



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-13

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 정적분으로 정의된 함수

1. 정적분으로 정의된 함수

(1) $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ (단, a 는 상수)

(2) $\frac{d}{dx} \int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$

2. 정적분으로 정의된 함수의 포함한 등식의 해결

(1) $f(x) = g(x) + \int_a^b f(t)dt$ 의 꼴

$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = k$ (k 는 상수)로 놓고 계산한다.

(2) $\int_a^x f(t)dt = g(x)$ (a 는 상수)의 꼴인 경우

 \Rightarrow 양변을 x 에 대해 미분한다. 이때 $g(x)$ 가 미정계수를 포함하고 있으면 양변에 $x=a$ 를 대입한 후

$\int_a^a f(t)dt = 0$ 임을 이용한다.

■ 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt = 2\sin x - 2$

2. $\int_0^x f(t)dt = e^x - 1$

3. $\int_1^x f(t)dt = 3^x + \ln x - 3$ (단, $x > 0$)

4. $\int_0^x f(t)dt = e^{2x} - x - 1$

5. $\int_0^x f(t)dt = e^{2x} + e^x - 2$

6. $\int_2^x f(t)dt = \ln x + 4x - \ln 2 - 8$ ($x > 0$)

■ 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

7. $f(x) = \sin x + \int_0^\pi f(t)dt$

8. $f(x) = e^x + 2x + \int_0^2 f(t)dt$

9. $f(x) = \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$

10. $f(x) = \frac{x}{2x^2+1} - \int_0^2 f(t)dt$

■ 다음 물음에 답하여라.

11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)dt = \sin 2x + k \sin x$ (단, k 는 상수)일 때
함수 $f(x)$ 를 구하여라.

12. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가
 $xf(x) = x \ln x + \int_1^x f(t)dt$ 를 만족할 때, 함수
 $f(x)$ 를 구하여라. (단, $x > 0$)

13. 함수 $f(x) = 2\cos x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) \sin x dx$ 일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
의 값을 구하여라.

14. 함수 $f(x) = \cos x + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx$ 일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
의 값을 구하여라.

15. 함수 $f(x) = x \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ 일 때, $f(\pi)$ 의 값
을 구하여라.

16. 함수 $f(x) = \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t dt$ 일 때, $f(\pi)$ 의
값을 구하여라.

17. 함수 $f(x) = 9x^2 + 2^{2x} - 2 \int_0^1 f(t)dt$ 일 때, $f(0)$ 의
값을 구하여라.

18. 함수 $f(x) = x - \int_0^1 f(x) e^x dx$ 일 때, $f\left(\frac{7}{e}\right)$ 의 값을
구하여라.

19. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = e^x + \int_0^1 e^{-t} f(t)dt$ 를 만족시킬
때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

20. 함수 $e^x + kx - 5 = \int_1^x (x-t)f(t)dt$ 를 만족시킬
때, $f(1) + k$ 의 값을 구하여라.

21. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_e^x f(t)dt = x \ln x + x - k$
가 성립할 때, $f(k)$ 의 값을 구하여라. (단, k 는 상수)

22. $x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가
 $f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x^2} \int_{\frac{1}{e}}^1 f(t)dt$ 를 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{e}\right)$
의 값을 구하여라.

23. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x + \int_1^e \frac{2f(t)}{t} dt$ 를 만족할 때,
 $f(e)$ 의 값을 구하여라.

24. 임의의 실수 x 에 대하여 연속함수 $f(x)$ 가

$f(x) = 2\ln x + \int_1^e f(t)dt$ ($x > 0$)를 만족할 때, $f(e^3)$ 의 값을 구하여라.

25. $x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$\int_0^{3x} f(t)dt = 3x^2 + \cos 3\pi x$ 가 성립할 때, $\int_1^2 f(x)dx$ 의 값을 구하여라.

26. 연속함수 $f(x)$ 가 $f(x) = e^x - \int_0^2 tf(t)dt$ 를 만족시

킬 때, $\int_0^2 3xf(x)dx$ 의 값을 구하여라.

27. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 등식

$f(x) = \sin x - \int_0^x f(t)e^{x-t}dt$ 를 만족할 때, $f(\pi)$ 의 값을 구하여라.

28. 연속인 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \ln x - \int_1^e \frac{f(t)}{x}dt$ 를 만족할 때, $f(e)$ 의 값을 구하여라. (단, $x > 0$)

29. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^{2x} - 2x - 1$ 을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

30. $\int_0^x f(t)dt = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 2x \int_0^1 tf(t)dt$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 값을 구하여라.

31. $f(x) = \frac{3^{2x}-1}{3^x+1} - \int_0^1 f(t)dt$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)$ 의 값을 구하여라.

32. 다항함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x 에 대하여

$f(x) = x^2 + 2x + 2 \int_0^1 f(t)dt$ 를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

33. 연속함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \cos x + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt$ 를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx$ 의 값을 구하여라.

34. $0 < x < \pi$ 일 때, 함수 $f(x) = \int_0^x (1 + \sin t) \cos t dt$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가진다. a 의 값을 구하여라.

35. 함수 $f(x) = \int_0^{x-1} (t-x)e^t dt$ 의 최댓값을 구하여라.

36. $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x) = \int_x^{x+1} \left(t + 1 + \frac{2}{t}\right) dt$ 의 최솟값을 구하여라.

37. 함수 $f(x) = \int_0^x (2\sin t - 2\cos 2t) dt$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)의 극값을 구하여라.

38. $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x) = \int_1^{2x} (1 - \ln t) dt$ 는 $x = a$ 에서 극댓값 b 를 가질 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

39. 함수 $f(x) = \int_x^{x+1} \left(t + \frac{2}{t}\right) dt$ 의 최솟값을 구하여라. (단, $x > 0$)

02 정적분으로 정의된 함수의 극한

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = f(a)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_a^{x+a} f(t) dt = f(a)$$

▣ 다음 극한값을 구하여라.

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (e^t - 1) dt$$

$$41. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (e^t + 3) dt$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (t + \cos t) dt$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{2x} (1 - \tan t) dt$$

$$44. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi - x} \int_{\pi}^x (1 + \cos^4 t) dt$$

$$45. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_{\pi}^x (\sin t + t) dt$$

46. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_{\pi}^x t^2 \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$

47. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3 - 1} \int_1^x (2^t + \ln t) dt$

48. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$

49. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x (t^3 + 2t^2 + t) dt$

50. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1+h}^{1+3h} x \cos \pi x dx$

51. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+2h} (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) dx$

■ 다음 물음에 답하여라.

52. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} \int_2^x f(t) dt = 10$ 이다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

53. 함수 $f(x) = \int_1^x (\sin \pi t + 2t + 1) dt$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$ 의 값을 구하여라.

54. 함수 $f(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} \int_3^x f(t) dt$ 의 값을 구하여라.

55. 함수 $f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \int_1^x f(t) dt$ 의 값을 구하여라.

56. 함수 $f(x) = \int_0^x \frac{3t}{t^2 + 1} dt$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} \int_2^x f(t) dt$ 의 값을 구하여라.

57. 모든 실수에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = e^{2x} - x - 1 \text{이 성립할 때, } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-1}{h}$$

의 값을 구하여라.

58. 함수 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)} dt$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt \text{의 값을 구하여라.}$$

59. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x t \sin(x-t)dt$ 인

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(-h)}{h}$ 의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) $f(x) = 2\cos x$

⇒ 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 2\cos x$

2) $f(x) = e^x$

⇒ 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = e^x$

3) $f(x) = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x}$

⇒ $\int_1^x f(t) dt = 3^x + \ln x - 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f(x) = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x}$

4) $f(x) = 2e^{2x} - 1$

⇒ 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 2e^{2x} - 1$

5) $f(x) = 2e^{2x} + e^x$

⇒ $\int_0^x f(t) dt = e^{2x} + e^x - 2 \dots \textcircled{1}$

①에서 적분구간에 변수 x 가 있으므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = (e^{2x} + e^x - 2)' = 2e^{2x} + e^x$$

6) $f(x) = \frac{1}{x} + 4$

⇒ 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = \frac{1}{x} + 4$

7) $f(x) = \sin x + \frac{2}{1-\pi}$

⇒ $\int_0^\pi f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \sin x + k \text{ 이므로}$$

$$k = \int_0^\pi (\sin x + k) dt = [-\cos t + kt]_0^\pi = 2 + k\pi$$

$$\therefore k = \frac{2}{1-\pi}$$

$$\therefore f(x) = \sin x + \frac{2}{1-\pi}$$

8) $f(x) = e^x + 2x - e^2 - 3$

⇒ $\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = e^x + 2x + k$$

$$k = \int_0^2 (e^t + 2t + k) dt = [e^t + t^2 + kt]_0^2 = e^2 + 3 + 2k$$

따라서 $k = -e^2 - 3$ 이므로 $f(x) = e^x + 2x - e^2 - 3$

9) $f(x) = \sin x - \frac{1}{4}$

⇒ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt = k \dots \textcircled{1}$ (k 는 상수)라 놓자.

$f(x) = \sin x - k$ 이고 이를 ①에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - k) \cos t dt = k$$

이 때 $\sin t - k = \theta$ 로 놓으면 $\frac{d\theta}{dt} = \cos t$

$t=0$ 일 때, $\theta = -k$, $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\theta = 1-k$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - k) \cos t dt &= \int_{-k}^{1-k} \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta^2 \right]_{-k}^{1-k} \\ &= \frac{1}{2} (1-k)^2 - \frac{1}{2} (-k)^2 = \frac{1}{2} - k \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} - k = k \text{ 이므로 } 2k = \frac{1}{2} \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = \sin x - \frac{1}{4}$$

10) $f(x) = \frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{6} \ln 3$

⇒ $\int_0^2 f(t) dt = k$ 라 하면

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+1} - k \text{ 가 되니}$$

$$\int_0^2 \left(\frac{t}{2t^2+1} - k \right) dt = k$$

$$\int_0^2 \frac{t}{2t^2+1} dt - \int_0^2 k dt = k$$

$2t^2+1=x$ 라 하면 $4t dt = dx$ 이므로

$$\int_1^9 \frac{1}{4x} dx - \int_0^2 k dx = k, \quad \left[\frac{1}{4} \ln x \right]_1^9 - [kx]_0^2 = k$$

$$\frac{1}{2} \ln 3 - 2k = k, \quad \frac{1}{2} \ln 3 = 3k \quad \therefore k = \frac{1}{6} \ln 3$$

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{6} \ln 3$$

11) $f(x) = 2\cos 2x - \sqrt{2} \cos x$

⇒ $\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t) dt = \sin 2x + k \sin x \dots \textcircled{1}$

①에 $x = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$0 = \sin \frac{\pi}{2} + k \sin \frac{\pi}{4}, \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} k = 0 \quad \therefore k = -\sqrt{2}$$

k 의 값을 ①에 대입하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t) dt = \sin 2x - \sqrt{2} \sin x$$

이 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\therefore f(x) = 2\cos 2x - \sqrt{2} \cos x$$

12) $f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \ln x$

$$\Rightarrow xf(x) = x \ln x + \int_1^x f(t) dt \dots \textcircled{1}$$

①에서 적분구간에 변수 x 가 있으므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = \ln x + 1 + f(x)$$

$$\therefore xf'(x) = \ln x + 1$$

$$x > 0 \text{이므로 } f'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx + \ln x + C$$

이때, $\int \frac{\ln x}{x} dx$ 에서 $\ln x = t$ 로 놓으면

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \therefore \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\text{즉, } \int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \ln x + C$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \ln x$$

$$13) -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) \sin x dx \text{라 하면 } f(x) = 2 \cos x - k$$

$$k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos x - k) \sin x dx$$

$$k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - k \sin x) dx$$

$$k = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + k \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} - k \therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2 \cos x - \frac{1}{2} \text{이므로 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$14) -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = a \text{라 하면}$$

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 3a) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + 3a \sin x \right) dx$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } f(x) = \cos x - \frac{3}{4}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \text{이 된다.}$$

$$15) -\pi - 1$$

\Rightarrow

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = c \text{라 하면}$$

$$f(x) = x \cos x + c$$

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t \cos t + c) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} c dt$$

$$= [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \frac{\pi}{2} c$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} c$$

$$\therefore c = -1$$

따라서 $f(x) = x \cos x - 1$ 이므로 $f(\pi) = -\pi - 1$ 이다.

$$16) \frac{-2 + \sqrt{2}}{4}$$

\Rightarrow

$$f(x) = \sin x - k \text{라 하면}$$

$$f(x) \cos x = \sin x \cos x - k \cos x \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cos x - k \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x dx - k [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

$$\text{즉 } k = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} k \text{이므로}$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2} k = \frac{1}{4} \therefore k = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore f(\pi) = -\frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$17) -\frac{1}{\ln 2} - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = c \text{라 하면}$$

$$f(x) = 9x^2 + 2^{2x} - 2c \text{이고,}$$

$$\int_0^1 (9x^2 + 2^{2x} - 2c) dx = \left[3x^3 + 4^x \frac{1}{\ln 4} - 2cx \right]_0^1$$

$$= 3 + \frac{4}{\ln 4} - 2c - \frac{1}{\ln 4} = c \text{이므로}$$

$$3c = 3 + \frac{3}{\ln 4} \therefore c = \frac{1}{\ln 4} + 1 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 9x^2 + 4^x - 2 \left(1 + \frac{1}{\ln 4} \right) \text{이고}$$

$$f(0) = 1 - 2 - \frac{2}{\ln 4} = -1 - \frac{1}{\ln 2} \text{이다.}$$

$$18) \frac{6}{e}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) e^x dx = t(t:\text{상수}) \text{라 하면 } f(x) = x - t$$

$$t = \int_0^1 (x - t) e^x dx = [(x - t - 1) e^x]_0^1 = -te + t + 1$$

$$\therefore t = \frac{1}{e}$$

$$\therefore f\left(\frac{7}{e}\right) = \frac{7}{e} - \frac{1}{e} = \frac{6}{e}$$

19) $2e$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = k \text{라 하면 } f(x) = e^x + k$$

$$k = \int_0^1 e^{-t} (e^t + k) dt = \int_0^1 (1 + ke^{-t}) dt$$

$$= [t - ke^{-t}]_0^1 = 1 - ke^{-1} + k$$

$$k = 1 - ke^{-1} + k, \quad ke^{-1} = 1 \quad \therefore k = e$$

$$\therefore f(1) = e + e = 2e$$

20) 5

$$\Rightarrow x=1 \text{을 대입하면 } e+k-5=0 \text{이므로 } k=5-e$$

$$e^x + (5-e)x - 5 = x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt$$

양변을 미분하면

$$e^x + (5-e) = \int_1^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)$$

$$f(x) = e^x \quad \therefore f(1) = e$$

$$\therefore k + f(1) = 5$$

21) $\ln 2 + 3$

\Rightarrow

$$\int_e^x f(t) dt = x \ln x + x - k \text{의 양변을 } x \text{로 미분하면}$$

$$f(x) = \ln x + 1 + 1 = \ln x + 2$$

$$\int_e^x (\ln t + 2) dt = [t \ln t + 2t]_e^x - \int_e^x 1 dt = x \ln x + x - 2e$$

$$\therefore k = 2e$$

$$\therefore f(k) = f(2e) = \ln 2e + 2 = \ln 2 + 3$$

22) -1

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{e}}^1 f(t) dt = c \text{ (} c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f(x) = 1 + \ln x - \frac{c}{x^2}$$

$$c = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(1 + \ln t - \frac{c}{t^2}\right) dt = \left[x + x \ln x - x + \frac{c}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^1$$

$$= c - \left(-\frac{1}{e} + ec\right)$$

$$c = c + \frac{1}{e} - ec, \quad ec = \frac{1}{e} \quad \therefore c = \frac{1}{e^2}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - 1 - \frac{1}{e^2 \cdot \frac{1}{e^2}} = -1$$

23) $2-e$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{2f(t)}{t} dt = k \text{라 하면}$$

$$k = \int_1^e \frac{2t+2k}{t} dt = \int_1^e 2 + \frac{2k}{t} dt$$

$$k = [2t + 2k \ln t]_1^e, \quad k = 2e - 2 + 2k$$

$$\therefore k = 2 - 2e$$

$$\therefore f(x) = x + 2 - 2e, \quad f(e) = 2 - e$$

$$24) \frac{14-6e}{2-e}$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(t) dt = a \text{라고 하자.}$$

$$f(x) = 2 \ln x + a$$

$$\int_1^e (2 \ln x + a) dx = a$$

$$[2x \ln x - 2x + ax]_1^e = a$$

$$2e - 2e + ae + 2 - a = a$$

$$(e-2)a = -2$$

$$\therefore a = \frac{2}{2-e}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(e^3) &= 6 + a = 6 - \frac{2}{e-2} \\ &= \frac{6e-12-2}{e-2} = \frac{6e-14}{e-2} = \frac{14-6e}{2-e} \end{aligned}$$

25) 3

$$\Rightarrow \int_0^{3x} f(t) dt = 3x^2 + \cos 3\pi x \text{의 양변을 미분하면}$$

$$3f(3x) = 6x - 3\pi \sin 3\pi x$$

$$\text{이때 } 3x = t \text{라 하면 } f(t) = \frac{2}{3}t - \pi \sin \pi t$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \pi \sin \pi x\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^2 + \cos \pi x\right]_1^2 = 3 \end{aligned}$$

26) $1+e^2$

$$\Rightarrow \int_0^2 t f(t) dt = c \text{라 하면 } f(x) = e^x - c \text{이고,}$$

$$c = \int_0^2 t f(t) dt = \int_0^2 (xe^x - cx) dx$$

$$= [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx - \left[\frac{1}{2}cx^2\right]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 - 2c$$

$$3c = e^2 + 1$$

$$\therefore \int_0^2 3xf(x) dx = 3c = e^2 + 1$$

27) -2

$$\Rightarrow k(x) = \int_0^x f(t) e^{-t} dt \text{라 하면}$$

$$k'(x) = f(x) e^{-x} \text{이고,}$$

$$f(x) = \sin x - e^x k(x) \text{이다.}$$

$$k(x) = \int_0^x (\sin t - k(t) e^t) e^{-t} dt = \int_0^x \{e^{-t} \sin t - k(t)\} dt$$

$$k'(x) = e^{-x} \sin x - k(x)$$

$$f(x) e^{-x} = e^{-x} \sin x - k(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore k(x) &= e^{-x}(\sin x - f(x)) \\ \text{이 식을 } x \text{에 관하여 미분하면} \\ k'(x) &= -e^{-x}(\sin x - f(x)) + e^{-x}(\cos x - f'(x)) \\ f(x)e^{-x} &= -e^{-x}(\sin x - f(x)) + e^{-x}(\cos x - f'(x)) \\ \text{이 식을 정리하면} \\ f'(x) &= \cos x - \sin x \\ f(x) &= \sin x + \cos x + C \text{이고, } f(0) = 0 \text{이므로 } C = -1 \\ \therefore f(x) &= \sin x + \cos x - 1 \\ \therefore f(\pi) &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28) \quad & 1 - \frac{1}{2e} \\ \Rightarrow \quad & \int_1^e f(t) dt = C \text{라 하면 } f(x) = \ln x - \frac{C}{x} \\ C &= \int_1^e \left(\ln x - \frac{C}{x} \right) dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx - C[\ln x]_1^e \\ &= e - (e - 1) - C \\ C &= 1 - C, \quad 2C = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } f(x) &= \ln x - \frac{1}{2x} \text{이므로 } f(e) = 1 - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29) \quad & 4e^4 \\ \Rightarrow \quad & x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = e^{2x} - 2x - 1 \\ \text{주어진 식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) &= 2e^{2x} - 2 \\ \therefore \int_0^x f(t) dt &= 2e^{2x} - 2 \\ \text{따라서 } f(x) &= 4e^{2x} \text{이므로 } f(2) = 4e^4 \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30) \quad & 7 \\ \Rightarrow \quad & \int_0^x f(t) dt = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 2x \int_0^1 t f(t) dt \text{에서 양변} \\ & \text{을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= 4x^2 + 6x - 2 \int_0^1 t f(t) dt \\ \int_0^1 t f(t) dt &= a \text{라 하면} \\ f(x) &= 4x^2 + 6x - 2a \\ a &= \int_0^1 t f(t) dt \\ &= \int_0^1 t(4t^2 + 6t - 2a) dt = \int_0^1 (4t^3 + 6t^2 - 2at) dt \\ &= [t^4 + 2t^3 - at^2]_0^1 = 1 + 2 - a = -a + 3 \\ \text{즉 } a &= -a + 3 \text{이므로 } a = \frac{3}{2} \\ \text{따라서 } f(x) &= 4x^2 + 6x - 3 \text{이므로} \\ f(1) &= 4 + 6 - 3 = 7 \end{aligned}$$

$$31) \quad \frac{-2 + \ln 3}{2 \ln 3}$$

$$\begin{aligned} 32) \quad & \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \quad & \text{정적분의 결과 값은 상수이므로} \\ & \int_0^1 f(t) dt = a \text{ (} a \text{는 상수)라고 하자.} \\ f(x) &= x^2 + 2x + 2a \text{이고} \\ \int_0^1 f(t) dt &= a \text{에서 } \int_0^1 (t^2 + 2t + 2a) dt = a \\ \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 2at \right]_0^1 &= a \\ \frac{1}{3} + 1 + 2a &= a \\ \frac{4}{3} &= -a, \quad a = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f(x) &= x^2 + 2x - \frac{8}{3} \text{이고} \\ f(1) &= 1 + 2 - \frac{8}{3} = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 33) \quad & -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt = a \text{라고 하자.} \\ f(x) &= \cos x + 3a \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 3a) \sin x dx &= a \\ \cos x + 3a &= t \text{라 하면 } -\sin x dx = dt \\ x = 0 \text{일 때 } t &= 1 + 3a \text{이고, } x = \frac{\pi}{2} \text{일 때, } t = 3a \text{이므로} \\ a &= \int_{1+3a}^{3a} -t dt \\ a &= \left[-\frac{1}{2} t^2 \right]_{1+3a}^{3a} \\ a &= -\frac{1}{2} \{9a^2 - (1+3a)^2\} \\ -2a &= -(1+6a) \\ \therefore a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34) \quad & \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \quad & f'(x) = (1 + \sin x) \cos x \\ f'(x) &= 0 \text{에서 } \sin x = -1 \text{ 또는 } \cos x = 0 \\ 0 < x < \pi \text{이므로 } x &= \frac{\pi}{2} \\ \text{함수 } f(x) \text{의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같} \\ & \text{다.} \end{aligned}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값을 가지므로 $a = \frac{\pi}{2}$

35) $1 - \ln 2$

⇒ 함수를 적분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x-1} (t-x)e^t dt \\ &= \int_0^{x-1} te^t dt - \int_0^{x-1} xe^t dt \\ &= e^{x-1}(x-1) - \int_0^{x-1} e^t dt - \int_0^{x-1} xe^t dt \\ &= e^{x-1}(x-1) - e^{x-1} + 1 - xe^{x-1} + x = x - 2e^{x-1} + 1 \end{aligned}$$

$f'(x) = 1 - 2e^{x-1}$ 이고, $f'(x) = 0$ 인 $x = 1 - \ln 2$ 이고,
이 때, $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
 $x = 1 - \ln 2$ 에서 최댓값을 가진다.

$$\therefore f(1 - \ln 2) = 1 - \ln 2 - 1 + 1 = 1 - \ln 2$$

36) $\frac{5}{2} + 2\ln 2$

⇒ $g(t) = t + 1 + \frac{2}{t}$, $\int g(t) dt = G(t) + C$ (C 는 적분상수)라 하면,

$$f(x) = \int_x^{x+1} g(t) dt = G(x+1) - G(x)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x+1) - G'(x) = g(x+1) - g(x) \\ &= \left(x+1+1+\frac{2}{x+1}\right) - \left(x+1+\frac{2}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x^2+x-2}{x(x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ ($\because x > 0$)

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

즉, $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^2 \left(t + 1 + \frac{2}{t}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + t + 2\ln t\right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} + 2\ln 2 \end{aligned}$$

37) $2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\sin x - 2\cos 2x = 0$$

$$2\sin x - 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$2\sin x - 2 + 4\sin^2 x = 0$$

$\sin x = t$ 로 치환하자.

$$4t^2 + 2t - 2 = 0$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$(2t-1)(t+1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = -1$$

따라서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 일 때, 즉 $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서

극값을 가진다.

$$f(x) = [-2\cos t - \sin 2t]_0^x = -2\cos x - \sin 2x + 2$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\therefore f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

38) $\frac{3}{2}e - 2$

$$\Rightarrow f(x) = \int_1^{2x} (1 - \ln t) dt$$

$$= [t - t \ln t + t]_1^{2x} = 4x - 2x \ln 2x - 2$$

$$f'(x) = 4 - 2\ln 2x - 2 = 2(1 - \ln 2x)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } a = \frac{e}{2} \text{ 이고}$$

$$\text{이때 극댓값 } b = f\left(\frac{e}{2}\right) = e - 2$$

$$\therefore a + b = \frac{e}{2} + e - 2 = \frac{3}{2}e - 2$$

39) $\frac{3}{2} + 2\ln 2$

40) 0

$$\Rightarrow F'(t) = e^t - 1 \text{ 이라 하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (e^t - 1) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x F'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= F'(0) = e^0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

41) 4

⇒ $f(t) = e^t + 3$ 라 하고, 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = f(0)$$

$$\therefore f(0) = 1 + 3 = 4$$

42) 1

$$\Rightarrow F'(t) = t + \cos t \text{ 라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (t + \cos t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x F'(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = 1$$

43) 3

$\Rightarrow f(t) = 1 - \tan t$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{2x} (1 - \tan t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{2x} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(0) - \{F(-x) - F(0)\}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(0)}{2x} \cdot 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-x) - F(0)}{-x} \\ &= 2F'(0) + F'(0) = 3F'(0) = 3f(0) = 3 \end{aligned}$$

44) -2

$\Rightarrow f(t) = 1 + \cos^4 t$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_{\pi}^x (1 + \cos^4 t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{x - \pi} \int_{\pi}^x f(t) dt \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = -F'(\pi) = -f(\pi) = -2 \end{aligned}$$

45) π

$\Rightarrow F'(t) = \sin t + t$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_{\pi}^x (\sin t + t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_{\pi}^x F'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} \\ &= F'(\pi) = \sin \pi + \pi = \pi \end{aligned}$$

46) $\frac{\pi^2}{2}$

$\Rightarrow f(x) = x^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_{\pi}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} [F(t)]_{\pi}^x = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = F'(\pi) \end{aligned}$$

이때, $F'(\pi) = f(\pi)$ 이므로

$$F'(\pi) = f(\pi) = \pi^2 \sin \frac{5}{6} \pi = \frac{\pi^2}{2}$$

47) $\frac{2}{3}$

$\Rightarrow f(t) = 2^t + \ln t$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3 - 1} \int_1^x (2^t + \ln t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3 - 1} \int_1^x f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{1}{3} F'(1) = \frac{1}{3} f(1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

48) $\frac{e}{2}$

$\Rightarrow f(t) = e^{t^2}$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \int_1^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x}) - F(1)}{x - 1} = \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x}) - F(1)}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{2} F'(1) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

49) 2

$\Rightarrow f(t) = t^3 + 2t^2 + t$ 이고, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x (t^3 + 2t^2 + t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x + 1} \cdot \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} F'(1) = \frac{1}{2} (1 + 2 + 1) = 2 \end{aligned}$$

50) -2

$\Rightarrow f(x) = x \cos \pi x$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1+h}^{1+3h} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x)]_{1+h}^{1+3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+3h) - F(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+3h) - F(1+h)}{2h} \times 2 \\ &= 2F'(1) \end{aligned}$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$2F'(1) = 2f(1) = -2$$

51) -4

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ 라 하고, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하자

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+2h) - F(2)}{h} = 2F'(2) = 2f(2) \\ &= 2(8 - 8 - 6 + 4) = -4 \end{aligned}$$

52) 8

$\Rightarrow F(x) = \int_1^x f(t) dx$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} \int_x^2 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = F'(2) = f(2) \\ &= 8 - 12 + 6 + a = 2 + a \end{aligned}$$

즉 $2+a=10$ 이므로 $a=8$

53) 3

\Rightarrow

$f(1)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = \sin \pi + 2 + 1 = 3 \text{이다.}$$

54) $-\frac{2}{\pi}$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}t \right]_0^x = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} = f(3) \text{이므로}$$

$$f(3) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{3}{2}\pi = -\frac{2}{\pi}$$

55) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = f(1)$$

($F(x)$ 는 $f(x)$ 의 한 부정적분)

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

$t = \tan s$ 로 치환하자. $dt = \sec^2 s ds$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 s}{\sec^4 s} \sec^2 s ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 s}{\sec^2 s} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s ds$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2s}{2} ds = \left[\frac{1}{2}s - \frac{\sin 2s}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

56) $\frac{3}{2} \ln 5$

57) 4

58) $2 \ln 2$

59) 0