1} = \infty \text{ (발산)} \therefore \text{거짓}$$

79) 거짓

⇒ (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times n = 1 \text{이다.} \therefore \text{거짓}$$

80) 참

⇒ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 3$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n} = 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \therefore \text{참}$$

81) 거짓

⇒ (반례) 수열 $\{a_n\}$ 이 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ 이지만 수열 $\{a_n\}$ 은 진동(발산)한다. ∴ 거짓

82) 거짓

⇒ (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0 \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{으로 발산한다.} \therefore \text{거짓}$$

83) 거짓

⇒ (반례) $a_n = n+1$, $b_n = -n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1-n) = 1 \text{로 수렴하지만}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{n+1-(-n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

로 발산한다. ∴ 거짓

84) 거짓

⇒ (반례) $a_n = b_n = (-1)^n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{이 모두 발산하지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1 \text{로 수렴한다.} \therefore \text{거짓}$$

85) 거짓

⇒ (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ 이라 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 모두 0에 수렴하지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{로 발산한다.}$$

∴ 거짓

86) 거짓

⇒ (반례) $a_n = (-1)^n$, $b_n = 2$ 라 하면

$a_n < b_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 로 수렴하지만

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 진동(발산)한다.

87) 거짓

⇒ (반례) $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n + \frac{1}{n}$, $c_n = n$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < c_n < b_n$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ (발산)} \therefore \text{거짓}$$