01 순열

(1) 순열: 서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고 이 순열의 수를 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

(2) 순열의 수: ${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$
(단, $0<r\le n$)

(3) 계승: 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 n의 계승이라 하고, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다.
⇨ ${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$

(4) $n!$을 이용한 순열의 수:

① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

주의 ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$에서

$r=n$이면 ${}_n\mathrm{P}_n=n!=\dfrac{n!}{0!}$이므로 $0!=1$로 정의한다.

$r=0$이면 ${}_n\mathrm{P}_0=\dfrac{n!}{n!}$로 $r=0$일 때에도 성립하도록 ${}_n\mathrm{P}_0=1$로 정의한다.

◪ 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하시오.

1. ${}_n\mathrm{P}_2=30$

2. ${}_n\mathrm{P}_4=24$

3. ${}_n\mathrm{P}_3=120$

4. ${}_n\mathrm{P}_2=20$

5. ${}_n\mathrm{P}_n=120$

6. ${}_7\mathrm{P}_r=210$

7. ${}_r\mathrm{P}_r=24$

8. ${}_7\mathrm{P}_r=840$

9. ${}_9\mathrm{P}_r=72$

10. ${}_n\mathrm{P}_2=90$

11. ${}_5\mathrm{P}_r=60$

12. $24\times{}_n\mathrm{P}_3={}_n\mathrm{P}_6$

13. ${}_n\mathrm{P}_4=30\times{}_n\mathrm{P}_2$

14. ${}_n\mathrm{P}_3=5\times{}_n\mathrm{P}_2$

15. ${}_n\mathrm{P}_3-6{}_n\mathrm{P}_1=30$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

16. ${}_{n}\mathrm{P}_{5}=5{}_{n}\mathrm{P}_{4}$

17. ${}_{n}\mathrm{P}_{3}=3{}_{n}\mathrm{P}_{2}$

18. ${}_{n}\mathrm{P}_{4}=12{}_{n}\mathrm{P}_{2}$

19. $2{}_{n}\mathrm{P}_{2} : {}_{n}\mathrm{P}_{3}=1 : 2$

20. ${}_{n}\mathrm{P}_{2}+4{}_{n}\mathrm{P}_{1}=28$

21. ${}_{n}\mathrm{P}_{3}+{}_{n-1}\mathrm{P}_{2}=72$

22. ${}_{n}\mathrm{P}_{3}+3{}_{n}\mathrm{P}_{2}=60$

23. ${}_{n+1}\mathrm{P}_{2}+2{}_{n}\mathrm{P}_{2}=70$

24. $2{}_{n}\mathrm{P}_{2}-{}_{n-1}\mathrm{P}_{2}=54$

◪ 다음 값을 구하여라.

25. ${}_{4}\mathrm{P}_{0}$

26. ${}_{4}\mathrm{P}_{1}$

27. ${}_{5}\mathrm{P}_{4}$

28. ${}_{5}\mathrm{P}_{2}$

29. ${}_{3}\mathrm{P}_{3}$

30. ${}_{6}\mathrm{P}_{2}$

31. ${}_{8}\mathrm{P}_{0}$

32. ${}_{4}\mathrm{P}_{3}$

33. ${}_{7}\mathrm{P}_{3}$

34. ${}_{7}\mathrm{P}_{0}$

35. ${}_{5}\mathrm{P}_{5}$

36. ${}_{6}\mathrm{P}_{3}$

37. ${}_{8}\mathrm{P}_{3}$

◪ 다음 경우의 수를 순열 기호를 사용하여 나타내어라.

38. 5명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수

39. 6개의 팀이 리그전을 펼쳐 1위부터 6위까지 순위를 결정하는 경우의 수

40. 6명의 학생 중에서 회장, 부회장을 각각 1명씩 뽑는 경우의 수

41. 8명의 학생 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 뽑는 경우의 수

42. 빨강 카드, 파랑 카드, 노랑 카드 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

43. $\boxed{(가)}$, $\boxed{(나)}$, $\boxed{(다)}$ 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

44. 사과, 배, 오렌지, 자두가 각각 1개씩 있을 때, 이 중 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

45. a, b, c, d 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

46. 서로 다른 7권의 책을 책꽂이에 꽂는 경우의 수

47. 0부터 9가지의 숫자 중 4개의 서로 다른 숫자로 네 자리 비밀번호를 만드는 경우의 수

48. 9명의 선수 중 4명을 뽑아 계주 순서를 정하는 경우의 수

◪ 다음을 구하시오.

49. 4명을 일렬로 세우는 경우의 수

50. 10명의 대의원 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 선출하는 경우의 수

51. 6명의 대의원 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 선출하는 경우의 수

52. 6명의 대의원 중에서 회장, 부회장을 각각 1명씩 선출하는 경우의 수

53. 음식점에서 서로 다른 7가지의 메뉴 중에서 4가지를 골라 차례로 주문하는 경우의 수

54. 서로 다른 마을에 사는 네 명의 친구의 집을 모두 다녀오는 경우의 수

55. a, b, c, d, e의 5개의 문자에서 서로 다른 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

56. a, b, c, d, e의 다섯 개의 문자에서 두 개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

57. 숫자 $0,\ 1,\ 3,\ 5$가 하나씩 적혀 있는 카드가 한 장씩 있을 때 서로 다른 3장을 뽑아 만들 수 있는 5의 배수인 세 자리 자연수의 개수

58. 숫자 $0,\ 1,\ 3,\ 5$가 하나씩 적혀 있는 카드가 한 장씩 있을 때 서로 다른 3장을 뽑아 만들 수 있는 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수

59. 숫자 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$가 하나씩 적혀 있는 카드가 한 장씩 있을 때 서로 다른 4개의 숫자를 뽑아 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

60. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수

61. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 짝수의 개수

62. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 5의 배수의 개수

63. $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 숫자가 각각 적힌 6장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수

64. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 각각 적힌 6장의 카드 중에서 서로 다른 4장을 뽑아 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 5의 배수의 개수

65. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 각각 적힌 6장의 카드 중에서 서로 다른 4장을 뽑아 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 홀수의 개수

66. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 각각 적힌 6장의 카드 중에서 서로 다른 4장을 뽑아 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

67. $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 각각 적힌 6장의 카드 중에서 서로 다른 5장을 뽑아 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중 5의 배수이지만 2의 배수가 아닌 수의 개수

정답 및 해설

1) 6
⇨ ${}_nP_2=30$에서 $n(n-1)=30=6\times5$ $\therefore n=6$

2) 4
⇨ ${}_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$이므로
$n(n-1)(n-2)(n-3)=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$
$\therefore n=4$

3) 6
⇨ ${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$이므로
$n(n-1)(n-2)=120=6\cdot5\cdot4$ $\therefore n=6$

4) 5
⇨ ${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=20=5\cdot4$ $\therefore n=5$

5) $n=5$
⇨ $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로 ${}_nP_n=120=5!$에서
$n=5$

6) $r=3$
⇨ $210=7\cdot6\cdot5$이므로 ${}_7P_r=210=7\cdot6\cdot5$에서
$r=3$

7) 4
⇨ ${}_rP_r=24$에서 ${}_rP_r=r!$, $24=4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$이므로
$r!=4!$ $\therefore r=4$

8) 4
⇨ ${}_7P_r=840$에서 $840=7\cdot6\cdot5\cdot4$이므로
${}_7P_4=840$ $\therefore r=4$

9) 2
⇨ ${}_9P_r=72$에서 $72=9\cdot8$이므로
${}_9P_2=72$ $\therefore r=2$

10) 10
⇨ $n(n-1)=90=10\times9$ $\therefore n=10$

11) 3
⇨ ${}_5P_r=60$에서 $60=5\cdot4\cdot3$이므로
${}_5P_3=60$ $\therefore r=3$

12) 7
⇨ $24n(n-1)(n-2)=n(n-1)(n-2)$ …… $(n-5)$
$(n-3)(n-4)(n-5)=24=4\times3\times2$ $\therefore n=7$

13) 8
⇨ $n(n-1)(n-2)(n-3)=30n(n-1)$
$(n-2)(n-3)=30=6\times5$ $\therefore n=8$

14) 7
⇨ $n(n-1)(n-2)=5n(n-1)$
$n-2=5$ $\therefore n=7$

15) 5
⇨ ${}_nP_3-6{}_nP_1=30$에서
$n(n-1)(n-2)-6n=30$
$n^3-3n^2-4n-30=0$, $(n-5)(n^2+2n+6)=0$
$\therefore n=5$

16) $n=9$
⇨ ${}_nP_5=5{}_nP_4$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=5n(n-1)(n-2)(n-3)$
${}_nP_5$에서 $n\geq5$이므로
양변을 $n(n-1)(n-2)(n-3)$으로 나누면
$n-4=5$ $\therefore n=9$

17) 5
⇨ ${}_nP_3=3{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)=3n(n-1)$
${}_nP_3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$n-2=3$ $\therefore n=5$

18) 6
⇨ ${}_nP_4=12{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=12n(n-1)$
${}_nP_4$에서 $n\geq4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$(n-2)(n-3)=12$, $n^2-5n-6=0$
$(n+1)(n-6)=0$ $\therefore n=6$

19) 6
⇨ $2{}_nP_2$: ${}_nP_3=1$: 2에서 ${}_nP_3=4{}_nP_2$
$n(n-1)(n-2)=4n(n-1)$
${}_nP_3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$n-2=4$ $\therefore n=6$

20) 4
⇨ ${}_nP_2+4{}_nP_1=28$에서
$n(n-1)+4n=28$, $n^2+3n-28=0$
$(n-4)(n+7)=0$ $\therefore n=4$

21) 5
⇨ ${}_nP_3+{}_{n-1}P_2=72$에서
$n(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)=72$
$n^3-2n^2-n-70=0$, $(n-5)(n^2+3n+14)=0$
$\therefore n=5$

22) 4
⇨ ${}_nP_3+3{}_nP_2=60$에서
$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=60$
$n^3-n-60=0$, $(n-4)(n^2+4n+15)=0$
$\therefore n=4$

23) 5

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

⇨ ${}_{n+1}P_2+2{}_nP_2=70$에서
$(n+1)n+2n(n-1)=70$
$3n^2-n-70=0$, $(3n+14)(n-5)=0$
$\therefore\ n=5$

24) 7
⇨ $2{}_nP_2-{}_{n-1}P_2=54$에서
$2n(n-1)-(n-1)(n-2)=54$
$n^2+n-56=0\ \ (n-7)(n+8)=0$
$\therefore\ n=7\ (\because\ n\geq 3)$

25) 1
⇨ ${}_4P_0=1$

26) 4
⇨ ${}_4P_1=4$

27) 120
⇨ ${}_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

28) 20
⇨ ${}_5P_2=5\cdot4=20$

29) 6
⇨ ${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$

30) 30
⇨ ${}_6P_2=6\cdot5=30$

31) 1
⇨ ${}_8P_0=1$

32) 24
⇨ ${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$

33) 210
⇨ ${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=210$

34) 1
⇨ ${}_7P_0=1$

35) 120
⇨ ${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$

36) 120
⇨ ${}_6P_3=6\times5\times4=120$

37) 336
⇨ ${}_8P_3=8\times7\times6=336$

38) ${}_5P_5$
⇨ 5명의 학생을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_5$

39) ${}_6P_6$
⇨ 6개의 팀을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_6$

40) ${}_6P_2$
⇨ 6명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_2$

41) ${}_8P_3$
⇨ 8명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8P_3$

42) ${}_3P_3$

43) ${}_3P_2$

44) ${}_4P_3$

45) ${}_4P_2$

46) ${}_7P_7$
⇨ 서로 다른 7개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_7P_7$

47) ${}_{10}P_4$
⇨ 서로 다른 10개에서 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}P_4$

48) ${}_9P_4$
⇨ 9명의 선수 중에서 4명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_9P_4$

49) 24
⇨ 4명에서 4명을 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

50) 720
⇨ 10명 중에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_{10}P_3=10\cdot9\cdot8=720$

51) 120
⇨ 6명 중 순서를 고려해서 3명을 뽑아 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3=6\times5\times4=120$(가지)

52) 30
⇨ 6명 중 순서를 고려해서 2명을 뽑아 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_2=6\times5=30$(가지)

53) 840
⇨ 7개 중 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 것이므로 경우의 수는 ${}_7P_4=7\times6\times5\times4=840$(가지)

54) 24
⇨ 4개 중 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 것이므로 경우의 수는 ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$(가지)

55) 20
⇨ 5개 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_5P_2=5\cdot4=20$

56) 20
⇨ 5개 중 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 것이므로 경우의 수는 ${}_5P_2=5\times4=20$(가지)

57) 10
⇨ 5의 배수이려면 일의 자리 숫자가 0 또는 5이어야 한다.
(ⅰ) 일의 자리 숫자가 0인 경우
나머지 자리에는 0을 제외한 3개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 나올 수 있으므로
${}_3P_2=3\times2=6$
(ⅱ) 일의 자리 숫자가 5인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 2개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자, 일의 자리의 숫자인 5를 제외한 2개이므로
$2\times2=4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 5의 배수의 개수는 $6+4=10$

58) 10
⇨ 어떤 수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하고, 4개의 숫자 0, 1, 3, 5에서 서로 다른 3개를 택했을 때 그 합이 3의 배수가 되는 경우인 (0, 1, 5), (1, 3, 5)이다.
(ⅰ) (0, 1, 5)인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2개
십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자를 제외한 2개이므로
$2\times2!=4$
(ⅱ) (1, 3, 5)인 경우
$3!=6$
(ⅰ) (ⅱ)에서 구하는 3의 배수의 개수는 $4+6=10$

59) 96
⇨ 먼저 첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 0을 제외한 4가지가 올 수 있다.
나머지 자리에는 첫 번째 자리에 쓰인 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 3개를 뽑아 나열하면 되므로
${}_4P_3=4\times3\times2=24$(가지)
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times24=96$

60) 48
⇨ 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개,
나머지 자리에는 백의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로
${}_4P_2=4\times3=12$
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times12=48$

61) 30
⇨ 짝수이려면 일의 자리 숫자가 짝수이어야 한다.
(ⅰ) 일의 자리 숫자가 0인 경우
나머지 자리에는 0을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로
${}_4P_2=4\times3=12$
(ⅱ) 일의 자리 숫자가 2인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2를 제외한 3개,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리 숫자와 일의 자리 숫자 2를 제외한 3개이므로
$3\times3=9$
(ⅲ) 일의 자리 숫자가 4인 경우
일의 자리 숫자가 2인 경우와 마찬가지로
$3\times3=9$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 짝수의 개수는
$12+9+9=30$

62) 12
⇨ 5의 배수이려면 일의 자리 숫자가 0이어야 한다.
이때, 나머지 자리에는 0을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로
${}_4P_2=4\times3=12$

63) 120
⇨ 6개 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$

64) 108
⇨ 5의 배수이려면 일의 자리 숫자가 0 또는 5이어야 한다.
(ⅰ) 일의 자리 숫자가 0인 경우
나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개가 올 수 있으므로
${}_5P_3=5\times4\times3=60$
(ⅱ) 일의 자리 숫자가 5인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 4개,
나머지 자리에는 천의 자리 숫자와 일의 자리 숫자 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로 $4\times{}_4P_2=4\times4\times3=48$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 5의 배수의 개수는
$60+48=108$

65) 144
⇨ 홀수이려면 일의 자리 숫자가 홀수이어야 한다.
(ⅰ) 일의 자리 숫자가 1인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1을 제외한 4개,
나머지 자리에는 천의 자리 숫자와 일의 자리 숫자 1을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로 $4\times{}_4P_2=4\times4\times3=48$

(ⅱ) 일의 자리 숫자가 3, 5인 경우
각각이 일의 자리 숫자가 1인 경우와 마찬가지이므로 $2\times(4\times{}_4P_2)=2\times48=96$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 홀수의 개수는 $48+96=144$

66) 300

⇨ 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5개,

나머지 자리에는 천의 자리의 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개가 올 수 있으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $5\times60=300$

67) 96

⇨ 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

이때, 일의 자리의 숫자가 0이면 2의 배수도 되므로 5의 배수이지만 2의 배수가 아닌 수는 일의 자리의 숫자가 5인 수이다.

따라서 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 4개,

나머지 자리에는 만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개가 올 수 있으므로 $4\times{}_4P_3=4\times24=96$