01 한 근이 주어진 이차방정식

이차방정식의 한 근이 주어지면 주어진 근을 이차방정식에 대입하면 등식이 성립한다.

(예) $x^2-2x+k=0$의 한 근이 1일 때,
상수 k의 값은
$1^2-2\times1+k=0 \qquad \therefore k=1$

◪ 다음을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

1. $x^2+kx-3k-3=0$의 한 근이 1이다.

2. $x^2-kx-10k-2=0$의 한 근이 -3이다.

3. $x^2-kx-k^2-5=0$의 한 근이 -3이다.

4. $x^2-kx+4k^2-10=0$의 한 근이 2이다.

5. $x^2-(k-1)x+k^2=0$의 한 근이 -1이다.

6. $x^2-(k+2)x+3k+2=0$의 한 근이 -2이다.

◪ 서로 다른 두 근을 가지는 x에 대한 이차방정식과 한 근이 다음과 같을 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

7. $x^2-mx+2m-4=0$ $[x=-1]$

8. $x^2-mx-10m-2=0$ $[x=-3]$

9. $2x^2+mx+2m+1=0$ $[x=-1]$

10. $x^2+(2m+4)x+m^2=0$ $[x=-1]$

11. $(m+3)x^2-mx-10=0$ (단, $m\neq-3$) $[x=2]$

12. $mx^2+(1-2m)x+m^2+2m-1=0$ (단, $m\neq0$) $[x=2]$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

02 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$(a, b, c는 실수)의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) $D>0$ ⇔ 서로 다른 두 실근

(2) $D=0$ ⇔ 중근(서로 같은 두 실근)

(3) $D<0$ ⇔ 서로 다른 두 허근

참고 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0(a\neq 0)$의 판별식은

$\frac{D}{4}=b'^2-ac$

① $\frac{D}{4}>0$ ⇔ 서로 다른 두 실근

② $\frac{D}{4}=0$ ⇔ 중근

③ $\frac{D}{4}<0$ ⇔ 서로 다른 두 허근

◪ 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

13. $x^2+9=0$

14. $x^2+x+4=0$

15. $3x^2+5x-2=0$

16. $7x^2+3x-1=0$

17. $3x^2-6x+4=0$

18. $2x^2-3x+2=0$

19. $x^2-4x+6=0$

20. $x^2+6x+6=0$

21. $x^2+10x+25=0$

22. $x^2-x+1=0$

23. $3x^2+x-2=0$

24. $9x^2-6x+1=0$

25. $3x^2-5x+4=0$

26. $x^2+3x-10=0$

27. $x^2-x+2=0$

28. $(x-2)(x-6)=5$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

29. $2x^2-x+3=0$

30. $x^2+2\sqrt{3}x+5=0$

31. $2x^2-2\sqrt{10}x+5=0$

32. $3x^2+4\sqrt{3}x+4=0$

33. $2x^2+2\sqrt{6}x+3=0$

34. $2x^2-5x+3=0$

35. $9x^2+12x+4=0$

◪ **다음 이차방정식이 [ ] 안의 근을 갖도록 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.**

36. $x^2-3x+k=0$ **[서로 다른 두 실근]**

37. $x^2-4x+k=0$ **[서로 다른 두 실근]**

38. $x^2+3x-k=0$ **[중근]**

39. $x^2+6x+2k-3=0$ **[중근]**

40. $x^2+4x-k=0$ **[서로 다른 두 허근]**

41. $kx^2+x+1=0$ **[중근] (단, $k\neq0$)**

42. $x^2-(2k-1)x+k^2=0$ **[중근]**

43. $x^2+16x+k+1=0$ **[서로 다른 두 실근]**

44. $3x^2+x+k=0$ **[서로 다른 두 허근]**

45. $x^2-3x+(k-1)=0$ **[실근]**

46. $x^2+3x-k=0$ **[서로 다른 두 허근]**

47. $x^2+kx+k+3=0$ [중근]

48. $kx^2+2kx-2=0$ [중근] (단, $k\neq0$)

49. $kx^2-2(k-1)x+k+3=0$ [서로 다른 두 실근] (단, $k\neq0$)

50. $3x^2-6x+k+1=0$ [서로 다른 두 실근]

51. $x^2-4x+k+5=0$ [실근]

52. $x^2-(2k-1)x+k^2=0$ [서로 다른 두 허근]

53. $x^2+2kx+k^2+k+4=0$ [실근]

54. $x^2-(2x-1)x+k^2=0$ [서로 다른 두 허근]

55. $kx^2+6x+3=0$ [서로 다른 두 허근] (단, $k\neq0$)

56. $x^2+(k+1)x+k+1=0$ [중근]

57. $kx^2+8x+8=0$ [서로 다른 두 실근] (단, $k\neq0$)

58. $x^2-(k-1)x+k-1=0$ [중근]

59. $x^2-2(k+2)x+k^2=0$ [서로 다른 두 실근]

60. $(1-k)x^2+3x+2=0$ [서로 다른 두 실근] (단, $k\neq1$)

61. $x^2+2(k-4)x+k^2=0$ [서로 다른 두 허근]

62. $(k^2-1)x^2+2(k+1)x+2=0$ [중근] (단, $k\neq-1$, 1)

63. $kx^2-2(k-1)x+k-3=0$ [서로 다른 두 허근] (단, $k\neq0$)

64. $(k^2-4)x^2-2(k+2)x+1=0$ [서로 다른 두 실근] (단, $k\neq-2$, 2)

03 이차식이 완전제곱식이 될 조건

이차식 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$가 x에 대한 완전제곱식이다.
$\Leftrightarrow$ $D=b^2-4ac=0$

◪ x에 대한 다음 이차식이 완전제곱식이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a\neq 0$)

65. $x^2-8x+a-8$

66. ax^2+3x-1

67. ax^2+4x-2

68. ax^2+8x-4

69. ax^2+5x-4

70. ax^2-8x+a

71. ax^2+4x+a

72. $ax^2-4ax+3a+5$

73. $ax^2+4ax+3a+4$

74. $x^2+4ax+a^2+6a$

75. $x^2-(a+2)x+(2a+1)$

76. $x^2+(a+5)x+2a+7$

04 ~의 값에 관계없이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때,
① $D=b^2-4ac=0$을 이용하여 $pk+q=0$의 꼴로 정리한다.
② k에 대한 항등식의 성질 $p=0$, $q=0$임을 이용한다.

◪ x에 대한 다음 이차방정식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

77. $x^2+2(k-a)x+k^2+b+1=0$

78. $x^2+2(a-k)x+k^2-2k-b=0$

79. $x^2+(2k+a)x+k^2+k+b=0$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

80. $x^2-2(a+k)x+k^2+6k+b=0$

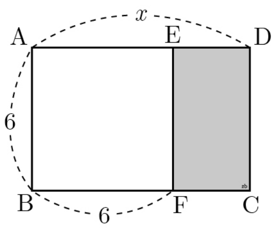
81. $x^2+(2k-1)x+k^2-ak-b=0$

82. $x^2+2(k+a)x+k^2+6k+b=0$

05 이차방정식의 활용

이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 풀이한다.
① 문제의 상황에 맞게 미지수를 정한다.
② 문제의 뜻에 따라 이차방정식을 세운다.
③ 이차방정식을 푼다.
④ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

83. 다음 그림에서 직사각형 $FCDE$는 직사각형 $ABCD$에서 정사각형 $ABFE$를 잘라내고 남은 사각형으로 사각형 $ABCD$와 닮은 도형이다. x의 값을 구하여라.



(1) $\overline{DE}$의 길이를 x로 나타내어라.

(2) 주어진 조건을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) x의 값을 구하여라.

84. 넓이가 $80cm^2$인 사다리꼴이 있다. 이 사다리꼴의 윗변의 길이와 높이는 같고, 아랫변의 길이는 윗변의 길이보다 $4cm$가 더 길다. 이때, 윗변의 길이를 구하여라.

(1) 사다리꼴의 윗변의 길이를 xcm라고 하면 높이는 $\square cm$, 아랫변의 길이는 $(\square)cm$이다.

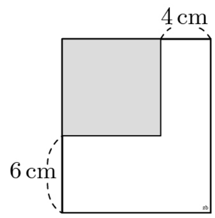
(2) 주어진 조건을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) 윗변의 길이를 구하여라.

85. 정사각형의 가로의 길이를 $4cm$ 늘이고, 세로의 길이를 $6cm$ 늘였더니 처음 정사각형의 넓이의 2배인 직사각형이 되었다. 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

(1) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 xcm라고 하면 직사각형의 가로의 길이는 $(\square)cm$, 세로의 길이는 $(\square)cm$이다.



(2) 주어진 조건을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

86. 정사각형의 가로의 길이를 $5cm$ 늘이고, 세로의 길이를 $5cm$ 줄였더니 그 넓이가 처음 넓이의 $\frac{1}{5}$만큼 줄었다. 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

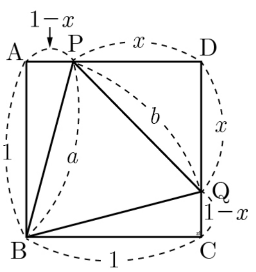
(1) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 xcm라고 할 때, 변화된 사각형의 변의 길이를 각각 x의 식으로 나타내어라.

(2) 주어진 조건을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

87. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$의 내부에 정삼각형 PBQ가 내접하고 있다. x의 값을 구하여라.



(1) a, b의 길이를 각각 x로 나타내어라.

(2) $a=b$임을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) x의 값을 구하여라.

88. 한 변의 길이가 $10cm$인 정사각형이 있다. 정사각형의 가로의 길이는 매초 $2cm$씩 늘어나고, 세로의 길이는 $1cm$씩 줄어든다고 할 때, 직사각형의 넓이가 $100cm^2$가 되는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

(1) 직사각형의 넓이가 $100cm^2$가 되는 시각을 t초 후라고 하면 가로의 길이는 $(10+\square)cm$, 세로의 길이는 $(\square)cm$이다.

(2) 주어진 조건을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) 직사각형의 넓이가 $100cm^2$가 되는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

89. 길이가 $16cm$인 끈을 두 도막으로 잘라서 크기가 다른 두 개의 정사각형을 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 비가 $1:2$일 때, 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

(1) 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $x\,cm$라고 하면 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $(\square)\,cm$이다.

(2) 주어진 조건을 이용하여 이차방정식을 세워라.

(3) (2)에서 세운 이차방정식을 풀어라.

(4) 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

정답 및 해설

1) $k=-1$
⇨ 이차방정식 $x^2+kx-3k-3=0$의 한 근이 1이로
$1+k-3k-3=0$
$-2k=2 \quad \therefore k=-1$

2) $k=1$
⇨ 이차방정식 $x^2-kx-10k-2=0$의 한 근이 -3이므로
$(-3)^2-k\cdot(-3)-10k-2=0$
$-7k+7=0 \quad \therefore k=1$

3) $k=-1$ 또는 $k=4$
⇨ 이차방정식 $x^2-kx-k^2-5=0$의 한 근이 -3이므로
$(-3)^2-k\cdot(-3)-k^2-5=0, k^2-3k-4=0$
$(k+1)(k-4)=0 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=4$

4) $k=\frac{3}{2}$ 또는 $k=-1$
⇨ 이차방정식 $x^2-kx+4k^2-10=0$의 한 근이 2이므로
$4-2k+4k^2-10=0, 2k^2-k-3=0$
$(2k-3)(k+1)=0 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$ 또는 $k=-1$

5) $k=0$ 또는 $k=-1$
⇨ 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k^2=0$의 한 근이 -1이므로
$(-1)^2-(k-1)\cdot(-1)+k^2=0$
$k^2+k=0, k(k+1)=0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=-1$

6) $k=-2$
⇨ 이차방정식 $x^2-(k+2)x+3k+2=0$의 한 근이 -2이므로
$(-2)^2-(k+2)\cdot(-2)+3k+2=0$
$5k=-10 \quad \therefore k=-2$

7) $x=2$
⇨ 방정식 $x^2-mx+2m-4=0$의 한 근이 $x=-1$이므로
$(-1)^2-m(-1)+2m-4=0$
$3m=3 \quad \therefore m=1$
$m=1$을 주어진 이차방정식에 대입하면
$x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 다른 한 근은 $x=2$이다.

8) $x=4$
⇨ $x=-3$을 대입하면
$(-3)^2-m\cdot(-3)-10m-2=0$
$7m=7 \quad \therefore m=1$
$m=1$을 주어진 방정식에 대입하면
$x^2-x-12=0, (x-4)(x+3)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-3$
따라서 다른 한 근은 $x=4$

9) $x=\frac{5}{2}$
⇨ $x=-1$을 대입하면
$2-m+2m+1=0 \quad \therefore m=-3$
$m=-3$을 주어진 이차방정식에 대입하면
$2x^2-3x-5=0$, $(2x-5)(x+1)=0$
$\therefore x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=-1$
따라서 다른 한 근은 $x=\frac{5}{2}$

10) $x=-9$
⇨ $x=-1$을 대입하면
$(-1)^2+(2m+4)\cdot(-1)+m^2=0$, $m^2-2m-3=0$
$(m+1)(m-3)=0$
$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
(ⅰ) $m=-1$ 일 때 주어진 이차방정식은
$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$
서로 다른 두 근을 가져야 하므로 모순
(ⅱ) $m=3$일 때 주어진 이차방정식은
$x^2+10x+9=0$, $(x+1)(x+9)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-9$
따라서 다른 한 근은 $x=-9$

11) $x=-\frac{5}{2}$
⇨ $x=2$를 대입하면
$4(m+3)-2m-10=0$, $4m+12-2m-10=0$,
$2m=-2 \quad \therefore \ m=-1$
$m=-1$을 주어진 방정식에 대입하면
$2x^2+x-10=(x-2)(2x+5)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$
따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{5}{2}$

12) $x=1$
⇨ $x=2$를 대입하면
$m\cdot2^2+(1-2m)\cdot2+m^2+2m-1=0$, $m^2+2m+1=0$
$(m+1)^2=0 \quad \therefore m=-1$
$m=-1$을 주어진 방정식에 대입하면
$-x^2+3x-2=0$, $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 다른 한 근은 $x=1$

13) 서로 다른 두 허근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2+9=0$에서 $D=0^2-4\times1\times9=-36<0$
$\therefore$서로 다른 두 허근

14) 서로 다른 두 허근
⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.
$D=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$ $\therefore$서로 다른 두 허근

15) 서로 다른 두 실근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$3x^2+5x-2=0$에서 $D=5^2-4\times3\times(-2)=49>0$
$\therefore$서로 다른 두 실근

16) 서로 다른 두 실근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot7\cdot(-1)=37>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

17) 서로 다른 두 허근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$3x^2-6x+4=0$에서 $D=(-6)^2-4\times3\times4=-12<0$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근

18) 서로 다른 두 허근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$2x^2-3x+2=0$에서 $D=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근

19) 서로 다른 두 허근
⇨ $x^2-4x+6=0$에서 $a=1, b=-4, c=6$이므로
$b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot6=-8<0$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근

20) 서로 다른 두 실근
⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.
$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot6=3>0$ $\therefore$서로 다른 두 실근

21) 중근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$x^2+10x+25=0$에서 $D=10^2-4\times1\times25=0$
$\therefore$중근

22) 서로 다른 두 허근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$x^2-x+1=0$에서 $D=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근

23) 서로 다른 두 실근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$3x^2+x-2=0$에서 $D=1^2-4\times3\times(-2)=25>0$
$\therefore$서로 다른 두 실근

24) 중근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$9x^2-6x+1=0$에서 $D=(-6)^2-4\times9\times1=0$
$\therefore$중근

25) 서로 다른 두 허근
⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.
$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot4=-23<0$ $\therefore$서로 다른 두 허근

26) 서로 다른 두 실근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$x^2+3x-10=0$에서 $D=3^2-4\times1\times(-10)=49>0$
$\therefore$서로 다른 두 실근

27) 서로 다른 두 허근
⇨ 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ $\therefore$서로 다른 두 허근

28) 서로 다른 두 실근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$(x-2)(x-6)=5,\ x^2-8x+7=0$
$D=(-8)^2-4\times1\times7=36>0$
$\therefore$서로 다른 두 실근

29) 서로 다른 두 허근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$2x^2-x+3=0$에서 $D=(-1)^2-4\times2\times3=-23<0$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근

30) 서로 다른 두 허근
⇨ $x^2+2\cdot\sqrt{3}x+5=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot5=-2<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

31) 중근
⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.
$\frac{D}{4}=(-\sqrt{10})^2-2\cdot5=0$ $\therefore$중근

32) 중근
⇨ 이차방정식 $3x^2+4\sqrt{3}x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2\sqrt{3})^2-3\cdot4=0$ $\therefore$중근

33) 중근
⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$2x^2+2\sqrt{6}x+3=0$에서 $D=(2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0$
$\therefore$중근

34) 서로 다른 두 실근
⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.
$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot3=1>0$ $\therefore$서로 다른 두 실근

35) 중근
⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$\frac{D}{4}=6^2-9\cdot4=0$ ∴ 중근

36) $k<\frac{9}{4}$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k=-4k+9>0$ $\therefore k<\frac{9}{4}$

37) $k<4$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2-4x+k=0$에서

$D=(-4)^2-4\times1\times k=16-4k>0$ $\therefore k<4$

38) $k=-\frac{9}{4}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2+3x-k=0$에서

$D=3^2-4\times1\times(-k)=0$ $\therefore k=-\frac{9}{4}$

39) $k=6$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2+6x+2k-3=0$에서

$D=6^2-4(2k-3)=48-8k=0$ $\therefore k=6$

40) $k<-4$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-k)=k+4<0$ $\therefore k<-4$

41) $k=\frac{1}{4}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$kx^2+x+1=0$에서

$D=1^2-4\times k\times1=0$ $\therefore k=\frac{1}{4}$

42) $k=\frac{1}{4}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2-(2k-1)x+k^2=0$에서

$D=(2k-1)^2-4k^2=-4k+1=0$ $\therefore k=\frac{1}{4}$

43) $k<63$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2+16x+k+1=0$에서

$D=16^2-4\times1\times(k+1)$
$=256-4k-4=-4k+252>0$

44) $k>\frac{1}{12}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$3x^2+x+k=0$에서

$D=1^2-4\times3\times k=1-12k<0$ $\therefore k>\frac{1}{12}$

45) $k\le\frac{13}{4}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2-3x+(k-1)=0$에서

$D=(-3)^2-4\times1\times(k-1)=-4k+13\ge0$ $\therefore k\le\frac{13}{4}$

46) $k<-\frac{9}{4}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2+3x-k=0$에서

$D=3^2-4\times1\times(-k)=9+4k<0$ $\therefore k<-\frac{9}{4}$

47) $k=-2$ 또는 $k=6$

⇨ $x^2+kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot1\cdot(k+3)=0$

$k^2-4k-12=0,\ (k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

48) $k=-2$

⇨ 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $kx^2+2kx-2=0$이 이차방정식이므로 $k\ne0$

(ⅱ) 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=k^2-k\cdot(-2)=0,\ k^2+2k=0,\ k(k+2)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=-2$

49) $k<0$ 또는 $0<k<\frac{1}{5}$

⇨ (ⅰ) $kx^2-2(k-1)x+k+3=0$이 이차방정식이므로 $k\ne0$

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k(k+3)=-5k+1>0$ $\therefore k<\frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{1}{5}$

50) $k<2$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(k+1)=-3k+6>0$ $\therefore k<2$

51) $k\le-1$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(k+5)=-k-1\ge0$ $\therefore k\le-1$

52) $k>\frac{1}{4}$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$x^2-(2k-1)x+k^2=0$에서

$D=(2k-1)^2-4\times1\times k^2=-4k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$

53) $k\le-4$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$\frac{D}{4}=k^2-1\cdot(k^2+k+4)=-k-4\ge0 \quad \therefore k\le-4$

54) $k>\frac{1}{4}$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$D=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot k^2=-4k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$

55) $k>3$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$kx^2+6x+3=0$에서

$D=6^2-4\times k\times3=36-12k<0 \quad \therefore k>3$

56) $k=-1$ 또는 $k=3$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

판별식 $D=0$일 때 중근을 가지므로

$x^2+(k+1)x+k+1=0$에서

$D=(k+1)^2-4(k+1)=(k+1)(k-3)=0$

따라서 중근을 갖도록 하는 k의 값은

$k=-1$ 또는 $k=3$

57) $k<0$ 또는 $0<k<2$

⇨ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$kx^2+8x+8=0$에서

$D=8^2-4\times k\times8=64-32k>0 \quad \therefore k<2$

이때, $k\ne0$이어야 하므로 $k<0$ 또는 $0<k<2$

58) $k=1$ 또는 $k=5$

⇨ 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$D=(k-1)^2-4\cdot1\cdot(k-1)=0$

$k^2-6k+5=0, (k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=5$

59) $k>-1$

⇨ 이차방정식 $x^2-2(k+2)x+k^2=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-1\cdot k^2=4k+4>0 \quad \therefore k>-1$

60) $-\frac{1}{8}<k<1$ 또는 $k>1$

⇨ 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $(1-k)x^2+3x+2=0$이 이차방정식이므로

$1-k\ne0 \quad \therefore k\ne1$

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=3^2-4\cdot(1-k)\cdot2=8k+1>0 \quad \therefore k>-\frac{1}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-\frac{1}{8}<k<1$ 또는 $k>1$

61) $k>2$

⇨ 이차방정식 $x^2+2(k-4)x+k^2=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-1\cdot k^2=-8k+16<0 \quad \therefore k>2$

62) $k=3$

⇨ 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $(k^2-1)x^2+2(k+1)x+2=0$이 이차방정식이므로

$k^2-1\ne0$, $(k+1)(k-1)\ne0 \quad \therefore k\ne\pm1$

(ⅱ) 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-1)\cdot2=0$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=3$

63) $k<-1$

⇨ 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $kx^2-2(k-1)x+k-3=0$이 이차방정식이므로 $k\ne0$

(ⅱ) 서로 다른 두 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k(k-3)=k+1<0 \quad \therefore k<-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k<-1$

64) $-2<k<2$ 또는 $k>2$

⇨ (ⅰ) 이차방정식이므로

$k^2-4\ne0, (k+2)(k-2)\ne0$

$\therefore k\ne\pm2$

(ⅱ) 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-(k^2-4)\cdot1=4k+8>0$

$\therefore k>-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-2<k<2$ 또는 $k>2$

65) 24

⇨ 이차방정식 $x^2-8x+a-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot(a-8)=0$

$-a+24=0 \quad \therefore a=24$

66) $-\frac{9}{4}$

⇨ (이차식)$=0$의 판별식을 D라고 하면

$ax^2+3x-1=0$에서

$D=3^2-4\cdot a\cdot(-1)=9+4a=0 \quad \therefore a=-\frac{9}{4}$

67) -2

⇨ (이차식)$=0$의 판별식을 D라고 하면

$ax^2+4x-2=0$에서

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot(-2)=4+2a=0 \quad \therefore a=-2$

68) -4

⇨ 이차방정식 $ax^2+8x-4=0$의 판별식을 D라 하면 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=4^2-a\cdot(-4)=0 \quad \therefore a=-4$

69) $-\frac{25}{16}$

⇨ (이차식)$=0$의 판별식을 D라고 하면

$ax^2+5x-4=0$에서

$D=5^2-4\cdot a\cdot(-4)=25+16a=0 \quad \therefore a=-\frac{25}{16}$

70) ± 4

⇨ (이차식)$=0$의 판별식을 D라고 하면

$ax^2-8x+a=0$에서

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a\cdot a=16-a^2=0 \quad \therefore a=\pm 4$

71) -2 또는 2

⇨ 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot a=0$

$a^2-4=0, (a+2)(a-2)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

72) 5

⇨ 이차방정식 $ax^2-4ax+3a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-a(3a+5)=0$

$a^2-5a=0, a(a-5)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=5$

그런데 $a\neq 0$이므로 $a=5$

73) 4

⇨ (이차식)$=0$의 판별식을 D라고 하면

$ax^2+4ax+3a+4=0$에서

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a\cdot(3a+4)=a^2-4a=a(a-4)=0$

$\therefore a=4(\because a\neq 0)$

74) 2

⇨ 이차방정식 $x^2+4ax+a^2+6a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-1\cdot(a^2+6a)=0$

$3a^2-6a=0, 3a(a-2)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$

그런데 $a\neq 0$이므로 $a=2$

75) 4

⇨ 이차방정식 $x^2-(a+2)x+(2a+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2)\}^2-4\cdot 1\cdot(2a+1)=0$

$a^2-4a=0, a(a-4)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=4$

그런데 $a\neq 0$이므로 $a=4$

76) 1 또는 -3

⇨ 이차방정식 $x^2+(a+5)x+2a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+5)^2-4\cdot 1\cdot(2a+7)=0$

$a^2+2a-3=0, (a-1)(a+3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-3$

77) $a=0,\ b=1$

⇨ $x^2+2(k-a)x+k^2+b+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-1\cdot(k^2+b+1)=-2ak+a^2-b-1$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$-2ak+a^2-b-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a=0,\ a^2-b-1=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-1$

78) $a=1, b=-1$

⇨ $x^2+2(a-k)x+k^2-2k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-1\cdot(k^2-2k-b)=0$

$(-2a+2)k+a^2+b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a+2=0, a^2+b=0 \quad \therefore a=1, b=-1$

79) $a=1, b=\frac{1}{4}$

⇨ $x^2+(2k+a)x+k^2+k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+a)^2-4\cdot 1\cdot(k^2+k+b)=0$

$(4a-4)k+a^2-4b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-4=0, a^2-4b=0$

$\therefore\ a=1, b=\frac{1}{4}$

80) $a=3, b=9$

⇨ $x^2-2(a+k)x+k^2+6k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-1\cdot(k^2+6k+b)=0$

$(2a-6)k+a^2-b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-6=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=3, b=9$

81) $a=1, b=-\frac{1}{4}$

⇨ $x^2+(2k-1)x+k^2-ak-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot(k^2-ak-b)=0$

$(4a-4)k+4b+1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-4=0, 4b+1=0 \quad \therefore a=1, b=-\frac{1}{4}$

82) $a=3, b=9$

⇨ $x^2+2(k+a)x+k^2+6k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-1\cdot(k^2+6k+b)=0$

$(2a-6)k+a^2-6=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-6=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=3, b=9$

83) (1) $x-6$ (2) $x^2-6x-36=0$ (3) $x=3\pm3\sqrt{5}$ (4) $3+3\sqrt{5}$

⇨ (1) $\overline{DE}=\overline{AD}-\overline{AE}=x-6$

(2) $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DC}:\overline{DE}$이므로

$x:6=6:(x-6) \quad \therefore x^2-6x-36=0$

(3) $x^2-6x-36=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot(-36)}=3\pm3\sqrt{5}$

(4) 이때 $x>6$이므로 $x=3+3\sqrt{5}$

84) (1) $x, x+4$ (2) $x^2+2x-80=0$ (3) $x=-10$ 또는 $x=8$ (4) $8cm$

⇨ (1) 사다리꼴의 윗변의 길이를 xcm라고 하면 높이는 $\boxed{x}cm$, 아랫변의 길이는 $(\boxed{x+4})cm$이다.

(2) 사다리꼴의 넓이가 $80cm^2$이므로

$80=\frac{1}{2}x(2x+4)$, $80=x(x+2)$

$\therefore x^2+2x-80=0$

(3) $x^2+2x-80=0$, $(x+10)(x-8)=0$

$\therefore x=-10$ 또는 $x=8$

(4) 이때 $x>0$이므로 사다리꼴의 윗변의 길이는 $8cm$이다.

85) (1) $x+4, x+6$ (2) $x^2-10x-24=0$ (3) $x=-2$ 또는 $x=12$ (4) $12cm$

⇨ (1) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 xcm라고 하면 직사각형의 가로의 길이는 $(\boxed{x+4})cm$, 세로의 길이는 $(\boxed{x+6})cm$이다.

(2) 처음 정사각형의 길이를 바꾸어 직사각형을 만들었을 때, 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 2배가 되므로

$(x+4)(x+6)=2x^2$, $x^2+10x+24=2x^2$

$\therefore x^2-10x-24=0$

(3) $x^2-10x-24=0$, $(x+2)(x-12)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=12$

(4) 이때 $x>0$이므로 처음 정사각형의 한 변의 길이는 $12cm$이다.

86) (1) $(x+5)cm, (x-5)cm$ (2) $x^2-125=0$ (3) $x=\pm5\sqrt{5}$ (4) $5\sqrt{5}\,cm$

⇨ (1) $(x+5)cm, (x-5)cm$

(2) 처음 정사각형의 길이를 바꾸어 직사각형을 만들었을 때, 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이에서 $\frac{1}{5}$만큼 줄었으므로

$(x+5)(x-5)=\frac{4}{5}x^2$

$x^2-25=\frac{4}{5}x^2$, $\frac{1}{5}x^2-25=0$

$\therefore x^2-125=0$

(3) $x^2-125=0$, $x^2=125 \quad \therefore x=\pm5\sqrt{5}$

(4) 이때 $x>0$이므로 처음 정사각형의 한 변의 길이는 $5\sqrt{5}\,cm$이다.

87) (1) $a=\sqrt{x^2-2x+2}, b=\sqrt{2}x$ (2) $x^2+2x-2=0$ (3) $x=-1\pm\sqrt{3}$ (4) $-1+\sqrt{3}$

⇨ (1) 직각삼각형 ABP에서

$1^2+(1-x)^2=a^2, a^2=x^2-2x+2$

$\therefore a=\sqrt{x^2-2x+2}\,(\because a>0)$

직각삼각형 PQD에서

$x^2+x^2=b^2, b^2=2x^2$

$\therefore b=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x\,(\because b>0)$

(2) $a=b$이므로 $\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{2}x$

$x^2-2x+2=2x^2 \quad \therefore x^2+2x-2=0$

(3) $x^2+2x-2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-2)}=-1\pm\sqrt{3}$

(4) 이때 $0<x<1$이므로 $x=-1+\sqrt{3}$

88) (1) $2t, 10-t$ (2) $t^2-5t=0$ (3) $t=0$ 또는 $t=5$ (4) 5초 후

⇨ (1) 넓이가 $100cm^2$가 되는 시각을 t초 후라고 하면 가로의 길이는 $(10+\boxed{2t})cm$, 세로의 길이는 $(\boxed{10-t})cm$이다.

(2) t초 후의 직사각형의 넓이가 $100cm^2$이므로

$(10+2t)(10-t)=100$, $100+10t-2t^2=100$

$\therefore t^2-5t=0$

(3) $t^2-5t=0$, $t(t-5)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=5$

(4) 이때 $t>0$이므로 직사각형의 넓이가 $100cm^2$이 되는 것은 5초 후이다.

89) (1) $4-x$ (2) $x^2-16x+32=0$ (3) $x=8\pm4\sqrt{2}$ (4) $(8-4\sqrt{2})cm$

⇨ (1) 큰 정사각형의 한 변의 길이를 xcm라 하면 작은 정사각형의 한 변의 길이는

$\frac{16-4x}{4}=4-x(cm)$

(2) 두 정사각형의 넓이의 비가 $1:2$이므로

$(4-x)^2 : x^2 = 1 : 2$에서 $x^2 = 2(x-4)^2$

$x^2 = 2x^2 - 16x + 32 \quad \therefore\ x^2 - 16x + 32 = 0$

(3) $x^2 - 16x + 32 = 0$에서 근의 공식에 의하여

$x = -(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 32} = 8 \pm 4\sqrt{2}$

(4) 이때 $0 < x < 4$이므로 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $(8-4\sqrt{2})cm$이다.