01 방정식의 실근의 개수

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표이다.
⇨ 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근
⇨ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
⇨ 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수이다.

◪ 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

1. $x^3-3x-2=0$

2. $x^3-3x^2+1=0$

3. $x^3+3x^2-2=0$

4. $x^3-3x^2+3=0$

5. $x^3+3x^2+3x+3=0$

6. $x^3-6x^2+9x-3=0$

7. $x^3+6x^2+9x+4=0$

8. $x^3+3x=3x^2+2$

9. $x^4-2x^2-1=0$

10. $2x^4-4x^2+1=0$

11. $3x^4=6x^2-3$

12. $x^4+2x^3=-2x^4+3x^2+1$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

02 삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같이 판별할 수 있다.

(1) (극댓값)$\times$(극솟값)<0 $\Leftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

(2) (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$ $\Leftrightarrow$ 한 실근과 중근(서로 다른 두 실근)

(3) (극댓값)$\times$(극솟값)>0 $\Leftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

◪ 방정식 $x^3-6x^2+9x+a=0$의 근이 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 a의 값 또는 범위를 구하여라.

13. 서로 다른 세 실근

14. 서로 다른 두 실근

15. 한 실근과 두 허근

◪ 방정식 $x^3-3x^2-9x+a=0$의 근이 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 a의 값 또는 범위를 구하여라.

16. 서로 다른 세 실근

17. 한 실근과 중근

18. 한 실근과 두 허근

◪ 방정식 $x^3-3x+3-a=0$의 근이 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 a의 값 또는 범위를 구하여라.

19. 서로 다른 세 실근

20. 한 실근과 중근

21. 한 실근과 두 허근

◪ 방정식 $2x^3-9x^2+12x+a=0$의 근이 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 a의 값 또는 범위를 구하여라.

22. 서로 다른 세 실근

23. 한 실근과 중근

24. 한 실근과 두 허근

◪ 다음 삼차방정식의 근을 판별하여라.

25. $4x^3-6x^2+1=0$

26. $x^3-3x-2=0$

27. $x^3-3x^2+4=0$

28. $2x^3-9x^2+12x-2=0$

◪ 다음 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

29. $y=x^3-a,\ y=6x^2$

30. $y=x^3-4x^2+6x,\ y=\frac{1}{2}x^2-a$

31. $y=x^3-x^2+9x,\ y=5x^2-a$

32. $y=x^3+x^2,\ y=4x^2-a$

33. $y=x^3+2x^2-x,\ y=5x^2-x-a$

34. $y=x^3-4x^2+6x,\ y=2x^2-3x+a$

35. $y=x^3-9x,\ y=-3x^2-a$

36. $y=x^3-3x^2+9x,\ y=3x^2-a$

◪ 다음 물음에 답하여라.

37. 방정식 $x^3-a=6x^2-9x$가 한 개의 실근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

38. 두 곡선 $y=x^3-2x^2-5x,\ y=-5x^2+4x+a$가 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

39. 두 곡선 $y=3x^3-3x^2-4x,\ y=x^3+8x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

40. 방정식 $2x^3-6x=a$가 한 개의 양의 근과 서로 다른 두 개의 음의 근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 정하여라.

41. 방정식 $4x^3-3x=a$가 서로 다른 두 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

42. 방정식 $x^3-3x+a=0$이 한 개의 음의 근과 서로 다른 두 개의 양의 근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 정하여라.

43. 방정식 $x^3-3x^2-9x+a=0$이 한 개의 양의 근과 서로 다른 두 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

44. 방정식 $-x^3+3x^2=a$이 서로 다른 두 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

03 부등식에의 활용

(1) 모든 실수 x에 대하여
① 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하려면
⇨ ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
② 부등식 $f(x) \leq 0$이 성립하려면
⇨ ($f(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.
(2) $x \geq a$일 때,
① 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하려면
⇨ ($x \geq a$일 때, $f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
② 부등식 $f(x) \leq 0$이 성립하려면
⇨ ($x \geq a$일 때, $f(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.

◪ 다음 부등식이 성립함을 보여라.

45. 모든 실수 x에 대하여 $x^4-4x+3 \geq 0$

46. 모든 실수 x에 대하여 $x^4+4x+3 \geq 0$

47. 모든 실수 x에 대하여 $3x^4+1 \geq 4x^3$

48. $x \geq 0$일 때, $x^3 \geq 3x^2-4$

49. $x \geq 0$일 때, $x^3-x^2 \geq x-1$

50. $x \geq 0$일 때, $x^3+4 > 2x^2$

51. $x \geq 0$일 때, $x^3 \geq 3x^2-4$

52. $x \geq 0$일 때, $2x^3 > 3x^2-2$

53. $x \geq 0$일 때, $x^3-6x^2+9x+2 > 0$

54. $x \geq 1$일 때, $x^3-x > 2x-3$

55. $x > 2$일 때, $x^3-x^2 > -x+6$

56. $-1 \leq x \leq 1$일 때, $x^3+3x^2 > 6x^2-5$

57. $1 \leq x \leq 3$일 때, $x^3-12x+5 < 0$

◪ 다음 물음에 답하여라.

58. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x+k > 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

59. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4 \geq 4x-k$가 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

60. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-4x^3 \geq k$가 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

61. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+x^3+x^2+k \geq 0$이 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

62. 두 함수 $f(x)=3x^4-2x+4$, $g(x)=4x^3-2x+k$에 대하여 실수 전체의 집합에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

63. $x>0$에서 부등식 $x^3-5x^2+3x+k>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 범위를 구하여라.

64. $x \geq 0$일 때, 부등식 $2x^3-x^2+k \geq 2x^2+12x$가 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

65. $x \geq -2$에서 부등식 $4x^3-3x^2-6x+k \geq 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

66. 부등식 $x^3-x^2+k \geq 2x^2+9x$가 구간 $[-2, 1]$에서 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

67. $0 \leq x \leq 3$에서 부등식 $x^4-2 \geq 4x^3-k$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 범위를 구하여라.

68. $0 \leq x \leq 3$에서 부등식 $0 \leq 2x^3-9x^2+12x+k \leq 12$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 범위를 구하여라.

69. $f(x)=x^3+x^2+x$, $g(x)=4x^2+x+k$에 대하여 구간 $[1, 3]$에서 $f(x) \geq g(x)$가 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

정답 및 해설

1) 2

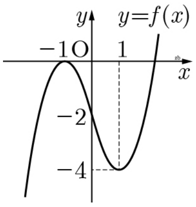
⇨ $f(x)=x^3-3x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



2) 3

⇨ $f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면

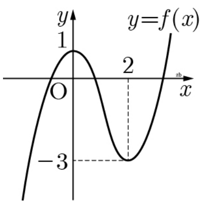
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 3이다.



3) 3

⇨ $f(x)=x^3+3x^2-2$로 놓으면

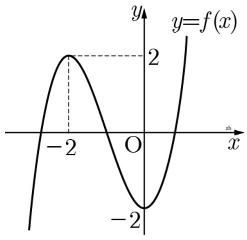
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근은 3개이다.



4) 3

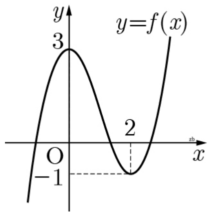
⇨ $f(x)=x^3-3x^2+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



5) 1

⇨ $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$이라 하면

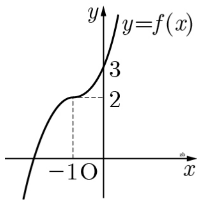
$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 1이다.



6) 3

⇨ $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$이라 하면

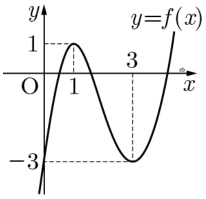
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$이 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 3이다.



7) 2

⇨ $f(x)=x^3+6x^2+9x+4$로 놓으면

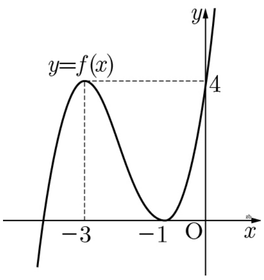
$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근은 2개이다.



8) 1

⇨ $x^3+3x=3x^2+2$에서 $x^3-3x^2+3x-2=0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x-2$로 놓으면

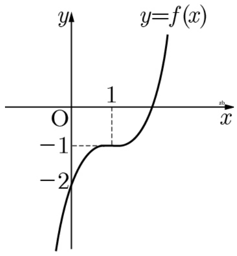
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근은 1개이다.



9) 2

⇨ $f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하면

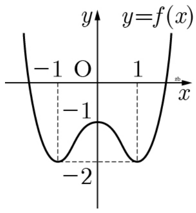
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 2이다.



10) 4

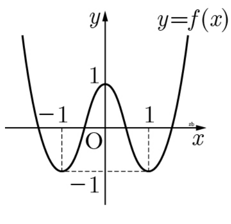
⇨ $f(x)=2x^4-4x^2+1$이라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 주어진 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 가는다.



11) 2

⇨ $3x^4=6x^2-3$에서 $3x^4-6x^2+3=0$

$f(x)=3x^4-6x^2+3$으로 놓으면

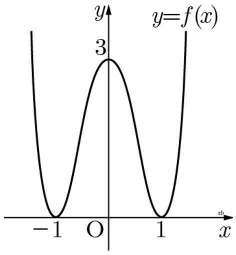
$f'(x)=12x^3-12x=12x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근은 2개이다.



12) 2

⇨ $x^4+2x^3=-2x^4+3x^2+1$에서

$3x^4+2x^3-3x^2-1=0$

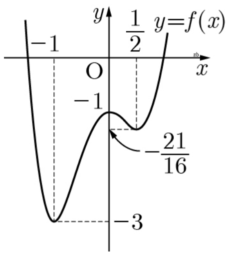
$f(x)=3x^4+2x^3-3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=12x^3+6x^2-6x=6x(x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{21}{16}$	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



13) $-4<a<0$

⇨ $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+4$, $x=3$에서 극솟값 a을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$a(a+4)<0 \qquad \therefore\ -4<a<0$

14) $a=-4$ 또는 $a=0$

⇨ $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+4$, $x=3$에서 극솟값 a을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$a(a+4)=0 \qquad \therefore\ a=0$ 또는 $a=-4$

15) $a<-4$ 또는 $a>0$

⇨ $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+4$, $x=3$에서 극솟값 a을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$a(a+4)>0 \qquad \therefore\ a<-4$ 또는 $a>0$

16) $-5<a<27$

⇨ $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)<0 \qquad \therefore\ -5<a<27$

17) $a=-5$ 또는 $a=27$

⇨ $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)=0 \qquad \therefore\ a=-5$ 또는 $a=27$

18) $a<-5$ 또는 $a>27$

⇨ $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(3)>0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)>0 \qquad \therefore\ a<-5$ 또는 $a>27$

19) $1<a<5$

⇨ $f(x)=x^3-3x+3-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-a+5$	$\searrow$	$-a+1$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-a+5$, $x=1$에서 극솟값 $-a+1$을 갖고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 극댓값과 극솟값이 서로 다른 부호이어야 하므로 $(-a+5)(-a+1)<0$에서 $(a-5)(a-1)<0$

$\therefore\ 1<a<5$

20) $a=1$ 또는 $a=5$

⇨ $f(x)=x^3-3x+3-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-a+5$	$\searrow$	$-a+1$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-a+5$, $x=1$에서 극솟값 $-a+1$을 갖고 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$(-a+5)(-a+1)=0$　　$\therefore a=5$ 또는 $a=1$

21) $a<1$ 또는 $a>5$

⇨ $f(x)=x^3-3x+3-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-a+5$	$\searrow$	$-a+1$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-a+5$, $x=1$에서 극솟값 $-a+1$을 갖고 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$(-a+5)(-a+1)>0$　　$\therefore a<1$ 또는 $a>5$

22) $-5<a<-4$

⇨ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a+4$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+5$, $x=2$에서 극솟값 $a+4$를 갖고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 극댓값과 극솟값이 서로 다른 부로이어야 하므로

$(a+5)(a+4)<0$　　$\therefore$ $-5<a<-4$

23) $a=-5$ 또는 $a=-4$

⇨ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a+4$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+5$, $x=2$에서 극솟값 $a+4$를 갖고 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$(a+5)(a+4)=0$　　$\therefore a=-5$ 또는 $a=-4$

24) $a<-5$ 또는 $a>-4$

⇨ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a+4$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+5$, $x=2$에서 극솟값 $a+4$를 갖고 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$(a+5)(a+4)>0$　　$\therefore$ $a<-5$ 또는 $a>-4$

25) 서로 다른 세 실근

⇨ $f(x)=4x^3-6x^2+1$로 놓으면

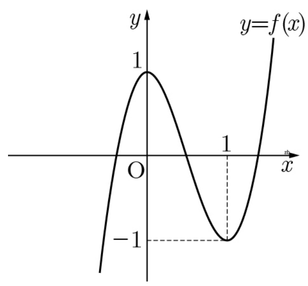
$f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



26) 한 실근과 중근

⇨ $f(x)=x^3-3x-2$로 놓으면

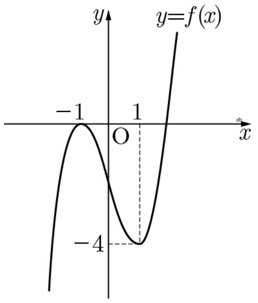
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이므로 주어진 방정식은 한 실근과 중근을 갖는다.



27) 한 실근과 중근

⇨ $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

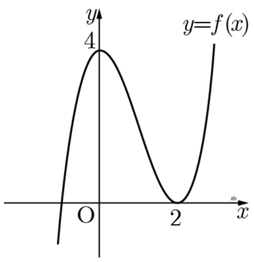
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이므로 주어진 방정식은 한 실근과 중근을 갖는다.



28) 한 실근과 두 허근

⇨ $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$로 놓으면

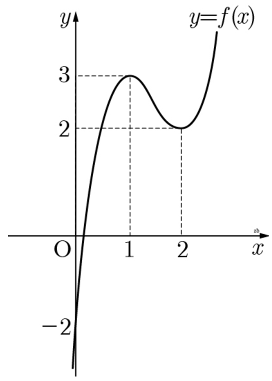
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이므로 주어진 방정식은 한 실근과 두 허근을 갖는다.



29) $-32<a<0$

⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$x^3-a=6x^2$, 즉 $x^3-6x^2-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

따라서 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(4)<0$이어야 하므로

$(-a)(-32-a)<0$, $a(a+32)<0$

$\therefore -32<a<0$

30) $-\frac{5}{2}<a<-2$

⇨ 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$x^3-4x^2+6x=\frac{1}{2}x^2-a$, 즉 $x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$\left(\frac{5}{2}+a\right)(2+a)<0$ $\therefore -\frac{5}{2}<a<-2$

31) $-4<a<0$

⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$x^3-x^2+9x=5x^2-a$, 즉 $x^3-6x^2+9x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(3)<0$이어야 하므로 $(4+a)a<0$

$\therefore -4<a<0$

32) $0<a<4$

⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$x^3+x^2=4x^2-a$, 즉 $x^3-3x^2+a=0$이 서로 다른 세

실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-3x^2+a$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
따라서 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(0)f(2)<0$이어야 하므로 $a(-4+a)<0$
$\therefore 0<a<4$

33) $0<a<4$
⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+2x^2-x=5x^2-x-a$, 즉 $x^3-3x^2+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-3x^2+a$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
이때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(0)f(2)<0$이어야 하므로 $a(a-4)<0$에서 $0<a<4$

34) $0<a<4$
⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면
$x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+a$, 즉 $x^3-6x^2+9x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-6x^2+9x-a$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
따라서 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(1)f(3)<0$이어야 하므로
$(4-a)(-a)<0$, $(a-4)a<0$
$\therefore 0<a<4$

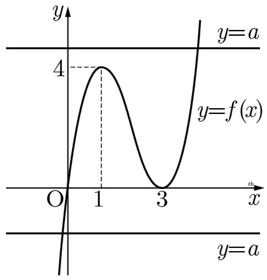
35) $-27<a<5$
⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면
$x^3-9x=-3x^2-a$, 즉 $x^3+3x^2-9x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3+3x^2-9x+a$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로
$(27+a)(-5+a)<0$
$\therefore -27<a<5$

36) $-4<a<0$
⇨ 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2+9x=3x^2-a$, 즉 $x^3-6x^2+9x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
이때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱이 0보다 작아야 하므로 (극댓값)×(극솟값)<0에서
$f(1)f(3)=(a+4)\times a<0$
$\therefore\ -4<a<0$

37) $a<0$ 또는 $a>4$
⇨ $x^3-a=6x^2-9x$에서 $x^3-6x^2+9x=a$
$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같고, $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개뿐이어야 하므로
$a<0$ 또는 $a>4$



38) $a<-5$ 또는 $a>27$
⇨ 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식
$x^3-2x^2-5x=-5x^2+4x+a$, 즉
$x^3+3x^2-9x-a=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3+3x^2-9x-a$라 하면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-3$
따라서 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(1)f(-3)>0$이어야 한다.
이때, $f(1)=-5-a$, $f(-3)=27-a$이므로
$(-5-a)(27-a)>0$
$\therefore\ a<-5$ 또는 $a>27$

39) $a=7$ 또는 $a=-20$
⇨ 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식
$3x^3-3x^2-4x=x^3+8x+a$, 즉
$2x^3-3x^2-12x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3-3x^2-12x-a$라 하면
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 중근과 또 다른 실근을 가지려면 $f(-1)f(2)=0$이어야 한다.
이때, $f(-1)=7-a$, $f(2)=-20-a$이므로
$(7-a)(-20-a)=0$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-20$

40) $0<a<4$

⇨ 방정식 $2x^3-6x=a$에서 주어진 방정식의 실근은 $y=2x^3-6x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표이다.

$f(x)=2x^3-6x$로 놓으면

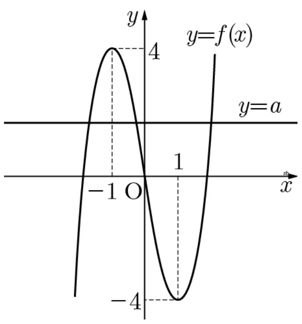
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같고, $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 양수, 다른 두 개는 음수이어야 하므로 $0<a<4$



41) $-1<a<0$

⇨ $f(x)=4x^3-3x$라 하면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

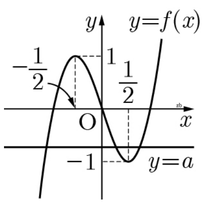
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a<0$



42) $0<a<2$

⇨ $x^3-3x+a=0$에서 $x^3-3x=-a$

$f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

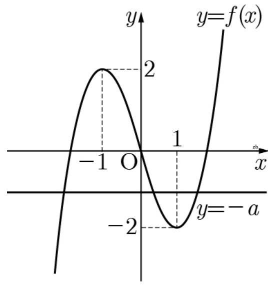
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같고, $y=-a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수, 다른 두 개는 양수이어야 하므로

$-2<-a<0$

$\therefore 0<a<2$



43) $-5<a<0$

⇨ $x^3-3x^2-9x+a=0$에서 $x^3-3x^2-9x=-a$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

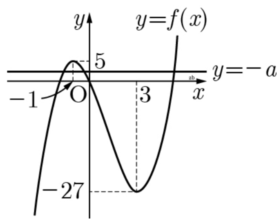
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 주어진 방정식이 한 개의 양과 근과 서로 다른 두 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$0<-a<5$에서 $-5<a<0$



44) $0<a<4$

⇨ $f(x)=-x^3+3x^2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

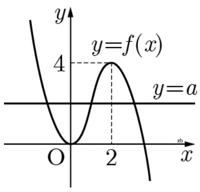
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 방정식 $f(x)=a$가 서로 다른 두 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$0<a<4$



45) $f(x)=x^4-4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $f(x)\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^4-4x+3\geq 0$이 성립한다.

46) $f(x)=x^4+4x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

즉, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(-1)=0$이므로 $f(x)=x^4+4x+3\geq 0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^4+4x+3\geq 0$이다.

47) $f(x)=3x^4-4x^3+1$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $f(x)\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $3x^4+1\geq 4x^3$이 성립한다.

48) $x^3\geq 3x^2-4$에서 $x^3-3x^2+4\geq 0$

이때, $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(2)=0$이므로 $f(x)=x^3-3x^2+4\geq 0$이다.

따라서 $x\geq 0$일 때, $x^3\geq 3x^2-4$이다.

49) $f(x)=x^3-x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $f(x)\geq 0$

따라서 $x\geq 0$일 때, $x^3-x^2\geq x-1$이 성립한다.

50) $x^3+4>2x^2$에서 $x^3-2x^2+4>0$

이때 $f(x)=x^3-2x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

$f'(x))=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	$\dfrac{76}{27}$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{76}{27}$이므로 $f(x)=x^3-2x^2+4>0$이다.

따라서 $x\geq 0$일 때, $x^3+4>2x^2$이다.

51) $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $f(x)=x^3-3x^2+4\geq 0$

따라서 $x\geq 0$일 때, $x^3\geq 3x^2-4$가 성립한다.

52) $2x^3>3x^2-2$에서 $2x^3-3x^2+2>0$

이때, $f(x)=2x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

즉, $x \geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(1)=1$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+2>0$이다.

따라서 $x \geq 0$일 때, $2x^3>3x^2-2$이다.

53) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

$x \geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이므로

$f(x)>0$

$\therefore\ x^3-6x^2+9x+2>0$

54) $f(x)=x^3-3x+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$

$x \geq 1$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$f(x)>0$

따라서 $x \geq 1$일 때, $x^3-x>2x-3$이 성립한다.

55) $x^3-x^2>-x+6$에서 $x^3-x^2+x-6>0$

이때, $f(x)=x^3-x^2+x-6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$

즉, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가함수이다.

이때, $f(2)=0$이므로 $x>2$일 때

$f(x)=x^3-x^2+x-6>0$

$\therefore\ x^3-x^2>-x+6$

56) $f(x)=x^3-3x^2+5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

구간 $[-1,1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$f(x)>0$

구간 $[-1,1]$에서 $x^3+3x^2>6x^2-5$가 성립한다.

57) $f(x)=x^3-12x+5$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because\ 1 \leq x \leq 3$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	$\searrow$	-11	$\nearrow$	-4

즉, $1 \leq x \leq 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=-4$이므로 $f(x)=x^3-12x+5<0$이다.

따라서 $1 \leq x \leq 3$일 때, $x^3-12x+5<0$이다.

58) $k>3$

⇨ $f(x)=x^4-4x+k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because\ x^2+x+1>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-3$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$k-3>0$ $\therefore\ k>3$

59) $k \geq 3$

⇨ $f(x)=x^4-4x+k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-3$	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하려면 $k-3 \geq 0$ $\therefore k \geq 3$

60) $k \leq -1$

⇨ $f(x)=3x^4-4x^3-k$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-k$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하려면 $-k-1 \geq 0$ $\therefore k \leq -1$

61) $k \geq 0$

⇨ $f(x)=x^4+x^3+x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3x^2+2x=x(4x^2+3x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	k	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$이 성

립하려면 $k \ge 0$

62) $k \le 3$

⇨ $f(x) \ge g(x)$에서 $f(x)-g(x) \ge 0$

이때, $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(3x^4-2x+4)-(4x^3-2x+k)$

$=3x^4-4x^3+4-k$

$h'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$4-k$	↘	$3-k$	↗

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $3-k$이므로 부등식 $h(x) \ge 0$이 성립하려면

$3-k \ge 0$ $\quad\therefore\ k \le 3$

63) $k > 9$

⇨ $f(x)=x^3-5x^2+3x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	k	↗	$k+\frac{13}{27}$	↘	$k-9$	↗

즉, $x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-9$이므로 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$k-9>0$ $\quad\therefore\ k>9$

64) $k \ge 20$

⇨ $f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	k	↘	$k-20$	↗

따라서 $x \ge 0$일 때, 부등식 $f(x) \ge 0$이 성립하려면

$k-20 \ge 0$ $\therefore k \ge 20$

65) $k \ge 32$

⇨ $f(x)=4x^3-3x^2-6x+k$라 하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$k-32$	↗	$k+\frac{7}{4}$	↘	$k-5$	↗

따라서 $x \ge -2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-32$이므로 부등식 $f(x) \ge 0$이 성립하려면

$k-32 \ge 0$ $\quad\therefore\ k \ge 32$

66) $k \ge 11$

⇨ $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-2$	↗	$k+5$	↘	$k-11$

따라서 구간 $[-2, 1]$에서 부등식 $f(x) \ge 0$이 성립하려면 $k-11 \ge 0$ $\therefore k \ge 11$

67) $k \ge 29$

⇨ $x^4-2 \ge 4x^3-k$에서 $x^4-4x^3+k-2 \ge 0$

$f(x)=x^4-4x^3+k-2$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-29$

즉, $0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-29$이므로 부등식 $f(x) \ge 0$이 성립하려면

$k-29 \ge 0$ $\quad\therefore\ k \ge 29$

68) $0 \le k \le 3$

⇨ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↗	$k+5$	↘	$k+4$	↗	$k+9$

즉, $0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+9$, 최솟값은 k이므로 부등식 $0 \le f(x) \le 12$가 성립하려면 $k \ge 0$이고 $k+9 \le 12$이어야 한다

$\therefore\ 0 \le k \le 3$

69) $k \le -4$

⇨ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^3-3x^2-k$

$\therefore h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-k-2$	$\searrow$	$-k-4$	$\nearrow$	$-k$

따라서 구간 $[1, 3]$에서 부등식 $h(x) \geq 0$이 성립하려면 $-k-4 \geq 0$ $\therefore k \leq -4$