



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-03-08

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ 인 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ 이면 ($f(x)$ 의 차수) = ($g(x)$ 의 차수)이때 극한값 α 는 ($f(x)$ 의 최고차항의 계수) ÷ ($g(x)$ 의 최고차항의 계수)이다.■ 다음 등식이 성립할 때, 두 상수 a , b 의 값을 구하여라.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{x-1} = 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = 6$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2x^2+ax+b} = -1$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-4} = 1$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-2} = 1$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} = \frac{1}{4}$

8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} = \frac{1}{6}$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2} = b$

10. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-4} = \frac{1}{6}$

11. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3} = b$

12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}+a} = b$ (단, $b \neq 0$)

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4}-\sqrt{2x+a}}{x} = b$

▣ 다음 등식이 성립할 때, 두 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

$$14. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + 1} = 3$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + ax + b}{x + 1} = 5$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 3$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - b}{x - 2} = 9$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{8}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + ax + b} = 1$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - ax + b} = \frac{1}{3}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + ax + b} = \frac{2}{5}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - b} = 4$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x^2 - b} = 3$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - b}{x^3 - 1} = 3$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-a} + b}{x - 2} = \frac{1}{6}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax + b}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

▣ 다음 값을 구하여라.

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 6 \text{ 일 때, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^2 - 1} \text{의 값}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = 1 \text{ 일 때, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2 - 4} \text{의 값}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2 - 2x} = 4 \text{ 일 때, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{의 값}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5 \text{ 일 때, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\{f(x)\}^2 - 9} \text{의 값}$$

■ 다음을 만족하는 다항함수 $f(x)$ 를 구하여라.

32. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -1$ 를 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

33. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = -3$ 을 만족시키는 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

34. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 5} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$ 을 만족하는 다항함수 $f(x)$

35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - x + 1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x - 3} = 2$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x)$

36. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -2$

37. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -4$

38. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

39. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$

40. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{f(x)} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{f(x)} = 3$ 을 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(3)$ 의 값을 구하여라.

41. $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2}$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ 를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

42. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ 를 만족시킨다. 방정식 $f(x) = x$ 의 한 근이 -2 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

43. 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2x}{x - 1}$ 가 존재한다. 다항함수 $f(x)$ 가 $f(x) + x - 1 = (x - 1)g(x)$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2 - 1}$ 의 값을 구하여라.

44. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{f(x)} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{f(x)} = 3$ 을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

45. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$$

02 / 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β 는 실수)일 때, a 에 가까운 모든 실수 x 에 대하여

(1) $f(x) \leq g(x)$ 이면 $\alpha \leq \beta$

(2) 함수 $h(x)$ 에 대하여 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$$

■ 임의의 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 의 값을 구하여라.

46. $\frac{3x+5}{x} < f(x) < \frac{3x^2+7x}{x^2}$

47. $\frac{2x-3}{x} \leq f(x) \leq \frac{2x^2+5x}{x^2}$

48. $\frac{x-4}{x+1} < f(x) < \frac{x-2}{x+1}$

49. $\frac{x+2}{x+1} < f(x) < \frac{x+1}{x}$

50. $\frac{x^2+1}{2x^2-4x+1} < f(x) < \frac{2x^2+5x+3}{4x^2-1}$

51. $\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1} < f(x) < \frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}$

■ 다음 물음에 답하여라.

52. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2+2x \leq f(x) \leq 2x^2+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값을 구하여라.

53. 모든 양의 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$x^2+2 \leq f(x) \leq x^2+5$$

를 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

54. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$x^2+3x-4 \leq f(x) \leq 4x^2-3x-1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값을 구하여라.

55. $x > \frac{1}{2}$ 인 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $2x-1 < f(x) < 2x+1$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}$ 의 값을 구하여라.

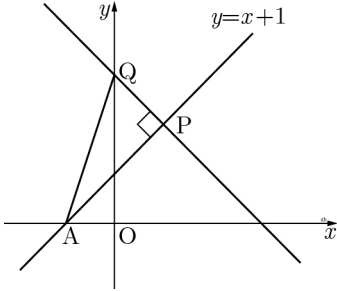
56. 모든 양의 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$2x-3 < f(x) < 2x+4$$

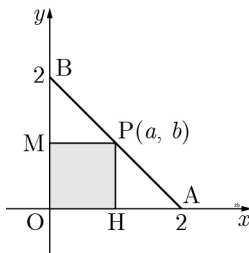
를 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1}$ 의 값을 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

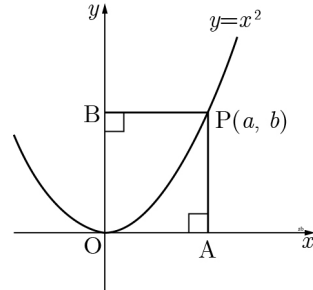
57. 그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위의 두 점 $A(-1,0)$ 과 $P(t, t+1)$ 이 있다. 점 P 를 지나고 직선 $y=x+1$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라고 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AQ^2}{AP^2}$ 의 값을 구하여라.



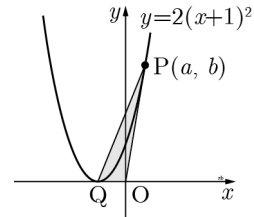
58. 좌표평면 위의 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ 에 대하여 선분 AB 위를 움직이는 점 $P(a, b)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 H , M 이라 하자. 직사각형 $OHPM$ 의 넓이를 $f(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 2-} \frac{f(a)}{4-a^2}$ 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)



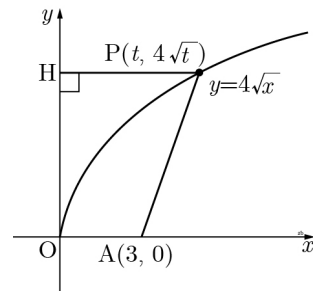
59. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 A , y 축에 내린 수선의 발을 B 라 하자. 삼각형 $OAPB$ 의 넓이를 $S(a)$, 둘레의 길이를 $L(a)$ 라고 할 때, $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{aL(a)}$ 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점이고, $a > 0$ 이다.)



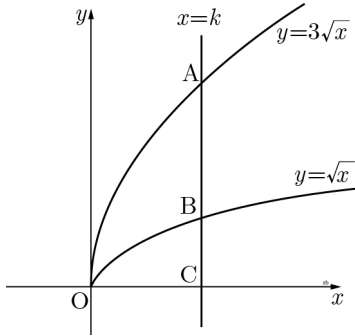
60. 다음과 같이 좌표평면에서 포물선 $y=2(x+1)^2$ 위를 움직이는 점 $P(a, b)$ 와 이 포물선의 꼭짓점 Q 에 대하여 삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{S(a)-1}{a}$ 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)



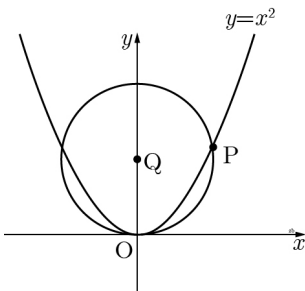
61. 다음 그림과 같이 함수 $y=4\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 $P(t, 4\sqrt{t})$ 와 x 축 위의 점 $A(3,0)$ 이 있다. 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{PA} - \overline{PH})$ 의 값을 구하여라.



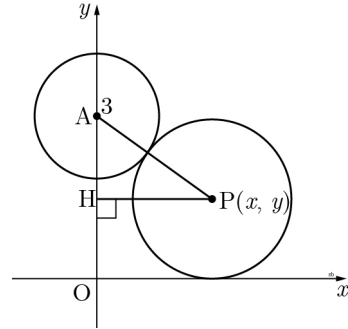
62. 그림과 같이 두 함수 $y=3\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 가 만나는 점을 각각 A , B 라 하고, 직선 $x=k$ 가 x 축과 만나는 점을 C 라고 하자. 이때, $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{\overline{OA} - \overline{AC}}{\overline{OB} - \overline{BC}}$ 의 값을 구하여라. (단, $k > 0$ 이고, O 는 원점이다.)



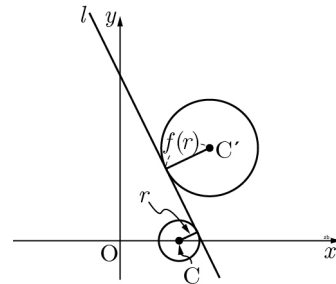
63. 다음 그림과 같이 $y=x^2$ 위의 원점이 아닌 점 P 에 대하여 점 P 와 원점 O 를 지나고 y 축 위의 점 Q 를 중심으로 하는 원이 있다. 점 P 가 곡선 $y=x^2$ 을 따라 원점 O 에 한없이 가까워질 때, 점 Q 는 점 $(0, a)$ 에 한없이 가까워진다. 이때, a 의 값을 구하여라.



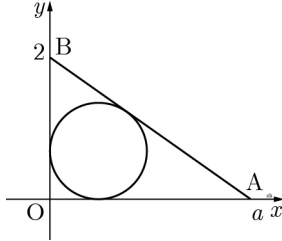
64. 그림과 같이 중심이 $A(0, 3)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 x 축에 접하는 원의 중심을 $P(x, y)$ 라고 하자. 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}$ 의 값을 구하여라.



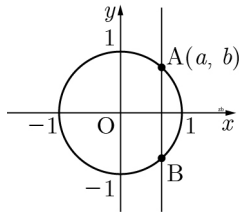
65. 그림과 같이 중심이 $C(2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r ($r < \sqrt{5}$)인 원 C 가 있다. 기울기가 -2 이고 원 C 에 접하는 직선을 l 이라고 하자. 직선 l 에 접하고 중심이 $C'(3, 3)$ 인 원 C' 의 반지름을 $f(r)$ 라고 할 때, $\lim_{r \rightarrow 0+} f(r)$ 의 값을 구하여라.



66. 다음과 같이 두 점 $A(a, 0)$, $B(0, 2)$ 에 대하여 삼각형 OAB 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $f(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a)$ 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점이고 $a > 0$ 이다.)



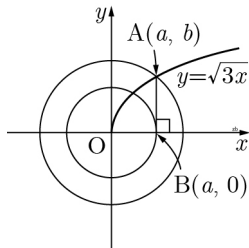
67. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 제1사분면 위의 점 $A(a, b)$ ($0 < a < 1$)를 지나고 y 축에 평행한 직선이 원과 만나는 점 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 선분 AB 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(a)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



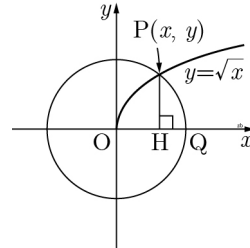
- (1) 정사각형의 넓이 $S(a)$ 를 a 에 대하여 나타내어라.

- (2) $\lim_{a \rightarrow 1-} \frac{1-a}{S(a)}$ 의 값을 구하여라.

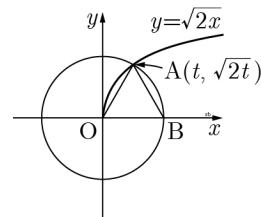
68. 곡선 $y = \sqrt{3x}$ 위의 점 $A(a, b)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 하자. 원 점 O 가 중심이고 점 A 를 지나는 원과 원점 O 가 중심이고 점 B 를 지나는 두 원의 반지름의 길이의 차를 $f(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a)$ 의 값을 구하여라. (단, $f(a) > 0$)



69. 다음과 같이 원점 O 가 중심이고, 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 를 지나는 원이 x 축의 양의 부분과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{PH^2}{QH}$ 의 값을 구하여라.



70. 다음과 같이 원점 O 를 중심으로 하고 곡선 $y = \sqrt{2x}$ 위의 점 $A(t, \sqrt{2t})$ 를 지나는 원이 x 축의 양의 방향과 만나는 점을 B 라 하자. 원의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 OAB 의 넓이를 $T(t)$ 라 할 때, $\lim_{OA \rightarrow 0+} \frac{T(t)}{S(t)}$ 의 값을 구하여라.





정답 및 해설

1) $a=2, b=-2$

$\Rightarrow x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = 0$ 이므로

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

\textcircled{A} 을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} a = a$$

이므로 $a=2$

$a=2$ 를 \textcircled{A} 에 대입하면 $b=-2$

2) $a=0, b=-9$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = 6 \text{에서}$$

$$9+3a+b=0 \quad \therefore b=-3a-9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax-3(a+3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+a+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+a+3) = a+6=6$$

$\therefore a=0, b=-9$

3) $a=3, b=1$

$\Rightarrow x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2+ax+b) = 0$ 이므로

$$2-a+b=0 \quad \therefore b=a-2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{B} 을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2x^2+ax+a-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(2x+a-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2x+a-2}$$

$$= \frac{1}{a-4}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{a-4} = -1 \quad \therefore a=3$$

$a=3$ 을 \textcircled{B} 에 대입하면 $b=1$

4) $a=2, b=-2$

$\Rightarrow x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x}+b) = a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}-a}{x-1} \quad (\because \textcircled{C})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$= a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}a = 1$$

$$\therefore a=2, b=-2$$

5) $a=4, b=-8$

$\Rightarrow x \rightarrow 4$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (a\sqrt{x}+b) = a\sqrt{4}+b = 2a+b=0$$

$$\therefore b=-2a \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x}-2a}{x-4} \quad (\because \textcircled{D})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a}{\sqrt{x}+2} = \frac{a}{4} = 1$$

$$\therefore a=4, b=-8$$

6) $a=2\sqrt{2}, b=-4$

$\Rightarrow x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x}+b) = \sqrt{2}a+b=0$$

$$\therefore b=-\sqrt{2}a \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

\textcircled{E} 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x}-\sqrt{2}a}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} = 1 \text{이므로 } a=2\sqrt{2}$$

이 값을 \textcircled{E} 에 대입하면 $b=-4$

7) $a=1, b=2$

$\Rightarrow x \rightarrow 3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a}-b) = \sqrt{3+a}-b=0$$

$$\therefore b=\sqrt{3+a} \quad \dots\dots \textcircled{F}$$

\textcircled{F} 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}} = \frac{1}{2\sqrt{3+a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{4} \text{이므로 } \sqrt{3+a}=2, 3+a=4 \quad \therefore a=1$$

이 값을 \textcircled{F} 에 대입하면 $b=\sqrt{3+1}=2 \quad \therefore a=1, b=2$

8) $a=6, b=3$

$\Rightarrow x \rightarrow 3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a}-b) = \sqrt{3+a}-b=0$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \sqrt{3+a} \quad \cdots \textcircled{7} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{6} \\ \therefore a &= 6, b = 3 \end{aligned}$$

9) $a=2, b=\frac{1}{4}$
 $\Rightarrow x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a}-2) &= \sqrt{2+a}-2=0 \\ 2+a &= 4 \quad \therefore a=2 \\ a=2 \text{를 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4} = b \end{aligned}$$

10) $a=5, b=3$
 $\Rightarrow x \rightarrow 4$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x+a}-b) &= \sqrt{4+a}-b=0 \\ \therefore b &= \sqrt{4+a} \quad \cdots \textcircled{7} \\ \textcircled{7} \text{을 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a}}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a}} = \frac{1}{2\sqrt{4+a}} \\ \frac{1}{2\sqrt{4+a}} &= \frac{1}{6} \text{이므로 } \sqrt{4+a}=3, 4+a=9 \quad \therefore a=5 \\ \text{이 값을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b &= \sqrt{4+5}=3 \\ \therefore a &= 5, b = 3 \end{aligned}$$

11) $a=1, b=-\frac{1}{6}$
 $\Rightarrow x \rightarrow -3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2-x-3+ax}) &= \sqrt{(-3)^2-(-3)-3-3a}=0 \\ 3-3a &= 0 \quad \therefore a=1 \\ a=1 \text{을 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2-x-3+x}}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3-x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3-x}} = -\frac{1}{6} = b \\ \therefore a &= 1, b = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

12) $a=-3, b=-\frac{3}{4}$
 $\Rightarrow x \rightarrow -2$ 일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{2x^2+1+a}) &= \sqrt{9+a}=0 \\ \therefore a &= -3 \quad \cdots \textcircled{7} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1+a}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}{2x^2-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}{2(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}+3}{2(x-2)} \\ &= -\frac{3}{4} \\ \therefore a &= -3, b = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

13) $a=4, b=\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+4}-\sqrt{2x+a}) &= \sqrt{4}-\sqrt{a}=0 \quad \therefore a=4 \\ a=4 \text{를 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4}-\sqrt{2x+4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x+4)-(2x+4)}{x(\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{2} \\ \therefore a &= 4, b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

14) 9
 $\Rightarrow x \rightarrow -1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+b) &= 1-a+b=0 \\ \therefore b &= a-1 \quad \cdots \textcircled{7} \\ \textcircled{7} \text{을 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax+a-1}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) = a-2 \\ a-2 &= 3 \text{이므로 } a=5 \\ \text{이 값을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b &= 4 \\ \therefore a+b &= 9 \end{aligned}$$

15) 16

⇒ $x \rightarrow -1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + ax + b) = 2 - a + b = 0$$

$$\therefore b = a - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + ax + b}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + ax + a - 2}{x + 1} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+a-2)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (2x + a - 2)$$

$$= -2 + a - 2 = 5$$

$$\therefore a = 9, b = 7 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore a + b = 16$$

16) -3

⇒ $x \rightarrow 2$ 일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\therefore b = -2a - 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + a + 2) = a + 4 = 3$$

따라서 $a = -1, b = -2 \quad (\because \textcircled{1})$ 이므로 $a + b = -3$

17) -5

⇒ $x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\therefore b = -2a - 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + a + 2) = 4 + a = 5$$

따라서 $a = 1, b = -6 \quad (\because \textcircled{1})$ 이므로 $a + b = -5$

18) 19

⇒ $x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax - b) = 4 + 2a - b = 0$$

$$\therefore b = 2a + 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + a + 2) = 4 + a$$

$$4 + a = 9 \text{이므로 } a = 5$$

이 값을 ①에 대입하면 $b = 14 \therefore a + b = 19$

19) -8

⇒ $x \rightarrow 2$ 일 때, (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\therefore b = -2a - 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + ax - 2a - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+a+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+a+2} = \frac{1}{a+4}$$

$$\frac{1}{a+4} = \frac{1}{8} \text{이므로 } a = 4$$

이 값을 ①에 대입하면 $b = -12 \therefore a + b = -8$

20) -1

⇒ $x \rightarrow 1$ 일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + ax + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + ax - a - 1} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+a+1} = \frac{1}{2+a} = 1$$

따라서 $a = -1, b = 0 \quad (\because \textcircled{1})$ 이므로 $a + b = -1$

21) -3

⇒ $x \rightarrow 1$ 일 때, (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 1 - a + b = 0 \therefore b = a - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 - ax + a - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-a+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-a+1} = \frac{1}{2-a}$$

$$\frac{1}{2-a} = \frac{1}{3} \text{이므로 } a = -1$$

이 값을 ①에 대입하면 $b = -2 \therefore a + b = -3$

22) -5

⇒ $x \rightarrow 2$ 일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\therefore b = -2a - 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + ax + b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + ax - 2a - 4} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+a+2} = \frac{2}{4+a} = \frac{2}{5}$$

따라서 $a=1, b=-6$ (\because ㉠)이므로 $a+b=-5$

23) -6

$\Rightarrow x \rightarrow 1$ 일 때, (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - b) = 1 - b = 0 \quad \therefore b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a}{x+1} = \frac{1-a}{2} \\ \frac{1-a}{2} &= 4 \text{이므로 } a = -7 \\ \therefore a+b &= -6 \end{aligned}$$

24) -6

$\Rightarrow x \rightarrow 2$ 일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - b) = 4 - b = 0 \quad \therefore b = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x^2 - b} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-a}{x+2} = \frac{2-a}{4} = 3 \\ \therefore a &= -10 \\ \therefore a+b &= -6 \end{aligned}$$

25) 15

$\Rightarrow x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax - b) = 1 + a - b = 0 \quad \therefore b = a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (a+1)}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+a+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+a+1}{x^2+x+1} = \frac{a+2}{3} \\ \frac{a+2}{3} &= 3 \text{이므로 } a = 7 \end{aligned}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=8$ $\therefore a+b=15$

26) -10

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-a}+b}{x-2} = \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$\sqrt{2-a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{2-a}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-a}+b}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{2-a}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-a)-(2-a)}{(x-2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a}} = \frac{1}{2\sqrt{2-a}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{즉 } \sqrt{2-a}=3 \text{이므로}$$

$$2-a=9 \quad \therefore a=-7, b=-3$$

$$\therefore a+b=-7+(-3)=-10$$

27) -2

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{에서}$$

$$2a+b=0 \text{이므로 } b=-2a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(x+1)-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} a(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{3}a = 4\sqrt{3} \quad \therefore a=2, b=-4$$

$$\therefore a+b=2+(-4)=-2$$

28) 3

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

여기서 $x-1=t$ 로 놓으면, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 6 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1} &= 6 \times \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

29) $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x-1=t$ 로 놓으면, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $x-2=t-1$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t-1)}{t-1} \\ &= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

30) 8

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-2x} = 4 \text{에서 } x-2=t \text{로 놓으면}$$

$x=t+2$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-2x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{(t+2)^2-2(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \cdot \frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} &= 8 \end{aligned}$$

$$31) \frac{1}{30}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2} \cdot \{f(x)+3\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+3\}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3+3} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$32) f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$\Rightarrow x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$$

따라서 $f(x) = (x+1)(x+a)$ (a 는 상수)라고 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a)}{(x-1)(x+1)} = \frac{a-1}{-2}$$

$$\frac{a-1}{-2} = -1 \text{이므로 } a = 3$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$$

$$33) f(x) = x^2 + 16x + 28$$

$\Rightarrow x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 0$$

$$\therefore f(x) = (x+2)(x+a) \quad (a \text{는 상수})$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a)}{(x-2)(x+2)} = \frac{a-2}{-4}$$

$$\text{즉, } \frac{a-2}{-4} = -3 \text{이므로 } a = 14$$

$$\therefore f(x) = (x+2)(x+14) = x^2 + 16x + 28$$

$$34) f(x) = x^2 + x - 2$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+5} = 1$ 이므로 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x+a)$ (a 는 상수)라고 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a) = 1+a$$

$$1+a = 3 \text{이므로 } a = 2$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

$$35) f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2-x+1} = 1$ 이므로 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x-a) \quad (a \text{는 상수})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-a)}{x-3} = 3-a$$

$$\text{즉, } 3-a = 2 \text{이므로 } a = 1$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$$

$$36) f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 3$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2-1} = 1$ 에서 $f(x)-x^3$ 은 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$f(x) - x^3 = x^2 + ax + b$$

$$\therefore f(x) = x^3 + x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = -2 \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때, (분모)}$$

$\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$$

$$\textcircled{A} \text{에 의하여 } -1+1-a+b=0 \quad \therefore a=b \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $f(x) = x^3 + x^2 + bx + b = (x+1)(x^2+b)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2+b)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2+b)}{(x+1)(x-1)} = \frac{b+1}{-2}$$

$$\text{즉, } \frac{b+1}{-2} = -2 \text{이므로 } b = 3$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+3) = x^3 + x^2 + 3x + 3$$

$$37) f(x) = x^3 + x^2 + 7x + 7$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2-1} = 1$ 에서 $f(x)-x^3$ 은 이차식이고 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = -4 \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$$

$$-1+1-a+b=0 \quad \therefore a=b \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $f(x) = x^3 + x^2 + bx + b = (x+1)(x^2+b)$ 라고 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2+b)}{x^2-1} = \frac{b+1}{-2}$$

$$\frac{b+1}{-2} = -4 \text{이므로 } b = 7$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+7) = x^3 + x^2 + 7x + 7$$

$$38) f(x) = x^3 + x^2 + 2x$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 1$ 에서 $f(x) - x^3$ 은 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$f(x) - x^3 = x^2 + ax + b$$

$$\therefore f(x) = x^3 + x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \cdots \textcircled{7}$$

또, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

즉, $\textcircled{7}$ 에서 $b = 0$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 + ax$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + a) = a$$

즉, $a = 2$ 이므로 $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$

$$39) f(x) = x^3 + x^2 + 5x$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 1$ 이므로 $f(x)$ 는 삼차항과 이차항의 계수가 모두 1인 삼차식이다. $\textcircled{1}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f(x) = x^3 + x^2 + ax$ (a 는 상수)라고 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + a) = a$$

$a = 5$ 이므로 $f(x) = x^3 + x^2 + 5x$

$$40) 3$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{f(x)} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

또, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{f(x)} = 3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때, (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x) = (x - 2)(x - a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x - 2)(x - a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{x - a} = \frac{6}{2 - a}$$

$$\text{즉, } \frac{6}{2 - a} = 3 \text{이므로 } a = 0$$

따라서 $f(x) = x(x - 2)$ 이므로 $f(3) = 3$

$$41) \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2} = 2 \text{에서}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx + c) = 4a + 2b + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2} = 1 \text{에서}$$

$$a = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } c = -2b - 4 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + bx - 2b - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{(x - 2)(x + b + 2)}{(x - 2)(x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + b + 2}{x + 1} = \frac{b + 4}{3} = 2$$

$$\therefore b = 2$$

$b = 2$ 를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $c = -8$

따라서 $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$ 이므로

$$f(3) = \frac{7}{4}$$

$$42) 7$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 차수를 n 이라고 하면 $n \leq 2$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$f(x) = ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b = 5$$

이때, 방정식 $f(x) = x$, 즉 $ax^2 + 5x = x$ 의 한 근이 $x = -2$ 이므로 $4a - 10 = -2$ 에서 $4a = 8$

$$\therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 5x$ 이므로 $f(1) = 7$

$$43) 1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2x}{x - 1}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - 2x\} = 0$ 이고 $g(x)$ 가 다항함수이므로

$$g(1) - 2 = 0$$

$$\therefore g(1) = 2$$

$f(x) + x - 1 = (x - 1)g(x)$ 에서

$$f(x) = (x - 1)g(x) - (x - 1) = (x - 1)\{g(x) - 1\}$$

..... $\textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 을 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2 - 1}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)\{g(x) - 1\}g(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x) - 1\}g(x)}{x + 1}$$

$$= \frac{\{g(1) - 1\}g(1)}{1 + 1} = \frac{(2 - 1) \times 2}{2} = 1$$

44) 0

 $\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{ax^2 + bx + c} = 2 \quad \therefore \frac{2}{a} = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + bx + c} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때,}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + bx + c) = 0, \quad 4 + 2b + c = 0$$

$$\therefore c = -2b - 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x^2 + bx - 2b - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+b+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+b+2} = \frac{6}{4+b} = 3 \\ \therefore b &= -2, c = 0 \quad \therefore f(x) = x^2 - 2x \quad \therefore f(2) = 0 \end{aligned}$$

45) 5

\Rightarrow 조건 (가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. 또, 조건 (나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

즉, $f(x) = 2(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+a) = 2(1+a) = 3 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$f(2) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = 5$$

46) 3

$$\Rightarrow \frac{3x+5}{x} < f(x) < \frac{3x^2+7x}{x^2} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+7x}{x^2} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

47) 2

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{x} \leq f(x) \leq \frac{2x^2+5x}{x^2} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{x}\right) = 2$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x}{x^2} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

48) 1

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x+1} < f(x) < \frac{x-2}{x+1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

49) 1

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x+1} < f(x) < \frac{x+1}{x} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

50) $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{2x^2-4x+1} < f(x) < \frac{2x^2+5x+3}{4x^2-1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x+3}{4x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{4 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

51) $\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{3x^2-4x+1} < f(x) < \frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{3x^2-4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{6 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{3x^2-4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

52) 3

 $\Rightarrow x^2+2x \leq f(x) \leq 2x^2+1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2x) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1) = 3$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

53) 1

 $\Rightarrow x^2+2 \leq f(x) \leq x^2+5$ 의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{x^2+2}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{x^2+5}{x^2}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{x^2} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$$

54) 5

 $\Rightarrow x^2+3x-4 \leq f(x) \leq 4x^2-3x-1$ 에서(i) $x > 1$ 일 때 $x-1 > 0$ 이므로 양변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{4x^2-3x-1}{x-1}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+4) = 5,$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{4x^2-3x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} (4x+1) = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = 5$$

(ii) $x < 1$ 일 때 $x-1 < 0$ 이므로 양변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{4x^2-3x-1}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{x^2+3x-4}{x-1}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{4x^2-3x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} (4x+1) = 5,$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+4) = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 5$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$$

55) 4

 $\Rightarrow 2x-1 < f(x) < 2x+1$ 의 각 변을 제곱하면

$$(2x-1)^2 < \{f(x)\}^2 < (2x+1)^2$$

 $x^2-x+1 > 0$ 이므로 각 변을 x^2-x+1 로 나누면

$$\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1} < \frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1} < \frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-4x+1}{x^2-x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+4x+1}{x^2-x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 4$$

즉, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1} = 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1} = 4$$

56) $\frac{4}{3}$ $\Rightarrow 2x-3 < f(x) < 2x+4$ 의 각 변을 제곱하면

$$(2x-3)^2 < \{f(x)\}^2 < (2x+4)^2$$

 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $x > 0$ 이므로 각 변을 $3x^2-x+1$ 로 나누면

$$\frac{(2x-3)^2}{3x^2-x+1} < \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1} < \frac{(2x+4)^2}{3x^2-x+1}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2}{3x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+4)^2}{3x^2-x+1} = \frac{4}{3}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1} = \frac{4}{3}$$

57) 2

 \Rightarrow 직선 $y=x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로점 $P(t, t+1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선 PQ 의방정식은 $y-(t+1) = -(x-t) \therefore y = -x+2t+1$ $x=0$ 일 때, $y=2t+1$ 이므로 $Q(0, 2t+1)$

$$\overline{AP}^2 = (t+1)^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 4t + 2$$

$$\overline{AQ}^2 = 1^2 + (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t + 2}{2t^2 + 4t + 2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}}{2 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}} = 2$$

58) $\frac{1}{2}$ \Rightarrow 두 점 $A(2, 0), B(0, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+2$ 이다. 이때, 점 $P(a, b)$ 는 선분 AB 위의 점이므로 $b=-a+2$ ($0 \leq a \leq 2$)따라서 $\overline{OH}=a, \overline{PH}=b=-a+2$ 이므로 사각형 $OHPM$ 의 넓이는

$$f(a) = \overline{OH} \times \overline{PH} = a(2-a)$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{f(a)}{4-a^2} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{a(2-a)}{(2+a)(2-a)} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{a}{2+a} = \frac{1}{2}$$

59) $\frac{1}{2}$

⇒ 점 $P(a, b)$ 가 곡선 $y = x^2$ 위의 점이므로

$$b = a^2 \therefore S(a) = a \cdot a^2 = a^3$$

$$L(a) = 2(a + a^2) = 2a^2 + 2a$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{aL(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^3}{2a^3 + 2a^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{2}{a}} = \frac{1}{2}$$

60) 2

⇒ 점 $P(a, b)$ 가 포물선 $y = 2(x+1)^2$ 위의 점이므로

$$b = 2(a+1)^2$$

이때, 점 Q 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 삼각형 OPQ 의 넓이는

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times b = \frac{1}{2} \times 1 \times 2(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0} \frac{S(a) - 1}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} (a + 2) = 2$$

61) 5

⇒ $\overline{PA} = \sqrt{(t-3)^2 + 16t}$, $\overline{PH} = t$ 이므로

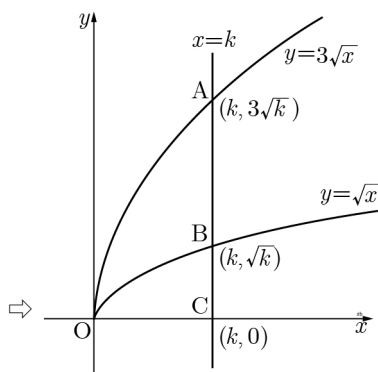
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{PA} - \overline{PH}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{(t-3)^2 + 16t} - t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t-3)^2 + 16t - t^2}{\sqrt{(t-3)^2 + 16t} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t + 9}{\sqrt{t^2 + 10t + 9} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10 + \frac{9}{t}}{\sqrt{1 + \frac{10}{t} + \frac{9}{t^2}} + 1} = 5$$

62) $\frac{1}{3}$



$$\overline{OA} = \sqrt{k^2 + (3\sqrt{k})^2} = \sqrt{k^2 + 9k}, \quad \overline{AC} = 3\sqrt{k},$$

$$\overline{OB} = \sqrt{k^2 + (\sqrt{k})^2} = \sqrt{k^2 + k}, \quad \overline{BC} = \sqrt{k} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\overline{OA} - \overline{AC}}{\overline{OB} - \overline{BC}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k^2 + 9k} - 3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k} - \sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k(k+9)} - 3\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)} - \sqrt{k}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+9} - 3)}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1} - 1)} \quad (\because k > 0)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k+9} - 3}{\sqrt{k+1} - 1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{k+9} - 3)(\sqrt{k+9} + 3)(\sqrt{k+1} + 1)}{(\sqrt{k+1} - 1)(\sqrt{k+1} + 1)(\sqrt{k+9} + 3)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k(\sqrt{k+1} + 1)}{k(\sqrt{k+9} + 3)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+9} + 3}$$

$$= \frac{\sqrt{1} + 1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3}$$

63) $\frac{1}{2}$

⇒ 점 Q 의 좌표를 $(0, y)$, 점 P 의 좌표를 (x, x^2) 으로 놓으면 $\overline{QO}^2 = \overline{QP}^2$ 이므로

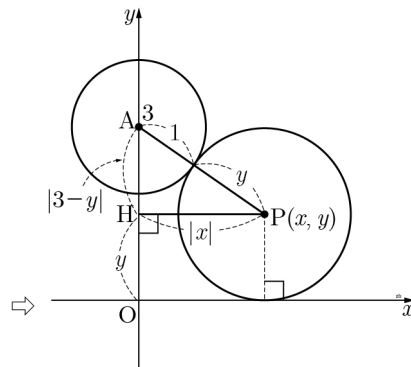
$$y^2 = x^2 + (x^2 - y)^2, \quad y^2 = x^2 + x^4 - 2x^2y + y^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$$

$P \rightarrow O$ 이면 $x \rightarrow 0$ 이므로 구하는 값은

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{1}{2}$$

64) 8



중심이 P 인 원이 x 축에 접하므로 반지름의 길이는 점 P 의 y 좌표와 같다.

이때, 중심이 A 인 원의 반지름의 길이가 1이고 두 원이 외접하므로 $\overline{PA} = y + 1$

또, 두 점 $A(0, 3)$, $P(x, y)$ 에 의하여 $\overline{PH} = |x|$ 이고

$\overline{OH} = y$ 이므로 $\overline{AH} = |3 - y|$

직각삼각형 AHP 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{AH}^2$ 이므로

$$(y+1)^2 = x^2 + (3-y)^2, \quad 1 + 2y + y^2 = x^2 + 9 - 6y + y^2$$

$$x^2 = 8y - 8 \quad \therefore y = \frac{x^2 + 8}{8}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{y+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\frac{x^2 + 8}{8} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{x^2 + 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{1 + \frac{16}{x^2}} = 8$$

65) $\sqrt{5}$

⇒ 직선 l 의 y 절편을 b 라고 하면 직선 l 의 기울기가 -2 이므로 직선 l 의 방정식은 $2x+y-b=0$
 이때, 점 $C(2,0)$ 과 직선 l 사이의 거리는 원 C 의 반지름의 길이 r 와 같으므로

$$\frac{|2 \times 2 + 0 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|4 - b|}{\sqrt{5}} = r \quad \therefore b = 4 \pm \sqrt{5}r$$

또한 점 $C'(3,3)$ 과 직선 l 사이의 거리는 원 C' 의 반지름의 길이 $f(r)$ 와 같으므로

$$\frac{|3 \times 2 + 3 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|9 - b|}{\sqrt{5}} = \frac{|5 \pm \sqrt{5}r|}{\sqrt{5}} = f(r)$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow 0+} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{|5 \pm \sqrt{5}r|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

66) 1

⇒ $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = 2$ 이므로

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times a \times 2 = a \quad \cdots \textcircled{7}$$

또, $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{a^2 + 4}$ 이고 삼각형 OAB 에 내접하는 원의 중심을 C 라 하면 이 원의 반지름의 길이가 $f(a)$ 이므로

$$\triangle OAB = \triangle COA + \triangle CAB + \triangle CBO$$

$$= \frac{1}{2} \times f(a) \times (\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB})$$

$$= \frac{1}{2} \times f(a) \times (a + \sqrt{a^2 + 4} + 2) \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7} = \textcircled{8}$ 이므로

$$a = \frac{1}{2} \times f(a) \times (a + \sqrt{a^2 + 4} + 2) \text{에서}$$

$$f(a) = \frac{2a}{a + 2 + \sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a}{a + 2 + \sqrt{a^2 + 4}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{a} + \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1$$

67) (1) $S(a) = 4(1 - a^2)$, (2) $\frac{1}{8}$

⇒ (1) 점 $A(a, b)$ 를 지나고 y 축과 평행한 직선이 x 축과 만나는 점을 H 라 하면 $\overline{AH} = b$ 이다.

이때, 점 A 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 1$ 에서 $b^2 = 1 - a^2$

따라서 $b = \sqrt{1 - a^2}$ 이므로

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2b = 2\sqrt{1 - a^2}$$

$$\therefore S(a) = \overline{AB}^2 = (2\sqrt{1 - a^2})^2 = 4(1 - a^2)$$

$$(2) \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{1 - a}{S(a)} = \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{1 - a}{4(1 - a^2)} = \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{1 - a}{4(1 + a)(1 - a)}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{1}{4(1 + a)} = \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$$

68) $\frac{3}{2}$

⇒ 점 $A(a, b)$ 를 지나는 원의 반지름의 길이는

$$\overline{OA} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 3a} \quad (\because b = \sqrt{3a}) \text{이고}$$

점 $B(a, 0)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는 $\overline{OB} = a$ 이다.

이때, 두 원의 반지름의 길이의 차 $f(a)$ 는

$$f(a) = \overline{OA} - \overline{OB} = \sqrt{a^2 + 3a} - a \text{이므로}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} (\sqrt{a^2 + 3a} - a)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{a^2 + 3a} - a)(\sqrt{a^2 + 3a} + a)}{\sqrt{a^2 + 3a} + a}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a}{\sqrt{a^2 + 3a} + a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{a}} + 1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

69) 0

⇒ 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = r^2$$

점 $P(x, y)$ 는 원과 곡선 $y = \sqrt{x}$ 의 교점이므로

$$x^2 + y^2 = r^2, y = \sqrt{x} \text{를 연립하여 } r \text{를 구하면}$$

$$x^2 + x = r^2 \quad \therefore r = \sqrt{x^2 + x}$$

$$\text{이때, } \overline{QH} = r - x = \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{QH}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x^2 + x} + x) = 0$$

70) $\frac{1}{2\pi}$

⇒ 점 A 의 좌표가 $(t, \sqrt{2t})$ 이므로 원의 반지름의 길

$$\text{이는 } \overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{t^2 + 2t}$$

따라서 원의 넓이는 $S(t) = \pi \overline{OA}^2 = \pi(t^2 + 2t)$ 이다.

한편, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 OAB 의 넓이는

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{t^2 + 2t} \times \sqrt{2t}$$

$$= \frac{\sqrt{2t^3 + 4t^2}}{2} = \frac{\sqrt{2t^2(t + 2)}}{2}$$

이때, $\overline{OA} \rightarrow 0+$ 이면 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{\overline{OA} \rightarrow 0+} \frac{T(t)}{S(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{t\sqrt{2t+4}}{2}}{\pi(t^2 + 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2t+4}}{2\pi(t+2)} = \frac{1}{2\pi}$$