



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-03-05
2) 제작자 : 교육지대(주)
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[원의 방정식]

중심이 점 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

<참고> 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = r^2$$

[원의 방정식의 일반형]

방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 - 4C > 0$)은

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

즉, 중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$,

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$ 인 원을 나타낸다.

기본문제

[문제]

1. 중심이 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은?

- ① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
- ② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$
- ③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
- ④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$
- ⑤ $x^2 + y^2 = 9$

[예제]

2. 두 점 $A(-1, 4)$, $B(5, 2)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

- ① $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$
- ② $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 10$
- ③ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$
- ④ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$
- ⑤ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 11$

[문제]

3. 두 점 $A(-3, 3)$, $B(3, -5)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{2}$
- ② $x^2 + (y+1)^2 = 25$
- ③ $(x+3)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{2}$
- ④ $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$
- ⑤ $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$

[문제]

4. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$ 이 나타내는 원의 중심을 (a, b) , 반지름을 r 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a , b , r 은 상수)

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

[문제]

5. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - k = 0$ 이 나타내는 도형이 원이 되게 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $k > -2$
- ② $k > -5$
- ③ $k > -8$
- ④ $k > -10$
- ⑤ $k > -13$

평가문제

[스스로 확인하기]

6. (가)~(마)에 들어갈 내용으로 옳지 않은 것은? (단, a, b, r 은 상수)

중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식

$$(x - \boxed{\text{가}})^2 + (y - \boxed{\text{나}})^2 = \boxed{\text{다}}^2$$

전개하면

$$x^2 + y^2 - \boxed{\text{라}}x - \boxed{\text{마}}y + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

- ① (가): $-a$ ② (나): b
 ③ (다): r ④ (라): $2a$
 ⑤ (마): $2b$

[스스로 확인하기]

7. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은?

- ① $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$
 ② $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$
 ③ $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$
 ④ $x^2 + y^2 = 5$
 ⑤ $x^2 + y^2 = 25$

[스스로 확인하기]

8. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$ 이 나타내는 원의 중심을 (a, b) , 반지름을 r 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

- ① 1 ② 3
 ③ 5 ④ 7
 ⑤ 9

[스스로 확인하기]

9. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ 과 중심이 같고, 점 $(-3, 4)$ 를 지나는 원의 방정식은?

- ① $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$
 ② $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$
 ③ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$
 ④ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 64$
 ⑤ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 74$

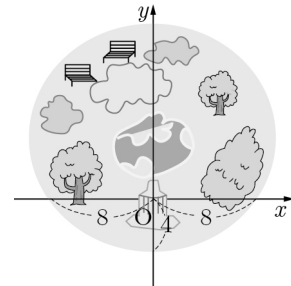
[스스로 확인하기]

10. 중심이 직선 $y = -x + 2$ 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식은?

- ① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
 ② $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$
 ③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$
 ④ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
 ⑤ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

[스스로 확인하기]

11. 다음 그림은 둘레가 원 모양인 공원을 분수대를 원점으로 하는 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 공원의 둘레를 나타내는 원의 방정식에서 원의 중심을 (a, b) , 반지름을 r 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)



- ① 12 ② 14
 ③ 16 ④ 18
 ⑤ 20

유사문제

12. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 7인 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 = 7$ ② $x^2 + y^2 = 14$
 ③ $x^2 + y^2 = 21$ ④ $x^2 + y^2 = 28$
 ⑤ $x^2 + y^2 = 49$

13. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

- ① (1, 2) ② (2, 1)
 ③ (2, 2) ④ (2, 4)
 ⑤ (4, 4)

14. 원 $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ 의 중심의 좌표는 (a, b) 이고 반지름의 길이는 r 일 때, $a+b+r$ 의 값은?

- ① 7 ② 8
③ 9 ④ 10
⑤ 11

15. 원점과 두 점 $(0, 1)$, $(2, 0)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값은?

- ① -3 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 3

16. 두 점 $A(-1, 1)$, $B(3, 7)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심의 좌표를 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a+b+r^2$ 의 값은?

- ① 18 ② 16
③ 14 ④ 12
⑤ 10

17. 점 $(3, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원의 넓이의 합은?

- ① 29π ② 40π
③ 52π ④ 74π
⑤ 96π

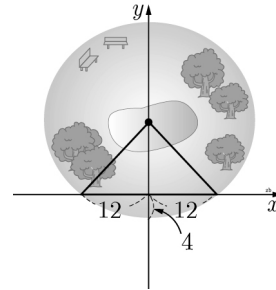
18. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ 이 원을 나타낼 때, 자연수 a 의 최댓값은?

- ① 13 ② 14
③ 15 ④ 16
⑤ 17

19. 방정식 $x^2 + y^2 - 6x - 4y - k^2 + 3k + 17 = 0$ 이 나타내는 도형이 원일 때, 상수 k 값의 범위는?

- ① $-4 < k < 1$ ② $-1 < k < 4$
③ $k = -1$ 또는 $k = 4$ ④ $k < -1$ 또는 $k > 4$
⑤ $k \leq -1$ 또는 $k \geq 4$

20. 다음 그림은 둘레가 원 모양인 공원을 분수대를 원점으로 하는 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 공원의 둘레를 나타내는 원의 반지름은?



- ① 18 ② 19
③ 20 ④ 21
⑤ 22



정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설] 중심이 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$,
즉 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

2) [정답] ④

[해설] 구하는 원의 중심을 $C(a, b)$ 라 하면 점 C 는 선분 AB 의 중점이므로

$$a = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad b = \frac{4+2}{2} = 3$$

원의 중심은 $C(2, 3)$

반지름의 길이는 선분 AC 의 길이와 같으므로

$$AC = \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$$

3) [정답] ②

[해설] 구하는 원의 중심을 $C(a, b)$ 라 하면 점 C 는 선분 AB 의 중점이므로

$$a = \frac{-3+3}{2} = 0, \quad b = \frac{3-5}{2} = -1$$

원의 중심은 $C(0, -1)$

반지름의 길이는 선분 AC 의 길이와 같으므로

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y+1)^2 = 25$$

4) [정답] ①

[해설] $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23$

$$= (x-2)^2 + (y-3)^2 - 36 = 0$$

$$\text{즉 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 6^2$$

원의 중심은 $(2, 3)$, 반지름은 6이므로

따라서 $a=2, b=3, r=6$ 이고

$$a+b+r=11$$

5) [정답] ④

[해설] $x^2 + y^2 - 2x + 6y - k$

$$= (x-1)^2 + (y+3)^2 - k - 10 = 0$$

$$\text{즉 } (x-1)^2 + (y+3)^2 = k+10$$

$k+10 > 0$ 이어야 원이 되므로

$$k > -10$$

6) [정답] ①

[해설] 중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

전개하면

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

7) [정답] ⑤

[해설] 원점의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = 5^2, \text{ 즉 } x^2 + y^2 = 25$$

8) [정답] ④

[해설] $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 36$

$$\text{즉 } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 6^2$$

원의 중심은 $(2, -1)$, 반지름은 6이므로

따라서 $a=2, b=-1, r=6$ 이고

$$a+b+r=7$$

9) [정답] ②

[해설] $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = (x+2)^2 + (y-3)^2 - 12$ 이므로

원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ 의 중심은 $(-2, 3)$

구하는 원의 반지름을 상수 r 이라 하면

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

점 $(-3, 4)$ 를 지나므로 $(-3+2)^2 + (4-3)^2 = r^2$

$$\text{즉 } r^2 = 2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$$

10) [정답] ①

[해설] 구하는 원의 중심을 (a, b) , 반지름을 r 이라 하면 중심 (a, b) 가 직선 $y = -x + 2$ 위에 있으므로 $b = -a + 2$, 즉 $a + b = 2$

한편, x 축과 y 축에 동시에 접하므로 중심 (a, b) 는 직선 $y = x$ 또는 $y = -x$ 위에 있어야 한다.

(i) 직선 $y = x$ 위에 있을 때,

$a = b$ 이고 $a + b = 2$ 이므로

$$a = 1, \quad b = 1$$

(ii) 직선 $y = -x$ 위에 있을 때,

$a = -b$ 이고 $a + b = 2$ 이면 $0 \neq 2$ 이므로

직선 $y = -x$ 위에 있을 수 없다.

따라서 구하는 원의 중심은 $(1, 1)$, 반지름은 1이므로

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

11) [정답] ③

[해설] 원이 원점으로부터 x 축 방향으로 같은 거리만큼 떨어져있는 곳을 지나므로 원의 중심은 y 축 위에 있다.

즉 $a=0$ 이고 원의 중심은 $(0, b)$

원의 중심이 $(0, b)$ 이므로 반지름의 길이는 $b+4$

구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-b)^2 = (b+4)^2$$

이 원이 점 $(8, 0)$ 을 지나므로

$$8^2 + b^2 = (b+4)^2, \quad 8b = 48,$$

$$\text{즉, } b = 6$$

따라서 $a=0, b=6, r=10$ 이고

$$a+b+r=16$$

12) [정답] ⑤

[해설] 중심이 (0, 0) 반지름이 7 이므로 $x^2 + y^2 = 49$

13) [정답] ①

[해설] $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$$

원의 중심의 좌표는 (1, 2)이다.

14) [정답] ①

[해설] $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$ 이므로중심의 좌표 $(a, b) = (4, -3)$ 이고 반지름 $r = 6$

$$\therefore a + b + r = 4 - 3 + 6 = 7$$

15) [정답] ①

[해설] $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 에

세 점 (0, 0), (0, 1), (2, 0)을 대입하면

$$C = 0, 1 + B + C = 0, 4 + 2A + C = 0 \text{ 이므로}$$

$$B = -1, A = -2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A + B - C = -2 - 1 + 0 = -3$$

16) [정답] ①

[해설] 두 점 $A(-1, 1)$, $B(3, 7)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심은 선분 AB 의 중점이므로 (1, 4)이다.반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 이고

$$\overline{AB} = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13} \text{ 이므로 반지름은 } \sqrt{13} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a = 1, b = 4, r^2 = 13 \text{ 이므로}$$

$$a + b + r^2 = 18 \text{ 이다.}$$

17) [정답] ④

[해설] 점 (3, 2) 를 지나고 x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

점 (3, 2)가 원 위의 점이므로

$$(3-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 10r + 13 = 0$$

두 원의 반지름을 각각 A, B 라 하면

$$A + B = 10, AB = 13 \text{ 이므로}$$

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = 74$$

따라서 두 원의 넓이의 합은 74π

18) [정답] ④

[해설] $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 1 + 16 - a$ 가 원을 나타내므로 $17 - a > 0$ 따라서 자연수 a 의 최댓값은 16이다.

19) [정답] ④

[해설] $x^2 + y^2 - 6x - 4y - k^2 + 3k + 17 = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = k^2 - 3k - 4 \text{ 이다.}$$

이 방정식이 원이 되려면 $k^2 - 3k - 4 > 0$

$$k^2 - 3k - 4 = (k-4)(k+1) > 0 \text{ 이므로}$$

$$k > 4 \text{ 또는 } k < -1 \text{ 이다.}$$

20) [정답] ③

[해설] 원의 중심을 P , 원과 x 축이 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하고, 원의 중심 P 에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.원의 반지름의 길이를 r 이라 하면

$$\overline{AP} = r, \overline{PH} = r - 4$$

$$\text{직각삼각형 } PAH \text{에서 } r^2 = (r-4)^2 + 12^2$$

$$\therefore r = 20$$