



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-13

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

## 01 / 속도와 거리

(1) 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

: 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v(t)$ 이고 시각  $t=a$ 에서의 점 P의 위치가  $x_0$ 일 때① 시각  $t$ 에서의 점 P의 위치  $x$ 

$$\Leftrightarrow x = x_0 + \int_a^t v(t) dt$$

③ 시각  $t=a$ 에서  $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 

$$\Leftrightarrow s = \int_a^b |v(t)| dt$$

(2) 평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

: 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 일 때, 시각  $t=a$ 에서  $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$\Leftrightarrow s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dx$$

■ 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v(t) = e^t - 1$ 일 때, 다음 물음에 답하라.

1. 시각  $t$ 에서의 점 P의 위치2. 시각  $t=0$ 에서  $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리

■ 직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v(t) = \cos t$ 라고 한다. 다음 물음에 답하라.

3.  $t=0$ 부터  $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 점 P의 위치4.  $t=0$ 부터  $t=\pi$ 까지 점 P까지 움직인 거리

■ 직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v(t) = \ln t$ 라고 한다. 다음 물음에 답하라.

5.  $t=\frac{1}{e}$ 부터  $t=1$ 까지 점 P의 위치6.  $t=1$ 에서  $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리7.  $t=\frac{1}{e}$ 부터  $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리

■ 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가 다음과 같을 때, 주어진 시각에서 점 P가 움직인 거리  $s$ 를 구하라.

8.  $x=2t^2$ ,  $y=-\frac{3}{2}t^2+1$  [ $t=0$ 에서  $t=3$ 까지]9.  $x=-3t$ ,  $y=4t-1$  [ $t=0$ 에서  $t=3$ 까지]10.  $x=t-\frac{1}{2}t^2$ ,  $y=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$  [ $t=0$ 에서  $t=3$ 까지]

11.  $x = t^2, y = 2t^2$  [ $t=0$ 에서  $t=3$ 까지]

12.  $x = 3t^2 + 1, y = t^3 + 1$  [ $t=0$ 에서  $t = \sqrt{5}$ 까지]

13.  $x = 3t - 2, y = 4t + 1$  [ $t=1$ 에서  $t=2$ 까지]

14.  $x = t - \frac{1}{3}t^3, y = t^2$  [ $t=0$ 에서  $t=3$ 까지]

15.  $x = 3\sin t, y = 1 - 3\cos t$  [ $t=0$ 에서  $t=2$ 까지]

16.  $x = 1 - \cos t, y = 2 + \sin t$  [ $t=0$ 에서  $t=2$ 까지]

17.  $x = t - t^2, y = \frac{4\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}$  [ $t=0$ 에서  $t=2$ 까지]

18.  $x = \cos 2t, y = -\sin 2t + 1$  [ $t=0$ 에서  $t=2$ 까지]

19.  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$  [ $t=0$ 에서  $t=2$ 까지]

20.  $x = \sqrt{2}t^2 + 1, y = \frac{1}{3}t^3 - 2t$  [ $t=1$ 에서  $t=2$ 까지]

21.  $x = \ln t, y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$  [ $t=1$ 에서  $t=2$ 까지]

22.  $x = 2t^2 - 1, y = \frac{3}{2}t^2 - 1$  [ $t=1$ 에서  $t=3$ 까지]

23.  $x = e^t + e^{-t}, y = 2t$  [ $t=0$ 에서  $t = \ln 2$ 까지]

24.  $x = 2\sqrt{2}t, y = e^t + 2e^{-t}$   
[ $t = \ln 2$ 에서  $t = \ln 4$ 까지]

25.  $x = \sin t, y = \cos t$  [ $t=1$ 에서  $t=5$ 까지]

26.  $x = 3\sin t + 4\cos t, y = 4\sin t - 3\cos t$   
 $[t=0\text{에서 } t=\pi\text{까지}]$

27.  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$   $[t=0\text{에서 } t=3\text{까지}]$

28.  $x = \sqrt{3}e^t \cos t, y = -\sqrt{3}e^t \sin t$   
 $[t=0\text{에서 } t=\frac{\pi}{2}\text{까지}]$

29.  $x = \cos^3 \frac{t}{2}, y = \sin^3 \frac{t}{2}$   $[t=0\text{에서 } t=\frac{2\pi}{3}]$

30.  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$   
 $[t=0\text{에서 } t=\pi\text{까지}]$

■ 다음 물음에 답하여라.

31. 좌표평면 위를 움직이는 점  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = 1 + 4t^2, y = 1 + 2t^3$ 일 때,  $t=0$ 에서  $t=1$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리는  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하여라. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.)

32. 좌표평면 위를 움직이는 점  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 이다.  $t=0$ 에서  $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리가 3일 때, 양수  $a$ 의 값을 구하여라.

33. 좌표평면 위를 움직이는 점  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = \frac{1}{2}t^2 - t, y = \frac{4}{3}t\sqrt{t}$ 이다.  $t=0$ 에서  $t=a$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리가 4일 때, 양수  $a$ 의 값을 구하여라.

34. 좌표평면 위를 움직이는 점  $P(x, y)$ 의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x = 2t, y = \frac{4}{3}(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ 으로 나타난다.  
 $t=0$ 에서  $t=a$ 까지 점  $P$ 의 이동거리가  $\frac{10}{3}$ 라고 할 때,  $t=a$ 에서의 속력을 구하여라.

35. 좌표평면 위를 움직이는 점  $P(x, y)$ 의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x = k \cos^2 t, y = k \sin^2 t$ 이다. 점  $P$ 가 시각  $t=0$ 에서 시각  $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 움직인 거리가  $5\sqrt{2}$ 일 때, 양수  $k$ 의 값을 구하여라.

## 02 / 곡선의 길이

(1) 곡선  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$  ( $a \leq t \leq b$ )의 겹치는 부분이 없을 때, 곡선의 길이를  $l$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\Rightarrow l &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt\end{aligned}$$

(2) 곡선  $y=f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ )의 길이를  $l$ 이라 하면

$$\Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

■ 다음 곡선의 길이를 구하여라.

36.  $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 4$ )

37.  $y = \sqrt{x^3}$  ( $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ )

38.  $y = x\sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

39.  $y = 2\sqrt{x^3}$  ( $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$ )

40.  $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$  ( $0 \leq x \leq 6$ )

41.  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$  ( $1 \leq x \leq 3$ )

42.  $y = \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$  ( $1 \leq x \leq 3$ )

43.  $y = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2}$  ( $3 \leq x \leq 6$ )

44.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )

45.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

46.  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$  ( $1 \leq x \leq e$ )

47.  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x + 5$  ( $1 \leq x \leq e$ )

48.  $y = \ln(1-x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$

49.  $y = \ln(x^2-1) \quad (2 \leq x \leq 4)$

50.  $y = \ln(9-9x^2) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$

▣ 다음 주어진 구간에서 곡선의 길이를 구하여라.

51.  $x = 3\sqrt{t}, y = (t+2)\sqrt{t+2} \quad (0 \leq t \leq 4)$

52.  $x = 3t^2, y = 1-t^2 \quad (0 \leq t \leq 2)$

53.  $x = \ln t, y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (1 \leq t \leq 2)$

54.  $x = \ln t, y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad \left(\frac{1}{e} \leq t \leq e\right)$

55.  $x = 2\sin t, y = 1-2\cos t \quad (0 \leq t \leq \pi)$

56.  $x = r\cos t, y = r\sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$

57.  $x = e^{-t}\sin t, y = e^{-t}\cos t \quad (0 \leq t \leq \pi)$

58.  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \pi)$

▣ 다음 물음에 답하여라.

59.  $0 \leq x \leq a$ 에서 곡선  $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 의 길이가  
12일 때, 양수  $a$ 의 값을 구하여라.

60. 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  
 $f'(x) = x\sqrt{x^2-2}$ 이다.  $1 \leq x \leq a$ 에서 곡선  
 $y = f(x)$ 의 길이가  $\frac{20}{3}$ 가 되도록 하는 양수  $a$ 의 값  
을 구하여라.

61. 곡선  $f(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$  ( $0 \leq x \leq a$ )의 길이가  $\frac{38}{3}$ 일 때,  $a$ 의 값을 구하여라.

62.  $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ 에서 곡선  $y = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{2} dt$ 의 길이를  $l$ 이라고 하면  $l = \frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하여라. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수)

63. 매개변수  $t$ 로 나타내어진 곡선  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$  ( $0 \leq t \leq a$ )의 길이가  $4 - \sqrt{2}$ 일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하여라.

64.  $x = 1$ 에서  $x = 2$ 까지 곡선  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ 의 길이를 구하면  $p + q \ln 2$ 이다.  $20(p+q)$ 의 값을 구하여라. (단,  $p, q$ 는 유리수)



## 정답 및 해설

1)  $e^t - t - 1$

 $\Rightarrow t=0$ 에서의 위치가 0이므로

구하는 위치는

$$0 + \int_0^t (e^t - 1)dt = [e^t - t]_0^t \\ = e^t - t - 1$$

2)  $e^4 - 5$

 $\Rightarrow$  구하는 거리는

$$\int_0^4 |e^t - 1| dt = \int_0^4 (e^t - 1) dt \\ = [e^t - t]_0^4 \\ = e^4 - 5$$

3) 2

 $\Rightarrow t=0$ 일 때 위치가 1이므로

구하는 위치는

$$1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} v dt = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1 + [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = 1 + \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 2$$

4) 2

 $\Rightarrow t=0$ 부터  $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\pi} |v| dt = \int_0^{\pi} |\cos t| dt \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t) dt \\ = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ = \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left( \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ = 1 - (-1) = 2$$

5)  $\frac{2}{e} - 2$

 $\Rightarrow$  먼저 부분적분법을 이용하여  $\int \ln t dt$ 를 구해보자. $f(t) = \ln t$ ,  $g'(t) = 1$ 로 놓으면 $f'(t) = \frac{1}{t}$ ,  $g(t) = t$ 이므로

$$\int \ln t dt = t \ln t - \int \left( t \times \frac{1}{t} \right) dt = t \ln t - t + C$$

 $t = \frac{1}{e}$ 일 때 위치는 -1이고,

$$-1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 v dt = -1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln t dt$$

$$= -1 + [t \ln t - t]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{2}{e} - 2$$

6) 1

$$\Rightarrow \int_1^e \ln t dt = [t \ln t - t]_1^e = (e - e) - (-1) = 1$$

7)  $2 - \frac{2}{e}$

 $\Rightarrow$  먼저 부분적분법을 이용하여  $\int \ln t dt$ 를 구해보자. $f(t) = \ln t$ ,  $g'(t) = 1$ 로 놓으면 $f'(t) = \frac{1}{t}$ ,  $g(t) = t$ 이므로

$$\int \ln t dt = t \ln t - \int \left( t \times \frac{1}{t} \right) dt = t \ln t - t + C$$

 $t = \frac{1}{e}$ 부터  $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |v| dt = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln t| dt \\ = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln t dt + \int_1^e \ln t dt \\ = - \left( \frac{2}{e} - 1 \right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

8)  $\frac{45}{2}$

 $\Rightarrow x = 2t^2$ ,  $y = -\frac{3}{2}t^2 + 1$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = -3t$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{(4t)^2 + (-3t)^2} dt = \int_0^3 5t dt \\ = \left[ \frac{5}{2}t^2 \right]_0^3 = \frac{45}{2}$$

9) 15

 $\Rightarrow x = -3t$ ,  $y = 4t - 1$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = -3, \quad \frac{dy}{dt} = 4$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{(-3)^2 + 4^2} dt = \int_0^3 5 dt \\ = [5t]_0^3 = 15$$

10)  $\frac{15}{2}$

 $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 - t$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2t^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $t=0$ 에서  $t=3$ 까지 점 P가 실제로 움직인 거리는

$$s = \int_0^3 \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

$$= \int_0^3 \sqrt{(1-t)^2 + \left( 2t^{\frac{1}{2}} \right)^2} dt$$

$$= \int_0^3 \sqrt{(1+t)^2} dt = \int_0^3 (1+t) dt$$

$$= \left[ t + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^3 = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

11)  $9\sqrt{5}$ 

$$\Rightarrow x = t^2, y = 2t^2 \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 4t$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{(2t)^2 + (4t)^2} dt = \int_0^3 2\sqrt{5}t dt \\ = \left[ \sqrt{5}t^2 \right]_0^3 = 9\sqrt{5}$$

12) 19

$$\Rightarrow x = 3t^2 + 1, y = t^3 + 1 \text{이며 } \frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

 $t=0$ 에서  $t=\sqrt{5}$ 까지 움직인 거리

$$s = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{9t^4 + 36t^2} dt = \int_0^{\sqrt{5}} 3t\sqrt{t^2 + 4} dt$$

$$= \int_4^9 \frac{3}{2} \sqrt{u} du = \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_4^9 = 27 - 8 = 19$$

13) 5

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = 4 \text{이므로}$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{9+16} dt = \int_1^2 5 dt = [5t]_1^2 = 5$$

14) 12

$$\Rightarrow x = t - \frac{1}{3}t^3, y = t^2 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - t^2, \frac{dy}{dt} = 2t$$

따라서 구하는 거리는

$$s = \int_0^3 \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^3 \sqrt{(t^2+1)^2} dt \\ = \int_0^3 (t^2+1) dt \\ = \left[ \frac{1}{3}t^3 + t \right]_0^3 = 12$$

15) 6

$$\Rightarrow x = 3\sin t, y = 1 - 3\cos t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos t, \frac{dy}{dt} = 3\sin t$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2} dt = \int_0^2 3 dt \\ = [3t]_0^2 = 6$$

16) 2

$$\Rightarrow x = 1 - \cos t, y = 2 + \sin t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^2 1 dt = [t]_0^2 = 2$$

17) 6

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 - 2t, \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{2}\sqrt{t}$$

따라서 구하는 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(1-2t)^2 + 8t} = 2t + 1$$

$$\text{이므로 } \int_0^2 (2t+1) dt = 6 \text{이다.}$$

18) 4

$$\Rightarrow x = \cos 2t, y = -\sin 2t + 1 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = -2\cos 2t$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (-2\cos 2t)^2} dt \\ = \int_0^2 2 dt = [2t]_0^2 = 4$$

19)  $\sqrt{2}e^2 - \sqrt{2}$ 

$$\Rightarrow x = e^t \cos t, y = e^t \sin t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ = \int_0^2 \sqrt{2} e^t dt = [\sqrt{2} e^t]_0^2 \\ = \sqrt{2} e^2 - \sqrt{2}$$

20)  $\frac{13}{3}$ 

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}t, \frac{dy}{dt} = t^2 - 2 \text{이므로}$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{(2\sqrt{2}t)^2 + (t^2 - 2)^2} dt \\ = \int_1^2 \sqrt{(t^2 + 2)^2} dt \\ = \int_1^2 (t^2 + 2) dt \\ = \left[ \frac{1}{3}t^3 + 2t \right]_1^2 = \frac{13}{3}$$

21)  $\frac{3}{4}$ 

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) \text{이므로}$$

 $t=1$ 에서  $t=2$ 까지 P가 움직인 거리는

$$s = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ = \int_1^2 \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[ \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right]_1^2 = \frac{3}{4}$$

22) 20

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 3t \text{이므로}$$



$$s = \int_1^3 \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} dt$$

$$= \int_1^3 5t dt = \left[ \frac{5}{2} t^2 \right]_1^3 = 20$$

23)  $\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = e^t + e^{-t} \text{ 이다.}$$

구하는 값은

$$s = \int_0^{\ln 2} (e^t + e^{-t}) dt = [e^t - e^{-t}]_0^{\ln 2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

24)  $\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t - 2e^{-t} \text{ 이므로}$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{8 + e^{2t} + 4e^{-2t} - 4} dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{(e^t + 2e^{-t})^2} dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^t + 2e^{-t}) dt$$

$$= [e^t - 2e^{-t}]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$= \left(4 - \frac{1}{2}\right) - (2 - 1) = \frac{5}{2}$$

25) 4

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t \text{ 이므로}$$

$$s = \int_1^5 \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt$$

$$= \int_1^5 \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_1^5 1 dt = \left[ t \right]_1^5 = 4$$

26)  $5\pi$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\cos t - 4\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 4\cos t + 3\sin t \text{ 이므로}$$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{(3\cos t - 4\sin t)^2 + (4\cos t + 3\sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{25(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt$$

$$= \int_0^\pi 5 dt = \left[ 5t \right]_0^\pi = 5\pi$$

27)  $\sqrt{2}(e^3 - 1)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = e^t \sqrt{1 - 2\sin t \cos t + 1 + 2\sin t \cos t}$$

$$= \sqrt{2} e^t$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{2} e^t dt = [\sqrt{2} e^t]_0^3 = \sqrt{2}(e^3 - 1)$$

28)  $\sqrt{6}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{3} e^t (\cos t - \sin t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{3} e^t (\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + 3e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{6} e^t dt = [\sqrt{6} e^t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{6} e^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{6}$$

29)  $\frac{9}{8}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2} \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{3}{2} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t \text{ 이므로}$$

$$s = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{3}{4} \sin t dt = \frac{9}{8}$$

30) 8

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = 2 \sin t$$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4 \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^\pi 4 \sin \frac{t}{2} dt = [-8 \cos \frac{t}{2}]_0^\pi = 8$$

31) 149

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 8t, \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2 \text{ 이므로}$$

$t=0$ 에서  $t=1$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 2t \sqrt{16 + 9t^2} dt = \frac{122}{27}$$

$$\therefore p + q = 149$$

32) 2

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -3a \sin t \cos^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \cos t \sin^2 t \text{ 이다.}$$

따라서

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= 3a \sin t \cos t = \frac{3a}{2} \sin 2t \quad (\because a > 0) \text{ 이다.}$$

점  $P$ 가 움직인 거리가 3이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2} \sin 2t dt = \left[ -\frac{3a}{4} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{3a}{4} - \left( -\frac{3a}{4} \right) = \frac{3a}{2} = 3$$

따라서  $a=2$  이다.

33) 2

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = t-1, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = t+1 \text{ 이다.}$$

$$\int_0^a (t+1) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + t \right]_0^a = \frac{a^2}{2} + a = 4 \text{ 이다.}$$

따라서  $a=2$  임을 알 수 있다.

34) 6

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 4t\sqrt{t^2+1} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 4t^2 + 2 \text{ 이다.}$$

$$\int_0^a (4t^2 + 2) dt = \frac{10}{3} \text{ 에서 } a=1 \text{ 임을 알 수 있다.}$$

시각  $t$ 에서의 속도는  $(2, 4t\sqrt{t^2+1})$  이므로  $t=1$ 에서 속도는  $(2, 4\sqrt{2})$  이다.

따라서 속력은 6 이다.

35) 5

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}k \sin t \cos t dt \text{ 이}$$

$$\text{므로 } \sqrt{2}k = 5\sqrt{2} \quad \therefore k=5$$

36)  $\frac{19}{3}$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \text{ 에서}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2} dx \\ = \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x}} dx \\ = \int_0^4 \sqrt{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2} dx \\ = \int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) dx \\ = \left[ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right]_0^4 \\ = \frac{19}{3}$$

37)  $\frac{56}{27}$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \text{ 이므로 } y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \text{ 이다.}$$

$$l = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27}(8-1) = \frac{56}{27}$$

38)  $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \text{ 이므로 곡선의 길이 } l \text{ 은}$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{9x+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} (9x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$$

39)  $\frac{52}{27}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1+9x} \text{ 이므로 구하는 값은}$$

$$\int_0^{\frac{8}{9}} \sqrt{1+9x} dx \text{ 이다.}$$

$$1+9x=t \text{ 로 치환하면 } 9dx=dt \text{ 이고}$$

다음과 같다.

$$l = \int_0^{\frac{8}{9}} \sqrt{1+9x} dx = \frac{1}{9} \int_1^9 \sqrt{t} dt = \frac{52}{27}$$

40) 78

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (x^2+2)^{\frac{1}{2}} \times 2x = x\sqrt{x^2+2}$$

$$\therefore l = \int_0^6 \sqrt{1 + (x\sqrt{x^2+2})^2} dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \int_0^6 (x^2+1) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^6$$

$$= 78$$

41)  $\frac{53}{6}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2} \text{ 이므로}$$

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\
&= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx \\
&= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x} \right]_1^3 = \frac{53}{6}
\end{aligned}$$

42)  $\frac{58}{3}$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \text{ 이므로 } y' = 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

따라서  $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+4x^2(x^2+1)} = 2x^2+1$  이다.

$$\begin{aligned}
l &= \int_1^3 (2x^2+1) dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 + x \right]_1^3 \\
&= (18+3) - \left( \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{58}{3}
\end{aligned}$$

이다.

43) 66

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2} = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} \text{ 이므로}$$

길이를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
l &= \int_3^6 \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = \int_3^6 \sqrt{\left(x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} dx \\
&= \int_3^6 \sqrt{x^2(x^2+2)+1} dx = \int_3^6 \sqrt{x^4+2x^2+1} dx \\
&= \int_3^6 (x^2+1) dx \\
&= \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_3^6 = (72+6) - (9+3) = 66
\end{aligned}$$

44)  $e - \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ 에서 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}
l &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{-1}^1 \\
&= e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

45)  $\frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 이므로 곡선의 길이 } l \text{ 은}$$

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x})^2} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx \\
&= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)
\end{aligned}$$

46)  $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{4x} \text{ 이므로}$$

$1 \leq x \leq e$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

47)  $\frac{1}{4}(e^2+1)$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} \text{ 이므로 } [1, e] \text{에서 곡선의 길이는}$$

$$\int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx \text{ 이다.}$$

식을 정리하면  $\therefore \frac{1}{4}(e^2+1)$  이다.

48)  $-\frac{1}{2} + \ln 3$

$\Rightarrow$  곡선의 길이를  $l$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1-x^2)+2}{1-x^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ -1 - \frac{2}{(x+1)(x-1)} \right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\
&= [-x + \ln|x+1| - \ln|x-1|]_0^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 3$$

$$49) 2 + \ln \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow l = \int_2^4 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_2^4 \sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} dx$$

식을 간단히 하면

$$\int_2^4 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} dx$$

$$= [x - \ln(x+1) + \ln(x-1)]_2^4 = 2 + \ln \frac{9}{5}$$

$$50) 2\ln 3 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-18x}{9-9x^2} = \frac{2x}{x^2-1} \text{ 이다.}$$

$$l = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2} dx \text{ 이므로}$$

식을 정리하면

$$-1 + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = 2\ln 3 - 1$$

$$51) 14$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{t+2} \text{ 이므로}$$

$0 \leq t \leq 4$ 일 때 주어진 곡선의 길이  $l$ 은

$$l = \int_0^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{t+2}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^4 \frac{3}{2} \sqrt{\frac{t^2+2t+1}{t}} dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^4 \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$$

$$= \frac{3}{2} \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t} \right]_0^4 = 14$$

$$52) 4\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow x = 3t^2, \quad y = 1-t^2 \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dt} = -2t$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{(6t)^2 + (-2t)^2} dt = \int_0^2 2\sqrt{10} t dt = [\sqrt{10} t^2]_0^2 = 4\sqrt{10}$$

$$53) \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) \text{ 이므로}$$

$$l = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right)\right)^2} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4}} dt$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) dt = \left[ -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}t \right]_1^2 = \frac{3}{4}$$

$$54) e - \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right)^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right)$$

$$l = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = e - \frac{1}{e} \text{ 이다.}$$

$$55) 2\pi$$

$$\Rightarrow x = 2\sin t, \quad y = 1 - 2\cos t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

$$l = \int_0^\pi \sqrt{(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2} dt = \int_0^\pi 2 dt = [2t]_0^\pi = 2\pi$$

$$56) \pi r$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t \text{ 이므로}$$

곡선의 길이  $l$ 은

$$l = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^\pi r dt$$

$$= [rt]_0^\pi = \pi r$$

$$57) \sqrt{2}(1 - e^{-\pi})$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\sin t + \cos t) \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$= e^{-2t} \{ (\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 \}$$

$$= 2e^{-2t} (\sin^2 t + \cos^2 t) = 2e^{-2t}$$

$0 \leq t \leq \pi$ 일 때, 곡선의 길이를  $l$ 이라 하면

$$l = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2} e^{-t} dt$$

$$= [-\sqrt{2} e^{-t}]_0^\pi = \sqrt{2}(1 - e^{-\pi})$$

$$58) 3$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\
 &= \int_0^{\pi} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
 &= \int_0^{\pi} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{9}{4} (2\sin t \cos t)^2} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 2t} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} |\sin 2t| dt \\
 &= \frac{3}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t dt \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left( \left[ -\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ -\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{3}{2} \times 2 = 3
 \end{aligned}$$

59) 3

$$\Rightarrow \int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{1+(\sqrt{x^2+2} \times x)^2} dx$$

식을 정리하면

$$\int_0^a x^2 + 1 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3 + a = 12 \quad \therefore a = 3$$

60) 3

$$\Rightarrow \sqrt{1+(f'(x))^2} = x^2 - 1 \text{ 이고 } 1 \leq x \leq a \text{ 에서}$$

곡선  $y=f(x)$  의 길이는

$$\int_1^a (x^2 - 1) dx = \frac{a^3}{3} - a + \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \text{ 이다.}$$

여기서  $a=3$  임을 알 수 있다.

61) 5

$$\Rightarrow \int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{1+\{(x+3)^{\frac{1}{2}}\}^2} dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{x+4} dx$$

$$= \left[ \frac{2}{3} (x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} (a+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$$

$$\text{이므로 } \frac{2}{3} (a+4)^{\frac{3}{2}} = \frac{54}{3}, (a+4)^{\frac{3}{2}} = 27 \quad \therefore a = 5$$

62) 17

 $\Rightarrow \ln 2 \leq x \leq \ln 4$ 에 대해서

$$y = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{2} dt \text{ 이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 이다.}$$

길이  $l$ 은

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{9}{8} \text{ 이므로}$$

 $p+q=17$ 이다.63)  $\ln 2 \sqrt{2}$ 

$$\Rightarrow \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} (e^a - 1) = 4 - \sqrt{2}$$

$$\therefore e^a = 2\sqrt{2}$$

64) 25

$$\Rightarrow \text{곡선을 } x \text{에 대해서 미분하면 } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

이므로  $x=1$ 에서  $x=2$ 까지 곡선의 길이는

$$\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \text{ 이다.}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \text{가 나오므로 } 20(p+q) = 25 \text{ 이다.}$$