3회차

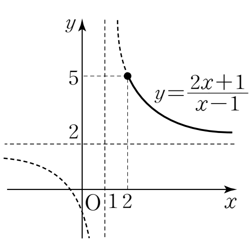
01 ③	02 ④	03 ②	04 ①	05 ②
06 ②	07 ③	08 ②	09 ③	10 ④
11 ①	12 ⑤	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ②			

[서술형 1] 2
[서술형 2] 3
[서술형 3] 194

01 $\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}$
$=\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}$
$=\frac{x+2-(x+1)}{(x+2)(x-2)}$
$=\frac{1}{x^2-4}$

02 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$이므로 함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2<y\leq5$에서 함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은 $\{x|x\geq2\}$

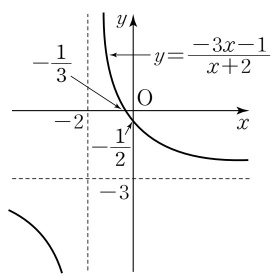


03 함수 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\frac{5}{x-1}+3=\frac{-5+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x-8}{x-1}$
따라서 $a=-1$, $b=3$, $c=-8$이므로
$a+b+c=-1+3+(-8)=-6$

04 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+3\ (k\neq0)$으로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로
$1=\frac{k}{0+1}+3\qquad \therefore k=-2$
따라서 구하는 함수의 식은
$y=\frac{-2}{x+1}+3=\frac{-2+3(x+1)}{x+1}=\frac{3x+1}{x+1}$
이므로 $a=1$, $b=3$, $c=-1$
$\therefore abc=1\cdot3\cdot(-1)=-3$

05 $y=\frac{-3x-1}{x+2}=\frac{-3(x+2)+5}{x+2}=\frac{5}{x+2}-3$
이므로 함수 $y=\frac{-3x-1}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\frac{5}{x}$의 그래프와 겹쳐지게 할 수 있다.
ㄴ. 함수 $y=\frac{-3x-1}{x+2}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.

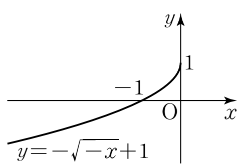


ㄷ. 그래프는 점 $(-2, -3)$을 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이므로 $y=(x+2)-3$, 즉 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 $f(5)=4$에서 $\sqrt{4\cdot5+a}=4$
$20+a=16\qquad \therefore a=-4$

07 함수 $y=-\sqrt{x+3}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
즉 $x=a$일 때 $y=1$이고, $x=6$일 때 $y=b$이다.
$x=a$일 때, $y=1$이므로 $1=-\sqrt{a+3}+2$
$\sqrt{a+3}=1,\ a+3=1 \qquad \therefore a=-2$
$x=6$일 때, $y=b$이므로
$b=-\sqrt{6+3}+2=-1$
$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

08 ① $-x\ge0$에서 $x\le0$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\le0\}$
② $-\sqrt{-x}\le0$에서 $-\sqrt{-x}+1\le1$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\le1\}$
③ 함수 $y=-\sqrt{-x}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 그래프는 제2사분면을 지난다.



④ 함수 $y=\sqrt{-x}-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\sqrt{-x}-1 \qquad \therefore y=-\sqrt{-x}+1$
⑤ 치역이 $\{y\,|\,y\le1\}$이므로 최댓값은 1이다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

09 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\sqrt{a(x-4)}+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 그래프가 점 $(0,1)$을 지나므로
$1=-\sqrt{-4a}+3,\ \sqrt{-4a}=2$
$-4a=4 \qquad \therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면
$y=-\sqrt{-(x-4)}+3=-\sqrt{-x+4}+3$
이므로 $b=4,\ c=3$
$\therefore a+b+c=-1+4+3=6$

10 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(1,2)$를 지나므로
$2=\sqrt{a+b} \qquad \therefore a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 그래프가 점 $(1,2)$를 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(2,1)$을 지난다.
즉 $1=\sqrt{2a+b}$이므로 $2a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=7$
$\therefore b-a=7-(-3)=10$

Lecture 함수와 그 역함수의 그래프

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a,b)를 지난다.
$\Rightarrow f(a)=b \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$

다른 풀이

함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(1,2)$를 지나므로
$2=\sqrt{a+b} \qquad \therefore a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$y=\sqrt{ax+b}$에서 $y^2=ax+b$
$y^2-b=ax \qquad \therefore x=\dfrac{y^2-b}{a}$
x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수는
$y=\dfrac{x^2-b}{a}$
이 함수의 그래프가 점 $(1,2)$를 지나므로
$2=\dfrac{1^2-b}{a},\ 2a=1-b$
$\therefore 2a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=7$
$\therefore b-a=7-(-3)=10$

11 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4, 8의 4가지
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4\cdot4=16$

12 여학생은 3명이므로 양쪽 끝의 의자에 여학생이 앉는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
양쪽 끝의 의자에 앉은 2명을 제외한 나머지 6명이 의자에 일렬로 앉는 경우의 수는
$6!=720$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot720=4320$

13 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로
${}_5P_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 백의 자리와 십의 자리에는 5와 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로
$4\cdot{}_4P_2=48$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는
$60+48=108$

오답 피하기

천의 자리에는 0이 올 수 없다.

14 ${}_{17}C_{r-1}={}_{17}C_{2r+3}$에서

(i) $r-1=2r+3 \qquad \therefore r=-4$
이때 $r-1\ge0$에서 $r\ge1$이어야 하므로 조건을 만족시키는 r의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ${}_{17}C_{17-(r-1)}={}_{17}C_{2r+3}$이므로
$17-(r-1)=2r+3,\ 18-r=2r+3$
$-3r=-15 \qquad \therefore r=5$

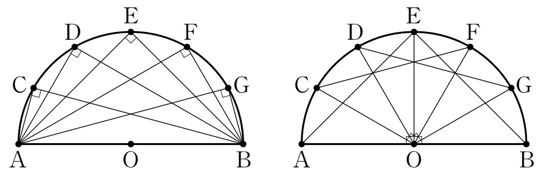
(i), (ii)에서 $r=5$

15 전체 9명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는
${}_9C_5={}_9C_4=126$
1학년 학생이 1명 포함되는 경우의 수는
${}_5C_1\cdot{}_4C_4=5\cdot1=5$
따라서 구하는 경우의 수는
$126-5=121$

16 주어진 조건에 의하여 $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$
공역의 원소 6개 중에서 4개를 택하여 크기가 큰 수부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_6C_4={}_6C_2=15$

17 (i) 삼각형의 개수
8개의 점 중에서 3개의 점을 뽑는 경우의 수는
${}_8C_3=56$
지름 위의 3개의 점 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$
즉 8개의 점 중에서 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수는
$56-1=55$

(ii) 직각삼각형의 개수
다음 그림과 같이 $\overset{\frown}{AB}$ 위의 점을 각각 C, D, E, F, G라 하면 직각삼각형은
$\triangle$ABC, $\triangle$ABD, $\triangle$ABE, $\triangle$ABF, $\triangle$ABG, $\triangle$AOE, $\triangle$COF, $\triangle$DOG, $\triangle$EOB
로 그 개수는 9이다.



(i), (ii)에서 직각삼각형을 제외한 삼각형의 개수는
$55-9=46$

[서술형 1] $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$
$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)$
$=(g^{-1}\circ f)(2)$
$=g^{-1}(f(2))$ ❶

$f(2)=\dfrac{-2+5}{2-3}=-3$이므로 ❷

$g^{-1}(f(2))=g^{-1}(-3)$
이때 $g^{-1}(-3)=k$라 하면 $g(k)=-3$이므로
$-\sqrt{4k+1}=-3,\ \sqrt{4k+1}=3$
양변을 제곱하면 $4k+1=9$
$4k=8 \qquad \therefore k=2$
$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=2$ ❸

채점 기준	배점
❶ 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$를 간단히 할 수 있다.	3점
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	1점
❸ $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $-\frac{1}{2}x+k=\sqrt{-x+5}$에서

양변에 2를 곱하면

$-x+2k=2\sqrt{-x+5}$

양변을 제곱하면

$x^2-4kx+4k^2=4(-x+5)$

$\therefore x^2+2(2-2k)x+4k^2-20=0$

❶

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-2k)^2-1\cdot(4k^2-20)=0$

$-8k+24=0 \qquad \therefore k=3$

❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=\sqrt{-x+5}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 접할 조건을 만족시키는 이차방정식을 구할 수 있다.	3점
❷ k의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] 학생 10명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_4=210$

❶

대표 4명이 모두 남학생인 경우의 수는 남학생 4명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_4=1$

❷

대표 4명이 모두 여학생인 경우의 수는 여학생 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$

❸

따라서 구하는 경우의 수는

$210-1-15=194$

❹

채점 기준	배점
❶ 학생 10명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 대표 4명이 모두 남학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 대표 4명이 모두 여학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❹ 남학생과 여학생이 각각 적어도 1명씩 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점