11

직선의 방정식

직선의 방정식

예제 01

다음 물음에 답하여라.

(1) x절편이 -3이고 기울기가 2인 직선의 y절편을 구하여라.

(2) 두 점 $(-4, 1)$, $(6, 5)$를 이은 선분의 중점을 지나고 기울기가 -3인 직선의 x절편을 구하여라.

접근 방법

주어진 조건에 따라 적절한 공식을 이용하여 직선의 방정식을 구합니다.

Bible

(1) 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(2) 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\ (\text{단, } x_1\neq x_2)$$

(3) x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (\text{단, } ab\neq 0)$$

상세 풀이

(1) x절편이 -3, 즉 점 $(-3, 0)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-0=2\{x-(-3)\}$$

$$\therefore y=2x+6$$

따라서 구하는 직선의 y절편은 6입니다.

(2) 두 점 $(-4, 1)$, $(6, 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right),\ \text{즉 } (1, 3)$$

점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$$y-3=-3(x-1)$$

$$\therefore y=-3x+6$$

따라서 구하는 직선의 x절편은 2입니다.

정답 ➡ (1) 6 (2) 2

보충 설명

x절편은 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표로 $y=f(x)$에 $y=0$을 대입했을 때의 x의 값이고, y절편은 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표로 $y=f(x)$에 $x=0$을 대입했을 때의 y의 값입니다.

풀이집 p.157

숫자 바꾸기

01-1 다음 물음에 답하여라.

(1) x절편이 2이고 기울기가 -3인 직선의 y절편을 구하여라.

(2) 두 점 $(-1,\ 6)$, $(3,\ 2)$를 이은 선분의 중점을 지나고 기울기가 2인 직선의 x절편을 구하여라.

표현 바꾸기

◆다른 풀이

01-2 다음 물음에 답하여라.

(1) x절편이 1, y절편이 2인 직선의 방정식을 $y=ax+b$라고 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

(2) 점 $(2,\ \sqrt{3})$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 할 때, 상수 m, n에 대하여 mn의 값을 구하여라.

11

개념 넓히기 ★☆☆

01-3 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(a-2,\ 4)$, $\mathrm{C}(7,\ a)$가 한 직선 위에 있을 때, 모든 a의 값의 합을 구하여라.

정답 **01-1** (1) 6 (2) -1 **01-2** (1) -4 (2) -3 **01-3** 6

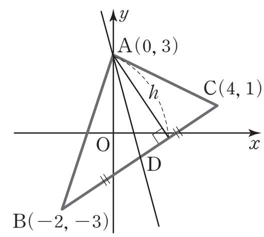
도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식

예제 02

세 점 A$(0,\ 3)$, B$(-2,\ -3)$, C$(4,\ 1)$에 대하여 점 A를 지나는 직선 $y=ax+b$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

접근 방법

점 A$(0, 3)$에서 선분 BC에 내린 수선의 길이를 h, 점 A를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같습니다.



$\triangle$ABD$=\triangle$ADC가 되기 위한 조건은

($\triangle$ABD의 밑변의 길이)$=$($\triangle$ADC의 밑변의 길이),

($\triangle$ABD의 높이)$=$($\triangle$ADC의 높이)

인데, ($\triangle$ABD의 높이)$=$($\triangle$ADC의 높이)$=h$이므로

$\triangle$ABD$=\triangle$ADC가 되기 위한 조건은

($\triangle$ABD의 밑변의 길이)$=$($\triangle$ADC의 밑변의 길이)

따라서 점 D는 선분 BC의 중점입니다.

Bible 삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 선분 BC의 중점을 지난다.

상세 풀이

직선 $y=ax+b$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 선분 BC의 중점을 지나야 합니다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right),\ \text{즉 } (1,\ -1)$$

따라서 구하는 직선 $y=ax+b$는 두 점 $(0,\ 3)$, $(1,\ -1)$을 지나므로

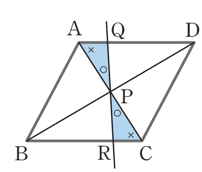
$$y-3=\frac{-1-3}{1-0}(x-0),\ y=-4x+3 \qquad \therefore a=-4,\ b=3$$

$$\therefore ab=-4\cdot3=-12$$

정답 ➡ -12

보충 설명

평행사변형에서 대각선 AC(또는 BD)는 평행사변형의 넓이를 이등분합니다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 삼각형 PAQ와 삼각형 PCR는 합동이므로 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 평행사변형의 넓이를 항상 이등분합니다.



풀이집 p.157

숫자 바꾸기

◆ 보충 설명

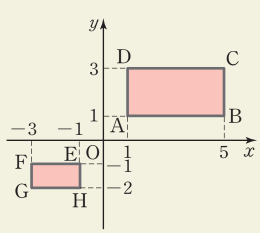
02-1 세 점 A$(0,\ 4)$, B$(-4,\ 1)$, C$(2,\ -1)$에 대하여 점 A를 지나는 직선 $y=mx+4$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

02-2 네 점 A$(0,\ 3)$, B$(-1,\ 1)$, C$(3,\ 2)$, D$(4,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에 대하여 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나고 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

개념 넓히기 ★☆☆

02-3 오른쪽 그림과 같은 두 직사각형 ABCD, EFGH의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.



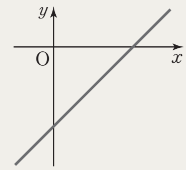
정답 **02-1** 4 **02-2** $y=3x-2$ **02-3** $y=\frac{7}{10}x-\frac{1}{10}$

예제 03

직선 $ax+by+c=0$의 그래프

직선 $ax+by+c=0$이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $ax+cy+b=0$이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

(단, a, b, c는 상수이다.)



접근 방법

직선의 기울기와 y절편의 부호를 알면 직선의 개형을 알 수 있으므로 일반형 $ax+by+c=0(b\neq0)$으로 주어진 직선의 방정식을 표준형 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 변형합니다.

Bible $ax+by+c=0(b\neq0)$
$\Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

상세 풀이

직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로

$$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}<0 \qquad \therefore ab<0,\ bc>0$$

(i) $b>0$일 때, $a<0$, $c>0$

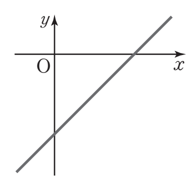
(ii) $b<0$일 때, $a>0$, $c<0$

(i), (ii)에서 b의 부호에 관계없이 $ac<0$

직선 $ax+cy+b=0$, 즉 $y=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}$에서

$ac<0$이므로 $-\frac{a}{c}>0$이고, $bc>0$이므로 $-\frac{b}{c}<0$입니다.

따라서 직선 $ax+cy+b=0$의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로 개형은 오른쪽 그림과 같고, 이 직선은 제2사분면을 지나지 않습니다.



정답 ➡ 제2사분면

보충 설명

직선의 방정식이 일반형 $ax+by+c=0$으로 주어지면 $b\neq0$일 때와 $b=0$일 때로 나누어 접근합니다.

(i) $b\neq0$이고 $a\neq0$일 때, $by=-ax-c$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ← 기울기가 $-\frac{a}{b}$, y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선

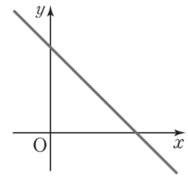
(ii) $b\neq0$이고 $a=0$일 때, $by+c=0$에서 $y=-\frac{c}{b}$ ← x축에 평행한 직선

(iii) $b=0$이고 $a\neq0$일 때, $ax+c=0$에서 $x=-\frac{c}{a}$ ← y축에 평행한 직선

풀이집 p.158

숫자 바꾸기

03-1 직선 $ax+by+c=0$이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $bx+cy+a=0$이 지나지 않는 사분면을 구하여라.
(단, a, b, c는 상수이다.)

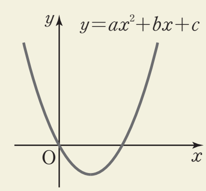


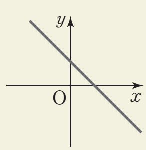
표현 바꾸기

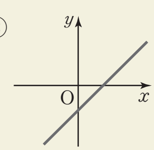
03-2 직선 $ax+by+c=0$이 제1, 2, 3사분면을 지날 때, ab, bc, ca의 부호를 각각 정하여라.
(단, a, b, c는 0이 아닌 상수이다.)

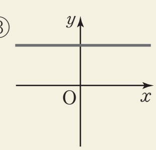
개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

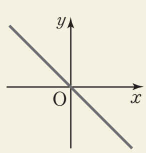
03-3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $ax+by+c=0$의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.)

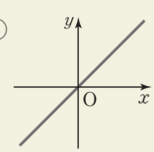


①


②


③


④


⑤


정답 **03-1** 제4사분면 **03-2** $ab<0$, $bc<0$, $ca>0$ **03-3** ⑤

예제 04

표준형으로 주어진 두 직선의 위치 관계

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(2,\ 3)$을 지나고 직선 $y=2x+1$에 평행한 직선

(2) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 3)$을 지나는 직선에 수직이고, 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선

접근 방법

구하는 직선이 주어진 직선과 평행하면 구하는 직선의 기울기와 주어진 직선의 기울기는 서로 같습니다. 또한 구하는 직선이 주어진 직선과 수직이면 구하는 직선의 기울기와 주어진 직선의 기울기의 곱은 -1입니다.

Bible

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이
- 평행하다. ➡ $m=m'$, $n\neq n'$
- 수직이다. ➡ $mm'=-1$

상세 풀이

(1) 직선 $y=2x+1$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-3=2(x-2)$$

$$\therefore y=2x-1$$

(2) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-1}{3-(-1)}=\frac{1}{2}$$

이므로 구하는 직선의 기울기는 -2입니다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=-2(x-2)$$

$$\therefore y=-2x+3$$

정답 ➡ (1) $y=2x-1$ (2) $y=-2x+3$

보충 설명

직선의 방정식을 구하는 데 구하는 직선과 평행한 직선 또는 수직인 직선이 주어졌다면 구하는 직선의 기울기를 알려 준 것이나 다름없습니다.
이와 같이 직선의 위치 관계에 대한 문제는 직선의 기울기와 y절편을 이용하여 접근하는 것이 편리합니다.

풀이집 p.159

숫자 바꾸기

04-1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 직선 $y=-3x+2$에 평행한 직선

(2) 두 점 $(-4,\ -1)$, $(2,\ -3)$을 지나는 직선에 수직이고, 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선

표현 바꾸기

04-2 두 직선 $y=(2a+1)x-a+2$, $y=(a+2)x+2$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(1) 평행하다. (2) 수직이다.

개념 넓히기 ★★★ ◆보충 설명

04-3 세 점 $A(0,\ 0)$, $B(5,\ 0)$, $C(3,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 각 꼭짓점에서 대변에 내린 세 수선의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11

정답 **04-1** (1) $y=-3x-5$ (2) $y=3x-4$ **04-2** (1) 1 (2) $-\frac{3}{2}$ 또는 -1
04-3 ④

예제 05

일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계

두 직선 $x+ay-1=0$, $(a-5)x-6y+2=0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 직선이 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 두 직선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

접근 방법

두 직선의 방정식을 표준형 $y=mx+n$의 꼴로 변형한 후 두 직선의 평행 · 수직 조건을 이용해도 되지만, 앞에서 정리한 직선의 방정식의 일반형의 평행 · 수직 조건을 이용해 봅니다.

Bible 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이

$$\begin{cases} \text{평행하다.} \Rightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'} \\ \text{수직이다.} \Rightarrow aa'+bb'=0 \end{cases}$$

상세 풀이

(1) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로 $\dfrac{1}{a-5}=\dfrac{a}{-6}\neq\dfrac{-1}{2}$

$\dfrac{1}{a-5}=\dfrac{a}{-6}$에서 $a^2-5a+6=0$, $(a-2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=2$ 또는 $a=3$

$\dfrac{a}{-6}\neq\dfrac{-1}{2}$에서 $a\neq3$이므로 $a=2$

(2) 주어진 두 직선이 서로 수직이므로

$$1\cdot(a-5)+a\cdot(-6)=0 \qquad \therefore a=-1$$

정답 ➡ (1) 2 (2) -1

보충 설명

구분 / 위치 관계	$\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases}$	$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$	연립방정식의 해의 개수
한 점에서 만난다. l, l'	$m\neq m'$	$\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$	한 쌍의 해를 가진다.
수직이다. l, l'	$mm'=-1$	$aa'+bb'=0$	
평행하다. l, l'	$m=m'$, $n\neq n'$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$	해가 없다.
일치한다. l, l'	$m=m'$, $n=n'$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$	해가 무수히 많다.

풀이집 p.160

숫자 바꾸기

05-1 두 직선 $3x+(a-2)y+1=0$, $ax+y+1=0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 직선이 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 두 직선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

◆ 다른 풀이

05-2 직선 $ax-y+1=0$이 직선 $2x-by-1=0$에 평행하고, 직선 $x-(b-3)y+3=0$에 수직일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4
④ 5 ⑤ 8

개념 넓히기 ★★★

05-3 세 직선 $x+2y-3=0$, $3x-4y-12=0$, $ax+y+1=0$으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형일 때, 모든 상수 a의 값의 합은?

① $-\frac{8}{3}$ ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$
④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ 0

정답 05-1 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ 05-2 ④ 05-3 ④

예제 06

선분의 수직이등분선의 방정식

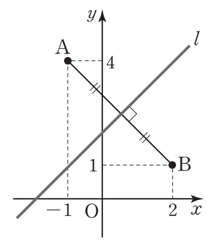
두 점 $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

접근 방법

선분 AB를 수직이등분하는 직선을 l이라고 하면 직선 l은 오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 수직이고, 선분 AB의 중점을 지납니다.

(1) 직선 l은 선분 AB의 중점을 지납니다.

(2) $l \perp \overline{AB}$이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1입니다.



Bible 선분의 중점과 기울기를 이용하여 선분의 수직이등분선의 방정식을 구한다.

상세 풀이

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-4}{2-(-1)}=-1$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$$y-\frac{5}{2}=1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y=x+2$$

정답 ➡ $y=x+2$

보충 설명

두 점 $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식이 선분 AB의 수직이등분선입니다.

풀이집 p.161

숫자 바꾸기

06-1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $A(2, -1)$, $B(4, 3)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선

(2) 두 점 $C(1, 1)$, $D(3, 1)$을 이은 선분 CD의 수직이등분선

(3) 두 점 $E(1, 1)$, $F(1, -3)$을 이은 선분 EF의 수직이등분선

표현 바꾸기

◆ 다른 풀이

06-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $A(1, 3)$, $B(5, 1)$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

(2) 두 점 $A(3, 1)$, $B(5, -3)$으로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

06-3 두 점 $A(a, 2)$, $B(-2, b)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $y=2x+\frac{3}{2}$일 때, $a+b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

11

정답 **06-1** (1) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (2) $x=2$ (3) $y=-1$
06-2 (1) $2x-y-4=0$ (2) $x-2y-6=0$ **06-3** ④

예제 07

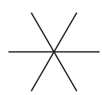
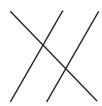
세 직선의 위치 관계

세 직선 $2x+y+3=0$, $x-y-6=0$, $ax-y=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

접근 방법

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 아래 Bible 에 정리하여 놓은 것처럼 3가지 경우가 있습니다. 주어진 두 직선 $2x+y+3=0$, $x-y-6=0$의 기울기가 서로 다르므로 (iii)의 경우는 생각하지 않아도 됩니다.

Bible

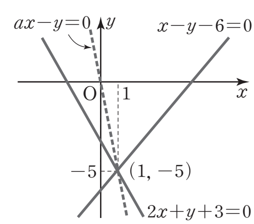
(i) 세 직선이 한 점에서 만날 때	(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때	(iii) 세 직선이 모두 평행할 때
		

상세 풀이

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같이 2가지가 있습니다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

두 직선 $2x+y+3=0$, $x-y-6=0$의 교점의 좌표가 $(1,\ -5)$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $ax-y=0$도 이 점을 지나면 삼각형이 이루어지지 않습니다.

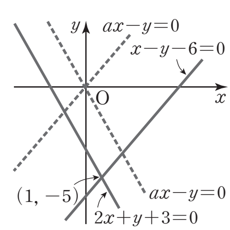


즉, 점 $(1,\ -5)$를 직선 $ax-y=0$에 대입하면

$$a+5=0 \qquad \therefore a=-5$$

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

두 직선 $2x+y+3=0$, $x-y-6=0$의 기울기가 각각 -2, 1이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $ax-y=0$이 두 직선 중 어느 한 직선과 평행하면 삼각형이 이루어지지 않습니다.



즉, $ax-y=0$에서 $y=ax$이므로

$$a=-2 \text{ 또는 } a=1$$

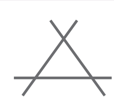
(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$$-5+(-2)+1=-6$$

정답 ➡ -6

보충 설명

세 직선이 삼각형을 이루는 위치 관계는 오른쪽 그림과 같습니다.



풀이집 p.162

숫자 바꾸기

07-1 세 직선 $y=x$, $y=ax-2$, $y=-2x+3$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

표현 바꾸기

07-2 세 직선 $3x+y-2=0$, $-x+y=0$, $ax+2y-3=0$에 의하여 생기는 교점이 2개가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆ ◆다른 풀이 ◆보충 설명

07-3 서로 다른 세 직선 $ax-y+2=0$, $x+by-3=0$, $2x-y+4=0$에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

정답 07-1 2 07-2 4 07-3 $\frac{3}{2}$

예제 08

일정한 점을 지나는 직선의 방정식

직선 $2x-y-4+k(x+y+1)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 이 점의 좌표를 구하여라.

접근 방법

'임의의 k에 대하여 ~', 'k의 값에 관계없이 ~'란 말이 나올 때는 k에 대한 항등식을 생각합니다. k에 대한 항등식이면 식을 k에 대하여 정리했을 때, k의 계수와 상수항이 모두 0이 되어야 합니다.

Bible k의 값에 관계없이 $f(x,\ y)+k\cdot g(x,\ y)=0 \Rightarrow f(x,\ y)=0$이고 $g(x,\ y)=0$

상세 풀이

$2x-y-4+k(x+y+1)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2x-y-4=0,\ x+y+1=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=-2$$

따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -2)$를 지납니다.

정답 ⇒ $(1,\ -2)$

보충 설명

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$의 해는 두 직선 $2x-y-4=0$, $x+y+1=0$의 교점의 좌표이므로 실수 k의 값에 관계없이 직선 $2x-y-4+k(x+y+1)=0$은 항상 두 직선 $2x-y-4=0$, $x+y+1=0$의 교점을 지난다는 것을 알 수 있습니다.

한편, **02 나머지정리** 단원에서 배운 수치대입법을 응용하여 k에 특정한 값을 대입하여 풀 수도 있습니다. 즉, k의 값에 관계없이 성립한다고 했으므로 k에 임의의 값을 2개 대입하였을 때 나오는 두 직선도 항상 일정한 점을 지나게 됩니다.

$k=1$을 대입하면 주어진 식은 $3x-3=0$ …… ㉠

$k=0$을 대입하면 주어진 식은 $2x-y-4=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$입니다.

따라서 점 $(1,\ -2)$는 두 직선의 교점이며 주어진 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점이 됩니다.

풀이집 p.163

숫자 바꾸기

08-1 직선 $x-2y+1+k(x+y-2)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 이 점의 좌표를 구하여라.

표현 바꾸기

08-2 직선 $(2k+1)x+(k-1)y+(k+2)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 반드시 지나는 사분면은?

① 제1사분면　② 제2사분면　③ 제3사분면
④ 제4사분면　⑤ 제2, 4사분면

개념 넓히기 ★★★　◆보충 설명

08-3 두 직선 $4x+y-4=0$과 $mx-y-2m+2=0$이 제1사분면에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위는?

① $-1<m<0$　② $-1<m<2$　③ $0<m<2$
④ $m>2$　⑤ $m<-1$

11

정답 08-1 (1, 1)　08-2 ②　08-3 ②

예제 09

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $3x-2y-6=0$, $x+2y-1=0$의 교점과 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

접근 방법

예제 08에서 배운 것처럼 한 점에서 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에 대하여 직선

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$$

은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선의 교점을 지난다는 사실을 이용합니다.

Bible 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ (단, k는 실수이다.)

상세 풀이

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$3x-2y-6+k(x+2y-1)=0 \text{ (단, } k\text{는 실수이다.)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $x=2$, $y=-1$을 대입하면

$$3\cdot2-2\cdot(-1)-6+k\{2+2\cdot(-1)-1\}=0$$

$$\therefore k=2$$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$$3x-2y-6+2(x+2y-1)=0$$

$$\therefore 5x+2y-8=0$$

정답 ➡ $5x+2y-8=0$

보충 설명

주어진 두 직선의 교점을 먼저 구한 후에 그 교점과 주어진 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구해도 됩니다.

실제로 두 직선의 방정식 $3x-2y-6=0$, $x+2y-1=0$을 연립하여 풀면

$$x=\frac{7}{4},\ y=-\frac{3}{8}$$

따라서 두 점 $(2,\ -1)$, $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{3}{8}\right)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 됩니다.

풀이집 p.164

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

09-1 두 직선 $x+y-2=0$, $2x-y-1=0$의 교점과 점 $(-2, -3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

표현 바꾸기

09-2 다음 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 직선 $6x+16y+3=0$, $x+6y-12=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+2y-3=0$에 평행한 직선

(2) 두 직선 $x-y-4=0$, $2x+y-5=0$의 교점을 지나고, 직선 $2x-6y+3=0$에 수직인 직선

개념 넓히기 ★★☆

◆ 보충 설명

11

09-3 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점을 지나고, 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

정답 **09-1** $4x-3y-1=0$ **09-2** (1) $x+2y+3=0$ (2) $3x+y-8=0$
09-3 $2x-3y+4=0$

예제 10

점이 나타내는 도형의 방정식

두 점 A, B 사이의 거리가 6일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=24$인 점 P가 나타내는 도형을 구하여라.

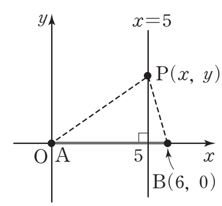
접근 방법

특정한 조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 그 조건을 x, y로 나타낸 식 $f(x,\ y)=0$을 점 P가 나타내는 도형의 방정식이라고 합니다.

즉, 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구합니다.

Bible 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한다.

상세 풀이



오른쪽 그림과 같이 점 A를 좌표평면 위의 원점에 놓고, $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 점 B의 좌표를 $(6,\ 0)$이라고 할 때, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=24$에서

$$(x^2+y^2)-\{(x-6)^2+y^2\}=24$$

이 식을 전개하여 정리하면

$$12x=60 \qquad \therefore x=5$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $5:1$로 내분하는 점을 지나고 선분 AB에 수직인 직선입니다.

정답 ➡ 선분 AB를 $5:1$로 내분하는 점을 지나고 선분 AB에 수직인 직선

보충 설명

점 A의 좌표를 $(-3,\ 0)$, 점 B의 좌표를 $(3,\ 0)$으로 놓고 풀어도 같은 결과를 얻을 수 있습니다.

풀이집 p.164

숫자 바꾸기

10-1 두 점 A, B 사이의 거리가 8일 때, $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=32$인 점 P가 나타내는 도형을 구하여라.

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

10-2 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때, 점 $Q(a-b,\ a+b)$가 나타내는 도형의 방정식은?

① $x=1$ ② $y=2$ ③ $x-y=-4$
④ $x+y=0$ ⑤ $x+y=2$

개념 넓히기 ★★☆

◆ 보충 설명

10-3 점 $A(8,\ -6)$과 직선 $4x-3y+25=0$ 위를 움직이는 점 P를 이은 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점이 나타내는 도형의 방정식은 $y=f(x)$이다. $f(6)$의 값을 구하여라.

11

정답 **10-1** 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 지나고 선분 AB에 수직인 직선
10-2 ② **10-3** 8

점과 직선 사이의 거리

예제 11

다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $3x-4y+8=0$, $3x-4y-2=0$　　(2) $y=x+1$, $y=x+3$

접근 방법

평행한 두 직선 사이의 거리는 평행한 두 직선에 수직인 직선을 그었을 때 생기는 두 교점 사이의 거리입니다. 즉, 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점에서 다른 직선까지의 거리이므로 어떤 점을 선택하든지 거리는 동일합니다. 따라서 한 직선 위의 임의의 점을 잡아 다른 직선까지의 거리를 구합니다.
이때, 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 적용하려면 직선의 방정식은 반드시 $ax+by+c=0$ 꼴로 변형해야 합니다.

Bible 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

상세 풀이

(1) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y+8=0$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리와 같습니다.
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot0-4\cdot2-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{25}}=2$$

(2) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x+1$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$과 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리와 같습니다.
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는

$$\frac{|0-1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

정답 ➡ (1) 2 (2) $\sqrt{2}$

보충 설명

평행하지 않은 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위에서 선택하는 점의 위치에 따라 다른 한 직선에 이르는 거리가 달라지므로 두 직선 사이의 거리를 구할 수 없습니다.
따라서 두 직선 사이의 거리는 두 직선이 평행한 경우에만 구할 수 있습니다.

풀이집 p.165

숫자 바꾸기

11-1 다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $4x+3y+1=0$, $4x+3y+6=0$ (2) $y=-2x-1$, $y=-2x+4$

표현 바꾸기

11-2 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선 l과 점 $(0,\ 2)$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, 직선 l의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

11-3 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$, $\mathrm{C}(-3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

정답 **11-1** (1) 1 (2) $\sqrt{5}$ **11-2** ① **11-3** ③