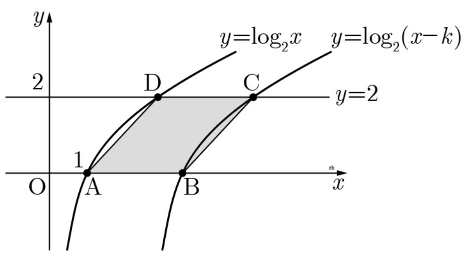
단원 ISSUE

이 단원에서는 **로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동에 대한 문제, 로그함수의 역함수가 지수함수임을 이용하는 문제** 등이 자주 출제되며 응용문제의 경우, 고1에서 학습한 내용을 바탕으로 해결할 수 있습니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

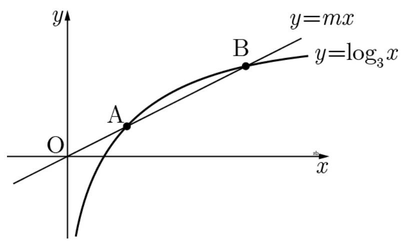
1. **다음 그림은 로그함수 $y=\log_2 x$와 $y=\log_2(x-k)$이고, 두 함수와 x축이 만나는 점을 각각 점 A, B라 하고 $y=2$와 만나는 점을 각각 점 D, C라 할 때, 평행사변형 $ABCD$의 넓이가 8이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하면?**



① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

[스스로 확인하기]

2. **아래의 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$와 직선 $y=mx$가 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\overline{OA}:\overline{OB}=1:3$을 만족한다. 이 때, 상수 m의 값을 구하면?**



① $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
② $\dfrac{1}{3}$
③ $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

[스스로 확인하기]

3. **함수 $y=\log_4(2x-p)+1$의 점근선이 $x=3$이고, x절편이 q일 때, pq의 값을 구하면?**

① $\dfrac{65}{4}$
② $\dfrac{35}{2}$
③ $\dfrac{75}{4}$
④ 20
⑤ $\dfrac{85}{4}$

[스스로 확인하기]

4. **로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프의 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?**

① y축과 만나지 않는다.
② 점 $(1,0)$을 지난다.
③ 점근선의 방정식은 $x=0$이다.
④ 제 3사분면을 지난다.
⑤ 감소함수이다.

[스스로 마무리하기]

5. $y=\dfrac{10^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{2}+2$를 $y=x$에 대하여 대칭이동 한 그래프는 $y=\log 2x$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 이동시킨 함수이다. $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3　④ $\dfrac{7}{2}$　⑤ 4

[스스로 확인하기]

6. 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다. $f(x)=2^{x+k}$일 때, $h(x)=f(2g(x))$로 정의한다. $h(4)$가 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 k값의 합을 구하면?

① 1　② 3　③ 6　④ 10　⑤ 15

[스스로 확인하기]

7. 함수 $y=\log 10x$에 대해 옳은 것만을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 함수의 y절편은 $\dfrac{1}{10}$이다.

ㄴ. $x_1, x_2>0$ 이면 $\dfrac{\log 10x_1-\log 10x_2}{x_1-x_2}>0$ 이다.

ㄷ. 임의의 두 실수 $x_1>0, 0<x_2<\dfrac{1}{10}$에 대하여

$\dfrac{\log 10\left(x_1+\dfrac{25}{x_1}\right)}{x_1+\dfrac{25}{x_1}}>\dfrac{\log 10x_2}{x_2}$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[스스로 확인하기]

8. 정의역이 $\{x|1\le x\le 7\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(10-x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① $2\log_2 15$　② $2\log_2 10$　③ $-2\log_2 10$　④ $-2\log_2 15$　⑤ 34

[스스로 마무리하기]

9. 아래 함수의 최솟값을 구하면?

$y=\left\{\log_2(4^x+4^{-x+1})\right\}^2+2\log_2(4^{x-1}+4^{-x})-5$

① -8　② -5　③ -2　④ -1　⑤ 4

[스스로 확인하기]

10. 부등식 $-2\log_{\frac{1}{2}}a+\log_3 b^2\le 4$을 만족하는 자연수 a, b에 대해 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하면?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

[스스로 마무리하기]

11. $n\le 106$인 자연수 n에 대하여 $x(\log n)^2+x\log n^x+2\le 0$이 실근을 갖기 위한 n의 개수를 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

[스스로 확인하기]

12. $(\log x-m)\log x=k$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta$의 값이 최소 일 때 k의 값이 -4이다. m의 값을 구하면?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[스스로 마무리하기]

13. 물에 섞여 있는 부산물들은 여과기를 한번 통과하면 처음양의 36%씩 감소한다. 부산물들이 처음양의 0.02%이하로 줄이기 위해서 여과기를 최소한 몇 번 이상 통과시켜야 하는지 구하면? ($\log 2=0.3$)

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

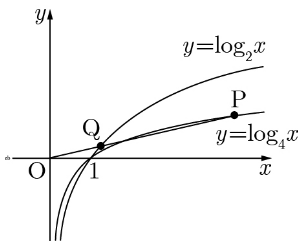
[스스로 확인하기]

14. 어느 바이러스는 한 시간마다 일정비율로 증식을 한다. 이 바이러스는 10시간 후에 개체수가 4배로 늘어난다. 바이러스의 개체수가 10배 이상이 되는 것은 번식 이후 최소 n시간 이후이다. 자연수 n의 값을 구하면? ($\log 2=0.3$)

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

실전문제

15. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\log_4 x$의 그래프 위의 한 점 P에 대하여 선분 OP가 함수 $g(x)=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 OP을 $1:3$로 내분할 때, 점 P의 y좌표는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{10}{7}$ ④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

16. 두 함수 $y=\log_3 9x$, $y=\log_3 \frac{x}{9}$의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형을 A라 하자. 도형 A에 포함된 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는? (단, 도형 A는 경계선을 포함한다.)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 12 ⑤ 14

17. 함수 $f(x)=\log_a(x^2-2x+5)\ (0<x\le a)$이 최솟값을 갖고, 최댓값을 갖지 않도록 하는 양수 a의 범위를 $p<a<q$라 할 때, $p+q$의 값은?

① 7 ② 6 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

18. 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프가 로그함수 $y=\log_2 2x$, $y=|\log_2 8x|$의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

19. 방정식 $x^{\log x}-\frac{1}{100}x^4=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① 10^3 ② 10^4 ③ 10^5 ④ 10^6 ⑤ 10^7

20. 어떤 지역의 먼지농도에 따른 대기오염 정도는 여과지에 공기를 여과시켜 헤이즈계수를 계산하여 판별한다. 광화학적 밀도가 일정하도록 여과지 상의 빛을 분산시키는 고형물의 양을 헤이즈계수 H, 여과지 이동거리를 $L(\mathrm{m})(L>0)$, 여과지를 통과하는 빛 전달률을 $S(0<S<1)$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$H=\frac{k}{L}\log\frac{1}{S}$(단, k는 양의 상수이다.)

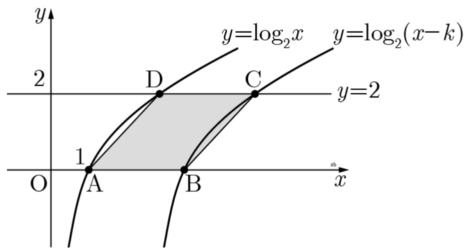
두 지역 A, B의 대기오염 정도를 판별할 때, 각각의 헤이즈 계수를 H_A, H_B, 여과지 이동거리를 L_A, L_B, 빛 전달률을 S_A, S_B라 하자. $2H_A=H_B$, $2L_A=\sqrt{3}L_B$일 때, $S_A=(S_B)^p$을 만족시키는 실수 p의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{5}$
② $\frac{\sqrt{3}}{4}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\sqrt{3}$
⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

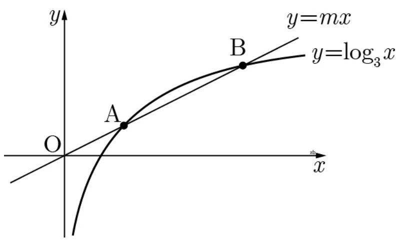
정답 및 해설

1) [정답] ②
[해설]



위 그림에서 A와 D의 좌표는 $A(1,0), D(4,2)$이다.
평행사변형 $ABCD$의 넓이가 8이고, 높이가 2이므로 밑변의 길이 선분 AB의 길이는 4이다.
따라서 B의 좌표는 $B(5,0)$ 이다.
$0=\log_2(5-k)$ 이므로 $k=4$가 된다.

2) [정답] ①
[해설]



그림에서 $\overline{OA}:\overline{OB}=1:3$을 만족한다.
따라서 점 $A(a,ma)$라고 하면 점 B의 좌표는 $B(3a,3ma)$이다. 점 A,B는 $y=\log_3 x$를 지나므로 각각 x,y값에 대입하면
$ma=\log_3 a$, $3ma=\log_3 3a=\log_3 a+1=ma+1$
따라서 $ma=\frac{1}{2}$이 된다.
$ma=\frac{1}{2}=\log_3 a$로 $a=\sqrt{3}$ 이다.
따라서 $m=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

3) [정답] ③
[해설] 함수 $y=\log_4(2x-p)+1$의 점근선은
$x=\frac{p}{2}$이므로 $\frac{p}{2}=3$으로 $p=6$을 만족한다.
$y=\log_4(2x-6)+1$의 x절편은 q이므로
$0=\log_4(2q-6)+1$이고, $2q-6=\frac{1}{4}$이므로
$q=\frac{25}{8}$ 이다. 따라서 $pq=\frac{75}{4}$가 된다.

4) [정답] ④
[해설] ④ 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 제 1,4사분면을 지난다.

5) [정답] ②
[해설] $y=\frac{1}{2}\times 10^{x-\frac{1}{2}}+2$ 를 정리하면
$y-2=10^x\times\frac{1}{2\sqrt{10}}$, $2\sqrt{10}(y-2)=10^x$
이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 함수는
$2\sqrt{10}(x-2)=10^y$, 양변에 로그를 취하면
$y=\log 2\sqrt{10}(x-2)$ 이고,
한편, 함수 $y=\log 2x$를 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 이동시킨 함수는 $y=\log 2(x-a)+b$가 된다.
따라서 $y=\log 2(x-a)+b=\log 2\sqrt{10}(x-2)$이다.
$y=\log 2\sqrt{10}(x-2)=\log\sqrt{10}+\log 2(x-2)$
$=\log 2(x-2)+\frac{1}{2}$이므로 $a=2, b=\frac{1}{2}$이고,
$a+b=\frac{5}{2}$ 이다.

6) [정답] ④
[해설] $f(x)=2^{x+k}$ 이므로 역함수 $g(x)$는
$g(x)=\log_2 x-k$ 라고 표현할 수 있다.
$h(x)=f(2g(x))=2^{2\log_2 x-2k+k}=2^{2\log_2 x-k}$
$=2^{\log_2\frac{x^2}{2^k}}=\frac{x^2}{2^k}$ 이고,
$h(4)=\frac{16}{2^k}$가 자연수이기 위한 자연수 k는
1,2,3,4 이다.

7) [정답] ④
[해설] ㄱ. $y=\log 10x$의 y절편은 존재하지 않는다.
ㄴ. $\frac{\log 10x_1-\log 10x_2}{x_1-x_2}$는 두 점 $(x_1,\log 10x_1),(x_2,\log 10x_2)$를 지나는 직선의 기울기
이고, 그래프를 그려 관찰해보면 $y=\log 10x$ 위의 어떤 두 점을 잡아도 기울기가 양수이다.
따라서 $\frac{\log 10x_1-\log 10x_2}{x_1-x_2}>0$ 이다.
ㄷ. $\frac{\log 10(x_1+\frac{25}{x_1})}{x_1+\frac{25}{x_1}}$는 두 점 $(0,0)$과 $(x_1+\frac{25}{x_1},\log 10(x_1+\frac{25}{x_1}))$을 지나는 직선의 기울기
이고, $\frac{\log 10x_2}{x_2}$는 $(0,0)$과 $(x_2,\log 10x_2)$를 지나는 직선의 기울기이다.
$x_1>0$이므로 산술-기하평균의 관계에 의하여

$x_1+\dfrac{25}{x_1}\ge 10$ 이다.

함수 $y=\log 10x$의 그래프에서 관찰하면

$X\ge 10$일 때, $(0,0)$과 $(X,\log 10X)$ 를 지나는

직선의 기울기는 항상 양수이고,

$0<x_2<\dfrac{1}{10}$일 때, $(0,0)$과 $(x_2,\log 10x_2)$를 지나

는

직선의 기울기는 항상 음수이므로

$$\frac{\log 10\left(x_1+\frac{25}{x_1}\right)}{x_1+\frac{25}{x_1}}>0>\frac{\log 10x_2}{x_2},$$

즉, $\dfrac{\log 10\left(x_1+\frac{25}{x_1}\right)}{x_1+\frac{25}{x_1}}>\dfrac{\log 10x_2}{x_2}$이다.

8) [정답] ④

[해설] 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(10-x)$를 정리하면

$y=-\log_2 x(10-x)=-\log_2\{-(x-5)^2+25\}$ 이다.

즉, $1\le x\le 7$에서 $-(x-5)^2+25$의 최댓값은 25,

최솟값은 9가 되므로 $y=-\log_2\{-(x-5)^2+25\}$의

최솟값은 $-\log_2 25$, 최댓값은 $-\log_2 9$가 된다.

따라서 $M+m=-2\log_2 15$ 이다.

9) [정답] ④

[해설] $y=\{\log_2(4^x+4^{-x+1})\}^2+2\log_2(4^{x-1}+4^{-x})-5$

위의 식에서 $4^{x-1}+4^{-x}=t$로 치환을 하면

$\dfrac{4^x}{4}+\dfrac{1}{4^x}\ge 2\sqrt{\dfrac{4^x}{4}\times\dfrac{1}{4^x}}=1$ 으로 $t\ge 1$ 이다.

따라서 $y=\{\log_2(4t)\}^2+2\log_2(t)-5$

$=\{\log_2(t)+2\}^2+2\log_2(t)-5$

$=\{\log_2(t)\}^2+4\log_2(t)+4+2\log_2(t)-5$

$=\{\log_2(t)\}^2+6\log_2(t)-1$

$\log_2 t=a$로 치환을 하면 $t\ge 1$이므로 $a\ge 0$이다.

$a^2+6a-1=(a+3)^2-10$ 이므로

$a=0$일 때, 최솟값 -1을 가진다.

10) [정답] ③

[해설] $-2\log_{\frac{1}{2}}a+\log_3 b^2=\log_2 a^2+\log_3 b^2$

$=2(\log_2 a+\log_3 b)$

$2(\log_2 a+\log_3 b)\le 4$을 만족하는 순서쌍 (a,b)는

$(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,9)$

$(2,1),(2,2),(2,3)$

$(3,1),(4,1)$로 총 14개이다.

11) [정답] ④

[해설] $x(\log n)^2+x\log n^x+2$

$=x(\log n)^2+x^2\log n+2\le 0$ 이고,

이 부등식이 실근을 갖기 위해서는

$x^2\log n+x(\log n)^2+2=0$의 판별식 D에 대하여

$D=(\log n)^4-8\log n\ge 0$ 이어야 한다.

$n=1$일 때 $D=0$이므로 부등식이 성립한다.

$n>1$일 때 $(\log n)^3\ge 8$에서 $\log n\ge 2$,

따라서 $n\ge 100$ 이고,

$100\le n\le 106$ 또는 $n=1$인 자연수 n의 개수는

8개이다.

12) [정답] ②

[해설] $(\log x-m)\log x=k$

$\log x=t$로 치환을 하면 주어진 방정식은 t에 대

한

이차방정식이다. $t^2-mt-k=0$ 의 두 근은

$\log_2\alpha$, $\log_2\beta$ 이다.

근과 계수에 의해 $\log_2\alpha+\log_2\beta=m$,

$\log_2\alpha\times\log_2\beta=-k$ 를 만족한다.

따라서 $\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=m$ 이므로

$\alpha\beta=2^m$이다. $\alpha+\beta\ge 2\sqrt{\alpha\beta}=2^{\frac{m}{2}+1}$이고,

$\alpha=\beta=2^{\frac{m}{2}}$ 일 때, 최솟값을 가진다.

$\alpha+\beta$가 최소일 때, $k=-\log_2\alpha\times\log_2\beta$

$=-\left(\dfrac{m}{2}\right)^2=-4$ 이므로 $m=\pm 4$ 이다.

13) [정답] ③

[해설] 처음 양을 a라고 하고 여과기를 한 번

통과하면 $0.64a$의 양으로 바뀐다.

따라서 n번 여과기를 통과하면 $(0.64)^n a$가 된다.

따라서 $(0.64)^n a\le\dfrac{2}{10000}a$ 를 만족하는 n의

최솟값을 구하면 된다. 양변에 log를 취하면

$n\log(0.64)\le\log\dfrac{2}{10000}$

$n\log\dfrac{2^6}{100}\le\log\dfrac{2}{10000}$

$n(6\log 2-2)\le\log 2-4$, $\log 2=0.3$이므로

$-0.2n\le -3.7$에서 $n\ge 18.5$ 이다.

n은 자연수이므로 최소 n의 값은 19이다.

14) [정답] ①

[해설] 처음 바이러스의 개체수를 a라 하고, 한 시간

에 t배씩 증식한다고 하면 $at^{10}=4a$ 이고, 양변을

a로 나누고 t에 대해 정리하면 $t=2^{\frac{1}{5}}$ 이다.

n시간 이후의 개체 수는 $a\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^n$ 이므로

$10a\le a(2^{\frac{1}{5}})^n$ 인 n의 최솟값을 구하면 된다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$2^{\frac{1}{5}n} \geq 10$에서 양변에 log를 취하면

$\frac{1}{5}n \times \log 2 \geq 1$ 이고, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산하면

$\frac{1}{5}n \geq \frac{1}{0.3}$, $n \geq \frac{50}{3}$ 이다.

따라서 최소 17시간 이후부터 바이러스의 개체수가 10배 이상이 된다.

15) [정답] ①

[해설] $O(0,\ 0)$, $P(a,\ \log_4 a)$라 하면

$Q\left(\frac{a}{4},\ \frac{\log_4 a}{4}\right)$이고,

점 Q가 함수$y=\log_2 x$의 그래프 위에 있으므로

$\frac{\log_4 a}{4} = \log_2 \frac{a}{4}$, $a^{\frac{1}{8}} = \frac{a}{4}$, $4 = a^{\frac{7}{8}}$에서 $a = 4^{\frac{8}{7}}$

$\therefore \log_4 a = \frac{8}{7}$

16) [정답] ①

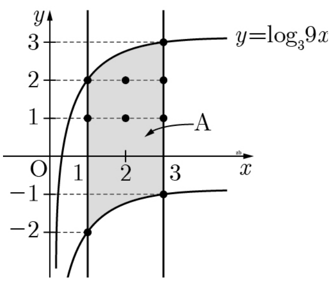
[해설] $y=\log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = 2 + \log_3 x$는

$y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프.

$y=\log_3 \frac{x}{9} = \log_3 x - \log_3 9 = \log_3 x - 2$는

$y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프.

두 그래프와 도형 A를 좌표평면 위에 나타내면



도형 A에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)$

17) [정답] ④

[해설] $x^2-2x+5=t$로 치환하자.

$t=(x-1)^2+4$

(i) $a<1$일 때

$0<x\leq a$에서 $a^2-2a+5 \leq t < 5$이다.

$y=\log_a(x^2-2x+5)=\log_a t$

이 함수는 감소함수이므로

$a^2-2a+5 \leq t < 5$에서 최솟값을 갖지 않는다.

따라서 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a>1$일 때

로그함수 $y=\log_a t$가

최댓값을 갖지 않아야 하므로 $1<a<2$이다.

$0<x\leq a$에서 $4\leq t<5$이다.

로그함수 $y=\log_a t$는 증가함수이므로

$4\leq t<5$에서 최솟값을 갖고

최댓값은 갖지 않는다.

(i), (ii)에서

a값의 범위는 $1<a<2$이므로 $p=1$, $q=2$이다.

$\therefore p+q=3$

18) [정답] ③

[해설] $\log_{\frac{1}{2}}\alpha = \log_2 2\alpha$

$-\log_2\alpha = 1+\log_2\alpha$

$\log_2\alpha = -\frac{1}{2}$이므로 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}}\beta = |\log_2 8\beta| = |3+\log_2\beta|$에서

$3+\log_2\beta<0$이면

위 식은 $-\log_2\beta = -3-\log_2\beta$ 가 되어 모순이다.

즉, $\log_2\beta \geq -3$이고

위 식은 $-\log_2\beta = 3+\log_2\beta$

$\log_2\beta = -\frac{3}{2}$에서 $\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 $\alpha+\beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

19) [정답] ②

[해설] $x^{\log x} = \frac{1}{100}x^4$에서

로그의 진수 조건에 의해 $x>0$이다.

즉, 방정식의 두 실근인 α, β도 양수이다.

$x^{\log x} = \frac{1}{100}x^4$의 양변에 상용로그를 취하면

$(\log x)^2 = 4\log x - 2$이므로

$\log x = X$라 하면 $X^2-4X+2=0$이다.

이때 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$가 된다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의해

$\log\alpha + \log\beta = \log\alpha\beta = 4$이다. $\therefore \alpha\beta = 10^4$

20) [정답] ②

[해설] $H_A = \frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}$, $H_B = \frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$이다.

이때 $H_A = \frac{1}{2}H_B$, $L_A = \frac{\sqrt{3}}{2}L_B$이므로

이를 $H_A = \frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}$식에 대입하면

$H_B = \frac{4k}{\sqrt{3}L_B}\log\frac{1}{S_A}$이다.

따라서 $\frac{4k}{\sqrt{3}L_B}\log\frac{1}{S_A} = \frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$이므로

식을 정리하면 $S_A = (S_B)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$이다. $\therefore p = \frac{\sqrt{3}}{4}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574