1-2-2.연속함수의 성질_천재(류희찬)

개념check

[연속함수의 성질]

• 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

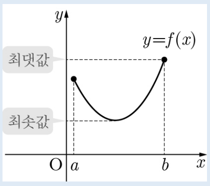
(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

[최대·최소 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

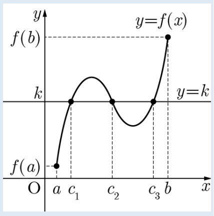


[사잇값의 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$f(c)=k$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



기본문제

[예제]

1. 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2$에 대하여, 다음 중 연속인 구간이 <u>다른</u> 하나는?

① $(f\circ g)(x)$ ② $f(x)+g(x)$

③ $f(x)g(x)$ ④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

⑤ $(g(x))^2$

[문제]

2. 두 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-2$에 대하여, 다음 중 $x=a$에서 불연속인 실수 a가 존재하는 함수는?

① $f(x)-2g(x)$ ② $(g\circ f)(x)$

③ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ④ $\dfrac{f(x)+2g(x)}{f(x)-g(x)}$

⑤ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

[문제]

3. 구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{15}{x+2}$의 최솟값은?

① 1 ② 3

③ 5 ④ 7

⑤ 9

[문제]

4. 함수 $f(x)=x^2-2x$일 때, 상수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 $(3,\ 5)$에 적어도 하나 존재할 때, 가능한 정수 k의 개수는?

① 3 ② 5

③ 7 ④ 9

⑤ 11

[예제]

5. 방정식 $x^3-x^2-5=0$이 열린구간 $(1,\ a)$에서 적어도 하나의 실근을 가질 때, 가능한 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3

③ 4 ④ 5

⑤ 6

[문제]

6. 방정식 $x^4+x^3+x-4=0$이 열린구간 $(a-1,\ a+1)$에서 적어도 하나의 실근을 가질 때, 가능한 모든 자연수 a 값의 합은?

① 3 ② 4

③ 5 ④ 6

⑤ 7

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[스스로 확인하기]

7. 다음 $\square$ 안에 들어갈 말로 알맞지 않은 것은?

(1) 함수 $f(x)$가 $\boxed{㉠}$ $[a,\ b]$에서 $\boxed{㉡}$(이)면 $f(x)$는 이 $\boxed{㉢}$에서 반드시 최댓값과 최솟값 을 갖는다. 이것을 최대·최소 정리라 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq \boxed{㉣}$(이)면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 $\boxed{㉤}$에 적어도 하나 존재한다. 이것을 사잇값의 정리라 한다.

① ㉠ 닫힌구간
② ㉡ 연속
③ ㉢ 닫힌구간
④ ㉣ $f(b)$
⑤ ㉤ 닫힌구간 $[a,\ b]$

[스스로 확인하기]

8. 두 함수 $f(x)=x,\ g(x)=x^2-2x+5$에 대하여, 다음 함수 중 연속인 구간이 다른 하나는?

① $f(x)-g(x)$
② $f(x)g(x)$
③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$
⑤ $\{g(x)\}^2$

[스스로 확인하기]

9. 구간 $[1,5]$에서 함수 $f(x)=-x^2+3+\dfrac{12}{x+1}$의 최댓값은?

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

[스스로 확인하기]

10. 방정식 $x^3+x^2-13=0$은 열린구간 $(a,\ a+1)$에서 적어도 하나의 실근을 가질 때, 가능한 자연수 a의 최솟값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

11. 연속함수 $f(x)$가

$f(0)=-1,\ f(1)=4,\ f(2)=3,$
$f(3)=1,\ f(4)=2,\ f(5)=6$

를 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=x$는 열린구간 $(0,\ 5)$에서 적어도 a개의 실근을 갖는다. 음이 아닌 정수 a의 값은?

① 0
② 1
③ 2
④ 3
⑤ 4

[스스로 확인하기]

12. 어떤 자동차가 시속 $50\,\mathrm{km/h}$의 속력으로 출발선을 떠난 후 1시간동안 $50\,\mathrm{km}$를 달려 도착선에 왔을 때의 속력을 재어 보니 똑같이 $50\,\mathrm{km/h}$였다. 출발선을 떠난 후 30분 뒤에 잰 속력이 $60\,\mathrm{km/h}$일 때, 이 자동차가 출발선에서 출발하는 순간부터 도착선에 왔을 때의 순간까지 속력이 $50\,\mathrm{km/h}$인 순간은 적어도 k번이다. 음이 아닌 정수 k의 값은? (단, 자동차는 정지하지 않았고, 자동차의 속력은 연속적으로 변하였다.)

① 0
② 1
③ 2
④ 3
⑤ 4

[스스로 마무리하기]

13. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=1,\ f(2)=-1$
(나) 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이다.

<보기>의 방정식 중에서 열린구간 $(0,\ 2)$에 반드시 실근이 존재하는 방정식만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)-x=0$

ㄴ. $f(x)+x^2=0$

ㄷ. $f(x)+\dfrac{1}{x+1}=0$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 마무리하기]

14. 함수 $f(x)=\begin{cases} x-3 & (x>3) \\ 0 & (-1\le x\le 3) \\ x^2 & (x<-1) \end{cases}$일 때, 함수 $f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되게 하는 함수 $g_k(x)$를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $g_1(x)=x^2-2x-3$

ㄴ. $g_2(x)=|x|-1$

ㄷ. $g_3(x)=|x-3|+|x+1|$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] ④는 $x=-1$에서 불연속이고, 나머지는 실수 전체에서 연속이다.

2) [정답] ⑤
[해설] ⑤는 $x=2$에서 불연속이다.

3) [정답] ②
[해답] 구간 $[1, 3]$에서 x의 값이 증가함에 따라 함수 $f(x)$의 함숫값은 점점 작아지므로
최솟값은 $f(3)=\frac{15}{5}=3$

4) [정답] ⑤
[해답] $f(3)=9-6=3$, $f(5)=5^2-10=15$
이므로, $3<k<15$ 를 만족한다.
가능한 정수 k의 개수는 11

5) [정답] ②
[해답] $f(x)=x^3-x^2-5$라 할 때, $f(1)=-5<0$
따라서 $f(a)=a^3-a^2-5>0$이어야 한다.
$f(2)=8-4-5<0$
$f(3)=27-9-5>0$
이므로 가능한 자연수 a의 최솟값은 3이다.

6) [정답] ①
[해답] $f(x)=x^4+x^3+x-4$라 할 때,
$f(0)=-4$, $f(1)=-1$, $f(2)=22>0$
이므로 가능한 모든 자연수 a는 1, 2이다.
$\therefore 1+2=3$

7) [정답] ⑤
[해답] ㉤에는 열린구간 (a, b)가 들어가야 한다.

8) [정답] ④
[해답] ① $f(x)-g(x)=-x^2+3x-5$는 모든 실수 x에서 연속이다.
② $f(x)g(x)=x^3-2x^2+5x$는 모든 실수 x에서 연속이다.
③ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x^2-2x+5}$는 모든 실수 x에서
$x^2-2x+5>0$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
④ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-2x+5}{x}$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 불연속이다.
⑤ $\{g(x)\}^2=x^4-4x^3+14x^2-20x+25$는 모든 실수 x에서 연속이다.

9) [정답] ③
[해답] 구간 $[1, 5]$에서 x의 값이 증가함에 따라 함수 $y=-x^2+3$과 $y=\frac{12}{x+1}$의 함숫값은 점점 작아지므로
최댓값은 $f(1)=-1+3+\frac{12}{2}=8$

10) [정답] ②
[해답] $f(x)=x^3+x^2-13$이라 할 때,
$f(1)=-11<0$, $f(2)=-1<0$
$f(3)=27+9-13=23>0$ 이므로
가능한 a의 최솟값은 2

11) [정답] ④
[해설] $g(x)=f(x)-x$라 하면
연속함수의 성질에 의하여 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다. 이때
$g(0)=-1<0$, $g(1)=3>0$, $g(2)=1>0$,
$g(3)=-2<0$, $g(4)=-2<0$, $g(5)=1>0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$의 해가 열린구간 $(0,\ 1)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$에 각각 적어도 하나씩 존재한다. 따라서 방정식 $f(x)=x$는 열린구간 $(0, 5)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

12) [정답] ④
[해설] 자동차가 출발선을 떠난지 t시간 후의 속력을 $f(t)\,\text{km/h}$로 놓으면 함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.
자동차가 출발하는 순간과 도착하는 순간은 속력이 $50\,\text{km/h}$이므로 $k\geq 2$이다.
1시간동안 $50\,\text{km}$를 달렸다는 이야기는 평균속도가 $50\,\text{km/h}$라는 뜻이므로,
속력이 $60\,\text{km/h}$인 순간 b가 존재한다면
반대로 속력이 $50\,\text{km/h}$보다 작은 순간 c가 존재해야 한다. 사잇값의 정리에 따르면
열린구간 $(b,\ c)$ 또는 $(c,\ b)$ 안에
속력이 $50\,\text{km/h}$인 순간이 존재해야 한다.
즉, 속력이 $50\,\text{km/h}$인 순간은
적어도 3번 존재하므로, $k=3$이다.

13) [정답] ④
[해설] ㄱ. $g(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고
$g(0)=1>0$, $g(2)=-3<0$
이므로 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
ㄴ. $g(x)=f(x)+x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고
$g(0)=1>0$, $g(2)=3>0$
이므로 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다고 보기 어렵다.
ㄷ. $g(x)=f(x)+\frac{1}{x+1}$이라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고
$g(0)=2>0$, $g(2)=-\frac{2}{3}<0$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

이므로 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이상에서 실근이 열린구간 $(0, 2)$에 반드시 존재하는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

14) [정답] ③
[해설] 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고
$g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.
ㄱ. $\lim_{x\to-1}f(x)g_1(x)=f(-1)g_1(-1)=0$이므로 함수 $f(x)g_1(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
ㄴ. $\lim_{x\to-1}f(x)g_2(x)=f(-1)g_2(-1)=0$이므로 함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
ㄷ. $g_3(-1)=4\neq0$이므로 함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=-1$에서 연속이 아니다.
이상에서 구하는 함수 $g_k(x)$는 ㄱ, ㄴ이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125