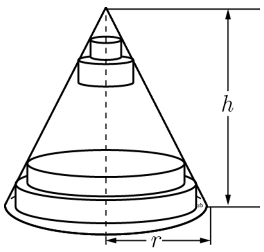
01 입체도형의 부피

닫힌구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 입체도형의 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 이 입체도형의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)dx$

(단, $S(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속)

1. **다음은 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피를 구분구적법을 이용하여 구하는 과정이다.**

원뿔의 높이를 n등분하고, 각 등분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 잘라 다음 그림과 같이 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다.



이때, 각 원기둥의 높이는 $\boxed{\text{(가)}}$이고, 각 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하면 위에서부터 차례로 $\frac{r}{n}$, $\frac{2r}{n}$, $\frac{3r}{n}$, $\cdots$, $\boxed{\text{(나)}}$이므로 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라 하면

$V_n=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\boxed{\text{(다)}}$이다.

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{1}{3}\pi r^2 h$이다.

(가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 식을 써라.

2. **다음은 밑면의 넓이가 A, 높이가 h인 사각뿔의 부피 V를 정적분을 이용하여 구하는 과정이다.**

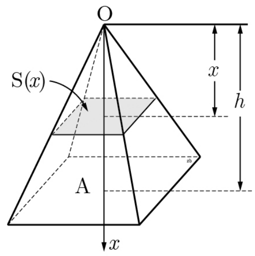
그림과 같이 사각뿔의 꼭짓점을 O라 하고 수선을 x축이라 한다. 꼭짓점 O로부터의 거리가 x인 점에서 밑면에 평행인 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x):A=x^2:h^2$　　$\therefore S(x)=\boxed{\text{(가)}}$

따라서 구하는 부피 V는

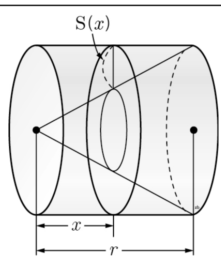
$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \boxed{\text{(나)}}dx$

$=\frac{A}{h^2}\left[\boxed{\text{(다)}}\right]_0^h=\boxed{\text{(라)}}$



(가), (나), (다), (라) 에 알맞은 식을 써라.

3. **다음 그림과 같이 반지름의 길이와 높이가 모두 r인 원기둥에서 밑면의 반지름의 길이와 높이가 모두 r인 원뿔을 뺀 입체도형의 부피를 구하는 과정이다.**



그림과 같이 x좌표가 x인 점을 지나고 밑면과 평행한 평면으로 주어진 입체를 자른 단면은 반지름의 길이가 r인 원에서 반지름의 길이가 x인 원을 뺀 도형이다.

따라서 구하는 단면의 넓이 $S(x)$는

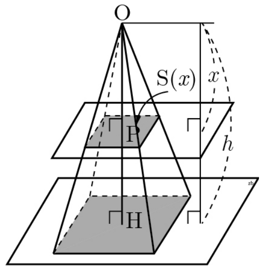
$S(x)=\boxed{\text{(가)}}$

$0\le x\le\boxed{\text{(나)}}$이므로 주어진 입체도형의 부피는

$V=\int_0^{(나)} S(x)dx=\pi\left[\boxed{\text{(다)}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\boxed{(나)}}=\frac{2}{3}\pi r^3$

(가), (나), (다)에 알맞은 식을 써라.

4. **다음은 밑넓이가 A이고 높이가 h인 사각뿔의 부피를 정적분을 이용하여 구하는 과정이다.**



사각뿔의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 점 O로부터의 거리가 x인 점 P에서 내린 수선 OH에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x):A=$ (가)

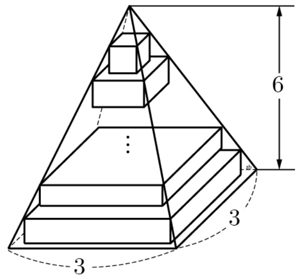
즉, $S(x)=$ (나)

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h (\text{나})\,dx=\frac{1}{3}Ah$$

(가), (나)에 알맞은 식을 써라.

5. **다음은 밑면의 한 변의 길이가 3, 높이가 6인 정사각뿔의 부피를 구분구적법을 이용하여 구하는 과정이다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+2b-c$의 값을 구하여라.**



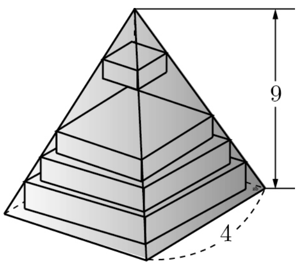
위 그림과 같이 정사각뿔의 높이를 n등분하여 $(n-1)$개의 정사각기둥을 만들면, 각 단면의 정사각형의 한 변의 길이는 위에서부터 차례대로

$\frac{a}{n}$, $\frac{2a}{n}$, $\cdots$, $\frac{(n-1)a}{n}$이고,

높이는 $\frac{b}{n}$이므로 $(n-1)$개의 정사각기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면 $V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{ak}{n}\right)^2\frac{b}{n}$

따라서 구하는 정사각뿔의 부피 V는 $V=\lim_{n\to\infty}V_n=c$

6. **밑변이 한 변의 길이가 4인 정사각형이고, 높이가 9인 정사각뿔의 부피를 구분구적법으로 구하는 과정이다.**



정사각뿔의 높이를 n등분하여 각 분점을 지나고 밑면과 평행한 평면으로 사각뿔을 잘라 각 단면을 밑면으로 하는 $(n-1)$개의 사각기둥을 만든다. 이때, 각 사각기둥의 높이는 $\frac{9}{n}$이고 밑면의 한 변의 길이는 위에서부터 차례로

$\frac{4}{n}$, $\frac{8}{n}$, $\frac{12}{n}$, $\cdots$, $\boxed{(\text{가})}$이므로

사각기둥의 합을 V_n이라 하면

$$V_n=\left(\frac{4}{n}\right)^2\frac{9}{n}+\left(\frac{8}{n}\right)^2\frac{9}{n}+\cdots+\left(\boxed{(\text{가})}\right)^2\frac{9}{n}$$

$$=\boxed{(\text{나})}\cdot\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$

$$=\boxed{(\text{나})}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

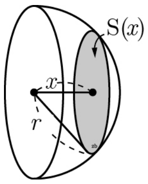
$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{(\text{나})}\cdot\boxed{(\text{다})}$$

$$=48$$

(가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(5)h(3)}{g(3)}$의 값을 구하여라.

7. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 반구를 밑면과 평행하고 밑면에서 x만큼 떨어진 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 할 때 다음 물음에 답하시오.



(1) 단면의 넓이 $S(x)$를 r와 x의 식으로 나타내시오.

(2) 반구의 부피를 정적분으로 나타내시오.

(3) (2)의 결과를 이용하여 구의 부피를 나타내시오.

◪ 다음 물음에 답하여라.

8. 어떤 용기에 깊이가 xcm가 되도록 물을 넣으면 그 때의 수면의 넓이는 $(x+1)^2cm^2$라 한다. 물의 깊이가 $6cm$일 때, 물의 부피를 구하시오.

9. 어떤 입체도형을 밑면과 평행이 되게 높이 x에서 자른 단면은 반지름의 길이가 $(2e^x+1)$인 원이다. 밑면에서 높이 3까지의 이 입체도형의 부피를 구하여라.

10. 어떤 입체도형을 밑면으로부터 높이가 x인 곳에서 밑면과 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{4-x}$인 정삼각형이다. 이 입체도형의 높이가 2일 때의 부피를 구하여라.

11. 높이가 $\frac{\pi}{3}$인 입체도형을 밑면으로부터 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 $3\tan x$인 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

12. 높이가 $10cm$인 용기를 높이가 $x\,cm$인 지점에서 밑면에 평행하게 자를 때 생기는 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{20-x}\,cm$인 정사각형이다. 이 입체의 부피를 구하여라.

13. 높이가 $e-1$인 그릇이 있다. 그릇에 담긴 물의 길이가 x일 때, 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\ln(x+1)}$인 정사각형이다. 이 그릇의 부피를 구하여라.

14. 곡선 $2\sqrt{\sin x}$ $(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 도형으로 자른 단면이 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

15. 높이가 $4cm$인 그릇이 있다. 밑면으로부터의 높이가 xcm인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $(e^{2x}+x+2)cm^2$일 때, 이 그릇의 부피를 구하시오.

16. 어떤 그릇에 물을 부었더니, 물의 깊이가 $x\text{cm}\ \ (0 \le x \le \pi)$일 때의, 수면의 넓이가 $x\sin x\text{cm}^2$라고 한다. 물의 깊이가 πcm일 때, 이 그릇에 담긴 물의 부피를 구하여라.

17. 어떤 그릇에 물을 채우는데 그릇에 채워진 물의 높이가 $x\,\text{cm}$일 때 수면의 넓이는 $3\sqrt{2x+1}\,\text{cm}^2$라고 한다. 물의 높이가 4cm일 때, 이 그릇에 채워진 물의 부피를 구하여라.

18. 곡선 $y=-x^2+2$와 x축으로 둘러싸인 도형이 있다. 이 도형을 밑면으로 하는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

19. 어떤 그릇에 물을 부었더니, 물의 깊이가 $x\text{cm}$일 때, 수면의 넓이가 $\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}\text{cm}^2$라고 한다. 물의 깊이가 6cm일 때, 이 그릇에 담긴 물의 부피를 구하여라.

20. 어떤 입체도형의 높이가 x인 곳에서 밑면과 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이 $S(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$이다. 이 입체도형의 높이가 $\ln 5$일 때, 입체도형의 부피를 구하여라. (단, e는 자연로그의 밑이다.)

21. 어떤 용기에 담긴 물의 깊이가 $x\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}\right)$일 때, 수면은 반지름의 길이가 $\sec x$인 원이라고 한다. 물의 깊이가 $\dfrac{\pi}{3}$일 때, 용기에 담긴 물의 부피를 구하여라.

22. 높이가 3인 입체도형을 밑면으로부터 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 $\sqrt{xe^x}$인 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

23. 구간 $[0, 15]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 잘랐을 때, 자른 단면의 넓이가 $(\cos \pi x+4)$이다. 이 입체도형의 부피를 구하여라.

24. 곡선 $y=\cos x\ \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체가 있다. 이 입체를 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 항상 정삼각형일 때, 이 입체의 부피를 구하여라.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

25. 곡선 $y=\tan x\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양이 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

26. 구간 $[0,10]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 잘랐을 때, 자른 단면의 넓이가 (e^x+x)이다. 이 입체도형의 부피를 구하여라.

27. 곡선 $y=\sin x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체도형의 부피를 구하여라.

28. 곡선 $y=\cos 2x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 빗변의 길이가 1인 직각삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

29. 어떤 그릇에 깊이가 x가 되도록 물을 부으면 물의 부피는 $V(x)=x^3-7x^2+17x$가 된다고 한다. 이 그릇에 물을 부어 수면의 넓이가 22이 될 때, 물의 부피를 구하여라.

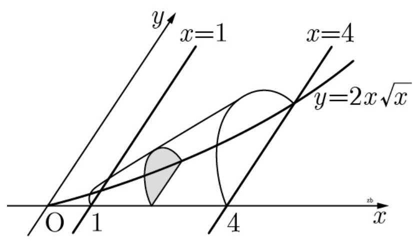
30. 어떤 기름 탱크에 기름을 채우는 데 기름의 깊이가 xcm일 때의 그 표면의 넓이는 $\ln(x+1)cm^2$라고 한다. 기름의 깊이가 20일 때 기름의 부피를 구하면 $(a\ln 21+b)(cm^3)$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

31. 어떤 용기에 물을 채우는데 물의 깊이가 $x\,\mathrm{cm}$일 때, 수면의 넓이가 $\{(x+1)\ln(x+2)\}\,\mathrm{cm}^2$라고 한다. 깊이가 $2\mathrm{cm}$가 되도록 물을 채웠을 때, 물의 부피는 $v\,\mathrm{cm}^3$이다. 상수 v의 값을 구하여라.

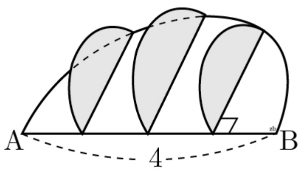
32. 어떤 그릇의 높이가 $x\mathrm{cm}$가 되도록 물을 넣으면, 물의 부피가 $\frac{1}{2\ln 2}(4^x+2^{x+2}-2)\mathrm{cm}^3$라고 한다. 수면의 넓이가 $24\mathrm{cm}^2$일 때의 채워진 물의 높이를 구하여라.

33. 곡선 $y=\ln x(1\le x\le e)$위의 점에서 x축까지의 거리를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 좌표평면에 수직이 되도록 만든다. 이 때 이 삼각형들로 이루어지는 입체도형의 부피를 구하면 $ae+b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

34. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피가 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하여라.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

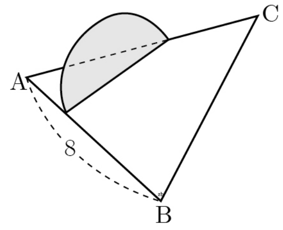


35. 지름의 길이가 4인 반원을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 반원의 지름 AB에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하여라.

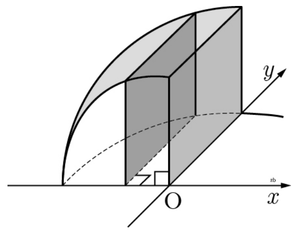


◪ 다음 물음에 답하여라.

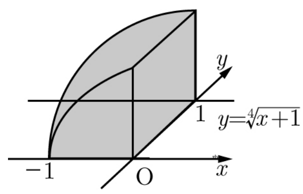
36. 다음 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC이고 변 AB에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원인 입체도형의 부피를 구하여라.



37. 곡선 $y=\sqrt{2x+4}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체도형이 있다. 이 입체도형의 부피를 구하여라.

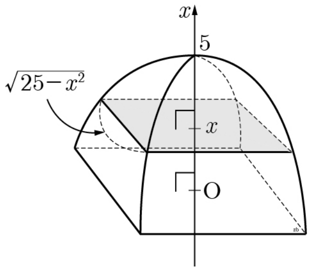


38. 곡선 $y=\sqrt[4]{x+1}$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체도형이 있다. 이 입체도형의 부피를 구하여라.

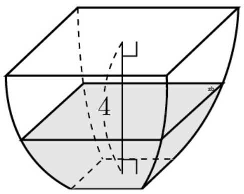


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

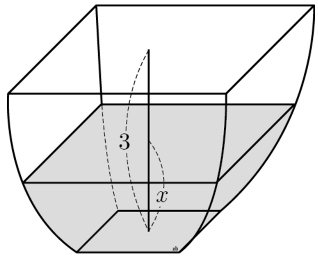
39. 높이가 5인 입체도형을 밑면으로부터 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{25-x^2}$인 정사각형이다. 이 입체도형의 부피를 구하여라.



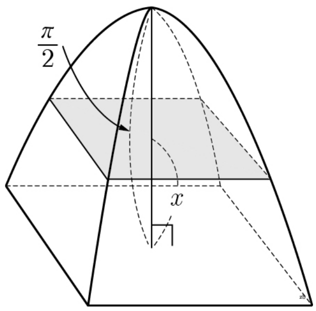
40. 다음 그림과 같은 모양의 물통이 있다. 이 물통의 높이는 4이고, 채워진 물의 높이가 x일 때의 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}+1}$인 정사각형이다. 이 물통의 부피를 구하여라.



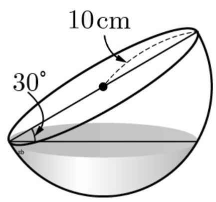
41. 그림과 같은 모양의 물통이 있다. 이 물통의 높이는 3이고, 채워진 물의 높이가 x일 때의 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{1+2x}$인 정사각형이다. 이 물통의 부피를 구하여라.



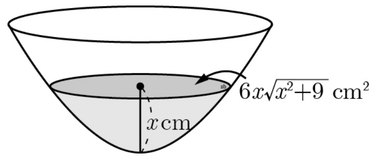
42. 그림과 같이 높이가 $\frac{\pi}{2}$인 입체도형을 밑면으로부터 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\cos x$인 정사각형이다. 이 입체도형의 부피를 구하여라.



43. 그림과 같이 반지름의 길이가 10cm인 반구 모양의 그릇에 물을 가득 채운 후 30°만큼 기울여 물을 흘려보낼 때, 남아 있는 물의 양을 구하여라. (단, 그릇의 두께는 무시한다.)

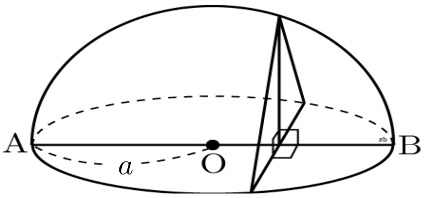


44. 다음 그림과 같은 모양의 빈 그릇에 물을 채우려고 한다. 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $x\text{cm}$일 때, 수면의 넓이가 $6x\sqrt{x^2+9}\text{ cm}^2$라 한다. 물의 높이가 4cm가 될 때까지 물을 채울 때, 채운 물의 부피를 구하여라.

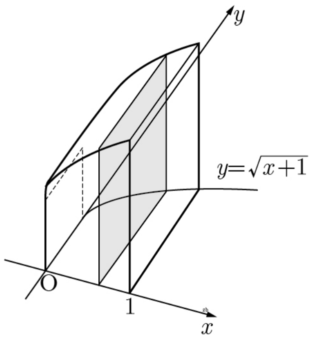


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

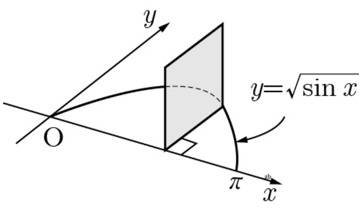
45. 다음 그림과 같이 밑면은 반지름의 길이 $a=3$인 원으로 둘러싸인 도형이고, 이 원의 한 지름 AB에 수직으로 자른 단면이 정삼각형인 입체도형의 부피를 구하여라.



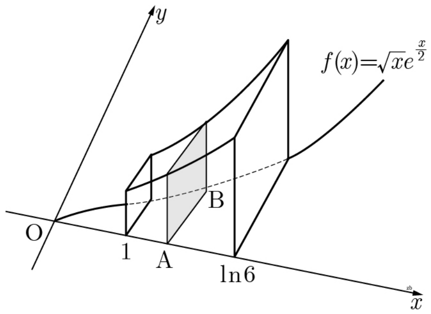
46. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.



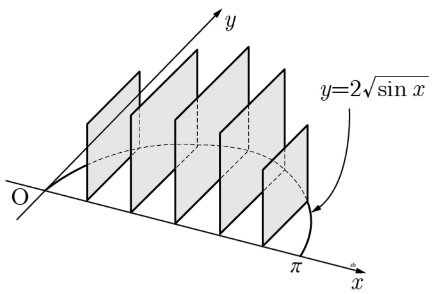
47. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sin x}\,(0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 항상 정사각형이다. 이 입체도형의 부피 V를 구하여라.



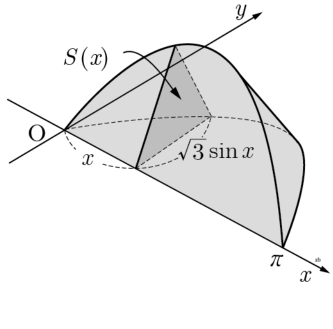
48. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x,\ 0)$, $\mathrm{B}(x,\ f(x))$를 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 A의 x좌표가 $x=1$에서 $x=\ln 6$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하여라.



49. 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{\sin x}\ \ (0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형이 밑면이고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 항상 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.

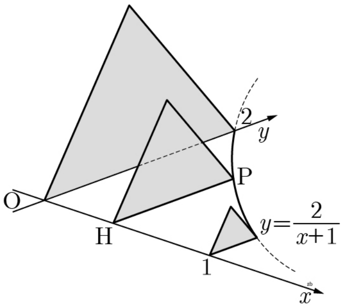


50. 곡선 $y=\sqrt{3}\sin x\,(0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형이고 그 넓이를 $S(x)$라고 할 때, 이 입체도형의 부피 V를 구하여라.

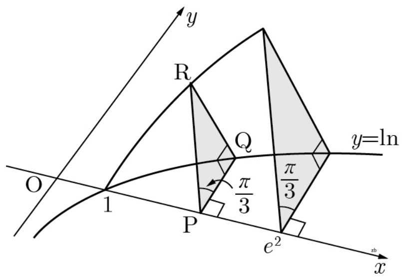


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

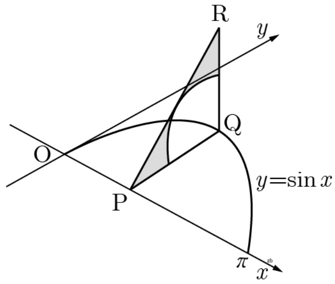
51. 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 곡선 $y=\dfrac{2}{x+1}$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{2}{x+1}\right)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정삼각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 $x=0$에서 $x=1$까지 변할 때, 이 정삼각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하여라.



52. 그림과 같이 함수 $f(x)=\ln x\ (x\geq 1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$ 사이의 각이 $\dfrac{\pi}{3}$인 직각삼각형이다. 점 P의 좌표가 $x=1$에서 $x=e^2$까지 변할 때, 이 삼각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하여라.

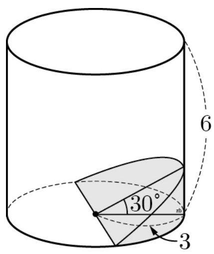


53. 곡선 $y=\sin x(0\leq x\leq \pi)$와 x축으로 둘러싸인 영역에 밑면이 있는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 직각이등변삼각형에서 점 Q를 중심으로 하고 변 PR에 접하는 사분원을 제외한 도형과 같을 때, 이 입체도형의 부피 V에 대하여 $16V$를 구하여라.

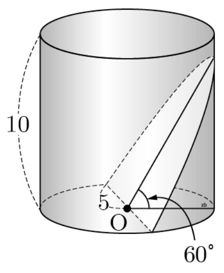


◪ 다음 물음에 답하여라.

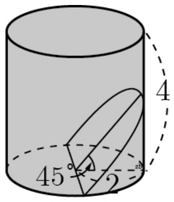
54. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 6인 원기둥이 있다. 원기둥의 밑면의 중심을 지나고 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중 작은 입체도형의 부피를 구하여라.



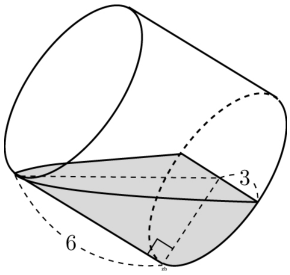
55. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 10인 원기둥의 밑면의 지름을 지나고 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 자른다. 이때, 생기는 두 입체도형 중 작은 입체도형의 부피를 구하여라.



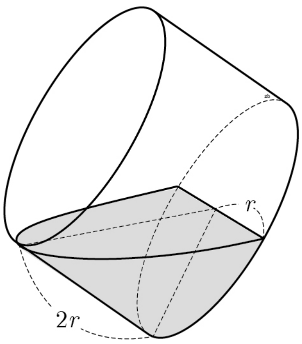
56. 밑면의 반지름의 길이가 2, 높이가 4인 원기둥이 있다. 밑면의 중심을 지나고 밑면과 45°의 각을 이루는 평면으로 이 원기둥을 자를 때 생기는 두 입체도형 중 작은 것의 부피를 구하여라.



57. 밑면의 반지름의 길이가 3이고 높이가 6인 원기둥 모양의 물통이 있다. 이 물통에 물을 가득 담은 후 그림과 같이 수면이 밑면의 중심을 지날 때까지 기울여 물을 쏟아 내었다. 이 때 남은 물의 부피를 구하여라.



58. 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원기둥 모양의 물통이 있다. 이 물통에 물을 가득 담은 후 그림과 같이 수면이 밑면의 중심을 지날 때까지 기울여 물을 쏟아 내었다. 이때 정적분을 이용하여 남은 물의 부피를 구하여라.



59. 밑면의 지름의 길이가 6, 높이가 10인 원기둥이 있다. 이 원기둥을 밑면의 지름을 지나고 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 잘랐을 때 생기는 두 입체도형 중 작은 입체도형의 부피를 구하여라.

60. 밑면의 반지름의 길이가 2, 높이가 5인 원기둥이 있다. 밑면의 중심을 지나고, 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 이 원기둥을 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 작은 것의 부피를 구하여라.

정답 및 해설

1) [정답] (가) $\frac{h}{n}$ (나) $\frac{(n-1)r}{n}$ (다) $\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

[해설] 원뿔의 높이를 n등분 하였으므로

각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$

(가)$=\frac{h}{n}$

각 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하면

$\frac{r}{n}$, $\frac{2r}{n}$, $\frac{3r}{n}$, $\cdots$, $\frac{kr}{n}$, $\cdots$, $\frac{(n-1)r}{n}$

(나)$=\frac{(n-1)r}{n}$

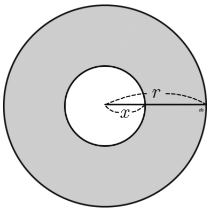
$V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{h}{n}\right)\left(\frac{kr}{n}\right)^2\pi=\frac{\pi r^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

(다)$=\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

2) [정답] $\frac{A}{h^2}x^2$, $\frac{A}{h^2}x^2$, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{1}{3}Ah$

3) [정답] (가) $\pi(r^2-x^2)$ (나) r (다) r^2x

[해설] 단면은 반지름의 길이가 r인 원이니



그림처럼 단면의 넓이 (가) $\pi y^2=\pi(r^2-x^2)$이다.

그리고 원기둥의 높이가 x의 범위가 되니

(나)$=r$이다.

즉, 입체도형의 부피는 $\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r$이므로

(다)$=r^2x$이다.

4) [정답] (가) $x^2:h^2$, (나) $\frac{A}{h^2}x^2$

5) [정답] -3

[해설] 그림과 같이 정사각뿔의 높이를 n등분하여 $(n-1)$개의 정사각기둥을 만들면, 각 단면의 정사각형의 한 변의 길이는 위에서부터 차례대로

$\frac{3}{n}$, $\frac{2\times3}{n}$, $\cdots$, $\frac{(n-1)\times3}{n}$이고,

높이는 $\frac{6}{n}$이므로 $(n-1)$개의 정사각기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{6}{n}=\frac{54}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$=\frac{54}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{54(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

따라서 구하는 정사각뿔의 부피 V는

$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{54(n-1)(2n-1)}{6n^2}=18$

$\therefore a=3,\ b=6,\ c=18$

$\therefore a+2b-c=3+12-18=-3$

6) [정답] 3

[해설] (가) $\frac{4}{n}$, $\frac{8}{n}$, $\frac{12}{n}$, $\cdots$는 $\frac{1\cdot4}{n}$, $\frac{2\cdot4}{n}$, $\frac{3\cdot4}{n}$, $\cdots$이므로 (가)에 들어갈 식은 $\frac{4(n-1)}{n}$

(나) $\frac{9}{n}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^2=\frac{144}{n^3}$

(다) $\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$이므로

(다)에 들어갈 식은 $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

따라서 $f(5)=\frac{4\times4}{5}=\frac{16}{5}$, $g(3)=\frac{144}{27}=\frac{16}{3}$,

$h(3)=\frac{3\times2\times5}{6}=5$이므로

$\frac{f(5)h(3)}{g(3)}=\frac{\frac{16}{5}\times5}{\frac{16}{3}}=3$이다.

7) [정답] (1) $S(x)=(r^2-x^2)\pi$

(2) $\int_0^r(r^2-x^2)\pi\,dx$

(3) $\frac{4}{3}\pi r^3$

[해설] (1) 단면의 반지름 길이는 $\sqrt{r^2-x^2}$이니

$S(x)=(r^2-x^2)\pi$이다.

(2) 반구의 부피는 이 단면의 넓이를 적분구간 $0\le x\le r$까지 정적분하면 되니

$\int_0^r(r^2-x^2)\pi\,dx$이다.

(3) 즉, 구의 부피는

$2\int_0^r(r^2-x^2)\pi\,dx=2\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r=\frac{4}{3}\pi r^3$이다.

8) [정답] $114cm^3$

[해설] 구하는 부피는

$\int_0^6(x+1)^2dx=\int_0^6(x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^6$

$=114(cm^3)$

9) [정답] $\pi(2e^6+4e^3-3)$

[해설] 높이 x에서 자른 단면은 반지름의 길이가 $(2e^x+1)$인 원이므로 그 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\pi(2e^x+1)^2=\pi(4e^{2x}+4e^x+1)$

높이가 3일 때의 이 입체도형의 부피를 V라 하면

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$V=\pi\int_0^3(4e^{2x}+4e^x+1)dx$

$=\pi[2e^{2x}+4e^x+x]_0^3$

$=\pi(2e^6+4e^3-3)$

10) [정답] $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

11) [정답] $9\sqrt{3}-3\pi$

[해설] 단면의 정사각형 넓이는 $9\tan^2x$이니
구해야 하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}9\tan^2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}9(\sec^2x-1)dx$$

$$=9[\tan x-x]_0^{\frac{\pi}{3}}=9\sqrt{3}-3\pi$$

12) [정답] $150cm^3$

[해설]

$$\int_0^{10}(20-x)dx=\left[20x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}=200-50=150$$

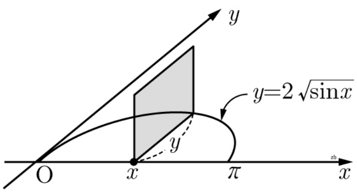
13) [정답] 1

[해설] 구해야 하는 입체의 부피는
단면이 정사각형이고,
이 정사각형의 넓이는 $\{\sqrt{\ln(x+1)}\}^2$이므로
(입체의 부피)

$$=\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx=\int_1^e\ln t dt=[t\ln t-t]_1^e=1$$

14) [정답] 8

[해설]



정사각형의 한 변의 길이는 함수의 y값과 같으므로
정사각형의 넓이는 $4\sin x$이다.

$\therefore$ (입체도형의 부피)$=\int_0^{\pi}4\sin x dx=8$

15) [정답] $\frac{1}{2}(e^8+31)cm^3$

[해설] 구하는 부피는

$$\int_0^4(e^{2x}+x+2)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^4$$

$$=\frac{1}{2}(e^8+31)(cm^3)$$

16) [정답] πcm^3

[해설] $V=\int_0^{\pi}x\sin x dx$

$$\int_0^{\pi}x\sin x dx=[-x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx$$

$$=\pi+[\sin x]_0^{\pi}=\pi$$

17) [정답] $26cm^3$

[해설] $V=\int_0^4 3\sqrt{2x+1}dx$

$2x+1=t$라 놓으면 $2dx=dt$이고
$x=0$일 때 $t=1$이고 $x=4$일 때, $t=9$

$$V=\int_1^9 3\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{3}{2}\int_1^9\sqrt{t}dt=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9$$

$=27-1=26$

18) [정답] $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$

19) [정답] $\ln\sqrt{5}cm^3$

20) [정답] $\ln 3$

21) [정답] $\sqrt{3}\pi$

[해설] 깊이가 x $\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$일 때, 수면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\pi\sec^2x$

따라서 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\pi\sec^2x dx=\left[\ \pi\tan x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\pi$$

22) [정답] $2e^3+1$

23) [정답] 60

[해설] 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면
$S(x)=\cos\pi x+4$
이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{15}(\cos\pi x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x+4x\right]_0^{15}=60$$

24) [정답] $\frac{\sqrt{3}\pi}{16}$

[해설]

자른 단면인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2x$
이므로 구하고자 하는 입체의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2x dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$$

25) [정답] $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

[해설] x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정삼각형의 한 변의 길이가 $\tan x$이므로 정삼각형 넓이는

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^2 x$이다.

∴ (입체도형의 부피)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{4}(\sec^2 x-1)\,dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[x]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

26) [정답] $e^{10}+49$

[해설] 단면의 넓이는 $S(x)$라고 하면 $S(x)=e^x+x$
이 입체도형의 부피를 V라고 하면

$V=\int_0^{10}(e^x+x)dx=\left[e^x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}$

$=e^{10}+49$

27) [정답] $\frac{\pi}{4}$

[해설] 밑면의 정사각형의 넓이는 $(\sin x)^2$이므로 입체도형의 부피는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

28) [정답] $\frac{1}{8}$

29) [정답] 35

[해설] $V(x)=x^3-7x^2+17x$이므로

$S(x)=V'(x)=3x^2-14x+17=22$

$3x^2-14x-5=0$, $(x-5)(3x+1)=0$ ∴ $x=5$

따라서 $x=5$일 때, $V(5)=125-175+85=35$이다.

30) [정답] 1

[해설]

$\frac{dV}{dx}=S(x)=\ln(x+1)$이므로

$V(x)=\int_0^{20}\ln(x+1)dx=[(x+1)\ln(x+1)-(x+1)]_0^{20}$

$=21\ln 21-21+1=21\ln 21-20$

∴ $a=21$, $b=-20$

∴ $a+b=1$

31) [정답] $8\ln 2-1$

32) [정답] 2cm

33) [정답] $-\frac{1}{4}$

[해설] $y=\ln x$위의 한 점을 $(t,\ln t)$라 하면 x축까지의 거리를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\ln t}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}(\ln t)^2$이므로

입체도형의 부피는

$\int_1^e\frac{1}{4}(\ln t)^2dt=\frac{1}{4}[t(\ln t)^2]_1^e-\frac{1}{4}\int_1^e 2\ln t\,dt$

$=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\int_1^e\ln t\,dt=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\left([t\ln t]_1^e-\int_1^e 1dt\right)$

$=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}(e-(e-1))=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}$

∴ $a+b=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

34) [정답] 263

[해설]

$V=\int_1^4\left(\frac{2x\sqrt{x}}{2}\right)^2\frac{1}{2}\pi\,dx=\int_1^4\frac{x^3}{2}\pi\,dx=\left[\frac{x^4}{8}\pi\right]_1^4$

$=\frac{4^4-1}{8}\pi=\frac{255}{8}\pi$

$p+q=8+255=263$

35) [정답] 7

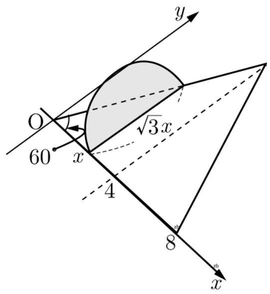
[해설] 단면 반원에서 반지름은 $\frac{y}{2}$이므로

이 반원의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi\frac{y^2}{4}=\frac{\pi}{8}(4-x^2)$가 된다.

따라서 구해야 하는 입체도형의 부피는

$2\int_0^2\frac{\pi}{8}(4-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi$이고 $p+q=7$이다.

36) [정답] 16π



[해설]

단면 반원의 지름은 $\sqrt{3}\,x$이므로

이 반원의 넓이는 $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\frac{3}{8}\pi x^2$이고

구해야 하는 부피는 $2\int_0^4\frac{3}{8}\pi x^2dx=16\pi$이다.

37) [정답] 4

[해설] $V=\int_{-2}^0(2x+4)dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^0=-(4-8)=4$

38) [정답] $\frac{2}{3}$

[해설] 주어진 입체의 단면이 정사각형이고
한 변의 길이가 $\sqrt[4]{x+1}$이므로 구해야 하는 부피는

$\int_{-1}^0(\sqrt[4]{x+1})^2dx=\int_{-1}^0(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$x+1=t$라 하면 $dx=dt$이므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\int_{0}^{1}\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}$$

39) [정답] $\frac{250}{3}$

[해설] y축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{25-x^2}$인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=25-x^2$

따라서 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{0}^{5}S(x)dx=\int_{0}^{5}(25-x^2)dx$$

$$=\left[\ 25x-\frac{1}{3}x^3\ \right]_0^5$$

$$=\frac{250}{3}$$

40) [정답] $2e^2+2$

[해설] 한 변의 길이가 $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}+1}$ 인 정사각형의 수면의 넓이는 $e^{\frac{x}{2}}+1$이므로 물통의 부피는

$$\int_{0}^{4}\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)dx=\left[2e^{\frac{x}{2}}+x\right]_0^4=2e^2+4-2=2e^2+2$$

41) [정답] 12

[해설] $\int_{0}^{3}(1+2x)dx=\left[x+x^2\right]_0^3=3+9=12$

42) [정답] $\frac{\pi}{4}$

[해설] 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)=\cos^2 x$이므로 구하는 입체도형의 부피 V는

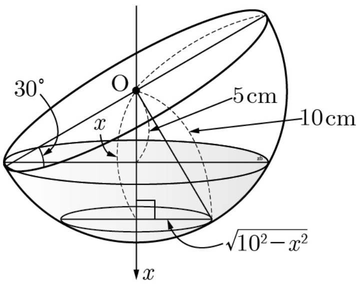
$$V=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ x+\frac{1}{2}\sin 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

43) [정답] $\frac{625}{3}\pi$

[해설]



그림과 같이 구의 중심을 원점 O로 하고, 수면에 수직인 직선을 x축으로 정할 때, x의 좌표가 $x(5\le x\le 10)$인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 반지름의 길이는 $\sqrt{10^2-x^2}$이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=(100-x^2)\pi$이고, 입체도형의 부피 V는

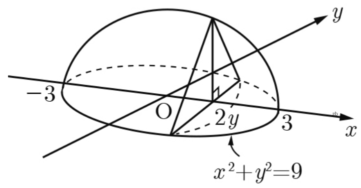
$$V=\int_{5}^{10}S(x)dx=\int_{5}^{10}\pi(100-x^2)dx$$

$$=\pi\left[\ 100x-\frac{1}{3}x^3\ \right]_5^{10}$$

$$=\frac{625}{3}\pi$$

44) [정답] $196\,\text{cm}^3$

45) [정답] $36\sqrt{3}$



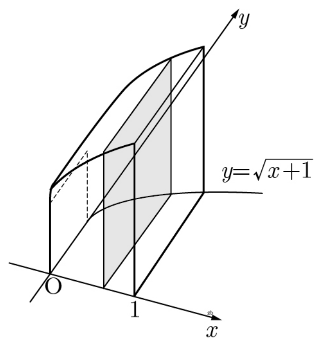
[해설]

밑면은 $x^2+y^2=9$의 원이므로

구해야 하는 부피는 한변의 길이가 $2y=2\sqrt{9-x^2}$이 정삼각형의 넓이를 그림의 구간에서 정적분하면 된다. 즉, $2\int_{0}^{3}\sqrt{3}\,(9-x^2)dx=36\sqrt{3}$이다.

46) [정답] $\frac{3}{2}$

[해설]



$x=t\ (0\le t\le 1)$에서 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=(\sqrt{t+1})^2=t+1$

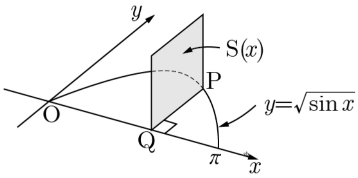
따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{0}^{1}S(t)dt=\int_{0}^{1}(t+1)dt$$

$$=\left[\ \frac{1}{2}t^2+t\ \right]_0^1=\frac{3}{2}$$

47) [정답] 2

[해설]



곡선 $y=\sqrt{\sin x}\,(0\le x\le\pi)$ 위의 점 $P(x, \sqrt{\sin x})$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{\sin x}$

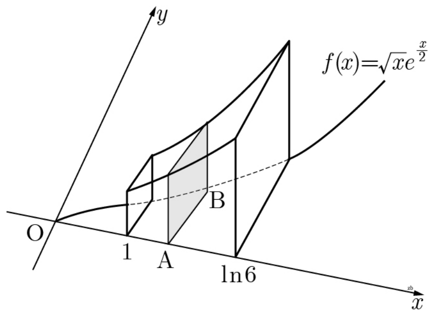
x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(\sqrt{\sin x})^2=\sin x$

$V=\int_0^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}=2$

48) [정답] $-6+6\ln 6$

[해설]



선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\left(\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2=xe^x$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$V=\int_1^{\ln 6}S(x)dx=\int_1^{\ln 6}xe^x dx$

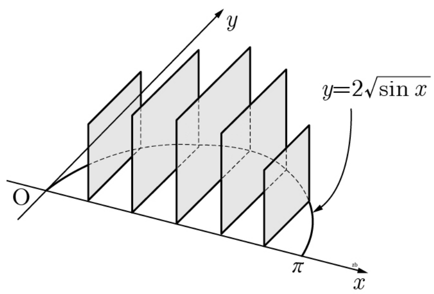
$=\left[\;xe^x-e^x\;\right]_1^{\ln 6}$

$=(\ln 6\cdot e^{\ln 6}-e^{\ln 6})-(e-e)$

$=-6+6\ln 6$

49) [정답] 8

[해설]



정사각형의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=(2\sqrt{\sin x})^2=4\sin x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$V=\int_0^{\pi}S(x)dx=\int_0^{\pi}4\sin x dx$

$=4\left[\;-\cos x\;\right]_0^{\pi}$

$=4\cdot 2=8$

50) [정답] $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

[해설]

$V=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\sin x)^2dx=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{3\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{8}(\pi)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

51) [정답] $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[해설] 정삼각형의 한 변의 길이가 $\frac{2}{x+1}$이므로

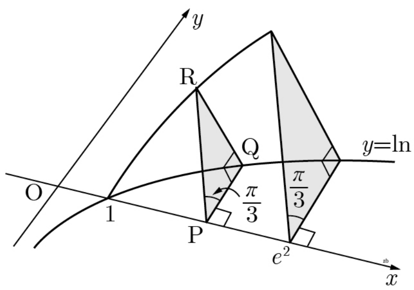
(입체도형의 부피)

$=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{x+1}\right)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1\frac{4}{x^2+2x+1}dx$

$=\sqrt{3}\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=\sqrt{3}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

52) [정답] $\sqrt{3}(e^2-1)$

[해설]



x축에 수직인 단면 $\triangle$PQR에서

$\overline{PQ}=\ln x$, $\overline{QR}=\overline{PQ}\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\ln x$

이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln x\cdot(\sqrt{3}\ln x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln x)^2$

이다. 따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$V=\int_1^{e^2}S(x)dx=\int_1^{e^2}\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln x)^2dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx$

$\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx$에서 $u=(\ln x)^2$, $v'=1$로 놓으면

$u'=\frac{2\ln x}{x}$, $v=x$

$$\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx = \left[\ x(\ln x)^2\ \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\ln x dx$$

$$= 4e^2 - 2\left[\ x\ln x - x\ \right]_1^{e^2}$$

$$= 4e^2 - 2(e^2+1)$$

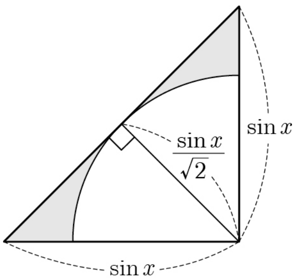
$$= 2(e^2-1)$$

$$\therefore V = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2(e^2-1)$$

$$= \sqrt{3}(e^2-1)$$

53) [정답] $4\pi - \pi^2$

[해설]



색칠된 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2\pi = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}\frac{\sin^2 x}{2}\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2 x$$

$$V = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

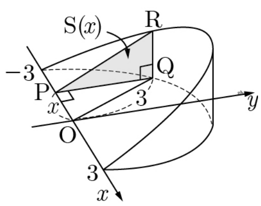
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16}$$

$$\therefore\ 16V = 4\pi - \pi^2$$

54) [정답] $6\sqrt{3}$

[해설]



위 그림과 같이 작은 입체도형의 밑면의 중심을 원점 O로 하여 좌표축을 정한다. 점 $P(x,0)$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle PQR$라 할 때 $\overline{PQ} = \sqrt{9-x^2}$ 이므로

$$\overline{QR} = \overline{PQ}\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}\times\sqrt{9-x^2}\times\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{3}} = \frac{9-x^2}{2\sqrt{3}}$$

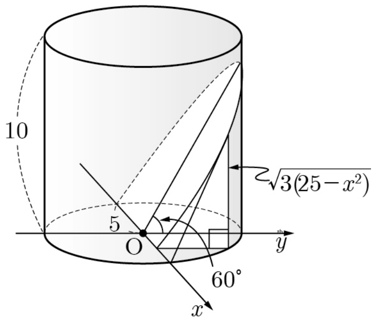
따라서 작은 입체도형의 부피는

$$\int_{-3}^{3}\frac{9-x^2}{2\sqrt{3}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^3(9-x^2)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 6\sqrt{3}$$

55) [정답] $\dfrac{250\sqrt{3}}{3}$

[해설]



그림과 같이 밑면의 중심을 원점 O로 하고, 밑면의 지름을 x축으로 정할 때, x의 좌표가 $x(-5\le x\le 5)$인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{25-x^2}\cdot\sqrt{3(25-x^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(25-x^2)$$

이때, 입체도형의 부피 V는 y축에 대하여 대칭이므로

$$V = \int_{-5}^{5}S(x)dx = 2\int_0^5 S(x)dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^5(25-x^2)dx$$

$$= \sqrt{3}\left[\ 25x - \frac{1}{3}x^3\ \right]_0^5$$

$$= \frac{250\sqrt{3}}{3}$$

56) [정답] $\dfrac{16}{3}$

[해설] 밑면의 중심으로부터 반지름 위의 한 점을 x라 하면 원의 반지름이 2이므로 x에서 원의 현에 수직으로 그은 선분의 길이는 $\sqrt{4-x^2}$ 이고, 밑면과 45°의 각을 이루는 삼각형의 형태로 잘라지므로 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}(4-x^2)$$

따라서 작은 입체도형의 부피는

$$2\int_0^2\frac{1}{2}(4-x^2)dx = \int_0^2(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

57) [정답] 36

[해설] 남아있는 물의 양을 나타내는 반원을 밑면으로 하는 도형은 밑변을 $\sqrt{9-x^2}$ 으로 하고 높이를

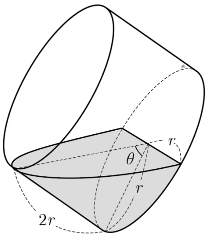
$\frac{6}{3}\sqrt{9-x^2}$ 으로 하는 직각삼각형들로 이루어져 있으므로

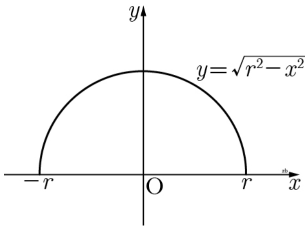
$$V=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}\times2\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{3}(9-x^2)dx=2\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=36$$

58) [정답] $\frac{4}{3}r^3$

[해설]

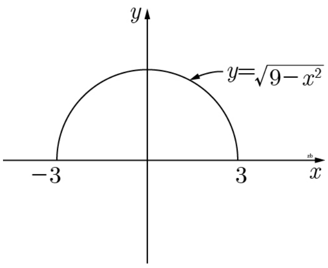




$$V=\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}y(2y)dx=\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}=\frac{4}{3}r^3$$

59) [정답] $6\sqrt{3}$



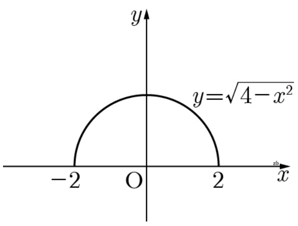
[해설]

$$V=\int_{-3}^{3}\frac{y^2}{2\sqrt{3}}dx=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=\frac{\sqrt{3}}{3}\times18=6\sqrt{3}$$

60) [정답] $\frac{16}{3}\sqrt{3}$

[해설]



$$V=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}y\left(\sqrt{3}y\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-2}^{2}y^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}2\left(8-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{16}{3}\sqrt{3}$$