개념check

[구간에 따라 다르게 정의된 정적분의 계산]

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \le c) \\ h(x) & (x \ge c) \end{cases}$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a<c<b$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b h(x)dx$$

[우함수와 기함수의 정적분]

• 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $f(-x)=f(x)$이면, 즉 $f(x)$가 우함수이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(2) $f(-x)=-f(x)$이면, 즉 $f(x)$가 기함수이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

[정적분으로 정의된 함수]

• 적분 구간이 상수인 경우

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$($a$, b는 상수)의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ $\int_a^b f(t)dt = k$(k는 상수)로 놓고 $f(x)=g(x)+k$임을 이용한다.

• 적분 구간에 변수가 있는 경우

(1) $\int_a^x f(t)dt = g(x)$의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ 양변을 x에 대하여 미분하고 $\int_a^a f(t)dt = 0$임을 이용한다.

(2) $\int_a^x (x-t)f(t)dt = g(x)$의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ 좌변을 $x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

기본문제

[문제]

1. 함수 $f(x)=\int_{-2}^x (t^2-2t+3)dt$에 대하여, $f'(2)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[문제]

2. 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)\,dt = x^3-3x^2+x+1$을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

[예제]

3. 정적분 $\int_0^5 |1-x|dx$의 값은?

① $\frac{13}{2}$　② $\frac{15}{2}$　③ $\frac{17}{2}$　④ $\frac{19}{2}$　⑤ $\frac{21}{2}$

[문제]

4. 정적분 $\int_{-2}^2 |x(x+2)|dx$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

평가문제

[스스로 확인하기]

5. 정적분 $\int_{-2}^3 |3x^2-12|dx$의 값은?

① 36　② 37　③ 38　④ 39　⑤ 40

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 확인하기]

6. 함수 $f(x)=x^2+x-3$일 때, 극한값

$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$의 값은?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

[스스로 확인하기]

7. 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x)=6x^2-2x+\int_0^2 f(x)dx$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여, $f(1)$의 값은?

① -4 ② -5
③ -6 ④ -7
⑤ -8

[스스로 마무리하기]

8. 함수 $f(x)=\int_0^x(2t^2-t+6)\,dt$일 때,

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

9. 정적분 $\int_0^2|x^2-3x+2|dx$의 값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[스스로 마무리하기]

10. 함수 $f(x)$가 등식

$$f(x)=-3x^2+6x+2\int_0^2 f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ 1 ④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{5}{3}$

[스스로 마무리하기]

11. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x(x-t)f(t)\,dt=\frac{2}{3}x^3+x^2$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

유사문제

12. 함수 $f(x)=2018x^3+6x^2+2001x-7$에 대하여

$\int_0^1 f(x)dx+\int_{-2}^0 f(x)dx-\int_2^1 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 4
③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$
⑤ 5

13. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여

$\int_a^x f(t)dt=x^3-6x^2+2x+6a$를 만족시킬 때, 모든

a값의 합은?

① -12 ② -6
③ 0 ④ 6
⑤ 12

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

14. 함수 $f(x)=x^2+4ax+b$가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $a+b$의 값은?

- $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=1$
- $\int_0^1 f(x)dx=\frac{4}{3}$

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

15. 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x+3\int_0^1 f(x)dx$를 만족시킬 때, $f(3)$ 값을 구하면?

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2-2t+3)dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x+3$

$\therefore f'(2)=3$

2) [정답] ②

[해설] $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^3-3x^2+x+1$

$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x}f(t)dt\right)=f(x)$이므로

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x+1$

$\therefore f(1)=-2$

3) [정답] ③

[해설] $f(x)=|1-x|$라 하면

$f(x)=\begin{cases}1-x\ (x<1)\\ x-1\ (x\geq 1)\end{cases}$

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_{0}^{5}|1-x|dx$

$=\int_{0}^{1}|1-x|dx+\int_{1}^{5}|1-x|dx$

$=\int_{0}^{1}(1-x)dx+\int_{1}^{5}(x-1)dx$

$=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{5}$

$=\frac{1}{2}+\frac{25}{2}-5+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$

4) [정답] ④

[해설] $f(x)=|x(x+2)|$라 하면

$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & (-2<x<0)\\ x^2+2x & (x\leq-2 \text{ 또는 } x\geq 0)\end{cases}$

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_{-2}^{2}|x(x+2)|dx$

$=\int_{-2}^{0}|x(x+2)|dx+\int_{0}^{2}|x(x+2)|dx$

$=\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$

$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$

5) [정답] ④

[해설] $3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=|3x^2-12|$라 하면

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+12 & (-2<x<2)\\ 3x^2-12 & (x\leq-2 \text{ 또는 } x\geq 2)\end{cases}$

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_{-2}^{3}|3x^2-12|dx$

$=\int_{-2}^{2}|3x^2-12|dx+\int_{2}^{3}|3x^2-12|dx$

$=\int_{-2}^{2}(-3x^2+12)dx+\int_{2}^{3}(3x^2-12)dx$

$=[-x^3+12x]_{-2}^{2}+[x^3-12x]_{2}^{3}$

$=(-8+24)-(8-24)+(27-36)-(8-24)$

$=32-9+16=39$

6) [정답] ①

[해설] $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면,

$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}[F(t)]_{-1}^{x}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}=F'(-1)=f(-1)$

$\therefore\ f(-1)=1-1-3=-3$

7) [정답] ⑤

[해설] $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=C$(C는 상수)라 하면

$f(x)=6x^2-2x+C$

따라서 $\int_{0}^{2}(6x^2-2x+C)\,dx=C$이므로

$[2x^3-x^2+Cx]_{0}^{2}=C,\ (16-4+2C)-0=C$

즉 $C=-12$이므로 $f(x)=6x^2-2x-12$

$\therefore f(1)=-8$

8) [정답] ③

[해설] $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{f'(2)}{4}$

그런데

$f(x)=\int_{0}^{x}(2t^2-t+6)\,dt$

에서

$f'(x)=2x^2-x+6$

이므로 $f'(2)=8-2+6=12$

$\therefore \frac{f'(2)}{4}=3$

9) [정답] ②

[해설] $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$f(x)=|x^2-3x+2|$라 하면

$f(x)=\begin{cases}-x^2+3x-2 & (1<x<2)\\ x^2-3x+2 & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 2)\end{cases}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_0^2 |x^2-3x+2|dx$

$=\int_0^1 (x^2-3x+2)dx+\int_1^2 (-x^2+3x-2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=1$

10) [정답] ①

[해설] $\int_0^2 f(t)\,dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=-3x^2+6x+2a$

$\int_0^2 (-3t^2+6t+2a)\,dt=a$이므로

$[-t^3+3t^2+2at]_0^2=4+4a=a$, 즉 $a=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=-3x^2+6x-\frac{8}{3}$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}$

11) [정답] ⑤

[해설] $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\frac{2}{3}x^3+x^2$

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{2}{3}x^3+x^2$

양변을 x에 대해 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2x^2+2x$

즉, $\int_0^x f(t)dt=2x^2+2x$이므로

다시 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=4x+2$

따라서 $f(1)=6$

12) [정답] ②

[해설] $\int_0^1 f(x)dx+\int_{-2}^0 f(x)dx-\int_2^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_{-2}^2 f(x)dx$

$=\int_{-2}^2 (2018x^3+6x^2+2001x-7)dx=2\int_0^2 (6x^2-7)dx$

$=2[2x^3-7x]_0^2=2(16-14)=4$

13) [정답] ④

[해설] $\int_a^x f(t)dt=x^3-6x^2+2x+6a$에서 양변에

$x=a$를 대입하면

$0=a^3-6a^2+2a+6a$

$a^3-6a^2+8a=0$, $a(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 a값의 합은

$0+2+4=6$

14) [정답] ①

[해설] $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\int_1^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$

$=\frac{f(1)}{2}=1$

$\therefore f(1)=2$

$1+4a+b=2$ $\therefore 4a+b=1$ …㉠

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^2+4ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2ax^2+bx\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+2a+b=\frac{4}{3}$

$\therefore 2a+b=1$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=1$

15) [정답] ③

[해설] $f(x)=x^2+2x+3\int_0^1 f(x)dx$에서

$\int_0^1 f(x)dx=a$라 하자.

$f(x)=x^2+2x+3a$

이때 $\int_0^1 f(x)dx=a$이므로

$\int_0^1 (x^2+2x+3a)dx=a$

$\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+3ax\right]_0^1=a$

$\frac{1}{3}+1+3a=a$, $2a=-\frac{4}{3}$ $\therefore a=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=x^2+2x-2$이므로

$f(3)=9+6-2=13$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125