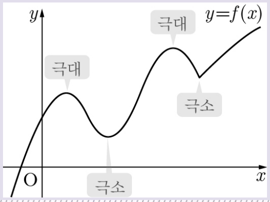
01 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

(1) $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하며, $f(a)$를 **극댓값**이라 한다.

(2) $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하며, $f(a)$를 **극솟값**이라 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라 한다.



◪ **다음 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하여라.**

1. $f(x)=x^3-3x$

2. $f(x)=-x^3+12x+5$

3. $f(x)=x^3-6x^2$

4. $f(x)=-2x^3+6x+1$

5. $f(x)=x^3-3x^2+2$

6. $f(x)=x^3+3x^2-24$

7. $f(x)=x^3-3x^2+1$

8. $f(x)=-x^3+3x+3$

9. $f(x)=x^3-6x^2+9x$

10. $f(x)=x^3+3x^2-9x-11$

11. $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

12. $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

13. $f(x)=2x^3-6x+5$

14. $f(x)=2x^3-3x^2+2$

15. $f(x)=2x^3-6x^2+3$

16. $f(x)=-2x^3-6x^2-6x+1$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

17. $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$

18. $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+5$

19. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

20. $f(x)=x^4-2x^2$

21. $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+1$

22. $f(x)=3x^4-8x^3+10$

23. $f(x)=x^4+2x^3-2x^2+7$

24. $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$

25. $f(x)=x^4+4x^3-16x-1$

26. $f(x)=x^4-6x^2-8x+1$

27. $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$

28. $f(x)=2x^4-4x^2+1$

29. $f(x)=3x^4+4x^3+2$

30. $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$

02 함수의 극대와 극소를 이용한 미정계수의 결정

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

31. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 8을 가질 때, $f(1)+f'(1)$의 값을 구하여라.

32. 두 함수 $f(x)=x^2+ax+3$, $g(x)=-2x^2+bx+4$가 모두 $x=2$에서 극값을 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

◪ 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

33. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

34. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=2$에서 극솟값 -10을 갖고, $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.

35. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값 3을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

36. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-2$에서 극솟값 30을 갖고, $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

37. 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극댓값 6을 갖고, $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

38. 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값 4를 갖고, $x=-2$에서 극솟값을 갖는다.

39. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

40. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 10을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

41. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 13을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

42. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극솟값 -3을 갖고, $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.

43. 함수 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 갖고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

44. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2-12x$가 $x=-1$에서 극댓값을 가질 때, a의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

45. 함수 $f(x)=x^3-3x+a$가 극댓값이 12이고, 극솟값이 m일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

46. 함수 $f(x)=2x^3-12x^2+ax-4$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

47. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$가 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

48. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$이 $x=-1$에서 극댓값 3을 갖고, 극솟값 m을 가질 때, $a+b+m$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

49. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$이 $x=1$에서 극솟값 -1을 갖고, 극댓값 M을 가질 때, $a+b+M$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

50. 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+b$가 $x=2$에서 극댓값 5를 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

51. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$가 $x=1$에서 극솟값 -4를 가질 때, $f(x)$의 극댓값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

52. 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극솟값 -4를 갖고, $x=3$에서 극댓값을 가질 때, $a+bc$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

53. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 17을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

54. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극댓값을 갖고 $x=3$에서 극솟값 10을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수)

55. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -20을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수)

56. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값 10을 갖고 $x=4$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수)

57. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖고, $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수)

58. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극댓값 3을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 가질 때, $f(3)$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

59. 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값 2를 갖고, $x=-2$에서 극솟값을 가질 때, $f(-1)$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

60. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -2를 갖는다. $f(0)=2$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하여라.

61. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 3을 갖는다. $f'(2)=-3$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하여라.

62. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+9x+27$의 극댓값과 극솟값의 합이 0일 때, a의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

정답 및 해설

1) 극댓값 2, 극솟값 -2

⇨ $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=2$, 극솟값은 $f(1)=-2$이다.

2) 극댓값 21, 극솟값 -11

⇨ $f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-11	↗	21	↘

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극소이고, 극솟값은 $f(-2)=-11$

$x=2$에서 극대이고, 극댓값은 $f(2)=21$

3) 극댓값 0, 극솟값 -32

⇨ $f(x)=x^3-6x^2$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=0$, 극솟값은 $f(4)=64-96=-32$

4) 극댓값 5, 극솟값 -3

⇨ $f(x)=-2x^3+6x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	5	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=5$, 극솟값은 $f(-1)=-3$이다.

5) 극댓값 2, 극솟값 -2

⇨ $f(x)=x^3-3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=2$, 극솟값은 $f(2)=8-12+2=-2$

6) 극댓값 -20, 극솟값 -24

⇨ $f(x)=x^3+3x^2-24$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-20	↘	-24	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=-20$, 극솟값은 $f(0)=-24$이다.

7) 극댓값 1, 극솟값 -3

⇨ $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=1$, 극솟값은 $f(2)=-3$이다.

8) 극댓값 5, 극솟값 1

⇨ $f(x)=-x^3+3x+3$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=5$, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=1$

9) 극댓값 4, 극솟값 0

⇨ $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$일 때 극대이고 극댓값은 $f(1)=4$,

$x=3$일 때 극소이고 극솟값은 $f(3)=0$

10) 극댓값 16, 극솟값 -16

⇨ $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-3$일 때 극대이고 극댓값은 $f(-3)=16$
$x=1$일 때 극소이고 극솟값은 $f(1)=-16$

11) 극값을 갖지 않는다.
⇨ $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

12) 극댓값 2, 극솟값 -2
⇨ $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=2$, $x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=-2$

13) 극댓값 9, 극솟값 1
⇨ $f(x)=2x^3-6x+5$에서
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=-2+6+5=9$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=2-6+5=1$

14) 극댓값 2, 극솟값 1
⇨ $f(x)=2x^3-3x^2+2$에서
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=2$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=1$

15) 극댓값 3, 극솟값 -5
⇨ $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=0$일 때 극대이고 극댓값은 $f(0)=3$,
$x=2$일 때 극소이소 극솟값은 $f(2)=-5$

16) 극값을 갖지 않는다.
⇨ $f'(x)=-6x^2-12x-6=-6(x+1)^2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

17) 극댓값 23, 극솟값 -4
⇨ $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$에서
$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	23	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=23$, 극솟값은 $f(-1)=-4$이다.

18) 극댓값 25, 극솟값 -2
⇨ $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+5$에서
$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	25	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=25$, 극솟값은 $f(-1)=-2$이다.

19) 극댓값 21, 극솟값 -6
⇨ $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(-2)=21$
$x=1$일 때 극소이고 극솟값은 $f(1)=-6$

20) 극댓값 0, 극솟값 -1
⇨ $f(x)=x^4-2x^2$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=0$, 극솟값은 $f(-1)=f(1)=-1$이다.

21) 극솟값 $\frac{2}{3}$

⇨ $f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=\frac{2}{3}$

22) 극솟값 -6

⇨ $f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	10	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, 극솟값은 $f(2)=-6$

23) 극댓값 7, 극솟값 -1, $\frac{109}{16}$

⇨ $f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극대이고 극댓값은 $f(0)=7$, $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$일 때 극소이고 극솟값은 $f(-2)=-1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{109}{16}$

24) 극솟값 $-\frac{27}{16}$

⇨ $f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$일 때 극소이고 극솟값은 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}$

25) 극솟값 -12

⇨ $f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x-1)(x+2)^2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	15	$\searrow$	-12	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이고 극솟값은 $f(1)=-12$이다.

26) 극솟값 -23

⇨ $f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\searrow$	-23	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-23$이다.

27) 극댓값 -8, 극솟값 -9

⇨ $f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24$
$=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는
$x=2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(2)=-8$
$x=1$ 또는 $x=3$일 때 극소이고 극솟값은
$f(1)=f(3)=-9$

28) 극댓값 1, 극솟값 -1

⇨ $f(x)=2x^4-4x^2+1$에서

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-1$과 $x=1$일 때 극소이고 극솟값은 -1

$x=0$일 때 극대이고 극댓값은 1

29) 극솟값 1

⇨ $f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고,
극솟값은 $f(-1)=1$

30) 극댓값 2, 극솟값 1

⇨ $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=f(2)=2$, 극솟값은 $f(1)=1$이다.

31) 8

⇨ $f(x)$가 $x=1$에서 극값 8을 가지므로

$f(1)=8$, $f'(1)=0$

$\therefore\ f(1)+f'(1)=8$

32) $a=-4$, $b=8$

⇨ $f(x)=x^2+ax+3$, $g(x)=-2x^2+bx+4$에서

$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-4x+b$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$, $g'(2)=0$

$4+a=0$, $-8+b=0$

$\therefore\ a=-4$, $b=8$

33) $a=0$, $b=-3$, $c=1$

⇨ $f(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$, $f'(1)=3+2a+b=0$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

또한, $f(-1)=3$이므로 $-1+a-b+c=3$ $\quad\therefore c=1$

34) $a=\frac{3}{2}$, $b=-18$, $c=12$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가

$x=-3$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=27-6a+b=0$, $f'(2)=12+4a+b=0$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-18$

또한, $f(2)=-10$이므로 $8+4a+2b+c=-10$

$\therefore\ c=12$

35) $a=-3$, $b=0$, $c=3$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$, $f'(2)=12+4a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$

또 $f(0)=3$이므로 $c=3$

36) $a=-3$, $b=-24$, $c=2$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-2$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=12-4a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(4)=48+8a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-24$

$f(-2)=30$이므로 $-8+4a-2b+c=30$ $\quad\therefore c=2$

37) $a=0$, $b=3$, $c=4$

⇨ $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가

$x=1$, $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=-3+2a+b=0$ ⋯ ㉠

$f'(-1)=-3-2a+b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

또한 $f(1)=6$이므로 $-1+a+b+c=6$

$\therefore\ c=4$

38) $a=-3$, $b=0$, $c=4$

⇨ $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가

$x=-2$, $x=0$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=-12-4a+b=0$ ⋯ ㉠

$f'(0)=b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$

또한 $f(0)=4$이므로 $c=4$

39) $a=-3$, $b=-12$, $c=-3$

⇨ $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$x=-1$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=6-2a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(2)=24+4a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$

또, $f(-1)=4$이므로 $-2+a-b+c=4$

$\therefore c=-3$

40) $a=-3$, $b=-12$, $c=3$

⇨ $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$x=-1$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=6-2a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(2)=24+4a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$

또, $f(-1)=10$이므로 $-2+a-b+c=10$

$\therefore c=3$

41) $a=-3$, $b=-12$, $c=6$

⇨ $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=0$
또 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$
$f'(-1)=0$에서 $6-2a+b=0$
$\therefore 2a-b=6$ ……㉠
$f'(2)=0$에서 $24+4a+b=0$
$\therefore 4a+b=-24$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$
$\therefore f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$
이때 $f(-1)=13$이므로
$-2-3+12+c=13$ $\quad\therefore c=6$

42) $a=3$, $b=-12$, $c=4$
⇨ $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+b$
$x=-2$, $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(-2)=24-4a+b=0$ ……㉠
$f'(1)=6+2a+b=0$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-12$
또 $f(1)=-3$이므로 $2+a+b+c=-3$
$\therefore c=4$

43) $a=9$, $b=-12$, $c=3$
⇨ $f'(x)=-6x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=-6+2a+b=0$, $f'(2)=-24+4a+b=0$
위 두 식을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-12$
또한, $f(1)=-2$이므로 $-2+a+b+c=-2$
$\therefore c=3$

44) -3
⇨ $f(x)=2x^3+ax^2-12x$에서
$f'(x)=6x^2+2ax-12$
이때 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로
$f'(-1)=0$
$6-2a-12=0$, $2a=-6$ $\quad\therefore a=-3$

45) 18
⇨ $f(x)=x^3-3x+a$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
즉 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로
$f(-1)=12$에서 $-1+3+a=12$ $\quad\therefore a=10$
따라서 $f(x)=x^3-3x+10$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은
$m=f(1)=1-3+10=8$
$\therefore a+m=18$

46) 22
⇨ $f(x)=2x^3-12x^2+ax-4$에서
$f'(x)=6x^2-24x+a$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가지므로
$f(1)=M$에서 $2-12+a-4=M$
$\therefore a-14=M$ ……㉠
$f'(1)=0$에서 $6-24+a=0$ $\quad\therefore a=18$
$a=18$을 ㉠에 대입하면 $M=4$ $\quad\therefore a+M=22$

47) 3
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
이때 $f'(1)=0$, $f'(3)=0$이므로
$3+2a+b=0$, $27+6a+b=0$
$\therefore a=-6$, $b=9$
$\therefore a+b=3$

48) -4
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로
$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0$
$\therefore 2a-b=3$ ……㉠
$f(-1)=3$에서 $-1+a-b+1=3$
$\therefore a-b=3$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 $f(x)=x^3-3x+1$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은
$m=f(1)=1-3+1=-1$
$\therefore a+b+m=-4$

49) 17
⇨ $f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로
$f'(1)=0$에서 $6+2a+b=0$
$\therefore 2a+b=-6$ ……㉠
$f(1)=-1$에서 $2+a+b+6=-1$
$\therefore a+b=-9$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-12$
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+6$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은
$M=f(-2)=-16+12+24+6=26$
$\therefore a+b+M=17$

50) 1
⇨ $f(x)=-x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 5를 가지므로
$f(2)=5$, $f'(2)=0$
$f(2)=5$에서 $-8+4a+b=5$ $\quad\therefore 4a+b=13$
$f'(2)=0$에서 $-12+4a=0$ $\quad\therefore a=3$
위 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$
따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+1$이고

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=1$이다.

51) 0
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
이때 $f(1)=-4$, $f'(1)=0$이므로
$1+a+b-2=-4$ $\quad\therefore a+b=-3$ ⋯㉠
$3+2a+b=0$ $\quad\therefore 2a+b=-3$ ⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$
$f'(x)=3x^2-3=0$에서 $x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$
따라서 $f(x)=x^3-3x-2$이므로 $f(x)$의 극댓값은
$f(-1)=-1+3-2=0$

52) 12
⇨ $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극소, $x=3$에서 극대이므로
$-3x^2+2ax+b=0$에서 $-3(x+1)(x-3)=0$
$2a=6$, $b=9$ $\quad\therefore a=3$, $b=9$
즉 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+c$에서 $f(-1)=-4$이므로
$1+3-9+c=-4$ $\quad\therefore c=1$
$\therefore a+bc=3+9=12$

53) 18
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로
$f'(x)=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$
$2a=-6$, $b=-9$ $\quad\therefore a=-3$
$f(x)=x^3-3x^2-9x+c$에서 $f(-1)=17$이므로
$-1-3+9+c=17$ $\quad\therefore c=12$
$\therefore a-b+c=-3-(-9)+12=18$

54) 14
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(1)=0$
또, $x=3$에서 극솟값 10을 가지므로
$f(3)=10$, $f'(3)=0$
$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$
$\therefore 2a+b=-3$ ⋯ ㉠
$f(3)=10$에서 $27+9a+3b+c=10$
$\therefore 9a+3b+c=-17$ ⋯ ㉡
$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$
$\therefore 6a+b=-27$ ⋯㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$이고 ㉡에 의하여 $c=10$이다.
따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+10$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=14$이다.

55) 12
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$x=-1$에서 극댓값을, $x=3$에서 극솟값을 가지므로
$f'(x)=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$
$\therefore a=-3$, $b=-9$
$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$
이때 $f(3)=-20$이므로
$27-27-27+c=-20$ $\quad\therefore c=7$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$이므로 극댓값은
$f(-1)=-1-3+9+7=12$

56) -22
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 $f'(0)=0$
또 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 $f'(4)=0$
$f'(0)=0$에서 $b=0$
$f'(4)=0$에서 $48+8a+b=0$ ⋯⋯㉠
$b=0$을 ㉠에 대입하면 $8a=-48$ $\quad\therefore a=-6$
즉 $f(x)=x^3-6x^2+c$에서 $f(0)=10$이므로 $c=10$
따라서 $f(x)=x^3-6x^2+10$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은
$f(4)=64-96+10=-22$

57) -23
⇨ $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로
$f'(-1)=0$
또 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$
$f'(-1)=0$에서 $6-2a+b=0$
$\therefore 2a-b=6$ ⋯⋯㉠
$f'(2)=0$에서 $24+4a+b=0$
$\therefore 4a+b=-24$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$
즉 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$에서 $f(-1)=4$이므로
$-2-3+12+c=4$ $\quad\therefore c=-3$
따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-3$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은
$f(2)=16-12-24-3=-23$

58) 5
⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6$

$\therefore\ a=-\dfrac{9}{2},\ b=6$

$\therefore\ f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+c$

이때 $f(1)=3$이므로

$1-\dfrac{9}{2}+6+c=3 \qquad \therefore\ c=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+\dfrac{1}{2}$이므로

$f(3)=27-\dfrac{81}{2}+18+\dfrac{1}{2}=5$

59) 0

⇨ $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$f(x)$가 $x=0$과 $x=-2$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=-3x(x+2)=-3x^2-6x$

$\therefore\ a=-3,\ b=0$

$\therefore\ f(x)=-x^3-3x^2+c$

이때 $f(0)=2$이므로 $c=2$

따라서 $f(x)=-x^3-3x^2+2$이므로

$f(-1)=1-3+2=0$

60) 2

⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f(0)=2$이므로 $c=2$

즉, $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(2)=-2$에서 $8+4a+2b+2=-2$

$\therefore\ 2a+b=-6$ $\cdots$ ㉠

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$

$\therefore\ 4a+b=-12$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=0$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이고

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=2$이다.

61) -1

⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f(1)=3$에서 $1+a+b+c=3$

$\therefore\ a+b+c=2$ $\cdots$ ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$\therefore\ 2a+b=-3$ $\cdots$ ㉡

또, $f'(2)=-3$이므로 $12+4a+b=-3$

$\therefore\ 4a+b=-15$ $\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-6,\ b=9$이고 ㉠에 의하여 $c=-1$이다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$이고

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 함수를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(3)=-1$이다.

62) 3

⇨ $f(x)=x^3-3ax^2+9x+27$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+9=3(x^2-2ax+3)$

$f'(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=3$

이때 극댓값과 극솟값의 합이 0이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=0$

$\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)+9(\alpha+\beta)+54=0$

$\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$+18a+54=0$

$(8a^3-18a)-3a(4a^2-6)+18a+54=0$

$-4a^3+18a+54=0,\ 2a^3-9a-27=0$

$(a-3)(2a^2+6a+9)=0 \qquad \therefore\ a=3$