단원 ISSUE

이 단원에서는 **합성함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하는 문제, 역함수의 그래프의 성질에 대한 문제** 등이 자주 출제되며 합성함수와 역함수에 대한 정확한 이해가 있어야 응용 문제에 대한 접근이 용이하므로 이를 중점적으로 학습합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. 두 집합 $X=\{1,2,6,9\}$, $Y=\{y|y는 자연수\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$를 $f(x)=(x의\ 약수의\ 개수)$, $I(x)$를 항등함수로 정의할 때, 함수 f의 치역 $\{a,b,c,d\}$에 대하여 $I(a)+I(b)+I(c)+I(d)$의 값은?

① 8　② 9
③ 10　④ 11
⑤ 12

[스스로 확인하기]

2. 다음 중 일대일대응인 함수는?

① $y=1$　② $x=4$
③ $y=x+1$　④ $y=x^2$
⑤ $|x|+|y|=1$

[스스로 마무리하기]

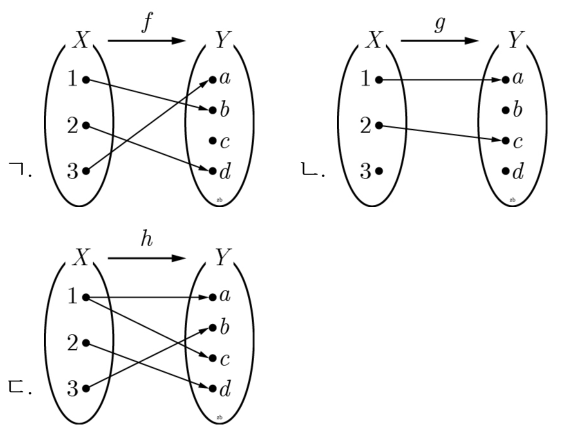
3. 정의역이 $\{-2,3\}$인 두 함수 $f(x)=ax+b$와 $g(x)=-\frac{1}{25}(x+2)^2$에 대하여 $f=g$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① $-\frac{3}{5}$　② $-\frac{2}{5}$
③ $-\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{5}$
⑤ $\frac{2}{5}$

[스스로 마무리하기]

4. 다음 <보기>의 대응 관계 중 집합 X에서 집합 Y로의 함수인 것 중 치역의 원소의 개수가 3개인 것을 모두 고른 것은?

<보기>



① ㄱ　② ㄴ
③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄴ, ㄷ

[스스로 확인하기]

5. 두 함수 $f(x)=3x^2-4x+5$, $g(x)=2x^2+2$의 정의역이 X일 때, $f=g$인 집합 X의 개수는?

① 2　② 3
③ 4　④ 5
⑤ 6

[스스로 확인하기]

6. 집합 $X=\{x|x는 자연수\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f는 상수함수이고, g는 항등함수이다. $f(1)=g(1)=1$일 때, $f(5)+g(5)$의 값을 구하면?

① 2　② 5
③ 6　④ 10
⑤ 16

[스스로 확인하기]

7. 두 집합 $X=\{x|a \le x \le 2\}$, $Y=\{y|1 \le y \le b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=-x+c$가 일대일 대응일 때, $a+b+c$의 값은?

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

[스스로 확인하기]

8. 두 집합 $X=\{a, b, c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일 대응의 개수를 m, 상수함수의 개수를 n이라 할 때, mn의 값은?

① 20　② 19　③ 18　④ 17　⑤ 16

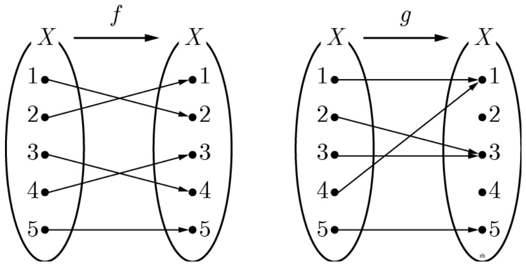
[스스로 확인하기]

9. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ \dfrac{1}{2}x & x<0 \end{cases}$, $g(x)=2x+3$에 대하여 함수 h가 $h \circ g=f$를 만족할 때, $h(-1)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\dfrac{5}{2}$

[스스로 마무리하기]

10. 두 함수 f, g가 다음 그림과 같을 때, $g(x)=h(f(x))$를 만족하는 함수 h에 대하여 $g(f(4))+10h(1)$의 값을 구하면?



① 15　② 22　③ 33　④ 40　⑤ 44

[스스로 확인하기]

11. 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여 $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2$, $(f \circ h)(x)=g(x)$일 때, $h(5)$의 값은?

① 13　② 15　③ 18　④ 22　⑤ 26

[스스로 확인하기]

12. 두 함수 $f(x)=|x|-4$, $g(x)=\begin{cases} -x^2+4 & (x \ge 0) \\ x^2+4 & (x<0) \end{cases}$에 대하여 $g(f(k))=3$을 만족하는 실수 k의 값을 $\alpha, \beta\ (\alpha>\beta)$라 하자. 이때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면?

① 13　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 26

[스스로 확인하기]

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=3x-1$, $g(x)=2x+k$에 대하여 $f \circ g=g \circ f$가 되도록 하는 상수 k의 값은?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

[스스로 확인하기]

14. 두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2$에서 $(f \circ h)(x)=g(x)$를 만족하는 함수 $h(x)$는?

① $h(x)=\dfrac{1}{3}x$

② $h(x)=\dfrac{1}{3}x+2$

③ $h(x)=x^2+2$

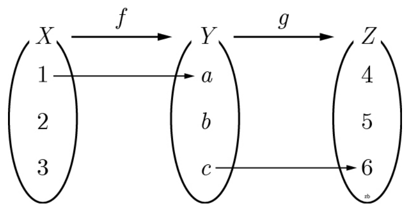
④ $h(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}$

⑤ $h(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

15. 다음 그림과 같이 세 집합 $X=\{1,2,3\}$ $Y=\{a,b,c\}$, $Z=\{4,5,6\}$에 대하여 일대일대응인 두 함수 $f:X\to Y$와 $g:Y\to Z$가 $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$를 만족할 때, $f(3)$의 값은?



① a ② b
③ c ④ b,c모두 가능하다
⑤ a,b,c 모두 가능하다.

[스스로 마무리하기]

16. 임의의 실수 x에 대하여 $(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)$의 최솟값은?

① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

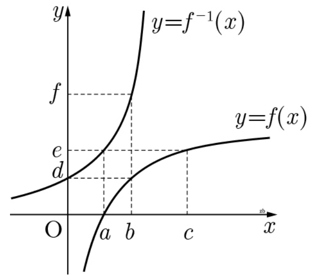
[스스로 확인하기]

17. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{k}{3}(x\geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다. 이 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -4
③ -1 ④ 2
⑤ 4

[스스로 확인하기]

18. 다음 그림은 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프이다. 이 때, $(f\circ f)^{-1}(0)$의 값은?



① a ② b
③ c ④ d
⑤ f

[스스로 확인하기]

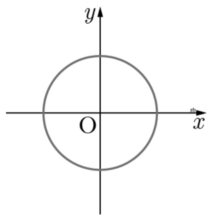
19. 두 집합 X, Y가 유한집합이고, 함수 $f:X\to Y$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

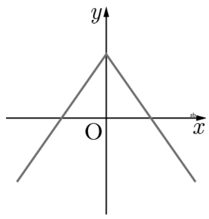
① $n(X)=n(Y)$
② $f(x_1)=f(x_2)$이면, $x_1=x_2$이다.
③ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
④ $x_1=x_2$ 이면 $f(x_1)=f(x_2)$이다.
⑤ f의 치역은 Y 의 진부분집합이다.

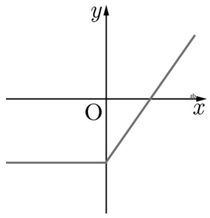
I410-ECN-0199-2021-001-001401574

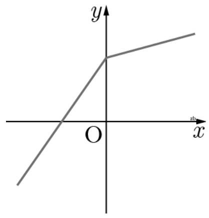
[스스로 확인하기]

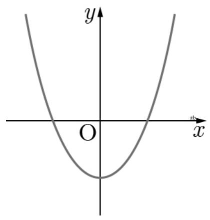
20. 다음은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수의 그래프이다. 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


[스스로 마무리하기]

21. 집합 $X=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$를 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 4) \\ 2 & (x=5) \end{cases}$로 정의할 때, 함수 $g: X \to X$는 f의 역함수이다.
$(f \circ g)(3)+(f \circ g)(4)$의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

[스스로 마무리하기]

22. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=3x+15,\ g(x)=\begin{cases} 3x & (x<12) \\ x+24 & (x \ge 12) \end{cases}$에 대하여 $f(g^{-1}(30))+f^{-1}(g(30))$의 값은? (단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g의 역함수이다.)

① 52　② 55　③ 58　④ 62　⑤ 66

[스스로 마무리하기]

23. 두 함수 $f(x)=ax+b(a \neq 0),\ g(x)=x+c$에 대하여 $(f \circ g)(x)=2x-3,\ f^{-1}(3)=-2$가 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a,\ b, c$는 상수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[스스로 마무리하기]

24. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$에 대하여 $g(x)=f(x-2)$라 할 때, $g^{-1}(9)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

25. 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}+2$의 역함수 $f^{-1}(x)$는?

① $f^{-1}(x)=x^2+2x+1\ (x\ge -1)$
② $f^{-1}(x)=x^2-2x+1\ (x\ge -1)$
③ $f^{-1}(x)=x^2+4x+3\ (x\ge 2)$
④ $f^{-1}(x)=x^2-4x+3\ (x\ge 2)$
⑤ $f^{-1}(x)=x^2+x+3\ (x\ge 2)$

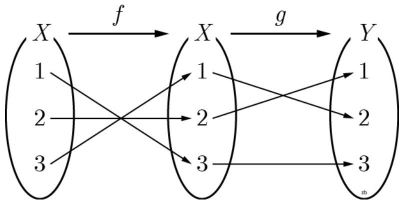
[스스로 마무리하기]

26. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+2(x\le 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B의 중점의 좌표가 (p, q)일 때, $p+q$의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$
③ 2　④ $\frac{5}{2}$
⑤ 3

[스스로 확인하기]

27. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 X로의 두 함수 $f,\ g$를 다음 그림과 같이 정의한다. 이 때, $(g\circ f^{-1})(3)+(f\circ g^{-1})(3)$의 값은?



① 2　② 3
③ 4　④ 5
⑤ 6

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ③
[해설] 1의 약수는 1이므로 $f(1)=1$
2의 약수는 1,2이므로 $f(2)=2$
6의 약수는 1,2,3,6이므로 $f(6)=4$
9의 약수는 1,3,9이므로 $f(9)=3$
따라서 함수 f의 치역은 $\{1,2,3,4\}$이고,
구하는 값은 $1+2+3+4=10$ 이다.

2) [정답] ③
[해설] ① $y=1$ 은 $(-1,1)$, $(1,1)$을 동시에 지나므로 일대일 대응이 아니다.
② $x=4$ 는 $(4,1)$, $(4,-1)$을 동시에 지나므로 하나의 x값에 대하여 복수의 y값이 존재하므로 함수가 아니다.
③ $y=x+1$ 는 임의의 x값에 대하여 유일한 y값이 결정되므로 일대일 대응이다.
④ $y=x^2$ 는 $(-1,1)$, $(1,1)$을 동시에 지나므로 일대일 대응이 아니다.
⑤ $|x|+|y|=1$ 는 $x=2$에 대한 y값이 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

3) [정답] ①
[해설] 함수 $g(x)=-\frac{1}{25}(x+2)^2$에서
$g(-2)=0=f(-2)=-2a+b$ …… ㉠
$g(3)=-1=f(3)=3a+b$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-\frac{1}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$
$\therefore a+b=-\frac{3}{5}$

4) [정답] ①
[해설] ㄱ 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 f는 함수이다.
ㄴ 집합 X의 원소 3에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 g는 함수가 아니다.
ㄷ 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 a,c 두 개이므로 h는 함수가 아니다.
따라서 함수인 것은 ㄱ이고,
이 중 치역의 원소의 개수가 3인 것은 ㄱ이다.

5) [정답] ②
[해설] $f(x)=g(x)$이므로 $3x^2-4x+5=2x^2+2$에서
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1,3$
이 때, 집합 X는 집합 $\{1,3\}$의 부분집합 중 공집합을 제외한 것이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는 $2^2-1=3$

6) [정답] ③
[해설] $f(1)=g(1)=1$에서
$f(x)$는 상수함수이므로 $f(x)=1$
$g(x)$는 항등함수이므로 $g(x)=x$
$\therefore f(5)+g(5)=1+5=6$

7) [정답] ⑤
[해설] 함수 $f(x)$는 x의 값이 커짐에 따라 y의 값이 작아져야 한다.
즉 f가 일대일 대응이므로 $f(a)=b$, $f(2)=1$,
$f(a)=-a+c=b$ …… ㉠
$f(2)=-2+c=1$ $\therefore c=3$
$c=3$을 ㉠에 대입하면 $-a+3=b$ $\therefore a+b=3$
$\therefore a+b+c=6$

8) [정답] ③
[해설] 일대일 대응이 되려면 a,b,c에 각각 하나씩 대응이 되어야 하므로 그 개수는 6개다.
또, 상수함수는 x의 값에 관계없이 그 값이 일정하므로 $f(x)=a$, $f(x)=b$, $f(x)=c$의 3개다.
$\therefore mn=6\times3=18$

9) [정답] ②
[해설] $h\circ g=f$에서 $h(g(x))=f(x)$
$g(x)=-1$일 때, $2x+3=-1$에서 $2x=-4$
$\therefore x=-2$
$h(-1)=f(-2)=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$

10) [정답] ③
[해설] 주어진 그림에 의하여 $g(f(4))=g(3)=3$
또한, $g(x)=h(f(x))$에서 $f(x)=1$일 때,
$x=2$이므로 $h(1)=h(f(2))=g(2)=3$
$g(f(4))+10h(1)=3+10\times3=33$

11) [정답] ①
[해설] $(f\circ h)(x)=g(x)$에서 $f(h(x))=g(x)$이므로
$f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2$, $(f\circ h)(x)=g(x)$일 때
양변에 $x=5$를 대입하면
$f(h(5))=g(5)$, $2h(5)-1=25$ 이므로
$h(5)=13$이다.

12) [정답] ②
[해설] $f(k)=t$라 하면
$g(t)=3$에서 $g(t)=\begin{cases}-t^2+4 & (t\geq0)\\ t^2+4 & (t<0)\end{cases}$
(i) $t\geq0$일 때
$-t^2+4=3$에서 $t^2=1$, $\therefore t=1$ $(\because t\geq0)$
(ii) $t<0$일 때
$t^2+4=3$에서 $t^2=-1$
이 때, t의 값은 실수이므로 만족하는 t의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $f(k)=1$이므로
$|k|-4=1$, $|k|=5$ $\therefore k=\pm5$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

따라서 $\alpha=5$, $\beta=-5$ $(\alpha>\beta)$이므로
$\alpha-\beta=5-(-5)=10$

13) [정답] ②
[해설] $f(x)=3x-1$, $g(x)=2x+k$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3(2x+k)-1$
$=6x+3k-1$ …… ㉠
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=2(3x-1)+k=6x-2+k$ …… ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠=㉡이므로
$6x+3k-1=6x-2+k$
$2k=-1$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

14) [정답] ④
[해설] $(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-2$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$3h(x)-2=x^2$, $3h(x)=x^2+2$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$

15) [정답] ③
[해설] f와 g가 일대일 대응이고, $f(1)=a$이므로
$f(2)=b$또는 $f(2)=c$이다.
(i) $f(2)=b$일 때, $f(3)=c$
이 때, $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(b)=4$
(ii) $f(2)=c$일 때
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(c)=6\neq 4$ (모순)
따라서 (i), (ii)에 의해 $f(3)=c$이다.

16) [정답] ④
[해설] $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=x^2-4x$라 하면
주어진 식은 $(g\circ f)(x)$이다.
$f(x)=(x+1)^2-1$이므로 $f(x)\geq -1$이고,
$x\geq -1$일 때 $g(x)=(x-2)^2-4\geq -4$이므로
주어진 식의 최솟값은 -4이다.

17) [정답] ④
[해설] 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{k}{3}\,(x\geq 0)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{k}{3}\,(x\geq 0)$의 그래프와
직선 $y=x$의 교점과 같다.
즉, $\frac{1}{3}x^2+\frac{k}{3}=x$에서 $x^2-3x+k=0$ …… ㉠
이때, ㉠의 두 근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의
x좌표 이므로 두 교점을 각각
(α,α), (β,β)라 하면 α, β는 이차방정식 ㉠의
두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$
따라서 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로
$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}$ 에서 $(\beta-\alpha)^2=1$
$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4k=1$
$\therefore k=2$

18) [정답] ②
[해설] $(f\circ f)^{-1}(0)=(f^{-1}\circ f^{-1})(0)$
$=f^{-1}(f^{-1}(0))=f^{-1}(d)$
$f^{-1}(d)=k$ 라 하면 역함수의 성질에 의하여
$f(k)=d$ $\therefore k=b$

19) [정답] ⑤
[해설] ① 함수 f의 역함수가 존재하므로
f는 일대일 대응이다. 이때, 두 집합 X, Y가
유한집합이므로 $n(X)=n(Y)$이어야 한다.
② 함수 f는 일대일 대응이므로,
$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이고
대우 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다' 가 참이다.
③ 함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=f^{-1}(x)$는
직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
④ 함수의 정의에 의하여 x_1에 대응하는 y의
값은 오직 하나이므로, $x_1=x_2$ 이면
$f(x_1)=f(x_2)$이다.
⑤ $f(X)=Y$, 즉 f의 치역은
Y의 진부분집합이 아니라 Y와 같아야 한다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

20) [정답] ④
[해설] 함수 $f:R\to R$의 역함수 f^{-1}가 존재하기
위해서는 함수 f가 일대일 대응이어야 한다.
따라서 보기의 그래프 중 실수 전체의 집합에서
증가하거나 감소하는 것은 ④이다.

21) [정답] ③
[해설] $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\leq 4) \\ 2 & (x=5)\end{cases}$에서
$f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=5$, $f(5)=2$
이때, g가 f의 역함수이므로
$g(3)=2$, $g(4)=3$,
$(f\circ g)(3)+(f\circ g)(4)=f(2)+f(3)=7$

22) [정답] ③
[해설] $f(x)=3x+15$에서 $f(x)$의 역함수는
$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-5$
또한, $g(x)=\begin{cases} 3x & (x<12) \\ x+24 & (x\geq 12)\end{cases}$에서
$g(x)$의 역함수는
$g^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x & (x<36) \\ x-24 & (x\geq 36)\end{cases}$
$f(g^{-1}(30))+f^{-1}(g(30))$
$=f\left(\frac{1}{3}\times 30\right)+f^{-1}(30+24)=f(10)+f^{-1}(54)$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$=(3\times 10+15)+\left(\frac{1}{3}\times 54-5\right)$

$=45+13=58$

23) [정답] ④

[해설] $(f\circ g)(x)=f(x+c)$

$=a(x+c)+b=ax+ac+b$

$\therefore a=2,\ ac+b=-3$ …… ㉠

$f^{-1}(3)=-2$이므로 $f(-2)=3$

$\therefore -2a+b=3$ …… ㉡

㉠,㉡에서 $a=2,\ b=7,\ c=-5$

$\therefore a+b+c=4$

24) [정답] ⑤

[해설] $g^{-1}(9)=k$라 하면 $g(k)=9$

$g(k)=f(k-2)=9$에서

$(k-2)^2=9$ 또는 $k-2=9$

$k-2\geq 0$일 때, $(k-2)^2=9$

즉 $k-2=3$ 또는 $k-2=-3$

이때 만족하는 $k=5$

$k-2<0$일 때, $k-2=9$이므로 만족하지 않는다.

$\therefore k=5$

25) [정답] ④

[해설] 함수 $y=f(x)$의 치역이 $\{y|y\geq 2\}$이므로

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$

$\sqrt{x+1}+2=y$로 놓고 x에 대하여 풀면

$\sqrt{x+1}=y-2$

$x+1=(y-2)^2\quad \therefore x=(y-2)^2-1$

x와 y를 바꾸면 $y=(x-2)^2-1$

$\therefore f^{-1}(x)=(x-2)^2-1\ =x^2-4x+3$ (단, $x\geq 2$)

26) [정답] ⑤

[해설] 함수 $f(x)=-(x-2)^2+2\ (x\leq 2)$의 그래프와 그 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 함수 $f(x)=-(x-2)^2+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은

$-(x-2)^2+2=x,\quad x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0\quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 교점의 좌표는 $(1,1)$, $(2,2)$이므로

두 점의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{1+2}{2}\right)$

즉 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이다. $\therefore p+q=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

27) [정답] ②

[해설] $(g\circ f^{-1})(3)+(f\circ g^{-1})(3)$

$=g(f^{-1}(3))+f(g^{-1}(3))$

$=g(1)+f(3)$ $(\because f(1)=3,\ g(3)=3)$

$=2+1=3$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574