개념check

[수학적 귀납법]

• 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

기본문제

[예제]

1. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식**

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

❶ $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$
따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.
❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \quad \cdots㉡$$
등식 ㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{\text{(가)}}$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{\text{(가)}}$
$=\boxed{\text{(나)}}$
위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.
❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

(가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)\times g(1)$의 값은?

① 160 ② 170
③ 180 ④ 190
⑤ 200

[문제]

2. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식**

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다.

❶ $n=1$일 때,
(좌변)$=\boxed{\text{(가)}}$, (우변)$=\boxed{\text{(가)}}$이므로 등식 ㉠이 성립한다.
❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots㉡$$
이므로 등식 ㉡의 양변에 $\boxed{\text{(나)}}$을/를 더하면
$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{\text{(나)}}$
$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{\text{(나)}}$
$=(k+1)^2\times\frac{(\boxed{\text{(다)}})^2}{4}=\{\boxed{\text{(라)}}\}^2$
위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.
❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

(가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 각각 a, $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $a+\frac{f(2)\cdot g(2)}{h(2)}$의 값은?

① 16 ② 17
③ 18 ④ 19
⑤ 20

[예제]

3. **다음은 $h>0$일 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $(1+h)^n>1+nh$가 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다. 이때, (가), (나)에 들어갈 말로 알맞은 것은?**

> ❶ $n=2$일 때,
> (좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=$(우변)
> 따라서 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
>
> ❷ $n=k(k\geq 2)$일 때, 부등식 $(1+h)^n>1+nh$이 성립한다고 가정하면
> $(1+h)^k>1+kh$ ⋯㉠
> 부등식 ㉠의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면
> $(1+h)^k\cdot\boxed{(가)}>(1+kh)\cdot\boxed{(가)}$
> $>\boxed{(나)}$
> 위 부등식은 주어진 부등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
> 따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
>
> ❶, ❷에서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

① (가) h, (나) $1+(k+1)h$
② (가) h, (나) $1+kh$
③ (가) $1+h$, (나) $1+(k+1)h$
④ (가) $1+h$, (나) $1+kh$
⑤ (가) $1+h$, (나) $k(h+1)^2$

[문제]

4. **$n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n>n^2$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.**

> ❶ $n=5$일 때,
> (좌변)$=2^5=32>5^2=25=$(우변)
> 따라서 $n=5$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
>
> ❷ $n=k\ (k\geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $2^k>k^2$ ⋯㉠
> 부등식 ㉠의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면
> $\boxed{(가)}\cdot 2^k>\boxed{(가)}\cdot k^2$ ⋯㉡
> 한편
> $2k^2-\boxed{(나)}$
> $=\boxed{}$
> 이때 $k\geq 5$이므로 $\boxed{}>0$
> 즉 $2k^2-\boxed{(나)}>0$이므로
> $2k^2>(k+1)^2$ ⋯㉢
> ㉡, ㉢에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$
> 위 부등식은 주어진 부등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
> 따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
>
> ❶, ❷에서 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 각각 a, $f(k)$라 할 때, $f(a)$의 값은?

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[스스로 확인하기]

5. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식**

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdots$㉠

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다.

> ❶ $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{1\times 2}{2}=1$
> 따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.
> ❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
> $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}\cdots$㉡
> 이므로 등식 ㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
> $1+2+3+\cdots+k+\boxed{(가)}$
> $=\dfrac{k(k+1)}{2}+\boxed{(가)}$
> $=\boxed{(나)}$
> 위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
> 따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.
> ❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

(가), (나)에 들어갈 말을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)+g(2)$의 값은?

① 6
② 9
③ 12
④ 15
⑤ 18

[스스로 확인하기]

6. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식**

$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> ❶ $n=1$일 때,
> (좌변)$=\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$
> 따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
> ❷ $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$
> 위 등식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
> $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\boxed{(가)}$
> $=\dfrac{k}{k+1}+\boxed{(가)}$
> $=\boxed{(나)}$
> 위 등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
> 따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> ❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(2)}{f(3)}$의 값은?

① 12
② 13
③ 14
④ 15
⑤ 16

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 확인하기]

7. **다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다. 빈칸에 들어갈 말로 알맞은 것을 고르시오.**

❶ $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=$(우변)

따라서 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

❷ $n=k\ (k \geq 2)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}\quad \cdots ㉠$

㉠의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$=2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$

$=2-\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)^2}<\boxed{\text{(나)}}$

위 부등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

❶, ❷에서 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

① (가) $\frac{1}{k^2}$, (나) $2-\frac{k(k+1)+k}{k(k+1)^2}$

② (가) $\frac{1}{k^2}$, (나) $2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}$

③ (가) $\frac{1}{(k+1)^2}$, (나) $2-\frac{k(k+1)+k}{k(k+1)^2}$

④ (가) $\frac{1}{(k+1)^2}$, (나) $2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}$

⑤ (가) $\frac{1}{(k+1)^2}$, (나) $2-\frac{k+1}{k(k+1)^2}$

[스스로 확인하기]

8. **어떤 모임에 참석한 n명의 사람들 모두가 서로 한 번씩 악수한다고 한다. 다음은 모인 사람이 n명인 경우에 악수한 총 횟수를 a_n이라 할 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$…㉠이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.**

❶ $n=2$일 때,

즉 모인 사람이 2명일 때 악수한 총 횟수는 1이므로

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{2\times(2-1)}{2}=1$

따라서 $n=2$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k\ (k \geq 2)$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{k(k-1)}{2}$

모인 사람이 k명일 때 악수한 총 횟수가 a_k이고, 새로 1명이 추가되었을 때, 이 사람과 나머지 k명의 사람이 각각 한 번씩 악수하게 되므로 추가로 악수한 횟수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다. 즉

$a_{k+1}=\boxed{\text{(나)}}$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

(가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(2)+g(2)$의 값은?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 마무리하기]

9. **다음은 수열 $\{a_n\}$이**

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n-1}a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

과 같이 귀납적으로 정의될 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 6n-2$가 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(1)+g(1)$의 값은?

❶ $n=1$일 때,
(좌변)$=4$, (우변)$=6\times1-2=4$
따라서 $n=1$일 때 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다고 가정하면
$a_k = \boxed{(가)}$
이때 $a_{k+1}=\dfrac{3k+2}{3k-1}a_k$가 성립하므로

$$a_{k+1}=\frac{3k+2}{3k-1}a_k$$
$$=\frac{3k+2}{3k-1}\times\boxed{(가)}$$
$$=\boxed{(나)}$$

위 등식은 등식 $a_n=6n-2$에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
따라서 $n=k+1$일 때도 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다.

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

유사문제

10. **수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고 $na_{n+1}-2na_n+\dfrac{n+2}{n+1}=0\ (n\ge1)$을 만족시킨다. 다음은 일반항이 $a_n=2^n+\dfrac{1}{n}$ …㉠임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.**

❶ $n=1$일 때
(좌변)$=a_1=3$, (우변)$=2^1+\dfrac{1}{1}=3$이므로
㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\boxed{f(k)}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+\boxed{g(k)}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 $f(k)$, $g(k)$에 대하여 곱 $f(3)\times g(4)$의 값은?

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

11. **다음은 모든 자연수 n에 대하여**

$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n(5n+3)}{4}$**이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

❶ $n=1$일 때
(좌변)$=2$, (우변)$=2$
따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식은 성립한다.

❷ $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{m(5m+3)}{4}$$

$n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{\boxed{(가)}}{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{\boxed{(나)}}\right)+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{\boxed{(가)}}{m+1}$$
$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{(다)}$$
$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

❶, ❷에서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$5m-3$	m	$5k+2$
②	$5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③	$5m+2$	m	$5k-3$
④	$5m+2$	$m+1$	$5k-3$
⑤	$5m+2$	m	$5k+2$

12. **다음은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식**

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$ **…㉠이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

❶ $n=2$일 때,
(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\cdot 2}{2+1}=\frac{4}{3}$
이므로 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k\ (k\geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$이다.
양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{(가)}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{(가)}$$
$$=\frac{2k+1}{k+1}$$

$k\geq 2$이므로 $\frac{2k+1}{k+1}-\boxed{(나)}=\boxed{(다)}>0$이다.

$$\therefore \frac{2k+1}{k+1}>\boxed{(나)}$$
$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{(가)}>\boxed{(나)}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 ㉠은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $f(1)+g(-1)+h(2)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$
② $\frac{3}{4}$
③ 1
④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{3}{2}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] ❶ $n=1$일 때,

$(좌변)=1^2=1$, $(우변)=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ …㉡

등식 ㉡의 양변에 $\boxed{(k+1)^2}$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\boxed{\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

이상에서 $f(k)=(k+1)^2$,

$g(k)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$이므로

$f(5)\cdot g(1)=6^2\cdot\frac{2\times3\times5}{6}=180$

2) [정답] ④

[해설] ❶ $n=1$일 때, $(좌변)=\boxed{1}$, $(우변)=\boxed{1}$이므로 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$ …㉡

이므로 등식 ㉡의 양변에 $\boxed{(k+1)^3}$을/를 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(k+1)^3}$

$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(k+1)^3}$

$=(k+1)^2\times\frac{(\boxed{k+2})^2}{4}=\left\{\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\right\}^2$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

이상에서 $a=1$, $f(k)=(k+1)^3$, $g(k)=k+2$,

$h(k)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로

$a+\frac{f(2)\cdot g(2)}{h(2)}=19$

3) [정답] ③

[해설] ❶ $n=2$일 때,

$(좌변)=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=(우변)$

따라서 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

❷ $n=k(k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ …㉠

부등식 ㉠의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)\boxed{(1+h)}=1+(k+1)h+kh^3$

$>\boxed{1+(k+1)h}$

위 부등식은 주어진 부등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

❶, ❷에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

4) [정답] ④

[해설] ❶ $n=5$일 때,

$(좌변)=2^5=32>5^2=25=(우변)$

따라서 $n=5$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

❷ $n=k$ $(k\geq5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$ …㉠

부등식 ㉠의 양변에 $\boxed{2}$를 곱하면

$\boxed{2}2^k>\boxed{2}k^2$ …㉡

한편

$2k^2-\boxed{(k+1)^2}$

$=k^2-2k-1$

$=k(k-2)-1$

이때 $k\geq5$이므로 $k(k-2)-1>0$

즉 $2k^2-\boxed{(k+1)^2}>0$이므로

$2k^2>(k+1)^2$ …㉢

㉡, ㉢에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$

위 부등식은 주어진 부등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

❶, ❷에서 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

이상에서 $f(k)=(k+1)^2$, $a=2$이므로 $f(a)=9$이다.

5) [정답] ③

[해설] ❶ $n=1$일 때, $(좌변)=1$, $(우변)=\frac{1\times2}{2}=1$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ ⋯㉡

이므로 등식 ㉡의 양변에 $\boxed{k+1}$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+\boxed{k+1}$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+\boxed{k+1}$

$=(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\boxed{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}}$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

이상에서 $f(k)=k+1$, $g(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로 $f(5)+g(2)=6+\dfrac{3\cdot4}{2}=12$

6) [정답] ④

[해설] ❶ $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$

위 등식의 양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\boxed{\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$

$=\dfrac{k}{k+1}+\boxed{\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$

$=\dfrac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\boxed{\dfrac{k+1}{k+2}}$

위 등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

이상에서 $f(k)=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$, $g(k)=\dfrac{k+1}{k+2}$이므로

$\dfrac{g(2)}{f(3)}=\dfrac{3}{4}\div\dfrac{1}{4\cdot5}=15$

7) [정답] ④

[해설] ❶ $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}<2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}=$(우변)

따라서 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

❷ $n=k\ (k\geq2)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}$ ⋯㉠

㉠의 양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$=2-\dfrac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$

$=2-\dfrac{k(k+1)+1}{k(k+1)^2}<\boxed{2-\dfrac{k(k+1)}{k(k+1)^2}}=2-\dfrac{1}{k+1}$

위 부등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

❶, ❷에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

8) [정답] ⑤

[해설] $a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$ ⋯㉠

❶ $n=2$일 때,

즉 모인 사람이 2명일 때 악수한 총 횟수는 1이므로

(좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{2\times(2-1)}{2}=1$

따라서 $n=2$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k\ (k\geq2)$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=\dfrac{k(k-1)}{2}$

모인 사람이 k명일 때 악수한 총횟수가 a_k이고, 새로 1명이 추가되었을 때, 이 사람과 나머지 k명의 사람이 각각 한 번씩 악수하게 되므로 추가로 악수한 횟수는 $\boxed{k}$ 이다. 즉

$a_{k+1}=a_k+k=\dfrac{k(k-1)}{2}+k=\boxed{\dfrac{(k+1)k}{2}}$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

이상에서 $f(k)=k$, $g(k)=\dfrac{(k+1)k}{2}$이므로

$f(2)+g(2)=2+\dfrac{2\cdot3}{2}=5$

9) [정답] ②

[해설] ❶ $n=1$일 때,

(좌변)$=4$, (우변)$=6\times1-2=4$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

따라서 $n=1$일 때 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다고 가정하면

$a_k=\boxed{6k-2}$

이때 $a_{k+1}=\dfrac{3k+2}{3k-1}a_k$가 성립하므로

$$a_{k+1}=\frac{3k+2}{3k-1}a_k$$
$$=\frac{3k+2}{3k-1}\times\boxed{6k-2}=\boxed{6k+4}$$

위 등식은 등식 $a_n=6n-2$에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 $a_n=6n-2$이 성립한다.

$\therefore f(k)=6k-2,\ g(k)=6k+4$

$f(1)+g(1)=4+10=14$

10) [정답] ④

[해설] ❶ $n=1$일 때

$(좌변)=a_1=3,\ (우변)=2^1+\dfrac{1}{1}=3$이므로

㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\boxed{2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

$f(k)=2k\left(2^k+\dfrac{1}{k}\right),\ g(k)=\dfrac{k}{k+1}$

$\therefore f(3)\times g(4)=6\left(2^3+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{4}{5}=40$

11) [정답] ③

[해설] ❶ $n=1$일 때

$(좌변)=2,\ (우변)=2$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식은 성립한다.

❷ $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{m(5m+3)}{4}$$

$n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{\boxed{5m+2}}{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{\boxed{m}}\right)$$
$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{\boxed{5m+2}}{m+1}$$
$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{(5k-3)}$$
$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

❶, ❷에서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

12) [정답] ①

[해설] ❶ $n=2$일 때,

$(좌변)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\ (우변)=\dfrac{2\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

이므로 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k\ (k\geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}>\dfrac{2k}{k+1}$이다.

양변에 $\boxed{\dfrac{1}{k+1}}$를 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{k+1}}$$
$$=\frac{2k+1}{k+1}$$

$k\geq 2$이므로

$\dfrac{2k+1}{k+1}-\boxed{\dfrac{2(k+1)}{k+2}}=\boxed{\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}}>0$이다.

$$\therefore \frac{2k+1}{k+1}>\boxed{\frac{2(k+1)}{k+2}}$$
$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\boxed{\frac{2(k+1)}{k+2}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 ㉠은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$f(k)=\dfrac{1}{k+1},\ g(k)=\dfrac{2(k+1)}{k+2}$

$h(k)=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}$

$\therefore f(1)+g(-1)+h(2)=\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{2}{3\cdot 4}=\dfrac{2}{3}$