● 1회차

01 ⑤	02 ②	03 ④	04 ①	05 ④
06 ③	07 ②	08 ⑤	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ③	13 ④	14 ④	15 ③
16 ④	17 ③			

[서술형 1] 27

[서술형 2] 8

[서술형 3] (1) $a=1$, $b=9$ (2) -1

01 점 $(-3, 8)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-3+1, 8-3)$ $\quad \therefore (-2, 5)$

02 직선 $y=ax-2$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=a(x-2)-2$ $\quad \therefore y=ax-2a-3$

이 직선이 직선 $y=3x+b$와 일치하므로

$a=3$, $-2a-3=b$

즉 $a=3$, $b=-9$이므로

$a-b=3-(-9)=12$

03 점 $(3, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(3, -2)$

또 점 $(3, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(2, 3)$

이때 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$ $\quad \therefore \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

04 ① 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\notin A$

② 3은 집합 A의 원소가 아니므로 $3\notin A$

③ $\{2, 3\}$은 집합 A의 부분집합이 아니므로 $\{2, 3\}\not\subset A$

④ $A\neq\{1, 2, 3, 6\}$

⑤ 집합 A의 원소의 개수는 3이므로 $n(A)=3$

따라서 옳은 것은 ①이다.

오답 피하기

집합 기호 안의 집합은 원소이다. 즉

③ $\{2, 3\}\in A$

05 $(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-\{4\}$

$=\{1, 2, 3, 5, 6\}$

따라서 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 원소가 아닌 것은 ④이다.

06 ③ $A\cap A^C=\varnothing$

④ $A\cup(A\cap B)=A$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

07 $n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=27-6$

$=21$

$\therefore n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=21-12$

$=9$

Lecture 드모르간의 법칙

(1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

(2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

08 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. 참인 명제

ㄷ. 거짓인 명제

ㄹ. 참인 명제

따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

09 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q^C \subset P$

① $Q^C \subset P$이므로 $P \cup Q^C = P$

② $Q^C \subset P$이므로 $P \cap Q^C = Q^C$

③ $Q^C \subset P$이므로 $P^C \subset Q$

$\therefore P^C \cup Q = Q$

④ $P^C \subset Q$이므로 $P^C \cap Q = P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

10 ① (반례) $x=2$이면 $x^2-4=0$이므로 거짓인 명제이다.

② $x=0$이면 $x^2+x=0$이므로 참인 명제이다.

③ $x^2<5x-6$을 만족시키는 x는 전체집합 U에 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.

④ (반례) $x=0$, $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이므로 거짓인 명제이다.

⑤ $x+y=5$를 만족시키는 x, y는 전체집합 U에 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.

따라서 참인 명제는 ②이다.

11 ① 역: $x=2$이면 $x^2=4$이다. (참)

② 역: $x<1$이면 $x^2<1$이다. (거짓)

(반례) $x=-2$이면 $x<1$이지만 $x^2<1$이 아니다.

③ 역: $x=0$이면 $x^2=x$이다. (참)

④ 역: $x>1$, $y>1$이면 $x+y>2$이다. (참)

⑤ 역: $\triangle\mathrm{ABC}$가 정삼각형이면 $\triangle\mathrm{ABC}$의 두 내각의 크기가 같다. (참)

따라서 그 역이 거짓인 명제는 ②이다.

12 두 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow r$도 모두 참이다.

또 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ③이다.

13 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

① 조건 q에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$P=\{-1\}$, $Q=\{-1, 2\}$이므로

$P \subset Q$, $Q \not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $P=\{6, 12, 18, \cdots\}$, $Q=\{3, 6, 9, \cdots\}$이므로

$P \subset Q$, $Q \not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ 조건 q에서 $x<-3$ 또는 $x>3$

$P=\{x|x>3\}$, $Q=\{x|x<-3$ 또는 $x>3\}$이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

④ 조건 p에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$P=\{-2, 2\}$, $Q=\{2\}$이므로 $P \not\subset Q$, $Q \subset P$

즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ 조건 p에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$이므로 $P=Q$

즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ④이다.

14 $(a+b)\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}\right)=3+\dfrac{3a}{b}+\dfrac{3b}{a}+3$

$=6+\dfrac{3a}{b}+\dfrac{3b}{a}$

이때 $\dfrac{3a}{b}>0$, $\dfrac{3b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6+\dfrac{3a}{b}+\dfrac{3b}{a} \geq 6+2\sqrt{\dfrac{3a}{b}\cdot\dfrac{3b}{a}}$

$=6+2\cdot 3=12$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{3a}{b}=\dfrac{3b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(a+b)\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$의 최솟값은 12이다.

15 (i) 상수함수의 개수

공역 Y의 원소의 개수가 4이므로 상수함수의 개수는 4

(ii) 일대일함수의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

즉 일대일함수의 개수는 $4\cdot3\cdot2=24$

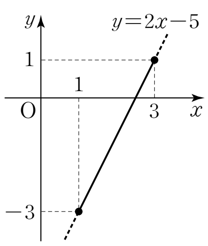
(i), (ii)에서 $m=4$, $n=24$이므로

$m+n=4+24=28$

16 $g(3)=3^2-5=4$이므로

$$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(4)$$
$$=2\cdot4-7=1$$

17 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(1)=-3$, $f(3)=1$이므로

$Y=\{y\,|\,-3\le y\le1\}$

따라서 $a=-3$, $b=1$이므로

$b-a=1-(-3)=4$

[서술형 1] 원 $(x+1)^2+y^2=25$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2+1)^2+(y+2)^2=25$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=25$

❶

이 원이 직선 $4x+3y+k=0$과 접하므로 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 5와 같다. 즉

$$\frac{|4\cdot1+3\cdot(-2)+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5,\ |k-2|=25$$

$k-2=\pm25 \qquad \therefore k=27\ (\because k>0)$

❷

채점 기준	배점
❶ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	3점
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	4점

Lecture 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

$\Rightarrow \dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[서술형 2] $A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$

$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

❶

즉 $\{1, 3\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

❷

채점 기준	배점
❶ 집합 X의 포함 관계를 알 수 있다.	4점
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] (1) $f(-2)=1$에서

$-8a+b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(10)=1$에서 $f(1)=10$이므로

$a+b=10 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=9$

❶

(2) $f(x)=x^3+9$

$f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$k^3+9=8$, $k^3=-1$

$\therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(8)=-1$

❷

채점 기준	배점
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ $f^{-1}(8)$의 값을 구할 수 있다.	3점

Lecture 역함수의 성질

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$