III

공간도형과 공간좌표

탐구 학습

정답과 해설 327쪽

지도서 186쪽 / 교과서 128쪽 문제 3

정사영의 정사영

이면각의 크기가 θ인 두 평면 α, β에 대하여 평면 α 위에 넓이가 S인 도형 F가 있다. 이 도형 F의 평면 β 위로의 정사영 F'을 다시 평면 α 위로 정사영시킨 도형 F''의 넓이 S''은 다음과 같이 구한다.

도형 F의 평면 β 위로의 정사영 F'의 넓이를 S'이라고 하면

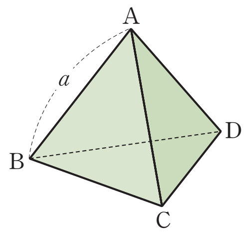
$$S'=S\cos\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. 또한, 도형 F'의 평면 α 위로의 정사영이 도형 F''이므로

$$S''=S'\cos\theta \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 따라서 ①을 ②에 대입하면 $S''=S\cos^2\theta$이다.

예 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정사면체에서 정삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영을 다시 평면 ABC 위로 정사영시킨 도형의 넓이를 구해 보자.



풀이 평면 ABC와 밑면 BCD의 이면각의 크기를 θ, 점 A의 평면 BCD 위로의 수선의 발을 G라고 하자. 그러면 $\triangle$ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\triangle$GBC이고 점 G는 $\triangle$BCD의 무게중심이다.

정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이고, 삼각형 GBC의 넓이는 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

따라서 삼각형 GBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

$$S'=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\cos\theta=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{36}a^2$$

1 위 정사면체에서 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 G, 점 G의 평면 ABC 위로의 정사영을 E라고 할 때, $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이를 구하시오.

2 위 정사면체에서 정삼각형 ABC에 내접하는 원 O가 있다. 원 O를 평면 BCD 위로 정사영시킨 도형 O′을 평면 ABC 위로 정사영시킨 도형 O″의 넓이를 구하시오.

탐구 학습

지도서 202쪽 / 교과서 144쪽 예제 1

두 점에서 거리의 비가 일정한 점들이 나타내는 도형

좌표공간의 두 점 A, B에 이르는 거리의 비가 2 : 1로 일정한 점들이 나타내는 도형은 구가 됨이 알려져 있다. 이때 구의 방정식은 선분의 내분점과 외분점을 이용하여 다음 순서대로 구한다.

❶ 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P를 구한다.
❷ 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q를 구한다.
❸ 선분 PQ의 중점 C가 구하는 구의 중심이다.
❹ $\overline{PC}=\overline{QC}$이므로 두 값 중 하나를 구하여 구의 반지름의 길이를 구한다.

예 좌표공간의 두 점 O(0, 0, 0), A(3, 0, −3)에 대하여 점 O와 점 A에 이르는 거리의 비가 2 : 1로 일정한 점들이 나타내는 도형의 방정식을 구해 보자.

풀이 ① 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{6}{3},\ 0,\ -\frac{6}{3}\right)$, 즉 $(2,\ 0,\ -2)$이다.

② 선분 OA를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{6}{1},\ \frac{0}{1},\ -\frac{6}{1}\right)$, 즉 $(6,\ 0,\ -6)$이다.

③ 선분 PQ의 중점 C의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2},\ 0,\ \frac{-2-6}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 0,\ -4)$이다.

④ 구의 반지름의 길이는 $\overline{PC}=\overline{QC}=\sqrt{2^2+0+(-2)^2}=2\sqrt{2}$이다.
따라서 구하는 도형의 방정식은 $(x-4)^2+y^2+(z+4)^2=(2\sqrt{2})^2$, 즉 $(x-4)^2+y^2+(z+4)^2=8$이다.

3 좌표공간의 두 점 A(−6, −10, −7), B(2, −2, 1)에 대하여 점 A와 점 B에 이르는 거리의 비가 3 : 1로 일정한 점들이 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

4 좌표공간의 두 점 A(−1, 2, 0), B(2, 5, 6)에 대하여 점 A와 점 B에 이르는 거리의 비가 1 : 2로 일정한 점들이 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

활동지 함께 생각하는 탐구

____학년 ____반 ____번 이름 __________

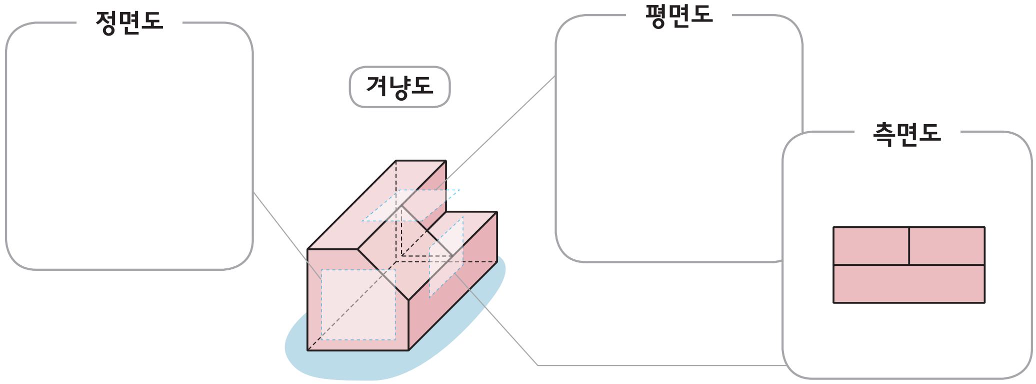
정답과 해설 327~328쪽

입체도형의 정사영

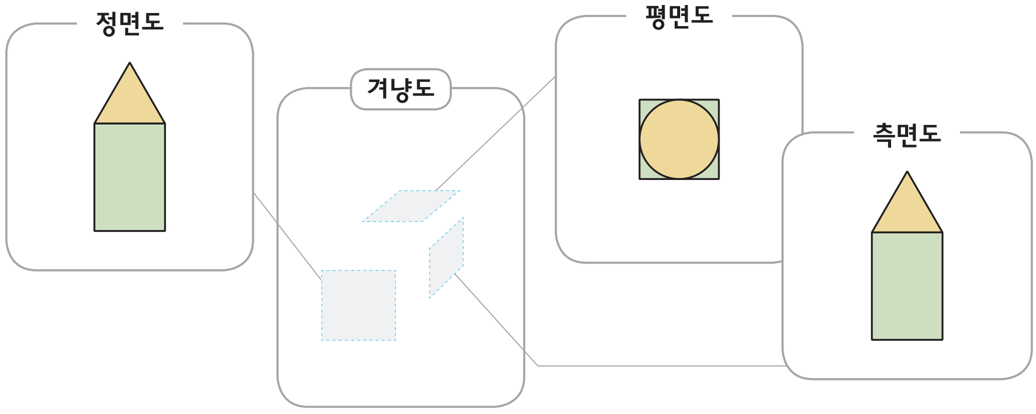
지도서 188쪽 교과서 130쪽

탐구 목표 입체도형과 정면도, 평면도, 측면도 사이의 관계를 알아보자.

1 다음 입체도형의 겨냥도를 보고 정면도, 평면도를 각각 그려 보자.



2 다음 정면도, 평면도, 측면도를 보고 입체도형의 형태를 추측하여 겨냥도를 그려 보자.



활동지 함께 생각하는 탐구

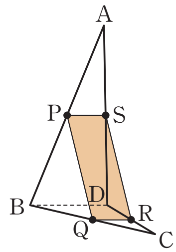
____학년 ____반 ____번 이름 ________

공간도형의 성질을 공간좌표로 알아보기

지도서 205쪽 교과서 147쪽

탐구 목표 공간좌표를 이용하여 공간사변형의 성질을 설명해 보자.

1 오른쪽 그림과 같이 임의의 꼬인사변형 ABCD에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 중점을 각각 P, Q, R, S라고 할 때, 다음 활동을 통해 도형 PQRS가 어떤 도형이 되는지 알아보자.



(1) 구하려는 것은 무엇인가?

(2) 주어진 조건은 무엇인가?

(3) 무엇을 알아야 하는가?

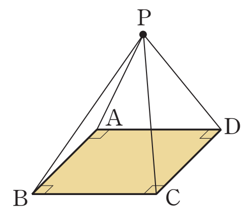
1-1 위 **1**을 이용하여 모둠별로 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표를 설정해 보자.

1-2 위 **1-1**을 이용하여 네 점 P, Q, R, S를 각각 좌표로 나타내 보자.

1-3 위 **1-2**를 이용하여 선분 PR와 선분 QS의 중점의 좌표를 각각 구해 보자.

1-4 위 **1-3**의 결과를 이용하여 도형 PQRS가 어떤 도형이 되는지 말해 보자.

2 오른쪽 그림과 같이 공간에서 직사각형 ABCD와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립함을 설명해 보자.



(1) 구하려는 것은 무엇인가?

(2) 주어진 조건은 무엇인가?

(3) 무엇을 알아야 하는가?

2-1 위 **2**를 이용하여 모둠별로 꼭짓점 A, B, C, D, P의 좌표를 설정해 보자.

2-2 위 **2-1**을 이용하여 $\overline{PA}^2$, $\overline{PC}^2$, $\overline{PB}^2$, $\overline{PD}^2$을 각각 구해 보자.

2-3 위 **2-2**를 이용하여 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립함을 확인해 보자.

형성 평가

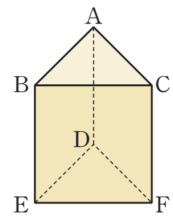
_____학년 _____반 _____번 이름 ____________

정답과 해설 328~331쪽

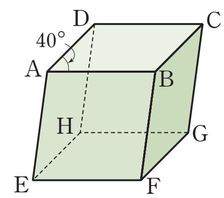
1-1. 직선, 평면의 위치 관계

지도서 173쪽 교과서 115쪽

1 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 세 꼭짓점 A, B, E와 모서리 DF로 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.



2 오른쪽 그림과 같이 세 쌍의 평행한 평면으로 둘러싸인 육면체에서 다음의 개수를 구하시오.



(1) 모서리 AD와 한 점에서 만나는 모서리

(2) 모서리 AE와 평행한 모서리

(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리

(4) 모서리 AD를 포함하는 면

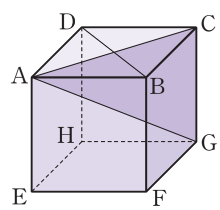
(5) 모서리 AE와 평행한 면

(6) 모서리 AB와 한 점에서 만나는 면

(7) 면 AEFB와 만나는 면

(8) 면 AEFB와 평행한 면

3 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음을 구하시오.



(1) 직선 AC와 직선 DB가 이루는 각의 크기

(2) 직선 AC와 직선 BF가 이루는 각의 크기

(3) 직선 AC와 직선 HG가 이루는 각의 크기

(4) 직선 AC와 직선 DE가 이루는 각의 크기

(5) 모서리 AB와 수직인 평면

(6) 모서리 AB와 평행한 평면

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

1-2. 삼수선 정리

지도서 179쪽 교과서 121쪽

1 다음은 삼수선 정리를 적은 것이다. □ 안에 알맞은 결론을 써넣으시오.

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여

❶ $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면 □

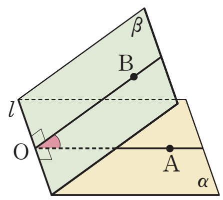
❷ $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 □

❸ $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 □

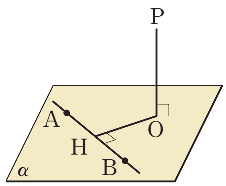
2 다음은 어떤 용어에 대한 설명이다. □ 안에 들어갈 알맞은 용어를 써넣으시오.

오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 □이라고 한다. 이때 직선 l을 □의 변, 두 반평면 α, β를 각각 □의 면이라고 한다.

직선 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 항상 일정하다. 이 각의 크기를 □의 크기라고 한다.



3 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 다음을 구하시오.



(1) $\overline{\mathrm{AP}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AH}}=5$, $\overline{\mathrm{PO}}=4$일 때, $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이

(2) $\overline{\mathrm{AH}}=5$, $\overline{\mathrm{OH}}=4\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{PO}}=8$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이

(3) $\overline{\mathrm{AP}}=10$, $\overline{\mathrm{OH}}=4$, $\overline{\mathrm{PO}}=4\sqrt{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이

4 평면 α에 수직인 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α에 수직임을 보이시오.

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

1-3. 정사영

지도서 183쪽 교과서 125쪽

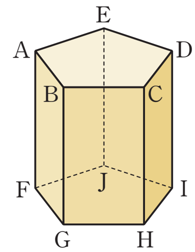
1 오른쪽 그림과 같은 정오각기둥에서 다음을 구하시오.

(1) 점 A의 평면 FGHIJ 위로의 정사영

(2) 선분 CJ의 평면 FGHIJ 위로의 정사영

(3) 선분 BG의 평면 FGHIJ 위로의 정사영

(4) 삼각형 AGD의 평면 FGHIJ 위로의 정사영



2 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{AB}=12$, $\overline{A'B'}=6\sqrt{2}$일 때, θ의 값

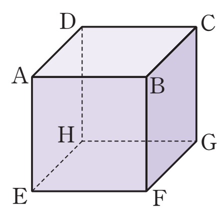
(2) $\overline{A'B'}=8$, $\theta=60^\circ$일 때, 선분 AB의 길이

3 평면 α 위에 있는 도형 F의 넓이를 S, 도형 F의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $S=8$, $S'=4$일 때, θ의 값

(2) $S'=6$, $\theta=45^\circ$일 때, S의 값

4 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 직선 DB와 평면 EGD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

2-1. 점의 좌표

지도서 192쪽 교과서 134쪽

1 다음을 만족하는 점 P의 좌표를 구하시오.

(1) 점 P에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ 0,\ -3)$이고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(2,\ -3,\ 0)$이다.

(2) 점 P를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5,\ -1,\ 4)$이다.

2 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(1,\ 3,\ 2)$, $B(-4,\ -1,\ 5)$　　(2) $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(2,\ 4,\ 4)$

3 두 점 $A(3,\ -5,\ -1)$, $B(-1,\ a,\ 3)$에 대하여 $\overline{AB}=9$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

4 세 점 $A(3,\ 1,\ 5)$, $B(0,\ -2,\ 1)$, $C(-3,\ 2,\ -2)$에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 ____________

2-2. 선분의 내분과 외분

지도서 197쪽 교과서 139쪽

1 두 점 $A(5,\ 1,\ -4)$, $B(1,\ 5,\ 2)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

2 두 점 $A(4,\ 8,\ -2)$, $B(-8,\ -4,\ 4)$를 이은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P와 $1:2$로 외분하는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하시오.

3 세 점 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(3,\ -4,\ 7)$, $C(5,\ 2,\ 3)$에 대하여 도형 OABC가 평행사변형이 되도록 하는 꼭짓점 B의 좌표를 구하시오.

4 세 점 $A(a,\ -1,\ 2)$, $B(0,\ 3,\ -2)$, $C(8,\ 4,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(4,\ c,\ -1)$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

2-3. 구의 방정식

지도서 201쪽 교과서 143쪽

1 다음 구의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(-1,\ 3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 2인 구

(2) 중심의 좌표가 $(1,\ -3,\ -2)$이고 점 $(-1,\ -1,\ -1)$을 지나는 구

2 다음 구의 방정식에서 중심의 좌표 $(a,\ b,\ c)$와 반지름의 길이 r에 대하여 $a+b+c+r$의 값을 구하시오.

(1) $(x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=16$

(2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$

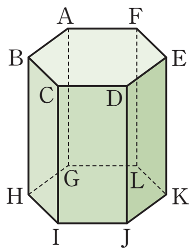
3 두 구 $x^2+y^2+z^2+6x-4y+2z+13=0$, $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+17=0$의 중심 사이의 거리를 구하시오.

4 구 $x^2+y^2+z^2+10x-8y-4z+k=0$이 z축과 한 점에서 만난다고 한다. 이때 실수 k와 구의 반지름의 길이 r에 대하여 r^2-k^2의 값을 구하시오.

중단원 수준별 문제

기본

01 오른쪽 그림은 밑면이 정육각형이고 옆면이 모두 직사각형인 육각기둥이다. 다음 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



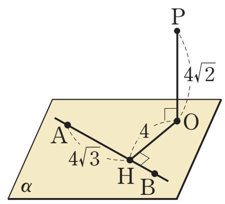
ㄱ. 직선 AB는 평면 DJKE와 평행하다.
ㄴ. 두 직선 AG와 IJ는 평행하다.
ㄷ. 두 직선 CD와 BH는 수직이다.
ㄹ. 두 평면 BHGA와 CIJD는 평행하다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 서로 다른 두 직선 l, m과 서로 다른 두 평면 α, β에 대하여 다음 설명 중 옳은 것은?

① $l \perp m$이고 $l \mathbin{/\!/} \alpha$이면 $m \mathbin{/\!/} \alpha$이다.
② $l \perp \alpha$이고 $m \perp \alpha$이면 $l \perp m$이다.
③ $l \mathbin{/\!/} \alpha$이고 $m \mathbin{/\!/} \alpha$이면 $l \mathbin{/\!/} m$이다.
④ $l \perp \alpha$이고 $l \perp \beta$이면 $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$이다.
⑤ $l \mathbin{/\!/} \alpha$이고 $\alpha \perp \beta$이면 $l \perp \beta$이다.

03 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{PO}=4\sqrt{2}$, $\overline{OH}=4$, $\overline{AH}=4\sqrt{3}$일 때, $\overline{PA}$의 길이는?



① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

04 길이가 8인 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 4이고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

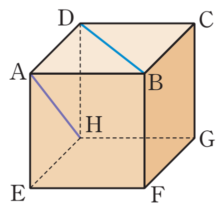
05 밑면의 반지름의 길이가 3인 원기둥을 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이는?

① 12π ② 14π ③ 15π
④ 16π ⑤ 18π

정답과 해설 331쪽

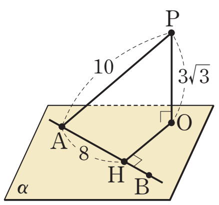
표준

06 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 두 직선 AH, DB가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?



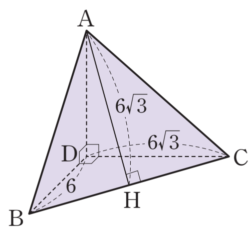
① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ 1

07 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{PO}=3\sqrt{3}$, $\overline{PA}=10$, $\overline{AH}=8$일 때, $\overline{OH}$의 길이는?



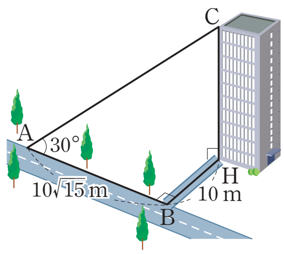
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

08 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}\perp\overline{DB}$, $\overline{AD}\perp\overline{DC}$, $\overline{DB}\perp\overline{DC}$, $\overline{AH}\perp\overline{BC}$이고, $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=6\sqrt{3}$, $\overline{AH}=6\sqrt{3}$인 사면체에서 선분 AD의 길이는?



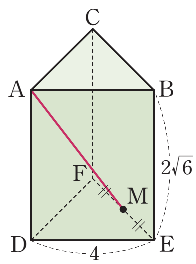
① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

09 오른쪽 그림과 같이 건물 지상의 한 지점 H에서 10 m 떨어진 직선 도로가 있다. 직선 도로의 한 지점을 A, 건물의 가장 높은 지점을 C라고 할 때, $\overline{AB}=10\sqrt{15}$ m, $\angle CAB=30°$이다. 직선 CH는 지면과 수직이고, $\overline{CH}=k$ m일 때, 상수 k의 값은?



① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

10 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{6}$인 삼각기둥이 있다. 모서리 EF의 중점을 M이라 하고 $\overline{AM}$과 밑면 DEF가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?

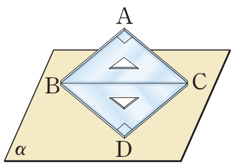


① $\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

정답과 해설 333쪽

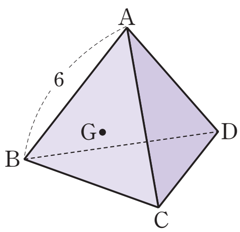
심화

11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{DC}=2$인 두 직각삼각자 ABC, BDC가 있다. 먼저 삼각자 ABC를 바닥 α에 수직이 되도록 세우고, 삼각자 BDC를 변 BC에 붙여 바닥 α 위에 놓았다. 점 A와 직선 DC 사이의 거리가 k일 때, 상수 k의 값은?



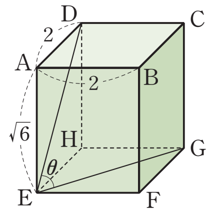
① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ 3

12 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 고 할 때, 선분 AG의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이를 l이라고 할 때, $3l$의 값은?



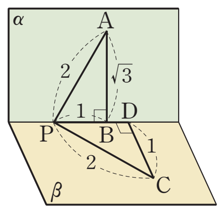
① $\sqrt{3}$　② 2　③ $2\sqrt{3}$
④ 3　⑤ $3\sqrt{3}$

13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=\sqrt{6}$인 직육면체에서 두 선분 DE와 EG가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 1

14 세 변의 길이가 각각 2, 1, $\sqrt{3}$인 직각삼각형 PAB, PCD를 오른쪽 그림과 같이 점 P를 일치시키고 세 점 P, B, D가 일직선 상에 위치하도록 수직인 두 평면 α, β 위에 각각 놓았다. 두 직선 PA와 PC가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta$의 값은?



① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{13}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{14}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{15}}{6}$　⑤ $\frac{4}{7}$

중단원 수준별 문제

정답과 해설 333쪽

기본

01 점 P$(a,\ b,\ c)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점과 점 Q$(c-5,\ -2a,\ c-3a)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점이 같을 때, $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

02 점 P$(-3,\ 1,\ -2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 R라고 할 때, 선분 QR의 길이는?

① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{13}$
④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

03 두 점 A$(1,\ 3,\ 4)$, B$(3,\ 1,\ 2)$와 x축 위의 점 P$(a,\ 0,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$일 때, a의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

04 두 점 A$(-3,\ 4,\ 2)$, B$(2,\ -1,\ 5)$에 대하여 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이는?

① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $4\sqrt{3}$
④ 7 ⑤ $5\sqrt{2}$

05 좌표공간의 세 점 A$(2,\ -4,\ a)$, B$(b,\ 4,\ 3)$, C$(3,\ c,\ 1)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 0,\ 3)$일 때, $a+b+c$의 값은?

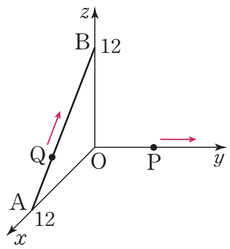
① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

06 중심의 좌표가 $(3,\ -2,\ 4)$이고 y축에 접하는 구의 반지름의 길이는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

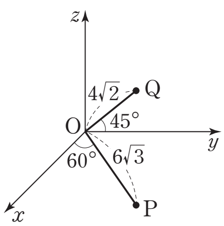
표준

07 오른쪽 그림과 같이 좌표공간의 원점 O에서 출발하여 y축의 양의 방향으로 매초 1씩 움직이는 점 P와 점 A(12, 0, 0)에서 출발하여 점 B(0, 0, 12) 방향으로 매초 $\sqrt{2}$씩 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q가 동시에 출발할 때, $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 되는 시간은 a초이다. 상수 a의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

08 오른쪽 그림과 같은 좌표공간에서 점 P는 xy평면, 점 Q는 yz평면 위에 있고, $\overline{OP}=6\sqrt{3}$, $\overline{OQ}=4\sqrt{2}$이다. 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이고, 직선 OQ가 y축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°일 때, $\overline{PQ}^2$의 값은?



① 68　② 70　③ 72　④ 74　⑤ 76

09 두 점 A(2, −3, 4), B(−1, 2, 3)에 대하여 직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin^2\theta=a$를 만족하는 실수 a의 값은?

① $\frac{9}{35}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{11}{35}$　④ $\frac{12}{35}$　⑤ $\frac{13}{35}$

10 두 점 A(a, b, c), B(3, 1, −3)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점을 Q라고 하자. 점 Q의 좌표가 (−1, −3, −5)일 때, $\overline{PQ}^2$의 값은?

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

11 좌표공간의 네 점 (0, 0, 0), (1, −3, 0), (1, 1, −4), (3, −3, 0)을 지나는 구의 반지름의 길이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

정답과 해설 334쪽

심화

12 세 점 A$(1,\ -3,\ 1)$, B$(-1,\ 4,\ 7)$, C$(6,\ 2,\ 4)$에 대하여 세 선분 AB, BC, CA를 각각 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라고 하자. 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

13 반지름의 길이가 6이고 x축, y축, z축에 동시에 접하는 구의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 36 ② 54 ③ 72
④ 90 ⑤ 108

14 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 P와
구 $x^2+y^2+z^2+12x-4y-6z+33=0$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

15 두 점 A$(1,\ -2,\ 2)$, B$(1,\ -1,\ 1)$을 지나고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

16 xy평면 위에 점 P$(2,\ -1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C가 있다.
점 Q$(5,\ 3,\ 4)$와 원 C 위의 점 사이의 거리의 최솟값은?

① $3\sqrt{2}$ ② 5 ③ $3\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

17 구 $(x+4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=6^2$의 중심을 A, 이 구와 y축의 두 교점을 각각 B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

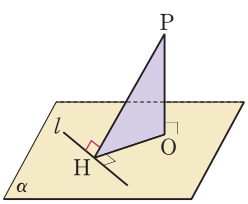
중단원 서술형 문제

다음은 각 문항에 대한 풀이 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (1~4)

1 다음 설명에서 □ 안에 들어갈 알맞은 용어를 써넣으시오. [8점]

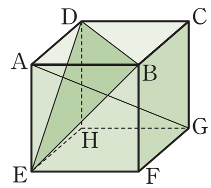
(1) 같은 평면에 위치한 두 직선이 서로 만나지 않을 때, 두 직선은 (가) 하다고 한다.
(2) 같은 평면에 존재하지 않는 두 직선이 서로 만나지 않을 때, 두 직선을 (나) 에 있다고 한다.
(3) 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 직선을 두 평면의 (다) 이라고 한다.
(4) 어떤 직선 l이 평면 α와 한 점에서 만나고, 평면 α 위의 모든 직선과 (라) 일 때, 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다.

2 다음은 삼수선 정리를 증명하는 과정이다. □ 안에 들어갈 알맞은 것을 써넣으시오. [8점]



오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 α에 내린 (가) 을 O라 하고, 점 O에서 α 위의 한 직선 l에 내린 (가) 을 H라고 하자.
이때 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이고, 직선 l은 평면 α에 포함되므로
(나) $\perp l$이다.
또, (다) $\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{\mathrm{PO}}$와 $\overline{\mathrm{OH}}$를 포함하는 평면 POH와 수직이다.
이때 $\overline{\mathrm{PH}}$는 평면 POH에 포함되므로 (라) $\perp l$

3 다음은 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 직선 AG와 평면 BDE가 서로 수직임을 증명하는 과정이다. □ 안에 들어갈 알맞은 것을 써넣으시오. [8점]



$\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$는 정사각형 ABCD의 두 대각선이므로
$\overline{\mathrm{AC}}$ (가) $\overline{\mathrm{BD}}$
또, $\overline{\mathrm{BD}}\perp\overline{\mathrm{BF}}$이고, $\overline{\mathrm{BF}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{AE}}$이므로
$\overline{\mathrm{BD}}$ (나) $\overline{\mathrm{AE}}$
두 직선 AC, AE는 평면 AEGC에 포함되므로
$\overline{\mathrm{BD}}$ (나) (평면 AEGC)
$\therefore$ $\overline{\mathrm{BD}}\perp$ (다)
같은 방법으로 $\overline{\mathrm{BE}}\perp$ (다) 이다.
두 직선 BD와 BE는 평면 BDE에 포함되므로
(평면 BDE)$\perp\overline{\mathrm{AG}}$

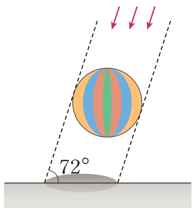
4 다음 설명에서 □ 안에 들어갈 알맞은 용어나 식을 써넣으시오. [8점]

(1) 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 (가) 이라고 한다.
(2) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q라고 할 때, 점 Q를 점 P의 평면 α 위로의 (나) 이라고 한다.
(3) 선분 AB의 평면 α 위로의 (나) 을 선분 CD, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}\times$ (다)

정답과 해설 336쪽

※ 다음은 단계형 서술형 문제이다. 단계에 따라 정답과 풀이 과정을 쓰시오. (5~6)

5 오른쪽 그림과 같이 구 모양의 풍선이 하늘에 떠 있다. 태양이 지면과 $72°$의 각도로 비출 때, 지면 위에 생긴 풍선의 그림자의 넓이는 $380\pi\,\mathrm{cm}^2$이다. 이때 풍선의 반지름의 길이는 몇 cm인지 구하시오. (단, $\cos 72° = 0.3$, $\sin 72° = 0.95$로 계산한다.)

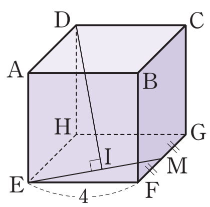


[단계 1] 풍선의 반지름의 길이를 r cm라고 할 때, 풍선의 단면의 넓이를 r에 대한 식으로 나타내시오. [2점]

[단계 2] 정사영을 이용하여 그림자의 넓이와 구의 단면의 넓이 사이의 관계식을 구하시오. [4점]

[단계 3] r의 값을 구하시오. [2점]

6 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 선분 GF의 중점을 M, 꼭짓점 D에서 선분 EM에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, 선분 DI의 길이를 구하시오.



[단계 1] $\overline{HI} \perp \overline{EM}$임을 보이시오. [3점]

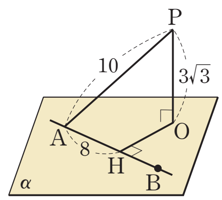
[단계 2] 선분 HI의 길이를 구하시오. [3점]

[단계 3] 선분 DI의 길이를 구하시오. [4점]

※ 다음은 수준별 선택형 서술형 문제이다. 수준 1, 수준 2, 수준 3 중 한 문제를 선택하여 정답과 풀이 과정을 쓰시오.

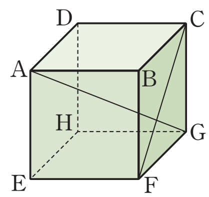
7-수준 1

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{PO} = 3\sqrt{3}$, $\overline{PA} = 10$, $\overline{AH} = 8$일 때, $\overline{OH}$의 길이를 구하시오. [6점]



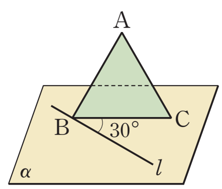
7-수준 2

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 두 직선 AG, CF가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하시오. [8점]



7-수준 3

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있는 선분 BC를 한 변으로 하는 정삼각형 ABC가 평면 α와 수직으로 놓여 있고, 점 B를 지나는 평면 α 위의 직선 l이 직선 BC와 $30°$의 각을 이룬다. 직선 AB와 직선 l이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오. [10점]



중단원 서술형 문제

다음은 각 문항에 대한 풀이 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (1~4)

1 두 점 $A(a, 3, 1)$, $B(b-1, 2, a+b)$에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값을 구하시오. [8점]

> $\overline{AB}=\sqrt{\boxed{(가)}^2+(2-3)^2+\boxed{(나)}^2}$ 이므로
>
> $\overline{AB}^2=\boxed{(가)}^2+\boxed{(나)}^2+1$
>
> $=2a^2+2(b-\boxed{(다)})^2+1$
>
> 따라서 $a=0$, $b=\boxed{(다)}$일 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\boxed{(라)}$이다.

2 세 점 $A(2, 2, 0)$, $B(3, 3, -1)$, $C(5, 4, 1)$에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 P의 좌표를 구하시오. [8점]

> 점 P의 좌표를 $(a, b, 0)$이라고 하자.
>
> $\overline{AP}^2=(a-2)^2+(b-2)^2$,
>
> $\overline{BP}^2=\boxed{(가)}$, $\overline{CP}^2=\boxed{(나)}$
>
> $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$을 간단히 하면
>
> $\boxed{(다)}$ ……①
>
> $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$을 간단히 하면
>
> $4a+2b-23=0$ ……②
>
> 위 ①, ②를 연립하여 풀면
>
> $a=\boxed{(라)}$, $b=\boxed{(마)}$
>
> 이므로 점 P의 좌표는 $(\boxed{(라)}, \boxed{(마)}, 0)$이다.

3 두 점 $A(a, b, c)$, $B(8, 3, 6)$에 대하여 선분 AB가 yz평면에 의해 $3:2$로 내분되고, x축에 의해 $2:3$으로 외분될 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [8점]

> 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P라 하고, $2:3$으로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 P의 좌표는 $\boxed{(가)}$이고, 점 Q의 좌표는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> 점 P는 yz평면 위의 점, 즉 x좌표가 0이므로
>
> $a=\boxed{(다)}$
>
> 또, 점 Q는 x축 위의 점, 즉 y, z좌표가 모두 0이므로
>
> $b=2$, $c=\boxed{(라)}$
>
> $\therefore a+b+c=\boxed{(마)}$

4 삼각형 ABC에서 선분 AB의 중점의 좌표가 $(2, 1, -6)$이고, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(5, 3, -3)$일 때, 점 C의 좌표를 구하시오. [8점]

> 선분 AB의 중점을 M, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 하면 점 G는 선분 CM을 $\boxed{(가)}$로 내분하는 점이다.
>
> 따라서 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하고 점 G의 좌표를 a, b, c로 나타내면 $\boxed{(나)}$이다.
>
> 문제에서 점 G의 좌표는 $(5, 3, -3)$이므로
>
> $a=\boxed{(다)}$, $b=\boxed{(라)}$, $c=3$
>
> 따라서 점 C의 좌표는 $\boxed{(마)}$이다.

정답과 해설 337쪽

* 다음은 단계형 서술형 문제이다. 단계에 따라 정답과 풀이 과정을 쓰시오. (5~6)

5 두 점 A$(0,\ -2,\ 4)$, B$(3,\ 4,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 외분하는 점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 중점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

[단계 1] 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 구하시오. [3점]

[단계 2] 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표를 구하시오. [3점]

[단계 3] 선분 PQ의 중점의 좌표를 구해 $a+b+c$의 값을 구하시오. [2점]

6 양수 c에 대하여 점 C$(a,\ b,\ c)$를 중심으로 하는 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-4)^2=5^2$에 내접하고 밑면이 xy평면 위에 있는 원기둥의 부피를 구하시오.

[단계 1] 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-4)^2=5^2$과 xy평면의 교선인 원의 중심 H와 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

[단계 2] 구의 중심 C에 대하여 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이를 구하시오. [2점]

[단계 3] 원기둥의 부피를 구하시오. [3점]

* 다음은 수준별 선택형 서술형 문제이다. 수준 1, 수준 2, 수준 3 중 한 문제를 선택하여 정답과 풀이 과정을 쓰시오.

7- 수준 1

구 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$와 외접하고 중심의 좌표가 $(-1,\ -1,\ -2)$인 구의 반지름의 길이를 구하시오. [6점]

7- 수준 2

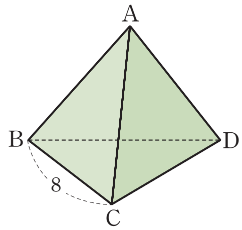
구 S가 $x^2+y^2+z^2+4x+6y+2z+5=0$이고 구 T가 $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2z+k-19=0$이다. 두 구 S, T가 서로 만나지 않도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [8점]

7- 수준 3

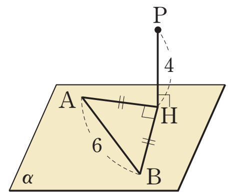
구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=5$가 xy평면과 만날 때 생기는 단면 위를 점 A가 움직이고 있다. 점 B$(3,\ 0,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 최댓값을 구하시오. [10점]

대단원 평가 문제

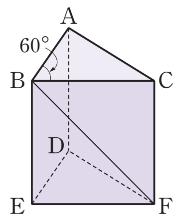
01 오른쪽 그림과 같은 사면체 ABCD에서 $\overline{BC}=8$이고, 두 삼각형 BCD, ABC의 넓이는 각각 32, 24이다. 두 평면 BCD, ABC가 이루는 이면각의 크기가 60°일 때, 사면체 ABCD의 부피를 구하시오.



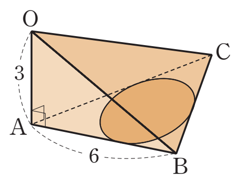
02 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{PH}=4$이다. 평면 α 위의 $\overline{HA}=\overline{HB}$이고 $\overline{AB}=6$인 직각이등변삼각형 HAB에 대하여 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 구하시오.



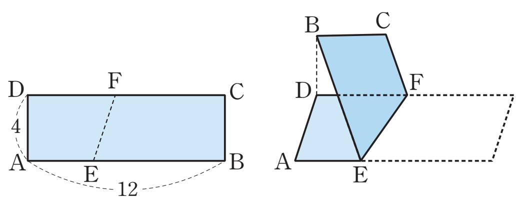
03 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 정사각형 ABED를 포함하는 평면과 정사각형 BEFC를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기가 60°이다. 두 직선 BF와 ED가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



04 오른쪽 그림과 같은 삼각뿔에서 밑면인 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이고, 모서리 OA가 밑면 ABC와 수직일 때, 정삼각형 ABC의 내접원의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

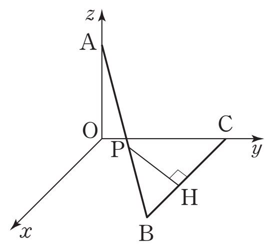


05 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=12$, $\overline{AD}=4$인 직사각형 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=4$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 예각의 크기가 θ이다. 이때 $150\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



정답과 해설 338쪽

06 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 세 점 A(0, 0, 6), B(10, 8, 0), C(0, 8, 0)이 있다. 선분 AB 위의 한 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\mathrm{PH}}=4$이다. 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.



07 두 점 A(1, 3, 2), B(4, 7, 7)을 지나는 직선이 xy평면과 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

08 점 A(3, 9, 6)의 x축, y축, z축 위로의 정사영을 각각 점 P, Q, R라 하고, 점 A의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영을 각각 점 P′, Q′, R′이라고 하자. 이때 두 삼각형 PQR, P′Q′R′의 무게중심 사이의 거리를 구하시오.

09 중심의 좌표가 (1, 3, 0)이고 반지름의 길이가 1인 xy평면 위의 원을 C라 하고, 중심의 좌표가 (−3, 6, 3)이고 반지름의 길이가 1인 구를 S라고 하자. 원 C 위의 한 점 P와 구 S 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하시오.

10 중심이 점 A(a, b, c)인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 36π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$이다. 구 S의 반지름의 길이를 r라고 할 때, r^2의 값을 구하시오.

(단, $a>0$, $b>0$, $c>0$)

정답률 80 % 이상

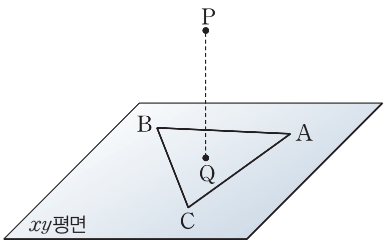
[2015년 9월 B형 4번 / 정답률 92 %]

01 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(2,\ 2,\ 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자. 두 점 P와 Q 사이의 거리는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[2015년 7월 B형 15번 / 정답률 90 %]

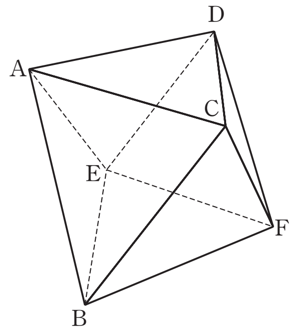
02 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC가 xy평면 위에 있고, 점 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 4)$의 xy평면 위로의 정사영 Q는 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다. 점 P에서 직선 BC까지의 거리는? [4점]



① $3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $2\sqrt{5}$
④ $\sqrt{21}$ ⑤ $\sqrt{22}$

[2012년 10월 가형 7번 / 정답률 89 %]

03 정팔면체 ABCDEF에서 두 모서리 AC와 DE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0° \le \theta \le 90°$) [3점]



① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[2005년 9월 가형 14번 / 정답률 87 %]

04 좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P, Q의 xy평면 위로의 정사영을 각각 P′, Q′이라 할 때, 삼각형 OP′Q′의 넓이는?

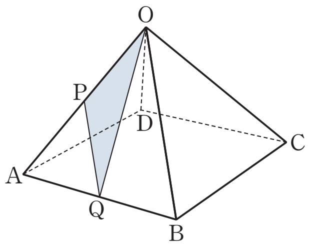
(단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

정답과 해설 340쪽

[2017년 7월 가형 14번 / 정답률 83 %]

05 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형을 밑면으로 하고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2\sqrt{5}$인 정사각뿔 O$-$ABCD가 있다. 두 선분 OA, AB의 중점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[2006년 9월 가형 5번 / 정답률 83 %]

06 좌표공간의 세 점 A$(a,\ 0,\ b)$, B$(b,\ a,\ 0)$, C$(0,\ b,\ a)$에 대하여 $a^2+b^2=4$일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은? (단, $a>0$이고 $b>0$이다.) [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

정답률 79～60 %

[2011년 10월 가형 13번 / 정답률 77 %]

07 좌표공간에서 점 A$(1,\ 3,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고, 점 A를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C를 지나는 원의 반지름의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$
④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

[2012년 10월 가형 18번 / 정답률 76 %]

08 평면 α 위에 거리가 4인 두 점 A, C와 중심이 C이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 점 A에서 이 원에 그은 접선의 접점을 B라 하자. 점 B를 지나고 평면 α와 수직인 직선 위에 $\overline{BP}=2$가 되는 점을 P라 할 때, 점 C와 직선 AP 사이의 거리는? [4점]

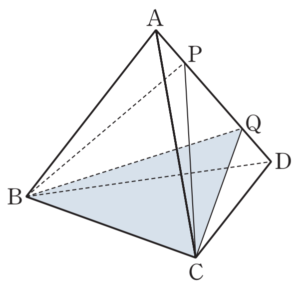
① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

정답과 해설 342쪽

[2015년 10월 B형 26번 / 정답률 75 %]

09 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 평면 PBC와 QBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[2014학년도 수능 B형 19번 / 정답률 74 %]

10 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정답률 60 % 미만

[2008년 9월 가형 9번 / 정답률 49 %]

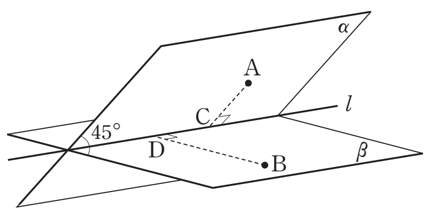
11 다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는? [3점]

> 좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$에 동시에 외접한다.

① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$ ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

[2016년 9월 가형 29번 / 정답률 48 %]

12 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 45°인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 30°일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



Ⅲ 공간도형과 공간좌표

탐구 학습

p. 266~267

1 정삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영인 삼각형 GBC의 평면 ABC 위로의 정사영이 삼각형 EBC이다.

삼각형 EBC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{36}a^2$이다.

선분 BC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

또, 삼각형 EBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EM}=\frac{a}{2}\times\overline{EM}$

이므로

$\frac{a}{2}\times\overline{EM}=\frac{\sqrt{3}}{36}a^2$, 즉 $\overline{EM}=\frac{\sqrt{3}}{18}a$

$\therefore\ \overline{AE}=\overline{AM}-\overline{EM}=\frac{4\sqrt{3}}{9}a$

답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}a$

2 정삼각형 ABC에 내접하는 원 O의 반지름의 길이를 r라고 하면 원 O의 중심은 정삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로 $\frac{1}{2}\times a\times r\times 3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$에서 $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

따라서 원 O의 넓이는 $\pi r^2=\frac{a^2}{12}\pi$

이때 $\cos^2\theta=\frac{1}{9}$이므로 도형 O″의 넓이는

$\frac{a^2}{12}\pi\times\cos^2\theta=\frac{a^2}{12}\pi\times\frac{1}{9}=\frac{a^2}{108}\pi$

답 $\frac{a^2}{108}\pi$

3 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{0}{4}, \frac{-16}{4}, \frac{-4}{4}\right)$, 즉 $(0,\ -4,\ -1)$

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{12}{2}, \frac{4}{2}, \frac{10}{2}\right)$, 즉 $(6,\ 2,\ 5)$

이때 선분 PQ의 중점 C의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$, 즉 $(3,\ -1,\ 2)$

이므로 구의 반지름의 길이는

$\overline{PC}=\overline{QC}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(3\sqrt{3})^2$

즉, $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=27$

답 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=27$

4 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{0}{3}, \frac{5+4}{3}, \frac{6+0}{3}\right)$, 즉 $(0,\ 3,\ 2)$

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2+2}{-1}, \frac{5-4}{-1}, \frac{6-0}{-1}\right)$, 즉 $(-4,\ -1,\ -6)$

이때 선분 PQ의 중점 C의 좌표는

$\left(\frac{0-4}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{2-6}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ 1,\ -2)$

이므로 구의 반지름의 길이는

$\overline{PC}=\overline{QC}=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=(2\sqrt{6})^2$

즉, $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$

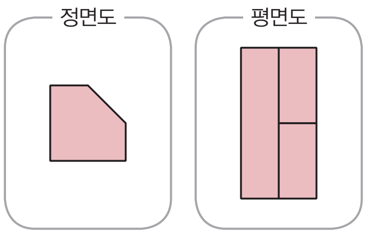
답 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$

활동지 함께 생각하는 탐구

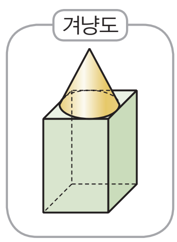
p. 268~269

1 공간도형

1



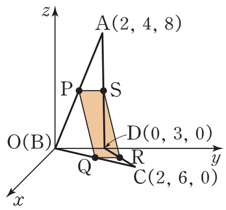
2 예시



2 공간좌표

1 (1) 도형 PQRS가 어떤 도형이 되는지 확인한다.
(2) 네 점 P, Q, R, S는 차례로 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 중점이다.
(3) 각 꼭짓점에 좌표를 도입하여 $\overline{PR}$와 $\overline{QS}$의 중점의 좌표를 각각 구한다.

1-1 예시 점 A의 좌표: $(2,\ 4,\ 8)$
점 B의 좌표: $(0,\ 0,\ 0)$
점 C의 좌표: $(2,\ 6,\ 0)$
점 D의 좌표: $(0,\ 3,\ 0)$



1-2 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{4+0}{2},\ \frac{8+0}{2}\right)=(1,\ 2,\ 4)$

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{0+6}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)=(1,\ 3,\ 0)$

점 R의 좌표는 $\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{6+3}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)=\left(1,\ \frac{9}{2},\ 0\right)$

점 S의 좌표는 $\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{4+3}{2},\ \frac{8+0}{2}\right)=\left(1,\ \frac{7}{2},\ 4\right)$

1-3 선분 PR의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{2+\frac{9}{2}}{2},\ \frac{4+0}{2}\right),\ \text{즉 } \left(1,\ \frac{13}{4},\ 2\right)$$

선분 QS의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{3+\frac{7}{2}}{2},\ \frac{0+4}{2}\right),\ \text{즉 } \left(1,\ \frac{13}{4},\ 2\right)$$

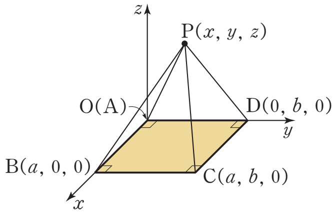
1-4 사각형 PQRS에서 두 대각선의 중점이 일치하므로 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
따라서 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

2 (1) $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립함을 확인한다.
(2) 사각형 ABCD는 직사각형이다.
(3) 네 점 A, B, C, D와 점 P에 좌표를 도입한다.

2-1 다음 그림과 같이 직사각형의 네 꼭짓점 A, B, C, D와 점 P를

$A(0,\ 0,\ 0)$, $B(a,\ 0,\ 0)$, $C(a,\ b,\ 0)$, $D(0,\ b,\ 0)$,
$P(x,\ y,\ z)$

로 놓자.



2-2 $\overline{PA}^2=x^2+y^2+z^2$
$\overline{PB}^2=(x-a)^2+y^2+z^2$
$\overline{PC}^2=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$
$\overline{PD}^2=x^2+(y-b)^2+z^2$

2-3 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$
$=(x^2+y^2+z^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\}$
$=x^2+(x-a)^2+y^2+(y-b)^2+2z^2$
이고
$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$
$=\{(x-a)^2+y^2+z^2\}+\{x^2+(y-b)^2+z^2\}$
$=x^2+(x-a)^2+y^2+(y-b)^2+2z^2$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립한다.

형성 평가

p. 270~275

1-1. 직선, 평면의 위치 관계

1 구하는 평면은 세 꼭짓점 A, B, E로 이루어진 평면 ABED와 꼭짓점 한 개와 모서리 DF로 이루어진 평면 ADFC, BFD, EFD이다.
따라서 서로 다른 평면의 개수는 **4**이다.

2 (1) 모서리 AD와 한 점에서 만나는 모서리는 모서리 AE, AB, DH, DC의 **4개**이다.
(2) 모서리 AE와 평행한 모서리는 모서리 BF, CG, DH의 **3개**이다.
(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 DH, EH, FG, CG의 **4개**이다.

(4) 모서리 AD를 포함하는 면은 면 ABCD, AEHD의 **2개**이다.

(5) 모서리 AE와 평행한 면은 면 BFGC, DHGC의 **2개**이다.

(6) 모서리 AB와 한 점에서 만나는 면은 면 AEHD, BFGC의 **2개**이다.

(7) 면 AEFB와 만나는 면은 면 AEHD, EFGH, BFGC, ABCD의 **4개**이다.

(8) 면 AEFB와 평행한 면은 면 DHGC의 **1개**이다.

3 (1) 직선 AC와 직선 DB는 정사각형 ABCD의 두 대각선이고 두 대각선은 서로 수직이므로 두 직선이 이루는 각의 크기는 **90°**이다.

(2) 직선 AC와 직선 CG는 수직이고, 직선 CG는 직선 BF와 평행하므로 직선 AC와 직선 BF가 이루는 각의 크기는 **90°**이다.

(3) 직선 HG와 직선 DC는 서로 평행하고, 직각이등변삼각형 ADC에서 직선 AC와 직선 DC가 이루는 각의 크기는 45°이므로 직선 AC와 직선 HG가 이루는 각의 크기는 **45°**이다.

(4) 직선 DE와 직선 CF는 서로 평행하고, 삼각형 ACF는 정삼각형이므로 직선 AC와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 **60°**이다.

(5) 모서리 AB와 수직인 평면은 **평면 AEHD, BFGC**이다.

(6) 모서리 AB와 평행한 평면은 **평면 EFGH, HGCD**이다.

1-2. 삼수선 정리

1 ❶ $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\boxed{\overline{PH}\perp l}$

❷ $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\boxed{\overline{OH}\perp l}$

❸ $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\boxed{\overline{PO}\perp\alpha}$

2 **이면각**

3 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{AB}\perp\overline{OH}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$이다.

(1) 직각삼각형 AHP에서 $\overline{AP}=5\sqrt{2}$, $\overline{AH}=5$이므로

$\overline{PH}^2=\overline{AP}^2-\overline{AH}^2=50-25=25$

또, 직각삼각형 POH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{PH}^2-\overline{PO}^2}=\sqrt{25-16}=\mathbf{3}$

(2) 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{64+80}=12$

또, 직각삼각형 AHP에서

$\overline{AP}^2=\overline{AH}^2+\overline{PH}^2=25+144=13^2$

$\therefore \overline{AP}=\mathbf{13}$

(3) 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{48+16}=8$

또, 직각삼각형 AHP에서

$\overline{AH}^2=\overline{AP}^2-\overline{PH}^2=100-64=36$

$\therefore \overline{AH}=\mathbf{6}$

4 두 평면 α, β의 교선을 m이라고 하면 가정에 의하여 $l\perp\alpha$이고 직선 m은 평면 α 위에 있으므로

$l\perp m$ ……①

또, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하고, 점 O를 지나고 직선 m에 수직인 직선 n을 평면 α 위에 그으면

$m\perp n$ ……②

①, ②에 의하여 두 평면 α, β의 이면각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 $l\perp\alpha$이고 n은 α 위에 있으므로 $l\perp n$이다.

따라서 $\alpha\perp\beta$이다.

1-3. 정사영

1 (1) 점 A의 평면 FGHIJ 위로의 정사영은 **점 F**이다.

(2) 선분 CJ의 평면 FGHIJ 위로의 정사영은 **선분 HJ**이다.

(3) 선분 BG의 평면 FGHIJ 위로의 정사영은 **점 G**이다.

(4) 삼각형 AGD의 평면 FGHIJ 위로의 정사영은 **삼각형 FGI**이다.

2 (1) $\cos\theta=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=\mathbf{45°}$

(2) $\overline{AB}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\cos\theta}=8\div\dfrac{1}{2}=\mathbf{16}$

3 (1) $\cos\theta=\dfrac{S'}{S}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\theta=\mathbf{60°}$

(2) $S=\dfrac{S'}{\cos\theta}=6\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{6\sqrt{2}}$

4 삼각형 EGD의 무게중심을 I라고 하면 선분 DB의 평면 EGD 위로의 정사영은 선분 DI이다.
정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면
$\overline{EG}=\overline{GD}=\overline{DE}=\overline{DB}=\sqrt{2}a$
이므로 정삼각형 EGD의 높이는
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$
$\therefore\ \overline{DI}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$
$\overline{DB}\times\cos\theta=\overline{DI}$이므로
$\cos\theta=\dfrac{\overline{DI}}{\overline{DB}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\times\dfrac{1}{\sqrt{2}a}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

2-1. 점의 좌표

1 (1) 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면 점 P에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ 0,\ c)$이므로 $c=-3$
또, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a,\ b,\ 0)$이므로 $a=2,\ b=-3$
따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{(2,\ -3,\ -3)}$이다.
(2) 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면 zx평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -b,\ c)$이므로
$a=-5,\ b=1,\ c=4$
따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{(-5,\ 1,\ 4)}$이다.

2 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-1-3)^2+(5-2)^2}$
$=\sqrt{25+16+9}=\mathbf{5\sqrt{2}}$
(2) $\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\sqrt{36}=\mathbf{6}$

3 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(a+5)^2+(3+1)^2}=9$이므로
$16+(a+5)^2+16=81,\ a^2+10a-24=0,$
$(a+12)(a-2)=0$
$\therefore\ a=-12$ 또는 $a=2$
따라서 양수 a의 값은 **2**이다.

4 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ 0)$이라고 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로
$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2,\ \overline{PB}^2=\overline{PC}^2$
(i) $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서
$(a-3)^2+(b-1)^2+(0-5)^2$
$=(a-0)^2+(b+2)^2+(0-1)^2,$
$a^2+b^2-6a-2b+35=a^2+b^2+4b+5$
$\therefore\ a+b=5$ ……①
(ii) $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서
$(a-0)^2+(b+2)^2+(0-1)^2$
$=(a+3)^2+(b-2)^2+(0+2)^2,$
$a^2+b^2+4b+5=a^2+b^2+6a-4b+17$
$\therefore\ 3a-4b=-6$ ……②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$
따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{(2,\ 3,\ 0)}$이다.

2-2. 선분의 내분과 외분

1 (1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{3\times1+1\times5}{3+1},\ \dfrac{3\times5+1\times1}{3+1},\ \dfrac{3\times2+1\times(-4)}{3+1}\right),$
즉 $\mathbf{\left(2,\ 4,\ \dfrac{1}{2}\right)}$
(2) 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{3\times1-1\times5}{3-1},\ \dfrac{3\times5-1\times1}{3-1},\ \dfrac{3\times2-1\times(-4)}{3-1}\right),$
즉 $\mathbf{(-1,\ 7,\ 5)}$
(3) 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{-4+2}{2}\right)$, 즉 $\mathbf{(3,\ 3,\ -1)}$

2 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times(-8)+2\times4}{1+2},\ \dfrac{1\times(-4)+2\times8}{1+2},\ \dfrac{1\times4+2\times(-2)}{1+2}\right),$
즉 $(0,\ 4,\ 0)$
선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times(-8)-2\times4}{1-2},\ \dfrac{1\times(-4)-2\times8}{1-2},\ \dfrac{1\times4-2\times(-2)}{1-2}\right),$
즉 $(16,\ 20,\ -8)$
따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{0+16}{2},\ \dfrac{4+20}{2},\ \dfrac{0-8}{2}\right)$, 즉 $\mathbf{(8,\ 12,\ -4)}$

3 꼭짓점 B의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면 평행사변형의 성질에 의하여 선분 OB의 중점과 선분 AC의 중점은 일치한다.
$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{-4+2}{2},\ \frac{7+3}{2}\right),\ \text{즉 } (4,\ -1,\ 5)$$

이고, $\overline{OB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$이므로

$a=8,\ b=-2,\ c=10$

따라서 꼭짓점 B의 좌표는 **(8, −2, 10)**이다.

4 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{a+0+8}{3},\ \frac{-1+3+4}{3},\ \frac{2-2+b}{3}\right),$$

즉 $\left(\frac{a+8}{3},\ 2,\ \frac{b}{3}\right)$

따라서 $\frac{a+8}{3}=4,\ 2=c,\ \frac{b}{3}=-1$이므로

$a=4,\ b=-3,\ c=2 \qquad \therefore a+b+c=\mathbf{3}$

2-3. 구의 방정식

1 (1) 중심의 좌표가 $(-1,\ 3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=4}$$

(2) 중심의 좌표가 $(1,\ -3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=r^2$

이때 점 $(-1,\ -1,\ -1)$을 지나므로

$(-1-1)^2+(-1+3)^2+(-1+2)^2=r^2$, 즉 $r^2=9$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9}$$

2 (1) 구 $(x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=16$의 중심의 좌표는 $(2,\ 5,\ -3)$이고 반지름의 길이는 4이므로

$a=2,\ b=5,\ c=-3,\ r=4$

$\therefore a+b+c+r=\mathbf{8}$

(2) 구 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(-1,\ 2,\ 1)$이고 반지름의 길이는 3이다.

따라서 $a=-1,\ b=2,\ c=1,\ r=3$이므로

$a+b+c+r=\mathbf{5}$

3 $x^2+y^2+z^2+6x-4y+2z+13=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-3,\ 2,\ -1)$

또, $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+17=0$을 변형하면

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(2,\ -1,\ 4)$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+3)^2+(-1-2)^2+(4+1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{59}}$

4 구 $x^2+y^2+z^2+10x-8y-4z+k=0$을 변형하면

$(x+5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=45-k$

이때 구의 중심을 C라고 하면 점 C의 좌표는 $(-5,\ 4,\ 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{45-k}$이다.

또, 중심 C에서 z축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는 $(0,\ 0,\ 2)$이다.

그런데 주어진 구가 z축과 한 점에서 만나므로 $\overline{CH}$는 반지름의 길이와 같다. 따라서

$r=\overline{CH}=\sqrt{(0+5)^2+(0-4)^2}=\sqrt{45-k},$

$41=45-k$, 즉 $k=4$

또, 구의 반지름의 길이 r는 $\sqrt{41}$이므로

$r^2-k^2=41-16=\mathbf{25}$

중단원 수준별 문제

1 공간도형

p. 276~278

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 ④	05 ⑤
06 ②	07 ③	08 ④	09 ③	10 ③
11 ③	12 ③	13 ①	14 ②	

01 ㄱ. 직선 AB는 평면 DJKE와 평행하다. (참)

ㄴ. 두 직선 AG와 IJ는 서로 꼬인 위치에 있으므로 평행하지 않다. (거짓)

ㄷ. 두 직선 CD와 BH는 수직이다. (참)

ㄹ. 두 평면 BHGA와 CIJD는 평행하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 ① $l\perp m$이고 $l\,/\!/\,\alpha$이면 $m\,/\!/\,\alpha$이다. (거짓)

[반례] $l\perp m,\ l\,/\!/\,\alpha,\ m\perp\alpha$가 존재한다.

② $l\perp\alpha$이고 $m\perp\alpha$이면 $l\perp m$이다. (거짓)

[반례] $l\perp\alpha,\ m\perp\alpha,\ l\,/\!/\,m$이 존재한다.

③ $l /\!/ \alpha$이고 $m /\!/ \alpha$이면 $l /\!/ m$이다. (거짓)
[반례] $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$, $l \perp m$이 존재한다.
④ $l \perp \alpha$이고 $l \perp \beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다. (참)
⑤ $l /\!/ \alpha$이고 $\alpha \perp \beta$이면 $l \perp \beta$이다. (거짓)
[반례] $l /\!/ \alpha$, $\alpha \perp \beta$, $l /\!/ \beta$가 존재한다.

03 $\overline{PO} \perp \alpha$이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{PH} \perp \overline{AB}$
따라서 직각삼각형 POH에서
$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{32+16}=4\sqrt{3}$
또, 직각삼각형 PHA에서
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{PH}^2}=\sqrt{48+48}=4\sqrt{6}$

04 $8\cos\theta=4$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$
이때 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$

05 밑면인 원의 넓이를 S'이라고 하면 $S'=9\pi$
이때 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 자른 단면의 넓이를 S라고 하면 $S\cos 60^\circ=S'$이므로
$S\times\frac{1}{2}=9\pi \qquad \therefore S=18\pi$

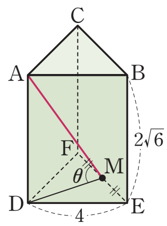
06 두 직선 DB와 HF는 서로 평행하므로 두 직선 AH와 DB가 이루는 각의 크기는 두 직선 AH와 HF가 이루는 각의 크기와 같다.
또, 삼각형 AFH는 모든 변의 길이가 같은 정삼각형이므로 두 직선 AH와 HF가 이루는 각의 크기는 60°이다.
따라서 $\theta=60^\circ$이므로 $\cos\theta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

07 $\overline{PO} \perp \alpha$이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{PH} \perp \overline{AB}$
따라서 직각삼각형 PAH에서
$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{100-64}=6$
또, 직각삼각형 PHO에서
$\overline{OH}=\sqrt{\overline{PH}^2-\overline{PO}^2}=\sqrt{36-27}=3$

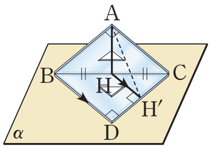
08 $\overline{AD} \perp \overline{DB}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$이므로
$\overline{AD} \perp$ (평면 DBC)
이고 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{DH} \perp \overline{BC}$
직각삼각형 DBC에서
$\overline{BC}=\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}=\sqrt{144}=12$
그런데 △DBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{DC}=\frac{1}{2}\times\overline{DH}\times\overline{BC}$
이므로
$\overline{DH}=\frac{\overline{DB}\times\overline{DC}}{\overline{BC}}=\frac{6\times 6\sqrt{3}}{12}=3\sqrt{3}$
따라서 직각삼각형 ADH에서
$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{DH}^2}$
$=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2}=9$

09 $\overline{CH} \perp$ (지면)이고 $\overline{HB} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{CB} \perp \overline{AB}$
따라서 직각삼각형 ABC에서 $\angle CAB=30^\circ$이므로
$\overline{CB}=10\sqrt{15}\times\tan 30^\circ=10\sqrt{15}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=10\sqrt{5}$ (m)
또, 직각삼각형 CHB에서
$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{(10\sqrt{5})^2-10^2}=20$ (m)
$\therefore k=20$

10 정삼각형 DEF에서
$\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$
이고 $\overline{DM} \perp \overline{FE}$이다.
직각삼각형 ADM에서
$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DM}^2}$
$=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(2\sqrt{3})^2}=6$
또, $\overline{AD} \perp \overline{DM}$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{AM} \perp \overline{FE}$
즉, $\overline{AM} \perp \overline{FE}$이고 $\overline{DM} \perp \overline{FE}$이므로 $\overline{AM}$과 $\overline{DM}$이 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$과 밑면 DEF가 이루는 각의 크기 θ와 같다.
$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{DM}}{\overline{AM}}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



11 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H에서 선분 DC에 내린 수선의 발을 H′이라고 하자.



$\overline{AH}\perp\alpha$이고 $\overline{HH'}\perp\overline{DC}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{AH'}\perp\overline{DC}$

직각삼각형 ABC에서 수선 AH는 변 BC를 수직이등분하므로 점 H는 선분 BC의 중점이고

$\overline{AH}=\sqrt{2}$

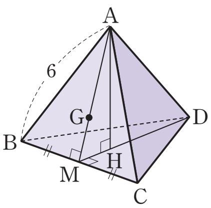
또, 직각삼각형 BDC에서 직선 BD와 직선 HH′은 서로 평행하므로

$\overline{HH'}=\frac{1}{2}\overline{BD}=1$

따라서 점 A와 직선 DC 사이의 거리는 $\overline{AH'}$이므로 직각삼각형 AHH′에서

$\overline{AH'}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HH'}^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

12 오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의 중점을 M, 꼭짓점 A의 밑면 BCD 위로의 정사영을 점 H라고 하자.



이때 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이 된다.

한편, $\overline{AH}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HM}\perp\overline{BC}$이다. 또

$\overline{DM}=\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

$\overline{AG}=\frac{2}{3}\times\overline{AM}=2\sqrt{3}$

$\overline{HM}=\frac{1}{3}\times\overline{DM}=\sqrt{3}$

직선 AG와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 직각삼각형 AHM에서

$\cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

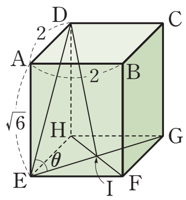
따라서

$l=\overline{AG}\times\cos\theta=2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

이므로

$3l=2\sqrt{3}$

13 오른쪽 그림과 같이 밑면의 두 대각선의 교점을 I라고 하면



$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{HI}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{DI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 DEH에서

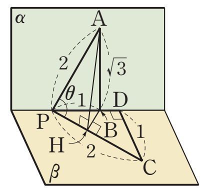
$\overline{DE}=\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$이고

$\overline{EI}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 DEI에서

$\cos\theta=\frac{\overline{EI}}{\overline{DE}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

14 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 선분 PC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{AB}\perp\beta$이고 $\overline{BH}\perp\overline{PC}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp\overline{PC}$

또, 두 직각삼각형 PBH, PCD는 서로 닮음이므로

$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BH}:\overline{CD}$에서

$1:2=\overline{BH}:1 \qquad \therefore \overline{BH}=\frac{1}{2}$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BH}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{4}}$

이므로 직각삼각형 PHA에서

$\sin\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{PA}}=\sqrt{\frac{13}{4}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

2 공간좌표 p. 279~281

01 ⑤	02 ④	03 ③	04 ⑤	05 ④
06 ④	07 ④	08 ①	09 ①	10 ④
11 ③	12 ②	13 ⑤	14 ①	15 ④
16 ②	17 ③			

01 점 $P(a, b, c)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -b, -c)$

점 $Q(c-5, -2a, c-3a)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-c+5, -2a, c-3a)$

$\therefore a=-c+5$, $-b=-2a$, $-c=c-3a$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$b=2a$, $c=\frac{3}{2}a$, $a=-\frac{3}{2}a+5$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=3$이므로
$a+b+c=9$

02 점 P$(-3,\ 1,\ -2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 Q$(3,\ 1,\ 2)$이고, zx평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 R$(-3,\ -1,\ -2)$이므로
$\overline{QR}=\sqrt{6^2+2^2+4^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

03 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서
$\overline{PA}^2=(a-1)^2+3^2+4^2=a^2-2a+26$
$\overline{PB}^2=(a-3)^2+1^2+2^2=a^2-6a+14$
$a^2-2a+26=a^2-6a+14$
$4a=-12$ $\quad\therefore a=-3$

04 두 점 A$(-3,\ 4,\ 2)$, B$(2,\ -1,\ 5)$의 xy평면 위로의 정사영은 각각 $(-3,\ 4,\ 0)$, $(2,\ -1,\ 0)$이므로 정사영의 길이는
$\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

05 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$$\left(\frac{2+b+3}{3},\ \frac{-4+4+c}{3},\ \frac{a+3+1}{3}\right)=(4,\ 0,\ 3)$$
따라서 $a=5$, $b=7$, $c=0$이므로 $a+b+c=12$

06 구의 중심 $(3,\ -2,\ 4)$에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ -2,\ 0)$이다.
따라서 이 구의 반지름의 길이는
$\sqrt{3^2+0+4^2}=5$

07 zx평면에서 선분 AB 위를 움직이는 점 Q의 속도가 매초 $\sqrt{2}$이므로 점 Q는 $t(t>0)$초의 시간이 지나면 점 A에서 x축의 방향으로 $-t$만큼, z축의 방향으로 t만큼 이동하게 된다.
따라서 t초 후의 점 Q의 좌표는 $(12-t,\ 0,\ t)$이다.
또, t초 후의 점 P의 좌표는 $(0,\ t,\ 0)$이다.
이때
$$\overline{PQ}^2=(12-t)^2+(-t)^2+t^2$$
$$=3t^2-24t+144=3(t-4)^2+96$$
이므로 $t=4$일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 된다.
$\therefore a=4$

08 P$(a,\ b,\ 0)$이라고 하면
$$a=\overline{OP}\cos 60^\circ=6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3},$$
$$b=\overline{OP}\sin 60^\circ=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$$
Q$(0,\ c,\ d)$라고 하면
$$c=\overline{OQ}\cos 45^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4,$$
$$d=\overline{OQ}\sin 45^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$
이므로
$$\overline{PQ}^2=(a-0)^2+(b-c)^2+(0-d)^2$$
$$=27+25+16=68$$

09 두 점 A$(2,\ -3,\ 4)$, B$(-1,\ 2,\ 3)$의 yz평면 위로의 정사영을 A′, B′이라고 하면
A′$(0,\ -3,\ 4)$, B′$(0,\ 2,\ 3)$
$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서
$$\sqrt{0+5^2+(-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}\cos\theta,$$
$\sqrt{26}=\sqrt{35}\cos\theta$, 즉 $\cos^2\theta=\frac{26}{35}$
$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{9}{35}$, 즉 $a=\frac{9}{35}$

10 두 점 A$(a,\ b,\ c)$, B$(3,\ 1,\ -3)$을 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는
$$\left(\frac{3-2a}{1-2},\ \frac{1-2b}{1-2},\ \frac{-3-2c}{1-2}\right)=(-1,\ -3,\ -5)$$
이므로
$a=1$, $b=-1$, $c=-4$
또, 두 점 A$(1,\ -1,\ -4)$, B$(3,\ 1,\ -3)$을 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는
$$\left(\frac{1\times3+2\times1}{1+2},\ \frac{1\times1+2\times(-1)}{1+2},\ \frac{1\times(-3)+2\times(-4)}{1+2}\right),$$
즉 $\left(\frac{5}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{11}{3}\right)$
$$\therefore \overline{PQ}^2=\left(-1-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-5+\frac{11}{3}\right)^2$$
$$=16$$

11 네 점을 지나는 구의 방정식을

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

이라고 하자.

이 방정식에 $(0, 0, 0)$, $(1, -3, 0)$, $(1, 1, -4)$, $(3, -3, 0)$을 차례로 대입하여 정리하면

$$d=0,\ a-3b+10+d=0,\ a+b-4c+18+d=0,$$
$$3a-3b+18+d=0$$

위의 네 식을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ b=2,\ c=4,\ d=0$$

따라서 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z=0$$

즉, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3^2$

이므로 반지름의 길이는 3이다.

12 삼각형 PQR의 무게중심과 삼각형 ABC의 무게중심은 서로 같으므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하면

$$\left(\frac{1-1+6}{3},\ \frac{-3+4+2}{3},\ \frac{1+7+4}{3}\right),\text{ 즉 } (2,\ 1,\ 4)$$

$\therefore\ a+b+c=7$

13 구가 x축, y축, z축에 동시에 접할 때는 구의 중심에서 x축, y축, z축에 이르는 거리가 모두 반지름의 길이와 같아야 하므로 $a=b=c=6$이다.

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=108$

14 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 중심을 $O(0, 0, 0)$, 반지름의 길이를 $r=1$이라고 하자. 또, 구

$$x^2+y^2+z^2+12x-4y-6z+33=0$$

즉, $(x+6)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4^2$

의 중심을 $O'(-6, 2, 3)$, 반지름의 길이를 $r'=4$라고 하자.

이때 두 중심 사이의 거리는

$$\overline{OO'}=\sqrt{(-6)^2+2^2+3^2}=7$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$$\overline{OO'}+r+r'=7+1+4=12$$

이고, 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$\overline{OO'}-r-r'=7-1-4=2$$

이므로 그 합은 14이다.

15 구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라고 하면 구가 xy평면에 접하므로 구의 반지름의 길이는 $|c|$이다.

구의 방정식을

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$$

으로 놓고 두 점 $A(1, -2, 2)$, $B(1, -1, 1)$을 대입하면

$$(1-a)^2+(-2-b)^2+(2-c)^2=c^2 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$(1-a)^2+(-1-b)^2+(1-c)^2=c^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

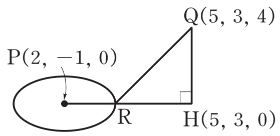
①−②를 하면 $2b-2c+6=0$, 즉 $b=c-3$

이를 다시 ①에 대입하면

$$(1-a)^2+c^2-2c+1+c^2-4c+4=c^2,$$
$$(1-a)^2+c^2-6c+5=0,$$
$$(1-a)^2=-(c^2-6c+5)\ge 0,$$
$$c^2-6c+5\le 0,\ (c-1)(c-5)\le 0$$
$$\therefore\ 1\le c\le 5$$

따라서 반지름의 길이 c의 최댓값은 5, 최솟값은 1이므로 그 차는 4이다.

16 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 원 C가 만나는 교점을 R라고 하자.



점 $H(5, 3, 0)$이므로 $\overline{QH}=4$이고

$\overline{PH}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$이므로 $\overline{RH}=5-2=3$

점 $Q(5, 3, 4)$와 원 C 위의 점 사이의 거리의 최솟값은 $\overline{QR}$이므로 직각삼각형 QHR에서

$$\overline{QR}=\sqrt{\overline{QH}^2+\overline{RH}^2}=\sqrt{16+9}=5$$

17 구와 y축의 교점의 좌표를 $(0, k, 0)$이라 하고 구의 방정식에 이를 대입하면

$$16+(k+3)^2+4=36,\ (k+3)^2=16$$
$$k=-7 \text{ 또는 } k=1$$
$$\therefore\ \overline{BC}=1-(-7)=8$$

또, 구의 반지름의 길이가 6이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$이다.

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=6+6+8=20$$

중단원 서술형 문제

1 공간도형 p. 282~283

1 (가) 평행 (나) 꼬인 위치 (다) 교선 (라) 수직

2 (가) 수선의 발 (나) $\overline{PO}$ (다) $\overline{OH}$ (라) $\overline{PH}$

3 (가) $\perp$ (나) $\perp$ (다) $\overline{AG}$

4 (가) 이면각 (나) 정사영 (다) $\cos\theta$

5 [단계 1]
풍선의 중심을 지나는 단면의 넓이 S는
$S=\pi r^2\,(\mathrm{cm}^2)$
[단계 2]
그림자의 넓이를 $S'=380\pi\ \mathrm{cm}^2$라고 하면
$S'\cos 18°=S'\sin 72°=S$
[단계 3]
$\pi r^2=380\pi\times 0.95=361\pi \qquad \therefore\ r=19\,(\mathrm{cm})$

6 [단계 1]
$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EM}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{EM}$이다.
[단계 2]
$$(\triangle\text{HEM의 넓이})=\frac{1}{2}\times(\square\text{HEFG의 넓이})=\frac{1}{2}\times 4^2=8$$
이고, 직각삼각형 EFM에서
$$\overline{EM}=\sqrt{\overline{EF}^2+\overline{MF}^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$$
이다. 또,
$$(\triangle\text{HEM의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{EM}\times\overline{HI}$$
에서 $8=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\overline{HI}$이므로
$$\overline{HI}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
[단계 3]
직각삼각형 DHI에서
$$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{16+\frac{64}{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

7 수준 1

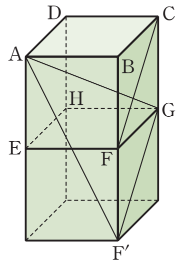
㉮ $\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

㉯ 직각삼각형 PAH에서
$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{100-64}=6$

㉰ 따라서 직각삼각형 PHO에서
$\overline{OH}=\sqrt{\overline{PH}^2-\overline{PO}^2}=\sqrt{36-27}=3$

채점 기준	배점
㉮ 삼수선 정리를 이용하여 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$임을 보이기	2점
㉯ $\overline{PH}$의 길이 구하기	2점
㉰ $\overline{OH}$의 길이 구하기	2점

수준 2



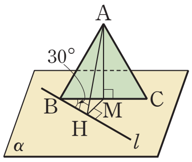
㉮ 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 붙여 직육면체를 만들면 $\overline{CF}\,/\!/\,\overline{GF'}$이므로 두 직선 AG와 CF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AG와 GF′이 이루는 각의 크기와 같다.

㉯ 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면
$\overline{GF'}=\sqrt{2}\,a,\ \overline{AG}=\sqrt{3}\,a,\ \overline{AF'}=\sqrt{5}\,a$
이므로
$\overline{GF'}^2+\overline{AG}^2=\overline{AF'}^2$

㉰ 따라서 $\theta=90°$이므로 $\sin\theta=1$

채점 기준	배점
㉮ 합동인 두 정육면체를 붙여 $\overline{CF}\,/\!/\,\overline{GF'}$임을 보이기	4점
㉯ $\overline{GF'}$, $\overline{AG}$, $\overline{AF'}$의 길이 구하기	2점
㉰ $\sin\theta$의 값 구하기	2점

수준 3



㉮ 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 M, 점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AM}\perp\alpha$, $\overline{MH}\perp l$이므로 삼수선 정리에 의하여
$\overline{AH}\perp l$

㉯ 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라고 하면
$$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}a$$
이고, $\angle\text{MBH}=30°$이므로 직각삼각형 MBH에서
$$\overline{BH}=\overline{BM}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{4}a$$

㉰ 따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

채점 기준	배점
㉮ 삼수선 정리 이용하기	4점
㉯ $\overline{\mathrm{BH}}$의 길이 구하기	3점
㉰ $\cos\theta$의 값 구하기	3점

2 공간좌표 p. 284~285

1 (가) $b-a-1$ (나) $a+b-1$ (다) 1 (라) 1

2 (가) $(a-3)^2+(b-3)^2+1$ (나) $(a-5)^2+(b-4)^2+1$

(다) $2a+2b-11=0$ (라) 6 (마) $-\frac{1}{2}$

3 (가) $\left(\frac{24+2a}{5}, \frac{9+2b}{5}, \frac{18+2c}{5}\right)$

(나) $\left(\frac{16-3a}{-1}, \frac{6-3b}{-1}, \frac{12-3c}{-1}\right)$

(다) -12 (라) 4 (마) -6

4 (가) $2:1$ (나) $\left(\frac{4+a}{3}, \frac{2+b}{3}, \frac{-12+c}{3}\right)$

(다) 11 (라) 7 (마) $(11, 7, 3)$

5 [단계 1]

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3+0}{3}, \frac{4-4}{3}, \frac{-2+8}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 0, 2)$$

[단계 2]

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{6-0}{1}, \frac{8+2}{1}, \frac{-4-4}{1}\right), \text{ 즉 } (6, 10, -8)$$

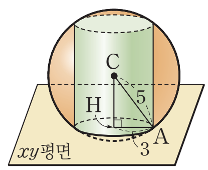
[단계 3]

선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+6}{2}, \frac{0+10}{2}, \frac{2-8}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{7}{2}, 5, -3\right)$$

$$\therefore a+b+c=\frac{7}{2}+5-3=\frac{11}{2}$$

6 [단계 1]



오른쪽 그림과 같이 구

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-4)^2=5^2$$

과 xy평면의 교선은 원이므로

$z=0$을 대입하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=3^2$$

이때 원의 중심은 $\mathrm{H}(a, b, 0)$이고 반지름의 길이는 3이다.

[단계 2]

$\mathrm{C}(a, b, 4)$이고 $\mathrm{H}(a, b, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=4$

[단계 3]

원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 3이고 높이는

$2\overline{\mathrm{CH}}=8$이므로 그 부피는

$$3^2\times8\times\pi=72\pi$$

7 수준 1

㉮ 구 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$의 중심을 A라고 하면 $\mathrm{A}(1, 3, 2)$이고 반지름의 길이는 2이다.

㉯ 이 구에 외접하는 구의 중심을 $\mathrm{B}(-1, -1, -2)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2+r$

㉰ 따라서 $\sqrt{2^2+4^2+4^2}=2+r$이므로

$$6=2+r, \text{ 즉 } r=4$$

채점 기준	배점
㉮ 구 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$의 중심과 반지름의 길이 구하기	2점
㉯ 두 구의 중심 사이의 거리에 대한 관계식 구하기	2점
㉰ 반지름의 길이 구하기	2점

수준 2

㉮ 구 S를 변형하면

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-2, -3, -1)$이고 반지름의 길이는 3이다.

㉯ 또, 구 T를 변형하면

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=30-k$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1, 3, 1)$이고 반지름의 길이를 r라고 하면 $r=\sqrt{30-k}$이다.

㉰ 두 구 S, T가 서로 만나지 않아야 하므로

(두 구의 중심 사이의 거리)$>3+r$

따라서 $\sqrt{3^2+6^2+2^2}=7$이므로

$$7>3+r, \text{ 즉 } r<4$$

㉱ 이때 $r=\sqrt{30-k}$이므로

$$\sqrt{30-k}<4,\ 30-k<16, \text{ 즉 } 14<k$$

또, $r>0$이므로 $30-k>0$, 즉 $k<30$

$\therefore\ 14<k<30$

따라서 이를 만족하는 자연수 k의 개수는

$30-14-1=15$

채점 기준	배점
㉮ 구 S의 중심과 반지름의 길이 구하기	2점
㉯ 구 T의 중심과 반지름의 길이 구하기	2점
㉰ 두 구가 만나지 않을 조건 사용하기	2점
㉱ k의 값의 범위를 구하여 k의 개수 구하기	2점

수준 3

㉮ 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=5$의 중심의 xy평면 위로의 정사영을 점 H라고 하자.

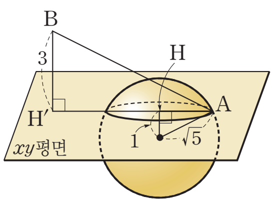
구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

이므로 단면은 중심의 좌표가 $\mathrm{H}(3,\ 4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

㉯ 또, 점 B의 xy평면 위로의 정사영을 점 H′이라고 하면 $\mathrm{H}'(3,\ 0,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{BH}'}=3$이다.

㉰ $\overline{\mathrm{AB}}$의 최댓값은 오른쪽 그림과 같을 때의 점 A의 위치이므로 선분 H′A의 최댓값은



$\overline{\mathrm{H'A}}=\overline{\mathrm{H'H}}+2$

$=4+2=6$

㉱ $\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BH'}}^2+\overline{\mathrm{H'A}}^2}$

$=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

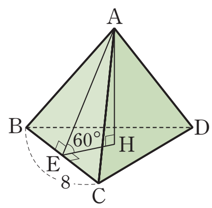
채점 기준	배점
㉮ 단면의 중심과 반지름의 길이 구하기	2점
㉯ 점 B의 xy평면 위로의 정사영과 수선의 길이 구하기	2점
㉰ 선분 AB의 길이가 최대가 될 때의 점 A의 위치를 구해서 $\overline{\mathrm{H'A}}$의 길이 구하기	4점
㉱ $\overline{\mathrm{AB}}$의 최댓값 구하기	2점

대단원 평가 문제

p. 286~287

01 $32\sqrt{3}$	02 5	03 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	04 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$	05 100
06 $\dfrac{32}{5}$	07 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	08 $\sqrt{14}$	09 4	10 90

01 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 E라고 하면 삼수선 정리에 의하여



$\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이고 $\overline{\mathrm{BC}}=8$이므로

$\dfrac{1}{2}\times8\times\overline{\mathrm{AE}}=24\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{AE}}=6$

또, 직각삼각형 AHE에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\sin60^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 사면체 ABCD의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times32\times3\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

02 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고, 직각이등변삼각형 HAB에서

$\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{HB}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

이때 삼각형 HAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HA}}\times\overline{\mathrm{HB}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{HM}}$

이므로

$\overline{\mathrm{HM}}=\dfrac{\overline{\mathrm{HA}}\times\overline{\mathrm{HB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{(3\sqrt{2})^2}{6}=3$

또, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$이고 $\overline{\mathrm{HM}}$은 평면 α 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{HM}}$

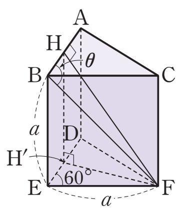
또, $\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

즉, 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{PM}}$의 길이이므로 직각삼각형 PHM에서

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HM}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

03 오른쪽 그림과 같이 두 정사각형 ABED, BEFC의 한 변의 길이를 a, 점 F에서 모서리 ED에 내린 수선의 발을 H′, 점 H′에서 모서리 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{FH'}}\perp\overline{\mathrm{ED}}$이고 $\overline{\mathrm{HH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

그런데 두 직선 AB와 ED는 서로 평행하므로 두 직선 BF와 ED가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BF와 AB가 이루는 예각의 크기와 같다.
따라서 두 직선 BF와 BH가 이루는 예각의 크기는 θ이다.
또, 직각이등변삼각형 BEF에서 $\overline{\mathrm{BF}}=\sqrt{2}a$이고, 직각삼각형 EH′F에서

$$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{EH'}}=a\cos 60^\circ=\frac{a}{2}$$

따라서 직각삼각형 BHF에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{BF}}}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

04 직각삼각형 OAB, OAC에서

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OC}}=3\sqrt{5}$

이등변삼각형 OBC에서 변 BC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CM}}=3$이므로 직각삼각형 OMB에서

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{BM}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$

이때 이등변삼각형 OBC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$$

또, 정삼각형 ABC의 넓이를 S'이라고 하면

$$S'=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$$

평면 OBC와 평면 ABC가 이루는 이면각의 크기를 θ라고 하면 $S\cos\theta=S'$이므로

$$\cos\theta=\frac{9\sqrt{3}}{18}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

정삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}})r=S'$$

이므로

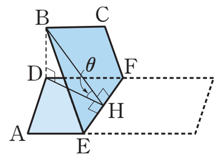
$$\frac{1}{2}\times18r=9\sqrt{3},\ \text{즉}\ r=\sqrt{3}$$

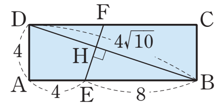
따라서 내접원의 넓이는 $\pi r^2=3\pi$이므로 정삼각형 ABC의 내접원의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이는

$$3\pi\times\cos\theta=3\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$

05 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D이므로 점 D에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라고 하면
$\overline{\mathrm{BD}}\perp$(평면 AEFD)이고 $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BH}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$





따라서 직각삼각형 BDH에서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$이므로
$\overline{\mathrm{DH}}$와 $\overline{\mathrm{BH}}$의 길이를 구해 보자.
위의 그림과 같이 처음 종이에서

$\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AE}}=12-4=8$

이다.
또, 직각삼각형 DAB와 직각삼각형 EHB는 서로 닮음이므로 $\overline{\mathrm{DB}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{EB}}:\overline{\mathrm{HB}}$에서

$$4\sqrt{10}:12=8:\overline{\mathrm{HB}},\ \text{즉}\ \overline{\mathrm{HB}}=\frac{12}{5}\sqrt{10}$$

$$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{DB}}-\overline{\mathrm{HB}}=4\sqrt{10}-\frac{12}{5}\sqrt{10}=\frac{8}{5}\sqrt{10}$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\dfrac{2}{3}$이므로

$$150\cos\theta=150\times\frac{2}{3}=100$$

06 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{6^2+8^2}=10$, $\overline{\mathrm{BC}}=10$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 평면 ABC와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

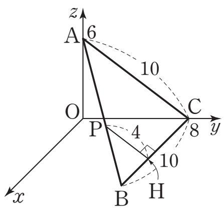
$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

오른쪽 그림에서 두 직각삼각형 ABC와 PBH는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{AC}}$

$\overline{\mathrm{BH}}:10=4:10$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=4$



이때 삼각형 PBH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\times4=8$$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$$8\times\cos\theta=8\times\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$$

07 두 점 A(1, 3, 2), B(4, 7, 7)의 xy평면 위로의 수선의 발을 각각 C, D라고 하면 두 점의 좌표는 C(1, 3, 0), D(4, 7, 0)이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

08 점 P, Q, R, P′, Q′, R′의 좌표는 각각

P(3, 0, 0), Q(0, 9, 0), R(0, 0, 6),

P′(3, 9, 0), Q′(0, 9, 6), R′(3, 0, 6)

따라서 삼각형 PQR의 무게중심 G의 좌표는

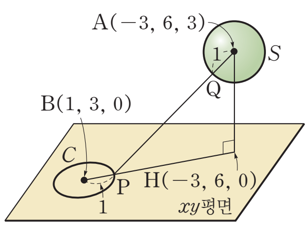
$\left(\frac{3}{3}, \frac{9}{3}, \frac{6}{3}\right)$, 즉 (1, 3, 2)

또, 삼각형 P′Q′R′의 무게중심 G′의 좌표는

$\left(\frac{6}{3}, \frac{18}{3}, \frac{12}{3}\right)$, 즉 (2, 6, 4)

$\therefore \overline{\mathrm{GG'}}=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$

09 다음 그림과 같이 구 S와 원 C의 중심을 각각 A, B라 하고, 점 A의 xy평면 위로의 정사영을 H라고 하자.



선분 PQ의 길이가 최소가 되기 위해서는 점 P는 선분 BH와 원 C의 교점이고, 점 Q는 선분 AP와 구 S의 교점이 되어야 한다.

또, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{BH}}-1=\sqrt{4^2+(-3)^2}-1=5-1=4$,

$\overline{\mathrm{AH}}=3$이므로 직각삼각형 AHP에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2}$

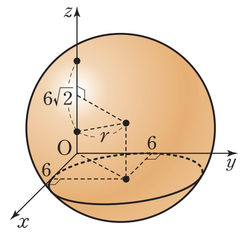
$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AP}}-1=5-1=4$

10 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고, xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 36π이므로 $a=b=6$이고, 원의 반지름의 길이도 6이다.

오른쪽 그림과 같이 구 S의 중심에서 z축까지의 거리는 xy평면에 생기는 원의 중심에서 원점까지의 거리와 같으므로



$\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

한편, 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$이므로

$r^2=(6\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=90$

대단원 기출 모의고사

p. 288~290

01 ④	02 ①	03 ③	04 ①	05 ③
06 ②	07 ②	08 ②	09 16	10 ②
11 ⑤	12 12			

01 점 P(2, 2, 3)을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 (−2, 2, 3)

따라서 두 점 P(2, 2, 3), Q(−2, 2, 3) 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2+(3-3)^2}=4$

참고 점의 대칭이동

좌표공간의 점 A(a, b, c)를

(1) x축, y축, z축에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 P, Q, R라고 하면

P(a, $-b$, $-c$), Q($-a$, b, $-c$), R($-a$, $-b$, c)

(2) xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 P, Q, R라고 하면

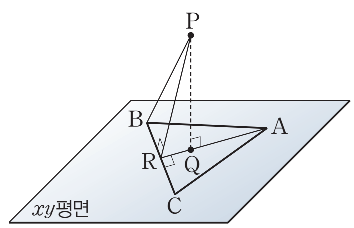
P(a, b, $-c$), Q($-a$, b, c), R(a, $-b$, c)

(3) 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 P라고 하면

P($-a$, $-b$, $-c$)

02 점 Q는 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}$의 연장선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 R라고 하면

$\overline{\mathrm{AR}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{QR}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$



따라서 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PR}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ — $\overline{\mathrm{PQ}}\perp(xy$평면$)$, $\overline{\mathrm{QR}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로

점 P의 xy평면 위로의 정사영 Q의 좌표는 $(1,\ 1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$

직각삼각형 ABR에서 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BR}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}$이므로

$$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BR}}^2}$$
$$=\sqrt{5^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

점 Q가 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{2}$$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리 $\overline{\mathrm{PR}}$는 직각삼각형 PRQ에서

$$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

03 주어진 정팔면체에서 모서리 DE와 모서리 CB가 평행하므로 두 모서리 AC와 DE가 이루는 각의 크기는 두 모서리 AC와 CB가 이루는 각의 크기와 같다.
이때 정팔면체의 한 면은 정삼각형이므로 두 모서리 AC와 CB가 이루는 각의 크기는 60°이다.

$\therefore\ \theta=60^\circ$

$\therefore\ \cos\theta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

04 두 점 $\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times0+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0,\ 1,\ 2)$

두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$에 대하여 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

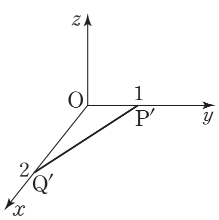
$$\left(\frac{1\times0+2\times3}{1+2},\ \frac{1\times0+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times3+2\times0}{1+2}\right)$$

$\therefore\ \mathrm{Q}(2,\ 0,\ 1)$

이때 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{Q}(2,\ 0,\ 1)$의 xy평면 위로의 정사영이 각각 P′, Q′이므로

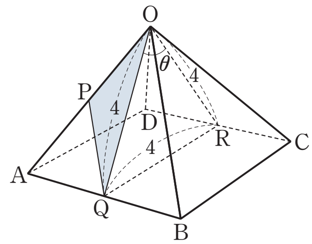
$\mathrm{P'}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{Q'}(2,\ 0,\ 0)$

따라서 오른쪽 그림에서 $\triangle\mathrm{OP'Q'}$의 넓이는



$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

05 선분 CD의 중점을 R라 하고, 두 평면 OAB, OCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.



$$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{16}=4$$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{QR}}=4$에서 $\triangle\mathrm{OQR}$는 정삼각형이므로

$$\cos\theta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

점 P는 선분 OA의 중점이므로 $\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\triangle\mathrm{OAQ}=\frac{1}{2}\times4=2$$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

$$S'=S\cos\theta=2\times\frac{1}{2}=1$$

06 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+a^2+(-b)^2}$
$=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-b)^2+(b-a)^2+a^2}$
$=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{a^2+(-b)^2+(b-a)^2}$
$=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$

에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$이므로 $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.
이때 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}\}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+a^2+b^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+4\}\ (\because\ a^2+b^2=4)$$

따라서 $a=b$일 때 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=\sqrt{3}$$

[다른 풀이]

$a^2+b^2=4$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+a^2+(-b)^2}$
$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2ab}=\sqrt{8-2ab}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-b)^2+(b-a)^2+a^2}$
$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2ab}=\sqrt{8-2ab}$

$\overline{CA}=\sqrt{a^2+(-b)^2+(b-a)^2}$
$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2ab}=\sqrt{8-2ab}$

에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

이때 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{8-2ab})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-2ab)$

이므로 $\triangle ABC$의 넓이가 최소가 되려면 ab가 최대가 되어야 한다.

이때 $a^2+b^2=4$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$, $4\ge 2ab$

$\therefore ab\le 2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $ab=2$일 때, $\triangle ABC$의 넓이가 최소가 되므로 구하는 최솟값은

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(8-2\times 2)=\sqrt{3}$

07 점 A(1, 3, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점이 B이므로 B(1, −3, −2)

점 A(1, 3, 2)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이 C이므로 C(1, 3, −2)

$\overline{AB}=\sqrt{(1-1)^2+(-3-3)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\sqrt{(1-1)^2+(3+3)^2+(-2+2)^2}=6$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-1)^2+(3-3)^2+(2+2)^2}=4$

에서 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원의 지름은 $\overline{AB}$이므로 구하는 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}=\sqrt{13}$

08 직선 AB는 원의 접선이므로 $\angle ABC=90°$이다.

즉, 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}$
$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

또, 두 직각삼각형 ABC와 ABP가 서로 합동이므로

$\overline{AP}=\overline{AC}=4$

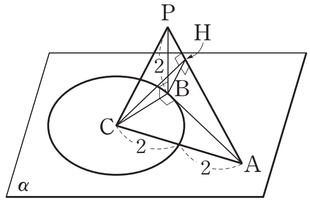
점 C에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\overline{CB}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{CB}\perp\overline{BP}$이므로

$\overline{CB}\perp$(평면 ABP)

이때 $\overline{CH}\perp\overline{AP}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{BH}\perp\overline{AP}$



$\triangle ABP$의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BP}$

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2$　　$\therefore \overline{BH}=\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 CBH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BH}^2}$
$=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

[다른 풀이]

$\overline{AB}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이고 $\overline{PB}\perp$(평면 ABC)이므로

직각삼각형 PAB에서

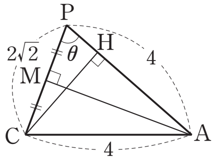
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

또, 직각삼각형 PCB에서

$\overline{CP}=\sqrt{\overline{CB}^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle ACP$는 이등변삼각형이고, 점 A에서 선분 CP에 내린 수선의 발을 M이라고 하면

$\overline{CM}=\overline{MP}$



이때 $\angle CPA=\theta$라고 하면

$\triangle APM$에서

$\sin\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\frac{\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}}{4}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

따라서 $\triangle CPH$에서

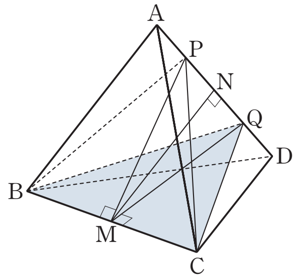
$\overline{CH}=2\sqrt{2}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\sqrt{7}$

09 모서리 BC의 중점을 M이라고 하면

$\overline{BC}\perp$(평면 AMD)이므로

$\overline{PM}\perp\overline{BC}$, $\overline{QM}\perp\overline{BC}$

즉, 두 평면 PBC와 QBC가 이루는 각은 $\angle$PMQ이므로 $\angle \mathrm{PMQ}=\theta$이다.



$\triangle$ABC와 $\triangle$DBC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{DM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$

모서리 AD의 중점을 N이라고 하면 $\overline{\mathrm{MN}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AN}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{AN}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$

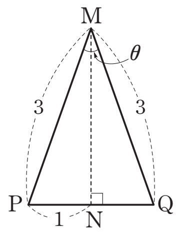
$\overline{\mathrm{PN}}=\overline{\mathrm{QN}}=1$이므로 직각삼각형 PMN에서

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{PN}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$

마찬가지로 직각삼각형 QMN에서

$\overline{\mathrm{QM}}=3$

$\triangle$PMQ는 오른쪽 그림과 같고, $\angle \mathrm{PMQ}=\theta$이므로 $\triangle$PMQ의 넓이에서



$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PM}}\times\overline{\mathrm{QM}}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{MN}}$

$3\times 3\times\sin\theta=2\times 2\sqrt{2}$

$\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\frac{32}{81}}=\sqrt{\frac{49}{81}}=\frac{7}{9}$

따라서 $p=9$, $q=7$이므로

$p+q=16$

10 구 S의 중심을 $\mathrm{C}(a, b, c)(a>0, b>0, c>0)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

구 S가 x축, y축에 접하는 점을 각각 A, B라고 하면 구 S의 중심이 $\mathrm{C}(a, b, c)$이므로

$\mathrm{A}(a, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, b, 0)$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(a-a)^2+b^2+c^2}=\sqrt{b^2+c^2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{a^2+(b-b)^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$

이때 $r=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$

양변을 제곱하면

$b^2+c^2=a^2+c^2$

$a^2=b^2 \qquad \therefore a=b\ (\because a>0, b>0)$

즉, $r=\sqrt{a^2+c^2}$이므로 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \qquad \cdots\cdots ①$

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은 ①에 $z=0$을 대입한 것이므로

$(x-a)^2+(y-a)^2+(-c)^2=a^2+c^2$

$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이때 이 원의 넓이가 64π이므로

$\pi\times a^2=64\pi$, $a^2=64$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$

$a=8$을 ①에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2 \qquad \cdots\cdots ②$

구 S가 z축과 만나는 점의 z좌표는 ②에 $x=0$, $y=0$을 대입한 방정식의 근이므로

$(-8)^2+(-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$

$(z-c)^2=c^2-64$

$\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

이때 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$,

$\sqrt{c^2-64}=4$

양변을 제곱하면

$c^2-64=16$

$c^2=80 \qquad \therefore c=4\sqrt{5}\ (\because c>0)$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{5})^2}=\sqrt{144}=12$

참고 **좌표평면 또는 좌표축에 접하는 구의 방정식**

중심이 $\mathrm{C}(a, b, c)$이고

(1) xy평면에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$

(2) yz평면에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$

(3) zx평면에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$

(4) x축에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

(5) y축에 접하는 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$$

(6) z축에 접하는 구의 방정식은

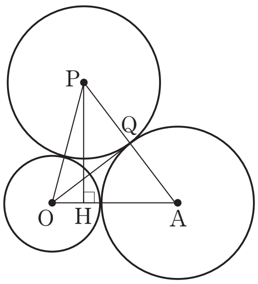
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$$

11 두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$의 중심을 각각 원점 O와 A$(2,\ -1,\ 2)$라고 하면 두 구의 중심 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$

두 구의 반지름의 길이의 합은 $1+2=3$

즉, 두 구의 중심 사이의 거리가 두 구의 반지름의 길이의 합과 같으므로 두 구는 외접한다.



위의 그림과 같이 중심이 A, P인 두 구가 외접하는 점을 Q, 점 P에서 $\overline{\mathrm{OA}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 중심이 O, A인 두 구에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 구의 중심 P 전체의 집합이 나타내는 도형은 $\overline{\mathrm{PH}}$를 반지름으로 하는 원이다.

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=1+2=3$, $\overline{\mathrm{AQ}}=2$이므로 직각삼각형 OAQ에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

또, $\overline{\mathrm{PA}}=2+2=4$이므로 △OAP의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{OQ}}$$

$$\frac{1}{2}\times3\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

따라서 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi\times\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$$

참고 **두 구의 위치 관계**

두 구 S, S'의 반지름의 길이를 각각 r, $r'(r>r')$, 중심 사이의 거리를 d라고 할 때

(1) $d>r+r' \Longleftrightarrow$ 구 S의 외부에 구 S'이 있다.

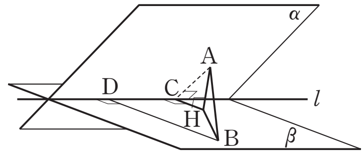
(2) $d=r+r' \Longleftrightarrow$ 두 구 S, S'이 외접한다.

(3) $r-r'<d<r+r' \Longleftrightarrow$ 두 구 S, S'이 만나서 원이 생긴다.

(4) $d=r-r' \Longleftrightarrow$ 구 S에 구 S'이 내접한다.

(5) $0\le d<r-r' \Longleftrightarrow$ 구 S의 내부에 구 S'이 있다.

12 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $30°$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 30°=2\times\frac{1}{2}=1 \quad\cdots\cdots①$$

$$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos 30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$\overline{\mathrm{AH}}\perp\beta$이고 $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HC}}\perp l$

이때 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$\angle\mathrm{ACH}=45°$

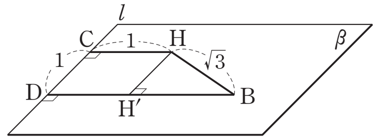
직각이등변삼각형 AHC에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AH}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1 \quad\cdots\cdots②$$

평면 β 위의 점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H′이라고 하자.



이때 $\overline{\mathrm{HH'}}=1$이므로 직각삼각형 HH′B에서

$$\overline{\mathrm{BH'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BH}}^2-\overline{\mathrm{HH'}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BH'}}+\overline{\mathrm{H'D}}=\sqrt{2}+1 \quad\cdots\cdots③$$

사면체 ABCD의 부피는 ①, ②, ③에 의해

$$\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times1\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(1+\sqrt{2})\right\}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{6}$이므로

$$36(a+b)=36\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$$