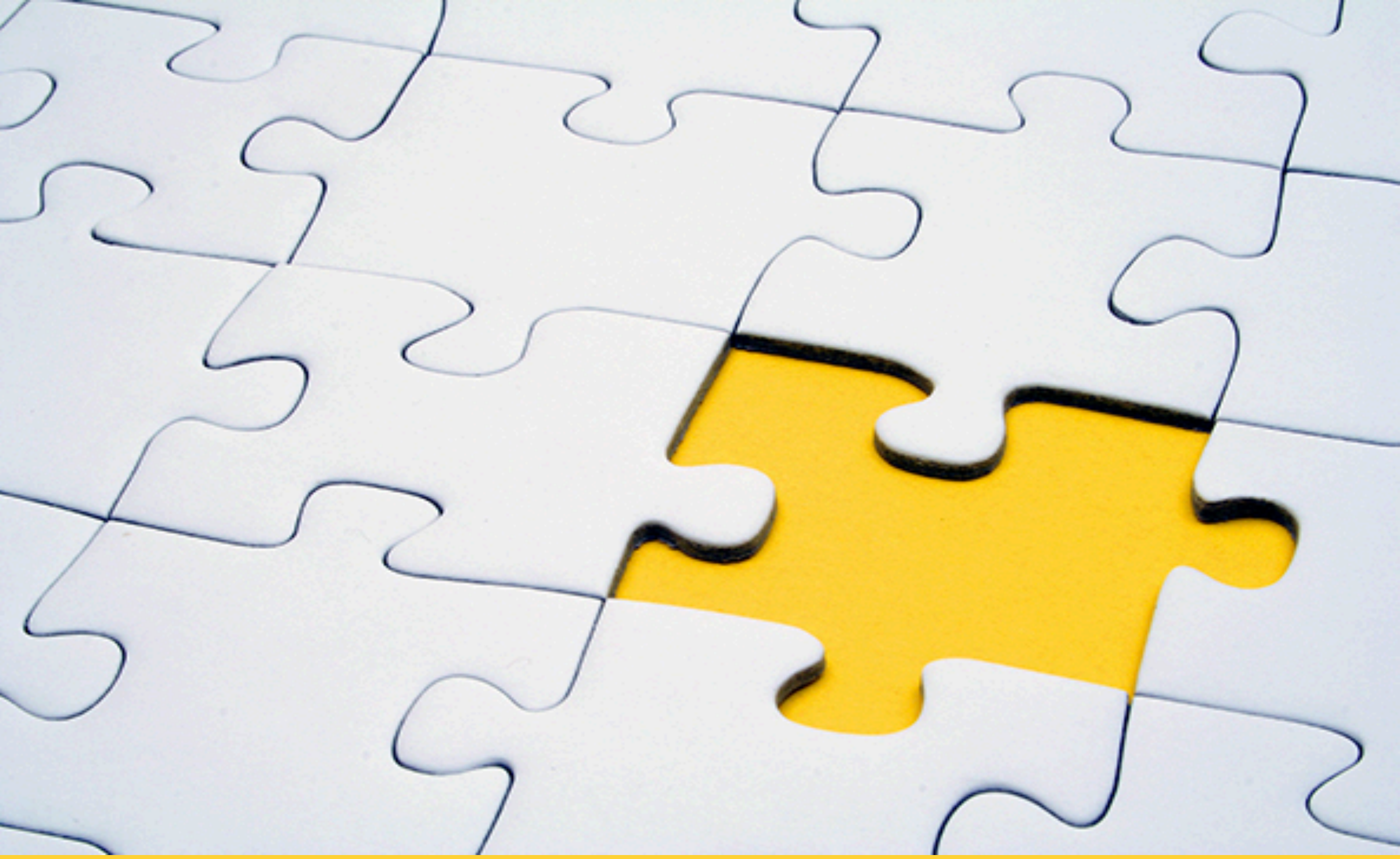


고등학교

수학 2

수악중독

함수의 극한과 연속

1

1. 함수의 극한
2. 함수의 연속

1 함수의 극한

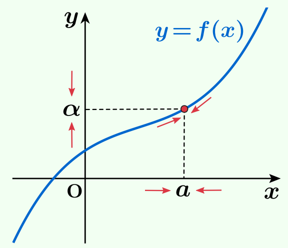
함수의 극한

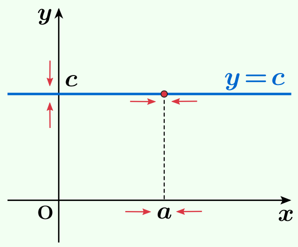
함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고, α를 $x \to a$일 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 한다. 이것을 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$x \to a\text{일 때, } f(x) \to \alpha \text{ 또는 } \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

특히, 함수 $f(x) = c$ (c는 상수)일 때에는 임의의 실수 a에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} = c$$



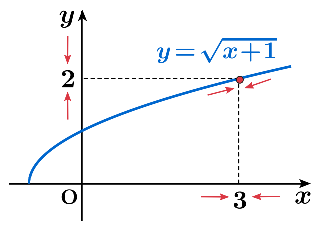


예제1

$x \to 3$일 때, 함수 $f(x) = \sqrt{x+1}$의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $x \to 3$일 때, $\sqrt{x+1} \to 2$이므로 극한은 2가 된다.

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 2$$



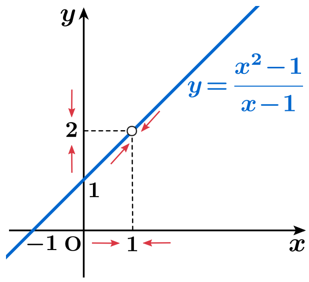
예제2

$x \to 1$일 때, 함수 $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$의 극한을 구하시오.

함수$g(x)$는 $x=1$에서 분모가 0이 되어 함숫값이 정의되지 않는다. 하지만 $x \neq 1$이면

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x=1)}{x-1} = x+1$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.



$$\therefore \lim_{x \to 1} g(x) = 2$$

$x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때의 함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$$

또한 x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$$

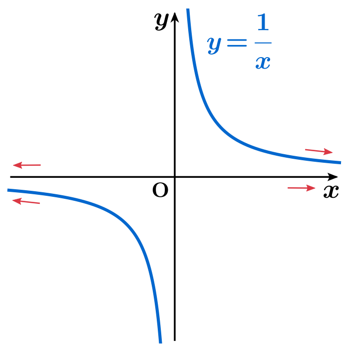
예제3

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$에 대하여 $x \to \infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 극한은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

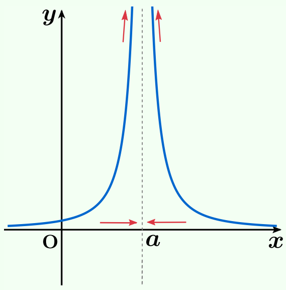


함수의 극한

양의 무한대로 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

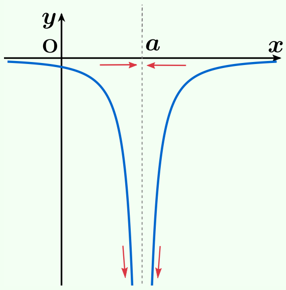
$$x \to a \text{일 때, } f(x) \to \infty \text{ 또는 } \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$



음의 무한대로 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$x \to a \text{일 때, } f(x) \to -\infty \text{ 또는 } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



➤ $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하는 경우에도 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

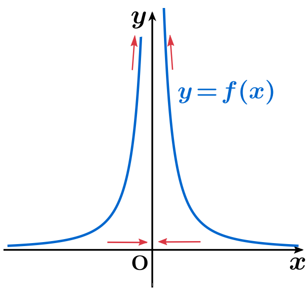
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

예제4

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$에 대하여 $x \to 0$일 때의 극한을 조사하시오.

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$의 그래프에서 $x \to 0$일 때, $f(x)$의 값은 한없이 커진다.

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

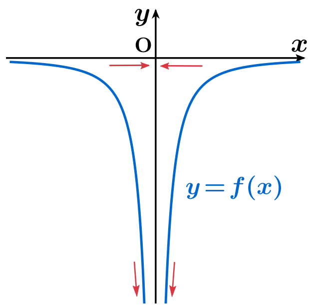


예제5

함수 $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$에 대하여 $x \to 0$일 때의 극한을 조사하시오.

함수 $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$의 그래프에서 $x \to 0$일 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$



예제6

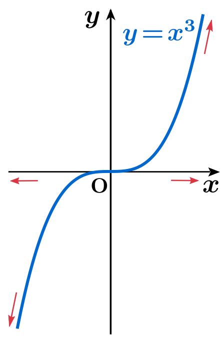
함수 $f(x) = x^3$에 대하여 $x \to \infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때의 극한을 조사하시오.

함수 오른쪽 그래프에서

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

임을 알 수 있다.



함수의 좌극한과 우극한

(1) 좌극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, α를 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라고 하며, 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \alpha$$

(2) 우극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면, β를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라고 하고, 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \beta$$

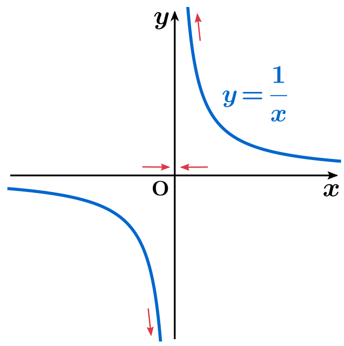
(3) 함수의 극한, 좌극한, 우극한의 관계

함수 $f(x)$에 대하여 좌극한 $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$와 우극한 $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$가 모두 존재하고, 그 값이 같은 경우에만 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = \alpha \text{ (극한값 존재)}$$

예제7

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$에 대하여 $x \to 0$일 때, 극한의 존재 여부를 확인하시오.



함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

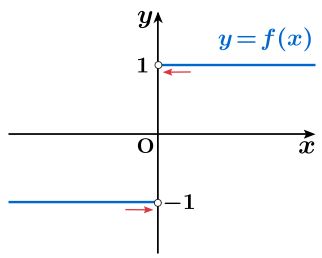
$x=0$에서의 우극한, 좌극한을 그래프를 통해 확인하면

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

이므로 우극한과 좌극한이 모두 존재하지 않기 때문에 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

예제8

함수 $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$에 대하여 $x \to 0$일 때, 극한의 존재 여부를 확인하시오.



함수 $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$의 그래프는 오른쪽과 같다.

$x = 0$에서 우극한, 좌극한을 그래프를 통해 확인하면

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{|x|} = 1, \ \lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = -1$$

이므로 우극한과 좌극한이 모두 존재하지만, 서로 같지 않기 때문에 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

2 함수의 극한의 성질

함수의 극한의 성질

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ($\alpha,\ \beta$는 상수)일 때,

(1) $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = k\alpha$ (k는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \pm \beta$ (복부호동순)

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x) \times g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

- 함수의 극한의 성질에 대한 증명은 고등학교 수학 범위를 벗어나므로 생략한다.
- 함수의 그래프를 그리지 않고도 극한값을 구할 수 있다.

예제9

함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) &= \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 1 \\ &= \left(\lim_{x \to 2} x\right) \times \left(\lim_{x \to 2} x\right) + \lim_{x \to 2} 1 \\ &= 2 \times 2 \times +1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

예제10

함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-2}{5x+3}$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-2}{5x+3} &= \frac{\lim_{x\to 0}\left(x^2+x-2\right)}{\lim_{x\to 0}(5x+3)} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0}x\times\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}2}{5\times\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}3} \\ &= \frac{0+0-2}{0+3} \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

함수의 극한값의 계산

(1) $\dfrac{0}{0}$꼴의 극한값

① 유리함수의 경우
분모, 분자를 인수분해하고 약분한다.

② 무리함수의 경우
분모 또는 분자 중 근호($\sqrt{\ }$)가 있는 쪽을 유리화한 후 약분한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값
분모, 분자를 각각 분모의 최고차항으로 나눈다.

(3) $\infty - \infty$꼴의 극한값
근호가 없는 다항식은 최고차항으로 묶고, 근호가 있을 때는 유리화한다.

(4) $\infty \times 0$꼴의 극한값
통분 또는 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty \times c$, $\dfrac{c}{\infty}$ (c는 유한확정값)으로 변형하여 극한값을 구한다.

예제11

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1=0+1=1$$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right)\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

예제12

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1}$ (2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2 - 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

(1) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} - 3}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{2}$$

예제13

다음 극한을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} (3x^2 - x)$ (2) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$

(1) $$\lim_{x \to \infty} (3x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} \left\{ x^2 \left(3 - \frac{1}{x} \right) \right\} = \infty$$

(2) $$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x \right) &= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - x)(\sqrt{x^4 + 4x} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

예제14

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-1\right\}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-1\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-2}{(x+1)^2} = -2$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

미정계수의 결정

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha\neq 0$인 상수)이면 다음이 성립한다.

① $f(x)$의 최고차항의 차수 $=$ $g(x)$의 최고차항의 차수

② $\alpha=f(x),\ g(x)$의 최고차항의 계수의 비율

(2) $\dfrac{0}{0}$의 꼴

① $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 상수)일 때, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

➤ $f(x)$가 x에 대한 다항식이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$라는 사실로부터 다항식 $f(x)$가 x에 대한 이차식이고, 이차항의 계수가 2라는 것을 알 수 있다.

➤ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)이고 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\times 0=0$$

➤ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ (α는 0이 아닌 상수)이고, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to a}f(x)=\frac{1}{\alpha}\times 0=0$$

예제15

두 실수 $a,\ b$가 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+5}{x-2}=5$이고 $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=0$이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=4+2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a-4$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+4\right)+a(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2+a)=4+a=5$$

$\therefore a=1,\ b=-6 \qquad \therefore a+b=-5$

예제16

두 실수 a, b가 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b}=6$을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b}=6$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+a}-b\right)=0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+a}-b\right)=\sqrt{1+a}-b=0 \qquad \therefore b=\sqrt{a+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b}&=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b}\times\frac{\sqrt{x+a}+b}{\sqrt{x+a}+b}\right)\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1}\right)}{x+1-\left(\sqrt{a+1}\right)^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1}\right)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1}\right)\\&=2\sqrt{a+1}\\&=6\end{aligned}$$

$\therefore a=8,\ b=3 \qquad \therefore a+b=11$

예제17

다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$로부터 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$임을 알 수 있다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$이고 $\lim_{x\to0}x=0$이므로 $\lim_{x\to0}\left(x^3+x^2+ax+b\right)=0$이어야 한다.

$\therefore b=0$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x^2+x+a\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2+x+a\right)=a=2$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+2x$

$\therefore f(1)=1+1+2=4$

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta\ (\alpha,\ \beta$는 상수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$이다.

➤ 증명은 고등학교 수학 범위를 벗어나므로 생략한다.

➤ $f(x)<g(x)$이더라도 $\alpha\le\beta$일 수 있다.
예를 들어, $x>0$일 때 $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}$이지만 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이다.

예제18

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족할 때, $\lim_{x\to 2} f(x)$를 구하시오.

$$2x-2\le f(x)\le x^2-2x+2$$

$\lim_{x\to 2}(2x-2)=2,\ \lim_{x\to 2}\left(x^2-2x+2\right)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x\to 2} f(x)=2$이다.

예제19

함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 구하시오.

$$3-\frac{1}{x}<f(x)<3+\frac{1}{x}\quad(x>0)$$

$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3,\ \lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x\to\infty} f(x)=3$이다.

예제20

$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$의 값을 구하시오.

모든 실수 x에 대하여 $-1 \le \cos x \le 1$이므로

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x} \ (\because x \to \infty \text{일 때, } x > 0)$$

이때, $\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ 이다.

1 연속함수

함수의 극한

두 실수 $a,\ b\ (a<b)$에 대하여 다음 실수의 집합

$$\{x \mid a \le x \le b\},\quad \{x \mid a < x < b\}$$
$$\{x \mid a \le x < b\},\quad \{x \mid a < x \le b\}$$

를 각각 구간이라 하며, 이들을 차례로 기호

$$[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]$$

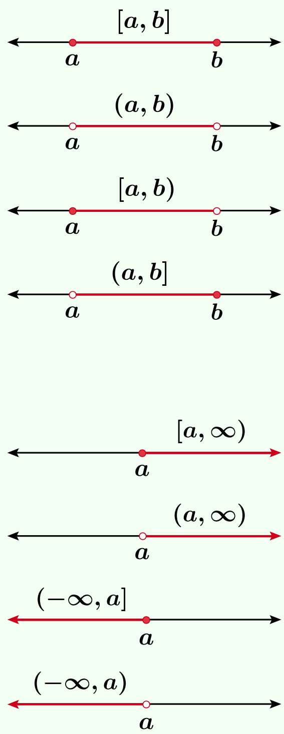
로 나타낸다. 이때, $[a,\ b]$를 닫힌구간, $(a,\ b)$를 열린구간이라 하고, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 각각 반열린 구간 또는 반닫힌 구간이라고 한다.
또, 실수의 집합

$$\{x \mid x \ge a\},\quad \{x \mid x > a\}$$
$$\{x \mid x \le a\},\quad \{x \mid x < a\}$$

도 각각 구간이라고 하며, 이들을 차례로 기호로

$$[a,\ \infty),\ (a,\ \infty),\ (-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a)$$

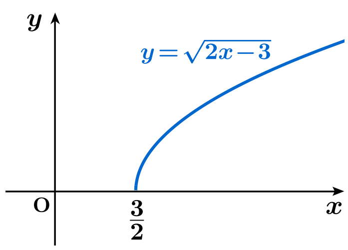
로 나타낸다. 특히, 실수 전체의 집합도 하나의 구간이며, 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.



예제21

함수 $f(x)=\sqrt{2x-3}$의 정의역과 치역을 구간으로 나타내시오.

정의역 : $\left[\frac{3}{2},\ \infty\right)$,
치역 : $[0,\ \infty)$

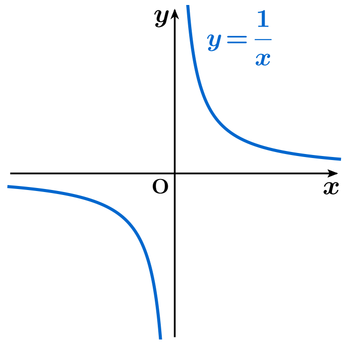


예제22

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 의 정의역과 치역을 구간으로 나타내시오.

정의역 : $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$,

치역 : $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$



함수의 연속과 불연속

(1) $x=a$에서 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① $x=a$에서 함수 $f(x)$가 정의되어 있다. ➡ $f(a)$값이 존재한다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. ➡ $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

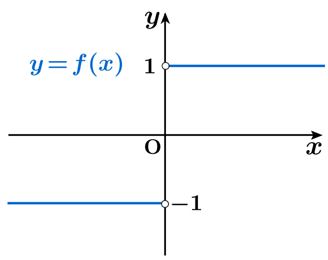
(2) $x=a$에서 불연속

함수 $f(x)$가 위의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

예제23

함수 $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$의 $x=0$에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $x=0$에서 함숫값이 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



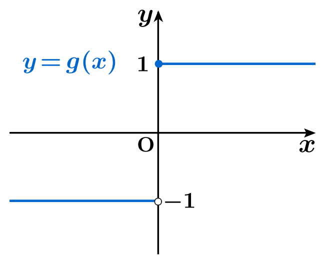
예제24

함수 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ 의 $x=0$에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $g(0)=1$으로 $x=0$에서 함숫값이 존재하지만

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=-1,\quad \lim_{x\to 0+} g(x)=1$$

로 좌극한과 우극한이 같지 않기 때문에 $x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



예제25

함수 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 의 $x=0$에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

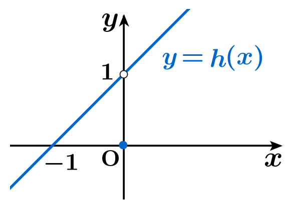
오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $h(0)=0$으로 $x=0$에서 함숫값이 존재하고,

$$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0+} h(x)=1$$

로 $x=0$에서 극한값 $\lim_{x\to 0} h(x)$가 존재하지만

$$h(0)\neq \lim_{x\to 0} h(x)$$

이기 때문에 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



연속함수

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 열린구간에서 연속이라고 한다. 또, 어떤 열린구간에서 연속인 함수를 그 열린구간에서의 연속함수라고 한다.
한편, 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a),\quad \lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하며, $f(x)$를 닫힌구간에서의 연속함수라고 한다.

- 함수 $f(x) = x$는 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.
- 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$는 열린구간 $(-\infty,\ 0) \cup (0, \infty)$에서 연속이다.
- 함수 $f(x) = \sqrt{x}$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이고, $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0)$이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서 연속이다.

예제26

함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 되도록 상수 $a,\ b$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 되려면 일단 $x = 2$에서 연속이 되어야 한다.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - a}{x - 2} = b$$

이때, $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$이므로 $\lim_{x\to 2}\left(x^2 - a\right) = 0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 - a\right) = 4 - a = 0 \qquad \therefore a = 4$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 = b \qquad \therefore b = 4$$

2 연속함수의 성질

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, 다음 각 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $kf(x)$ (k는 상수)

(2) $f(x) \pm g(x)$

(3) $f(x) \times g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x) \neq 0$)

➤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

이때, 함수의 극한의 성질을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\{kf(x)\} = k \times \lim\limits_{x\to a} f(x) = kf(a)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a)$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) \times g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) \times g(a)$

(4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

➤ 일차함수 $y=x$는 실수 전체에서 연속이므로 이 함수의 곱으로 이루어진 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4,\ \cdots$$

은 모두 실수 전체에서 연속이다. 또한, 다항함수는 위 함수들의 실수배와 상수함수의 합으로 구성되기 때문에 실수 전체에서 연속이 된다.

➤ 유리함수는 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 형태로 나타나므로 $g(x) \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

예제27

삼차함수 $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$가 실수 전체에서 연속임을 보이시오.

연속함수의 기본 성질을 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다.

① 상수함수 $y = 4$와 일차함수 $y = x$는 모든 실수에서 연속임을 알고 있다.

② 연속함수의 성질 (3)에 의하여 $y = x^n$ (n은 자연수) 역시 모든 실수에서 연속이다.

③ 연속함수의 성질 (1)에 의하여 $y = k \times x^n$ (n은 자연수)도 모든 실수에서 연속이다.

④ 연속함수의 성질 (2)에 의하여 다항함수가 모든 실수에서 연속임을 알 수 있다.

예제28

두 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 연속인 구간을 구하시오.

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-2}{x^2-4x+3} = \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)}$

이때, 연속함수의 성질에 의하여 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x \neq 1,\ x \neq 3$인 모든 실수에서 연속이다.

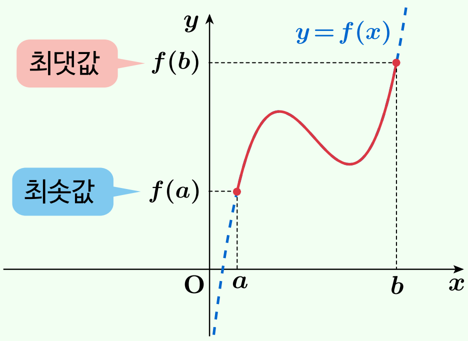
따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 연속이 되는 구간은

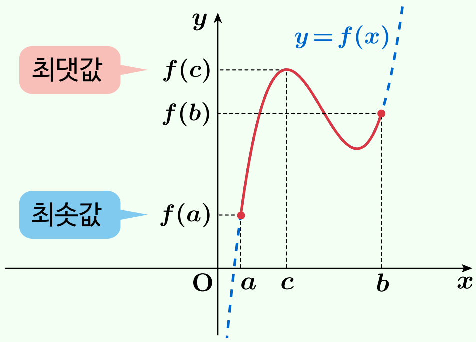
$$(-\infty,\ 1) \cup (1,\ 3) \cup (3,\ \infty)$$

이다.

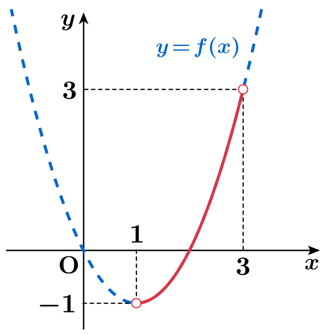
최대·최소 정리

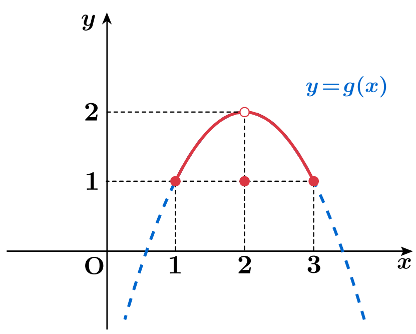
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.





➤ 닫힌구간이 아니거나 혹은 연속이 아닌 경우는 아래 그림과 같이 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.



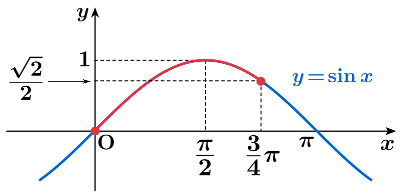


예제29

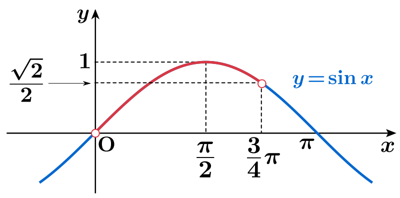
함수 $f(x) = \sin x$는 다음 구간에서 최대·최소 정리를 적용할 수 있는지 설명하고, 적용할 수 있다면 그 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $\left[0,\ \frac{3}{4}\pi\right]$ (2) $\left(0,\ \frac{3}{4}\pi\right)$

(1) 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{3}{4}\pi\right]$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 최대·최소의 정리를 적용할 수 있고, 오른쪽 그래프에서 보듯이 최댓값과 최솟값은 각각 1과 0이다.



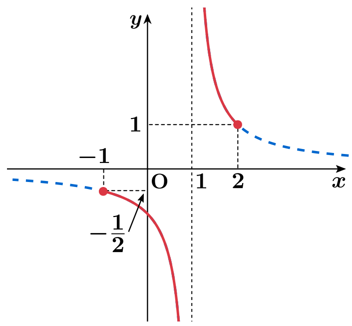
(2) 열린구간 $\left(0,\ \frac{3}{4}\pi\right)$에서는 최대·최소의 정리를 적용할 수 없다. 이 경우는 그래프에서 보듯이 최댓값 1만 갖는다.



예제30

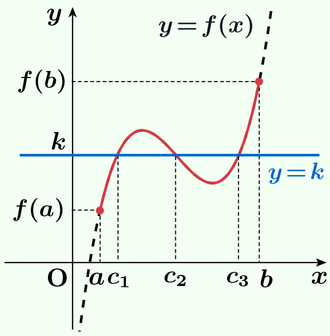
함수 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$가 구간$[-1,\ 2]$에서 최댓값 혹은 최솟값을 갖는지 조사하시오.

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$은 오른쪽 그래프에서 보듯이 $x = 1$에서 불연속이므로 최대·최소의 정리를 적용할 수 없다. 따라서 닫힌구간 $[-1,\ 2]$이라고 할지라도 최댓값과 최솟값이 존재하지 않는다.

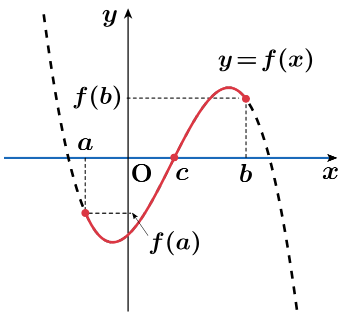


사잇값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c) = k$를 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



➤ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 0이 있으므로 $f(c) = 0$을 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$이 a와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



➤ 사잇값 정리를 통하여 방정식의 실근의 존재 여부만을 판단할 수 있을 뿐, 근이 몇 개인지 혹은 근이 무엇인지 알아낼 수 없다.

예제31

삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 5 = 0$의 실근이 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$라고 하면 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이다. 따라서 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서도 연속이고, $f(1) = 3$, $f(2) = -3$이므로 사잇값 정리에 의하여 구간 $(1,\ 2)$ 사이에 $f(c) = 0$을 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$의 실근이 구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

예제32

$f(x) = x + \log x - 2$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 실근이 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

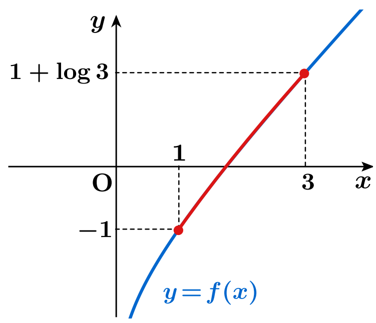
① $y = x$, $y = \log x$, $y = 2$가 모두 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이므로 $f(x)$도 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이다.

② $f(1) = 1 + \log 1 - 2 = -1$

$f(3) = 3 + \log 3 - 2 = 1 + \log 3$

$\therefore f(1) \times f(3) < 0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$이 구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



고등학교 수학2

미분

2

1. 미분계수와 도함수
2. 도함수의 활용

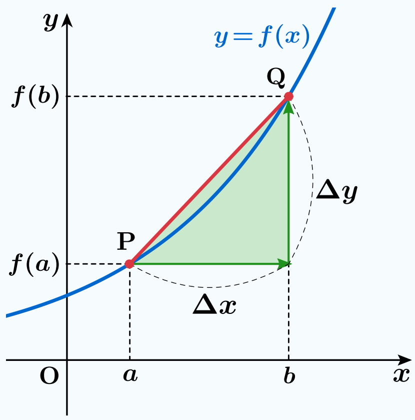
1 미분계수

평균변화율

(1) 평균변화율

오른쪽 그림에서와 같이 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변하게 되면, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변하게 된다. 이때, x값의 변화량 $b-a$를 x의 증분, y값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라 하고, 이것들을 각각 Δx, Δy로 나타낸다.

$$\Delta x = b-a, \quad \Delta y = f(b)-f(a)$$



함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라고 한다.

(2) 평균변화율의 기하학적 의미

$y=f(x)$의 평균변화율은 그림에서 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 연결하는 직선의 기울기와 같다.

예제1

x의 값이 다음과 같이 변할 때, 함수 $f(x)=4.9x^2$의 평균변화율을 구하시오.

(1) $x=1$에서 $x=2$까지

(2) $x=2$에서 $x=2+\Delta x$까지

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4.9\times 2^2 - 4.9\times 1^2}{2-1} = 4.9\times 3 = 14.7$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4.9\times(2+\Delta x)^2 - 4.9\times 2^2}{2+\Delta x-2} = 4.9\times(4+\Delta x) = 19.6 + 4.9\times\Delta x$

미분계수

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율에서 Δx가 0에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

를 함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고, 기호로

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

와 같이 나타낸다. 한편, $a + \Delta x = x$라고 하면 $\Delta x = x - a$이고, $\Delta x \to 0$일 때, $x \to a$이므로

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

➤ $x = a$에서의 미분계수를 나타낼 때, Δx 대신, 간단히 h를 사용하여

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

로 나타내기도 한다.

➤ 함수 $y = f(x)$에 대하여 극한 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$가 존재하면, 함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 한다.

➤ 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x값에 대해서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 하고, 함수 $f(x)$가 정의역의 모든 x에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

예제2

함수 $f(x) = x^2 + 2x$의 $x = 1$에서의 미분계수 $f'(1)$을 구하시오.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 1^2 - (2 \times 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (h+4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

예제3

어떤 물체가 자유 낙하할 때, 낙하 시간 t초와 낙하한 거리 $f(t)$ (m) 사이에는 $f(t) = 4.9t^2$ 인 관계가 있다고 한다. 물체가 낙하하기 시작한 후, 2초부터 $2 + \Delta t$초까지의 평균속력을 v라 할 때, $\lim_{\Delta t \to 0} v$를 구하시오.

v는 t가 2에서 $2 + \Delta t$까지 변할 때의 $f(t)$의 평균변화율과 같으므로

$$v = \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$$

가 된다. 따라서 $\lim_{\Delta t \to 0} v = f'(2)$와 같다.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9 \times (2 + \Delta t)^2 - 4.9 \times 2^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9 \times 4 \times \Delta t + 4.9 \times (\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (4.9 \times 4 + 4.9 \times \Delta t) \\ &= 19.6 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 곡선에 접하는 접선의 기울기와 같다.

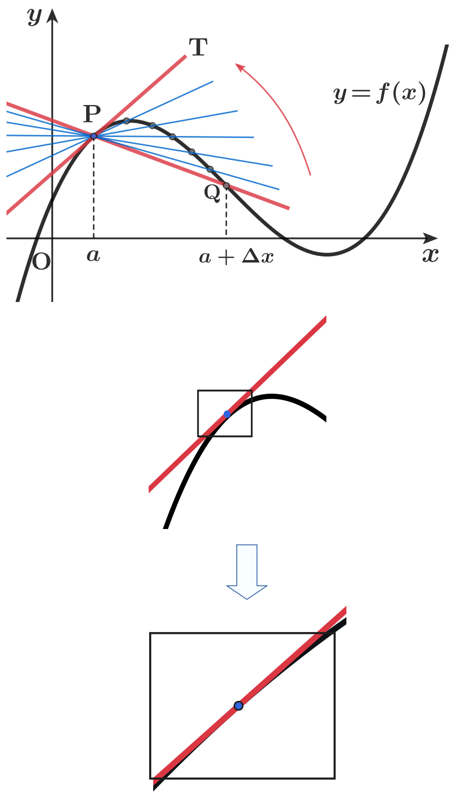
➤ 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

의 기하학적 의미는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$를 지나는 직선의 기울기라는 것을 이미 알고 있다. 이때, $\Delta x\to 0$이면 점 Q는 오른쪽 그림에서 보는 바와 같이 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지게 되고, 직선 PQ는 점 P를 지나는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다. 이 직선 PT를 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선이라 하고, 점 P를 접점이라고 한다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to x}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 알 수 있다.



예제4

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서 곡선에 접하는 접선의 기울기를 구하시오.

$f(x) = -x^2 + 2x$라고 하면, 주어진 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같다.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x) + 1^2 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1 - (2 \times \Delta x) - (\Delta x)^2 + 2 + (2 \times \Delta x) - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (-\Delta x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

예제5

곡선 $y = x^2 + 3x - 1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(a,\ a^2 + 3a - 1\right)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

$f(x) = -x^2 + 3x - 1$라고 하면, 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$와 같다.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 + 3(a+\Delta x) - 1 - a^2 - 3a + 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + (2a+3)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2a + 3) \\ &= 2a + 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$$

미분가능성과 연속성

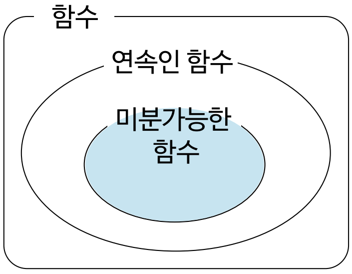
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

➤ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하고, 이를 이용하여 $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}$를 구해 보면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}&=\lim_{x\to a}\left\{(x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}\\&=\lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=0\times f'(a)\\&=0\end{aligned}$$



이 된다. 따라서 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하고, 이는 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 나타낸다.

예제6

함수 $f(x)=|x|$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

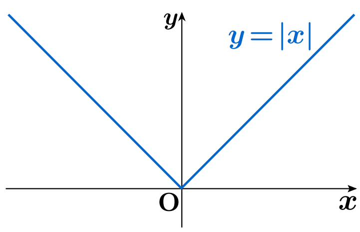
(1) $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0+}|x|=\lim_{x\to 0-}|x|=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $\lim_{h\to 0+}\frac{|0+h|-0}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1$,

$\lim_{h\to 0-}\frac{|0+h|-0}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$

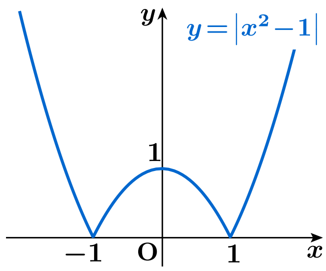
즉, $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$가 존재하지 않는다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분불가능하다.

예제7

함수 $f(x)=\left|x^2-1\right|$의 $x=1$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.



(1) $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1+}\left|x^2-1\right|=\lim\limits_{x\to1-}\left|x^2-1\right|=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $$\lim_{h\to0+}\frac{\left|(1+h)^2-1\right|-\left|1^2-1\right|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\left|h^2+2h\right|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(h+2)=2,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{\left|(1+h)^2-1\right|-\left|1^2-1\right|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\left|h^2+2h\right|}{h}$$

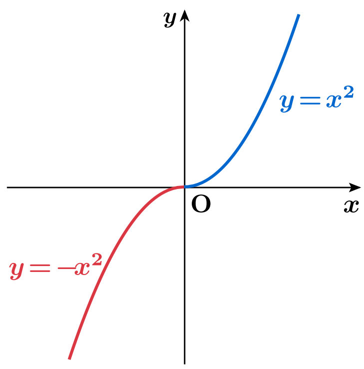
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to0-}(-h-2)=-2$$

즉, $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분불가능하다.

예제8

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\ge0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.



(1) $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0+}x^2=\lim\limits_{x\to0-}\left(x^2\right)=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $$\lim_{h\to0+}\frac{(0+h)^2-0^2}{h}=\lim_{h\to0+}h=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{-(0+h)^2+0^2}{h}=\lim_{h\to0-}(-h)=0,$$

즉, $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

도함수

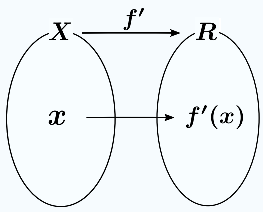
미분가능한 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여
미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 얻는데, 이 함수 $f'(x)$를 함수 $f(x)$의 도함수라 한다.
도함수를 기호로는

$$y' \ f'(x), \ \frac{dy}{dx}, \ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.



또, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며,
그 계산법을 미분법이라 한다.

➤ 도함수의 기하학적 의미
도함수 $f'(x)$는 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기다.

➤ 도함수 정의를 x의 증분 Δx 대신 h를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

또한, 위 식에서 $x+h=t$로 놓으면 $h \to 0$일 때 $t \to x$이므로 $f'(x)$를 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

예제9

함수 $f(x)=x^2+3x+2$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2+3(x+h)+2-x^2-3x-2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2hx+h^2+3h}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+3+h) \\ &= 2x+3 \end{aligned}$$

함수 $f(x)=x^n$ 의 도함수

(1) 함수 $f(x)=x^n$ (n은 2이상의 자연수)의 도함수는 $f'(x)=nx^{n-1}$이다.

(2) 함수 $f(x)=x$의 도함수는 $f'(x)=1$이다.

(3) 함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 도함수는 $f'(x)=0$이다.

➤ $f(x)=x^n$ (n은 2 이상의 자연수)에 대하여

$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right\}\\
&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}\\
&=nx^{n-1}
\end{aligned}$$

➤ $f(x)=x$에 대하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

➤ $f(x)=c$ (c는 상수)에 대하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$$

예제10

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x)=x^{100}$ (2) $f(x)=\log 2$

(1) $f'(x)=100x^{99}$

(2) $f'(x)=0$

3 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $\{cf(x)\}' = cf'(x)$ (c는 상수)

(2) $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$

(3) $\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)$

➤ 함수$f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=cf(x)$ (c는 상수)의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)$$

➤ 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f(x)+g(x)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

➤ $\{f(x)-g(x)\}' = \{f(x)+(-1)\times g(x)\}' = f'(x)+(-1)\times g'(x) = f'(x)-g'(x)$

예제11

다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=3x^3+2x^2+x$

(2) $y=(x-2)\left(x^3-x\right)$

(1) $y' = \left(3\times 3x^2\right)+(2\times 2x)+\left(1\times x^0\right) = 9x^2+4x+1$

(2) $y=(x-2)\left(x^3-x\right) = x^4-2x^3-x^2+2x$이므로

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3-\left(2\times 3x^2\right)-2x+\left(2\times x^0\right) \\ &= 4x^3-6x^2-2x+2 \end{aligned}$$

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

➤ $y = f(x)g(x)$ 이면

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\{f(x+h) - f(x)\} + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

➤ 함수 $y = f(x)g(x)h(x)$ 이면

$$\begin{aligned}
y' &= \{f(x)g(x)h(x)\}' \\
&= [\{f(x)g(x)\}h(x)]' \\
&= \{f(x)g(x)\}'h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\
&= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)
\end{aligned}$$

예제12

다음 함수를 미분하시오.

(1) $y = (x-2)\left(x^3 - x\right)$ (2) $y = \left(x^2 - x + 1\right)^2$ (3) $y = x(x+1)(x+2)$

(1) $$\begin{aligned}
y' &= 1 \times \left(x^3 - x\right) + (x-2)\left(3x^2 - 1\right) \\
&= \left(x^3 - x\right)\left(3x^2 - x - 6x^2 + 2\right) \\
&= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2
\end{aligned}$$

(2) $y = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}
y' &= (2x-1)\left(x^2 - x + 1\right) + \left(x^2 - x + 1\right)(2x-1) \\
&= 2(2x-1)\left(x^2 - x + 1\right)
\end{aligned}$$

(3) $y' = (x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) = 3x^2 + 6x + 2$

1 접선의 방정식

접선의 방정식

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 곡선에 접하는 접선의 기울기를 의미한다. 이것을 토대로 접선의 방정식은 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 접점이 주어지는 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 기울기가 $f'(a)$이고, 한 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 방정식과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(2) 기울기가 주어지는 경우

곡선 $y=f(x)$의 접선 중 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(t)=m(x-t) \quad (\text{단, } f'(t)=m)$$

(3) 곡선 밖의 한 점이 주어지는 경우

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(p,\ q)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(t)=f'(t)(x-t) \quad (\text{단, } q-f(t)=f'(t)(p-t)\text{가 성립})$$

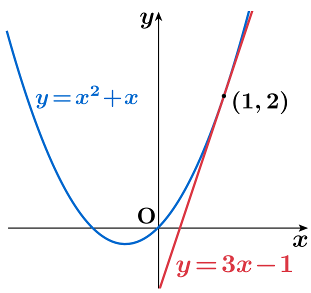
예제13

$f(x)=x^2+x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

$f'(x)=2x+1$이므로 구하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y-2=3(x-1)$$
$$y=3x-1$$

이다.



예제14

곡선 $y=-x^3+5x$에 접하고, 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

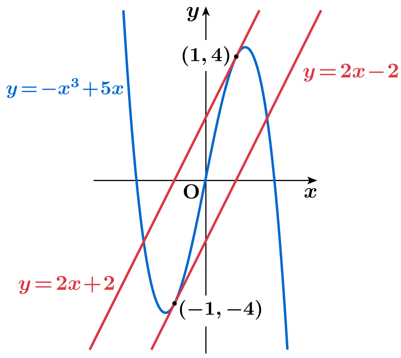
$y'=-3x^2+5$이므로 기울기가 2인 접선의 접점을 $(t,\ -t^3+5t)$라고 하면

$$-3t^2+5=2\ \therefore t^2=1 \quad \Rightarrow \quad t=\pm 1$$

가 되어야 한다. 즉, 접점의 좌표가 $(1,\ 4)$ 또는 $(-1,\ -4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=2(x-1)+4 \quad \Rightarrow \quad y=2x+2, \quad \text{또는}$$
$$y=2(x+1)-4 \quad \Rightarrow \quad y=2x-2$$

이다.



예제15

점 $(0,\ -1)$에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

곡선 $y=x^2+1$ 위의 임의의 점을 $(t,\ t^2+1)$라고 하고, 이 점에서의 접선이 점 $(0,\ -1)$을 지나는 것으로 생각하면 된다.
$y'=2x$이므로 점 $(t,\ t^2+1)$에서의 접선의 기울기는 $2t$가 된다. 따라서 이 점에서이 접선의 방정식은

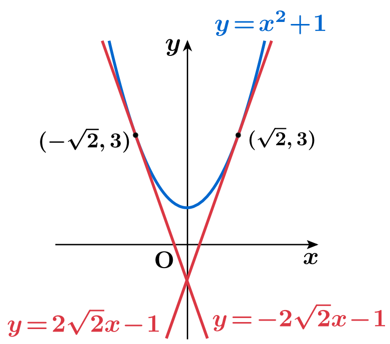
$$y-t^2-1=2t(x-t)$$

이고, 이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나야 하므로

$$-1-t^2-1=2t(-t)$$

$$\therefore t^2=2 \quad \Rightarrow \quad t=\pm\sqrt{2}$$

임을 알 수 있다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\left(\sqrt{2}\right)^2-1=2\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y=2\sqrt{2}x-1 \quad \text{또는}$$
$$y-\left(-\sqrt{2}\right)^2-1=2\left(-\sqrt{2}\right)\left(x-\left(-\sqrt{2}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad y=-2\sqrt{2}x-1$$

이다.

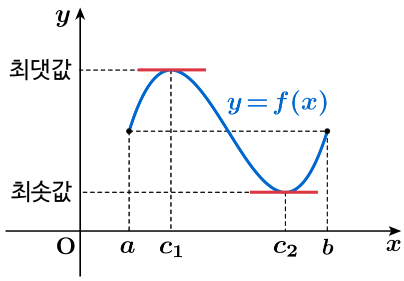
2 평균값 정리

롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$를 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

➤ 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우
열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 무수히 많이 존재한다.

➤ 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우
최대·최소의 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
그런데 $f(a)=f(b)$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 최댓값 또는 최솟값을 적어도 하나 이상 갖게 된다.



(1) 함수 $f(x)$가 $x=c\ (a<c<b)$에서 최댓값을 가질 때,
$a<t<b$인 임의의 t에 대하여 $f(t)\le f(c)$이다.

① $t<c$일 때, x가 t에서 c까지 변할 때의 평균변화율과 $t\to c-$일 때의 평균변화율의 극한에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\ge 0,\quad \lim_{t\to c-}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\ge 0$$

② $t>c$일 때, x가 t에서 c까지 변할 때의 평균변화율과 $t\to c+$일 때의 평균변화율의 극한에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\le 0,\quad \lim_{t\to c+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\le 0$$

이때, 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로 $x=c$에서도 미분가능해야 하고, 이는 곧 평균변화율의 좌극한과 우극한이 서로 같아야 함을 의미한다.

$$\therefore f'(c)=\lim_{t\to c}\frac{f(t)-f(C)}{t-c}=0$$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=c\ (a<c<b)$에서 최솟값을 가질 때,
(1)에서와 같은 방법으로 $f'(c)=0$이 됨을 알 수 있다.

예제16

함수 $y = x^2 - 2x - 3$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 롤의 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구하시오.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$이라고 하면 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하다. 이때, $f(-1) = f(3) = 0$이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c) = 0$을 만족하는 c가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.
$f'(c) = 2c - 2 = 0$이므로 구하는 상수는 $c = 1$이 된다.

평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

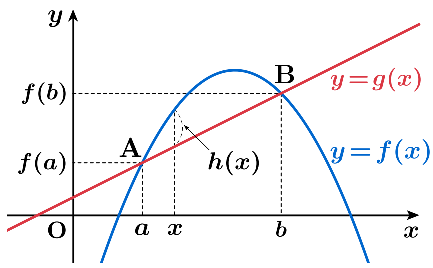
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

➤ 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

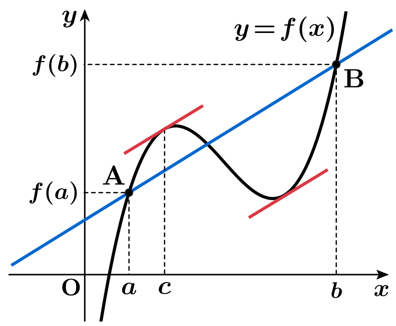
이다. 이때, 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 $h(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$이다. 따라서 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 즉,



$$h'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

➤ 평균변화율 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 나타내고, $f'(c)$는 $x=c$에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기를 나타낸다. 따라서 평균값 정리는 열린구간 $(a,\ b)$에서 이 곡선에 접하는 접선들 중 적어도 하나 이상이 직선 AB와 평행하다는 것을 뜻한다.



예제17

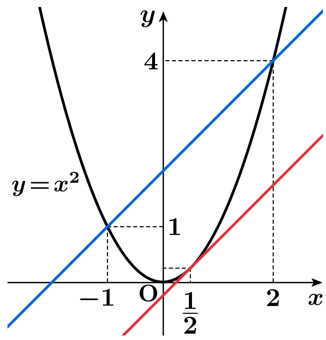
함수 $f(x) = x^2$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구하시오.

$f(x) = x^2$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하다. $f'(c) = 2c$이므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{2^2-(-1)^2}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1 = 2c$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$\therefore c = \dfrac{1}{2}$



예제18

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 상수함수임을 보이시오.

(1) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다.

(3) 열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여 $f'(x) = 0$이다.

열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1 < x_2)$에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서 연속이고, 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) = 0$이므로 $f'(c) = 0$이다. 즉,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

가 성립하고, 이를 통하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 상수함수임을 알 수 있다.

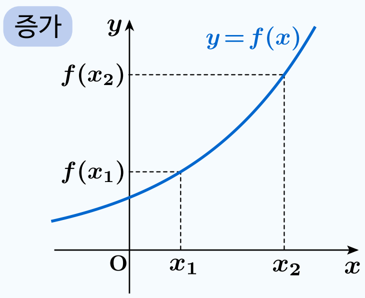
3 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

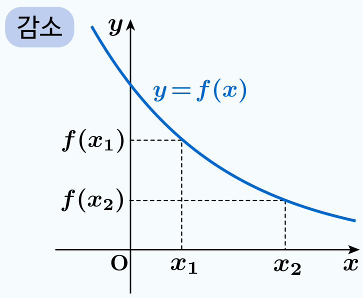
함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

(1) $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

(2) $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.





예제19

구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $y = x^3$의 증가와 감소를 판단하시오.

$f(x) = x^3$이라고 하자. 구간 $(-\infty,\ \infty)$의 임의의 두 수 $x_1,\ x_2\ (x_1 < x_2)$에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right)$$

이다. 이때, $x_1 - x_2 < 0$이고

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$$

이므로 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 즉 $f(x_1) < f(x_2)$가 성립한다.
따라서 함수 $f(x) = x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

도함수를 이용한 함수의 증가·감소 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 열린 구간에 속하는 모든 x에 대해여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 감소한다.

➤ 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하고, 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대해서 $f'(x) > 0$이라고 하자. 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$에 대하여 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다. 이때,

$$x_2 - x_1 > 0, \quad f'(c) > 0$$

이므로

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 증가한다.

➤ 위와 같은 방법으로 함수 $f(x)$가 열린구간에 $(a,\ b)$에서 미분가능하고, 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 감소함을 보일 수 있다.

➤ 일반적으로 위 판정법의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, $f(x) = x^3$은 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하지만 $f'(0) = 0$이다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때,

① 함수 $f(x)$가 이 구간에서 증가하면 구간 안의 모든 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이다.

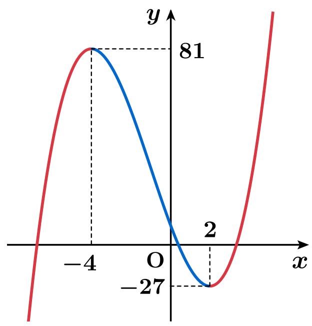
② 함수 $f(x)$가 이 구간에서 감소하면 구간 안의 모든 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이다.

예제20

함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$의 증가와 감소를 조사하시오.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$이고, 이를 토대로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	81	$\searrow$	-27	$\nearrow$



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -4] \cup [2,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-4,\ 2]$에서 감소한다.

예제21

함수 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이 되어야 한다.

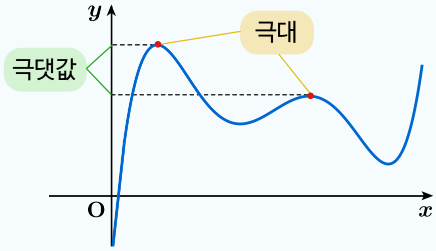
따라서 방정식 $x^2 - 2ax + 3a = 0$에서 판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0$이어야 하므로 $0 \leq a \leq 3$임을 알 수 있다.

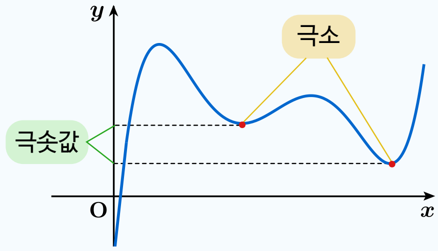
함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

(1) $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

(2) $f(x) \ge f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극솟값이라고 한다.



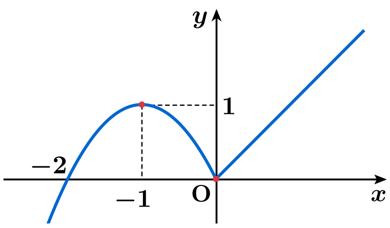


➤ 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

예제22

함수 $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+1 & (x<0) \\ x & (x \ge 0) \end{cases}$ 에 대하여 극대 혹은 극소가 되는 x의 값과 그때의 극댓값, 극솟값을 구하시오.

아래 그래프에서 보는 바와 같이 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 1을 갖고, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.



극값과 미분계수

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

➤ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 절댓값이 충분히 작은 h $(h \neq 0)$에 대하여 $f(a+h) \leq f(a)$이므로

$$h>0 \text{ 이면 } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$$

이다. 이때, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$$f'(a)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다. 마찬가지로

$$h<0 \text{ 이면 } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$$

이므로

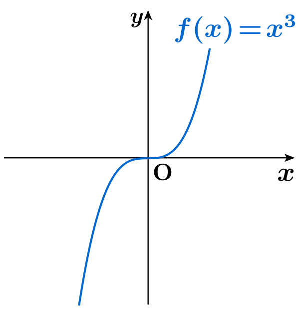
$$f'(a)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

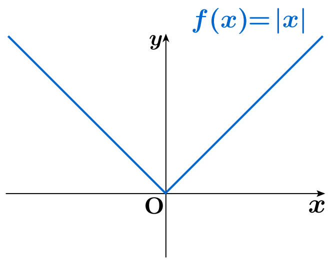
가 성립한다. 따라서 ①, ②에 의하여 $f'(a)=0$이다.

➤ 같은 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 갖는 경우에도 $f'(a)=0$임을 알 수 있다.

➤ 일반적으로 위의 역은 성립하지 않는다. 즉, 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 반드시 극값을 갖는 것은 아니다. 예를 들어, 함수 $f(x)=x^3$에서 $f'(0)=0$이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

➤ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖더라도 그 점에서 미분이 불가능하여 $f'(a)=0$이 성립하지 않을 수도 있다. 예를 들어, 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 극소가 되지만 $x=0$에서 미분이 불가능하여 $f'(0)=0$이 성립하지 않는다.





예제23

함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극솟값 4를 갖고, $x=0$에서 극댓값을 가질 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 구하시오.

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=1$에서 극값을 가지므로

$$f'(x)=b=0,\quad f'(1)=6+2a+b=0$$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=0$을 얻는다.
또한 $x=1$에서 극솟값 4를 가지므로

$$\begin{aligned} f(1)&=2\times1^3+a\times1^2+b\times1+c\\ &=2-3+0+c\\ &=c-1\\ &=4 \end{aligned}$$

$\therefore a=-3,\ b=0,\ c=5$

극대와 극소의 판정

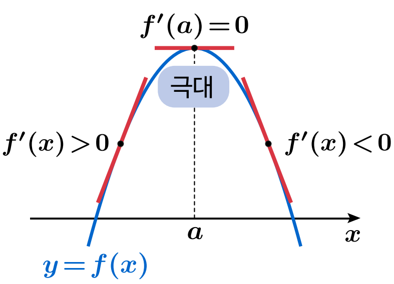
미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

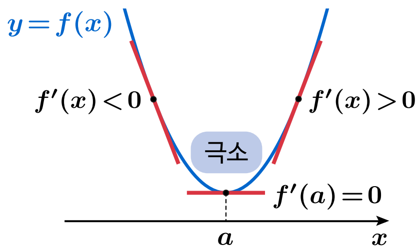
(1) 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

(2) 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

➤ 아래 그림에서와 같이 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대를 갖는 경우 $x=a$의 왼쪽에서는 접선의 기울기가 양$(+)$이지만, $x=a$에서는 접선의 기울기가 0이되고, $x=a$의 오른쪽에서는 접선의 기울기가 음$(-)$이 된다. 즉, $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌는 것을 볼 수 있다.

➤ 마찬가지로 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극소를 갖는 경우는 $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌는 것을 볼 수 있다.

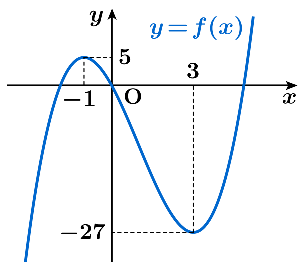




예제24

함수 x^3-3x^2-9x의 극값을 구하시오.

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 구간에서 미분가능하다. 또한 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이다. 이 값들을 토대로 증감표를 작성해 보면 다음과 같다.



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

$f'(-1)=0$이고 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌었으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 극댓값 5를 갖는다.
$f'(3)=0$이고 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌었으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이고, 극솟값 -27을 갖는다.

함수의 그래프

다음의 단계를 따르게 되면 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형을 얻을 수 있다.

(1) 도함수 $f'(x)$를 구한다.

(2) 방정식 $f'(x) = 0$의 해를 구한다.

(3) (2)의 결과로 얻은 x값들을 경계로 하여 증감표를 작성하고 극값을 판정한다.

(4) (3)의 결과를 이용하여 그래프의 개형을 그린다.

예제25

함수 $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$의 그래프의 개형을 그리시오.

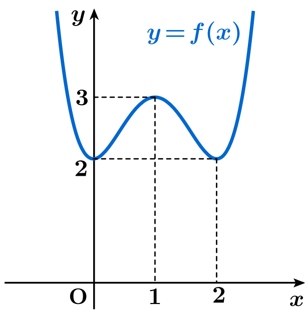
(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$라고 하면 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$

(2) 방정식 $f'(x) = 0$의 해는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$이다.

(3) $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$를 경계로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$

(4) (3)의 결과로부터 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



예제26

함수 $y = 3x^4 + 4x^3 - 1$의 그래프의 개형을 그리시오.

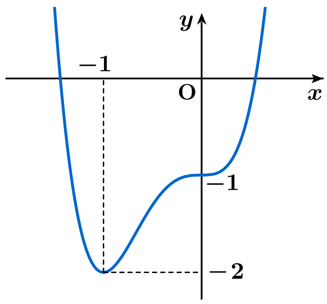
(1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$이라고 하면 $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$

(2) 방정식 $f'(x) = 0$의 해는 $x = -1$ 또는 $x = 0$이다.

(3) $x = -1,\ x = 0$을 경계로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

(4) (3)의 결과로부터 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.

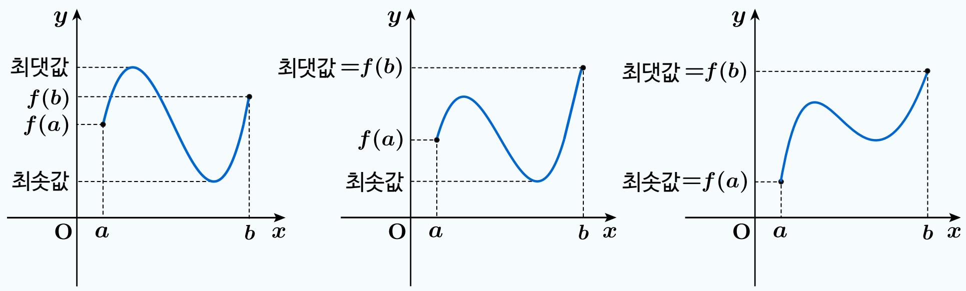


함수의 최대와 최소

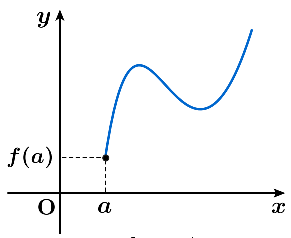
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 최대·최소의 정리에 의해서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 최댓값과 최솟값을 반드시 갖는다. 이때, 함수 $f(x)$가 이 닫힌구간에서 극값을 가지면 다음이 성립한다.

(1) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 최댓값은 이 구간에서의 극댓값들과 $f(a),\ f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

(2) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 최솟값은 이 구간에서의 극솟값들과 $f(a),\ f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.



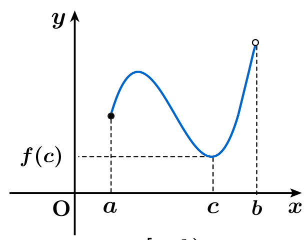
➤ 닫힌구간이 아닌 구간에서는 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.



$[a, \infty)$

최댓값 : 없음

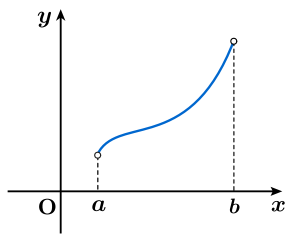
최솟값 : $f(a)$



$[a, b)$

최댓값 : 없음

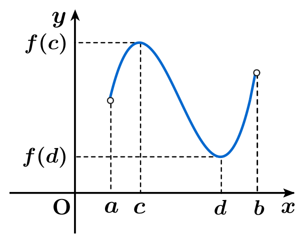
최솟값 : $f(c)$



(a, b)

최댓값 : 없음

최솟값 : 없음



(a, b)

최댓값 : $f(c)$

최솟값 : $f(d)$

➤ 함수가 주어진 구간에서 연속이고 그 구간에서 극값이 하나만 존재할 때

(1) 그 극값이 극소이면 극솟값이 곧 최솟값이다.

(2) 그 극값이 극대이면 극댓값이 곧 최댓값이다.

예제27

$-1 \leq x \leq 4$에서 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$의 최댓값을 구하시오.

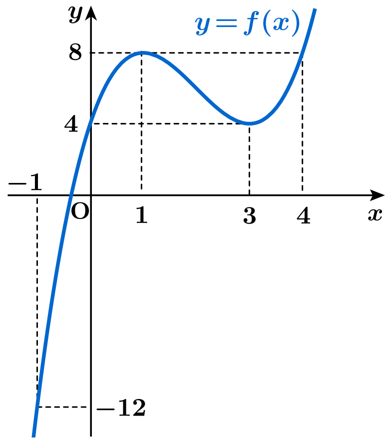
(1) 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 극값을 구해보면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0$$

으로부터 $x = 1$ 또는 $x = 3$에서 극값을 갖는 것을 알 수 있고, $f(1) = 8$, $f(3) = 4$임을 알 수 있다.

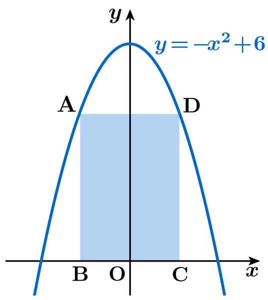
(2) 구간의 양 끝점 $x = -1$과 $x = 4$에서의 함숫값은 $f(-1) = -12$, $f(4) = 8$이다.

(3) 최댓값은 (1), (2)의 결과 중 가장 큰 값이므로 8이 된다는 것을 알 수 있다.



예제28

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD가 곡선 $y = -x^2 + 6$과 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 x축 위에 있을 때, 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하시오.



점 C의 좌표를 C$(t,\ 0)$ (단, $0 < t < \sqrt{6}$)이라고 하고, 직사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$라고 하면

$$f(t) = 2t\left(-t^2 + 6\right) = -2t^3 + 12t$$

가 된다. 따라서 이 문제는 열린구간 $(0,\ \sqrt{6})$에서 함수 $f(t)$의 최댓값을 구하는 문제가 된다. $f'(t) = -6t^2 + 12 = 0$으로부터 $t = \pm\sqrt{2}$에서 함수 $f(t)$가 극값을 갖는 것을 알 수 있고, $t = \sqrt{2}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$가 극댓값이 된다. 주어진 구간에서 극값이 극댓값 하나만 존재하므로 $8\sqrt{2}$가 극댓값이자 곧 최댓값이 된다. 따라서 직사각형 ABCD 넓이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다.

함수의 그래프와 방정식의 실근

(1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=0$의 그래프, 즉 x축이 만나는 교점의 개수와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 교점의 개수와 같다.

예제29

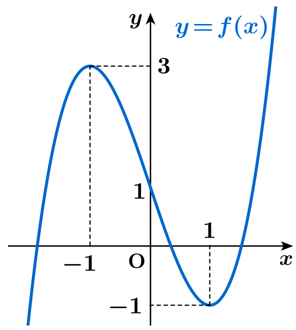
방정식 $x^3-3x+1=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

이다. 방정식 $f'(x)=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=1$이고, 이 값들을 경계로 증감표를 작성하고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



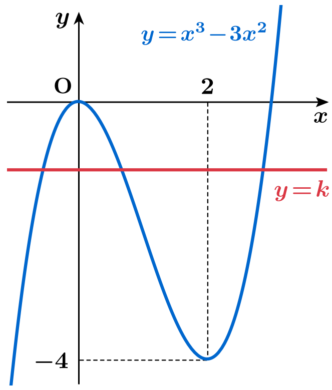
함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x+1=0$의 서로 다른 실근은 3개다.

예제30

방정식 $x^3-3x^2-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^3-3x^2$이라고 하면 방정식의 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 $y=k$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이고, 방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 이 값들을 토대로 증감표를 작성하고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$



그래프에서 볼 수 있듯이 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=2$에서 극솟값 -4를 갖는 것을 알 수 있다. 이때, k가 $-4<k<0$의 범위에 있으면 $y=f(x)$의 그래프와 $y=k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만난다는 것을 확인할 수 있다.

함수의 그래프와 부등식의 증명

(1) 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 가질 때, 그 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서

$$f(x)\text{의 최솟값} \geq 0$$

임을 보이면 된다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이려면 $h(x) = f(x) - g(x)$로 두고, 그 구간에서

$$h(x)\text{의 최솟값} \geq 0$$

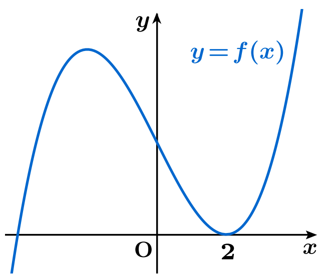
임을 보이면 된다.

예제31

$x \geq 0$일 때, $x^3 - 12x + 16 \geq 0$이 성립함을 보이시오.

$f(x) = x^3 - 12x + 16$이라고 하면, $x \geq 0$에서 $f(x) \geq 0$임을 보이면 된다.
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$이고 $f'(x) = 0$의 해가 $x = \pm 2$ 이므로, 이 값들을 토대로 증감표를 작성하고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$



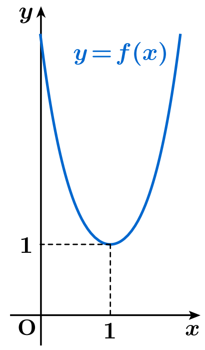
그래프에서 볼 수 있듯이, 함수 $f(x)$는 $x \geq 0$인 구간에서 극솟값을 하나만 갖기 때문에 $f(2) = 0$이 이 구간에서의 최솟값임을 알 수 있다. 따라서 $x \geq 0$일 때, $f(x) \geq 0$이 성립한다.

예제32

모든 실수 x에 대하여 $x^4+8x^2+4 \geq 4x^3+8x$가 성립함을 보이시오.

부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x^4-4x^3+8x^2-8x+4 \geq 0$이 된다.
$f(x)=x^4-4x^3+8x^2-8x+4$라고 하면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$임을 보이면 된다.
$f'(x)=4x^3-12x^2+16x-8=4(x-1)\left(x^2-2x+2\right)$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 실근은 $x=1$이다. 이것을 토대로 증감표 작성하고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

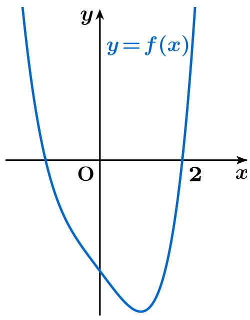


그래프에서 볼 수 있듯이, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 하나만 갖기 때문에, $f(1)=1$이 함수 $f(x)$의 최솟값임을 알 수 있다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x) \geq 0$이 성립한다.

예제32

$x>2$에서 $x^4-4x-8>0$이 성립함을 보이시오.

$f(x)=x^4-4x-8$라고 하면
$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)\left(x^2+x+1\right)$이다.
이때, $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 $x-1>0$, $x^2+x+1>0$이므로 $f'(x)>0$이 성립한다. 즉, $x>2$인 구간에서는 $f(x)$가 증가함수가 된다. 따라서 $x=2$에서의 함숫값이 $f(2) \geq 0$을 만족시키면 주어진 부등식은 성립한다.
오른쪽 그래프에서 볼 수 있듯이 $f(2)=0$이므로 $x>2$에서 부등식 $x^4-4x-8>0$이 성립함을 알 수 있다.

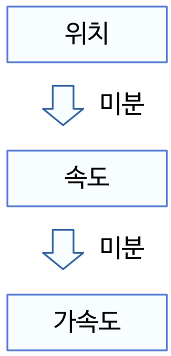


5 속도와 가속도

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x = f(t)$라고 할 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는 다음과 같다.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad a(t) = v'(t) = f''(t)$$



➤ 시각 t에서 $t + \Delta t$까지의 $f(t)$의 평균변화율

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

를 시각 t에서 $t + \Delta t$까지의 점 P의 평균속도라고 한다.

➤ $\Delta t \to 0$일 때의 평균속도의 극한을 $v(t)$라고 하면

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

이다. 이때, $v(t)$를 점 P의 시각 t에서의 순간속도 또는 속도라고 한다.

➤ 시간 t에 대한 함수 $v(t)$의 순간변화율을 $a(t)$라고 하면

$$a(t) = v'(t) = f''(t)$$

이다. 이때, $a(t)$를 점 P의 시각 t에서의 가속도라고 한다.

➤ 수직선 위를 움직이는 점 P의 운동방향

① $f'(t) > 0$인 구간에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

② $f'(t) < 0$인 구간에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

③ $f'(a) = 0$이고 $t = a$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌면 $t = a$에서 점 P의 운동방향이 바뀐다.

➤ 속도의 절댓값 $|v(t)|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라고 한다.

예제33

수직선 위를 움직이응 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x가 $x = t^2 + 4t^2 + 3t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 점 P의 시각 $t = 2$에서의 속도와 가속도

(2) 점 P가 출발한 후, 운동방향을 바꾸는 시각

(1) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = f'(t) = -3t^2 + 8t + 3$이므로 $v(2) = -12 + 16 + 3 = 7$이 되고, $a(t) = v'(t) = f''(t) = -6t + 8$이므로 $a(2) = -12 + 8 = 4$가 된다.

(2) $v(t) = f'(t) = -(3t+1)(t-3)$이므로 $v(3) = f'(3) = 0$이 된다. 또한, $t = 3$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 시각 $t = 3$에서 점 P의 운동방향이 양의 방향에서 음의 방향으로 바뀐다.

예제34

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치는 각각

$$\mathrm{P}(t) = \frac{1}{3}t^2 + 4t - \frac{2}{3}, \quad \mathrm{Q}(t) = 2t^2 - 10$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각 $\mathrm{P}'(t) = t^2 + 4$, $\mathrm{Q}'(t) = 4t$이다.

$$\mathrm{P}'(t) - \mathrm{Q}'(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$$

으로부터 $t = 2$에서 두 점의 속도가 같아지는 것을 알 수 있다.
시각 $t = 2$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$\mathrm{P}(2) = \frac{8}{3} + 8 - \frac{2}{3} = 10, \quad \mathrm{Q}(2) = 8 - 10 = -2$$

이므로 두 점 사이의 거리는 $\mathrm{P}(2) - \mathrm{Q}(2) = 10 - (-2) = 12$임을 알 수 있다.

고등학교 수학2

적분

3

1. 부정적분과 정적분
2. 정적분의 활용

1 부정적분

부정적분

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

적분

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

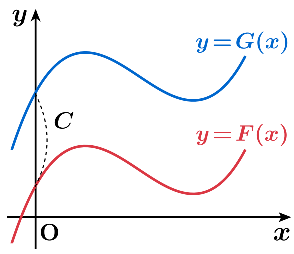
미분

를 만족시키는 임의의 $F(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분이라고 한다. 따라서 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면 함수 $f(x)$의 부정적분은 $F(x)+C$ (C는 상수)로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

와 같이 나타낸다. 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

➤ 함수 $f(x)$의 부정적분 하나가 $F(x)$이고, $G(x)$가 $f(x)$의 또 다른 부정적분이면 $F'(x) = G'(x) = f(x)$가 성립하므로



$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

이 된다. 이때, 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$$G(x) - F(x) = C$$
$$G(x) = F(x) + C \ (C\text{는 상수})$$

가 된다. 따라서 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면 함수 $f(x)$의 부정적분은 $F(x) + C$ (C는 상수)의 형태로 나타낼 수 있다.

예제1

등식 $\int f(x)dx = 3x^2 + C$ (C는 상수)를 만족하는 함수 $f(x)$를 구하시오.

$(3x^2 + C)' = f(x)$가 되어야 하므로 $f(x) = 6x$이다.

부정적분과 미분의 관계

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$

(2) $\displaystyle\int \left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\} dx = f(x) + C$ (단, C는 적분상수)

➤ $f(x)$의 부정적분 하나를 $F(x)$라고 하면 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$가 된다. 양변을 x에 대해서 미분하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\{F(x) + C\} = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

➤ $\dfrac{d}{dx} = f(x) = f'(x)$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} dx = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

예제2

함수 $f(x) = x^3 + 3x$에 대하여 $f(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int xf(x)\,dx\right\}$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

$f(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int xf(x)\,dx\right\} = xf(x) = x^4 + 3x^2$

$\therefore f(1) = 1 + 3 = 4$

예제3

다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

$$f(x) = \int \left\{\frac{d}{dx}\left(x^2 - x + 1\right)\right\} dx, \qquad f(0) = 1$$

$f(x) = \displaystyle\int \left\{\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - x + 1\right)\right\} dx = x^2 - x + 1 + C$ (C는 상수)

$f(0) = 1$에서 $C = 0$

$\therefore f(x) = x^2 - x + 1$

함수 $y = x^n$ (n은 자연수)의 부정적분

n이 자연수일 때,

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

➤ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right) = \dfrac{1}{n+1} \times (n+1)x^n = x^n$

예제4

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$

(2) $\displaystyle\int 1\,dx$

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx = \frac{1}{5+1} \times x^{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + C$ (C는 상수)

(2) $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$ (C는 상수)

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때,

(1) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (k는 0이 아닌 상수)

(2) $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

➤ 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \qquad F'(x) = f(x)$$

$$G(x) = \int g(x)\,dx, \qquad G'(x) = g(x)$$

(1) k를 상수라고하면 $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$이므로 $kF(x) = \displaystyle\int kf(x)\,dx$ 가 된다.

이때, $kF(x) = k\displaystyle\int f(x)\,dx$이므로 다음이 성립한다.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

(2) $\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$이므로

$F(x)+G(x) = \displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}\,dx$이다.

이때, $F(x)+G(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$이므로 다음이 성립한다.

$$\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(3) (2)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

➤ x^n의 부정적분, 1의 부정적분, 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 이용하면 다항함수의 부정적분을 구해낼 수 있다.

➤ 부정적분 함수를 구하는 과정에서 적분상수가 여러 개 나올 때는 모든 적분상수의 합을 하나의 적분상수로 나타낸다.

$$\int 3x^2\,dx + \int x\,dx = (x^3+C_1) + \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

예제5

부정적분 $\int \left(2x^2+3x-4\right)\ dx$를 구하시오.

$$\begin{aligned}\int (2x^2+3x-4) &= \int 2x^2\ dx + \int 3x\ dx - \int 4\ dx\\ &= 2\int x^2\ dx + 3\int x\ dx - 4\int 1\ dx\\ &= 2\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+3\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-4(x+C_3)\\ &= \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+(2C_1+3C_2-4C_3)\end{aligned}$$

여기서 $(2C_1+3C_2-4C_3)=C$라고하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int \left(2x^2+3x-4\right)\ dx = \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+C$$

예제6

다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하시오.

$$f'(x)=6x^2-2x+5, \qquad f(0)=-1$$

$f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$$f(x)=\int \left(6x^2-2x+5\right)\ dx = 2x^3-x^2+5x+C$$

이고, $f(0)=-1$에서 $C=-1$이므로 $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$이 된다.

2 정적분

정적분의 정의

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분 중 하나인 $F(x)$에 대하여 $F(b)-F(a)$를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

이때, 정적분 $\int_a^b f(x)\ dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

➤ 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 할 때, $F(b)-F(a)$는 적분상수 C와는 관계없이 항상 일정한 값이 나온다. 따라서 정적분에서는 적분상수 C를 생략한다.

$$\Big[F(x)+C\Big]_a^b = F(b)+C-F(a)-C = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

➤ 정적분 $\int_a^b f(x)\ dx$에서 a를 아래끝, b를 위끝이라고 한다.

➤ 정적분은 $a,\ b$의 대소에 관계없이 $\int_a^b f(x)\ dx = F(b)-F(a)$로 정의한다.

➤ 정적분 $\int_a^b f(x)\ dx$의 값은 함수 $f(x)$와 아래끝 a, 위끝 b만으로 결정되는 상수이므로 적분변수와는 관계가 없다.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(y)\ dy = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(u)\ du = \cdots$$

➤ 부정적분 $\int f(x)\ dx$의 결과는 함수이므로 적분변수가 다르면 서로 다른 함수가 된다.

$$\int f(x)\ dx \neq \int f(y)\ dy \neq \int f(t)\ dt \neq \int f(u)\ du \neq \cdots$$

예제7

정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(3x^2+6x-1\right)\ dx$의 값을 구하시오.

$$\int_{-1}^{2} \left(3x^2+6x-1\right)\ dx = \Big[x^3+3x^2-x\Big]_{-1}^{2} = (8+12-2)-(-1+3+1)=15$$

예제8

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $\displaystyle\int_{a}^{a} f(x)\ dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\ dx = -\int_{b}^{a} f(x)\ dx$

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

(1) $\displaystyle\int_{a}^{a} f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_{a}^{a} = F(a)-F(a)=0$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\ dx &= \Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = F(b)-F(a)\\ &= -\Big\{F(a)-F(b)\Big\} = -\Big[F(x)\Big]_{b}^{a}\\ &= -\int_{b}^{a} f(x)\ dx\end{aligned}$$

예제9

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{4}^{4} \left(x^2+2x-5\right)\ dx$

(2) $\displaystyle\int_{2}^{0} (2x+3)\ dx$

(1) $\displaystyle\int_{4}^{4} \left(x^2+2x-5\right)\ dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_{2}^{0} (2x+3)\ dx = \Big[x^2+3x\Big]_{2}^{0} = 0-(4+6)=-10$

정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 a를 포함하는 닫힌구간에서 연속이고, x가 그 닫힌구간에 속하는 임의의 실수이면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

➤ 함수 $f(t)$의 부정적분 중 하나를 $F(t)$라고 하면 정적분의 정의에 의하여 $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$이다. 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

예제10

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)\,dt = x^3 - x^2 - x - 2$를 만족할 때, 상수 a의 값과 함수 $f(x)$를 각각 구하시오.

주어진 등식의 양변에 $x = a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)\,dt = a^3 - a^2 - a - 2 = 0$이다.

$$a^3 - a^2 - a - 2 = (a-2)\left(a^2 + a + 1\right) = 0 \qquad \therefore a = 2$$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(x^3 - x^2 - x - 2\right)$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

이다.

정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

(1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$ (k는 상수)

(2) $\displaystyle\int_a^b \Big\{f(x)+g(x)\Big\}\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b \Big\{f(x)-g(x)\Big\}\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx$

➤ 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분 중 하나를 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

(1) $$\int_a^b kf(x)\ dx = \Big[kF(x)\Big]_a^b = kF(b)-kF(a) = k\{F(b)-F(a)\} = k\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$= k\int_a^b f(x)\ dx$$

(2) $$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\ dx = \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b = \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} = \Big[F(x)\Big]_a^b + \Big[G(x)\Big]_a^b$$
$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^n g(x)\ dx$$

(3) (2)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

예제11

정적분 $\displaystyle\int_1^2 \left(-x^3+2x^2+3x+1\right)\ dx + \in_1^2 \left(x^3+x^2-3x-3\right)\ dx$의 값을 구하시오.

$$\int_1^2 \left(-x^3+2x^2+3x+1\right)\ dx + \int_1^2 \left(x^3+x^2-3x-3\right)\ dx$$
$$= \int_1^2 \left(-x^3+2x^2+3x+1+x^3+x^2-3x-3\right)\ dx$$
$$= \int_1^2 \left(3x^2-2\right)\ dx = 3\int_1^2 x^2\ dx + \int_1^2 1\ dx$$
$$= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - 2\Big[x\Big]_1^2 = 3\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) - 2(2-1)$$
$$= 7-2=5$$

정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 $a,\ b,\ c$를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

➤ 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 각각 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx &= \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b \\ &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} \\ &= F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

예제12

정적분 $\int_1^2 \left(2x^2 + 4\right)\ dx + \int_2^3 \left(2x^2 + 4\right)\ dx$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(2x^2 + 4\right)\ dx + \int_2^3 \left(2x^2 + 4x\right)\ dx &= \int_1^3 \left(2x^2 + 4\right)\ dx \\ &= 2\int_1^3 x^2\ dx + 4\int_1^3 1\ dx \\ &= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 + 4\Big[x\Big]_1^3 \\ &= 2\left(9 - \frac{1}{3}\right) - 4(3 - 1) \\ &= \frac{76}{3}\end{aligned}$$

예제13

정적분 $\int_0^3 \left|x^2-6x+8\right|\,dx$의 값을 구하시오.

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $\left|x^2-6x+8\right| = \begin{cases} x^2-6x+8 & (0 \le x < 2) \\ -x^2+6x-8 & (2 \le x \le 3) \end{cases}$ 이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left|x^2-6x+8\right|\,dx &= \int_0^2 \left(x^2-6x+8\right)\,dx + \int_2^3 \left(-x^2+6x-8\right)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_2^3 \\ &= \left(\frac{8}{3}-12+16\right) + \left(-9+27-24+\frac{8}{3}-12+16\right) \\ &= \frac{22}{3}\end{aligned}$$

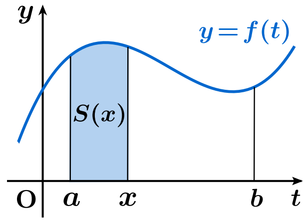
1 도형의 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

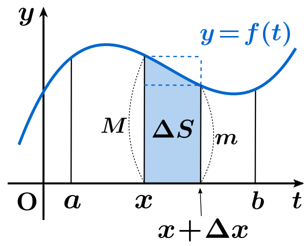
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

➤ 함수 $y=f(t)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 이 구간에서 $f(t)\geq 0$이라고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a,\ t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 하자. 이때, x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면



$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이다.



한편, $\Delta x>0$일 때, 함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 연속이기 때문에 최대·최소의 정리에 의해 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 그 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라고하면

$$m\Delta x\leq \Delta S\leq M\Delta x$$

이고, 양변을 Δx로 나누면 $m\leq \dfrac{\Delta S}{\Delta x}\leq M$이 된다. 여기서 $\Delta x\to 0+$이면

$$\lim_{\Delta x\to 0+} m\leq \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta S}{\Delta x}\leq \lim_{\Delta x\to 0+} M$$

이 성립한다. 함수 $f(t)$는 $[a,\ b]$에서 연속함수이므로 $\Delta x\to 0+$이면 $m\to f(x),\ M\to f(x)$이 되고 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$$

마찬가지 방법으로 $\Delta x<0$이 때도 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $S'(x)=\dfrac{d}{dx}S(x)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$가 되어 $S(x)$가 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 됨을 알 수 있다. 따라서

$$S(x)-S(a)=\int_a^x f(t)\,dt$$

이다.

위 식에 $x=b$를 대입하면

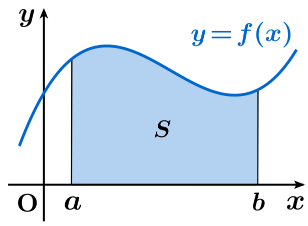
$$S(b)-S(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

가 된다. 이때, $S(b)=S,\ S(a)=0$이고

$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$이므로

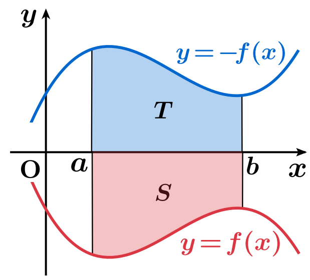
$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

가 된다.



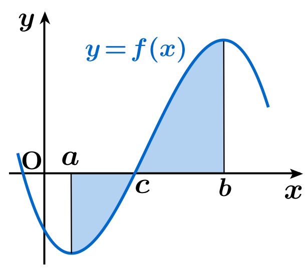
➤ 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\le 0$이면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-f(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고 $-f(x)\ge 0$이 된다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S와 곡선 $y=-f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 T는 서로 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$S=T=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



➤ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ c]$에서는 $f(x)\le 0$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서는 $f(x)\ge 0$이면, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}S&=\int_a^c \{-f(x)\}\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\\&=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_c^b |f(x)|\,dx\\&=\int_a^b |f(x)|\,dx\end{aligned}$$



예제14

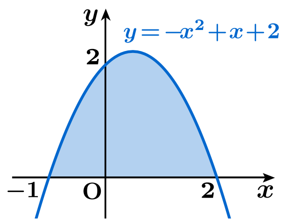
곡선 $y = -x^2 + x + 2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

주어진 곡선과 x축과의 교점의 x좌표는 $-x^2 + x + 2 = 0$으로부터 $x = -1$ 또는 $x = 2$임을 알 수 있다. 또한 구간 $[-1,\ 2]$에서 $-x^2 + x + 2 \geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\ dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

이다.



예제15

곡선 $y = x^2 - 3x$와 x축 및 두 직선 $x = -1$, $x = 2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

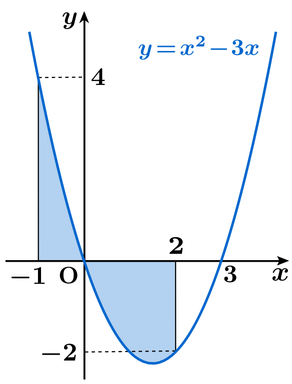
주어진 곡선과 x축과의 교점의 x좌표는 $x^2 - 3x = 0$으로부터 $x = 0$ 또는 $x = 3$임을 알 수 있다. 또한 구간 $[-1,\ 0]$에서는 $x^2 - 3x \geq 0$이고, 구간 $[0,\ 2]$에서는 $x^2 - 3x \leq 0$이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 3x\right)\ dx + \int_{0}^{2} \left(-x^2 + 3x\right)\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{31}{6}$$

이다.

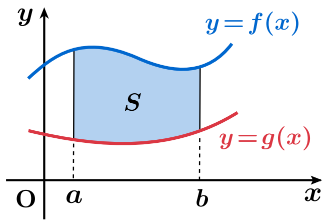


두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

➤ 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $0\le g(x)\le f(x)$일 때



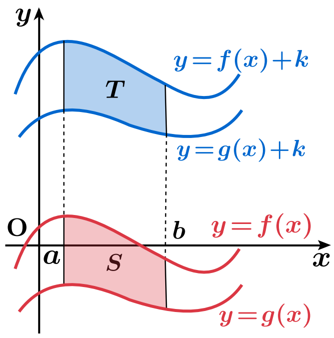
$$\begin{aligned}S&=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\\&=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\end{aligned}$$

➤ 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $g(x)\le f(x)$이고, $f(x)$ 또는 $g(x)$가 음의 값을 가질 때

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 실수 k 만큼 평행이동하여

$$0\le g(x)+k\le f(x)+k$$

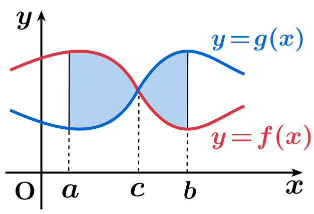
가 성립되도록 한다. 이때, 평행이동한 도형의 넓이 T가 원래 도형의 넓이 S와 같으므로 넓이 S는 다음과 같이 구할 수 있다.



$$\begin{aligned}S=T&=\int_a^b \{f(x)+k\}\,dx-\int_a^b \{g(x)+k\}\,dx\\&=\int_a^b \{f(x)+k-g(x)-k\}\,dx\\&=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\end{aligned}$$

➤ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서는 $f(x)\ge g(x)$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서는 $f(x)\le g(x)$일 때

$$\begin{aligned}S&=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_a^c |f(x)-g(x)|\,dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|\,dx\\&=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\end{aligned}$$

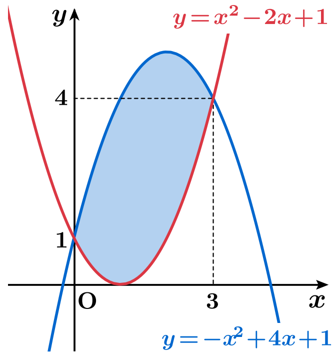


예제16

두 곡선 $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -x^2 + 4x + 1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

두 곡선의 교점의 x좌표는

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x(x-3) = 0$$



으로부터 $x = 0$ 또는 $x = 3$임을 알 수 있다. 또한 구간 $[0,\ 3]$에서 $-x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{\left(-x^2 + 4x + 1\right) - \left(x^2 - 2x + 1\right)\right\}\ dx \\ &= \int_0^3 \left(-2x^2 + 6x\right)\ dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

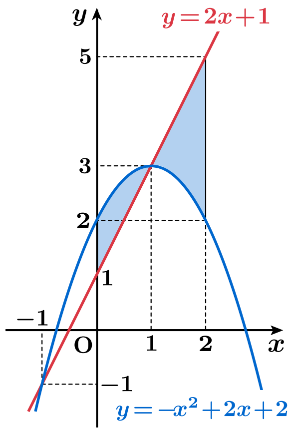
이다.

예제17

$0 \leq x \leq 2$일 때, 곡선 $y = -x^2 + 2x + 2$와 직선 $y = 2x + 1$ 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$$-x^2 + 2x + 2 = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-1) = 0$$



으로부터 $x = -1$ 또는 $x = 1$임을 알 수 있다. 또한 구간 $[0,\ 1]$에서는 $-x^2 + 2x + 2 \geq 2x + 1$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서는 $-x^2 + 2x + 2 \leq 2x + 1$이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left\{\left(-x^2 + 2x + 2\right) - (2x + 1)\right\}\ dx \\ &\qquad + \int_1^2 \left\{(2x + 1) - \left(-x^2 + 2x + 2\right)\right\}\ dx \\ &= \int_0^1 \left(-x^2 + 1\right)\ dx + \int_1^2 \left(x^2 - 1\right)\ dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

이다.

2 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점이 위치

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

(1) 시각 $t = a$에서 $t = b$까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\int_a^b v(t)\ dt$$

(2) 시각 $t = a$에서의 점 P의 위치를 x_0, 시각 $t = b$에서의 점 P의 위치를 x라고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$x = x_0 + \int_a^b v(t)\ dt$$

➤ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $f(t)$라고 하면, 시각 $t = a$에서 시각 $t = b$ 가지 점 P의 위치의 변화량은 $f(b) - f(a)$가 된다. 또한 $v(t) = f'(t)$이므로 $f(t)$는 $v(t)$의 부정적분 중 하나이다. 따라서

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)\ dt$$

임을 알 수 있다.

➤ $t = b$에서의 위치 $f(b)$는 $f(b) = f(a) + \int_a^b v(t)\ dt$로 구할 수 있고, $x_0 = f(a)$, $x = f(b)$ 이므로

$$x = x_0 + \int_a^b v(t)\ dt$$

임을 알 수 있다.

예제18

좌표가 1인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t^2 + t + 3$$

과 같을 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량

(2) 시각 $t = 3$에서의 점 P의 위치

(1) 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\int_0^3 \left(2t^2 + t + 3\right)\, dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3t\right]_0^3 = 18 + \frac{9}{2} + 9 = \frac{63}{2}$$

(2) 시각 $t = 3$에서 점 P이 위치는 다음과 같다.

$$1 + \int_0^3 \left(2t^2 + t + 3\right)\, dt = 1 + \frac{63}{2} = \frac{65}{2}$$

수직선 위를 움직이는 점의 이동 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^b |v(t)|\,dt$$

➤ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $f(t)$라고 하면

(1) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t) \geq 0$일 때
속도 $v(t) \geq 0$이므로 점 P는 양의 방향으로 이동한다. 따라서 점 P가 움직인 거리는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b |v(t)|\,dt$$

(2) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t) \leq 0$일 때
속도 $v(t) \leq 0$이므로 점 P는 음의 방향으로 이동한다. 따라서 점 P가 움직인 거리는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(a) - f(b) = -\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b |v(t)|\,dt$$

(3) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t)$가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때
속도 $v(t)$가 양, 음인 구간을 나누어 (1), (2)에서와 같이 움직인 거리를 구하면 되므로 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^b |v(t)|\,dt$$

예제19

지상으로부터 $10\mathrm{m}$의 높이에서 $49\mathrm{m/s}$의 속도로 지면에 수직으로 쏘아 올린 로켓의 t초 후의 속도가 $v(t) = 49 - 9.8t\mathrm{m/s}$라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 로켓이 도달할 수 있는 최고 높이

(2) 로켓을 쏘아 올린 후, 10초 동안 로켓이 실제로 움직인 거리

(1) 로켓이 최고 높이에 도달하는 것은 속도가 0이 될 때이므로 $t = 5$일 때 최고 높이에 도달하게 된다. 따라서 $t = 5$일 때의 로켓의 위치를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} 10 + \int_0^5 (49 - 9.8t)\, dt &= 10 + \Big[49t - 4.9t^2\Big]_0^5 \\ &= 10 + 245 - 122.5 = 132.5\ (\mathrm{m}) \end{aligned}$$

(2) 구간 $[0,\ 5]$에서는 $v(t) \geq 0$이고, 구간 $[5,\ \infty)$에서는 $v(t) \leq 0$이므로 10초 동안 로켓이 실제로 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{10} |49 - 9.8t|\, dt &= \int_0^5 (49 - 9.8t)\, dt + \int_5^{10} (9.8t - 49)\, dt \\ &= \Big[49t - 4.9t^2\Big]_0^5 + \Big[4.9t^2 - 49t\Big]_5^{10} \\ &= 245\ (\mathrm{m}) \end{aligned}$$