5회차

01 ③	02 ①	03 ②	04 ③	05 ②
06 ②	07 ④	08 ⑤	09 ①	10 ⑤
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ④	15 ④
16 ②	17 ③			

[서술형 1] 24
[서술형 2] 11
[서술형 3] (1) $a_{n+1}=a_n+2n+4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) 130

01 $B=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$
$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의하여
$$2R=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4 \qquad \therefore R=2$$
따라서 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

02 코사인법칙에 의하여
$$c^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\cos 60^\circ$$
$$=36+9-18=27$$
이므로 $c=3\sqrt{3}\ (\because c>0)$
$$\therefore \cos A=\frac{3^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot3\cdot3\sqrt{3}}=0$$

다른 풀이

코사인법칙에 의하여
$$c^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\cos 60^\circ$$
$$=36+9-18=27$$
이때 $b^2+c^2=3^2+27=36$이므로 $a^2=b^2+c^2$
따라서 $\triangle$ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이므로
$\cos A=\cos 90^\circ=0$

03 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A$이므로
$a\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=b\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$에서
$a\cos B=b\cos A$ $\cdots\cdots$ ㉠
코사인법칙에 의하여
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
위의 식을 ㉠에 대입하면
$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$, $a^2=b^2$
$\therefore a=b\ (\because a>0, b>0)$
따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

Lecture 삼각형의 모양

삼각형 ABC에서
(1) $a=b=c$
⇨ $\triangle$ABC는 정삼각형이다.
(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$
⇨ $\triangle$ABC는 이등변삼각형이다.
(3) $a^2+b^2=c^2$
⇨ $\triangle$ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

04 $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$
$$\therefore \triangle ABC=2\cdot2^2\cdot\sin 120^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 30^\circ$$
$$=2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\sqrt{3}$$

Lecture 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$
(2) $S=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
제3항이 11이므로 $a+2d=11$ $\cdots\cdots$ ㉠
제9항이 29이므로 $a+8d=29$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=3$
따라서 $a_n=5+(n-1)\cdot3=3n+2$이므로
$a_6=3\cdot6+2=20$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공차가 d이므로
$a_4=-2$에서 $a+3d=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠
$a_2+a_7=0$에서 $(a+d)+(a+6d)=0$
$2a+7d=0$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-14$, $d=4$
$\therefore ad=-14\cdot4=-56$

07 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수들은

$1, 4, 7, \cdots, 100$

이 수열은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

이때 $3n-2=100$에서 $n=34$이므로 구하는 합은

$\dfrac{34(1+100)}{2}=1717$

08 수열 $2, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}, 28$에서 28은 제22항이므로 주어진 등차수열의 합은

$\dfrac{22(2+28)}{2}=330$

따라서 $2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}+28=330$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=300$

09 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=810$에서 $ar+ar^3=810$

$\therefore ar(1+r^2)=810 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_5+a_7=30$에서 $ar^4+ar^6=30$

$ar^4(1+r^2)=30 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $810r^3=30$

$r^3=\dfrac{1}{27} \qquad \therefore r=\dfrac{1}{3}$

$r=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $a\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{10}{9}=810$

$\therefore a=3^7$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3^7\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-8}$

$\therefore a_{10}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

10 네 수 $1, a, b, c$가 공비가 r인 등비수열을 이루므로

$a=r, b=r^2, c=r^3$

이때 $\log_8 c=\log_{2^3} r^3=\log_2 r$, $\log_a b=\log_r r^2=2$

이므로 $\log_8 c=\log_a b$에서 $\log_2 r=2$

$\therefore r=2^2=4$

Lecture 로그의 성질

$a>0, a\neq 1, M>0, N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

11 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $\sqrt{3}\cdot\dfrac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$\vdots$

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$

12 $a_1=S_1=2-1=1$

$a_9=S_9-S_8$

$=(2^9-1)-(2^8-1)$

$=256$

$\therefore a_1+a_9=1+256=257$

13 $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$

$\displaystyle=\left\{-2^2+\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2\right\}-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$

$\displaystyle=-4+\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+1)$

$\displaystyle=-4+\sum_{k=1}^{10}4k$

$\displaystyle=-4+4\sum_{k=1}^{10}k$

$=-4+4\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}$

$=216$

14 $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+10b_k+1)=-\sum_{k=1}^{10}a_k+10\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=-1\cdot 11+10\cdot 7+1\cdot 10$
$=-11+70+10$
$=69$

Lecture $\sum$의 성질
상수 p, q, r에 대하여
$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k+r)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k+rn$

15 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2+4}, \frac{1}{2+4+6}, \cdots, \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n}$
의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}2k}=\frac{1}{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1}{n(n+1)}$
$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\cdots+\frac{1}{2+4+6+\cdots+2n}$
$=1+\sum_{k=1}^{n}a_k$
$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
$=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=1+\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$
$=1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$
$=\frac{2n+1}{n+1}$

16 $a_{n+1}=3a_n-3$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면
$a_2=3a_1-3=3\cdot 2-3=3$
$a_3=3a_2-3=3\cdot 3-3=6$
$a_4=3a_3-3=3\cdot 6-3=15$
$a_5=3a_4-3=3\cdot 15-3=42$
$a_6=3a_5-3=3\cdot 42-3=123$
$\therefore a_6-a_5=123-42=81$

17 (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=2-1=1$이므로
주어진 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ ······ ㉠
㉠의 양변에 $\boxed{(가)\ 2^k}$을 더하면
$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+\boxed{(가)\ 2^k}$
$=2^k-1+2^k$
$=2\cdot 2^k-1$
$=2^{k+1}-1$
즉 $n=\boxed{(나)\ k+1}$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
$\therefore$ (가) 2^k (나) $k+1$
따라서 $f(k)=2^k$, $g(k)=k+1$이므로
$f(3)+g(3)=2^3+4=12$

[서술형 1] 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=6$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{BC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$
❶
$\angle BAC=\theta$라 하면
$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$
❷
$\therefore \triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\sin(\angle DAE)$
$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\sin(\pi-\theta)$
$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\sin\theta$
$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{4}{5}$
$=24$
❸

채점 기준	배점
❶ $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	2점
❷ $\angle BAC=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $\triangle ADE$의 넓이를 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] 첫째항이 -3, 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=-3+(n-1)\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}n-\frac{9}{2}$
❶

이때 15는 제$(k+2)$항이므로

$$\frac{3}{2}\cdot(k+2)-\frac{9}{2}=15$$

$k+2=13 \qquad \therefore k=11$

❷

채점 기준	배점
❶ 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.	3점
❷ k의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] (1) 주어진 그림에서

$$\begin{aligned} &a_1=4 \\ &a_2=a_1+6 \\ &a_3=a_2+8 \\ &\quad\vdots \\ &\therefore a_{n+1}=a_n+2(n+2) \\ &\qquad\quad\;\, =a_n+2n+4\ (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

❶

(2) $a_{n+1}=a_n+2n+4$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+2\cdot1+4 \\ & a_3=a_2+2\cdot2+4 \\ & a_4=a_3+2\cdot3+4 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_{10}=a_9+2\cdot9+4 \\ \hline & a_{10}=a_1+2(1+2+3+\cdots+9)+4\cdot9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &=a_1+2\sum_{k=1}^{9}k+4\cdot9 \\ &=4+2\cdot\frac{9\cdot10}{2}+4\cdot9 \\ &=4+90+36 \\ &=130 \end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3점
❷ a_{10}의 값을 구할 수 있다.	4점