

개념

등비수열의 합

유형 117

1

첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$(i) r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \leftarrow n \text{은 항의 개수이다.}$$

$$(ii) r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

설명 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 등비수열의 공비 r 를 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 번끼리 빼면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -) \quad rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = a \qquad \qquad \qquad -ar^n \end{array}$$

$$(i) r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(ii) r = 1 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{에서 } S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{개}} = na$$

CHECK

첫째항이 50이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 5항까지의 합 S_5 의 값을 구하시오.

풀이 $S_5 = \frac{5 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} = 5 \times 31 = 155$

개념 2

원리합계

유형 121

원금 a 를 연(월)이율 r 로 n 년(월) 동안 예금할 때, 원리합계를 S_n 이라 하면

$$(1) \text{ 단리로 예금할 때, } S_n = a(1+rn)$$

$$(2) \text{ 복리로 예금할 때, } S_n = a(1+r)^n$$

tip 원리합계란 원금과 이자를 합한 금액을 말한다.

설명 원금 a 를 연이율 r 로 예금할 때, 원리합계를 구하면 다음과 같다.

단리로 예금하는 경우	복리로 예금하는 경우
1년 후 $\Rightarrow a + ar = a(1+r)$	1년 후 $\Rightarrow a + ar = a(1+r)$
2년 후 $\Rightarrow a + ar + ar = a(1+2r)$	2년 후 $\Rightarrow a(1+r) + a(1+r)r = a(1+r)(1+r) = a(1+r)^2$
3년 후 $\Rightarrow a + ar + ar + ar = a(1+3r)$	3년 후 $\Rightarrow a(1+r)^2 + a(1+r)^2r = a(1+r)^2(1+r) = a(1+r)^3$
\vdots	\vdots
n 년 후 $\Rightarrow a + ar + ar + \cdots + ar = a(1+nr)$	n 년 후 $\Rightarrow a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-1}r = a(1+r)^{n-1}(1+r) = a(1+r)^n$
첫째항이 $a(1+r)$, 공차가 ar 인 등차수열	첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $(1+r)$ 인 등비수열

예 원금 100만 원을 연이율 10%로 10년 동안 예금할 때의 원리합계를 구해 보자. (단, $1.1^{10} = 2.6$ 으로 계산한다.)

$$(i) \text{ 단리로 예금하는 경우 : } 100(1+0.1 \times 10) = 100 \times 2 = 200 \text{ (만 원)}$$

$$(ii) \text{ 복리로 예금하는 경우 : } 100(1+0.1)^{10} = 100 \times 1.1^{10} = 100 \times 2.6 = 260 \text{ (만 원)}$$

따라서 같은 금액에 같은 이율로 예금한다면 단리로 예금했을 때보다 복리로 예금했을 때 이자가 더 많이 붙음을 알 수 있다.

원금 a 원을 연이율 r 의 복리로 n 년 동안 적립할 때, n 년 말의 원리합계를 S_n 이라 하면

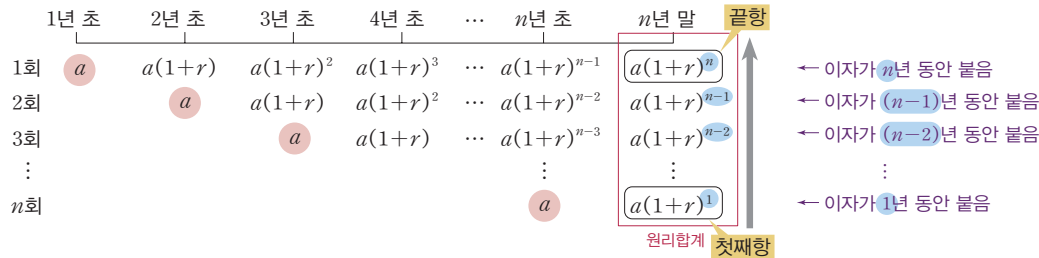
(1) 매년 초에 적립할 때, n 년 말의 원리합계는

$$S_n = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)} \quad \leftarrow \text{첫째항: } a(1+r), \text{ 공비: } 1+r$$

(2) 매년 말에 적립할 때, n 년 말의 원리합계는

$$S_n = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)} \quad \leftarrow \text{첫째항: } a, \text{ 공비: } 1+r$$

설명 (1) 연이율 r 의 복리로 매년 초 a 원씩 n 년 동안 적립할 때, n 년 말의 원리합계를 구하면 다음과 같다.

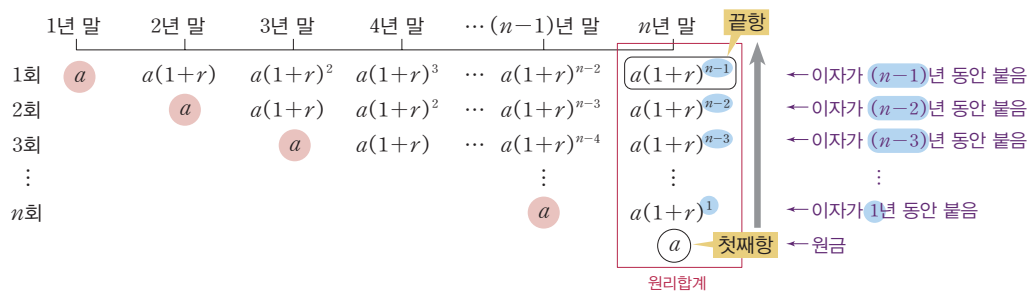


따라서 구하는 원리합계 S_n 은

$$S_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \dots + a(1+r)^n \quad \leftarrow \text{첫째항이 } a(1+r), \text{ 공비가 } 1+r \text{인 등비수열의}$$

$$= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)} \quad \leftarrow \text{첫째항부터 제 } n \text{항까지의 합}$$

(2) 연이율 r 의 복리로 매년 말 a 원씩 n 년 동안 적립할 때, n 년 말의 원리합계를 구하면 다음과 같다.



따라서 구하는 원리합계 S_n 은

$$S_n = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^{n-1} \quad \leftarrow \text{첫째항이 } a, \text{ 공비가 } 1+r \text{인 등비수열의}$$

$$= \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)} \quad \leftarrow \text{첫째항부터 제 } n \text{항까지의 합}$$

CHECK

연이율 5%의 복리로 매년 말 50만 원씩 4년 동안 적립할 때, 4년 말의 원리합계를 구하시오. (단, $1.05^4 = 1.22$ 로 계산한다.)

회차	1년 말	2년 말	3년 말	4년 말 (단위: 만 원)
1회	50	$50(1+0.05)$	$50(1+0.05)^2$	$50(1+0.05)^3$
2회		50	$50(1+0.05)$	$50(1+0.05)^2$
3회			50	$50(1+0.05)$
4회				50

원리합계

매년 말 50만 원씩 4년 동안 적립할 때, 4년 말의 적립금의 원리합계는

$$50 + 50(1+0.05) + 50(1+0.05)^2 + 50(1+0.05)^3 = 50 + 50 \times 1.05 + 50 \times 1.05^2 + 50 \times 1.05^3$$

$$= \frac{50(1.05^4 - 1)}{1.05 - 1} = \frac{50 \times (1.22 - 1)}{0.05} = 220 \text{ (만 원)}$$

연이율이 4 %이고 1년마다 복리로 매년 초 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말의 적립금의 원리합계를 구 하시오. (단, $1.04^{10}=1.5$ 로 계산한다.)

풀이	1년 초	2년 초	3년 초	4년 초	...	10년 초	10년 말 (단위:만 원)
1회	100	$100(1+0.04)$	$100(1+0.04)^2$	$100(1+0.04)^3$...	$100(1+0.04)^9$	$100(1+0.04)^{10}$
2회		100	$100(1+0.04)$	$100(1+0.04)^2$...	$100(1+0.04)^8$	$100(1+0.04)^9$
3회			100	$100(1+0.04)$...	$100(1+0.04)^7$	$100(1+0.04)^8$
⋮				⋮		⋮	⋮
10회						100	$100(1+0.04)$

원리합계

따라서 연이율 4 %로 매년 초 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned}
 & 100(1+0.04) + 100(1+0.04)^2 + 100(1+0.04)^3 + \cdots + 100(1+0.04)^{10} \\
 &= 100 \times 1.04 + 100 \times 1.04^2 + 100 \times 1.04^3 + \cdots + 100 \times 1.04^{10} \quad \leftarrow \text{첫째항 : } 100 \times 1.04 \\
 &= \frac{100 \times 1.04 \times (1.04^{10} - 1)}{1.04 - 1} \quad \text{공비 : } 1.04 \\
 &= \frac{100 \times 1.04 \times (1.5 - 1)}{0.04} \\
 &= 1300(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

정답과 풀이 78쪽

체크 333

월이율 5 %의 복리로 매월 초 20만 원씩 12개월 동안 적립할 때, 12개월 말의 적립금의 원리합계를 구 하시오. (단, $1.05^{12}=1.8$ 로 계산한다.)

체크 334

채윤이의 부모님이 노후 생활을 위하여 2018년부터 2030년까지 매년 말에 500만 원씩 적립하려고 한다. 연이율은 4 %이고 1년마다 복리로 계산할 때, 2030년 말의 적립금의 원리합계를 구 하시오. (단, $1.04^{13}=1.7$ 로 계산한다.)