실력 완성 | 미적분

2-2-1.몫의 미분법과 합성함수 미분법

수학 계산력 강화

(1)함수의 몫의 미분법





◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-13

2) 제작자 : 교육지대㈜

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

두 함수 f(x), g(x) ($g(x) \neq 0$)가 미분가능할 때

(1)
$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(2)
$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

☑ 다음 함수를 미분하여라.

1.
$$y = -\frac{1}{x^2 + x}$$

2.
$$y = \frac{3x+1}{x+5}$$

3.
$$y = \frac{x^2 - 4}{2x + 3}$$

4.
$$y = \frac{x-5}{x^2+x}$$

5.
$$y = \frac{1}{x-3}$$

6.
$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

7.
$$y = \frac{x+1}{3x-2}$$

8.
$$y = \frac{2x+1}{x^3-2}$$

9.
$$y = \frac{1}{e^x + 4}$$

10.
$$y = \frac{\ln x}{x}$$

11.
$$y = \frac{3x+5}{2x+1}$$

12.
$$y = \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

13.
$$y = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

14.
$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

15.
$$y = \frac{1}{\ln x}$$

16.
$$y = \frac{x^2}{e^x}$$

17.
$$y = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$18. y = \frac{x}{\ln x}$$

19.
$$y = \frac{1}{e^x}$$

20.
$$y = \frac{x+5}{e^x}$$

21.
$$y = \frac{x}{\ln x} + e^x + x^2$$

22.
$$y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$$

$$23. \quad y = \frac{\cos x + 1}{\sin x}$$

☑ 다음 극한값을 구하여라.

24. 함수
$$f(x)=\frac{x}{x^2-2}$$
에 대하여
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
의 값

25. 함수
$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-3}$$
에 대하여
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)}{h}$$
의 값

☑ 다음 값을 구하여라.

26. 함수
$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}$$
에 대하여 $f'(1)$ 의 값

27. 함수
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$
에 대하여 $f'(\sqrt{3})$ 의 값

28. 함수
$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$
에 대하여 $f'(0)$ 의 값

29. 함수
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2x + 1}$$
에 대하여 $f'(1)$ 의 값

30. 함수
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$$
에 대하여 $f'(2)$ 의 값

31. 함수
$$f(x) = \frac{x^2}{3x^2+4}$$
에 대하여 $f'(2)$ 의 값

32. 함수
$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$
에 대하여 $f'(1)$ 의 값

33. 함수
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2x}$$
에 대하여 $f'(-1)$ 의 값

34. 함수
$$f(x) = \frac{1}{x^3 \ln x}$$
에 대하여 $f'(e)$ 의 값

35. 함수
$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}$$
에 대하여 $f'(0)$ 의 값

36. 함수
$$f(x) = \frac{5x}{e^x}$$
에 대하여 $f'(2)$ 의 값

37.함수
$$f(x) = \frac{e^x \cos x}{1 + \sin x}$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값

38. 함수
$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값

☑ 다음 물음에 답하여라.

39. 함수
$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + 2x + 3}$$
에 대하여 $f'(0) = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

40. 함수
$$f(x) = \frac{2x+a}{x^2+x-1}$$
에 대하여 $f'(1) = 2$ 일 때,
상수 a 의 값을 구하여라.

41. 함수
$$f(x) = \frac{ax}{x^2 - b}$$
가 $f(2) = 2$, $f'(0) = -3$ 을 만 족할 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

42. 함수
$$f(x) = \frac{ax}{2x^2-1}$$
에 대하여 $f'(1) = 3$, $f'(0) = b$ 을 만족할 때, 실수 a,b 의 값을 구하여라.

43. 함수
$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$
이 $f(1) = -\frac{1}{2}$, $f'(0) = 3$ 을 만족할 때, 실수 a , b 에 대하여 $-a-2b$ 의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

$\mathbf{02}$ $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y=x^n$ 의 도함수 $y'=nx^{n-1}$

☑ 다음 함수를 미분하여라.

44.
$$y = 2x^{-5}$$

45.
$$y = \frac{1}{x}$$

46.
$$y = \frac{1}{x^3}$$

47.
$$y = \frac{x^6 - 2}{x^4}$$

48.
$$y = 5x^{-2}$$

49.
$$y = -\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^2}$$

50.
$$y = x^{-3}$$

51.
$$y = -\frac{4}{x^3}$$

52.
$$y = \frac{x^3 + x}{x^7}$$

53.
$$y = 2x^2 + x^{-7}$$

54.
$$y = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2}$$

55.
$$y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

☑ 다음 값을 구하여라.

56. 함수
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
에 대하여 $f'(2)$ 의 값

58. 함수
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^5}$$
에 대하여 $f'(1)$ 의 값

03 삼각함수의 도함수

(1)
$$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$$

(2)
$$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$$

(3)
$$y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$$

$$(4) \ \ y = \cot x \ \ \Rightarrow \ \ y' = -\csc^2 x$$

☑ 다음 함수를 미분하여라.

59.
$$y = \sin x \tan x$$

$$60. \quad y = \frac{x}{\tan x}$$

61.
$$y = 5\tan x - 3x$$

62.
$$y = x \tan x$$

63.
$$y = \tan x + 2\cot x$$

64.
$$y = \sec x + \tan x$$

65.
$$y = \csc x \cot x$$

66.
$$y = x^2 \sec x$$

67.
$$y = x^2 \tan x$$

68.
$$y = \tan x + \sin x$$

69.
$$y = \sec x \tan x$$

$$70. \quad y = \tan x + 2\cot x$$

$$71. \quad y = \sec x + \csc x$$

$$72. \quad y = e^x \tan x$$

$$73. \quad y = \frac{\tan x}{e^x}$$

74.
$$y = \frac{\cot x}{x}$$

75.
$$y = \sec x \ln x - \cot x$$

76.
$$y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

☑ 다음 값을 구하여라.

77. 함수
$$f(x) = \sec x$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값

78. 함수
$$f(x) = \frac{1}{2} \tan x$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값

79. 함수
$$f(x) = \tan x + \csc x$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값

80. 함수
$$f(x) = \sin x \tan x$$
에 대하여 $2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값

81. 함수
$$f(x) = \frac{1-\sec x}{\tan x}$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값

82. 함수
$$f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sec x}$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값

83. 함수
$$f(x) = \csc x \cot x$$
에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값

정답 및 해설

1)
$$y' = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

 $\Rightarrow y' = \frac{(x^2+x)'}{(x^2+x)^2} = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

2)
$$y' = \frac{14}{(x+5)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(3x+1)'(x+5) - (3x+1)(x+5)'}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot (x+5) - (3x+1) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{14}{(x+5)^2}$$

3)
$$y' = \frac{2(x^2 + 3x + 4)}{(2x + 3)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x^2 - 4)'(2x + 3) - (x^2 - 4)(2x + 3)'}{(2x + 3)^2}$$

$$= \frac{2x \cdot (2x + 3) - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 3)^2} = \frac{2(x^2 + 3x + 4)}{(2x + 3)^2}$$

4)
$$y' = \frac{-x^2 + 10x + 5}{x^2(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x-5)'(x^2 + x) - (x-5)(x^2 + x)'}{(x^2 + x)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2 + x) - (x-5) \cdot (2x+1)}{(x^2 + x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 10x + 5}{(x^2 + x)^2} = \frac{-x^2 + 10x + 5}{x^2(x+1)^2}$$

5)
$$y' = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(x-3)'}{(x-3)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

6)
$$y' = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(1-\cos x)'(1+\cos x) - (1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

7)
$$y' = -\frac{5}{(3x-2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x+1)'(3x-2) - (x+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{1 \times (3x-2) - (x+1) \times 3}{(3x-2)^2}$$

$$= -\frac{5}{(3x-2)^2}$$

8)
$$y' = -\frac{4x^3 + 3x^2 + 4}{(x^3 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2(x^3 - 2) - (2x + 1)3x^2}{(x^3 - 2)^2} = -\frac{4x^3 + 3x^2 + 4}{(x^3 - 2)^2}$$

9)
$$y = -\frac{e^x}{(e^x + 4)^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(e^x + 4)'}{(e^x + 4)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 4)^2}$$

10)
$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\ln x)'x - \ln x \times (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$$
$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

11)
$$y' = -\frac{7}{(2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(3x+5)'(2x+1) - (3x+5)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(2x+1)^2}{(2x+1)^2} = \frac{3(2x+1) - 2(3x+5)}{(2x+1)^2} = -\frac{7}{(2x+1)^2}$$

12)
$$y' = \frac{3x^2 + 6x + 2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(3x^2 - 2)'(x+1) - (3x^2 - 2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{6x(x+1) - (3x^2 - 2)}{(x+1)^2} = \frac{3x^2 + 6x + 2}{(x+1)^2}$$

13)
$$y' = \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^x(e^x + 2) - e^x(e^x)}{(e^x + 2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2}$$

14)
$$y' = \frac{2e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$$

15)
$$y' = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

16)
$$y' = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

17)
$$y' = \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x^2)' \ln x - x^2 (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{2x \ln x - x^2 \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2}$$

18)
$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x)'(\ln x) - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

19)
$$y' = -\frac{1}{e^x}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(e^x)'}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^x}$$

20)
$$y' = \frac{-x-4}{e^x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x+5)'e^x - (x+5)(e^x)'}{(e^x)^2}$$
$$= \frac{e^x - (x+5)e^x}{e^{2x}}$$
$$= \frac{1 - (x+5)}{e^x} = \frac{-x-4}{e^x}$$

21)
$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} + e^x + 2x$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' + (e^x)' + (x^2)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} + e^x + 2x$$

22)
$$y' = \frac{2\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\sin x - 1)'(\sin x + 1) - (\sin x - 1)(\sin x + 1)'}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= \frac{\cos x \times (\sin x + 1) - (\sin x - 1) \times \cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

23)
$$y' = \frac{1}{\cos x - 1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\cos x + 1)' \sin x - (\cos x + 1)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \times \sin x - (\cos x + 1) \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{-(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$24) -6$$

다 주어진 극한식은
$$2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}=2f'(1)$$

$$f'(x)=\frac{-2-x^2}{(x^2-2)^2}\qquad \therefore 2f'(1)=-6$$

26)
$$\frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3 + x^2)'(x^2 + 1) - (x^3 + x^2)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 + 1) - (x^3 + x^2) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$
이므로 $f'(1) = \frac{1 + 3 + 2}{2^2} = \frac{3}{2}$

27)
$$-\frac{1}{8}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$
이므로
$$f'(\sqrt{3}) = \frac{1 - 3}{(3 + 1)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$$
이므로 $f'(0) = 2$

29)
$$\frac{1}{3}$$

$$30) -4$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 3)^2} \qquad \therefore f'(2) = -4$$

31) $\frac{1}{16}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(3x^2+4) - x^2(3x^2+4)'}{(3x^2+4)^2}$$
$$= \frac{2x \cdot (3x^2+4) - x^2 \cdot 6x}{(3x^2+4)^2} = \frac{8x}{(3x^2+4)^2}$$
$$\therefore f'(2) = \frac{8 \cdot 2}{(3 \cdot 2^2+4)^2} = \frac{1}{16}$$

33)
$$-\frac{1}{e}$$

다
$$f'(x) = \frac{(e^x)'(x^2 + 2x) - e^x(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2 + 2x - 2x - 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2)}{(x^2 + 2x)^2}$$
이므로 $f'(-1) = \frac{e^{-1}(1 - 2)}{(1 - 2)^2} = -\frac{1}{e}$

34)
$$-\frac{4}{e^4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{(x^3 \ln x)'}{(x^3 \ln x)^2} = -\frac{(x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)'}{x^6 (\ln x)^2}$$
$$= -\frac{3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x}}{x^6 (\ln x)^2} = -\frac{3 \ln x + 1}{x^4 (\ln x)^2}$$
$$= -\frac{3 \ln x + 1}{x^4 (\ln x)^2}$$
$$= -\frac{3 \ln x + 1}{x^4 (\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)' e^x - (\sin x - \cos x)(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x - \sin x + \cos x)e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{2\cos x}{e^x}$$

$$= \frac{2\cos x}{e^x}$$

36)
$$-\frac{5}{e^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5e^x - 5xe^x}{e^{2x}} = \frac{5 - 5x}{e^x}$$
$$f'(2) = \frac{5 - 5 \cdot 2}{e^2} = -\frac{5}{e^2}$$

37)
$$-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x \cos x)' (1 + \sin x) - e^x \cos x (1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{(e^x \cos x - e^x \sin x) (1 + \sin x) - e^x \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2}{2^2} = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \tan x + 1$$
이므
로 $f'(x) = (\tan x + 1)' = \sec^2 x$
 $x = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 미분계수를 구하면
 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec^2 \frac{\pi}{3} = 2^2 = 4$

39)
$$a = 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{a(x^2 + 2x + 3) - ax(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$
$$f'(0) = \frac{3a}{9} = 1 \qquad \therefore \quad a = 3$$

40)
$$a = -2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + x - 1) - (2x + a)(2x + 1)}{(x^2 + x - 1)^2}$$
$$f'(1) = 2 - 3 \times (2 + a) = 2$$

41)
$$a = 3$$
, $b = 1$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{2a}{4-b} = 2$$
이므로 $a+b=4$

$$f'(x) = \frac{a(x^2-b)-2ax^2}{\left(x^2-b\right)^2}$$
이므로
$$f'(0) = \frac{-ab}{b^2} = -\frac{a}{b} = -3$$
따라서 $a = 3b$ 이므로 $4b = 4$ $\therefore b = 1$
 $\therefore a = 3b = 3$

42)
$$a = -1$$
. $b = 1$

$$f'(x) = \frac{a(2x^2 - 1) - ax(4x)}{(2x^2 - 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{a - 4a}{1} = 3, \quad -3a = 3 \qquad \therefore \quad a = -1$$

$$f'(0) = \frac{-a}{1} = b \qquad \therefore \quad b = 1$$

44)
$$y' = -\frac{10}{x^6}$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times (-5)x^{-5-1} = -10x^{-6} = -\frac{10}{x^6}$$

45)
$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

46)
$$y' = -\frac{3}{r^4}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$$

47)
$$y' = 2x + \frac{8}{x^5}$$

$$y = \frac{x^6 - 2}{x^4} = \frac{x^6}{x^4} - \frac{2}{x^4} = x^2 - 2x^{-4}$$
이므로
$$y' = 2x^{2-1} - 2 \times (-4)x^{-4-1}$$
$$= 2x + 8x^{-5} = 2x + \frac{8}{x^5}$$

48)
$$y' = -\frac{10}{x^3}$$

$$\Rightarrow y' = 5 \times (-2x^{-2-1}) = -10x^{-3} = -\frac{10}{x^3}$$

49)
$$y' = \frac{4}{x^5} - \frac{6}{x^3}$$

다
$$y = -x^{-4} + 3x^{-2}$$
이므로
$$y' = -(-4x^{-4-1}) + 3 \times (-2x^{-2-1})$$
$$= 4x^{-5} - 6x^{-3} = \frac{4}{x^5} - \frac{6}{x^3}$$

50)
$$y' = -\frac{3}{x^4}$$

$$\Rightarrow y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

51)
$$y' = \frac{12}{r^4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{x^3} = -4x^{-3}$$
이므로

$$y' = -4 \times (-3)x^{-3-1} = 12x^{-4} = \frac{12}{x^4}$$

52)
$$y' = -\frac{4}{r^5} - \frac{6}{r^7}$$

$$\Rightarrow y = x^{-4} + x^{-6}$$
이므로
 $y' = -4x^{-4-1} - 6x^{-6-1} = -4x^{-5} - 6x^{-7}$
 $= -\frac{4}{x^5} - \frac{6}{x^7}$

53)
$$y' = 4x - \frac{7}{x^8}$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times 2x^{2-1} + (-7)x^{-7-1} \\ = 4x - 7x^{-8} = 4x - \frac{7}{x^8}$$

54)
$$y' = 6x + \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow y = 3x^2 + 1 - x^{-2}$$
이므로
$$y' = 3 \times 2x^{2-1} - (-2x^{-2-1}) = 6x + 2x^{-3} = 6x + \frac{2}{x^3}$$

55)
$$y' = -\frac{5}{x^6} + \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow y = x^{-5} - x^{-4} + x^{-3} - x^{-2}$$
이므로
$$y' = -5x^{-5-1} - (-4x^{-4-1}) - 3x^{-3-1} - (-2x^{-2-1})$$
$$= -5x^{-6} + 4x^{-5} - 3x^{-4} + 2x^{-3}$$
$$= -\frac{5}{x^6} + \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \ f'(2) = -4$$

$$57) -55$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow f(x) = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + \dots + x^{-10} \\ \text{only} \\ f'(x) = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} - 4x^{-5} - \dots - 10x^{-11} \\ \therefore f'(1) = -1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 10 \\ = -(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10) \\ = -55 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}, \ f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^6}$$
$$\therefore f'(1) = -3 + 5 = 2$$

59)
$$y' = \sin x + \tan x \cdot \sec x$$

$$\Rightarrow y' = (\sin x)' \cdot \tan x + \sin x \cdot (\tan x)'$$

$$= \cos x \cdot \tan x + \sin x \cdot \sec^2 x$$

$$= \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sin x + \tan x \cdot \sec x$$

$$60) \ y' = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x)' \tan x - x(\tan x)'}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - x \sec^2 x}{\tan^2 x}$$
$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - x \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$$

61)
$$y' = 5\sec^2 x - 3$$

$$\Rightarrow y' = (5\tan x)' - (3x)' = 5\sec^2 x - 3$$

62)
$$y' = \tan x + x \sec^2 x$$

$$\Rightarrow y' = (x)' \tan x + x(\tan x)'$$
$$= \tan x + x \sec^2 x$$

63)
$$y' = \sec^2 x - 2\csc^2 x$$

$$\Rightarrow y' = \sec^2 x + 2(-\csc^2 x)$$
$$= \sec^2 x - 2\csc^2 x$$

64)
$$y' = (\tan x + \sec x) \sec x$$

$$\Rightarrow y' = \sec x \tan x + \sec^2 x = (\tan x + \sec x) \sec x$$

65)
$$y' = -(\cot^2 x + \csc^2 x)\csc x$$

$$\Rightarrow y' = (\csc x)' \cot x + \csc x (\cot x)'$$

$$= (-\csc x \cot x) \cot x + \csc x (-\csc^2 x)$$

$$= -\csc x \cot^2 x - \csc^3 x$$

$$= -(\cot^2 x + \csc^2 x) \csc x$$

66)
$$y' = x \sec x (2 + x \tan x)$$

$$\Rightarrow y' = (x^2)' \sec x + x^2 (\sec x)'$$

$$= 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$$

$$= x \sec x (2 + x \tan x)$$

$$67) \quad y = 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$$

$$\Rightarrow y' = (x^2)' \cdot \tan x + x^2 \cdot (\tan x)'$$
$$= 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$$

68)
$$y' = \sec^2 x + \cos x$$

$$\Rightarrow y' = (\tan x)' + (\sin x)' = \sec^2 x + \cos x$$

69)
$$y' = \sec x (2\tan^2 x + 1)$$

$$\Rightarrow y' = (\sec x)' \tan x + \sec x (\tan x)'$$

$$= \sec x \tan x \times \tan x + \sec x \times \sec^2 x$$

$$= \sec x (\tan^2 x + \sec^2 x)$$

$$= \sec x (2\tan^2 x + 1) \leftarrow 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

70)
$$y' = \sec^2 x - 2\csc^2 x$$

71)
$$y' = \sec x \tan x - \csc x \cot x$$

72)
$$y' = e^x(\tan x + \sec^2 x)$$

$$\Rightarrow y' = (e^x)' \cdot \tan x + e^x \cdot (\tan x)'$$
$$= e^x \tan x + e^x \sec^2 x$$
$$= e^x (\tan x + \sec^2 x)$$

73)
$$y' = \frac{\sec^2 x}{e^x} - \frac{\tan x}{e^x}$$

$$\Rightarrow y' = (\tan x)' \cdot e^{-x} + \tan x \cdot (e^{-x})'$$

$$= \sec^2 x \cdot e^{-x} + \tan x \cdot (-e^{-x})$$

$$= \frac{\sec^2 x}{e^x} - \frac{\tan x}{e^x}$$

74)
$$y' = \frac{-x \csc^2 x - \cot x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\cot x)'x - (\cot x)(x)'}{x^2} = \frac{-x\csc^2 x - \cot x}{x^2}$$

75)
$$y' = \sec x \tan x \ln x + \frac{\sec x}{x} - \csc^2 x$$

$$\Rightarrow y' = \sec x \tan x \ln x + \sec x \frac{1}{x} - \csc^2 x$$

76)
$$y' = \frac{2\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2}$$

$$\Rightarrow y'$$

$$= \frac{(1+\tan x)'(1-\tan x)-(1+\tan x)(1-\tan x)'}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x(1-\tan x)-(1+\tan x)(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

77)
$$\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x \qquad \therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sec^2 x$$
이므로
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = 1$$

79)
$$\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sec^2 x - \csc x \cot x$$
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}$$

80)
$$5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x \tan x + \sin x \sec^2 x$$

$$= \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sin x + \tan x \sec x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3} \sec \frac{\pi}{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \times 2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

81)
$$-2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sec x - \sec^2 x}{\tan^2 x} \quad \therefore \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 2$$

82)
$$\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sec x}{1 + \sec x} \qquad \therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

83)
$$-14$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x \cdot \cot x + \csc x \cdot (-\csc^2 x)$$
$$= -\csc x (\cot^2 x + \csc^2 x)$$
$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \times (3+4) = -14$$