



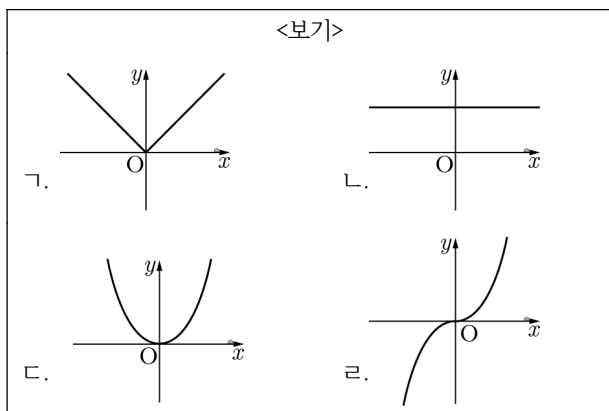
◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
 1) 제작연월일 : 2018-07-26
 2) 제작자 : 교육지대(주)
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초
 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도 「저작권법」에 의하여 보호
 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무
 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법
 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

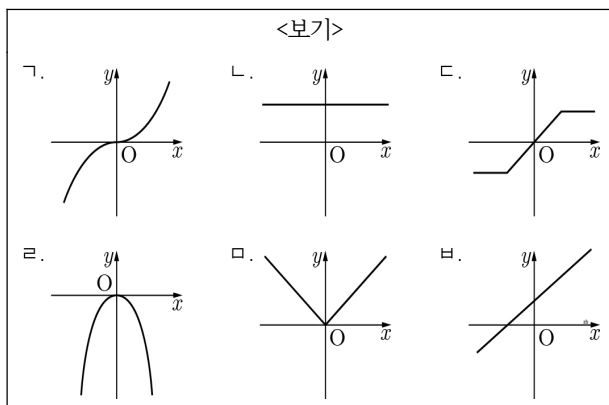
01 일대일 대응

- (1) 일대일함수: 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면
 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- (2) 일대일 대응: 일대일함수이고 치역과 공역이 같은
 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서
 ① $x_1, x_2 \in X$ 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 ② $\{f(x) | x \in X\} = Y$

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 <보기>의 함수의
 그래프 중 일대일 대응인 함수를 모두 골라라.



2. 실수 전체의 집합에서 정의된 <보기>의 함수의
 그래프 중 일대일대응인 함수를 모두 골라라.



3. 함수 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+2 & (x \geq 0) \\ (a+1)x+2 & (x < 0) \end{cases}$ 이 일대일 대
 응이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

4. 두 집합 $X = \{x | 1 \leq x \leq a\}$,
 $Y = \{y | 3 \leq y \leq 9\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로
 의 함수 $f(x) = 2x + b$ 가 일대일 대응일 때, 상수
 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

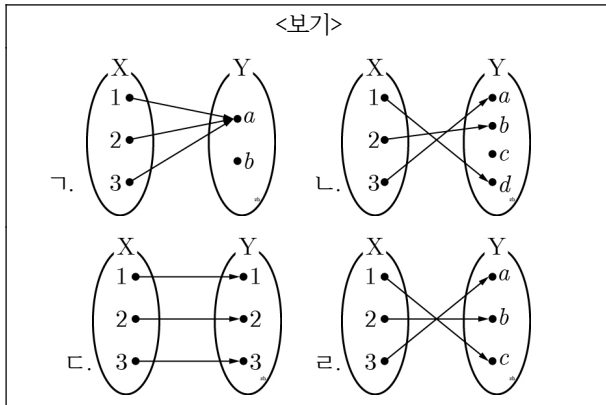
- 다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 일대일함
 수, 일대일대응을 모두 골라라.

| <보기> | | |
|-------------|--------------|-----------------|
| 가. $y = -x$ | 나. $y = 3$ | 다. $y = 2x - 1$ |
| 라. $y = x$ | 마. $y = x^2$ | 바. $y = 0$ |

5. 일대일함수

6. 일대일대응

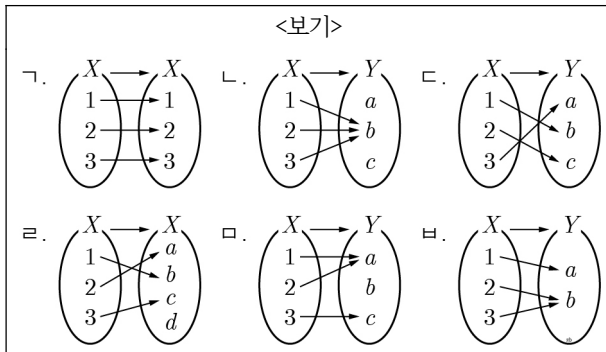
■ 다음 <보기> 중 해당하는 함수인 것만을 있는 대로 고르시오.



7. 일대일함수

8. 일대일대응

■ 다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 일대일함수, 일대일대응을 모두 골라라.



9. 일대일 함수

10. 일대일대응

■ 다음 함수의 그래프의 개형을 그려 보고, 일대일대응인 것에는 ○표, 아닌 것에는 ×표를 하여라.

11. $y = |x|$ ()

12. $y = -2x$ ()

13. $x = 4$ ()

14. $y = 2x^2 - 16x + 3$ ()

15. $y = 2$ ()

■ 다음 함수 중 일대일대응인 것을 찾고, 일대일대응이 아닌 것은 그 이유를 설명하여라.

16. $f(x) = x + 2$

17. $f(x) = x^2$

18. $f(x) = x^2 - 5$

19. $f(x) = 3x - 2$

20. $f(x) = 2$

■ 다음 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 가 일대일대응이 되도록 하는 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

21. $X = \{x | -1 \leq x \leq 2\}, Y = \{y | -3 \leq y \leq 3\}$

(1) $a > 0$ 일 때

(2) $a < 0$ 일 때

22. $X = \{x | -4 \leq x \leq 4\}, Y = \{y | 1 \leq y \leq 17\}$

(1) $a > 0$ 일 때

(2) $a < 0$ 일 때

■ 다음 두 집합 X, Y 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 집합 X 에서 집합 Y 로의 일대일대응이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

23. $X = \{x | x \geq k\}, Y = \{y | y \leq k - 2\}$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

24. $X = \{x | x \leq k\}, Y = \{y | y \geq k + 2\}$

$$f(x) = x^2 + 2x$$

25. $X = \{x | x \leq k\}, Y = \{y | y \geq k + 6\}$

$$f(x) = x^2 - 4x$$

26. $X = \{x | x \geq k\}, Y = \{y | y \leq 2k - 5\}$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1$$

■ 다음 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

27. $X = \{x | x \geq 3\}, Y = \{y | y \geq 2\}$

$$f(x) = x^2 - 2x + k$$

28. $X = \{x | x \geq 1\}, Y = \{y | y \leq 0\}$

$$f(x) = -x^2 - 2x + k$$

29. $X = \{x | x \geq 4\}, Y = \{y | y \geq 5\}$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + k$$

■ 다음 함수가 일대일 대응인지를 판단하고, 일대일 대응이 아닌 것은 그 이유를 설명하여라.

30. $f(x) = 3x + 1$

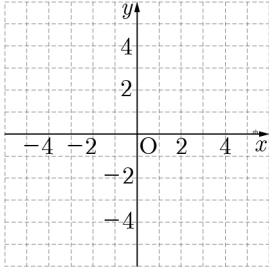
31. $f(x) = 2$

32. $f(x) = x^2 + 1$

33. $f(x) = x^3 - 1$

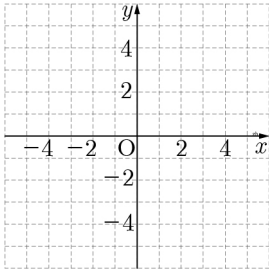
■ 다음 함수의 그래프를 그려 보고, 일대일 대응인 것에는 ○표, 일대일 대응이 아닌 것에는 ×표를 () 안에 써넣어라.

34. $y = 2x$



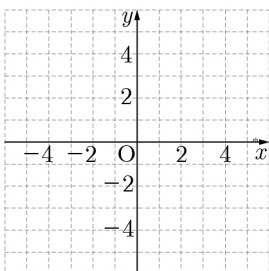
()

35. $y = (x-1)^2 + 1$



()

36. $y = \begin{cases} x+2 & (x \geq 0) \\ 2 & (x < 0) \end{cases}$



()

■ 실수 전체의 집합에서 정의된 다음 함수가 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

37. $f(x) = \begin{cases} -x-2 & (x \geq 0) \\ ax-2 & (x < 0) \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{3}{2} - a & (x \geq 1) \\ x + \frac{1}{2} & (x < 1) \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x-4 & (x \geq -1) \\ (a+2)x-3+a & (x < -1) \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+3-2a & (x \geq 2) \\ -x+3 & (x < 2) \end{cases}$

■ 집합 X 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

41. $X = \{x \mid x \geq 2\}$

$f(x) = x^2 + 2x + k$

42. $X = \{x \mid x \leq 2\}$

$f(x) = -x^2 + 6x + k$

■ 두 집합 $X = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$, $Y = \{y \mid -1 \leq y \leq 3\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a , b 의 값을 구하여라.

43. $a > 0$ 일 때

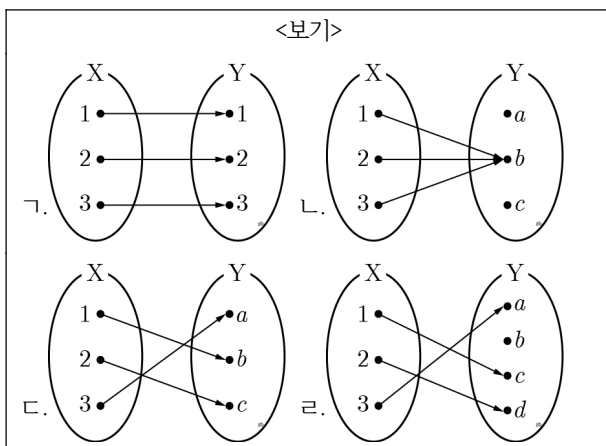
44. $a < 0$ 일 때

■ 두 집합 X , Y 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

45. $X = \{x \mid x \geq 3\}$, $Y = \{y \mid y \geq 2\}$
 $f(x) = x^2 - 4x + k$

46. $X = \{x \mid x \leq 0\}$, $Y = \{y \mid y \leq 2\}$
 $f(x) = -x^2 + 2x + k$

■ <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 다음 함수를 모두 골라라.



47. 일대일함수

48. 일대일 대응

■ 실수 전체의 집합에서 정의된 다음 함수가 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

49. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq 0) \\ ax-1 & (x < 0) \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} (a+1)x-4-3a & (x \geq 3) \\ -x+2 & (x < 3) \end{cases}$

■ 다음 두 집합에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

51. $X = \{x \mid x \geq 4\}$, $Y = \{y \mid y \geq 1\}$
 $f(x) = x^2 - 6x + k$

52. $X = \{x \mid x \geq -1\}$, $Y = \{y \mid y \leq 5\}$
 $f(x) = -x^2 - 4x + k$

■ 다음 두 집합에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$)가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a , b 의 값을 구하여라.

53. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

54. $X = \left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right\}$, $Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 5\}$

02 / 항등함수와 상수함수

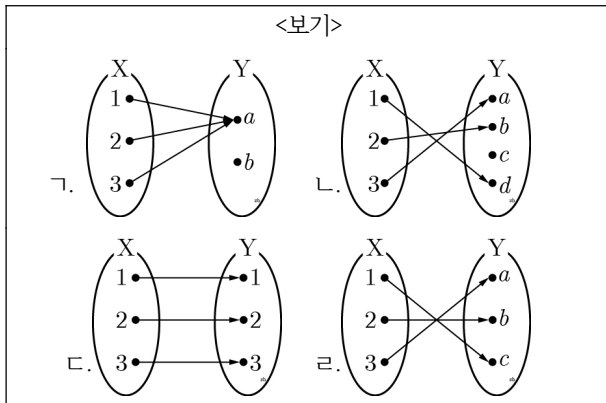
(1) 항등함수: 정의역과 공역이 같고, 정의역의 각 원소에 자기 자신이 대응하는 함수

$$\text{즉, } f: X \rightarrow X, f(x) = x \ (x \in X)$$

(2) 상수함수: 정의역의 모든 원소가 공역의 단 하나의 원소로만 대응하는 함수

$$\text{즉, } f: X \rightarrow Y, f(x) = c \ (x \in X, c \in Y, c \text{는 상수})$$

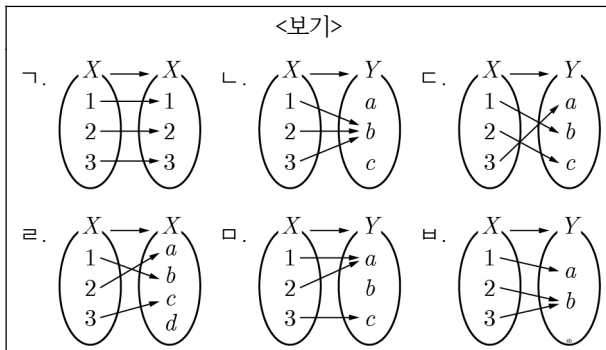
■ 다음 <보기> 중 해당하는 함수인 것만을 있는 대로 고르시오.



55. 항등함수

56. 상수함수

■ 다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 항등함수, 상수함수를 모두 골라라.



57. 항등함수

58. 상수함수

■ 다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 항등함수, 상수함수를 모두 골라라.

| <보기> | | |
|-------------|--------------|-----------------|
| ㉠. $y = -x$ | ㉡. $y = 3$ | ㉢. $y = 2x - 1$ |
| ㉣. $y = x$ | ㉤. $y = x^2$ | ㉥. $y = 0$ |

59. 항등함수

60. 상수함수

■ 집합 X 에서 집합 Y 로의 세 함수 f, g, h 는 각각 상수함수, 항등함수, 일대일대응일 때, 다음을 구하여라.

61. $X = \{0, 1, 2\}$

$$f(0) = g(2) = h(1), 2h(2) = h(0) + h(1) \text{ 일 때, } f(2) + g(1) + h(0) \text{의 값}$$

62. $X = \{-1, 0, 1\}$

$$f(0) = g(1) = h(-1), h(-1) + h(1) = h(0) \text{ 일 때, } f(0)g(-1)h(1) \text{의 값}$$

■ 집합 $X = \{-1, 1\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 X 로의 다음 함수 중 항등함수인 것은 '항등', 상수함수인 것은 '상수'를 () 안에 써넣어라.

63. $f(x) = x$ ()

64. $f(x) = x^3$ ()

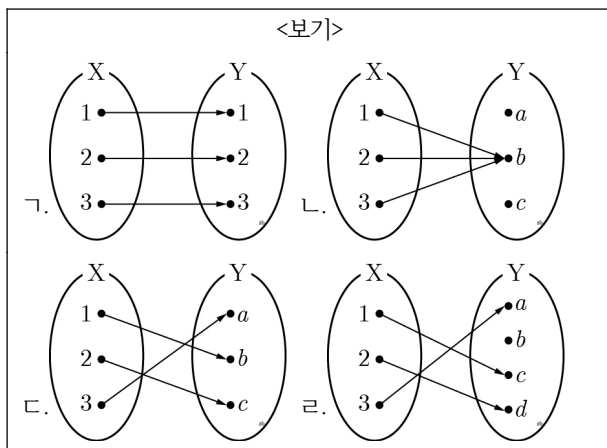
65. $f(x) = x^2$ ()

■ 집합 X 에서 집합 X 로의 세 함수 f, g, h 가 각각 상수함수, 항등함수, 일대일 대응일 때, 다음을 구하여라.

66. $X = \{0, 1, 2\}$
 $f(0) = g(2) = h(2), h(2) = 2h(0) + h(1)$ 일 때,
 $f(2) + g(1) + h(0)$ 의 값

67. $X = \{2, 3, 6\}$
 $f(3) = g(2) = h(6), h(6)h(3) = h(2)$ 일 때,
 $f(2) + g(6) + h(3)$ 의 값

■ <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 다음 함수를 모두 골라라.



68. 항등함수

69. 상수함수

03 함수의 개수

집합 X 의 원소가 m 개, 집합 Y 의 원소가 n 개일 때

(1) X 에서 Y 로의 함수의 개수

$$\Rightarrow n^m \text{ 개}$$

(2) X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) \text{ 개}$$

(단, $n \geq m$)

(3) X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \text{ 개 (단, } n=m)$$

70. 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

집합 X 의 원소의 개수가 m , 집합 Y 의 원소의 개수가 n 일 때,

(1) X 에서 Y 로의 함수의 개수 \rightarrow 개

(2) X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수 \rightarrow 개
 (단, $n \geq m$)

(3) X 에서 Y 로의 일대일대응의 개수 \rightarrow 개
 (단, $n = m$)

(4) X 에서 Y 로의 상수함수의 개수 \rightarrow 개

71. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 X 로의 함수 중 일대일대응의 개수를 l , 항등함수의 개수를 m , 상수함수의 개수를 n 이라고 할 때, $l + m + n$ 의 값을 구하여라.

72. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수를 l , 이 함수 중 상수함수의 개수를 m , 일대일함수의 개수를 n 이라고 할 때, $l + m + n$ 의 값을 구하여라.

73. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$,
 $Y = \{y \mid y \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\}$ 에 대하여 집합 X 에서
 집합 Y 로의 함수의 개수를 l , 상수함수의 개수를
 m , 일대일함수의 개수를 n 이라 할 때, $l+m+n$ 의
 값을 구하여라.

■ 집합 X 를 정의역으로 하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 함
 수 f 가 항등함수가 되도록 하는 집합 X 의 개수를 구
 하여라. (단, $X \neq \emptyset$)

74. $f(x) = x^2 - 12$

75. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

76. $f(x) = x^2 - 6$

■ 다음 집합 X 에서 집합 $Y = \{x+y \mid x \in X, y \in X\}$ 로의
 함수 중 상수함수의 개수를 구하여라.

77. $X = \{-1, 0, 1\}$

78. $X = \{-1, 1\}$

■ 다음 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로
 의 함수 중 일대일함수의 개수를 구하여라.

79. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

80. $X = \{a, b, c\}, Y = \{d, e, f, g, h\}$

81. $X = \{1, 2\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$

82. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c, d\}$

■ 다음 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로
 의 함수의 개수를 구하여라.

83. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c, d\}$

84. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3\}$

85. $X = \{1, 2\}, Y = \{a, b, c, d\}$

■ 다음 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로
 의 일대일 대응의 개수를 구하여라.

86. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}$

87. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$



정답 및 해설

1) ㄹ

⇒ 임의의 실수 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이면 그 함수는 일대일 대응이다. 따라서 일대일 대응인 것은 ㄹ뿐이다.

2) ㄱ, ㄴ

3) $a < -1$ 또는 $a > 1$

⇒ 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 증가함수일 때 $a-1 > 0$ 이고 $a+1 > 0$ 이므로 $a > 1$ (ii) 함수 $f(x)$ 가 감소함수일 때 $a-1 < 0$ 이고 $a+1 < 0$ 이므로 $a < -1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $a < -1$ 또는 $a > 1$

4) 5

⇒ $f(x)$ 는 증가함수이고,

이 함수가 일대일 대응이 되려면

 $f(1)=3$ 에서 $2+b=3$ ∴ $b=1$ $f(a)=9$ 에서 $2a+1=9$ ∴ $a=4$ ∴ $a+b=5$

5) ㄱ, ㄷ, ㄹ

6) ㄱ, ㄷ, ㄹ

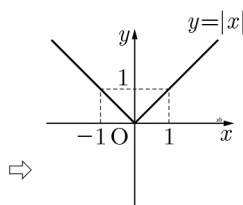
7) ㄴ, ㄷ, ㄹ

8) ㄷ, ㄹ

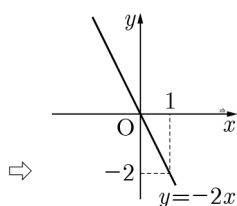
9) ㄱ, ㄷ, ㄹ

10) ㄱ, ㄷ

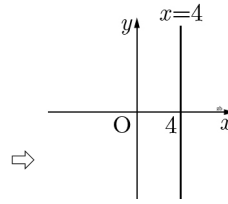
11) ×



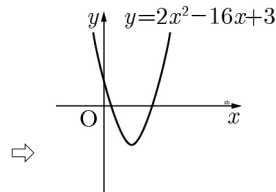
12) ○



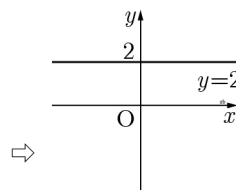
13) ×



14) ×



15) ×



16) 일대일대응

⇒ 함수 $f(x)=x+2$ 는 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$, 즉 $x_1+2=x_2+2$ 이면 $x_1=x_2$ 이다.

또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다. 따라서 이 함수는 일대일대응이다.

17) 일대일대응이 아니다.

⇒ 함수 $f(x)=x^2$ 은 $x_1=-1, x_2=1$ 일 때, $f(x_1)=f(-1)=1, f(x_2)=f(1)=1$

즉, $x_1 \neq x_2$ 이지만 $f(x_1)=f(x_2)$ 인두 실수 x_1, x_2 가 존재한다.

따라서 이 함수는 일대일대응이 아니다.

18) 일대일대응이 아니다.

⇒ 함수 $f(x)=x^2-5$ 는 $x_1=-1, x_2=1$ 일 때, $f(x_1)=f(-1)=-4, f(x_2)=f(1)=-4$

즉, $x_1 \neq x_2$ 이지만 $f(x_1)=f(x_2)$ 인두 실수 x_1, x_2 가 존재한다.

따라서 이 함수는 일대일대응이 아니다.

19) 일대일대응

⇒ 함수 $f(x)=3x-2$ 는 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$, 즉 $3x_1-2=3x_2-2$ 이면 $x_1=x_2$ 이다.

또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다. 따라서 이 함수는 일대일대응이다.

20) 일대일대응이 아니다.

⇒ 함수 $f(x)=2$ 는 $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$f(x_1) = f(x_2) = 2$ 이므로 일대일대응이 아니다.

21) (1) $a=2, b=-1$ (2) $a=-2, b=1$

\Rightarrow (1) $a > 0$ 이므로 x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

이 함수가 일대일대응이 되려면

$$f(-1) = -3, f(2) = 3$$

$$-a+b = -3, 2a+b = 3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

(2) $a < 0$ 이므로 x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값은 감소한다.

이 함수가 일대일대응이 되려면

$$f(-1) = 3, f(2) = -3$$

$$-a+b = 3, 2a+b = -3$$

$$\therefore a=-2, b=1$$

22) (1) $a=2, b=9$ (2) $a=-2, b=9$

\Rightarrow (1) $a > 0$ 이므로 x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

이 함수가 일대일대응이 되려면

$$f(-4) = 1, f(4) = 17$$

$$-4a+b = 1, 4a+b = 17$$

$$\therefore a=2, b=9$$

(2) $a < 0$ 이므로 x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값은 감소한다.

이 함수가 일대일대응이 되려면

$$f(-4) = 17, f(4) = 1$$

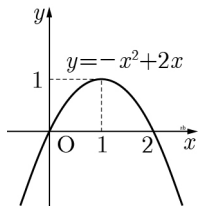
$$-4a+b = 17, 4a+b = 1$$

$$\therefore a=-2, b=9$$

23) 2

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \text{이므로}$$

그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 가 집합 X 에서 집합 Y 로의 일대일대응이 되려면 $k \geq 1$ 이어야 한다.

$$f(k) = k-2$$

$$-k^2 + 2k = k-2 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k+1)(k-2) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k \geq 1$ 이어야 하므로 $k = 2$

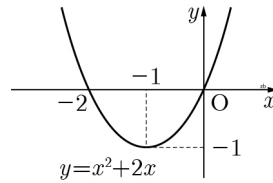
24) -2

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \text{이므로}$$

그래프는 다음과 같다.

함수 $f(x)$ 가 집합 X 에서 집합 Y 로의

일대일대응이 되려면 $k \leq -1$ 이어야 한다.



$$f(k) = k+2$$

$$k^2 + 2k = k+2 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

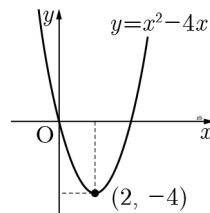
$$(k+2)(k-1) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

그런데 $k \leq -1$ 이어야 하므로 $k = -2$

25) -1

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \text{이므로}$$

그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 가 집합 X 에서 집합 Y 로의 일대일대응이 되려면 $k \leq 2$ 이어야 한다.

$$f(k) = k+6, k^2 - 4k = k+6$$

$$k^2 - 5k - 6 = 0$$

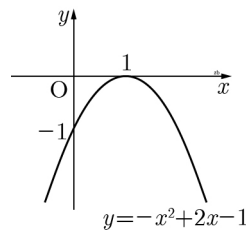
$$(k-6)(k+1) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 6$$

그런데 $k \leq 2$ 이어야 하므로 $k = -1$

26) 2

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \text{이므로}$$

그래프는 다음과 같다. 함수 $f(x)$ 가 집합 X 에서 집합 Y 로의 일대일대응이 되려면 $k \geq 1$ 이어야 한다.



$$f(k) = 2k-5$$

$$-k^2 + 2k - 1 = 2k - 5 \Rightarrow k^2 = 4$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k \geq 1$ 이어야 하므로 $k = 2$

27) -1

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + k = (x-1)^2 + k - 1 \text{이므로}$$

$x \geq 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 f 가 일대일대응이 되려면

$$f(3) = 2 \text{이어야 하므로 } 3^2 - 2 \cdot 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1$$

28) 3

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x + k = -(x+1)^2 + k + 1 \text{이므로}$$

$x \geq 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면
 $f(x)$ 의 값은 감소한다.
 따라서 함수 f 가 일대일대응이 되려면
 $f(1)=0$ 이어야 하므로 $-1-2+k=0 \quad \therefore k=3$

29) -11

$\Rightarrow f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$ 이므로
 $x \geq 4$ 일 때, x 의 값이 증가하면
 $f(x)$ 의 값도 증가한다.
 따라서 함수 f 가 일대일대응이 되려면
 $f(4)=5$ 이어야 하므로 $2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + k = 5$
 $\therefore k = -11$

30) 일대일 대응이다.

\Rightarrow 함수 $f(x)=3x+1$ 은 임의의
 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$,
 즉, $3x_1+1=3x_2+1$ 이면 $x_1=x_2$ 이다.
 또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다.
 따라서 이 함수는 일대일 대응이다.

31) 일대일 대응이 아니다.

\Rightarrow 함수 $f(x)=2$ 는 $x_1=0, x_2=1$ 일 때,
 $f(x_1)=f(0)=2, f(x_2)=f(1)=2$
 즉, $x_1 \neq x_2$ 이지만 $f(x_1)=f(x_2)$ 인
 두 실수 x_1, x_2 가 존재한다.
 따라서 이 함수는 일대일 대응이 아니다.

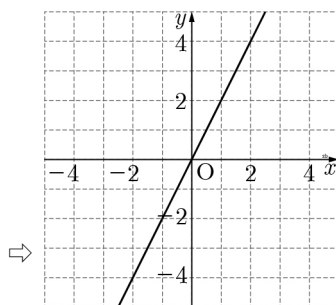
32) 일대일 대응이 아니다.

\Rightarrow 함수 $f(x)=x^2+1$ 은 $x_1=-1, x_2=1$ 일 때,
 $(x_1)=f(-1)=2, f(x_2)=f(1)=2$
 즉, $x_1 \neq x_2$ 이지만 $f(x_1)=f(x_2)$ 인
 두 실수 x_1, x_2 가 존재한다.
 따라서 이 함수는 일대일 대응이 아니다.

33) 일대일 대응이다.

\Rightarrow 함수 $f(x)=x^3-1$ 은
 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$
 즉, $x_1^3-1=x_2^3-1$ 이면 $x_1=x_2$ 이다.
 또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다.
 따라서 이 함수는 일대일 대응이다.

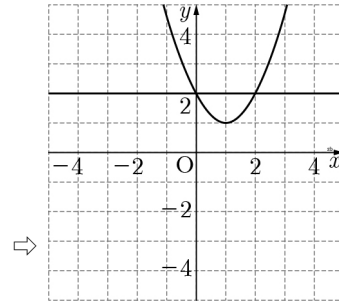
34) ○



\Rightarrow x 축에 평행한 직선을 그으면 항상 한 점에서

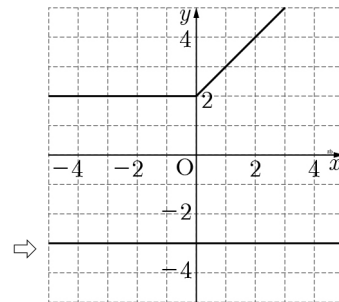
만나므로 일대일 대응이다.

35) ×



\Rightarrow x 축에 평행한 직선 $y=2$ 를 그으면 교점이 2개이므로 일대일 대응이 아니다.

36) ×



\Rightarrow x 축에 평행한 직선 $y=-3$ 을 그으면 교점이 없으므로 일대일 대응이 아니다.

37) $a < 0$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면
 $x \geq 0$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때,
 $f(x)$ 의 값이 감소하므로
 $x < 0$ 인 범위에서도 x 와 값이 증가할 때
 $f(x)$ 의 값이 감소하여야 한다.
 $\therefore a < 0$

38) $a > 0$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면
 $x < 1$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때
 $f(x)$ 의 값이 증가하므로 $x \geq 1$ 인 범위에서도
 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값이 증가하여야 한다.
 $\therefore a > 0$

39) $a > -2$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면
 $x \geq -1$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때
 $f(x)$ 의 값이 증가하므로 $x < -1$ 인 범위에서도
 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값이 증가하여야 한다.
 $a+2 > 0 \quad \therefore a > -2$

40) $a < 1$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면
 $x < 2$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때
 $f(x)$ 의 값이 감소하므로 $x \geq 2$ 인 범위에서도
 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값이 감소하여야 한다.

$$a-1 < 0 \quad \therefore a < 1$$

41) -6

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + k = (x+1)^2 + k - 1 \text{이므로}$$

$x \geq 2$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$f(2) = 2$ 이어야 하므로

$$2^2 + 2 \cdot 2 + k = 2 \quad \therefore k = -6$$

42) -6

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 6x + k = -(x-3)^2 + k + 9 \text{이므로}$$

$x \leq 2$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$f(2) = 2$ 이어야 하므로

$$-2^2 + 6 \cdot 2 + k = 2 \quad \therefore k = -6$$

43) $a = 4, b = -9$

$\Rightarrow a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가함수이고,

이 함수가 일대일 대응이 되려면

$$f(2) = -1 \text{에서 } 2a + b = -2$$

$$f(3) = 3 \text{에서 } 3a + b = 3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 4, b = -9$

44) $a = -4, b = 11$

$\Rightarrow a < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소함수이고,

이 함수가 일대일 대응이 되려면

$$f(2) = 3 \text{에서 } 2a + b = 3$$

$$f(3) = -1 \text{에서 } 3a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -4, b = 11$

45) 5

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4 \text{이므로}$$

$x \geq 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$f(3) = 2$ 이어야 하므로

$$3^2 - 4 \cdot 3 + k = 2 \quad \therefore k = 5$$

46) 2

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1 \text{이므로}$$

$x \leq 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$f(0) = 2$ 이어야 하므로 $k = 2$

47) ㄱ, ㄷ, ㄹ

48) ㄱ, ㄷ

49) $a > 0$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$x \geq 0$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때

$f(x)$ 의 값이 증가하므로 $x < 0$ 인 범위에서도

x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값이 증가하여야 한다.

$$\therefore a > 0$$

50) $a < -1$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$x < 3$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때

$f(x)$ 의 값이 감소하므로 $x \geq 3$ 인 범위에서도

x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값이 감소하여야 한다.

$$a+1 < 0 \quad \therefore a < -1$$

51) 9

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 6x + k = (x-3)^2 + k - 9 \text{이므로}$$

$x \geq 4$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$$f(4) = 1 \text{이어야 하므로 } -8 + k = 1 \quad \therefore k = 9$$

52) 2

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 4x + k = -(x+2)^2 + k + 4 \text{이므로}$$

$x \geq -1$ 일 때, x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면

$$f(-1) = 5 \text{이어야 하므로 } k + 3 = 5 \quad \therefore k = 2$$

$$53) a = \frac{1}{2}, b = 3$$

$\Rightarrow a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가함수이고,

이 함수가 일대일 대응이 되려면

$$f(-2) = 2 \text{에서 } -2a + b = 2$$

$$f(2) = 4 \text{에서 } 2a + b = 4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, b = 3$

54) $a = 2, b = -1$

$\Rightarrow a > 0$ 이 되려면 함수 $f(x)$ 는 증가함수이고,

이 함수가 일대일 대응이 되려면

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \text{에서 } -\frac{1}{2}a + b = -2$$

$$f(3) = 5 \text{에서 } 3a + b = 5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -1$

55) ㄷ

56) ㄱ

57) ㄱ

58) ㄴ

59) ㄹ

60) ㄴ, ㄹ

61) 3

\Rightarrow 함수 g 는 항등함수이므로 $g(x) = \boxed{x}$ 이고 $g(2) = 2$

$$\therefore f(0) = g(2) = h(1) = 2$$

함수 f 는 상수함수이므로 $f(x) = \boxed{2}$

함수 h 는 일대일대응이고, $h(1) = 2$ 이므로

$2h(2) = h(0) + h(1)$ 을 만족하려면

$h(0) = 0$, $h(2) = \boxed{1}$ 이 되어야 한다.

$$\therefore f(2) + g(1) + h(0) = 2 + 1 + 0 = \boxed{3}$$

62) 1

\Rightarrow 함수 g 는 항등함수이므로 $g(x) = x$ 이고, $g(1) = 1$

$$\therefore f(0) = g(1) = h(-1) = 1$$

따라서 함수 f 는 상수함수이므로 $f(x) = 1$

함수 h 는 일대일대응이고, $h(-1) = 1$ 이므로

$h(-1) + h(1) = h(0)$ 을 만족하려면

$$h(0) = 0, h(1) = -1$$

$$\therefore f(0)g(-1)h(1) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$$

63) 항등

$\Rightarrow f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.

64) 항등

$\Rightarrow f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.

65) 상수

$\Rightarrow f(-1) = 1$, $f(1) = 1$ 이므로 상수함수이다.

66) 4

$\Rightarrow g(x)$ 는 항등함수이므로 $g(2) = 2$

$f(x)$ 는 상수함수이고 $f(0) = g(2)$ 이므로 $f(x) = 2$

$h(x)$ 는 일대일 대응이고, $h(2) = 2$ 이므로

$h(2) = 2h(0) + h(1)$ 을 만족하려면

$$h(0) = 1, h(1) = 0$$

$$\therefore f(2) + g(1) + h(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

67) 11

$\Rightarrow g(x)$ 는 항등함수이므로 $g(2) = 2$

$f(x)$ 는 상수함수이고 $f(3) = g(2)$ 이므로 $f(x) = 2$

$h(x)$ 는 일대일 대응이고, $h(6) = 2$ 이므로

$h(6)h(3) = h(2)$ 를 만족하려면

$$h(3) = 3, h(2) = 6$$

$$\therefore f(2) + g(6) + h(3) = 2 + 6 + 3 = 11$$

68) \neg

69) \perp

$$70) (1) n^m \quad (2) n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

$$(3) n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \quad (4) n$$

71) 10

\Rightarrow 주어진 대응을 함수 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 2개

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는 $l = 3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$

항등함수의 개수는 $m = 1(\text{개})$

상수함수의 개수는 $n = 3(\text{개})$

$$\therefore l + m + n = 10(\text{개})$$

72) 92

\Rightarrow 함수의 개수 : $l = 4^3 = 64(\text{개})$

상수함수의 개수 : $m = 4(\text{개})$

일대일함수의 개수 : $n = 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

$$\therefore l + m + n = 92$$

73) 342

\Rightarrow 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

(i) f 가 함수일 때,

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개이므로 함수의 개수는

$$l = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216(\text{개})$$

(ii) 상수함수의 개수는 $m = 6(\text{개})$

(iii) f 가 일대일함수일 때,

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 5개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 4개이므로

일대일함수의 개수는 $n = 6 \times 5 \times 4 = 120(\text{개})$

$$\therefore l + m + n = 216 + 6 + 120 = 342$$

74) 3

$\Rightarrow f(x)$ 가 항등함수이어야 하므로 $f(x) = x^2 - 12 = x$
 $x^2 - x - 12 = 0$, $(x+3)(x-4) = 0$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 구하는 집합 X 는

$\{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}$ 의 3개다.

75) 7

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$f(x)$ 가 항등함수이어야 하므로

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2 = x$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 집합 X 는

$\{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{-1, 1\}$,

$\{-1, 2\}, \{1, 2\}, \{-1, 1, 2\}$ 의 7개다.

76) 3

$\Rightarrow f(x)$ 가 항등함수이어야 하므로

$$f(x) = x^2 - 6 = x$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 구하는 집합 X 는

$\{-2\}, \{3\}, \{-2, 3\}$ 의 3개다.

77) 5

$\Rightarrow X = \{-1, 0, 1\}$ 이므로

$$(-1) + (-1) = -2, (-1) + 0 = -1, (-1) + 1 = 0$$

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2$$

$$\therefore Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

따라서 구하는 상수함수는 5개다.

78) 3

$\Rightarrow X = \{-1, 1\}$ 이므로

$$(-1) + (-1) = -2, (-1) + 1 = 0, 1 + 1 = 2$$

$$\therefore Y = \{-2, 0, 2\}$$

따라서 구하는 상수함수는 3개다.

79) 360

\Rightarrow 주어진 대응을 함수 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 5개

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 4개

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 3개

따라서 구하는 일대일함수의 개수는

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360(\text{개})\text{이다.}$$

80) 60

$\Rightarrow f(a)$ 가 될 수 있는 것은 d, e, f, g, h 의 5개

$f(b)$ 가 될 수 있는 것은 $f(a)$ 를 제외한 4개

$f(c)$ 가 될 수 있는 것은 $f(a), f(b)$ 를 제외한 3개

따라서 구하는 일대일함수의 개수는

$$5 \times 4 \times 3 = 60(\text{개})\text{이다.}$$

81) 12개

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개,

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 3개이므로

일대일함수의 개수는 $4 \times 3 = 12(\text{개})$

82) 24

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 의 4개,

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 3개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 2개이므로

일대일 함수의 개수는 $4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

83) 64

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 의 4개,

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 의 4개

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

a, b, c, d 의 4개이므로 함수의 개수는

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$$

84) 81개

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개.

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개이므로

함수의 개수는 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81(\text{개})$

85) 16개

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 의 4개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

a, b, c, d 의 4개이므로 함수의 개수는

$$4 \times 4 = 4^2 = 16(\text{개})$$

86) 6개

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c 의 3개,

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 2개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 1개이므로

일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$

87) 24개

\Rightarrow 주어진 함수를 $f: X \rightarrow Y$ 라고 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개,

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1)$ 의 값을 제외한 3개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 2개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 1개이므로

일대일 대응의 개수는 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24(\text{개})$