4-2-3.여러 가지 증명_신사고(고성은)

개념check

[부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질]

• 두 실수 a, b에 대하여

(1) $a>b \quad \Leftrightarrow \quad a-b>0$

(2) $a>0,\ b>0 \quad \Leftrightarrow \quad a+b>0,\ ab>0$

(3) $a^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 0$

(4) $a^2+b^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0, b=0$

(5) $a>0,\ b>0$일 때, $a>b \ \Leftrightarrow\ a^2>b^2 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{a}>\sqrt{b}$

(6) $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

[절대부등식]

• **절대부등식**: 문자를 포함한 부등식에서 그 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식

• **여러 가지 절대부등식의 예**

(1) a, b가 실수일 때, $a^2 \pm ab+b^2 \geq 0$
(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

(2) a, b, c가 실수일 때, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(3) a, b가 실수일 때, $|a|+|b| \geq |a+b|$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)

기본문제

[예제]

1. **다음은 명제 '홀수와 짝수의 합은 홀수이다.'가 참임을 보이는 과정이다. 빈 칸에 들어갈 것으로 알맞은 것은?**

> 홀수와 짝수를 각각 a, b라고 하면
> $a=$ (가), $b=2n$ (m, n은 자연수)라 할 수 있다.
> $a+b=2(m+n)-1$ ($m+n$은 자연수)이므로
> $a+b$는 (나)이다.
> 따라서 '홀수와 짝수의 합은 홀수이다.'가 참임을 알 수 있다.

① (가) : $2m-1$ (나) : 짝수
② (가) : $2m+1$ (나) : 짝수
③ (가) : $2m-1$ (나) : 홀수
④ (가) : $2m+1$ (나) : 홀수
⑤ (가) : $2m-1$ (나) : 자연수

[문제]

2. **다음은 명제 '홀수가 아닌 자연수 a, b에 대하여 ab는 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> $x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)이라고 하면
> $xy=2($(ㄴ)$)+1$이고 이는 (ㄴ)이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $mn-m-n$ (ㄴ) : 홀수
② (ㄱ) : $mn-m-n$ (ㄴ) : 짝수
③ (ㄱ) : $2mn-m-n$ (ㄴ) : 홀수
④ (ㄱ) : $2mn-m-n$ (ㄴ) : 짝수
⑤ (ㄱ) : $4mn-m-n$ (ㄴ) : 홀수

[예제]

3. **다음은 명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> 주어진 명제의 (ㄱ)는 '자연수 n에 대하여 n이 (ㄴ)이면 n^2도 (ㄴ)이다.' 이다.
> n이 (ㄴ)이면 $n=\square$ (k는 자연수)
> $n^2=2(2k^2)$이다.
> 따라서 주어진 명제의 (ㄱ)가 참이므로
> 주어진 명제도 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 역 (ㄴ) : 홀수
② (ㄱ) : 역 (ㄴ) : 짝수
③ (ㄱ) : 대우 (ㄴ) : 홀수
④ (ㄱ) : 대우 (ㄴ) : 짝수
⑤ (ㄱ) : 대우 (ㄴ) : 자연수

[예제]

4. **다음은 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.**

$\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면
$\sqrt{2}=\boxed{(ㄱ)}$ (m, n은 서로소인 자연수)
으로 나타낼 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하면 $2m^2=n^2$
이때 n^2이 2의 배수이므로 n도 2의 배수이다.
n이 2의 배수이므로 $n=2k$ (k는 자연수)로 놓고
위 식에 대입하면
$2m^2=(2k)^2$, 즉 $m^2=2k^2$
그런데 m^2이 2의 배수이므로 m도 2의 배수이다.
즉 m, n이 모두 2의 배수가 되어 m, n은
$\boxed{(ㄴ)}$라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $\frac{n}{m}$ (ㄴ) : 서로소

② (ㄱ) : $\frac{n}{m}$ (ㄴ) : 홀수

③ (ㄱ) : $\frac{n}{m}$ (ㄴ) : 짝수

④ (ㄱ) : $\frac{m}{n}$ (ㄴ) : 서로소

⑤ (ㄱ) : $\frac{m}{n}$ (ㄴ) : 홀수

[문제]

5. **다음은 명제 '$1+\sqrt{3}$이 무리수이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.**

$1+\sqrt{3}$이 $\boxed{(ㄱ)}$라고 가정하면 $1+\sqrt{3}=k$ (k는 $\boxed{(ㄱ)}$)로 놓을 수 있다. 즉 $\sqrt{3}=k-1$이고 $\boxed{(ㄱ)}$끼리의 뺄셈은 $\boxed{(ㄱ)}$이므로 $k-1$은 $\boxed{(ㄱ)}$이다. 그런데 $\sqrt{3}$는 $\boxed{(ㄴ)}$이므로 모순이다. 따라서 $1+\sqrt{3}$는 무리수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 유리수
② (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 무리수
③ (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 실수
④ (ㄱ) : 무리수 (ㄴ) : 유리수
⑤ (ㄱ) : 무리수 (ㄴ) : 무리수

[예제]

6. **a, b가 실수일 때, 다음은 부등식**
$5a^2+4ab+b^2\geq 0$
이 성립함을 증명하는 과정이다.

주어진 부등식의 좌변을 변형하면
$5a^2+4ab+b^2=(\boxed{(ㄱ)})^2+a^2$
실수의 제곱은 0 이상이므로
$5a^2+4ab+b^2\geq 0$
여기서 등호는 $\boxed{(ㄴ)}$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $a+2b$ (ㄴ) : $a=b$
② (ㄱ) : $a+2b$ (ㄴ) : $a=b=0$
③ (ㄱ) : $2a+b$ (ㄴ) : $a=b$
④ (ㄱ) : $2a+b$ (ㄴ) : $a=b=0$
⑤ (ㄱ) : $2a+b$ (ㄴ) : $ab=0$

[문제]

7. **a, b가 실수일 때, 다음은 부등식 $a^2+10ab+36b^2\geq 0$이 성립함을 증명하는 과정이다.**

$a^2+10ab+36b^2=(a+\boxed{(ㄱ)}b)^2+\boxed{(ㄴ)}b^2$
a, b가 실수이므로, 실수의 제곱은 0 이상이다.
따라서 $a^2+10ab+36b^2\geq 0$이 성립한다.
이때 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ)에 들어갈 값을 p, (ㄴ)에 들어갈 값을 q라 할 때, 두 상수 p, q에 대하여 $-2p+q$의 값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[예제]

8. **$a>0$, $b>0$일 때, 다음은 부등식 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.**

$a>0$, $b>0$이므로
주어진 부등식의 좌변에서 우변을 빼서 정리하면
$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$
$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\boxed{(ㄱ)}0$
따라서 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$이다.
여기서 등호는 $\boxed{(ㄴ)}$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

① (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : $a=b$

② (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : $ab=0$

③ (ㄱ) : $>$ (ㄴ) : $a=b$

④ (ㄱ) : $\leq$ (ㄴ) : $ab=0$

⑤ (ㄱ) : $\leq$ (ㄴ) : $a=b$

[문제]

9. $a>0$, $b>0$일 때, 식 $\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}$의 최솟값은?

① 6 ② 7

③ 8 ④ 9

⑤ 10

[예제]

10. 다음은 x, y가 실수일 때, 부등식 $|x|+|y| \geq |x-y|$이 성립함을 증명하는 과정이다.

$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ $\boxed{(ㄱ)}$ 0, $\lvert x-y\rvert$ $\boxed{(ㄱ)}$ 0이므로
주어진 부등식의 양변을 제곱하여
$(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$
이 성립함을 증명하면 된다.
$(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2=2(\boxed{(ㄴ)}) \geq 0$
따라서 $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$이다.
이때 등호는 $xy \leq 0$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $>$ (ㄴ) : $|xy|+xy$

② (ㄱ) : $>$ (ㄴ) : $|xy|-xy$

③ (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : $|xy|+xy$

④ (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : $|xy|-xy$

⑤ (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : $xy-|xy|$

[문제]

11. a, b가 실수일 때, 다음 중 항상 성립하는 부등식만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert \geq \lvert a+b\rvert$
ㄴ. $\lvert a+b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$
ㄷ. $\lvert 2a-2b\rvert \geq 2\lvert a\rvert-2\lvert b\rvert$

① ㄱ ② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

평가문제

[중단원 마무리]

12. $a \geq 0$, $b \geq 0$일 때, 다음 중 절대부등식만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
ㄴ. $\sqrt{a}-\sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$
ㄷ. $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 2\sqrt{a+b}$

① ㄱ ② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

[중단원 마무리]

13. $a^2+b^2=9$를 만족하는 두 실수 a, b에 대하여 $3a+4b$의 최댓값은?

① 5 ② 10

③ 15 ④ 20

⑤ 25

[중단원 마무리]

14. $x>0$, $y>0$일 때, $(x+9y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 최솟값은?

① 23 ② 24

③ 25 ④ 26

⑤ 27

[대단원 마무리]

15. 다음은 명제 'a, b, c가 자연수일 때, $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는 'a, b, c가 자연수일 때, a, b, c가 모두 $\boxed{(ㄱ)}$이면 $a^2+b^2 \boxed{(ㄴ)} c^2$이다.'이다.
a, b, c가 모두 $\boxed{(ㄱ)}$이면 a^2, b^2, c^2은 모두 $\boxed{(ㄱ)}$이고, a^2+b^2은 $\boxed{}$이다. 이때 c^2은 $\boxed{(ㄱ)}$이므로 $a^2+b^2 \boxed{(ㄴ)} c^2$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 홀수 (ㄴ) : $\neq$

② (ㄱ) : 홀수 (ㄴ) : $=$

③ (ㄱ) : 자연수 (ㄴ) : $\neq$

④ (ㄱ) : 짝수 (ㄴ) : $=$

⑤ (ㄱ) : 짝수 (ㄴ) : $\neq$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[대단원 마무리]

16. $x>3$에 대하여 $x+1+\dfrac{25}{x-3}$는 $x=a$일 때, 최솟값은 b를 갖는다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 24　② 23
③ 22　④ 21
⑤ 20

유사문제

17. 다음은 명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다'를 증명하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(2a)+g(1)$의 값은?

> 주어진 명제의 대우 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'가 참임을 보이면 된다.
> n이 홀수이면 $n=$ (가) (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $n^2=($ (가) $)^2=2($ (나) $)+1$
> 이 때, $2($ (나) $)$는 (다) 또는 짝수이므로 n^2은 홀수이다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로
> 주어진 명제도 참이다.

① -1　② 0
③ 1　④ 2
⑤ 3

18. 다음은 $\sqrt{3}$이 무리수임을 증명하는 과정이다.

> <증명>
> $\sqrt{3}$이 무리수가 아니라고 가정하자.
> $\sqrt{3}$가 유리수이므로 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여
> $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$로 나타낼 수 있다.
> 양변을 제곱하면 $3=\dfrac{p^2}{q^2}$에서 $p^2=3q^2$ ⋯⋯ (ㄱ)
> 즉, p^2은 (가)이므로 p도 (가)이다.
> $p=3k$(k: 자연수)라 하면 (ㄱ)에서 (나)$=3q^2$
> 즉, q^2은 (가)이므로 q도 (가)이다.
> 이것은 p, q가 (다)임에 모순이므로 $\sqrt{3}$이 유리수라는 가정이 잘못되었음을 알 수 있다.
> 따라서 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 내용으로 알맞게 짝지어진 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	홀수	$9k^2$	홀수
②	홀수	$3k^2$	서로소
③	3의 배수	$9k^2$	서로소
④	3의 배수	$3k^2$	홀수
⑤	3의 배수	$9k^2$	홀수

19. 다음은 부등식 $|a|-|b|\le|a-b|$를 증명한 것이다. 다음의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

> (ⅰ) $|a|\ge|b|$일 때
> $|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=$ (가)
> $|ab|$ (나) ab이므로 $|a-b|^2-(|a|-|b|)^2\ge 0$
> 따라서 $|a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$이다.
> 이때 $|a|-|b|\ge 0$, $|a-b|\ge 0$이므로
> $|a|-|b|\le|a-b|$
> (ⅱ) $|a|<|b|$일 때,
> $|a|-|b|$ (다) $|a-b|$
> (ⅰ), (ⅱ)에서 $|a|-|b|\le|a-b|$이다.

	(가)	(나)	(다)
①	$2(\lvert ab\rvert-ab)$	$\ge$	$<$
②	$2(\lvert ab\rvert-ab)$	$\ge$	$>$
③	$2(\lvert ab\rvert-ab)$	$\le$	$<$
④	$2(\lvert ab\rvert+ab)$	$\ge$	$>$
⑤	$2(\lvert ab\rvert+ab)$	$\le$	$>$

20. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+b\right)$의 최솟값은?

① 12　② 13
③ 14　④ 15
⑤ 16

21. **다음은 a, b, x, y 가 실수일 때, 부등식**

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

이 성립함을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

> $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 = a^2y^2 - \boxed{\text{(가)}} + b^2x^2$
>
> $= (\boxed{\text{(나)}})^2$
>
> 그런데 $(\boxed{\text{(나)}})^2 \geq 0$ 이므로
>
> $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
>
> 이 성립한다.
>
> 여기서 등호는 $\boxed{\text{(다)}}$ 일 때 성립한다.

	(가)	(나)	(다)
①	$abxy$	$ay-bx$	$ax=by$
②	$abxy$	$ay+bx$	$ay=bx$
③	$2abxy$	$ay-bx$	$ax=by$
④	$2abxy$	$ay+bx$	$ay=bx$
⑤	$2abxy$	$ay-bx$	$ay=bx$

22. **실수 x, y에 대하여 $3x+5y=10$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 m이라 할 때, $17m$의 값은?**

① 50 ② 63
③ 75 ④ 89
⑤ 100

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] 홀수와 짝수를 각각 a, b라고 하면 $a=2m-1$, $b=2n$ (m, n은 자연수)라 할 수 있다. $a+b=2(m+n)-1$ ($m+n$은 자연수)이므로 $a+b$는 홀수이다. 따라서 '홀수와 짝수의 합은 홀수이다.'가 참임을 알 수 있다.

2) [정답] ③

[해설] $x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수) 이라고 하면
$xy=2(2mn-m-n)+1$이고 이는 홀수이다.

3) [정답] ④

[해설] 주어진 명제의 대우는 '자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.; 이다.
n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)
$n^2=2(2k^2)$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로
주어진 명제도 참이다.

4) [정답] ①

[해설] $\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면
$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)
으로 나타낼 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하면 $2m^2=n^2$
이때 n^2이 2의 배수이므로 n도 2의 배수이다.
n이 2의 배수이므로 $n=2k$ (k는 자연수)로 놓고
위 식에 대입하면
$2m^2=(2k)^2$, 즉 $m^2=2k^2$
그런데 m^2이 2의 배수이므로 m도 2의 배수이다. 즉 m, n이 모두 2의 배수가 되어 m, n은 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

5) [정답] ②

[해설] $1+\sqrt{3}$이 유리수라고 가정하면 $1+\sqrt{3}=k$ (k는 유리수)로 놓을 수 있다. 즉 $\sqrt{3}=k-1$이고 유리수끼리의 뺄셈은 유리수이므로 $k-1$은 유리수이다. 그런데 $\sqrt{3}$는 무리수이므로 모순이다. 따라서 $1+\sqrt{3}$는 무리수이다.

6) [정답] ④

[해설] 주어진 부등식의 좌변을 변형하면
$5a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2+a^2$
실수의 제곱은 0 이상이므로
$5a^2+4ab+b^2\ge 0$
여기서 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.

7) [정답] ②

[해설] $a^2+10ab+36b^2=(a+5b)^2+11b^2$
a, b가 실수이므로, 실수의 제곱은 0 이상이다.
따라서 $a^2+10ab+36b^2\ge 0$이 성립한다.
따라서 $p=5$, $q=11$이므로 $-2p+q=1$이다.

8) [정답] ①

[해설] $a>0$, $b>0$이므로
주어진 부등식의 좌변에서 우변을 빼서 정리하면
$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$
$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\ge 0$
따라서 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$이다.
여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

9) [정답] ③

[해설] 두 양수 $\dfrac{2a}{b}$, $\dfrac{8b}{a}$에 대하여
산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{2a}{b}\times\dfrac{8b}{a}}=8$
에 의해 최솟값은 8이다.

10) [정답] ③

[해설] $|x|+|y|\ge 0$, $|x-y|\ge 0$이므로
주어진 부등식의 양변을 제곱하여
$(|x|+|y|)^2\ge|x-y|^2$
이 성립함을 증명하면 된다.
$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2=2(|xy|+xy)\ge 0$
따라서 $|x|+|y|\ge|x-y|$이다.

11) [정답] ④

[해설] ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2\ge 0$이므로
항상 성립한다. (참)
ㄴ. $a=1$, $b=-1$이면 성립하지 않는다. (거짓)
ㄷ. $|2a-2b|^2-(2|a|-2|b|)^2\ge 0$이므로
항상 성립한다. (참)
따라서 항상 성립하는 부등식은 ㄱ, ㄷ이다.

12) [정답] ②

[해설] ㄱ. $a=b=0$이면 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$이다. (거짓)
ㄴ. $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 항상 성립한다.
$\sqrt{a}\ge\sqrt{b}$일 때에는
$(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$이므로
$\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a+b}$은 항상 성립한다. (참)
ㄷ. $a=0$, $b=1$이면
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$, $2\sqrt{a+b}=2$이다. (거짓)
따라서 항상 성립하는 부등식은 ㄴ이다.

13) [정답] ③

[해설] 네 실수 a, b, x, y에 대하여 부등식

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$이 항상 성립한다.
$a^2+b^2=9$이므로 $x=3$, $y=4$를 대입하면
$9\times(3^2+4^2) \geq (3a+4b)^2$
$225 \geq (3a+4b)^2$
$-15 \leq 3a+4b \leq 15$
따라서 $3a+4b$의 최댓값은 15이다.

14) [정답] ③
[해설] $(x+9y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)=4+9+\frac{36y}{x}+\frac{x}{y}$
여기에서 산술평균과 기하평균에 의해
$13+\frac{36y}{x}+\frac{x}{y} \geq 13+2\sqrt{\frac{36y}{x}\times\frac{x}{y}}=25$
따라서 최솟값은 25이다.

15) [정답] ①
[해설] 주어진 명제의 대우는 'a, b, c가 자연수일 때, a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.'이다.
a, b, c가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2은 모두 홀수이고, a^2+b^2은 짝수이다. 이때 c^2은 홀수이므로 $a^2+b^2 \neq c^2$이다. 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

16) [정답] ③
[해설] $x+1+\frac{25}{x-3}=x-3+\frac{25}{x-3}+4$
산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$(x-3)+\frac{25}{x-3}+4 \geq 2\sqrt{(x-3)\times\frac{25}{x-3}}+4=14$
즉, $b=14$
등호가 성립할 조건은 $x-3=\frac{25}{x-3}=5$이므로
$x=a=8$
따라서 $a+b=22$

17) [정답] ①
[해설] (가) $2k-1$ (나) $2k^2-2k$ (다) 0 이므로
$f(k)=2k-1$, $g(x)=2k^2-2k$, $a=0$이다.
따라서 $f(2a)=f(0)=-1$, $g(1)=0$이므로
$-1+0=-1$이다.

18) [정답] ③
[해설] (가) 3의 배수
$p=3k$를 ㈀식에 대입하면 $(3k)^2=3q^2$이므로
(나) $9k^2$
(다) 서로소

19) [정답] ①
[해설] $|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=-2ab+2|ab|$이므로
(가): $2(|ab|-ab)$이다.
$|ab| \geq ab$이므로 (나): $\geq$
$|a|<|b|$일 때 $|a|-|b|<0$이므로
$|a|-|b|<|a-b|$가 되어 (다): $<$

20) [정답] ⑤
[해설] $\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+b\right)=ab+\frac{16}{ab}+8$이고
산술기하평균에 의해 $ab+\frac{16}{ab}+8 \geq 2\sqrt{16}+8=16$
이므로 최솟값은 16이다.

21) [정답] ⑤
[해설] (가) 좌변을 전개하여 구할 수 있다. $\therefore 2abxy$
(나) $(ay)^2-2(ay)(bx)+(bx)^2=(ay-bx)^2$ $\therefore ay-bx$
(다) $(ay-bx)^2=0$일 때 등호가 성립한다. $\therefore ay=bx$

22) [정답] ①
[해설] 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(3^2+5^2)(x^2+y^2) \geq (3x+5y)^2$
$x^2+y^2 \geq \frac{50}{17}$이므로 $m=\frac{50}{17}$이다.
$\therefore 17m=50$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240