



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2020-03-10

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

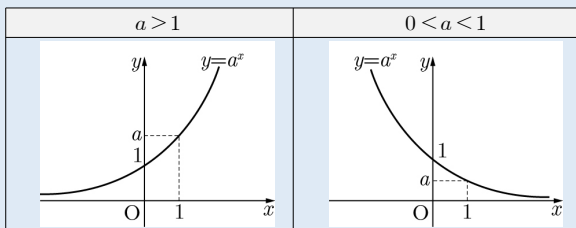
◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[지수함수]

• 지수함수: $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $y = a^x$

[지수함수의 그래프]

• 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 의 그래프

• 지수함수의 그래프의 성질

- ① 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: 양의 실수 전체의 집합
- ② 점근선: x 축
- ③ $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소

[지수함수를 이용한 수의 대소 비교]

• 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 에서

- ① $a > 1$ 일 때, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- ② $0 < a < 1$ 일 때, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

[지수함수의 그래프의 평행이동]

• 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식
 $\Rightarrow y = a^{x-m} + n$

[지수함수의 그래프의 대칭이동]

• 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 의 그래프를

- ① x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 $\Rightarrow y = -a^x$
- ② y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 $\Rightarrow y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- ③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 $\Rightarrow y = -\left(\frac{1}{a}\right)^x$

기본문제

[예제]

1. 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동 혹은 대칭 이동하여 만들 수 없는 함수는?

- ① $y = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- ② $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- ③ $y = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- ④ $y = 3 \times 2^x$
- ⑤ $y = 2^{3x-1}$

[문제]

2. $y = 3^x$ 에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

- ① $(0, 1)$ 을 지난다.
- ② $y = 0$ 을 점근선으로 가진다.
- ③ 정의역은 모든 실수이다.
- ④ 증가함수이다.
- ⑤ 평행이동과 대칭이동을 이용하여 $y = 3^{2x}$ 로 이동시킬 수 있다.

[문제]

3. 다음 함수의 점근선을 $y = a$ 라고 하고, y 절편의 값을 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값이 가장 큰 것은?

- ① $y = 9^{-x+1} + 5$
- ② $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x+1} - 5$
- ③ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - 2$
- ④ $y = 7^{x-2} + 2$
- ⑤ $y = 2 \times 4^{x-1} + 1$

[문제]

4. 다음 세 수의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

$$A = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \quad B = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \quad C = \sqrt[7]{\frac{1}{8}}$$

- ① $A > B > C$ ② $A > C > B$
 ③ $B > A > C$ ④ $B > C > A$
 ⑤ $C > A > B$

평가문제

[중단원 마무리하기]

5. 집합 $A = \{(x, y) | y = a^x\}$ 에 대하여 $(m, n) \in A$ 일 때, 항상 A 의 원소인 것만을 보기에 서 있는 대로 고른 것은? (단, $a > 0, a \neq 1$)

<보기>

㉠. $\left(\frac{m}{2}, \sqrt{n}\right)$	㉡. $(m+2, a^2)$
㉢. $(m^2, (an)^2)$	㉣. $\left(-m+1, \frac{a}{n}\right)$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢
 ③ ㉠, ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉢, ㉣
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉣

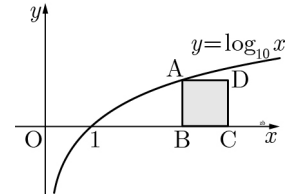
[중단원 마무리하기]

6. 함수 $y = \frac{1}{2^{-3x}}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = 64 \times 2^{3x} + 5$ 의 그래프가 되었다. 이때 pq 의 값을 구한 것은?

- ① -10 ② -5
 ③ 0 ④ 5
 ⑤ 10

[중단원 마무리하기]

7. 다음 그림과 같이 함수 $y = \log_{10} x$ 의 그래프 위의 점 A 에 대하여 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 이때 점 D의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 를 구한 것은?
 (단, 두 점 C, D는 x 축 위의 점이다.)



- ① 11 ② 12
 ③ 13 ④ 14
 ⑤ 15

[중단원 마무리하기]

8. 함수 $y = 3^x$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB} = 2\sqrt{145}$ 이고, 직선 AB의 기울기는 12이다. 두 점 A, B의 x 좌표가 각각 a, b 일 때, $3^a + 3^b$ 의 값을 구한 것은? (단, $a < b$)

- ① 10 ② 15
 ③ 20 ④ 25
 ⑤ 30

[대단원 평가하기]

9. 두 함수 $y = 5^x, y = \sqrt{5^x}$ 의 그래프와 직선 $y = 25$ 와의 교점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

- ① 17 ② 19
 ③ 21 ④ 23
 ⑤ 25

[대단원 평가하기]

10. 함수 $y = 16^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식만을 <보기>에 서 모두 고른 것은?

<보기>

㉠. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x} + 1$	㉡. $y = 4^{2x} - 3$
㉢. $y = 4^{4x+1} + 3$	㉣. $y = (-2)^{4x+2} - 1$

- ① ㉠, ㉡, ㉣ ② ㉠, ㉡
 ③ ㉠, ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉢, ㉣
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉣

[대단원 평가하기]

11. 함수 $f(x) = 3^x$ 에 대하여 $f(b) \div f(a) = 27$ 일 때, $b-a$ 의 값을 구한 것은?

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

유사문제

12. 함수 $y = 16 \cdot 2^{2x} + 1$ 에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

- ① x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
② 그래프는 지수함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.
③ 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
④ 그래프는 점 $(-2, 2)$ 를 지난다.
⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $y = 1$ 이다.

13. 함수 $y = 3^{x+a} - b$ 의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나고, 그 점근선이 $y = -3$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -4 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 4

14. 함수 $y = 4 \times 2^x + \frac{1}{2}$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다. 이때 b^a 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$
③ 2 ④ 4
⑤ 16

15. 다음 함수의 그래프 중에서 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 포갤 수 없는 것은?

- ① $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ② $y = 4^{0.5x+1} - 5$
③ $y = 8^{\frac{2}{3}x-2}$ ④ $y = 2^x + 2$
⑤ $y = (\sqrt[3]{2})^{3x-1} + 2$

16. 두 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 1$, $y = 4$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 6
③ $\frac{13}{2}$ ④ 7
⑤ $\frac{15}{2}$

17. 두 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 1$, $y = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① $2\log_3 2$ ② $\frac{3}{4}\log_2 3$
③ $2\log_2 3$ ④ $\frac{4}{3}\log_3 2$
⑤ $4\log_3 2$



정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] ① $y = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 2^{-x-2}$

② $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x = 2^{-x}$

③ $y = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^x = 2^{-x+\log_2 3}$

④ $y = 3 \times 2^x = 2^{x+\log_2 3}$

2) [정답] ⑤

[해설] $y = 3^{2x}$ 는 $y = 9^x$ 로 밑이 9인 지수함수이다. 따라서 평행이동과 대칭이동을 이용하더라도 밑을 3에서 9로 바꿀 수는 없다.

3) [정답] ③

[해설] ① 점근선이 $y = 5$, y 절편 값이 $9^{-0+1} + 5 = 14$ 으로 $5 + 14 = 19$

② 점근선이 $y = -5$, y 절편 값이

$$\left(\frac{1}{5} \right)^{-0+1} - 5 = -\frac{24}{5} \text{으로 } -5 + \left(-\frac{24}{5} \right) = -\frac{49}{5}$$

③ 점근선이 $y = -2$, y 절편 값이

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{0-3} - 2 = 25 \text{으로 } -2 + 25 = 23$$

④ 점근선이 $y = 2$, y 절편 값이

$$7^{0-2} + 2 = \frac{99}{49} \text{으로 } 2 + \frac{99}{49} = \frac{197}{49}$$

⑤ 점근선은 $y = 1$, y 절편 값이

$$2 \times 4^{0-1} + 1 = \frac{3}{2} \text{으로 } 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

따라서 $a+b$ 의 값이 가장 큰 것은 ③

4) [정답] ④

[해설] $A = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} \right)^5} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5}{3}}$, $B = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$C = \sqrt[7]{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{7}}$$

$y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 는 감소함수이므로 x 가 증가할수록 y 도 감소한다. 그러므로 $B > C > A$ 이다.

5) [정답] ②

[해설] $(m, n) \in A$ 이므로 $n = a^m$ 이다.

ㄱ. $y = a^x$ 에 $x = \frac{m}{2}$ 을 대입하면

$$y = a^{\frac{m}{2}} = (a^m)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \text{이므로 참이다.}$$

ㄴ. $y = a^x$ 에 $x = m+2$ 을 대입하면

$$y = a^{m+2} = a^m \times a^2 = a^2 n \text{이므로 거짓이다.}$$

ㄷ. $y = a^x$ 에 $x = m^2$ 을 대입하면

$$y = a^{m^2} = (a^m)^2 = n^2 \text{이므로 거짓이다.}$$

ㄹ. $y = a^x$ 에 $x = -m+1$ 을 대입하면

$$y = a^{-m+1} = \left(\frac{1}{a^m} \right) \times a = \frac{a}{n} \text{이므로 참이다.}$$

6) [정답] ①

[해설] 함수 $y = \frac{1}{2^{-3x}}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p

만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하면

$$y = 2^{3(x-p)} + q \text{가 된다.}$$

이때 $y = 64 \times 2^{3x} + 5$ 와 $y = 2^{3(x-p)} + q$ 가 일치해야 하므로, $64 = 2^{-3p}$, $p = -2$ 이고 $q = 5$ 가 된다.

따라서 $pq = -10$ 이다.

7) [정답] ②

[해설] 점 A 가 $y = \log_{10} x$ 위에 있고, y 좌표가 1이므로 $1 = \log_{10} x$, $x = 10$ 이다. 따라서 점 D 의 좌표는 $(11, 1)$ 이다.

$$11 + 1 = 12$$

8) [정답] ⑤

[해설] $A(a, 3^a)$, $B(b, 3^b)$ 라고 두고 AB 의 기울기가

$$12 \text{임을 이용하면 } \frac{3^b - 3^a}{b - a} = 12 \text{이다.}$$

또한 $\overline{AB} = 2\sqrt{145}$ 이므로

$$(b-a)^2 + (3^b - 3^a)^2 = 580 \text{이다.}$$

따라서 $(b-a)^2 = 4$, $b-a = 2$ 이다. ($a < b$) 따라서

$$3^b - 3^a = 24 \text{이므로 } b = 3, a = 1 \text{이다.}$$

$$3^a + 3^b = 27 + 3 = 30$$

9) [정답] ⑤

[해설] $O(0, 0)$, $A(2, 25)$, $B(4, 25)$ 이므로 삼각형 OAB 는 밑변은 2, 높이는 25인 삼각형이다. 따라서 넓이는 25이다.

10) [정답] ③

[해설] ㄱ. $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{-4x} + 1 = 2^{4x} + 1 = 16^x + 1$

ㄴ. $y = 4^{2x} - 3 = 16^x - 3$

ㄷ. $y = 4^{4x+1} + 3 = 256^{x+\frac{1}{4}} + 3$

ㄹ. $y = (-2)^{4x+2} - 1 = 4^{2x+1} - 1 = 16^{x+\frac{1}{2}} - 1$

11) [정답] ③

[해설] $f(b) \div f(a) = 3^b \div 3^a = 3^{b-a} = 27 = 3^3$
 $b-a = 3$

12) [정답] ③

[해설] ③ 치역은 $\{y \mid y > 1\}$ 이다.

13) [정답] ⑤

[해설] $y = 3^{x+a} - b$ 의 점근선은 $y = -b$ 이므로 $b = 3$

$$y = 3^{x+a} - 3 \text{이 점 } (0, 0) \text{을 지나므로}$$

$$3^a - 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$\therefore a + b = 4$$

14) [정답] ④

[해설] $y = 4 \times 2^x + \frac{1}{2} = 2^2 \times 2^x + \frac{1}{2} = 2^{x+2} + \frac{1}{2}$ 는

$y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

$$\text{따라서 } b^a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

15) [정답] ③

[해설] ① $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 는 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축

대칭한 그래프. (참)

② $y = 4^{0.5x+1} - 5 = 2^{x+2} - 5$ 는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프. (참)

③ $y = 8^{\frac{2}{3}x-2} = 4^{x-3}$ 는 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프. (거짓)

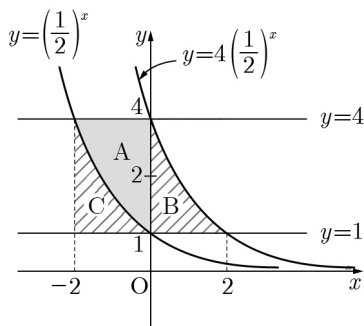
④ $y = 2^{x+2}$ 는 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프. (참)

⑤ $y = (\sqrt[3]{2})^{3x-1} + 2 = 2^{x-\frac{1}{3}} + 2$ 는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 만큼 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프. (참)

16) [정답] ②

[해설] 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와

직선 $y = 1$, $y = 4$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서 색칠된 A , B 영역의 넓이의 합이다.



그런데 함수 $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2+x}$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼

평행이동한 것이므로

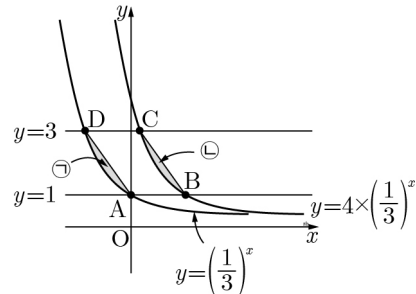
B 영역의 넓이와 C 영역의 넓이가 같다.

따라서 구하는 넓이는

가로가 2 , 세로가 3 인 직사각형의 넓이로 $2 \times 3 = 6$ 이다.

17) [정답] ⑤

[해설] 함수 $y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 를 x 축의 방향으로 평행이동한 것이다.



따라서 ㉠과 ㉡의 넓이가 같으므로

㉠을 ㉡으로 옮기면 구하는 도형의 넓이는 평행사변형 $ABCD$ 의 넓이와 같다.

점 $A(0, 1)$ 이고 점 B 의 y 좌표가 1 이므로

$$1 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{에서 } x = \log_3 4 \text{이다.}$$

$\overline{AB} = \log_3 4$, 평행사변형 $ABCD$ 의 높이가 2 이므로 넓이는 $2 \times \log_3 4 = 4 \log_3 2$ 이다.