01 확률변수와 확률분포

(1) 확률변수 : 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 원소에 단 하나의 실수가 대응되는 함수를 확률변수라 한다.
(2) $\mathrm{P}(X=x)$: 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률
(3) 이산확률변수 : 확률변수가 가질 수 있는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 셀 수 있을 때, 이 확률변수를 이산확률변수라 한다.
(4) 확률분포 : 이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$이고, X가 이들 값을 가질 확률이 각각 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$일 때, 이들 사이의 대응관계를 이산확률변수 X의 확률분포라 한다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

1. 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나오는 눈의 수를 확률변수 X라 할 때, X가 가지는 값

2. 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X가 가지는 값

3. 빨간 공 5개, 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때 나오는 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, X가 가지는 값

4. $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$가 하나씩 적혀 있는 공 중에서 한 개의 공을 뽑았을 때 공에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X라 할 때, X가 가지는 값

◪ 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 박스에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 시행을 하려고 한다. 나오는 빨간 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

5. 빨간 공을 $R_1,\ R_2,\ R_3$, 파란 공을 $B_1,\ B_2$로 나타낼 때, 표본공간 S

6. 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값

◪ 한 개의 동전을 2번 던질 때, 나오는 뒷면의 개수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

7. 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낼 때, 표본공간 S

8. 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값

9. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

◪ 2개의 당첨 제비가 포함된 5개의 제비가 들어있는 주머니가 있다. 주머니에서 임의로 2개의 제비를 동시에 뽑을 때, 나오는 당첨 제비의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음 물음에 답하여라.

10. 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값

11. 확률변수 X가 각 값을 가질 확률

12. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 흰 공 2개와 검은 공 2개가 들어 있는 박스에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

13. 검은 공을 B, 흰 공을 W로 나타낼 때, 표본공간 S

14. 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값

15. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

◪ 다음 확률변수가 이산확률변수인지 아닌지 판별하여라.

16. 어느 고등학교 학생들의 몸무게

17. 성인 여자의 2분 동안의 혈압

18. 한 개의 동전을 3번 던질 때 앞면이 나오는 횟수

19. 한 개의 동전을 7번 던질 때 앞면이 나오는 횟수

20. 3분 간격으로 운행되는 지하철을 기다리는 시간

21. 4분 간격으로 운행되는 버스를 기다리는 시간

22. 10개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합

23. 성공률이 80%인 농구선수가 5번의 슛을 던질 때 성공한 횟수

02 확률질량함수

(1) 확률질량함수 : 이산확률변수 X의 확률분포를나타내는 함수

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

를 이산확률변수 X의 확률질량함수라 한다.

(2) 확률질량함수의 성질 : 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 일 때, 확률의 기본성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $0 \leq p_i \leq 1$

② $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

③ $\mathrm{P}(x_i \leq X \leq x_j)=\sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k)=\sum_{k=i}^{j}p_k$

(단, $i \leq j,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$)

◪ 2개의 당첨제비가 포함된 5개의 제비가 들어있는 주머니에서 임의로 뽑은 2개의 제비 중에 있는 당첨제비의 개수를 확률변수 X라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

24. X의 확률질량함수

25. X의 확률분포를 표로 나타내어라.

◪ 당첨 제비가 4개 들어 있는 10개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑을 때 나오는 당첨 제비의 개수를 확률변수 X라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

26. X의 확률질량함수

27. X의 확률분포를 표로 나타내어라.

◪ 4개의 사과와 3개의 배가 들어 있는 과일 선물 세트에서 임의로 3개를 선택하려고 한다. 선택한 3개의 과일 중에서 사과의 개수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

28. X의 확률질량함수

29. X의 확률분포를 표로 나타내어라.

◪ 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 나오는 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

30. X의 확률질량함수

31. X의 확률분포를 표로 나타내어라.

32. 빨간 공을 1개 이하 꺼낼 확률

◪ 남자 4명, 여자 2명 중에서 3명의 임원을 뽑을 때, 선출된 여자 임원의 수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

33. X의 확률질량함수

34. X의 확률분포를 표로 나타내어라.

35. 여자 임원이 1명 이하로 선출될 확률

◪ 빨간 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 나오는 빨간 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

36. X의 확률질량함수

37. X의 확률분포를 표로 나타내어라.

38. 빨간 공이 1개 이상 나올 확률

◪ 흰 공 6개와 검은 공 4개 모두 10개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 임의로 꺼낼 때, 나오는 흰 공의 개수를 X라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

39. X의 확률질량함수

40. X의 확률분포의 표로 나타내어라.

41. 흰 공이 적어도 1개 나올 확률

◪ 다음을 구하여라.

42. 동전 3개를 동시에 던져 나오는 앞면의 개수를 확률변수 X라 할 때, $P(X=1)$의 값

43. 동전 3개를 던져 나오는 앞면의 개수를 확률변수 X라 할 때, $P(X \geq 1)$의 값

44. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, $P(5 \leq X \leq 7)$의 값

45. 7개의 제비 중에서 3개의 당첨 제비가 있는 박스에서 3개를 임의로 택하여 나오는 당첨 제비의 개수를 확률변수 X라 할 때, $P(X \geq 1)$의 값

46. 불량품 4개가 포함된 10개의 제품 중에서 임의로 3개의 제품을 동시에 뽑아 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라 할 때, $P(2 \leq X \leq 3)$의 값

47. 크기와 모양이 같은 흰 구슬 4개와 붉은 구슬 2개가 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 함께 꺼낼 때 나오는 붉은 구슬의 개수를 확률변수 X라 할 때 $P(X \leq 1)$의 값

48. 흰 구슬 5개, 검은 구슬 3개가 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 동시에 꺼내 나오는 흰 구슬의 개수를 확률변수 X라 할 때, $P(1 \leq X \leq 2)$의 값

49. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(5 \leq \mathrm{X} \leq 8)$의 값

50. 흰 공 4개, 빨간 공 6개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라 할 때. $P(X \geq 1)$의 값

51. 1부터 6까지의 숫자가 각각 적힌 6장의 카드에서 동시에 3장을 뽑아 뽑힌 카드에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 5)$의 값

52. $0,\ 1,\ 2$의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3장의 카드 중에서 임의로 뽑은 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} \leq 0)$의 값

53. 흰 공이 4개, 검은 공이 3개 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 임의로 꺼내 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, $P(X^2 - 3X + 2 = 0)$의 값

54. $0,\ 1,\ 2,\ 3$의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 4장의 카드 중에서 임의로 2장을 동시에 뽑아 나오는 두 수의 차를 확률변수 X라 할 때, $P(X^2 - 3X + 2 \leq 0)$의 값

◪ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같을 때, 다음을 구하시오.

55. $P(X=2$ 또는 $X=4)$의 값

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{8}$	1

56. $P(1 \leq X \leq 2)$의 값

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	a	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	1

57. $P(X \geq 3) = \frac{7}{10}$일 때, $P(X=2)$의 값

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	a	b	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

58. $P(-1 \leq X \leq 1)$의 값

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{2}{9}$	$3a$	1

59. $P(1 \leq X \leq 3)$의 값

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{6}$	1

60. $P(1 \le X \le 2)$의 값

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

61. $P(1 < X \le 3)$의 값

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	a	$\frac{1}{10}$	1

62. $P(X \ge 1)$의 값

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{4}$	a	$\frac{3}{8}$	1

63. $P(1 \le X \le 3)$의 값

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{10}$	$2a$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

64. $P(X^2=1)$의 값

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$3a$	$2a$	a	1

65. $P(1 \le X \le 2)$의 값

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1

66. $P(X \le 1)$의 값

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}a$	$a-\frac{1}{4}$	1

67. $P(X=1$ 또는 $X=2)$의 값

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{2}{9}$	$3a$	1

68. $P(2 \le X \le 3)$의 값

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	a	$3a$	$\frac{1}{3}$	1

69. $P(1 < X \le 3)$의 값

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	a	$\frac{3}{10}$	1

70. $P(2 \le X \le 4)$의 값

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{8}$	1

71. $P(X^2=1)$의 값

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a^2	$\frac{a}{2}$	1

72. $P(X^2-2X-3=0)$의 값

X	-1	0	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	a	1

73. $P(X^2+X-2<0)$의 값

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	1

74. $P(X^2-4X+3>0)$의 값

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	a	$2a$	$\frac{3}{10}$	$2a$	$\frac{1}{5}$	1

정답 및 해설

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6

2) 0, 1, 2

3) 0, 1, 2, 3

4) 2, 3, 5, 7, 9

5) $S=\{R_1R_2,\ R_1R_3,\ R_2R_3,\ R_1B_1,\ R_2B_1,\ R_3B_1,$
$R_1B_2,\ R_2B_2,\ R_3B_2,\ B_1B_2\}$

6) 0, 1, 2

7) $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

8) 0, 1, 2

9)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

10) 0, 1, 2
⇨ 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

11) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{1}{10}$

⇨ $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

12)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

13) $S=\{BB,BW,WW\}$

14) 0, 1, 2

15)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

16) 이산확률변수가 아니다.

17) 이산확률변수가 아니다.
⇨ 혈압의 수치는 연속적인 값을 취하므로 이산확률변수가 아니다.

18) 이산확률변수이다.

19) 이산확률변수이다.

20) 이산확률변수가 아니다.
⇨ 시간, 길이, 무게 등과 같이 연속적인 값을 취하는 확률변수는 이산확률변수가 아니다.

21) 이산확률변수가 아니다.

22) 이산확률변수이다.

23) 이산확률변수이다.

24) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_x\times{}_3\mathrm{C}_{2-x}}{{}_5\mathrm{C}_2}(x=0,\ 1,\ 2)$

25)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

⇨ $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

26) $P(X=x)=\frac{{}_4C_x\cdot{}_6C_{3-x}}{{}_{10}C_3}(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

27)

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

28) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_3\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$
⇨ 사과의 개수는 0, 1, 2, 3의 값을 취할 수 있으므로

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_3\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

29)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

⇨ 사과의 개수는 0, 1, 2, 3의 값을 취할 수 있으므로

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_3\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3$에 대한 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P(X=0)}=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{35}$,

$\mathrm{P(X=1)}=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{35}$

$\mathrm{P(X=2)}=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{18}{35}$,

$\mathrm{P(X=3)}=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{35}$

따라서 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P(X}=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

30) $P(X=x)=\dfrac{{}_3C_x\times{}_2C_{2-x}}{{}_5C_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

⇨ 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이므로

$P(X=x)=\dfrac{{}_3C_x\times{}_2C_{2-x}}{{}_5C_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

31)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

⇨ $P(X=0)=\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$,

$P(X=1)=\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{5}$,

$P(X=2)=\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

32) $\dfrac{7}{10}$

⇨ 빨간 공을 1개 이하 꺼낼 확률은 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{6}{10}=\dfrac{7}{10}$

33) $P(X=x)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_6\mathrm{C}_3}$ $(x=0,1,2)$

⇨ 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
이때 남자 4명, 여자 2명 중에서 3명의 임원을 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3$
선출된 임원 중에서 여자가 x명인 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}$
따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_6\mathrm{C}_3}$ $(x=0,1,2)$

34)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

⇨ $P(X=0)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{5}$,

$P(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{5}$,

$P(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{5}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

35) $\dfrac{4}{5}$

⇨ 여자 임원이 1명 이하로 선출될 확률은
$P(X\leq 1)$이므로

$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$

36) $P(X=x)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_7\mathrm{C}_2}$ $(x=0,1,2)$

⇨ 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
이때 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는
경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2$
꺼낸 공 중에서 빨간 공이 x개인 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}$
따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_7\mathrm{C}_2}$ $(x=0,1,2)$

37)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

⇨ $P(X=0)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{7}$,

$P(X=1)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{7}$,

$P(X=2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

38) $\dfrac{5}{7}$

⇨ 빨간 공이 1개 이상 나올 확률은 $P(X\geq 1)$이므로

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

39) $P(X=x) = \frac{{}_6C_x \cdot {}_4C_{3-x}}{{}_{10}C_3}\,(x=0,1,2,3)$

⇨ 전체 경우의 수는 공 10개 중에서 3개를 뽑는 가짓수이므로 ${}_{10}C_3$이다. 또한 흰 공 6개 중에서 x개를 뽑으면, 검은 공 4개 중에서 $3-x$개를 뽑으므로 X의 확률 질량함수는

$P(X=x) = \frac{{}_6C_x \cdot {}_4C_{3-x}}{{}_{10}C_3}\,(x=0,1,2,3)$이다.

40)

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

⇨ $P(X=0) = \frac{{}_6C_0 \cdot {}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$,

$P(X=1) = \frac{{}_6C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}$,

$P(X=2) = \frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{2}$,

$P(X=3) = \frac{{}_6C_3 \cdot {}_4C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6}$

41) $\frac{29}{30}$

⇨ 흰 공이 적어도 한 개 나올 확률은 전체에서 흰 공이 하나도 안 나오는 경우를 제외한 경우이므로 구하는 확률은

$1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

42) $\frac{3}{8}$

⇨ 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 모든 경우는
(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H),
(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, T)
이므로 확률변수 X가 취할 수 있는 값이
0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$,

$P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 $P(X=1) = \frac{3}{8}$이다.

43) $\frac{7}{8}$

⇨ 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 모든 경우는
(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H),
(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, T)
이므로 확률변수 X가 취할 수 있는 값이
0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$,

$P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 $P(X \geq 1) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$이다.

44) $\frac{5}{12}$

⇨ 나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면
순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 합이 5인 경우는
$(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$의 4가지이므로

$P(X=5) = \frac{1}{9}$

6인 경우는
$(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$의 5가지이므로

$P(X=6) = \frac{5}{36}$

7인 경우는
$(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$의 6가지
이므로 $P(X=7) = \frac{1}{6}$

$\therefore P(5 \leq X \leq 7) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$
$= \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

45) $\frac{31}{35}$

⇨ 확률변수 X가 취할 수 있는 값이 0, 1, 2, 3이고,
그 확률은 각각

$P(X=0) = \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$,

$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$

$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$,

$P(X=3) = \frac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 $P(X \geq 1) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$이다.

46) $\frac{1}{3}$

⇨ 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 확률질량함수는

$P(X=x) = \frac{{}_4C_x \times {}_6C_{3-x}}{{}_{10}C_3}$ $(x=0,1,2,3)$

각각의 확률을 구하면

$P(X=0) = \frac{{}_4C_0 \times {}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6}$,

$P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{2}$,

$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}$,

$P(X=3) = \frac{{}_4C_3 \times {}_6C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

따라서 구하는 확률은

$P(2 \leq X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$

47) $\frac{4}{5}$

48) $\frac{45}{56}$

⇨ 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 확률질량함수는

$P(X=x) = \frac{{}_5C_x \times {}_3C_{3-x}}{{}_8C_3}$ $(x=0,1,2,3)$

각각의 확률을 구하면

$P(X=0) = \frac{{}_5C_0 \times {}_3C_3}{{}_8C_3} = \frac{1}{56}$,

$P(X=1) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_2}{{}_8C_3} = \frac{15}{56}$,

$P(X=2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_1}{{}_8C_3} = \frac{15}{28}$,

$P(X=3) = \frac{{}_5C_3 \times {}_3C_0}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$	1

따라서 구하는 확률은

$P(1 \leq X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{15}{56} + \frac{15}{28} = \frac{45}{56}$

49) $\frac{5}{9}$

⇨ $\mathrm{P}(5 \leq \mathrm{X} \leq 8)$

$= \mathrm{P}(\mathrm{X}=5$ 또는 $\mathrm{X}=6$ 또는 $\mathrm{X}=7$ 또는 $\mathrm{X}=8)$

$= \mathrm{P}(\mathrm{X}=5) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=6) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=7) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=8)$

각각을 구하면

(ⅰ) $\mathrm{X}=5$인 경우 : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5) = \frac{4}{36}$

(ⅱ) $\mathrm{X}=6$인 경우 : (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=6) = \frac{5}{36}$

(ⅲ) $\mathrm{X}=7$인 경우 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=7) = \frac{6}{36}$

(ⅳ) $\mathrm{X}=8$인 경우 : (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=8) = \frac{5}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

50) $\frac{5}{6}$

51) $\frac{4}{5}$

⇨ 확률변수 X가 취할 수 있는 값이 3, 4, 5, 6이고, 그 확률은 각각

$P(X=3) = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$, $P(X=4) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{3}{20}$,

$P(X=5) = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_3} = \frac{6}{20}$, $P(X=6) = \frac{{}_5C_2}{{}_6C_3} = \frac{10}{20}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$	1

따라서 $P(X \geq 5) = \frac{6+10}{20} = \frac{4}{5}$이다.

52) $\frac{2}{3}$

⇨ 0, 1, 2의 숫자카드에서 두 장을 뽑아 만들 수 있는 두 수의 차는 $\mathrm{X}=1, 2$이다.

각각의 확률을 구하면

(ⅰ) $\mathrm{X}=1$일 때 : (0, 1), (1, 2)의 2가지이므로

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \frac{2}{{}_3\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3}$

(ⅱ) $\mathrm{X}=2$일 때 : (0, 2)의 1가지이므로

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} = \frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} \leq 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1) \leq 0)$

$=\mathrm{P}(0 \le X \le 1)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{3}$

53) $\frac{5}{7}$

⇨ $X^2-3X+2=0$에서
$(X-1)(X-2)=0$
$\therefore X=1$ 또는 $X=2$
$\therefore P(X^2-3X+2=0)=P(X=1)+P(X=2)$
$P(X=1)=\frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$
$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$
이므로
$P(X^2-3X+2=0)=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$

54) $\frac{5}{6}$

⇨ 두 수의 차가 1인 경우는
$(3,2)$, $(2,1)$, $(1,0)$의 3가지이므로
$P(X=1)=\frac{1}{2}$
2인 경우는 $(3,1)$, $(2,0)$의 2가지이므로
$P(X=2)=\frac{1}{3}$
3인 경우는 $(3,0)$의 1가지이므로 $P(X=3)=\frac{1}{6}$
따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$X^2-3X+2 \le 0$을 풀면 $(X-1)(X-2) \le 0$
$1 \le X \le 2$
$\therefore P(X^2-3X+2 \le 0)=P(1 \le X \le 2)$
$=P(X=1)+P(X=2)$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

55) $\frac{1}{2}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{8}=1 \quad \therefore a+b=\frac{1}{2}$
$P(X=2$ 또는 $X=4)=P(X=2)+P(X=4)$
$=a+b=\frac{1}{2}$

56) $\frac{4}{5}$

⇨ $\frac{1}{15}+a+\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.
$P(1 \le X \le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$

57) $\frac{1}{5}$

⇨ $P(X \ge 3)=b+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$
$\therefore b=\frac{1}{5}$
$\frac{1}{10}+a+P(X \ge 3)=1$
$\therefore a=\frac{1}{5}$

58) $\frac{2}{3}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{3}+a+\frac{2}{9}+3a=1,\ 4a=\frac{4}{9}$
$\therefore a=\frac{1}{9}$
$\mathrm{P}(-1 \le X \le 1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$
$=\frac{1}{3}+a+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

59) $\frac{5}{6}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+a+\frac{1}{6}=1$에서 $a=\frac{1}{6}$
$\mathrm{P}(1 \le X \le 3)=\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=2$ 또는 $X=3)$
$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

60) $\frac{3}{4}$

61) $\frac{7}{10}$

⇨ $P(X=3)=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{5}$
$P(1<X \le 3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$

62) $\frac{7}{8}$

63) $\frac{7}{10}$

64) $\frac{2}{3}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로
$3a+2a+a=1$에서 $a=\frac{1}{6}$
$\mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$
$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

65) $\frac{5}{12}$

⇨ 확률의 총합이 1이므로

$a+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=1$

$a+b=\frac{5}{12}$

$\therefore P(1 \le X \le 2)=P(X=1)+P(X=2)=a+b=\frac{5}{12}$

66) $\frac{1}{2}$

⇨ $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a+a-\frac{1}{4}=\frac{4}{3}a=1$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

$\therefore P(X \le 1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a=\frac{1}{2}$

67) $\frac{5}{9}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+\frac{2}{9}+3a=1,\ 4a=\frac{4}{9}$

$\therefore\ a=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1$ 또는 $\mathrm{X}=2)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$

$=\frac{2}{9}+3a=\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$

68) $\frac{5}{6}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로

$a+3a+\frac{1}{3}=1,\ 4a=\frac{2}{3}\quad \therefore a=\frac{1}{6}$

$P(2 \le X \le 3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=3a+\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

69) $\frac{1}{2}$

70) $\frac{3}{4}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{8}=1\quad \therefore a+b=\frac{1}{2}$

$P(2 \le X \le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$=a+\frac{1}{4}+b=a+b+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

71) $\frac{3}{4}$

⇨ 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a^2+\frac{a}{2}=1,\ 2a^2+a-1=0$

$(2a-1)(a+1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-1$

이때 $0 \le P(X=x) \le 1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$P(X^2=1)=P(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=P(X=-1)+P(X=1)$

$=\frac{1}{2}+\frac{a}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

72) $\frac{1}{2}$

⇨ $P(X=3)=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{8}$

$P(X^2-2X-3=0)=P(X=3)+P(X=-1)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

73) $\frac{17}{24}$

74) $\frac{2}{5}$