12

원의 방정식

원의 방정식의 표준형

예제 01

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심의 좌표가 $(3,\ 4)$이고, 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 원

(2) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(-5,\ -2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원

접근 방법

(2)에서는 두 점 A, B에 대하여 원의 중심은 선분 AB의 중점이고, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$임을 이용하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구합니다.

Bible 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

상세 풀이

(1) 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

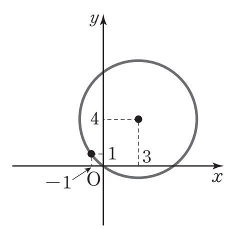
$$(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$$(-1-3)^2+(1-4)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=25$$

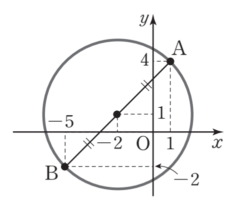
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$



(2) 선분 AB의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1+(-5)}{2},\ \frac{4+(-2)}{2}\right) \qquad \therefore (-2,\ 1)$$



또한 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-5-1)^2+(-2-4)^2}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-1)^2=18$$

정답 ➡ (1) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ (2) $(x+2)^2+(y-1)^2=18$

보충 설명

일반적으로 두 점을 지나는 원은 하나로 정해지지 않고, 무수히 많습니다. 그러나 (2)와 같이 주어진 두 점이 지름의 양 끝점인 경우 두 점을 이은 선분이 원의 지름으로 정해지기 때문에 원은 하나로 정해집니다. 즉, (2)에서 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이가 직접 주어지지는 않았지만 양 끝점을 이은 선분의 중점이 원의 중심이고, 양 끝점 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이 반지름의 길이라는 것을 이용하여 원의 방정식을 구한 것입니다.

풀이집 p.177

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이 ◆ 보충 설명

01-1 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$이고 원점을 지나는 원

(2) 중심이 y축 위에 있고, 두 점 $(-2,\ -1)$, $(2,\ 3)$을 지나는 원

(3) 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원

표현 바꾸기

01-2 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -7)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$일 때, 상수 a, b, r에 대하여 $a+b+r$의 값은? (단, $r>0$)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

개념 넓히기 ★☆☆

◆ 다른 풀이

01-3 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있고, 두 점 $(-5,\ 0)$, $(1,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c$$

일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

12

정답 **01-1** (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=13$ (2) $x^2+(y-1)^2=8$ (3) $(x-3)^2+(y-1)^2=8$
01-2 ① **01-3** 17

예제 02

원의 방정식의 일반형

세 점 P$(-1,\ 2)$, Q$(2,\ 3)$, R$(6,\ 1)$을 지나는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 각각 구하여라.

접근 방법

원 위의 세 점이 주어졌을 때, 원의 방정식을 일반형, 즉 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하여 상수 A, B, C의 값을 구합니다. 여기서 구한 원의 방정식을 표준형, 즉 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형하면 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있습니다.

> **Bible** 원 위의 세 점이 주어질 경우에는 원의 방정식을
> $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입한다.

상세 풀이

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점 P$(-1,\ 2)$, Q$(2,\ 3)$, R$(6,\ 1)$의 좌표를 차례대로 대입하여 정리하면

$A-2B-C=5$ …… ㉠

$2A+3B+C=-13$ …… ㉡

$6A+B+C=-37$ …… ㉢

㉠+㉡을 하면 $3A+B=-8$ …… ㉣

㉠+㉢을 하면 $7A-B=-32$ …… ㉤

㉣+㉤을 하면 $10A=-40$

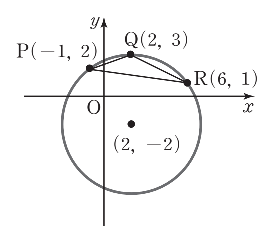
$\therefore A=-4,\ B=4,\ C=-17$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x+4y-17=0$

$(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)-25=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=25$



따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -2)$, 반지름의 길이는 5입니다.

정답 ➡ 중심의 좌표 : $(2,\ -2)$, 반지름의 길이 : 5

보충 설명

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점을 지나는 원은 오직 하나뿐이므로 원 위의 세 점이 주어지면 하나의 원의 방정식을 구할 수 있습니다.

원의 방정식의 일반형 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 주어진 세 점 P, Q, R의 좌표를 각각 대입하면 3개의 식을 얻을 수 있으므로 이 3개의 식을 연립하여 풀면 상수 A, B, C의 값을 모두 구할 수 있습니다.

이때, 세 점 P, Q, R를 지나는 원은 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 외접원입니다.

풀이집 p.178

숫자 바꾸기

02-1 다음 세 점을 지나는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 각각 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(0,\ -1)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$, $\mathrm{R}(3,\ 2)$

(2) $\mathrm{P}(2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(1,\ -1)$, $\mathrm{R}(3,\ 3)$

표현 바꾸기

02-2 다음 x, y에 대한 이차방정식이 원의 방정식이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2+y^2+4x-2y+k^2+4k-7=0$

(2) $x^2+y^2+4x-6y+k^2-k+7=0$

개념 넓히기 ★★☆

02-3 세 직선 $x+2y-12=0$, $x-y+3=0$, $x-3y+3=0$으로 만들어지는 삼각형의 외접원의 넓이는?

① 16π ② 24π ③ 25π
④ 32π ⑤ 36π

12

정답 **02-1** (1) 중심의 좌표 : $(1,\ 1)$, 반지름의 길이 : $\sqrt{5}$
(2) 중심의 좌표 : $(-2,\ 3)$, 반지름의 길이 : 5
02-2 (1) $-6<k<2$ (2) $-2<k<3$ **02-3** ③

예제 03

좌표축에 접하는 원의 방정식

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심의 좌표가 $(1,\ 2)$이고, x축에 접하는 원

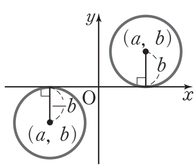
(2) 중심의 좌표가 $(1,\ 2)$이고, y축에 접하는 원

(3) 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$이고, x축과 y축에 동시에 접하는 원

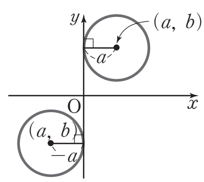
접근 방법

좌표축에 접하는 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$은 그림을 그려서 반지름의 길이를 확인할 수 있습니다.

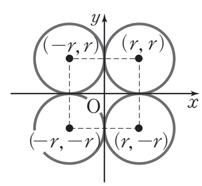
(i) x축에 접하는 원



(ii) y축에 접하는 원



(iii) x축과 y축에 동시에 접하는 원



Bible

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 $\begin{cases} x\text{축에 접하면 } r=|b| \\ y\text{축에 접하면 } r=|a| \end{cases}$

상세 풀이

구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

(1) 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$이 x축에 접하므로 $r=2$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

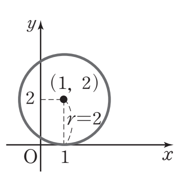
(2) 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$이 y축에 접하므로 $r=1$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

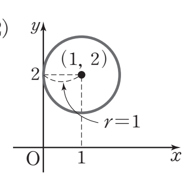
(3) 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$이 x축과 y축에 동시에 접하므로 $r=1$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

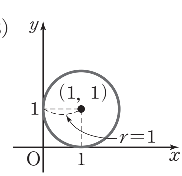
(1)



(2)



(3)



정답 ➡ (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ (2) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ (3) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

보충 설명

좌표축에 접하는 원의 방정식은 공식으로 기억하는 방법 이외에 위의 풀이와 같이 조건에 맞게 그림을 그려서 문제를 해결하는 방법도 있습니다.

풀이집 p.180

숫자 바꾸기

03-1 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심의 좌표가 $(-2,\ 3)$이고, x축에 접하는 원

(2) 중심의 좌표가 $(-2,\ 3)$이고, y축에 접하는 원

(3) 중심의 좌표가 $(-2,\ 2)$이고, x축과 y축에 동시에 접하는 원

표현 바꾸기

03-2 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 y축에 접하는 원 중에서 점 $(1,\ 3)$을 지나는 원의 방정식을 모두 구하여라.

개념 넓히기 ★★★

◆ 보충 설명

03-3 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원의 반지름의 길이의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

12

정답

03-1 (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=9$ (2) $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ (3) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

03-2 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-6)^2=25$

03-3 ④

예제 04

점이 나타내는 도형의 방정식

두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(4,\ 0)$에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

접근 방법

좌표평면 위의 두 점으로부터 거리의 비가 $1:1$인 점이 나타내는 도형은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선임을 배웠습니다. 여기에서는 두 점으로부터 거리의 비가 $m:n(m\neq n)$인 점이 나타내는 도형의 방정식을 구해야 하므로 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고, $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$ 즉, 등식 $\overline{AP}=2\overline{BP}$를 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구합니다.

상세 풀이

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서 $\overline{AP}=2\overline{BP}$이므로

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2+y^2-12x+20=0$$

$$\therefore\ (x-6)^2+y^2=16$$ ← 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(6,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 4인 원입니다.

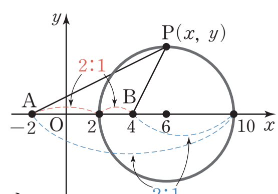
다른 풀이

두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(4,\ 0)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{2\cdot0+1\cdot0}{2+1}\right)\qquad\therefore\ (2,\ 0)$$

또한 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1},\ \frac{2\cdot0-1\cdot0}{2-1}\right)\qquad\therefore\ (10,\ 0)$$



따라서 두 점 $(2,\ 0)$, $(10,\ 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원은 중심의 좌표가

$\left(\frac{2+10}{2},\ 0\right)$, 즉 $(6,\ 0)$이고 반지름의 길이가 4이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x-6)^2+y^2=16$$

정답 ➡ $(x-6)^2+y^2=16$

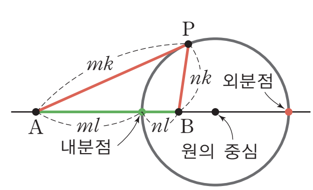
보충 설명

일반적으로 두 점 A, B에 대하여

$$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

인 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 됩니다.

이와 같은 원을 '아폴로니우스의 원(Apollonius의 원)'이라고 합니다.



풀이집 p.181

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이 ◆ 보충 설명

04-1 다음 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$를 만족시키는 점 P

(2) 두 점 $A(-5, 0)$, $B(10, 0)$에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$을 만족시키는 점 P

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

04-2 두 점 $A(2, 3)$, $B(4, 0)$에 대하여 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

개념 넓히기 ★★★

04-3 다음 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $A(4, 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점 P

(2) 점 $A(6, 8)$에서 원점을 지나는 직선에 내린 수선의 발 P

12

정답
04-1 (1) $(x+3)^2+y^2=16$ (2) $(x+17)^2+y^2=324$
04-2 ③
04-3 (1) $(x-2)^2+y^2=1$ (2) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

예제 05

판별식을 이용한 원과 직선의 위치 관계

원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 그 범위를 이차방정식의 판별식을 이용하여 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

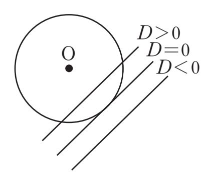
(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

접근 방법

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식의 실근의 개수는 원과 직선의 교점의 개수와 같습니다. 또한 $y=x+k$를 $x^2+y^2=2$에 대입하여 만든 x에 대한 이차방정식의 해는 좌표평면 위의 원과 직선의 교점의 x좌표와 같습니다.

Bible 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.
(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $D=0$이면 접한다. (한 점에서 만난다.)
(3) $D<0$이면 만나지 않는다.



상세 풀이

$y=x+k$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=2 \qquad \therefore\ 2x^2+2kx+k^2-2=0$$

위의 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)=-k^2+4$$

(1) $\frac{D}{4}>0$일 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

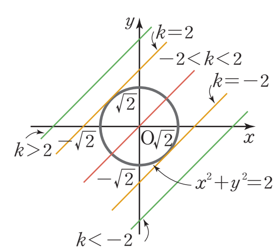
$$-k^2+4>0,\ k^2<4 \qquad \therefore\ -2<k<2$$

(2) $\frac{D}{4}=0$일 때, 원과 직선이 접하므로

$$-k^2+4=0,\ k^2=4 \qquad \therefore\ k=\pm 2$$

(3) $\frac{D}{4}<0$일 때, 원과 직선이 만나지 않으므로

$$-k^2+4<0,\ k^2>4 \qquad \therefore\ k<-2 \text{ 또는 } k>2$$



정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

$x=y-k$를 대입하여 y에 대한 이차방정식 $2y^2-2ky+k^2-2=0$의 판별식을 이용하여도 같은 결과를 얻습니다.

풀이집 p.182

숫자 바꾸기

05-1 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $y=-2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 그 범위를 이차방정식의 판별식을 이용하여 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

표현 바꾸기

05-2 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=mx+3$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 m의 값 또는 그 범위를 이차방정식의 판별식을 이용하여 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

개념 넓히기 ★★☆

05-3 원 $x^2+y^2=10$과 만나고 직선 $3x-y+2=0$에 평행한 직선과 y축의 교점의 좌표를 $(0, k)$라고 할 때, 정수 k의 개수를 구하여라.

12

정답
05-1 (1) $-5<k<5$ (2) $k=\pm5$ (3) $k<-5$ 또는 $k>5$
05-2 (1) $m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$ (2) $m=\pm\sqrt{2}$ (3) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$
05-3 20

예제 06

점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한 원과 직선의 위치 관계

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $3x-4y+k=0$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 그 범위를 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

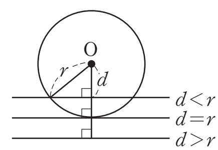
(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

접근 방법

원 $x^2+y^2=4$의 중심과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리를 구한 후, 원의 반지름의 길이와 크기를 비교하면 원과 직선의 위치 관계를 알 수 있습니다.

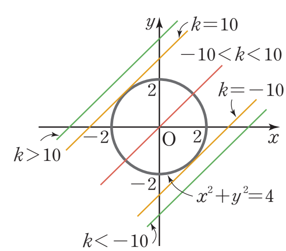
Bible 반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라고 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.
(1) $d<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $d=r$이면 접한다. (한 점에서 만난다.)
(3) $d>r$이면 만나지 않는다.



상세 풀이

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$$



(1) d가 원의 반지름의 길이 2보다 작을 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{|k|}{5}<2,\ |k|<10 \qquad \therefore\ -10<k<10$$

(2) d가 원의 반지름의 길이 2와 같을 때, 원과 직선이 접하므로

$$\frac{|k|}{5}=2,\ |k|=10 \qquad \therefore\ k=\pm 10$$

(3) d가 원의 반지름의 길이 2보다 클 때, 원과 직선이 만나지 않으므로

$$\frac{|k|}{5}>2,\ |k|>10 \qquad \therefore\ k<-10 \text{ 또는 } k>10$$

정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

예제 05와 같이 원과 직선의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용할 수도 있지만 원의 중심을 쉽게 구할 수 있을 때, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 판별하는 것이 좀 더 편리합니다.

풀이집 p.183

숫자 바꾸기

◆보충 설명

06-1 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$와 직선 $x+2y+k=0$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 그 범위를 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

표현 바꾸기

06-2 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=mx+3$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 m의 값 또는 그 범위를 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

개념 넓히기 ★★☆

06-3 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$과 직선 $3x+4y+k=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 개수는?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

12

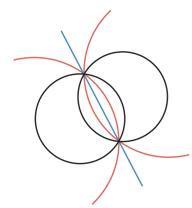
정답
06-1 (1) $-5<k<5$ (2) $k=\pm5$ (3) $k<-5$ 또는 $k>5$
06-2 (1) $m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$ (2) $m=\pm\sqrt{2}$ (3) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$
06-3 ④

예제 07

두 원의 교점을 지나는 직선 또는 원의 방정식

두 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-1=0$의 교점과 점 $(2,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

접근 방법



두 원이 두 점에서 만날 때 오른쪽 그림과 같이 2개의 점을 지나는 원은 무수히 많이 그려집니다.
두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식에서 배웠던 것과 유사하게 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2+y^2+ax+by+c)+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0 \text{ (단, } k\neq-1)$$

이고, $k=-1$이면 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식(공통현의 방정식)이 됩니다.

Bible

두 점에서 만나는 두 원 $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 에 대하여

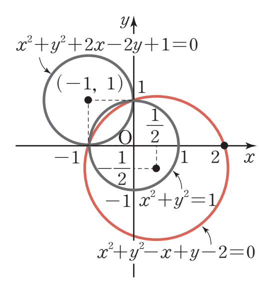
(1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식(공통현의 방정식)은

$$(x^2+y^2+ax+by+c)-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

(2) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2+y^2+ax+by+c)+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0 \text{ (단, } k\neq-1)$$

상세 풀이



두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2+y^2+2x-2y+1)+k(x^2+y^2-1)=0 \text{ (단, } k\neq-1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 원이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$(4+0+4-0+1)+k(4+0-1)=0 \qquad \therefore k=-3$$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$$(x^2+y^2+2x-2y+1)-3(x^2+y^2-1)=0$$

$$\therefore x^2+y^2-x+y-2=0$$

정답 ➡ $x^2+y^2-x+y-2=0$

보충 설명

두 원의 방정식을 연립하여 두 원의 교점의 좌표 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 구한 후, 두 교점과 점 $(2,\ 0)$을 원의 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 대입하여 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 구할 수도 있습니다. 그러나 두 원의 교점을 직접 구하기 위해서는 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀어야 하기 때문에 계산 과정이 복잡하고 시간이 많이 걸리므로 위의 방법을 이용하는 것이 좀 더 편리합니다.

풀이집 p.184

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

07-1 다음 원 또는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 원 $x^2+y^2=6$, $x^2+y^2+4x-6y-2=0$의 교점과 원점을 지나는 원

(2) 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-2)^2+(y-3)^2=4$의 교점과 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 원

(3) 두 원 $x^2+y^2-6x+2y+8=0$, $x^2+y^2-4x=0$의 교점을 지나는 직선

표현 바꾸기

07-2 두 원 $x^2+y^2+2ax-4y-b=0$, $x^2+y^2+bx+2y-a+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식이 $2x-3y+1=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

개념 넓히기 ★★☆

07-3 두 원 $x^2+y^2+2x+2y-3=0$, $x^2+y^2+x+2y-2=0$의 공통현을 지름으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

12

정답 07-1 (1) $x^2+y^2+6x-9y=0$ (2) $x^2+y^2-2y-1=0$ (3) $x-y-4=0$
07-2 ②　07-3 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

예제 08 현의 길이

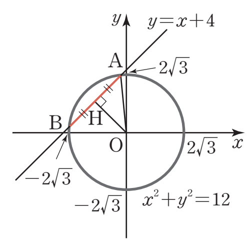
직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=12$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

접근 방법

직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=12$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB는 원의 현이 됩니다. 이때, 원의 중심과 현 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 이용하여 현의 길이를 구합니다.

Bible 원의 중심에서 현에 내린 수선의 발은 그 현을 수직이등분한다.

상세 풀이



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $\mathrm{O}(0, 0)$에서 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2=12-(2\sqrt{2})^2=4$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=2$$

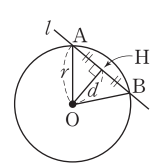
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\cdot2=4$$

정답 ➡ 4

보충 설명

원 위의 두 점을 이은 선분을 현이라고 하는데, 현 중에서 그 길이가 가장 긴 것이 지름입니다.
다음은 현의 중요한 성질입니다.
(1) 원의 중심에서 현에 내린 수선의 발은 그 현을 수직이등분합니다.
(2) 한 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지납니다.



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$, $\angle\mathrm{AHO}=\angle\mathrm{BHO}=90°$, $\overline{\mathrm{OH}}$는 공통인 변

이므로 두 삼각형 AHO, BHO는 서로 합동입니다. (RHS합동)
즉, 원의 중심에서 현에 내린 수선의 발은 그 현을 수직이등분합니다.

풀이집 p.185

숫자 바꾸기

08-1 직선 $y=x+1$이 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

표현 바꾸기

08-2 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$과 직선 $y=x+k$가 만나서 생기는 현의 길이가 $4\sqrt{2}$일 때, 양수 k의 값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

개념 넓히기 ★★☆

08-3 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+2$의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 넓이는?

① 5π　② 6π　③ 7π
④ 8π　⑤ 9π

12

정답 08-1 $2\sqrt{2}$　08-2 ⑤　08-3 ③

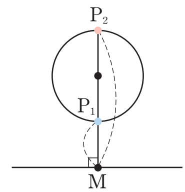
예제 09

원 위의 한 점과 직선 사이의 거리

원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P와 직선 $4x-3y-6=0$ 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m을 각각 구하여라.

접근 방법

원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 살펴보면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 지나고 직선에 수직인 직선을 그렸을 때, 선분 $\mathrm{P_1M}$의 길이가 최솟값, 선분 $\mathrm{P_2M}$의 길이가 최댓값이 된다는 것을 알 수 있습니다.



Bible 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최댓값, 최솟값은 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용한다.

상세 풀이

원의 중심 $(-2,\ 2)$와 직선 $4x-3y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\cdot(-2)-3\cdot2-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

이때, 원의 반지름의 길이가 2이므로 오른쪽 그림에서 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값 M은

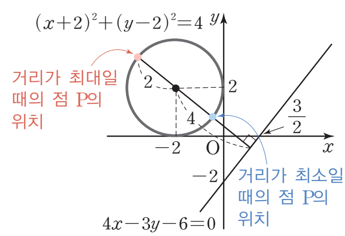
$M=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)+(반지름의 길이)

$=4+2=6$

또한 최솟값 m은

$m=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)−(반지름의 길이)

$=4-2=2$



정답 ➡ $M=6,\ m=2$

보충 설명

원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은 원의 중심과 직선 사이의 거리의 2배이고, 차는 원의 지름의 길이가 됩니다.

풀이집 p.186

숫자 바꾸기

09-1 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 P와 직선 $3x+4y+7=0$ 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m을 각각 구하여라.

표현 바꾸기

09-2 원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ 위의 점 P와 직선 $4x+3y+2=0$ 사이의 거리가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수를 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

09-3 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$의 최댓값은?

① $1+\sqrt{5}$ ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ $2(1+\sqrt{5})$

12

정답 09-1 $M=7$, $m=3$ 09-2 8 09-3 ④

예제 10

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=20$에 접하고 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

접근 방법

기울기가 주어졌을 때 접선의 방정식을 구하는 공식을 이용하여 구할 수 있습니다. 하지만 원의 중심이 원점일 때만 적용 가능하므로 구하는 접선은 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직임을 이용하여 접선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라 하고, 원의 중심과 접선 사이의 거리와 반지름의 길이는 같음을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수도 있습니다.

Bible 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

상세 풀이

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -2이고 원 $x^2+y^2=20$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로

구하는 접선의 방정식은

$$y=-2x\pm2\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-2)^2+1} \qquad \therefore y=-2x\pm10$$

다른 풀이

구하는 접선은 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직이므로 기울기는 -2입니다. 즉, 기울기가 -2인 접선의 방정식을

$$y=-2x+k \ (k\text{는 상수})$$

즉, $2x+y-k=0$이라고 하면 이 직선이 원 $x^2+y^2=20$에 접하므로

$$\frac{|2\cdot0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5},\ |-k|=10 \qquad \therefore k=\pm10$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-2x\pm10$$

정답 ➡ $y=-2x\pm10$

보충 설명

위의 두 가지 방법 이외에도 접선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라고 하였을 때, $y=-2x+k$를 원의 방정식에 대입하여 만든 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$임을 이용하여 y절편인 상수 k의 값을 구할 수도 있습니다.

한편, Bible 의 공식은 원의 중심이 원점일 때만 이용할 수 있으므로 원의 중심이 원점이 아니어도 적용 가능한 다른 풀이 의 방법도 숙지해 두는 것이 좋습니다.

풀이집 p.187

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

10-1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 2인 직선

(2) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 직선 $3x-y+2=0$에 평행한 직선

표현 바꾸기

10-2 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$에 접하고 기울기가 -1인 직선

(2) 원 $x^2+y^2-2x-4=0$에 접하고 직선 $x-2y+4=0$에 수직인 직선

개념 넓히기 ★★☆

10-3 두 점 $(-2,\ 8)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선과 평행하고, 제1사분면에서 원 $x^2+y^2=8$에 접하는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라. (단, O는 원점이다.)

12

정답
10-1 (1) $y=2x\pm5$ (2) $y=3x\pm2\sqrt{10}$
10-2 (1) $y=-x-1$ 또는 $y=-x+3$ (2) $y=-2x-3$ 또는 $y=-2x+7$
10-3 8

예제 11

원 위의 한 점에서의 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 방정식이 $ax+y+b=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

접근 방법

원 위의 한 점의 좌표가 주어졌을 때 접선의 방정식을 구하는 공식을 이용하여 방정식을 구할 수도, 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직임을 이용하여 접선의 기울기 m의 값을 구할 수도 있습니다.

Bible 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

상세 풀이

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$4\cdot x+2\cdot y=20$$

$$\therefore 2x+y-10=0$$

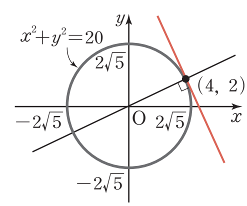
따라서 $a=2$, $b=-10$이므로

$$a-b=2-(-10)=12$$

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접점 $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}$$



이때, 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는 -2입니다.

즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=-2(x-4) \qquad \therefore 2x+y-10=0$$

따라서 $a=2$, $b=-10$이므로

$$a-b=2-(-10)=12$$

정답 ➡ 12

보충 설명

Bible의 공식은 원의 중심이 원점일 때만 이용할 수 있다는 점에 주의합니다.

즉, 원의 중심이 원점이 아닌 경우에는 다른 풀이와 같이 접선이 원의 중심과 접점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선과 수직임을 이용하여 접선의 기울기 m을 구한 후

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

을 이용하여 접선의 방정식을 구합니다.

풀이집 p.188

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

11-1 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선

(2) 원 $x^2+y^2=45$ 위의 점 $(-3,\ 6)$에서의 접선

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

11-2 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=8$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선

(2) 원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선

개념 넓히기 ★★☆

11-3 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$에서의 접선과 점 $\mathrm{Q}(-3,\ 4)$에서의 접선이 만나는 점을 R라고 할 때, 사각형 OPRQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $4\sqrt{5}$ ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

12

정답 **11-1** (1) $2x+y-5=0$ (2) $x-2y+15=0$
11-2 (1) $y=x$ (2) $y=-x+5$ **11-3** ⑤

예제 12

원 밖의 한 점에서 그은 원의 접선의 방정식

점 $(2,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

접근 방법

구하는 접선의 방정식을 $y-1=m(x-2)$라 하고, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 접선의 기울기 m의 값을 구합니다. 이때, 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 그으면 2개의 접선이 나오는 것에 주의합니다.

Bible 원 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$이 주어진 접선의 방정식
➡ 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 접선의 기울기 m의 값을 구한다.

상세 풀이

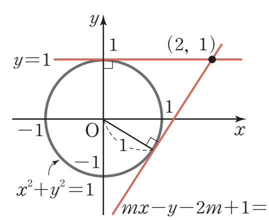
점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식을

$$y-1=m(x-2)$$

즉, $mx-y-2m+1=0$이라고 하면 이 직선은 원 $x^2+y^2=1$에 접하고, 이 원은 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 1이므로

$$\frac{|m\cdot 0-0-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$\therefore |-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$



양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2-4m=0,\ m(3m-4)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{4}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

정답 ➡ $y=1$ 또는 $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

보충 설명

원 밖의 한 점에서 그은 접선은 항상 2개이므로 1개만 나오는 경우(숫자 바꾸기 **12-1** (2)), 다른 하나의 접선은 y축과 평행한 직선($x=k$(k는 상수) 꼴)이므로 반드시 그림을 그려서 확인합니다.

풀이집 p.189

숫자 바꾸기

◆다른 풀이 ◆보충 설명

12-1 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선

(2) 점 $(1,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선

표현 바꾸기

12-2 점 $(-2,\ 1)$에서 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$에 그은 두 접선의 기울기의 합은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

개념 넓히기 ★★★

12-3 점 $(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-1)^2=4$에 그은 두 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하여라.

12

정답 **12-1** (1) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 또는 $y=2x-5$ (2) $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 또는 $x=1$

12-2 ⑤ **12-3** 2