고등 내신 1등급을 위한

100발 100중

고등수학 기출문제집

정답 및 해설

2학기 중간 C

빠른 정답 *Quick View*

Ⅳ 집합과 명제

(1) 집합 ~ (2) 집합의 연산

교과서 예제 p. 010

01 (1) $\in$　(2) $\in$
(3) $\notin$　(4) $\in$

02 해설 참조

03 (1) $A \subset B$, $B \not\subset A$　(2) $B \subset A$, $A \not\subset B$

04 (1) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
(2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$

05 $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $A \cap B = \{2, 4, 8\}$

06 (1) $\{20\}$　(2) $\{6, 8\}$
(3) $\{2, 4, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
(4) $\{6, 8, 12, 14, 16, 18, 20\}$

07 해설 참조

08 해설 참조

기출 BEST 1회 p. 014

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 ③	05 ②
06 ③	07 ⑤	08 ③	09 ④	10 ⑤
11 ④	12 ④	13 ②	14 ②	15 ①
16 ④	17 ⑤	18 ②	19 ③	20 ③

기출 BEST 2회 p. 018

01 ⑤	02 ①	03 ③	04 ①	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ⑤	09 ②	10 ③
11 ②	12 ③	13 ①	14 ④	15 ①
16 ③	17 ③	18 ⑤	19 ②	20 ①

변형유형 집중공략 p. 022

01 ③　02 ③
03 ③　04 ②

서술형 What & How 연습문제 p. 026

01 -4　02 9
03 해설 참조　04 9

실전문제 1회 p. 030

01 ①	02 ①	03 ③	04 ③	05 ④
06 ②	07 ⑤	08 ④	09 ②	10 ②
11 ④	12 ③	13 ④	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 3	20 19

실전문제 2회 p. 034

01 ①	02 ②	03 ③	04 ②	05 ③
06 ④	07 ②	08 ③	09 ①	10 ①
11 ⑤	12 ⑤	13 ①	14 ①	15 ①
16 ④	17 ⑤	18 ④	19 48	20 38

수능형 기출문제 & 변형문제 p. 038

01 12　02 ④
03 ②　04 ③
05 13　06 ②
07 85　08 ⑤

(3) 명제 ~ (4) 절대부등식

교과서 예제 p. 044

01 ㄱ, ㄷ

02 (1) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (2) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
(3) $\{3, 5, 7\}$ (4) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

03 해설 참조

04 해설 참조

05 해설 참조

06 필요조건

07 (1) 6 (2) $\frac{4}{3}$

08 6

기출 BEST 1회 p. 048

01 ③	02 ④	03 ③	04 ④	05 ②
06 ⑤	07 ④	08 ④	09 ②	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ①	14 ①	15 ①
16 ②	17 ①	18 ③	19 ④	20 ⑤

기출 BEST 2회 p. 052

01 ⑤	02 ②	03 ②	04 ③	05 ②
06 ④	07 ②	08 ③	09 ④	10 ②
11 ①	12 ②	13 ④	14 ③	15 ②
16 ④	17 ①	18 ⑤	19 ③	20 ④

변형유형 집중공략 p. 056

01 ④ 02 ④
03 ④ 04 ⑤

서술형 What & How 연습문제 p. 060

01 3 02 (1) 충분조건 (2) 필요조건
03 해설 참조 04 49

실전문제 1회 p. 064

01 ②	02 ④	03 ①	04 ③	05 ⑤
06 ③	07 ⑤	08 ⑤	09 ①	10 ③
11 ②	12 ②	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 ②	17 ④	18 ⑤	19 해설참조	20 $\frac{25}{6}$

실전문제 2회 p. 068

01 ③	02 ①	03 ⑤	04 ⑤	05 ①
06 ⑤	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ④
11 ③	12 ④	13 ④	14 ①	15 ④
16 ②	17 ②	18 ④	19 5	

20 해설 참조

수능형 기출문제 & 변형문제 p. 072

01 ② 02 ④
03 ③ 04 ③

V 함수

(1) 함수

교과서 예제 p. 076

01 (1) 해설 참조
(2) 정의역: $\{-1, 0, 1, 2\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
치역: $\{1, 2, 5\}$

02 (1) 해설 참조 (2) 두 함수 f와 g는 서로 같다.

03 (1) 일대일대응이 아니다. (2) 일대일대응이다.

04 (1) 1 (2) 3

기출 BEST 1회 p. 078

01 ④	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ⑤	08 ③	09 ①	10 ②
11 ③	12 ②	13 ②	14 ②	

기출 BEST 2회 p. 081

01 ④	02 ①	03 ④	04 ①	05 ①
06 ①	07 ⑤	08 ④, ⑤	09 ⑤	10 ①
11 ②	12 ④	13 ②	14 ③	

변형유형 집중공략 p. 084

01 ④ 02 ③

서술형 What & How 연습문제 p. 086

01 15

02 $k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k>\frac{3}{2}$

실전문제 1회 p. 088

01 ④	02 ①	03 ⑤	04 ⑤	05 ③
06 ④	07 ⑤	08 ①	09 ①	10 ④
11 ⑤	12 ①	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 ②	17 ⑤	18 (1) 7 (2) 10		

19 $(1, 2)$, $(-1, 4)$

실전문제 2회 p. 092

01 ③	02 ③	03 ③	04 ②	05 ①
06 ④	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ④
11 ①	12 ②	13 ④	14 ①, ②	15 ③
16 ②	17 ②	18 ②	19 -3	20 10

수능형 기출문제 & 변형문제 p. 096

01 ③ 02 ⑤

03 7 04 ④

(2) 합성함수와 역함수

교과서 예제 p. 100

01 (1) 12 (2) 0
(3) -6 (4) 52

02 해설 참조

03 (1) $y=-x+1$ (2) $y=4x+4$

04 해설 참조

05 $\frac{8}{3}$

06 $\frac{5}{2}$

07 (1) d (2) c
(3) c (4) c
(5) a

기출 BEST 1회 p. 104

01 ④	02 ④	03 ③	04 ①	05 ⑤
06 ③	07 ⑤	08 ⑤	09 ②	10 ④
11 ③	12 ④	13 ①	14 ①	15 ③
16 ①	17 ③	18 ①	19 ①	20 ⑤

기출 BEST 2회 p. 108

01 ①	02 ③	03 ③	04 ①	05 ①
06 ②	07 ①	08 ③	09 ③	10 ②
11 ①	12 ②	13 ①	14 ④	15 ②
16 ③	17 ②	18 ②	19 ①	20 ②

변형유형 집중공략 p. 112

01 ⑤	02 ②
03 ⑤	04 ④

서술형 What & How 연습문제 p. 116

01 $\frac{5}{3}$	02 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
03 $y=3g(x)-2$	04 $\sqrt{2}$

실전문제 1회 p. 120

01 ⑤	02 ②	03 ①	04 ②	05 ⑤
06 ④	07 ⑤	08 ③	09 ③	10 ③
11 ②	12 ②	13 ②	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 ③	18 7	19 $\frac{5}{8}$	

실전문제 2회 p. 124

01 ①	02 ②	03 ③	04 ④	05 ④
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ④	10 ②
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ③	15 ①
16 ②	17 ④	18 -1	19 -2	

수능형 기출문제 & 변형문제 p. 128

01 5	02 ②
03 ③	04 ④
05 16	06 ④
07 ①	08 ③

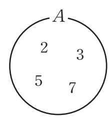
Ⅳ 집합과 명제

(1) 집합 ~ (2) 집합의 연산

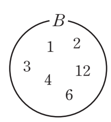
교과서 예제 p. 10

01 (1) $\in$ (2) $\in$
(3) $\notin$ (4) $\in$

02 (1) $A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 소수$\}$



(2) $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

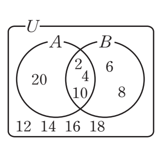


03 (1) $A\subset B$, $B\not\subset A$ (2) $B\subset A$, $A\not\subset B$

04 (1) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
(2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$

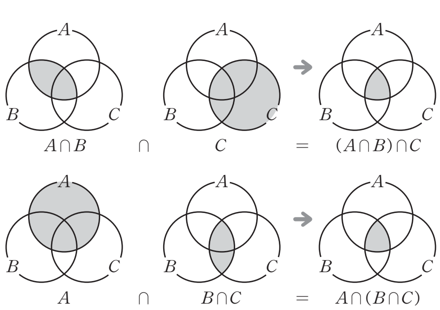
05 $A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$
$A\cap B=\{2, 4, 8\}$

06 $U=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$, $A=\{2, 4, 10, 20\}$이므로
전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



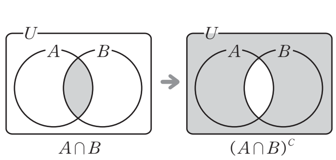
(1) $A-B=\{20\}$
(2) $B\cap A^C=\{6, 8\}$
(3) $A\cup B^C=\{2, 4, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
(4) $A^C\cup B^C=\{6, 8, 12, 14, 16, 18, 20\}$

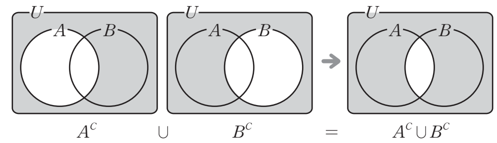
07



따라서 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$가 성립한다.

08





따라서 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$이 성립한다.

기출 BEST 1회 p. 14

01 ②
'큰', '아름다운', '잘하는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다.
$\therefore$ 2개

02 ④
집합 A, B의 각각의 원소 a, b에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	6	8	10
2	4	5	6
4	5	6	7
6	6	7	8

$C=\{4, 5, 6, 7, 8\}$
$\therefore C=\{4, 5, 6, 7, 8\}$

03 ⑤
⑤ $\{1, 3\}\in A$

04 ③
$A\subset B$이고 $4\in A$이므로 $4\in B$이어야 한다.
즉, $a^2+3=4$ 또는 $a-2=4$이므로
$a^2+3=4$에서 $a^2=1$, $a=\pm1$
$a-2=4$에서 $a=6$
(i) $a=-1$일 때,
$A=\{1, 4\}$, $B=\{-3, 3, 4\}$
$\therefore A\not\subset B$
(ii) $a=1$일 때,
$A=\{-1, 4\}$, $B=\{-1, 3, 4\}$
$\therefore A\subset B$
(iii) $a=6$일 때,
$A=\{-6, 4\}$, $B=\{3, 4, 39\}$
$\therefore A\not\subset B$
(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=1$
$\therefore 1$

05 ②

$A \subset B$, $B \subset A$이므로 $A=B$

$A=B$이고 $6 \in A$이므로 $6 \in B$이어야 한다.

즉, $a^2-a=6$에서

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$, $a=-2$ 또는 $a=3$

(ⅰ) $a=-2$일 때,

$A=\{-5, 3, 6\}$, $B=\{-5, 3, 6\}$

$\therefore A=B$

(ⅱ) $a=3$일 때,

$A=\{5, 6, 8\}$, $B=\{-5, 3, 6\}$

$\therefore A \neq B$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-2$

$\therefore -2$

06 ③

$X \subset A$, $X \neq A$에서 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다. 즉, 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}-1=2^3-1=7$

$\therefore 7$

07 ⑤

⑤ $A^C \cap B=B-A=\{7\}$

08 ③

ㄱ. $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ ㄴ. $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

ㄷ. $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$ ㄹ. $\{1, 2, 3, 6\}$

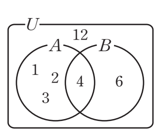
ㅁ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ㅂ. $\{2\}$

집합 $\{1, 3, 5\}$와 서로소인 집합은 ㄱ, ㄷ, ㅂ의 3개이다.

$\therefore 3$

09 ④

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



따라서 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이므로

집합 A의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4=10$

$\therefore 10$

10 ⑤

$A-B=\{3\}$이므로 $3 \in A$

즉, $x^2-1=3$에서 $x^2=4$, $x=\pm 2$

(ⅰ) $x=-2$일 때,

$A=\{2, 3\}$, $B=\{-2, 1\}$이므로 $A-B=\{2, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $x=2$일 때,

$A=\{2, 3\}$, $B=\{2, 5\}$이므로 $A-B=\{3\}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $A=\{2, 3\}$, $B=\{2, 5\}$이므로

$A \cup B=\{2, 3, 5\}$

따라서 집합 $A \cup B$의 모든 원소의 합은

$2+3+5=10$

$\therefore 10$

11 ④

$A \cup X=A$에서 $X \subset A$

즉, $(A-B) \subset X \subset A$이므로

$\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 2, 4를 반드시 원소로 가져야 하므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

$\therefore 8$

12 ④

$(A-B) \cap (A-C)$

$=(A \cap B^C) \cap (A \cap C^C)$

$=A \cap (B^C \cap C^C)$

$=A \cap (B \cup C)^C=A-(B \cup C)$

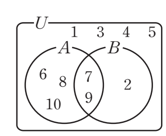
13 ②

$(A \cup B) \cap (A^C \cup B^C)=(A \cup B) \cap (A \cap B)^C$

$=(A \cup B)-(A \cap B)$

$=\{2, 6, 8, 10\}$

이고, $U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$이므로 주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



따라서 $B=\{2, 7, 9\}$이므로

$n(B)=3$

$\therefore 3$

14 ②

$\{(B-A) \cap (A \cup B)\} \cup A$

$=\{(B \cap A^C) \cap (A \cup B)\} \cup A$

$=\{(B \cap A^C) \cup A\} \cap \{(A \cup B) \cup A\}$

$=\{(A \cup B) \cap (A \cup A^C)\} \cap (A \cup B)$

$=\{(A \cup B) \cap U\} \cap (A \cup B)$

$=A \cup B$

즉, $A \cup B=B$이므로 $A \subset B$

따라서 $A \subset B$일 때 항상 옳은 것은 ② $A \cap B=A$이다.

15 ①

주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 집합 A에서 집합 $B \cup C$를

뺀 것과 같으므로

$A-(B\cup C)$

$\therefore$ $A-(B\cup C)$

16 ④

① $A◎B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=B◎A$

② $A◎A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

③ $A◎A^C=(A-A^C)\cup(A^C-A)=A\cup A^C=U$

④ $A◎\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$

⑤ $A◎U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup A^C=A^C$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

17 ⑤

$A_3\cap A_4=A_{12}$이므로 $m=12$

$(A_{12}\cup A_{18})\subset A_n$에서 n은 12와 18의 공약수이고 이 중에서 n의 최댓값은 12와 18의 최대공약수인 6이므로

$m+n$의 최댓값은 $12+6=18$

$\therefore$ 18

18 ②

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=n(A)+n(U)-n(B^C)-n(A\cap B)$

$=30+n(U)-25-15$

$=n(U)-10$

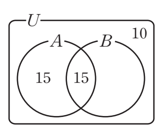
$\therefore$ $n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=10$

$\therefore$ 10

[다른 풀이]

주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$\therefore$ $n(A^C\cap B^C)$

$=n((A\cup B)^C)$

$=10$

$\therefore$ 10

19 ③

학생 전체의 집합을 U, 운동을 희망하는 학생의 집합을 A, 교과 학습을 희망하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=20$, $n(B)=24$, $n(A^C\cap B^C)=12$

이때 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$12=50-n(A\cup B)$, $n(A\cup B)=38$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+24-38=6$

따라서 운동과 교과 학습을 모두 희망하는 학생 수는 6이다.

$\therefore$ 6

20 ③

학생 전체의 집합을 U, 토요일에 야구를 시청한 학생의 집합을 A, 일요일에 야구를 시청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=25$, $n(B)=18$

토요일과 일요일 모두 야구 경기를 시청한 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

$B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로 $M=18$

$A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=25+18-35=8$

즉, $m=8$이므로

$M+m=18+8=26$

$\therefore$ 26

기출 BEST 2회 p. 18

01 ⑤

⑤ '가까운'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

02 ①

$-3\le 2x-3\le 15$에서 $0\le 2x\le 18$, $0\le x\le 9$

$-1\le x-1\le 8$, $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x-1}{2}\le 4$

이때 $\dfrac{x-1}{2}$은 정수이므로 $\dfrac{x-1}{2}$의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

즉, x의 값은 1, 3, 5, 7, 9이므로

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $1+3+5+7+9=25$

$\therefore$ 25

03 ③

① $\{a\}\subset A$　　② $\{b\}\not\in A$

④ $\{a, b\}\in A$ 또는 $\{\{a, b\}\}\subset A$　　⑤ $\{a, b, c\}\not\subset A$

04 ①

$A\subset B$이고 $5\in A$이므로 $5\in B$이어야 한다.

즉, $a+1=5$이므로 $a=4$

$\therefore B=\{2, 5, 7\}, C=\{2, 5, 2b+3, 9\}$

$B\subset C$이고 $7\in B$이므로 $7\in C$이어야 한다.

즉, $2b+3=7$이므로 $2b=4$, $b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

$\therefore$ 6

05 ②

$B=\{x \mid |x-1|<3\}$에서

$-3<x-1<3$, $-2<x<4$

$A=B$이므로 $ax^2+bx+16>0$의 해가 $-2<x<4$이어야 한다.

즉, $a<0$이고 $a(x+2)(x-4)>0$

이때 $ax^2+bx+16=a(x+2)(x-4)$이므로

$ax^2+bx+16=ax^2-2ax-8a$

$b=-2a$, $16=-8a$

즉, $a=-2$, $b=4$이므로

$ab=-2\times 4=-8$

$\therefore -8$

06 ④

집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 동시에 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 1, 2를 동시에 원소로 갖는 부분집합의 개수를 빼면 된다.

$\therefore 2^4-2^{4-2}=16-4=12$

$\therefore$ 12

07 ⑤

⑤ $A^C\cup B=\{b, c, d, e\}$

08 ⑤

① $A\cap B=\{2, 5\}$

② $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $A\cap B=\{2\}$

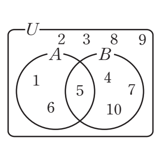
③ $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 $A\cap B=\{1, 5\}$

④ $A\cap B=\{x \mid x$는 6의 배수$\}$

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ⑤이다.

09 ②

$U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$이므로 주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



따라서 $A^C-B=A^C\cap B^C=\{2, 3, 8, 9\}$이므로

집합 A^C-B의 모든 원소의 합은

$2+3+8+9=22$

$\therefore$ 22

10 ③

$A\cap B=\{1, 8\}$이므로 $8\in A$이어야 한다.

즉, $a^2-8=8$에서 $a^2=16$, $a=\pm 4$

(i) $a=-4$일 때,

$A=\{1, 2, 6, 8\}$, $B=\{-12, -7, 8\}$이므로 $A\cap B=\{8\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때,

$A=\{1, 2, 6, 8\}$, $B=\{1, 4, 8\}$이므로 $A\cap B=\{1, 8\}$

(i), (ii)에 의하여 $A-B=\{2, 6\}$, $B-A=\{4\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2, 4, 6\}$

따라서 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은

$2+4+6=12$

$\therefore$ 12

11 ②

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$

즉, $(A\cap B)\subset X\subset A$이므로

$\{5, 7, 9\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 5, 7, 9를 반드시 원소로 가져야 하므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

$\therefore$ 4

12 ③

ㄱ. $(A^C\cup B)^C=A\cap B^C=A-B$

ㄴ. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^C$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=(A-B)\cup(A-C)$

ㄷ. $(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$

$=\{(A\cup B)\cap A^C\}\cup\{(A\cup B)\cap B^C\}$

$=\{(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\}$

$=\{\varnothing\cup(B\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B^C)\cup\varnothing\}$

$=(B\cap A^C)\cup(A\cap B^C)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13 ①

$B=\{3,\ 6,\ 9\}$이므로

$(A-B)^C\cap\{B-(A\cap B)\}$

$=(A\cap B^C)^C\cap\{B\cap(A\cap B)^C\}$

$=(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C)\cap B$

$=\{(A^C\cup(B\cap B^C)\}\cap B$

$=A^C\cap B=\{3,\ 9\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$3+9=12$

$\therefore$ 12

14 ④

$(A-B^C)\cup(B^C-A^C)=(A\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

$=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U=A$

즉, $A=A\cup B$이므로 $B\subset A$

ㄹ. $A^C\cap B^C=A^C-B=A^C$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

15 ①

주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 집합 $A\cap B$에서 집합 C를 뺀 것과 같으므로

$(A\cap B)-C=(A\cap B)\cap C^C$

$=A\cap(B\cap C^C)$

$=A\cap(B-C)$

$\therefore A\cap(B-C)$

16 ③

ㄱ. $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(B\cup A)-(B\cap A)$

$=B\triangle A$

ㄴ. $A^C\triangle B^C=(A^C\cup B^C)-(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap B)^C-(A\cup B)^C$

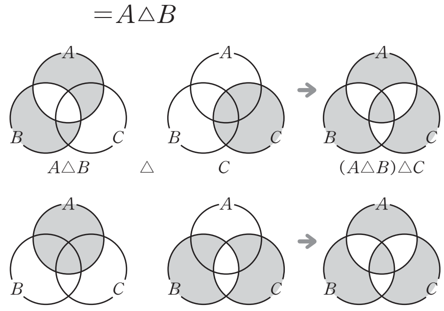
$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=A\triangle B$

ㄷ.



$\therefore (A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 ③

$A_{60}\cap A_{150}=A_{30}$이므로 $m=30$

$(A_8\cup A_{12})\subset A_n$에서 n은 8과 12의 공배수이고 이 중에서 n의 최솟값은 12와 18의 최소공배수인 24이므로

$m+n$의 최솟값은 $30+24=54$

$\therefore$ 54

18 ⑤

$n(B-A)+n(A^C\cup B)$

$=n(B\cap A^C)+n(A^C)+n(B)-n(A^C\cap B)$

$=n(A^C)+n(B)$

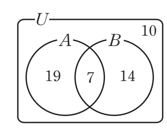
$=n(U)-n(A)+n(B)$

$=50-26+21=45$

$\therefore$ 45

[다른 풀이]

주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$\therefore n(B-A)+n(A^C\cup B)$

$=14+(7+14+10)=45$

$\therefore$ 45

19 ②

학생 전체의 집합을 U, 버스를 이용하여 통학하는 학생의 집합을 A, 지하철을 이용하여 통학하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=192,\ n(A)=75,\ n(B)=52,\ n(A\cap B)=27$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=75+52-27=100$

이므로 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=192-100=92$

따라서 버스와 지하철 중 어느 것도 이용하지 않는 학생 수는 92이다.

$\therefore$ 92

20 ①

놀이동산 입장객 전체의 집합을 U, 롤러코스터를 이용한 입장객의 집합을 A, 바이킹을 이용한 입장객의 집합을 B라 하면

$n(U)=60,\ n(A)=46,\ n(B)=37$

롤러코스터와 바이킹 중 어느 것도 이용하지 않은 입장객의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=60-n(A\cup B)$

(i) $n(A\cup B)$가 최소일 때, $n(A^C\cap B^C)$이 최대이다. 즉, $B\subset A$이어야 하므로 $n(A\cup B)=n(A)=46$

$\therefore M=60-46=14$

(ii) $n(A\cup B)$가 최대일 때, $n(A^C\cap B^C)$이 최소이다. 즉,

$A\cup B=U$이어야 하므로 $n(A\cup B)=n(U)=60$

$\therefore m=60-60=0$

(i), (ii)에 의하여 $M-m=14-0=14$

$\therefore$ 14

변형 유형 **집중공략** p. 22

01 ③

주어진 집합의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합의 개수는

$2^5-1=31$이므로 $n=31$

(i) 최소인 원소가 $\frac{1}{2}$인 집합

$\frac{1}{2}$만 속하는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^0=1$

(ii) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^2}$인 집합

$\frac{1}{2^2}$은 속하고 $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^5}$은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{5-1-3}=2$

(iii) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^3}$인 집합

$\frac{1}{2^3}$은 속하고 $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^5}$은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{5-1-2}=2^2=4$

(iv) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^4}$인 집합

$\frac{1}{2^4}$은 속하고 $\frac{1}{2^5}$은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{5-1-1}=2^3=8$

(v) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^5}$인 집합

$\frac{1}{2^5}$이 속하는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{5-1}=2^4=16$

(i)~(v)에 의하여

$$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{31}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times1\right)+\left(\frac{1}{2^2}\times2\right)+\left(\frac{1}{2^3}\times4\right)+\left(\frac{1}{2^4}\times8\right)+\left(\frac{1}{2^5}\times16\right)$$
$$=\frac{5}{2}$$

02 ③

ㄱ. $A^C\triangle B^C=(A^C-B^C)\triangle(B^C-A^C)=(B-A)\cup(A-B)$

$\therefore A^C\triangle B^C=B\triangle A$

ㄴ. $A\triangle A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$,

$A\triangle A\triangle A=\varnothing\triangle A=(\varnothing-A)\cup(A-\varnothing)=\varnothing\cup A=A$

$A\triangle A\triangle A\triangle A=A\triangle A=\varnothing$,

$A\triangle A\triangle A\triangle A\triangle A=\varnothing\triangle A=A$

즉, A가 2020개(짝수개)이면 그 결과는 $\varnothing$이다.

$\therefore A\triangle A\triangle\cdots\triangle A=\varnothing$ (A가 2020개)

ㄷ. $A\triangle B=A\cup B$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 ③

(i) 집합 $A_n\cap A_3$은 n과 3의 공배수의 집합이다.

이때 $A_n\cap A_3=A_{3n}$에서 n과 3의 최소공배수가 $3n$이므로

n과 3은 서로소이다.

즉, n은 3의 배수가 아니다.

(ii) $150\in A_3-A_n$이 성립하려면 $150\notin A_n$이어야 한다.

즉, 150은 n의 배수가 아니므로 n은 150의 약수가 아니다.

(i), (ii)에 의하여 n은 150 이하의 자연수 중 3의 배수도 150의 약수도 아닌 수이다.

150 이하의 자연수 중 3의 배수가 아닌 것의 개수: 100

150의 약수 중 3의 배수가 아닌 것의 개수: 6

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는

$100-6=94$

$\therefore$ 94

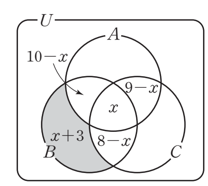
04 ②

학생 전체의 집합을 U, 체육, 봉사, 예술 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B, C로 놓으면

$n(U)=40$, $n(B)=21$, $n(A\cap B)=10$

$n(B\cap C)=8$, $n(A\cap C)=9$

$n(A\cap B\cap C)=x$로 놓고, 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



이때 $x\geq0$, $8-x\geq0$이므로 $0\leq x\leq8$이고, $n(B)=21$이므로 색칠한 부분의 원소의 개수는 $x+3$이다.

즉, 최댓값은 $x=8$일 때이므로 $8+3=11$

최솟값은 $x=0$일 때이므로 $0+3=3$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $11+3=14$

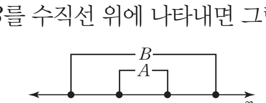
$\therefore$ 14

서술형 **What & How 연습문제** p. 26

01 -4

$(x+a+8)(x+a-3)\leq0$에서 $-a-8\leq x\leq -a+3$

$A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



…… ❶

즉, $-a-8\le-3$, $-a+3\ge2$

$-a-8\le-3$에서 $a\ge-5$

$-a+3\ge2$에서 $a\le1$

이므로 $-5\le a\le1$ …… ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 1, 최솟값은 -5이므로 그 합은

$1+(-5)=-4$ …… ❸

$\therefore -4$

채점기준	배점
❶ $A\cap B=A$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 바르게 나타내었다.	3
❷ a의 값의 범위를 바르게 구하였다.	2
❸ 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 바르게 구하였다.	2

02 9

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

$A=B$이고 $3\in A$이므로 $3\in B$이어야 한다. …… ❶

즉, $b=3$ 또는 $a-4=3$, $a=7$

(i) $a=7$일 때,

$A=\{3, 14, b-1\}$, $B=\{3, 6, b\}$이므로

$6\in A$에서 $b-1=6$, $b=7$

$14\in B$에서 $b=14$

즉, 모순이므로 $A=B$가 성립하지 않는다. …… ❷

(ii) $b=3$일 때,

$A=\{2, 3, a^2-5a\}$, $B=\{3, 6, a-4\}$이므로

$6\in A$, $2\in B$이어야 한다. 즉,

$a-4=2$에서 $a=6$

이때 $A=\{2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 6\}$이므로 $A=B$ …… ❸

(i), (ii)에 의하여 $a+b=6+3=9$ …… ❹

$\therefore 9$

채점기준	배점
❶ 집합 B의 원소의 조건을 바르게 말하였다.	1
❷ $a=7$일 때, 두 집합 A와 B의 포함 관계를 바르게 말하였다.	3
❸ $b=3$일 때, 두 집합 A와 B의 포함 관계를 바르게 말하였다.	3
❹ $a+b$의 값을 바르게 구하였다.	1

03 해설 참조

$(A-B)^C\cap(B^C-A)^C$

$=(A\cap B^C)^C\cap(B^C\cap A^C)^C$

$=(A^C\cup B)\cap(B\cup A)$

$=(A^C\cup B)\cap(A\cup B)$

$=(A^C\cap A)\cup B$

$=\varnothing\cup B=B$

채점기준	배점
집합의 연산법칙을 이용하여 주어진 식이 성립함을 바르게 보였다.	5

04 9

학생 전체의 집합을 U, 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=26$, $n(A)=10$, $n(B)=12$, $n(C)=11$

$n(B\cup C)=18$, $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=2$

또, $A\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$ …… ❶

$n(B\cup C)=18$에서

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$

$=12+11-18=5$

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=2$에서

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)=26-2=24$

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서 $24=10+12+11-0-5-n(C\cap A)+0$

$n(C\cap A)=4$ …… ❷

즉, A, B, C 중 두 종류의 책만 읽은 학생 수는

$n(B\cap C)+n(C\cap A)=5+4=9$ …… ❸

$\therefore 9$

채점기준	배점
❶ 주어진 조건을 집합으로 바르게 나타내었다.	3
❷ B와 C, C와 A를 모두 읽은 학생 수를 각각 바르게 구하였다.	4
❸ 두 종류의 책만 읽은 학생의 수를 바르게 구하였다.	2

실전문제 1회

p. 30

01 ①

'잘하는', '큰', '아름다운'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

02 ①

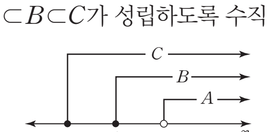
$A_2=\{2\}$, $A_4=\{2, 3\}$, $A_6=\{2, 3, 5\}$, $A_8=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$n(A_2)+n(A_4)+n(A_6)+n(A_8)=1+2+3+4=10$

$\therefore 10$

03 ③

$A\subset B\subset C$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $1\le k\le 6$이므로 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

$\therefore$ 6

04 ③

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

$A=B$이고 $4\in A$, $0\in B$이므로 $4\in B$, $0\in A$이어야 한다.

즉, $3a-b=0$, $a+b=4$이므로

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=3$

$\therefore ab=1\times 3=3$

$\therefore$ 3

05 ④

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 a, c, e를 동시에 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 a, c, e를 동시에 원소로 갖는 부분집합의 개수를 빼면 된다.

$\therefore 2^6-2^3=64-8=56$

$\therefore$ 56

06 ②

$1\in S$이면 $32\in S$, $2\in S$이면 $16\in S$, $4\in S$이면 $8\in S$

즉, 1과 32, 2와 16, 4와 8은 어느 하나가 집합 S의 원소이면 나머지 하나도 반드시 S의 원소이고, S는 공집합이 아니므로 구하는 집합 S의 개수는

$2^3-1=7$

$\therefore$ 7

07 ⑤

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로

$B=\{2, 6, 8, 12, 14, 16, 17\}$

이때 $B^C-A^C=B^C\cap A=A-(A\cap B)$이고

$A\cap B=\{2, 17\}$이므로

$B^C-A^C=\{3, 5, 7, 11, 13, 19\}$

따라서 집합 B^C-A^C의 모든 원소의 합은

$3+5+7+11+13+19=58$

$\therefore$ 58

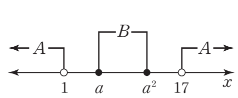
08 ④

$(x-1)(x-17)>0$에서 $x<1$ 또는 $x>17$

a가 1이 아닌 자연수이므로 $a<a^2$, 즉 $(x-a)(x-a^2)\le 0$에서

$a\le x\le a^2$

$A\cap B=\varnothing$이 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $a\ge 1$, $a^2\le 17$에서 $-\sqrt{17}\le a\le\sqrt{17}$이므로

$1<a\le\sqrt{17}$ ($\because a\ne 1$)

따라서 자연수 a는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$

$\therefore$ 9

09 ②

$A=\{1, 2\}$이고 $A-B=\{2\}$이므로 $1\in B$이어야 한다.

즉, 방정식 $x^3-ax-a^2+1=0$의 근이 $x=1$이므로

$1-a-a^2+1=0$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$, $a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

$x^3+2x-3=0$에서 $(x-1)(x^2+x+3)=0$이므로

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$

즉, $A-B=\{2\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=1$일 때,

$x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore A=\{1, 2\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$

즉, $A-B=\{2\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=-2$ 또는 $a=1$이므로

구하는 합은 $-2+1=-1$

$\therefore -1$

10 ②

$B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

② $A^C-B^C=A^C\cap B=B-A$

이때 항상 $B-A\ne\varnothing$인 것은 아니다.

⑤ $A\cup B=B$이므로 $(A\cup B)-B=\varnothing$

따라서 항상 옳은 것이 아닌 것은 ②이다.

11 ④

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

조건 (가)에서 $A\subset X$, 즉 $\{1, 2, 3\}\subset X$

$B-A=\{5, 6, 8\}$이므로 조건 (나)에서

$\{5, 8\}\subset X$, $6\notin X$

즉, 집합 X는 집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 5, 8을 반드시 원소로 가지고, 6은 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{10-5-1}=2^4=16$

$\therefore$ 16

12 ③

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)=\{0, 1\}$이고

$2\in B$이므로 $2\in A$이어야 한다. 즉,

$a-1=2$ 또는 $a^2-2=2$

$\therefore a=3$ 또는 $a=\pm 2$

(i) $a=-2$일 때, $A=\{-3, 2, 3\}$, $B=\{-4, 2, 3\}$

이므로 $(A-B)\cup(B-A)=\{-4,\ -3\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2$일 때, $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{0,\ 2,\ 3\}$
이므로 $(A-B)\cup(B-A)=\{0,\ 1\}$
(iii) $a=3$일 때, $A=\{2,\ 3,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$
이므로 $(A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 7\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=2$이고, $B=\{0,\ 2,\ 3\}$이므로
집합 B의 모든 원소의 합은 $0+2+3=5$
즉, $a=2$, $b=5$이므로 $a-b=2-5=-3$
$\therefore -3$

13 ④

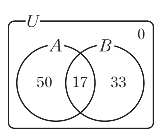
(i) $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)$
$=(A\cup B)\cap U$
$=A\cup B$
이때 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$
(ii) (i)에서 $A\cap B=A$이므로
$(A^C\cup B^C)\cap C=(A\cap B)^C\cap C$
$=C\cap A^C=C-A$
이때 $C-A=\varnothing$이므로 $C\subset A$
(i), (ii)에 의하여 $C\subset A\subset B$
$\therefore C\subset A\subset B$

14 ②

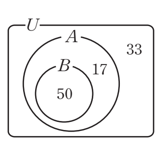
$A_3\cap(A_2\cup A_5)=(A_3\cap A_2)\cup(A_3\cap A_5)$
$=A_6\cup A_{15}$
$\therefore n(A_6\cup A_{15})=n(A_6)+n(A_{15})-n(A_{30})$
$=16+6-3=19$
$\therefore 19$

15 ⑤

$n(A-B)-n(A^C-B)=n(A\cap B^C)-n(A^C\cap B^C)$
의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
(i) $A\cup B=U$일 때, 주어진 식의 값이 최대이므로 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타내면 그림과 같다.



$\therefore M=50-0=50$
(ii) $B\subset A$일 때, 주어진 식의 값이 최소이므로 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타내면 그림과 같다.



$\therefore m=17-33=-16$
(i), (ii)에 의하여 $M=50$, $m=-16$이므로
$M+m=50+(-16)=34$
$\therefore 34$

16 ②

산악회 회원 전체의 집합을 U, 한라산을 등반해 본 회원의 집합을 A, 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 B라 하면
$n(U)=100$, $n(A)=80$, $n(B)=65$
한라산과 설악산을 모두 등반해 본 회원의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
$B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로 $M=65$
$A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=80+65-100=45$
즉, $m=45$이므로
$M+m=65+45=110$
$\therefore 110$

17 ②

주어진 집합의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합의 개수는
$2^8-1=255$이므로 $n=255$
집합 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{255}$ 중에서
(i) 최소의 원소가 $\frac{1}{2^2}$인 집합 ➡ $\frac{1}{2^2}$만 속하는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^0=1$
(ii) 최소의 원소가 $\frac{1}{2^3}$인 집합 ➡ $\frac{1}{2^3}$은 속하고 $\frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^5},\ \cdots,\ \frac{1}{2^9}$은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{8-1-6}=2$
(iii) 최소의 원소가 $\frac{1}{2^4}$인 집합 ➡ $\frac{1}{2^4}$은 속하고 $\frac{1}{2^5},\ \frac{1}{2^6},\ \cdots,\ \frac{1}{2^9}$은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{8-1-5}=2^2=4$
⋮
(viii) 최소의 원소가 $\frac{1}{2^9}$인 집합 ➡ $\frac{1}{2^9}$이 속하는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^{8-1}=2^7=128$
(i)~(viii)에 의하여
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{255}$
$=\left(\frac{1}{2^2}\times1\right)+\left(\frac{1}{2^3}\times2\right)+\left(\frac{1}{2^4}\times2^2\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2^8}\times2^6\right)+\left(\frac{1}{2^9}\times2^7\right)$
$=\frac{1}{4}\times8=2$
$\therefore 2$

18 ④

$\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c},\ \sqrt{d}$가 자연수이므로 $a,\ b,\ c,\ d$는 모두 자연수의 제곱이다. 이때 $a<b<c<d$, $a+b=13$이므로
$a=4$, $b=9$
$\therefore A=\{4,\ 9,\ c,\ d\}$, $B=\{2,\ 3,\ \sqrt{c},\ \sqrt{d}\}$
또, $A\cap B=\{4,\ 9\}$이므로
$\sqrt{c}=4$, $\sqrt{d}=9$
즉, $c=16$, $d=81$이므로

$a+d=4+81=85$

$\therefore$ 85

19 3

$x^2-(a-1)x+2a-6=0$에서

$(x-2)(x-a+3)=0$, $x=2$ 또는 $x=a-3$

$\therefore A=\{2, a-3\}$

이때 $A\subset B$이고 $2\in A$이므로 $2\in B$이어야 한다. …… ❶

즉, $a+1=2$ 또는 $a^2-7=2$

$a+1=2$에서 $a=1$

$a^2-7=2$에서 $a^2=9$, $a=\pm3$ …… ❷

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{-6, 2\}$, $B=\{-2, 0, 2\}$

이므로 $A\not\subset B$

(ii) $a=1$일 때,

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{-6, 0, 2\}$

이므로 $A\not\subset B$

(iii) $a=3$일 때,

$A=\{0, 2\}$, $B=\{0, 2, 4\}$

이므로 $A\subset B$ …… ❸

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=3$ …… ❹

$\therefore$ 3

채점기준	배점
❶ 주어진 조건을 이용하여 집합 B의 원소의 조건을 바르게 말하였다.	2
❷ ❶을 이용하여 가능한 a의 값을 모두 바르게 구하였다.	2
❸ a의 값에 따라 주어진 조건을 만족시키는지 바르게 확인하였다.	3
❹ a의 값을 바르게 구하였다.	1

20 19

학생 전체의 집합을 U, 에버랜드, 현충원, 코엑스를 선호하는 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=40$, $n(B)=55$, $n(A\cap B)=22$

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=8$ …… ❶

이때 $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=8$에서

$$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)$$
$$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$$

이므로 $n(A\cup B\cup C)=92$ …… ❷

또, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=40+55-22=73$

즉, 견학 장소로 코엑스만을 선호하는 학생의 집합은 $(A\cup B\cup C)-(A\cup B)$이므로

$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)=92-73=19$ …… ❸

$\therefore$ 19

채점기준	배점
❶ 주어진 조건을 집합으로 바르게 나타내었다.	3
❷ 세 장소 중 적어도 한 곳을 선호하는 학생 수를 바르게 구하였다.	3
❸ 견학 장소로 코엑스만을 선호하는 학생 수를 바르게 구하였다.	3

실전문제 2회

p. 34

01 ①

$n(A)=1$이므로 방정식 $(k+1)x^2-2x+k=0$의 근이 1개이어야 한다.

(i) $k=-1$일 때, $-2x-1=0$, $x=-\frac{1}{2}$

(ii) $k\neq-1$일 때, 이차방정식 $(k+1)x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-k(k+1)=0,\ k^2+k-1=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+(-1)=-2$

$\therefore -2$

02 ②

$x^2-5x+4<0$에서

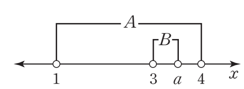
$(x-1)(x-4)<0$, $1<x<4$

$x^2-(a+3)x+3a<0$에서

$(x-a)(x-3)<0$

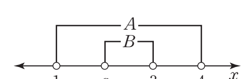
$A\cap B=B$에서 $B\subset A$이므로

(i) $a\geq3$일 때, 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $a\leq4$이므로 $3\leq a\leq4$

(ii) $a<3$일 때, 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $a\geq1$이므로 $1\leq a<3$

(i), (ii)에 의하여 $1\leq a\leq4$이므로 실수 a의 최솟값은 1이다.

$\therefore$ 1

03 ③

집합 A의 원소 중 3의 배수는 3, 9이다.

집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 3의 배수를 포함하는 부분집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 3, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

$\therefore 2^5-2^{5-2}=32-8=24$

$\therefore$ 24

[다른 풀이]

적어도 한 개의 3의 배수를 포함하는 부분집합은 3 또는 9를 원소로 갖는 부분집합이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}+2^{5-1}-2^{5-2}=16+16-8=24$

$\therefore$ 24

04 ②

$n(A)=k$이므로

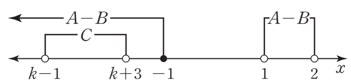
$2^{k-2-3}=16$, $2^{k-5}=2^4$, $k-5=4$, $k=9$

$\therefore$ 9

05 ③

$A-B=\{x \mid x\le -1$ 또는 $1<x<2\}$이고

$(A-B)\cap C=C$에서 $C\subset(A-B)$이므로 조건을 만족시키도록 두 집합 $A-B$, C를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $k+3\le -1$에서 $k\le -4$이므로 실수 k의 최댓값은 -4이다.

$\therefore$ -4

06 ④

$A=\{1, 3, 5, \cdots, 19\}$, $B=\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$이므로

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

$=\{1, 7, 13, 19\}$

따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은

$1+7+13+19=40$

$\therefore$ 40

07 ②

집합 A, B^C이 서로소이므로 $A\cap B^C=\varnothing$에서 $A\subset B$

ㄴ. $A\cap B=A$이므로 $(A\cap B)^C=A^C$

ㄷ. $(A^C\cup B)\cap A=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup A=A$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 ③

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고

$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=\{1, 3, 4, 5, 7, 10\}$이므로

$B\cap A^C=\{2, 6, 8, 9\}$

$\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A-B)^C\cap(A\cup B)\}$

$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A^C\cup B)\cap(A\cup B)\}$

$=A\cap\{B\cup(A\cap A^C)\}$

$=A\cap B=\{3, 5\}$

이때 $B=(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$이므로

$B=\{3, 5\}\cup\{2, 6, 8, 9\}$

$=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 6이다.

$\therefore$ 6

09 ①

$\{(A^C\cap B^C)\cup(B-A)\}\cup B^C$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup(B\cap A^C)\}\cup B^C$

$=\{A^C\cap(B^C\cup B)\}\cup B^C$

$=(A^C\cap U)\cup B^C$

$=A^C\cup B^C$

이때 $A^C\cup B^C=A^C$이므로 $B^C\subset A^C$, 즉 $A\subset B$

②, ③, ⑤ $B\subset A$일 때 성립한다.

④ $A^C\cup B=U$

10 ①

$B=\{1, 2, 4, 8\}$, $C=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$이므로

$A*B=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{3, 5, 6\}\cup\{8\}=\{3, 5, 6, 8\}$

$\therefore$ $(A*B)*C=\{3, 5, 6, 8\}*C$

$=\{3, 5\}\cup\{2, 4, 10, 12\}$

$=\{2, 3, 4, 5, 10, 12\}$

즉, 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5+10+12=36$

$\therefore$ 36

11 ⑤

$n(A-B)=n(A\cap B^C)=17$이고

$A\cup B=B\cup(A\cap B^C)$이므로

$n(A\cup B)=n(B)+n(A\cap B^C)=18+17=35$

$n((A\cup B\cup C)^C)=5$에서

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=50-5=45$

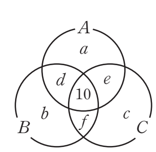
이때 $(A\cup B)^C\cap C=C-(A\cup B)=(A\cup B\cup C)-(A\cup B)$ 이므로

$n((A\cup B)^C\cap C)=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=45-35=10$

$\therefore$ 10

12 ⑤



그림과 같이 집합 A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내고, 각 영역에 속하는 원소의 개수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하면

$n(A\cup B\cup C)=50$에서

$a+b+c+d+e+f+10=50$, $a+b+c+d+e+f=40$

이때 $n(A\triangle B)=a+b+e+f$,

$n(B\triangle C)=b+c+d+e$,

$n(C\triangle A)=a+c+d+f$,

이므로

$n(A\triangle B)+n(B\triangle C)+n(C\triangle A)$

$=2(a+b+c+d+e+f)=2\times 40=80$

$\therefore$ 80

13 ①

(ⅰ) 집합 $A_n \cap A_5$는 n과 5의 공배수의 집합이다.

이때 $A_n \cap A_5 = A_{5n}$에서 n과 5의 최소공배수가 $5n$이므로 n과 5는 서로소이다.

즉, n은 5의 배수가 아니다.

(ⅱ) $100 \in A_5 - A_n$이 성립하려면 $100 \notin A_n$이어야 한다.

즉, 100은 n의 배수가 아니므로 n은 100의 약수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 n은 100 이하의 자연수 중 5의 배수도 100의 약수도 아닌 수이다.

100 이하의 자연수 중 5의 배수가 아닌 것의 개수: 80

100의 약수 중 5의 배수가 아닌 것의 개수: 3

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는

$80-3=77$

$\therefore$ 77

14 ①

학생 전체의 집합을 U, 문학, 사회, 과학을 수강한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=15$, $n(B)=13$, $n(C)=18$

$n(A\cap B)=9$, $n(A\cup C)=28$, $n(B\cap C)=0$

$n(A\cup C)=28$에서

$$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)=15+18-28=5$$

$n(B\cap C)=0$에서 $n(A\cap B\cap C)=0$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=15+13+18-9-0-5+0=32$

따라서 문학, 사회, 과학 세 과목 중 어느 과목도 수강하지 않은 학생 수는

$$n((A\cup B\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup B\cup C)=40-32=8$$

$\therefore$ 8

15 ①

학생 전체의 집합을 U, 영화 A, B, C를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A)=12$, $n(B)=14$, $n(C)=15$

$n(A\cap B)=0$, $n(B\cup C)=22$, $n(A\cap B\cap C)=0$

$n(B\cup C)=22$에서

$$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=14+15-22=7$$

모든 학생이 영화를 관람하였으므로

학생 전체의 집합은 $A\cup B\cup C$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=12+14+15-0-7-n(C\cap A)+0$

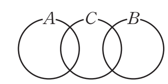
$=34-n(C\cap A)$

이때 $n(A\cup B\cup C)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

$A\cap C=\varnothing$일 때, $n(A\cap C)$가 최소이므로 $n(A\cup B\cup C)$가 최대이다.

즉, $M=34-0=34$

그림에서 $n(A\cap C)$가 최대이려면



$C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$이어야 하므로

$n(A\cap C)=n(C)-n(B\cap C)=15-7=8$

즉, $m=34-8=26$

$\therefore M-m=34-26=8$

$\therefore$ 8

16 ④

조건 (가), (나)에서 집합 S는 원소가 두 개 이상인 집합 A의 부분집합이고 조건 (다)에서 집합 S는 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는다.

즉, 구하는 집합 S의 개수는 원소가 두 개 이상인 집합 A의 부분집합의 개수에서 홀수만을 원소로 갖는 부분집합의 개수를 빼면 된다.

(ⅰ) 원소가 두 개 이상인 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^5-5-1=26$

(ⅱ) 원소가 두 개 이상인 집합 A의 부분집합 중 홀수만을 원소로 갖는 것의 개수는

$2^3-3-1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 집합 S의 개수는 $26-4=22$

$\therefore$ 22

17 ⑤

$B=\{a_1+k,\ a_2+k,\ a_3+k,\ a_4+k\}$이고

조건 (가)에서 $a_1+a_2+a_3+a_4=16$이므로

$a_1+k+a_2+k+a_3+k+a_4+k=32$에서

$4k+16=32$, $4k=16$, $k=4$

조건 (나)에서 $5\in A$, $7\in A$이므로 $a_1=5$, $a_2=7$로 놓으면

$B=\{9,\ 11,\ a_3+4,\ a_4+4\}$

$5\in B$이므로 $a_3+4=5$라 하면 $a_3=1$에서

$5+7+1+a_4=16$, $a_4=3$

즉, $B=\{5, 7, 9, 11\}$이므로

$$B\cap(A^C\cup B^C)=B\cap(A\cap B)^C=B-(A\cap B)=\{9, 11\}$$

따라서 집합 $B\cap(A^C\cup B^C)$의 모든 원소의 합은 $9+11=20$

$\therefore$ 20

18 ④

$S(A\cup B)=1+2+3+4+5+6=21$, $S(A\cap B)=3+4=7$이고

$S(U)=S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$이므로

$21=S(A)+S(B)-7$, $S(B)=28-S(A)$

$\therefore S(A)\times S(B)=S(A)\times\{28-S(A)\}$

$=-\{S(A)\}^2+28S(A)$

$=-\{S(A)-14\}^2+196$

따라서 $S(A)\times S(B)$는 $S(A)=14$일 때 최댓값 196을 갖는다.

$\therefore$ 196

19 48

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

$B\cap X\neq\varnothing$, $C\cap X=\varnothing$에서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 7, 8, 9를 원소로 갖지 않고 3 또는 6을 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 3 또는 6을 원소로 갖는 부분집합의 개수이다. …… ❶

$\therefore 2^5+2^5-2^4=32+32-16=48$ …… ❷

$\therefore$ 48

채점기준	배점
❶ 집합 X의 원소의 조건을 바르게 말하였다.	3
❷ 집합 X의 개수를 바르게 구하였다.	3

20 38

(1) $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $C=\{3, 6, 9\}$ …… ❶

$\therefore A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $C=\{3, 6, 9\}$

(2) $(A\cup B)^C\cup(B-A)=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap A^C)$

$=(A^C\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

$=A^C\cap(B^C\cup B)$

$=A^C\cap U=A^C$ …… ❷

이므로 $(A\cup B)^C\cup(B-A)=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

즉, 집합 $(A\cup B)^C\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은

$1+4+6+8+9+10=38$ …… ❸

$\therefore$ 38

채점기준	배점
❶ 세 집합 A, B, C를 각각 원소나열법을 이용하여 바르게 나타내었다.	3
❷ 집합의 연산법칙을 이용하여 집합 $(A\cup B)^C\cup(B-A)$를 바르게 간단히 나타내었다.	3
❸ 집합 $(A\cup B)^C\cup(B-A)$의 모든 원소의 합을 바르게 구하였다.	1

수능형 기출문제 &변형문제 p. 38

01 12

$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$

$B=\left\{\frac{x_1+a}{2}, \frac{x_2+a}{2}, \frac{x_3+a}{2}, \frac{x_4+a}{2}, \frac{x_5+a}{2}\right\}$이므로

집합 B의 모든 원소의 합은

$\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a=\frac{1}{2}\times 28+\frac{5}{2}a$

$=\frac{5}{2}a+14$

이때 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합에서

집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같으므로

$28+\left(\frac{5}{2}a+14\right)-(10+13)=49$, $\frac{5}{2}a=30$, $a=12$

$\therefore$ 12

02 ④

집합 A의 원소를 이용하여 집합 B의 원소를 구하면 오른쪽 표와 같으므로 집합 B의 원소는

$+$	a	b	c
a	$2a$	$a+b$	$a+c$
b	$a+b$	$2b$	$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	$2c$

$2a$, $a+b$, $2b$, $a+c$, $b+c$, $2c$

$a<b<c$이고, $n(B)=5$이므로

$2a<a+b<2b=a+c<b+c<2c$

즉, $B=\{2a, a+b, 2b, b+c, 2c\}$이다.

이때 $2a=16$, $2c=28$이므로

$a=8$, $c=14$

또, $2b=a+c$에서

$2b=8+14=22$, $b=11$

따라서 $B=\{16, 19, 22, 25, 28\}$이므로 슬기네 다섯 자매의 나이의 총합은

$16+19+22+25+28=110$

$\therefore$ 110

03 ②

집합 $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 X의 모든 원소의 곱이 6의 배수가 되는 경우는 다음과 같이 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $6\in X$인 경우

집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2개 이상이면서 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}-1=2^4-1=15$

(ii) $3\in X$, $4\in X$, $6\notin X$인 경우

집합 A의 부분집합 중 3, 4를 반드시 원소로 갖고, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-2-1}=2^2=4$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는

$15+4=19$

$\therefore$ 19

04 ③

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 X의 모든 원소의 곱이

짝수가 되는 경우는 다음과 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $2\in X$인 경우

집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2개 이상이면서

2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1}-1=2^5-1=31$$

(ⅱ) $2\notin X$, $4\in X$인 경우

집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2개 이상이면서

2는 원소로 갖지 않고, 4는 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-1}-1=2^4-1=15$$

(ⅲ) $2\notin X$, $4\notin X$, $6\in X$인 경우

집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2개 이상이면서

2, 4는 원소로 갖지 않고, 6은 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2-1}-1=2^3-1=7$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는

$$31+15+7=53$$

$\therefore$ 53

05 13

두 집합 A, B가 서로소이므로

$$A\cap B=\varnothing,\ A\cap B\cap C=\varnothing$$

$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$에서

$$n(A\cap C)=8+6-10=4$$

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$에서

$$n(B\cap C)=5+6-9=2$$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=8+5+6-0-2-4+0$

$=13$

$\therefore$ 13

06 ②

$A\cap B=\varnothing$이므로

$$n(A\cap B)=0,\ n(A\cap B\cap C)=0$$

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$에서

$$n(B\cap C)=9+11-18=2$$

$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$에서

$$n(A\cap C)=6+11-13=4$$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=6+9+11-0-2-4+0$

$=20$

$\therefore$ 20

07 85

학생 전체의 집합을 U, 체험 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B)^C$이고, 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생의 집합은 $A\cup B$이다.

$$n(U)=200,\ n(A)=n(B)+20$$

또한 $n((A\cup B)^C)=n(A\cup B)-100$ …… ㉠

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=200-n(A\cup B)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$n(A\cup B)-100=200-n(A\cup B)$$

$$2\times n(A\cup B)=300,\ n(A\cup B)=150$$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$$150=n(A)+n(A)-20-n(A\cap B),$$

$$2\times n(A)=170+n(A\cap B)$$

$$n(A)=85+\frac{1}{2}\times n(A\cap B)$$

체험 활동 A만 신청한 학생의 집합은 $A-B$이므로

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=85-\frac{1}{2}\times n(A\cap B)$$

이때 $n(A\cap B)=0$ 즉, $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A-B)$는 최대가 된다.

따라서 구하는 최댓값은 85이다.

$\therefore$ 85

08 ⑤

학생 전체의 집합을 U, A, B 두 과목을 선택한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 어느 과목도 선택하지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B)^C$이고, 하나 이상의 과목을 선택한 학생의 집합은 $A\cup B$이다.

$$n(U)=400,\ n(A)=n(B)+40$$

또한 $n((A\cup B)^C)=n(A\cup B)-300$ …… ㉠

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=400-n(A\cup B)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$n(A\cup B)-300=400-n(A\cup B)$$

$$2\times n(A\cup B)=700,\ n(A\cup B)=350$$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$$350=n(A)+n(A)-40-n(A\cap B)$$

$$2\times n(A)=390+n(A\cap B)$$

$$n(A)=195+\frac{1}{2}\times n(A\cap B)$$

A 과목만 선택한 학생의 집합은 $A-B$이므로

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=195-\frac{1}{2}\times n(A\cap B)$$

이때 $n(A\cap B)=0$ 즉, $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A-B)$는 최대가 된다. 따라서 구하는 최댓값은 195이다.

$\therefore$ 195

(3) 명제 ~ (4) 절대부등식

교과서 예제 p. 44

01 ㄱ. 참인 명제이다.
ㄴ. '빠르다'의 기준이 명확하지 않아서 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㄷ. $x-4=x+3$에서 $-4=3$이므로 거짓인 명제이다.
따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2, 3, 5, 7\}$
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
(1) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로
$P^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
$\therefore \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
(2) 조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q$이므로
$P\cup Q=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
$\therefore \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
(3) 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$
이때 $Q^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$P\cap Q^C=\{3, 5, 7\}$
$\therefore \{3, 5, 7\}$
(4) 조건 '$\sim(\sim p$ 그리고 $q)$'의 진리집합은
$(P^C\cap Q)^C=P\cup Q^C$이므로
$P\cup Q^C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
$\therefore \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

03 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q, 각각의 진리집합을 P, Q라 하면
(1) 'p: $x=4$', 'q: $x^2=16$'이므로
$P=\{4\}$, $Q=\{-4, 4\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
(2) 'p: x는 소수이다.', 'q: x는 홀수이다.'이므로
$P=\{2, 3, 5, \cdots\}$, $Q=\{1, 3, 5, \cdots\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

04 (1) 주어진 명제의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x+2\le 0$이다.'이다. 이때 $x+2\le 0$인 실수 x가 존재하므로 참이다.
$\therefore$ 어떤 실수 x에 대하여 $x+2\le 0$이다. (참)
(2) 주어진 명제의 부정은 '모든 자연수 x에 대하여 $x(x-2)\ne 0$이다.'이다. 이때 $x=2$이면 $x(x-2)=0$이므로 거짓이다.
$\therefore$ 모든 자연수 x에 대하여 $x(x-2)\ne 0$이다. (거짓)

05 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\ne 1$이다.
대우: $x^2\ne 1$이면 $x\ne 1$이다. (참)

06 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $Q=\{1, 2, 5, 10\}$
이때 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
$\therefore$ 필요조건

07 (1) $a>0$, $\dfrac{9}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$a+\frac{9}{a}\ge 2\sqrt{a\times\frac{9}{a}}=2\times 3=6$$
$\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{9}{a}\text{, 즉 } a=3\text{일 때 성립}\right)$
따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다.
$\therefore 6$
(2) $\dfrac{4a}{b}>0$, $\dfrac{b}{9a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{4a}{b}+\frac{b}{9a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{9a}}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$
$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{4a}{b}=\dfrac{b}{9a}\text{, 즉 } b=6a\text{일 때 성립}\right)$
따라서 주어진 식의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$이다.
$\therefore \dfrac{4}{3}$

08 a, b, x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$
$3\times 12\ge(ax+by)^2$, $-6\le ax+by\le 6$
$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\text{, 즉 } ay=bx\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $ax+by$의 최댓값은 6이다.
$\therefore 6$

기출 BEST 1회 p. 48

01 ③
③ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.
따라서 명제가 아니다.
①, ④ 참인 명제이다.
②, ⑤ 거짓인 명제이다.

02 ④

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{3, 5, 7, 9\}$

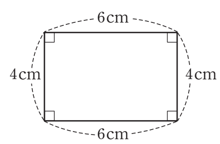
따라서 구하는 모든 원소의 합은 $3+5+7+9=24$

$\therefore$ 24

03 ③

ㄱ. [반례] $x=-4$이면 $x^2=16$이지만 $x\neq4$이다.

ㄹ. [반례] 그림과 같은 사각형은 직사각형이지만 마름모는 아니다.



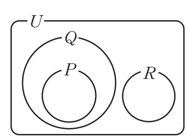
따라서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04 ④

세 집합 P, Q, R에 대하여

$P\cap Q=P$, $R^C\cup Q^C=U$를 만족시키도록

벤다이어그램을 그리면 그림과 같다.



이때 $R\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④ $r \longrightarrow \sim q$이다.

05 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x\le1$ 또는 $x\ge3$에서 $\sim p$: $1<x<3$

$\therefore P^C=\{x\,|\,1<x<3\}$

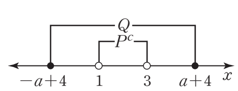
q: $|x-4|\le a$에서 a가 자연수이므로

$-a\le x-4\le a$, $-a+4\le x\le a+4$

$\therefore Q=\{x\,|-a+4\le x\le a+4\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면

$P^C\subset Q$이어야 하므로 그림에서



$-a+4\le1$, $a+4\ge3$

$a\ge3$, $a\ge-1$ $\quad\therefore a\ge3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

$\therefore$ 3

06 ⑤

⑤ [반례] 마름모는 대각선이 직교하지만 정사각형은 아니다.

07 ④

주어진 명제의 부정이 참이 되려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-14x+k\ge0$이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-14x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-7)^2-k\le0$, $k\ge49$

따라서 실수 k의 최솟값은 49이다.

$\therefore$ 49

08 ④

① 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)

[반례] $x=-3$, $y=-2$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.

② 역: $x^2-1=0$이면 $x-1=0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $x^2-1=0$이지만 $x-1\neq0$이다.

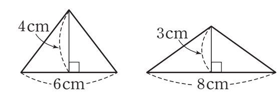
③ $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (거짓)

[반례] $x=3$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\neq0$이다.

④ 역: $x+y>0$이고 $xy>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (참)

⑤ 역: 넓이가 서로 같은 두 삼각형은 합동이다. (거짓)

[반례] 그림의 두 삼각형은 넓이는 서로 같지만 합동은 아니다.



09 ②

주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

'$x=4$이면 $x^2-3ax+8=0$이다.'가 참이 되어야 한다.

따라서 $x=4$를 $x^2-3ax+8=0$에 대입하면 등식이 성립해야 하므로

$16-12a+8=0$, $12a=24$, $a=2$

$\therefore$ 2

10 ③

명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인

$q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

또, 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow r$가 참이고, 그 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 ⑤

① $x^2=4$이면 $x=2$ 또는 $x=-2$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $|x+y|=|x-y|$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이고

$xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이고,

$|x|=|y|$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x=y$이면 $xz=yz$이므로 $p \Longrightarrow q$

$x=3$, $y=1$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\neq y$이므로 $q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $x=1$, $y=3$이면 $x+y=4$는 짝수이지만 x, y는 모두 홀수이므로

$p \not\Longrightarrow q$

x, y가 모두 짝수이면 $x+y$도 짝수이므로 $q \Longrightarrow p$

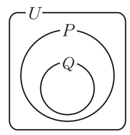
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

12 ②

p가 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p \qquad \therefore Q \subset P$

이때 전체집합 U의 두 부분집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



① $P \cap Q = Q$ ③ $P \cap Q^C \neq \varnothing$

④ $P \cup Q = P$ ⑤ $P^C - Q = P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

13 ①

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$, $q \Longrightarrow \sim p$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow p$, $\sim p \Longrightarrow \sim r$

$r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow \sim q$이므로 삼단논법에 의하여 $r \Longrightarrow \sim q$

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 ①

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $|x-1|<4$에서 $-4<x-1<4$, $-3<x<5$

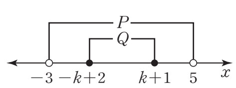
$\therefore P=\{x \mid -3<x<5\}$

q: $(x-k-1)(x+k-2) \leq 0$에서 k가 자연수이므로

$-k+2 \leq x \leq k+1$

$\therefore Q=\{x \mid -k+2 \leq x \leq k+1\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 그림에서



$-k+2>-3$, $k+1<5$

$k<5$, $k<4$

$\therefore k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

$\therefore 3$

15 ①

$\sqrt{2}$를 $\boxed{\text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수) …… ①

이때 ①의 양변을 제곱하면 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로

$n^2=2m^2$ …… ②

여기서 n^2이 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 n도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

$n=2k$(k는 자연수)로 놓고 ②에 대입하면

$(2k)^2=2m^2$, 즉 $m^2=2k^2$

여기서 m^2이 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 m도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

즉, m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로

$\sqrt{2}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 짝수

16 ②

② $x=1$, $y=1$이면 $x^2+y^2=1^2+1^2=2$, $3xy=3\times1\times1=3$이므로 $x^2+y^2<3xy$

따라서 항상 성립하는 것이 아닌 것은 ②이다.

17 ①

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+y \geq 2\sqrt{3x \times y}=2\sqrt{3xy}$

이때 $3x+y=12$이므로

$12 \geq 2\sqrt{3xy}$, $\sqrt{3xy} \leq 6$, $3xy \leq 36$, $xy \leq 12$

(단, 등호는 $3x=y$일 때 성립)

그런데 $xy>0$이므로 $0<xy \leq 12$

따라서 xy의 최댓값은 12이다.

$\therefore 12$

18 ③

$x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+3+\frac{4}{x+2}=x+2+\frac{4}{x+2}+1$$
$$\geq 2\sqrt{(x+2)\times\frac{4}{x+2}}+1$$
$$=2\times2+1=5$$

$\left(\text{단, 등호는 } x+2=\dfrac{4}{x+2}\text{, 즉 } x=0\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x+3+\dfrac{4}{x+2}$의 최솟값은 5이다.

즉, $m=5$, $n=0$이므로 $m+n=5+0=5$

$\therefore 5$

19 ④

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

이때 $2x+3y=13$이므로

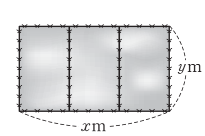
$13(x^2+y^2) \geq 13^2$, $x^2+y^2 \geq 13$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 13이다.

$\therefore 13$

20 ⑤

그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 철망의 전체 길이가 600 m이므로



$2x+4y=600$, $x+2y=300$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y \geq 2\sqrt{x \times 2y}=2\sqrt{2xy}$ …… ㉠

㉠에서 등호는 $x=2y$일 때 성립하고 이때 가축우리의 전체 넓이

xy가 최대가 되므로 $x+2y=300$에서

$4y=300,\ y=75 \qquad \therefore x=150,\ y=75$

따라서 세로의 길이는 75 m이다.

$\therefore$ 75 m

기출 BEST 2회 p. 52

01 ⑤

ㄱ. y의 부호가 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

ㄴ. x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.

ㄷ, ㄹ. 거짓인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

02 ②

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 3, 5, 7\},\ Q=\{1, 2, 5, 10\}$

조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로

$P\cap Q=\{2, 5\}$

따라서 구하는 집합의 원소의 개수는 2이다.

$\therefore$ 2

03 ②

② $0.333\cdots$은 무한소수이지만 $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$이므로 유리수이다.

③ 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 그 합은

$1+2+3+4+6+12=28$

따라서 거짓인 명제는 ②이다.

04 ③

주어진 벤다이어그램에서 $P\subset R^C$이므로 $p \longrightarrow \sim r$가 참이다.

또, $R\subset(P^C\cap Q)$이므로 $r \longrightarrow (\sim p$ 그리고 $q)$도 참이다.

그러나 $R^C\not\subset Q$이므로 $\sim r \longrightarrow q$는 거짓이다.

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

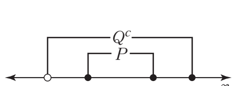
p: $|x-m|\le 2$에서 $-2\le x-m\le 2,\ m-2\le x\le m+2$

$\therefore P=\{x\,|\,m-2\le x\le m+2\}$

q: $x\le -5$ 또는 $x>3$에서 $\sim q$: $-5<x\le 3$

$\therefore Q^C=\{x\,|\,-5<x\le 3\}$

이때 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로 그림에서



$m-2>-5,\ m+2\le 3$

$m>-3,\ m\le 1 \qquad \therefore -3<m\le 1$

따라서 정수 m은 -2, -1, 0, 1이므로

$-2+(-1)+0+1=-2$

$\therefore -2$

06 ④

④ $x^2-x+1<0$을 만족시키는 x가 존재하지 않으므로 거짓이다.

07 ②

주어진 명제의 부정이 참이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+16\ge 0$이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-2kx+16=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-16\le 0,\ k^2-16\le 0$

$(k+4)(k-4)\le 0,\ -4\le k\le 4$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, $\cdots$, 4의 9개이다.

$\therefore$ 9

08 ③

① 역: $x^2+x-2=0$이면 $x-1=0$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x^2+x-2=0$이지만 $x-1\neq 0$이다.

대우: $x^2+x-2\neq 0$이면 $x-1\neq 0$이다. (참)

② 역: 9의 약수이면 3의 약수이다. (거짓)

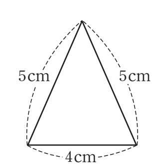
[반례] 9는 9의 약수이지만 3의 약수는 아니다.

대우: 9의 약수가 아니면 3의 약수가 아니다. (참)

③ 역: 정삼각형은 이등변삼각형이다. (참)

대우: 정삼각형이 아니면 이등변삼각형도 아니다. (거짓)

[반례] 그림과 같은 삼각형은 정삼각형은 아니지만 이등변삼각형이다.



④ 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.

대우: $x^2\neq y^2$이면 $x\neq y$이다. (참)

⑤ 역: $x^2+y^2=0$이면 $x=y=0$이다. (참)

대우: $x^2+y^2\neq 0$이면 $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$이다. (참)

따라서 그 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ③이다.

09 ④

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이 되어야 한다. 즉, 명제 '$x+2=0$이면 $x^2+ax+4=0$이다.'가 참이 되어야 하므로 $x=-2$를 $x^2+ax+4=0$에 대입하면 등식이 성립해야 한다.

$4-2a+4=0,\ 2a=8,\ a=4$

$\therefore$ 4

10 ②

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인

$p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow r$도 참이다.

또, 명제 $\sim r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $\sim r \longrightarrow q$도 참이고, 그 대우인 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ②이다.

11 ①

ㄱ. $(a-b)(b-c)=0$에서 $a-b=0$ 또는 $b-c=0$

즉, $a=b$ 또는 $b=c$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. $a+bi=0$에서 $a=b=0$이고

$|a|+|b|=0$에서 $a=b=0$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $a=-1$, $b=-2$이면 $ab>0$이지만 $a<0$, $b<0$이므로

$p \not\Longrightarrow q$

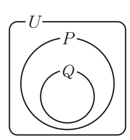
$a>0$, $b>0$이면 $ab>0$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ이다.

12 ②

전체집합 U의 두 부분집합 P, Q 에 대하여 $P \cup Q^C = U$를 만족시키도록 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



즉, $P^C \subset Q^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

13 ④

p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $q \Longrightarrow r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$

s는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $\sim q \Longrightarrow s$

$p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$, $\sim q \Longrightarrow s$이므로 삼단논법에 의하여

$p \Longrightarrow s$, $\sim s \Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

14 ③

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

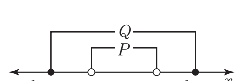
p: $(x+4)(x-2)<0$에서 $-4<x<2$

$\therefore P=\{x \mid -4<x<2\}$

q: $(x+k+2)(x+k-9)\le 0$에서 $-k-2\le x\le -k+9$

$\therefore Q=\{x \mid -k-2\le x\le -k+9\}$

이때 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 그림에서



$-k-2\le -4$, $-k+9\ge 2$

$k\ge 2$, $k\le 7$ $\quad\therefore 2\le k\le 7$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, $\cdots$, 7의 6개이다.

$\therefore 6$

15 ②

주어진 명제의 대우는 'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'이다.

n이 3의 배수가 아니면

$n=\boxed{3k-1}$ 또는 $n=\boxed{3k-2}$ (k는 자연수)

(i) $n=\boxed{3k-1}$일 때,

$n^2=3(3k^2-2k)+\boxed{1}$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=\boxed{3k-2}$일 때,

$n^2=3(3k^2-4k+1)+\boxed{1}$

즉, $f(k)=3k-1$, $g(k)=3k-2$, $a=1$이므로

$f(a)+g(2a)=f(1)+g(2)=2+4=6$

$\therefore 6$

16 ④

ㄱ. $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2=(a+b)^2-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2+2|ab|+b^2)$

$=2(ab-|ab|)$

그런데 $ab\le|ab|$에서 $2(ab-|ab|)\le 0$, 즉

$|a+b|^2\le(|a|+|b|)^2$이므로 $|a+b|\le|a|+|b|$

(단, 등호는 $ab\ge 0$일 때 성립)

ㄴ. (i) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로 $|a-b|>|a|-|b|$

(ii) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a-b|\ge 0$, $|a|-|b|\ge 0$이므로

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=-2(ab-|ab|)\ge 0$ ($\because ab\le|ab|$)

즉, $|a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$이므로 $|a-b|\ge|a|-|b|$

(i), (ii)에 의하여 $|a-b|\ge|a|-|b|$

(단, 등호는 $|a|\ge|b|$이고 $ab\ge 0$일 때 성립)

ㄷ. $(a^2+b^2+1)-(ab+a+b)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\ge 0$

$\therefore a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

이때 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

17 ①

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$8x+2y\ge 2\sqrt{8x\times 2y}=8\sqrt{xy}$

이때 $xy=1$이므로 $8x+2y\ge 8$

즉, $8x+2y$의 최솟값은 8이고 등호는 $8x=2y$일 때 성립하므로

$$8x=4,\ 2y=4 \qquad \therefore x=\frac{1}{2},\ y=2$$

즉, $m=8$, $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

$$m+2a+b=8+2\times\frac{1}{2}+2=11$$

$\therefore$ 11

18 ⑤

$x>4$에서 $x-4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}3x+\frac{12}{x-4}&=3(x-4)+\frac{12}{x-4}+12\\&\geq 2\sqrt{3(x-4)\times\frac{12}{x-4}}+12\\&=2\times6+12=24\end{aligned}$$

즉, $3x+\frac{12}{x-4}$의 최솟값은 24이고 등호는 $3(x-4)=\frac{12}{x-4}$일 때 성립하므로

$(x-4)^2=4$에서 $x-4=\pm2$, $x=6$ ($\because x>4$)

즉, $\alpha=6$, $\beta=24$이므로 $\beta-\alpha=24-6=18$

$\therefore$ 18

19 ③

x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)\{(\sqrt{3x})^2+(\sqrt{2y})^2\}\geq(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$$

$$2(3x+2y)\geq(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$$

(단, 등호는 $\sqrt{3x}=\sqrt{2y}$일 때 성립)

이때 $3x+2y=8$이므로 $16\geq(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\leq4$$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 4이다.

$\therefore$ 4

20 ④

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm로 놓으면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2+y^2=4^2$$

한편, x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$$

$$2\times16\geq(x+y)^2,\ (x+y)^2\leq32$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때, $x>0$, $y>0$이므로

$$0<x+y\leq4\sqrt{2}$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$$0<2(x+y)\leq8\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값은 $8\sqrt{2}$ cm이다.

$\therefore 8\sqrt{2}$ cm

[다른 풀이]

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm로 놓으면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2+y^2=4^2$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq2\sqrt{x^2y^2},\ 16\geq2\sqrt{x^2y^2},\ xy\leq8$$

그런데 $xy>0$이므로 $0<xy\leq8$

이때 등호는 $x=y=2\sqrt{2}$일 때 성립하므로 구하는 최댓값은

$$2(x+y)=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}(\text{cm})$$

$\therefore 8\sqrt{2}$ cm

변형 유형 집중공략

p. 56

01 ④

두 조건 p: $1<x\leq3$, q: $k-2\leq x\leq k+3$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

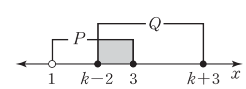
$$P=\{x|1<x\leq3\},\ Q=\{x|k-2\leq x\leq k+3\}$$

이때 어떤 실수 x에 대하여 명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 집합 P에 속하는 원소 중 집합 Q에 속하는 원소가 적어도 하나는 존재해야 한다.

즉, 주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 한다.

수직선을 이용하여 a의 값의 범위를 구하면

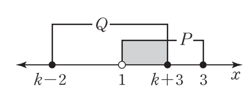
(i) $k-2\geq1$, 즉 $k\geq3$일 때



$k-2\leq3$, $k\leq5$

$\therefore 3\leq k\leq5$

(ii) $k-2<1$, 즉 $k<3$일 때



$1<k+3$, $k>-2$

$\therefore -2<k<3$

(i), (ii)에 의하여 $-2<k\leq5$이므로

정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7개이다.

$\therefore$ 7

02 ④

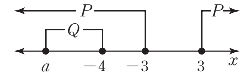
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$$P=\{x|x\leq-3\ \text{또는}\ x\geq3\}$$

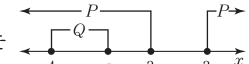
$$Q=\{x|a\leq x\leq-4\}\ \text{또는}\ Q=\{x|-4\leq x\leq a\}$$

$$R=\{x|b\leq x\leq2b\}\ \text{또는}\ R=\{x|2b\leq x\leq b\}$$

(i) p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$이고 이를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



또는

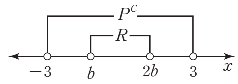


$\therefore a\leq-3$

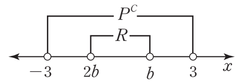
(ii) r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로 $R\subset P^C$

이때 $P^C=\{x|-3<x<3\}$이므로 이를 수직선 위에 나타내면 다음과 같이 두 경우로 생각할 수 있다.

㉠ $b\geq0$일 때, $0\leq b\leq\frac{3}{2}$



㉡ $b<0$일 때, $-\frac{3}{2}\leq b<0$



㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{2}\leq b\leq\frac{3}{2}$

(i), (ii)에 의하여 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 $-\frac{3}{2}$이므로 구하는 합은

$$-3+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

$\therefore -\frac{9}{2}$

03 ④

$x>1$에서 $x-1>0$, $x^2+x+7=(x-1)^2+3x+6>0$이고

$$\frac{x-1}{x^2+x+7}=\frac{1}{\frac{x^2+x+7}{x-1}}=\frac{1}{x+2+\frac{9}{x-1}}$$
$$=\frac{1}{x-1+\frac{9}{x-1}+3}$$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x-1+\frac{9}{x-1}+3\geq2\sqrt{(x-1)\times\frac{9}{x-1}}+3=9$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x-1=\frac{9}{x-1}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$$

이때 $x-1+\frac{9}{x-1}+3$의 최솟값이 9이므로

$\frac{1}{x-1+\frac{9}{x-1}+3}$, 즉 $\frac{x-1}{x^2+x+7}$의 최댓값은 $\frac{1}{9}$이다.

즉, $a=\frac{1}{9}$, $b=4$이므로 $ab=\frac{1}{9}\times4=\frac{4}{9}$

$\therefore \frac{4}{9}$

04 ⑤

직선의 x절편, y절편을 각각 a, b $(a>0,\ b>0)$라 하면 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(3,\ 5)$를 지나므로 $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=1$

이때 $\frac{3}{a}>0$, $\frac{5}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1=\frac{3}{a}+\frac{5}{b}\geq2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{5}{b}}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{ab}}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{a}=\frac{5}{b}\text{, 즉 } 5a=3b\text{일 때 성립}\right)$$

$1\geq\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{ab}}$에서 $\sqrt{ab}\geq2\sqrt{15}=\sqrt{60}$, $ab\geq60$

따라서 $\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\times60=30$이므로 삼각형 OBC의 넓이의 최솟값은 30이다.

$\therefore 30$

서술형 **What & How 연습문제** p. 60

01 3

주어진 명제가 참이므로 그 대우인 '$-x+3\geq2k-1$이고 $2y-4\leq4$이면 $x+y\leq k$이다.'도 참이다. ······ ❶

$-x+3\geq2k-1$에서 $-x\geq2k-4$, $x\leq-2k+4$이고

$2y-4\leq4$에서 $2y\leq8$, $y\leq4$이므로

$x+y\leq-2k+8$ ······ ❷

즉, $-2k+8\leq k$이므로 $-3k\leq-8$, $k\geq\frac{8}{3}$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다. ······ ❸

$\therefore 3$

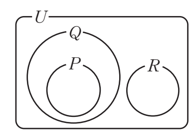
채점기준	배점
❶ 주어진 명제의 대우와 그것의 참, 거짓을 바르게 말하였다.	2
❷ $x+y$의 값의 범위를 바르게 구하였다.	3
❸ 정수 k의 최솟값을 바르게 구하였다.	2

02 (1) 충분조건 (2) 필요조건

$(P-Q)\cup(Q\cap R)=\varnothing$이므로

$P-Q=\varnothing$, $Q\cap R=\varnothing$

이때 $P-Q=\varnothing$에서 $P\subset Q$이므로 전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R에 대하여 $P\subset Q$, $Q\cap R=\varnothing$을 만족시키도록 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다. ······ ❶



(1) $P\subset R^C$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다. ······ ❷

$\therefore$ 충분조건

(2) $R\subset Q^C$이므로 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다. ······ ❸

$\therefore$ 필요조건

채점기준	배점
❶ 세 집합 P, Q, R의 관계를 구하고, 이를 벤다이어그램으로 바르게 나타내었다.	3
❷ p는 $\sim r$이기 위한 무슨 조건인지 바르게 말하였다.	2
❸ $\sim q$는 r이기 위한 무슨 조건인지 바르게 말하였다.	2

03 해설 참조

(1) 주어진 명제의 대우는

m, n이 모두 홀수이면 mn도 홀수이다. ······ ❶

(2) $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)이라 하면

$$mn=(2k-1)(2l-1)$$
$$=2(2kl-k-l)+1$$

이므로 mn도 홀수이다. ······ ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ······ ❸

채점기준	배점
❶ 주어진 명제의 대우를 바르게 말하였다.	2
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 바르게 증명하였다.	4
❸ 주어진 명제가 참인 이유를 바르게 말하였다.	1

04 49

$(3a+b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)=36+\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+1=\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+37$ …… ❶

$a>0$, $b>0$에서 $\frac{3a}{b}>0$, $\frac{12b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+37\geq 2\sqrt{\frac{3a}{b}\times\frac{12b}{a}}+37$$
$$=2\times 6+37=49$$ …… ❷

이때 등호는 $\frac{3a}{b}=\frac{12b}{a}$일 때 성립하므로

$3a^2=12b^2$, $a^2=4b^2$, $a=2b$ ($\because a>0,\ b>0$) …… ❸

따라서 구하는 최솟값은 49이다. …… ❹

$\therefore$ 49

채점기준	배점
❶ 주어진 식을 바르게 정리하였다.	2
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 값의 범위를 바르게 구하였다.	3
❸ 등호가 성립할 때의 조건을 바르게 구하였다.	2
❹ 주어진 식의 최솟값을 바르게 구하였다.	1

실전문제 1회

p. 64

01 ②

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 16, 20\}$

조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{3, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19\}$

따라서 구하는 집합의 원소의 개수는 11이다.

$\therefore$ 11

02 ④

① $x=-2$이면 $x^2-4=0$이지만 $x-2\neq 0$이다.

② $x=2$는 소수이지만 짝수이다.

③ $x=4$는 2의 배수이지만 8의 배수는 아니다.

⑤ $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y=0$, $xy=-2$로 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.

03 ①

조건 $k-3\leq x\leq k+1$의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x|k-3\leq x\leq k+1\}$

조건 $-3\leq x<2$의 진리집합을 Q라 하면

$Q=\{x|-3\leq x<2\}$

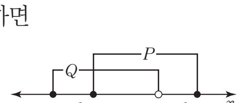
주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 한다.

수직선을 이용하여 k의 값의 범위를 구하면

(i) $k-3\geq -3$, 즉 $k\geq 0$일 때,

$k-3<2$, $k<5$

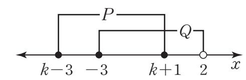
$\therefore 0\leq k<5$



(ii) $k-3<-3$, 즉 $k<0$일 때,

$-3\leq k+1$, $k\geq -4$

$\therefore -4\leq k<0$



(i), (ii)에 의하여 $-4\leq k<5$

$\therefore -4\leq k<5$

04 ③

(i) 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1>0$이다.'가 참이 되려면 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1<0$이어야 한다.

$\frac{D_1}{4}=a^2-1<0$, $(a+1)(a-1)<0$, $-1<a<1$

(ii) 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+a\leq 0$이다.'가 거짓이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+a>0$이 성립하면 된다. 즉, 이차방정식 $x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2<0$이어야 하므로

$\frac{D_2}{4}=a^2-a<0$, $a(a-1)<0$, $0<a<1$

(i), (ii)에 의하여 $0<a<1$

$\therefore 0<a<1$

05 ⑤

① 역: $x>10$이면 $x>5$이다. (참)

대우: $x\leq 10$이면 $x\leq 5$이다. (거짓)

[반례] $x=8$이면 $x\leq 10$이지만 $x>5$이다.

② 역: $a\neq 2$ 또는 $b\neq 3$이면 $ab\neq 6$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=6$이면 $a\neq 2$이지만 $ab=6$이다.

대우: $a=2$이고 $b=3$이면 $ab=6$이다. (참)

③ 역: ab가 정수이면 $a+b$도 정수이다. (거짓)

[반례] $a=4$, $b=\frac{3}{2}$이면 $ab=4\times\frac{3}{2}=6$은 정수이지만 $a+b=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$은 정수가 아니다.

대우: ab가 정수가 아니면 $a+b$도 정수가 아니다. (거짓)

[반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이면 $ab=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$은 정수가 아니지만 $a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$은 정수이다.

④ 역: x가 무리수이면 x^2은 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=1+\sqrt{2}$이면 x는 무리수이지만 $x^2=3+2\sqrt{2}$이므로 유리수가 아니다.

대우: x가 유리수이면 x^2은 무리수이다. (거짓)

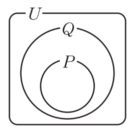
[반례] $x=3$이면 x는 유리수이지만 $x^2=9$이므로 무리수가 아니다.

⑤ 역: x 또는 y가 짝수이면 xy가 짝수이다. (참)

대우: x, y가 모두 홀수이면 xy는 홀수이다. (참)

06 ③

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 역 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우인 $p \longrightarrow q$도 참이다. 따라서 $P \subset Q$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



① $P \cap Q = P$　　② $P^C \cap Q \neq \varnothing$

④ $P^C \cup Q^C = P^C$　　⑤ $P \cup Q^C \neq U$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

07 ⑤

(ⅰ) A만 진실을 말했다고 할 때,

A는 서점 또는 영화관, B는 서점, C는 도서관 또는 영화관에 간 것이므로 A는 영화관, B는 서점, C는 도서관에 간 것이다.

(ⅱ) B만 진실을 말했다고 할 때,

A는 도서관, B는 도서관 또는 영화관, C는 도서관 또는 영화관에 간 것이므로 서점에 간 학생은 없다. 따라서 모순이다.

(ⅲ) C만 진실을 말했다고 할 때,

A는 도서관, B는 서점, C는 서점에 간 것이므로 영화관에 간 학생이 없고 B, C 두 학생이 같은 장소에 간 것이다. 따라서 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 도서관, 서점, 영화관에 간 학생은 차례대로 C, B, A이다.

∴ C, B, A

08 ⑤

ㄱ. $|x|=1$에서 $x=\pm1$이고 $x^2-1=0$에서 $x=\pm1$이므로

$p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서

$x-y=0$ 또는 $y-z=0$ 또는 $z-x=0$, 즉

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이므로 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. $xy=|xy|$에서 $x\geq0$, $y\geq0$ 또는 $x\leq0$, $y\leq0$이므로

$p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09 ①

$(A\cup B)\cap(B-A)^C=A\cap B$에서

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(B-A)^C&=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C\\&=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)\\&=A\cup(B\cap B^C)\\&=A\cup\varnothing=A\end{aligned}$$

이때 $A=A\cap B$이므로 $A\subset B$, 즉 $A\cup B=B$

따라서 $(A\cup B)\cap(B-A)^C=A\cap B$가 성립하기 위한 필요충분조건인 것은 ①이다.

10 ③

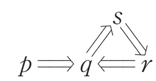
p는 q이기 위한 충분조건에서 $p \Longrightarrow q$

q는 r이기 위한 필요조건에서 $r \Longrightarrow q$

r는 s이기 위한 필요조건에서 $s \Longrightarrow r$

s는 q이기 위한 필요조건에서 $q \Longrightarrow s$

이를 정리하면 그림과 같다.



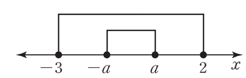
ㄴ. $p \Longrightarrow r$이므로 r는 p이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 ②

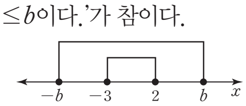
(ⅰ) $|x|\leq a$, 즉 $-a\leq x\leq a$는 $-3\leq x\leq 2$이기 위한 충분조건이므로 명제 '$-a\leq x\leq a$이면 $-3\leq x\leq 2$이다.'가 참이다.

따라서 그림과 같이 $-a\geq-3$, $a\leq2$이어야 하므로 $0<a\leq2$



(ⅱ) $|x|\leq b$, 즉 $-b\leq x\leq b$는 $-3\leq x\leq 2$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$-3\leq x\leq 2$이면 $-b\leq x\leq b$이다.'가 참이다.

따라서 그림과 같이 $-b\leq-3$, $b\geq2$이어야 하므로 $b\geq3$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 3이므로 구하는 합은 $2+3=5$

∴ 5

12 ②

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}&\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\\&=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\\&=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\\&\geq2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}\\&=2+2+2\\&=6\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

∴ 6

13 ①

$x\neq2$에서 $(x-2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x^2-4x+\frac{4}{(x-2)^2}&=x^2-4x+4-4+\frac{4}{(x-2)^2}\\&=(x-2)^2+\frac{4}{(x-2)^2}-4\\&\geq2\sqrt{(x-2)^2\times\frac{4}{(x-2)^2}}-4\\&=2\times2-4=0\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } (x-2)^2=\frac{4}{(x-2)^2},\ \text{즉 } x=2\pm\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 0이다.

∴ 0

14 ③

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=16+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}+1=\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}+17$$

$a>0$, $b>0$에서 $\frac{2a}{b}>0$, $\frac{8b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}+17\geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{8b}{a}}+17$$

$$=2\times4+17=25$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{2a}{b}=\frac{8b}{a},\ \text{즉 } a=2b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 25이다.

∴ 25

15 ⑤

$\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2+3^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}\geq(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

$$14(a+b+c)\geq(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

이때 $a+b+c=14$이므로 $14^2\geq(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$$0\leq\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}\leq14$$

$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{c}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은 14이다.

∴ 14

16 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-x-6<0$에서

$(x+2)(x-3)<0$, $-2<x<3$

∴ $P=\{x\mid -2<x<3\}$

q: $x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\geq0$에서

$x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4)\geq0$

$(x-2a+2)(x-a+4)\geq0$

(i) $2a-2\leq a-4$, 즉 $a\leq-2$일 때,

$Q=\{x\mid x\leq 2a-2 \text{ 또는 } x\geq a-4\}$

이고 $a-4\leq-6$이므로

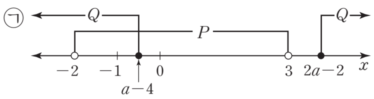
$P\cap Q=\{x\mid -2<x<3\}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2a-2>a-4$, 즉 $a>-2$일 때,

$Q=\{x\mid x\leq a-4 \text{ 또는 } x\geq 2a-2\}$

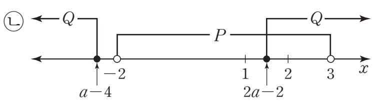
이때 두 조건 p, q가 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면 다음과 같아야 한다.

㉠


$-1\leq a-4<0$에서 $3\leq a<4$이고

$3\leq 2a-2$에서 $a\geq\frac{5}{2}$이므로

$3\leq a<4$

㉡


$a-4\leq-2$에서 $a\leq2$이고

$1<2a-2\leq2$에서 $\frac{3}{2}<a\leq2$이므로

$\frac{3}{2}<a\leq2$

㉠, ㉡에 의하여 가능한 정수 a는 2, 3이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 정수 a의 값의 합은

$2+3=5$

∴ 5

17 ④

조건 r의 진리집합을 R라 하자.

p 그리고 q의 진리집합은 $P\cap Q$이므로 $P\cap Q=\{5, 8\}$

p 또는 q의 진리집합은 $P\cup Q$이므로

$P\cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

p 그리고 q는 r이기 위한 충분조건이므로

$(P\cap Q)\subset R$ …… ㉠

p 또는 q는 r이기 위한 필요조건이므로

$R\subset(P\cup Q)$ …… ㉡

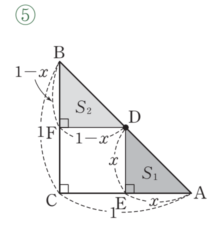
㉠, ㉡에 의하여 $(P\cap Q)\subset R\subset(P\cup Q)$

∴ $\{5, 8\}\subset R\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

따라서 집합 R는 5, 8을 반드시 포함하는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$의 부분집합이므로 그 개수는 $2^{7-2}=2^5=32$

∴ 32

18 ⑤



그림에서 $S_1=\frac{1}{2}x^2$, $S_2=\frac{1}{2}(1-x)^2$

$S_1>0$, $S_2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4$$

$$\geq2\times2\sqrt{S_1S_2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{1}{S_1S_2}}+4$$

이때 등호는 $S_1=S_2$, $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{S_2}$, 즉 $S_1=S_2$일 때 성립하므로

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(1-x)^2,\ x^2=x^2-2x+1,\ x=\frac{1}{2}$

따라서 $S_1=S_2=\frac{1}{8}$

$$\therefore\ 2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4\geq 4\sqrt{S_1S_2}+\sqrt{\frac{1}{S_1S_2}}+4$$
$$=4\times\frac{1}{8}+8+4=\frac{25}{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{25}{2}$이다.

$\therefore\ \frac{25}{2}$

19 해설 참조

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$ …… ❶

이때 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ …… ❷

채점기준	배점
❶ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, $(\sqrt{a+b})^2$의 대소 관계를 바르게 판별하였다.	4
❷ $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$인 이유를 바르게 제시하였다.	2

20 $\frac{25}{6}$

$$(3x+2y)\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}\right)=\frac{3}{2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{13}{6}\quad\cdots\cdots ❶$$

$x>0,\ y>0$에서 $\frac{x}{y}>0,\ \frac{y}{x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{13}{6}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}+\frac{13}{6}$$
$$=2+\frac{13}{6}=\frac{25}{6}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{y}=\frac{y}{x},\ \text{즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$

이때 $3x+2y=1$이므로 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}\geq\frac{25}{6}$ …… ❷

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{25}{6}$이다. …… ❸

$\therefore\ \frac{25}{6}$

채점기준	배점
❶ $(3x+2y)\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}\right)$을 바르게 정리하였다.	3
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$의 값의 범위를 바르게 구하였다.	3
❸ $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$의 최솟값을 바르게 구하였다.	2

실전문제 2회

p. 68

01 ③

③ $n=2$이면 소수이지만 $n^2=4$는 짝수이다.

02 ①

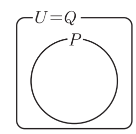
명제 $p\longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 집합은 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$

$\therefore\ P\cap Q$

03 ⑤

전체집합 U의 두 부분집합 P, Q에 대하여 $P-Q=\varnothing$, $P\cup Q=U$를 만족시키도록 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $P^C\subset Q$이므로 $\sim p\longrightarrow q$

ㄷ. $P\subset Q$이므로 $p\longrightarrow q$

ㄹ. $Q^C=\varnothing$이고 $\varnothing\subset P^C$이므로 $\sim q\longrightarrow \sim p$

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

04 ⑤

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

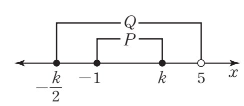
p: $-2\leq x-1\leq k-1$에서 $-1\leq x\leq k$

$\therefore\ P=\{x\mid -1\leq x\leq k\}$

q: $-\frac{k}{2}+2\leq x+2<7$에서 $-\frac{k}{2}\leq x<5$

$\therefore\ Q=\left\{x\,\middle|\,-\frac{k}{2}\leq x<5\right\}$

이때 명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 그림에서



$-\frac{k}{2}\leq -1,\ k<5$

$\therefore\ 2\leq k<5$

즉, 정수 k는 2, 3, 4이므로 구하는 값은 $2+3+4=9$

$\therefore\ 9$

05 ①

ㄱ. 역: $x^2+3x=4$이면 $x=1$이다. (거짓)

　[반례] $x=-4$이면 $x^2+3x=4$이지만 $x\neq 1$이다.

　대우: $x^2+3x\neq 4$이면 $x\neq 1$이다. (참)

ㄴ. 역: $x>1$이면 $x^2>1$이다. (참)

　대우: $x\leq 1$이면 $x^2\leq 1$이다. (거짓)

　[반례] $x=-2$이면 $x\leq 1$이지만 $x^2=4>1$이다.

ㄷ. 역: △ABC에서 ∠A=∠B=∠C이면 △ABC는 정삼각형이다. (참)

　대우: △ABC에서 ∠A≠∠B 또는 ∠B≠∠C 또는 ∠C≠∠A이면 △ABC는 정삼각형이 아니다. (참)

따라서 역은 거짓이고 대우는 참인 명제인 것은 ㄱ이다.

06 ⑤

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 그 대우인 $p \longrightarrow \sim q$도 참이 되어야 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-(a+b)x+ab\le 0$에서 $(x-a)(x-b)\le 0$, $a\le x\le b$

$\therefore P=\{x \mid a\le x\le b\}$

q: $2x-3\le -11$ 또는 $3x-7\ge 11$에서

$2x-3\le -11$, $2x\le -8$, $x\le -4$

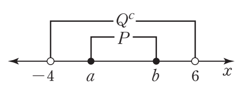
$3x-7\ge 11$, $3x\ge 18$, $x\ge 6$

즉, q: $x\le -4$ 또는 $x\ge 6$에서 $\sim q$: $-4<x<6$

$\therefore Q^C=\{x \mid -4<x<6\}$

이때 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면

$P\subset Q^C$이어야 하므로 그림에서



$a>-4$, $b<6$

즉, 정수 a의 최솟값은 -3, 정수 b의 최댓값은 5이므로 구하는 합은

$-3+5=2$

$\therefore 2$

07 ④

명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우인 $\sim r \longrightarrow q$도 참이다.

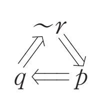
또, 명제 $\sim r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $\sim r \longrightarrow s$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

08 ③

두 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

즉, $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow p$이므로 이를 정리하면 그림과 같다.



ㄱ. $q \Longrightarrow p$이므로 $Q\subset P$

ㄴ. $q \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow q$이므로 $Q=R^C$

ㄷ. $p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow p$이므로 $P=R^C$

즉, $P\cap R=R^C\cap R=\varnothing$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 ⑤

p: $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$

q: $|x|+|y|=0$에서 $x=0$, $y=0$

이므로 $p \Longleftrightarrow q$, $p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow r$

⑤ r는 p이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

10 ④

명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow r$도 참이다.

즉, $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

ㄱ. q는 p이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 ③

p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $(x+3)^2=a$, 즉 이차방정식 $x^2+6x+9-a=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=b$이다.

$x=1$을 $x^2+6x+9-a=0$에 대입하면

$1+6+9-a=0$, $a=16$

따라서 $x^2+6x-7=0$이므로

$(x+7)(x-1)=0$, $x=-7$ 또는 $x=1$

즉, $b=-7$이므로 $a+b=16+(-7)=9$

$\therefore 9$

12 ④

$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=\boxed{2(|ab|+ab)}$

그런데 $\boxed{2(|ab|+ab)\ge 0}$이므로 $(|a|+|b|)^2\ge |a-b|^2$

따라서 $|a|+|b|\ge 0$, $|a-b|\ge 0$이므로

$|a-b|\le |a|+|b|$

여기서 등호는 $\boxed{ab\le 0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $2(|ab|+ab)$ (나) $2(|ab|+ab)\ge 0$ (다) $ab\le 0$

13 ④

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a^2-6a+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} &= (a-3)^2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-9 \\ &\ge (a-3)^2+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}-9 \\ &= (a-3)^2-7 \end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}, \text{ 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$

$(a-3)^2-7$은 $a=3$일 때 최소이고 등호는 $a=b=3$일 때 성립하므로

$a+b=3+3=6$

$\therefore 6$

14 ①

$x>-1$, 즉 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{x^2+4x+7}{x+1} &= \frac{(x+1)^2+2(x+1)+4}{x+1} \\ &= x+1+\frac{4}{x+1}+2 \\ &\ge 2\sqrt{(x+1)\times\frac{4}{x+1}}+2 \\ &= 2\times 2+2=6 \end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } x+1=\frac{4}{x+1}, \text{ 즉 } x=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

$\therefore$ 6

15 ④

x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2\right\}\{(3x)^2+(4y)^2\}\ge(x-4y)^2$$

(단, 등호는 $9x=-4y$일 때 성립)

이때 $x-4y=3$이므로

$$\frac{10}{9}(9x^2+16y^2)\ge9,\ 9x^2+16y^2\ge\frac{81}{10}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{81}{10}$이다.

$\therefore \frac{81}{10}$

16 ②

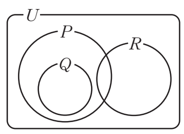
조건 (가)에서 $P\not\subset Q$, 조건(나)에서 $Q\cap R=\varnothing$

ㄱ. $P\not\subset Q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이 아니다.

ㄴ. $Q\cap R=\varnothing$이므로 $R\subset Q^C$

즉, r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. 조건 (가), (나)를 모두 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같은 경우가 있다.



따라서 $\sim q$는 p이기 위한 필요충분조건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

17 ②

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+2x^3+4x^2+3x+11}=\frac{1}{\frac{x^4+2x^3+4x^2+3x+11}{x^2+x+1}}$$

이므로 주어진 식은

$\frac{x^4+2x^3+4x^2+3x+11}{x^2+x+1}$이 최솟값을 가질 때 최댓값을 갖는다.

이때 $x^4+2x^3+4x^2+3x+11=(x^2+x+1)(x^2+x+2)+9$이므로

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+3x+11}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2+x+2)+9}{x^2+x+1}$$
$$=x^2+x+2+\frac{9}{x^2+x+1}$$
$$=x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1}+1$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$, $\frac{9}{x^2+x+1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1}+1$$
$$\ge2\sqrt{(x^2+x+1)\times\frac{9}{x^2+x+1}}+1$$
$$=2\times3+1=7$$

여기서 등호는 $x^2+x+1=\frac{9}{x^2+x+1}$, 즉

$$(x^2+x+1)^2=9,\ x^2+x+1=3,\ x^2+x-2=0$$
$$(x+2)(x-1)=0,\ x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

일 때 성립한다.

이때 $\frac{x^4+2x^3+4x^2+3x+11}{x^2+x+1}$의 최솟값이 7이므로 주어진 식의 최댓값은 $\frac{1}{7}$이고 그때의 모든 x의 값의 곱은 $-2\times1=-2$

즉, $a=\frac{1}{7}$, $b=-2$이므로

$$7ab=7\times\frac{1}{7}\times(-2)=-2$$

$\therefore -2$

18 ④

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$$

즉, $A_1+A_2+A_3=4\sqrt{3}$이고 A_1, A_2, A_3이 실수이므로

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+1^2)(A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2)\ge(A_1+A_2+A_3)^2$$
$$3(A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2)\ge(4\sqrt{3})^2,\ A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2\ge16$$

(단, 등호는 $A_1=A_2=A_3$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

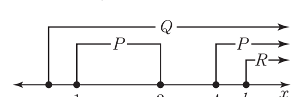
$\therefore$ 16

19 5

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset Q$

r는 p이기 위한 충분조건이므로 $R\subset P$

즉, $R\subset P\subset Q$이므로 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



…… ❶

즉, $a\le-1$, $b\ge4$ …… ❷

따라서 a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 4이므로 구하는 값은

$4-(-1)=5$ …… ❸

$\therefore$ 5

채점기준	배점
❶ 주어진 조건을 이용하여 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 수직선 위에 바르게 나타내었다.	4
❷ a, b의 값의 범위를 각각 바르게 구하였다.	2
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 차를 바르게 구하였다.	2

20 해설 참조

(1) 주어진 명제의 대우는 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.' …… ❶

$n=2k-1$ (k는 자연수)로 놓으면

$$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$$

이므로 n^2도 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ······ ❷

(2) n^2이 짝수일 때, n이 홀수라고 가정하면

$n=2k-1$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다. ······ ❸

이때 $n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$

즉, n^2은 홀수이므로 n^2이 짝수라는 가정에 모순이다.

따라서 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다. ······ ❹

채점기준	배점
❶ 주어진 명제의 대우를 바르게 말하였다.	1
❷ 대우를 이용하여 주어진 명제가 참임을 바르게 증명하였다.	3
❸ 주어진 명제의 결론의 부정을 바르게 말하였다.	1
❹ 귀류법을 이용하여 주어진 명제가 참임을 바르게 증명하였다.	3

수능형 기출문제&변형문제

p. 72

01 ②

동아리 모임 A, B, C, D의 회원들의 집합을 각각 A, B, C, D라 하자.

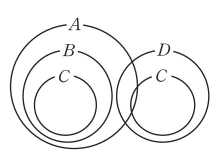
(가) $A^C \subset B^C$이므로 $B \subset A$

(나) $B \subset D^C$이므로 $B \cap D = \varnothing$

(다) $x \in C$이면 $x \in B$ 또는 $x \in D$

(라) $A \cap B \cap C \neq \varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $B \subset A$이므로 B의 회원은 모두 A의 회원이다.

ㄴ. $x \in (A \cap B \cap C)$라 하면 $x \in B$이다. 이때 $B \cap D = \varnothing$이므로 $x \notin D$이다.

즉, A, B, C 모두에 속하는 회원은 D의 회원이 아니다.

ㄷ. [반례] $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3\}$, $C=\{2, 5\}$, $D=\{4, 5\}$라 하면 $5 \in C$이지만 $5 \notin A$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

02 ④

조건 p, q, r, s를 각각 다음과 같이 정하자.

p: 수면 시간이 많다. q: 모임 시간이 이르다.

r: 대국 횟수가 적다. s: 대회 성적이 좋다.

(가) $p \Longrightarrow r$ (나) $s \Longrightarrow \sim r$ (다) $q \Longrightarrow \sim p$

이때 (나) $s \Longrightarrow \sim r$에서 $r \Longrightarrow \sim s$이므로 삼단논법에 의해 $p \Longrightarrow \sim s$이다.

ㄱ. 조건 q, s 사이의 관계를 알 수 없으므로 모임 시간과 대회 성적 사이에 관련성은 알 수 없다.

ㄴ. $p \Longrightarrow \sim s$이므로 $s \Longrightarrow \sim p$

ㄷ. 조건 q, r 사이의 관계를 알 수 없으므로 모임 시간과 대국 횟수 사이에 관련성은 알 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03 ③

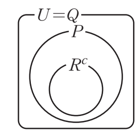
명제 $p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 $p \Longrightarrow q$, $\sim p \Longrightarrow q$

즉, $P \subset Q$, $P^C \subset Q$이므로 $Q=U$

명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우인 $\sim r \longrightarrow p$도 참이다.

$\therefore P^C \subset R$, $R^C \subset P$

이때 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $Q-R^C=U-R^C=R$

ㄴ. $P-R=P \cap R^C=R^C$

ㄷ. $Q-P=U-P=P^C$이므로 $Q-P \subset R$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 ③

명제 $\sim p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow q$가 모두 참이므로

$\sim p \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow \sim q$, $\sim r \Longrightarrow q$

ㄱ. $\sim p \Longrightarrow r$에서 $P^C \subset R$

ㄴ. $r \Longrightarrow \sim q$, $\sim r \Longrightarrow q$에서 $R=Q^C$

ㄱ에서 $P^C \subset R$이므로 $P^C \subset Q^C$, 즉 $Q \subset P$

$\therefore P \not\subset Q$

ㄷ. $Q \subset P$이므로 $P \cap Q = Q$

이때 $R=Q^C$에서 $Q=R^C$이므로 $P \cap Q = Q = R^C$

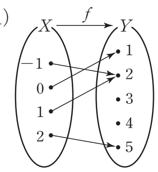
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

V 함수

(1) 함수

교과서 예제 p. 76

01 (1)



(2) 정의역: $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, 공역: $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
치역: $\{1,\ 2,\ 5\}$

02 (1)

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	2
$g(x)$	2	1	2

(2) 두 함수 f와 g는 서로 같다.

03 (1) 일대일대응이 아니다.
(2) 일대일대응이다.

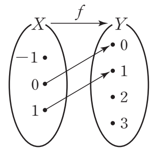
04 (1) 1 (2) 3

기출 BEST 1회 p. 78

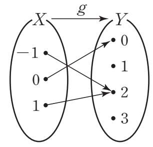
01 ④

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

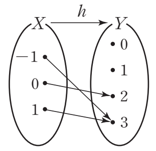
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



ㄱ. X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 ⑤

$-2<1$이므로 $f(-2)=-(-2)^2+4=0$

$2>1$이므로 $f(2)=2+1=3$

$\therefore f(-2)+f(2)=0+3=3$

$\therefore$ 3

03 ①

$f(-1)=6,\ f(0)=4,\ f(1)=4,\ f(2)=6$

이므로 치역은 $\{4,\ 6\}$

따라서 치역의 모든 원소의 합은

$4+6=10$

$\therefore$ 10

04 ⑤

주어진 식의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)+f(1)=3+3=6,\ f(2)=6$

주어진 식의 양변에 $x=1,\ y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)+f(2)=3+6=9,\ f(3)=9$

주어진 식의 양변에 $x=2,\ y=3$을 대입하면

$f(2+3)=f(2)+f(3)=6+9=15$

$\therefore f(5)=15$

$\therefore$ 15

05 ⑤

$f(-1)=g(-1)$에서 $-1=1-a+b,\ a-b=2$ …… ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $1=1+a+b,\ a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$이므로

$ab=1\times(-1)=-1$

$\therefore\ -1$

06 ③

$x^3-3x^2+11=x^2+4x-5$에서

$x^3-4x^2-4x+16=0,\ x^2(x-4)-4(x-4)=0$

$(x-4)(x^2-4)=0,\ (x+2)(x-2)(x-4)=0$

$x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

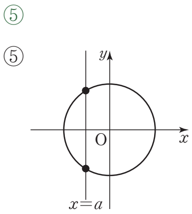
따라서 집합 X는 집합 $\{-2,\ 2,\ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$

$\therefore$ 7

07 ⑤

⑤

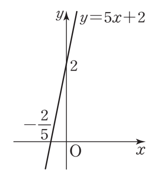


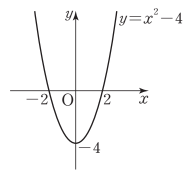
직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래

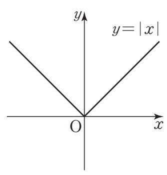
프가 아니다.

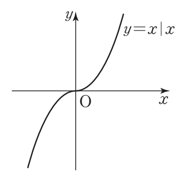
08 ③

주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 a에 대하여 직선 $y=a$와의 교점이 1개이므로 ㄱ, ㄹ이다.

09 ①

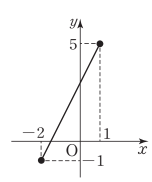
② X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

③ $f(2)=f(3)=c$에서
$x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

④ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 일대일함수이지만 치역과 공역이 다르므로 일대일대응이 아니다.

⑤ $f(1)=a$, $f(1)=b$이므로 함수가 아니다.

10 ②



$a>0$이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(1, 5)$를 지나야 하므로
$f(-2)=-1$에서 $-2a+b=-1$ …… ㉠
$f(1)=5$에서 $a+b=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$이므로

$$a-b=2-3=-1$$

$\therefore -1$

11 ③

$f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x \geq 0$일 때와 $x<0$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.
즉, $(4-a)(a+2)>0$에서

$$(a-4)(a+2)<0, \ -2<a<4$$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

$\therefore 5$

12 ②

함수 h는 항등함수이므로

$$h(2)=2,\ h(3)=3,\ h(4)=4,\ h(5)=5$$

$g(4)=f(2)+h(3)$에서 $g(4)=f(2)+3$
이때 X의 원소 중 두 수의 차가 3인 것은 2, 5뿐이므로

$$f(2)=2,\ g(4)=5$$

$g(3)=g(5)+2$에서 X의 원소 중 두 수의 차가 2인 것은 2, 4 또는 3, 5이고 $g(x)$는 일대일대응이므로

$$g(3)=4,\ g(5)=2 \qquad \therefore g(2)=3$$

$\therefore f(2)+g(2)+h(2)=2+3+2=7$

$\therefore 7$

13 ②

일대일대응의 개수: $4 \times 3 \times 2 \times 1=24$
항등함수의 개수: 1
상수함수의 개수: 4
즉, $a=24$, $b=1$, $c=4$이므로

$$a+b-c=24+1-4=21$$

$\therefore 21$

14 ②

조건 (다)에서 일대일함수이고
조건 (가), (나)에서
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 5에서 $f(1)$의 값인 2를 제외한 3개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 2개
$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 제외한 1개
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $3 \times 3 \times 2 \times 1=18$

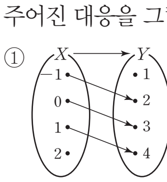
$\therefore 18$

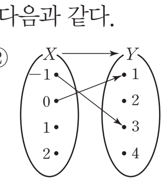
기출 BEST 2회

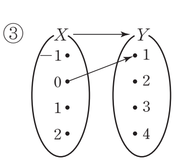
p. 81

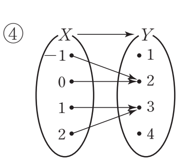
01 ④

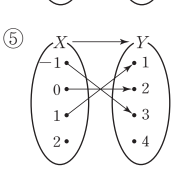
주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


① X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

② X의 원소 1, 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

③ X의 원소 -1, 1, 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

⑤ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ④이다.

02 ①

1, 9는 홀수이므로

$f(1)=3\times1+1=4$, $f(9)=3\times9+1=28$

2, 8은 짝수이므로

$f(2)=2\times2=4$, $f(8)=2\times8=16$

$\therefore f(1)+f(2)+f(8)+f(9)=4+4+16+28=52$

$\therefore$ 52

03 ④

$f(1)=1$

2, 3, 5는 소수이므로 $f(2)=f(3)=f(5)=2$

$4=2^2$이므로 $f(4)=3$

따라서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{1, 2, 3\}$이다.

$\therefore \{1, 2, 3\}$

04 ①

주어진 식의 양변에 $x=1$, $x=8$을 대입하면

$f(8)=f(1)+f(8)$, $f(1)=0$

주어진 식의 양변에 $x=8$, $y=\frac{1}{8}$을 대입하면

$f(1)=f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)$, $f\left(\frac{1}{8}\right)=-6$

주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)=2f(2)$

주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$f(8)=f(2)+f(4)=3f(2)=6$, $f(2)=2$

$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right)+f(2)=-6+2=-4$

$\therefore -4$

05 ①

$f(3)=g(3)$에서 $15=6+b$, $b=9$

즉, $g(x)=2x+9$이므로

$f(a)=g(a)$에서 $2a^2-3=2a+9$

$2a^2-2a-12=0$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$, $a=-2$ 또는 $a=3$

이때 $a\neq3$이므로 $a=-2$

$\therefore -2$

06 ①

$x^3-5x=-2x^2+6$에서

$x^3+2x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x^2+x-6)=0$

$(x+3)(x+1)(x-2)=0$

$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, -1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$

$\therefore$ 7

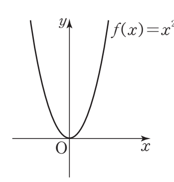
07 ⑤

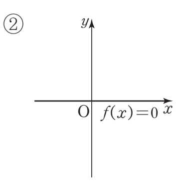
①, ③, ④ 직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

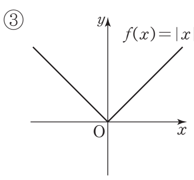
② 직선 $x=a$와 만나지 않는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

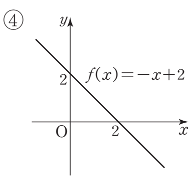
08 ④, ⑤

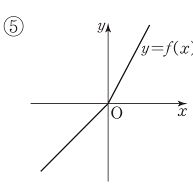
주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.

①


②


③


④


⑤


정의역의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$인 함수는 일대일함수이다.

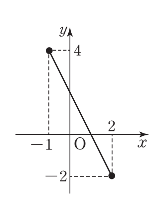
일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 a에 대하여 직선 $y=a$와의 교점이 1개이므로 ④, ⑤이다.

09 ⑤

일대일대응의 그래프는 치역의 각 원소 a에 대하여 직선 $y=a$와의 교점이 1개이고 치역과 공역이 서로 같으므로 ⑤이다.

10 ①

$a<0$이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-1, 4)$, $(2, -2)$를 지나야 하므로

$f(-1)=4$에서 $-a+b=4$ …… ㉠

$f(2)=-2$에서 $2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$이므로

$ab=-2\times2=-4$

$\therefore -4$

11 ②

$f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x\ge2$일 때와 $x<2$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(a+5)(-a-3)>0$에서

$(a+3)(a+5)<0$, $-5<a<-3$

따라서 정수 a는 -4이다.

$\therefore -4$

12 ④

함수 g는 항등함수이므로

$g(-2)=-2$, $g(0)=0$, $g(2)=2$

$f(2)+h(2)=2g(2)$에서 $f(2)+h(2)=4$

즉, $f(2)=2$, $h(2)=2$

이때 함수 h는 상수함수이므로 $h(-2)=h(0)=h(2)=2$

$f(0)+f(2)=f(-2)$에서 $f(0)+2=f(-2)$이고 함수 f는 일대일대응이므로 $f(-2)=0$, $f(0)=-2$

$\therefore f(-2)+g(2)+h(0)=0+2+2=4$

$\therefore 4$

13 ②

함수의 개수: $4^3=64$

일대일함수의 개수: $4\times3\times2=24$

상수함수의 개수: 4

즉, $a=64$, $b=24$, $c=4$이므로

$a+b+c=64+24+4=92$

$\therefore 92$

14 ③

조건 (다)에서 일대일함수이고

조건 (가), (나)에서

$f(6)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 7, 9에서 $f(2)$의 값인 6을 제외한 4개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$, $f(6)$의 값을 제외한 4개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(6)$의 값을 제외한 3개

$f(7)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 제외한 2개

$f(9)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(7)$의 값을 제외한 1개

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $4\times4\times3\times2\times1=96$

$\therefore 96$

변형유형 집중공략

p. 84

01 ④

함수 $f(x)=m|x-1|+(2-m)x+m$에 대하여

(i) $x<1$일 때,

$f(x)=m(-x+1)+2x-mx+m$
$=(-2m+2)x+2m$

(ii) $x\ge1$일 때, $f(x)=m(x-1)+2x-mx+m=2x$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases}(-2m+2)x+2m & (x<1)\\ 2x & (x\ge1)\end{cases}$

이때 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 함수 $f(x)=2x$가 증가함수이므로 함수 $f(x)=(-2m+2)x+2m$도 증가함수이어야 한다.

$-2m+2>0$, $-2m>-2$, $m<1$

$\therefore m<1$

02 ③

조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, $f: X \longrightarrow X$이므로 일대일대응이다.

조건 (나)에서 공역이 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)=7$이 되려면 다음과 같이 세 수가 있어야 한다.

$(1, 1, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$

이때 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이므로 f는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 $(1, 2, 4)$에 대응해야 한다.

(i) $f(1)$의 값이 될 수 있는 원소는 1, 2, 4의 3개

(ii) $f(2)$의 값이 될 수 있는 원소는 $f(1)$의 값을 제외한 2개

(iii) $f(3)$의 값이 될 수 있는 원소는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개

(iv) $f(4)$의 값이 될 수 있는 원소는 1, 2, 4를 제외한 2개

(v) $f(5)$의 값이 될 수 있는 원소는 1, 2, 4, $f(4)$의 값을 제외한 1개

(i)~(v)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $3\times2\times1\times2=12$

$\therefore 12$

서술형 What & How 연습문제

p. 86

01 15

$f(2)=g(2)$에서

$8+10=28+b$, $b=-10$ …… ❶

즉, $g(x)=14x-10$이므로 $f(a)=g(a)$에서

$2a^2+10=14a-10$, $2a^2-14a+20=0$, $a^2-7a+10=0$

$(a-2)(a-5)=0$, $a=2$ 또는 $a=5$

이때 $a\neq2$이므로 $a=5$ …… ❷

$\therefore a-b=5-(-10)=15$ …… ❸

$\therefore 15$

채점기준	배점
❶ 상수 b의 값을 바르게 구하였다.	2
❷ 상수 a의 값을 바르게 구하였다.	3
❸ $a-b$의 값을 바르게 구하였다.	2

02 $k<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $k>\dfrac{3}{2}$

(i) $\dfrac{3}{2}x+1\geq0$, 즉 $x\geq-\dfrac{2}{3}$일 때

$$f(x)=\frac{3}{2}x+1-kx+3=\left(\frac{3}{2}-k\right)x+4 \quad \cdots\cdots ❶$$

(ii) $\dfrac{3}{2}x+1<0$, 즉 $x<-\dfrac{2}{3}$일 때

$$f(x)=-\frac{3}{2}x-1-kx+3=-\left(\frac{3}{2}+k\right)x+2 \quad \cdots\cdots ❷$$

함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq-\dfrac{2}{3}$일 때와 $x<-\dfrac{2}{3}$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다. …… ❸

즉, $-\left(\dfrac{3}{2}-k\right)\left(\dfrac{3}{2}+k\right)>0$에서

$$\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)>0,\ k<-\frac{3}{2} \text{ 또는 } k<\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ❹$$

$\therefore k<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $k>\dfrac{3}{2}$

채점기준	배점
❶ $\frac{3}{2}x+1\geq0$일 때, $f(x)$의 식을 바르게 정리하였다.	2
❷ $\frac{3}{2}x+1<0$일 때, $f(x)$의 식을 바르게 정리하였다.	2
❸ 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 조건을 바르게 제시하였다.	2
❹ 실수 k의 값의 범위를 바르게 구하였다.	1

실전문제 1회

p. 88

01 ④

④ X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.

02 ①

$y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$라 하면

$g(x)=f(x-2)+1$, $f(x-2)=g(x)-1$

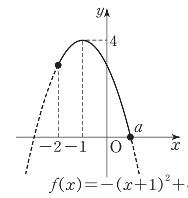
$x=-1$을 대입하면 $f(-3)=g(-1)-1=1-1=0$

$x=3$을 대입하면 $f(1)=g(3)-1=4-1=3$

$\therefore f(-3)+f(1)=0+3=3$

$\therefore 3$

03 ⑤



$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고

$-2\leq x\leq a$에서 $f(x)$의 최댓값은 b이므로

$b=4$

또, $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$f(a)=-(a+1)^2+4=0$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$a=-3$ 또는 $a=1$

이때 $a>-2$이므로 $a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

$\therefore 5$

04 ⑤

$f(34)=f\left(3\times\dfrac{34}{3}\right)=3f\left(\dfrac{34}{3}\right)$

$f\left(\dfrac{34}{3}\right)=f\left(3\times\dfrac{34}{9}\right)=3f\left(\dfrac{34}{9}\right)$

$f\left(\dfrac{34}{9}\right)=f\left(3\times\dfrac{34}{27}\right)=3f\left(\dfrac{34}{27}\right)$

즉, $f(34)=3f\left(\dfrac{34}{3}\right)=3\times3f\left(\dfrac{34}{9}\right)$

$=3\times3\times3f\left(\dfrac{34}{27}\right)=27f\left(\dfrac{34}{27}\right)$

$=27\times\left\{\left|\dfrac{34}{27}-1\right|+2\right\}=27\times\dfrac{61}{27}=61$

$\therefore 61$

05 ③

$f(x)=g(x)$이어야 하므로

(i) $x\geq0$일 때, $x+1=-x^2+3x+1$

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$, $x=0$ 또는 $x=2$

이때 $x\geq0$이므로 $x=0$ 또는 $x=2$

(ii) $x<0$일 때, $x+1=-x-1$

$2x=-2$, $x=-1$

이때 $x<0$이므로 $x=-1$

(i), (ii)에 의하여 집합 X는 $\{-1, 0, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$

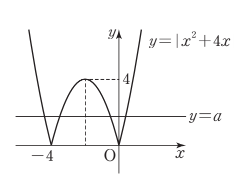
$\therefore 7$

06 ④

ㄱ, ㄷ. 직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

07 ⑤



$y=|x^2+4x|$의 그래프는 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수가 4이므로

$0<a<4$

즉, $\alpha=0$, $\beta=4$이므로

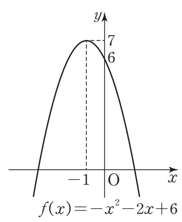
$\alpha+\beta=4$

$\therefore$ 4

08 ①

$f(x)=-x^2-2x+6=-(x+1)^2+7$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 f가 일대일함수이므로 증가 또는 감소함수의 그래프가 되어야 한다.



즉, $a\le-1$ …… ㉠

또, $f(a)\le-a$이어야 하므로

$-a^2-2a+6\le-a$, $a^2+a-6\ge0$

$(a+3)(a-2)\ge0$

$a\le-3$ 또는 $a\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통 부분을 구하면 $a\le-3$이므로

실수 a의 최댓값은 -3이다.

$\therefore$ -3

09 ①

$f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x\ge0$일 때와 $x<0$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $a^2-3a-4<0$에서

$(a+1)(a-4)<0$, $-1<a<4$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

$\therefore$ 4

10 ④

(i) $x\ge0$일 때,

$f(x)=3x+ax+2=(a+3)x+2$

(ii) $x<0$일 때,

$f(x)=-3x+ax+2=(a-3)x+2$

함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\ge0$일 때와 $x<0$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(a+3)(a-3)>0$에서

$a<-3$ 또는 $a>3$

이므로 실수 a의 값이 아닌 것은 ④ 3이다.

11 ⑤

$f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.

(i) $x\ge0$일 때,

$x^2-2x=x$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$, $x=0$ 또는 $x=3$

이때 $x\ge0$이므로 $x=0$ 또는 $x=3$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+2x=x$, $x^2+x=0$, $x(x+1)=0$, $x=-1$ 또는 $x=0$

이때 $x<0$이므로 $x=-1$

(i), (ii)에 의하여 $X=\{-1, 0, 3\}$이므로

$a+b+c=2$

$\therefore$ 2

12 ①

$f(5)-g(9)=6$이고 X의 원소 중 두 수의 차가 6인 것은 3, 9뿐이므로

$f(5)=9$, $g(9)=3$

$f(9)-f(7)=4$에서 X의 원소 중 두 수의 차가 4인 것은 3, 7 또는 5, 9이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(9)=7$, $f(7)=3$

즉, $f(3)=5$, $g(x)=3$이므로

$f(7)\times g(5)=3\times3=9$

$\therefore$ 9

13 ④

ㄴ. X에서 Y로의 상수함수의 개수는 4이다.

ㄷ. X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 $4\times3\times2\times1=24$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 ⑤

조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이다.

조건 (나)에서 $f(1)\ne2$, $f(2)\ne5$

(i) $f(1)=5$인 경우

$f(2)$의 값이 될 수 있는 원소는 5를 제외한 5개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 원소는 5, $f(2)$의 값을 제외한 4개

따라서 함수의 개수는 $5\times4=20$

(ii) $f(1)$의 값이 1, 3, 4, 6 중 하나인 경우

$f(2)$의 값이 될 수 있는 원소는 5, $f(1)$의 값을 제외한 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 원소는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 4개

따라서 함수의 개수는 $4\times4\times4=64$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $20+64=84$

$\therefore$ 84

[다른 풀이]

구하는 함수의 개수는 일대일함수의 개수에서 $f(1)=2$ 또는 $f(2)=5$인 경우의 함수의 개수를 빼면 된다.

일대일함수의 개수는 $6\times5\times4=120$

(i) $f(1)=2$인 경우

$f(2)$, $f(3)$의 값이 될 수 있는 원소는 각각 5개, 4개이므로 함수의 개수는 $5\times4=20$

(ii) $f(2)=5$인 경우

$f(1)$, $f(3)$의 값이 될 수 있는 원소는 각각 5개, 4개이므로 함수의 개수는 $5\times4=20$

(iii) $f(1)=2$, $f(2)=5$인 경우

$f(3)$의 값이 될 수 있는 원소는 4개

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$120-(20+20-4)=84$

$\therefore$ 84

15 ③

(i) $n=3$일 때,

두 집합 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, $Y=\{y_1,\ y_2,\ y_3\}$에 대하여

X에서 Y로의 함수의 개수: $3^3=27$

X에서 Y로의 상수함수의 개수: 3

$\therefore f(3)=27-3=24$

(ii) $n=5$일 때,

두 집합 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$, $Y=\{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5\}$에 대하여 x_2가 y_2에 대응되지 않는 일대일대응의 개수는 X에서 Y로의 일대일대응의 개수에서 x_2가 y_2에 대응되는 일대일대응의 개수를 빼면 된다.

X에서 Y로의 일대일대응의 개수: $5\times4\times3\times2\times1=120$

x_2가 y_2에 대응되는 일대일대응의 개수: $4\times3\times2\times1=24$

$\therefore g(5)=120-24=96$

(i), (ii)에 의하여 $f(3)+g(5)=24+96=120$

$\therefore$ 120

16 ②

$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$f(a)+2f\left(\frac{1}{a}\right)=3a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$의 양변에 $x=\frac{1}{a}$을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{a}\right)+2f(a)=\frac{3}{a} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-2\times$㉡을 계산하면

$$f(a)-4f(a)=3a-\frac{6}{a},\ -3f(a)=3a-\frac{6}{a}$$

$$f(a)=-a+\frac{2}{a}$$

즉, $f(x)=-x+\frac{2}{x}$

이때 $f(x)=f(-x)$이고 $f(-x)=x-\frac{2}{x}$이므로

$$-x+\frac{2}{x}=x-\frac{2}{x},\ 2x=\frac{4}{x}$$

$$x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은 $-\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-2$

$\therefore -2$

17 ⑤

$f(n)$은 원소 n을 최소의 원소로 갖는 집합 X의 부분집합의 개수이므로 1부터 n까지의 원소를 제외한 $(6-n)$개의 원소로 이루어진 집합 X의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore f(n)=2^{6-n}$

ㄱ. $f(4)=2^{6-4}=2^2=4$

ㄴ. $f(a)=2^{6-a}$, $2f(b)=2\times2^{6-b}=2^{7-b}$

이때 $b=a+1$이므로 $2^{7-b}=2^{7-(a+1)}=2^{6-a}$

$\therefore f(a)=2f(b)$

ㄷ. $f(4)+f(5)+f(6)=4+2+1=7$

$f(3)-1=8-1=7$

이므로 $f(4)+f(5)+f(6)=f(3)-1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18 (1) 7 (2) 10

(1) $23=5\times4+3$이므로 …… ❶

$f(23)=f(5\times4+3)=f(4)+3$

$4=5\times0+4$이므로

$f(4)=f(5\times0+4)=f(0)+4=4$

$\therefore f(23)=f(4)+3=4+3=7$ …… ❷

$\therefore$ 7

(2) $98=5\times19+3$이므로 …… ❸

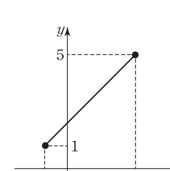
$$\begin{aligned}f(98)&=f(5\times19+3)=f(19)+3\\&=f(5\times3+4)+3=f(3)+4+3\\&=f(5\times0+3)+7\\&=f(0)+3+7=10\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ❹$$

$\therefore$ 10

채점기준	배점
❶ 23을 $5n+p$ 꼴로 바르게 나타내었다.	1
❷ $f(23)$의 값을 바르게 구하였다.	2
❸ 98을 $5n+p$ 꼴로 바르게 나타내었다.	1
❹ $f(98)$의 값을 바르게 구하였다.	2

19 $(1,\ 2)$, $(-1,\ 4)$

(i) $a>0$일 때, 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다. 즉, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 5)$를 지나



야 하므로 ······ ❶

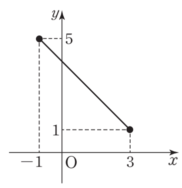
$f(-1)=1$에서 $-a+b=1$

$f(3)=5$에서 $3a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$이므로

$(a, b)=(1, 2)$ ······ ❷

(ii) $a<0$일 때, 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다. 즉, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-1, 5)$, $(3, 1)$을 지나야 하므로 ······ ❸



$f(-1)=5$에서 $-a+b=5$

$f(3)=1$에서 $3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$이므로

$(a, b)=(-1, 4)$ ······ ❹

(i), (ii)에 의하여 $(1, 2)$, $(-1, 4)$

$\therefore$ $(1, 2)$, $(-1, 4)$

채점기준	배점
❶ $a>0$일 때, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 지나는 두 점의 좌표를 바르게 말하였다.	2
❷ $a>0$일 때, 순서쌍 (a, b)를 바르게 구하였다.	2
❸ $a<0$일 때, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 지나는 두 점의 좌표를 바르게 말하였다.	2
❹ $a<0$일 때, 순서쌍 (a, b)를 바르게 구하였다.	2

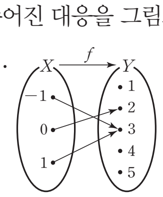
실전문제 2회

p. 92

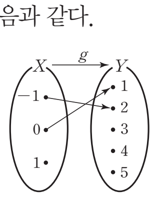
01 ③

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

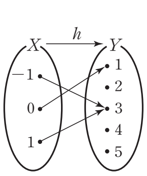
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



ㄴ. X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 ③

1은 유리수이므로 $f(1)=1-2=-1$

$3-\sqrt{5}$는 무리수이므로

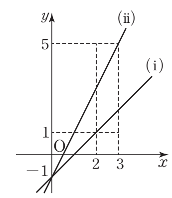
$f(3-\sqrt{5})=-(3-\sqrt{5})+1=-2+\sqrt{5}$

$\therefore f(1)-f(3-\sqrt{5})=-1-(-2+\sqrt{5})=1-\sqrt{5}$

$\therefore 1-\sqrt{5}$

03 ③

일차함수 $y=mx-1$의 그래프는 m의 값에 관계없이 점 $(0, -1)$을 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x|2\le x\le 3\}$, 공역이 $\{y|1\le y\le 5\}$이려면 직선 $y=mx-1$의 기울기가 그림과 같이 직선 (i)의 기울기보다 크거나 같고 직선 (ii)의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 (i)은 두 점 $(0, -1)$, $(2, 1)$을 지나는 직선이므로 기울기는 1이다.

직선 (ii)는 두 점 $(0, -1)$, $(3, 5)$를 지나는 직선이므로 기울기는 2이다.

따라서 m의 값의 범위는 $1\le m\le 2$

즉, $a=1$, $b=2$이므로 $a+b=1+2=3$

$\therefore 3$

04 ②

① $f(6)=f(2\times 3)=f(2)+f(3)=5$

② $f(10)=f(2\times 5)=f(2)+f(5)=7$

③ 11은 소수이므로 $f(11)=11$

④ $f(25)=f(5\times 5)=f(5)+f(5)=10$

⑤ $f(30)=f(5\times 6)=f(5)+f(6)=5+5=10$

따라서 옳은 것은 ②이다.

05 ①

공집합이 아닌 집합 X의 부분집합의 개수가 3이 되려면 집합 X의 원소의 개수는 2이어야 한다.

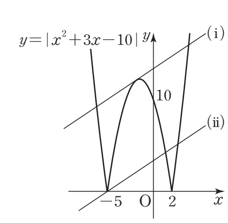
즉, 방정식 $2x^2-3x+4=-x+k$, 즉 $2x^2-2x+4-k=0$의 해가 2개이어야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(4-k)>0,\ 2k-7>0,\ k>\frac{7}{2}$$

$\therefore k>\frac{7}{2}$

06 ④

함수 $y=|x^2+3x-10|$의 그래프와 직선 $y=2x+k$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나려면 직선 $y=2x+k$의 y절편이 그림과 같이 직선 (i)의 y절편보다 작고 직선 (ii)의 y절편보다 커야 한다.



따라서 직선 $y=2x+k$의 그래프가

(ⅰ) 함수 $y=-x^2-3x+10$의 그래프와 접할 때,

이차방정식 $2x+k=-x^2-3x+10$, 즉 $x^2+5x+k-10=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$$D=5^2-4(k-10)=0,\ -4k+65=0,\ k=\frac{65}{4}$$

(ⅱ) 점 $(-5,\ 0)$을 지날 때,

$$0=-10+k,\ k=10$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $10<k<\frac{65}{4}$이므로 정수 k는 11, 12, 13, 14, 15, 16의 6개이다.

∴ 6

07 ⑤

$f(x)$가 일대일대응이고, $f(3)+f(4)=14$에서 Y의 원소 중 두 수의 합이 14인 것은 6, 8이므로

$$f(3)=6,\ f(4)=8 \text{ 또는 } f(3)=8,\ f(4)=6$$

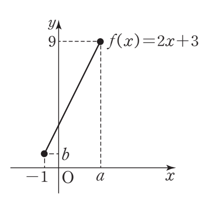
즉, $f(1)$과 $f(5)$의 값은 Y의 원소 중 6, 8, 10을 제외한 7 또는 9이므로 $f(1)=7$, $f(5)=9$ 또는 $f(1)=9$, $f(5)=7$

$\therefore f(1)+f(5)=7+9=16$

∴ 16

08 ①

$f(x)$가 일대일대응이므로 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(a)=9$에서 $2a+3=9$, $2a=6$, $a=3$

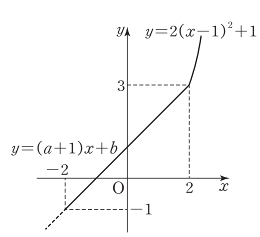
$f(-1)=b$에서 $-2+3=1=b$

$\therefore a+b=3+1=4$

∴ 4

09 ②

$x\geq 2$에서 $f(x)$는 증가함수이므로 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $f(x)=(a+1)x+b$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



즉, $f(x)=(a+1)x+b$의 그래프는 두 점 $(-2,\ -1)$, $(2,\ 3)$을 지나는 직선이므로

$$y=x+1$$

이때 $a+1=1$, $b=1$에서 $a=0$, $b=1$이므로

$$a+5b=0+5\times 1=5$$

∴ 5

10 ④

$f(x)$가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$이므로

$$x^3+2x^2-2=x,\ x^3+2x^2-x-2=0$$

$$x^2(x+2)-(x+2)=0,\ (x+2)(x^2-1)=0$$

$$(x+2)(x+1)(x-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 집합 X는 집합 $\{-2,\ -1,\ 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$

∴ 7

11 ①

함수 f가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=a$ $(a\in Y)$라 하자.

$f(1)+f(2)+f(3)$의 최댓값은 $a=7$일 때이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)=7+7+7=21$$

$f(1)+f(2)+f(3)$의 최솟값은 $a=1$일 때이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)=1+1+1=3$$

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $21-3=18$

∴ 18

12 ②

$f(4)\geq 4$이므로 $f(4)$가 될 수 있는 값은 4의 1개

$f(3)\geq 3$이므로 $f(3)$이 될 수 있는 값은 3, 4의 2개

$f(2)\geq 2$이므로 $f(2)$가 될 수 있는 값은 2, 3, 4의 3개

$f(1)\geq 1$이므로 $f(1)$이 될 수 있는 값은 1, 2, 3, 4의 4개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$1\times 2\times 3\times 4=24$$

∴ 24

13 ④

$f(-x)=-f(x)$에서

$$f(2)=-f(-2),\ f(1)=-f(-1),\ f(0)=-f(0)$$

즉, $f(0)=0$이고 $f(-2)$와 $f(-1)$의 값에 따라 $f(2)$와 $f(1)$의 값이 결정된다.

이때 $f(2)$와 $f(1)$이 될 수 있는 값은 각각 -2, -1, 0, 1, 2의 5가지씩이므로 구하는 함수 f의 개수는

$$5\times 5=25$$

∴ 25

14 ①, ②

③ X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$

④ X에서 X로의 항등함수의 개수는 1이다.

⑤ X에서 X로의 상수함수의 개수는 5이다.

15 ③

$f(x-2)=f(x+4)$에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$$f(x)=f(x+6)$$

즉, $f(-5)=f(1)=f(7)=\cdots=f(67)=1$

$$f(2)=f(8)=7$$

$\therefore f(1)+f(8)+f(67)=1+7+1=9$

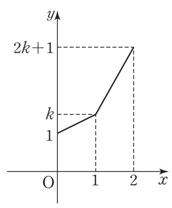
$\therefore 9$

16 ②

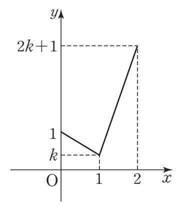
$f(x)=\begin{cases}(k-1)x+1 & (0\le x<1)\\ (k+1)x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ 에서

$f(0)=1$, $f(1)=k$, $f(2)=2k+1$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $k\ge 1$일 때,



(ii) $0<k<1$일 때,



(i) 치역이 $1\le y\le 2k+1$이므로

$a=1$, $a+2=2k+1$

두 식을 연립하여 풀면 $k=1$

(ii) 치역이 $k\le y\le 2k+1$이므로

$a=k$, $a+2=2k+1$

두 식을 연립하여 풀면 $k=1$

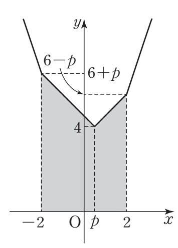
이때 $0<k<1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $k=1$

$\therefore 1$

17 ②

$f(x)==\begin{cases}-3x+p & (x<-2)\\ -x+p+4 & (-2\le x<p)\\ x-p+4 & (p\le x<2)\\ 3x-p & (x\ge 2)\end{cases}$



에서 $f(-2)=6+p$, $f(p)=4$, $f(2)=6-p$이므로 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다. 즉, 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\{(4+6+p)(p+2)+(6-p+4)(2-p)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(p+10)(p+2)+(p-10)(p-2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(2p^2+40)=p^2+20$$

이때 $0\le p<2$이므로 구하는 도형의 넓이의 최솟값은 $p=0$일 때 20이다.

$\therefore 20$

18 ②

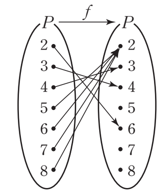
$3^4<100<3^5$이므로 $n(A_3)=4$

$4^3<100<4^4$이므로 $n(A_4)=3$

$5^2<100<5^3$, $6^2<100<6^3$, $7^2<100<7^3$, $8^2<100<8^3$이므로

$n(A_5)=n(A_6)=n(A_7)=n(A_8)=2$

집합 $P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에서 P로의 함수 f는 그림과 같다.



즉, $f(2)=6$, $f(6)=2$이고 $f(3)=4$, $f(4)=3$이다. 이때 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 함수 f가 일대일대응이 되려면 $\{2, 6\}\subset X$ 또는 $\{3, 4\}\subset X$이어야 한다.

따라서 구하는 집합 X는

$\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$

의 3개이다.

$\therefore 3$

19 -3

$f(1)=g(1)$에서

$3+a=2+b+4$, $a-b=3$ …… ㉠ …… ❶

$f(2)=g(2)$에서

$6+a=8+2b+4$, $a-2b=6$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$이므로

$a+b=0+(-3)=-3$ …… ❸

$\therefore -3$

채점기준	배점
❶ $f(1)=g(1)$에서 a, b의 관계식을 바르게 구하였다.	2
❷ $f(2)=g(2)$에서 a, b의 관계식을 바르게 구하였다.	2
❸ $a-b$의 값을 바르게 구하였다.	2

20 10

$f(1)=5h(5)$이고 집합 X에서 두 수의 비가 5가 되는 수는 1, 5이므로 $f(1)=5$, $h(5)=1$ …… ❶

함수 h는 상수함수이므로 $h(1)=h(3)=h(5)=1$이고

$f(5)=h(3)+2$에서

$f(5)=3$ …… ❷

즉, $f(3)=1$이고 함수 g는 항등함수이므로 $g(3)=3$이다. …… ❸

$\therefore f(3)+2g(3)+3h(1)=1+2\times 3+3\times 1=10$ …… ❹

$\therefore 10$

채점기준	배점
❶ $f(1)$, $h(5)$의 값을 각각 바르게 구하였다.	2
❷ $f(5)$의 값을 바르게 구하였다.	2
❸ $f(3)$, $g(3)$의 값을 각각 바르게 구하였다.	2
❹ $f(3)+2g(3)+3h(1)$의 값을 바르게 구하였다.	1

수능형 기출문제 &변형문제 p. 96

01 ③

함수 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로

4가 아닌 집합 Y의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(1)=a$, $f(3)=b$로 놓으면

$f(1)+f(3)$의 최댓값은 $a+b$의 최댓값과 같다.

이때 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$인 경우 $a+b$가 최대이므로 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다.

$\therefore 5$

02 ⑤

집합 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=c$로 놓으면 $f(1)+f(2)+f(3)$의 최댓값은 $a+b+c$의 최댓값과 같다.

이때 $a=b=c=4$인 경우 $a+b+c$가 최대이므로

$f(1)+f(2)+f(3)$의 최댓값은 12이다.

$\therefore 12$

03 7

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로

집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 집합 X의 원소 n이 한 개 존재한다.

이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m으로 놓으면

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$$
$$=36+n-m$$

조건 (나)에서

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$$
$$=42$$

즉, $36+n-m=42$이므로 $n-m=6$

(i) $n=8$, $m=2$일 때

함수 f의 치역이 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=7$, $m=1$일 때

함수 f의 치역이 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $n=7$

$\therefore 7$

04 ④

함수 $f: X \longrightarrow X$가 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족시키므로

$$f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$$
$$f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)$$
$$f(4)=f(1)+f(3)=4f(1)$$
$$f(5)=f(1)+f(4)=5f(1)$$

이때 $f(5)\in X$이고 $f(5)\le 5$이므로

$$f(5)=5f(1)\le 5,\ f(1)\le 1$$

즉, $f(1)=1$이므로

$$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=4, f(5)=5$$

$\therefore f(2)+f(4)+f(5)=2+4+5=11$

$\therefore 11$

(2) 합성함수와 역함수

교과서 예제 p. 100

01 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-3)=12$ $\quad\therefore 12$

(2) $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(4)=0$ $\quad\therefore 0$

(3) $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-2)=-6$ $\quad\therefore -6$

(4) $(g\circ g)(-2)=g(g(-2))=g(7)=52$ $\quad\therefore 52$

02 $(f\circ g)(x)=3(x^2-1)+2=3x^2-1$이므로

$((f\circ g)\circ h)(x)=3(-x)^2-1=3x^2-1$

$(g\circ h)(x)=(-x)^2-1=x^2-1$이므로

$(f\circ(g\circ h))(x)=3(x^2-1)+2=3x^2-1$

따라서 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$이다.

03 (1) $y=-x+1$에서 $x=-y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x+1$

$\therefore y=-x+1$

(2) $y=\frac{1}{4}x-1$에서 $\frac{1}{4}x=y+1$, $x=4y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4x+4$

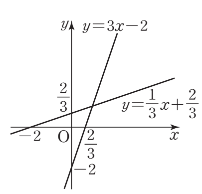
$\therefore y=4x+4$

04 (1) $y=3x-2$에서

$3x=y+2$, $x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

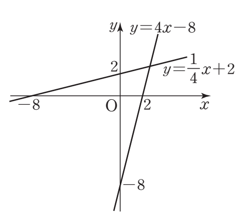


(2) $y=\frac{1}{4}x+2$에서

$\frac{1}{4}x=y-2$, $x=4y-8$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4x-8$



05 $(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=(g\circ f)^{-1}(3)$

이므로 $(g\circ f)^{-1}(3)=a$라 하면 $(g\circ f)(a)=3$

$3a-5=3$, $3a=8$, $a=\frac{8}{3}$

$\therefore \frac{8}{3}$

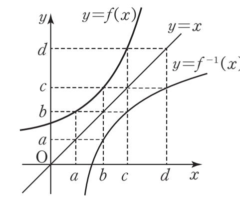
06 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(-2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(-2)=g^{-1}(-2)$

이므로 $g^{-1}(-2)=a$라 하면 $g(a)=-2$

$-2a+3=-2$, $-2a=-5$, $a=\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{5}{2}$

07 그림에서



(1) $f(c)=d$

$\therefore d$

(2) $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

$\therefore c$

(3) $f^{-1}(d)=c$

$\therefore c$

(4) $(f\circ f\circ f^{-1})(b)=f(b)=c$

$\therefore c$

(5) $(f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)=a$

$\therefore a$

기출 BEST 1회 p. 104

01 ④

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(4)=9$

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(3)=10$

$\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(-2)=9+10=19$

$\therefore 19$

02 ④

1은 유리수이므로 $f(1)=3$

$(f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))$에서

$\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$은 유리수이므로 $f\left(\frac{1}{4}\right)=2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$

$\therefore f(1)+(f\circ f)(\sqrt{3})=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore \frac{9}{2}$

03 ③

$f(3)=1$, $f(g(3))=1$이므로 $g(3)=3$

$g(4)=2$, $g(f(1))=2$이므로 $f(1)=4$

즉, $f(1)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=3$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(2)=2$

$\therefore f(2)+g(3)=2+3=5$

$\therefore 5$

04 ①

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$

$=2(ax+b)+1$

$=2ax+2b+1$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$
$=a(2x+1)+b$
$=2ax+a+b$

$f \circ g=g \circ f$이므로 $2ax+2b+1=2ax+a+b$

이때 $2b+1=a+b$, $b=a-1$이므로

$g(x)=ax+a-1=a(x+1)-1$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다. 즉, $p=-1$, $q=-1$이므로

$p+q=-1+(-1)=-2$

$\therefore\ -2$

05 ⑤

$f(h(x))=g(x)$에서 $f(h(-5))=g(-5)=11$

$h(-5)=a$라 하면 $f(a)=11$이므로

$\frac{1}{2}a+3=11$, $\frac{1}{2}a=8$, $a=16$

$\therefore\ 16$

[다른 풀이 1]

$h(x)=ax+b\ (a\neq0)$로 놓으면

$(f \circ h)(x)=f(h(x))=f(ax+b)=\frac{1}{2}(ax+b)+3$
$=\frac{1}{2}ax+\frac{b}{2}+3$

$f \circ h=g$이므로 $\frac{1}{2}ax+\frac{b}{2}+3=-2x+1$

즉, $\frac{1}{2}a=-2$, $\frac{b}{2}+3=1$이므로

$a=-4$, $b=-4$

따라서 $h(x)=-4x-4$이므로

$h(-5)=-4\times(-5)-4=16$

$\therefore\ 16$

[다른 풀이 2]

함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하므로 $(f \circ h)(x)=g(x)$에서

$h(x)=(f^{-1} \circ g)(x)$

$\therefore\ h(-5)=f^{-1}(g(-5))=f^{-1}(11)$

이때 $f^{-1}(11)=a$라 하면 $f(a)=11$이므로

$\frac{1}{2}a+3=11$, $\frac{1}{2}a=8$, $a=16$

$\therefore\ 16$

06 ③

$((f \circ g) \circ h)(a)=(f \circ (g \circ h))(a)$
$=f(2a-5)=3(2a-5)+1$
$=6a-14$

이때 $((f \circ g) \circ h)(a)=4$이므로

$6a-14=4$, $6a=18$, $a=3$

$\therefore\ 3$

07 ⑤

$(f \circ f \circ f)(42)=f(f(f(42)))=f\left(f\left(\frac{42}{2}\right)\right)$
$=f(f(21))=f\left(\frac{21+1}{2}\right)$
$=f(11)=\frac{11+1}{2}=6$

$\therefore\ 6$

08 ⑤

(i) $f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$

⋮

즉, $f^n(1)$은 2, 3, 4, 1이 순서대로 반복된다.

이때 $127=4\times31+3$이므로

$f^{127}(1)=f^3(1)=4$

(ii) (i)과 같은 방법으로 하면

$f^n(4)$는 1, 2, 3, 4가 순서대로 반복된다.

이때 $212=4\times52+4$이므로

$f^{212}(4)=f^4(4)=4$

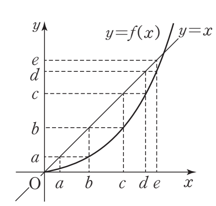
(i), (ii)에 의하여

$f^{127}(1)+f^{212}(4)=4+4=8$

$\therefore\ 8$

09 ②

직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 그림과 같다.



$\therefore\ (f \circ f \circ f)(e)=f(f(f(e)))$
$=f(f(d))$
$=f(c)=b$

$\therefore\ b$

10 ④

$f(1)=1$에서 $a+b=1$ ...... ㉠

$f^{-1}(5)=3$에서 $f(3)=5$이므로

$3a+b=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

즉, $f(x)=2x-1$이므로

$f(4)=2\times4-1=7$

$\therefore\ 7$

11 ③

$x\geq 1$일 때 $f(x)=x+5\geq 6$

$x<1$일 때 $f(x)=2x+4<6$

$f^{-1}(8)=a$라 하면 $f(a)=8$이므로

$a+5=8$, $a=3$

$\therefore f(-2)+f^{-1}(8)=0+3=3$

$\therefore 3$

12 ④

(i) $x\geq 0$일 때,

$f(x)=ax+(a-4)x-2=(2a-4)x-2$

(ii) $x<0$일 때,

$f(x)=-ax+(a-4)x-2=-4x-2$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 한다. 따라서 $x\geq 0$일 때와 $x<0$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $2a-4<0$, $2a<4$, $a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

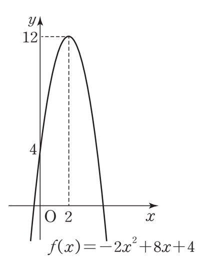
$\therefore 1$

13 ①

$f(x)=-2x^2+8x+4$

$=-2(x-2)^2+12$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 하므로 함수 f의 그래프가 증가 또는 감소함수의 그래프이어야 한다.



즉, $k\leq 2$

또, $f(k)=k$이어야 하므로

$-2k^2+8k+4=k$, $2k^2-7k-4=0$

$(2k+1)(k-4)=0$, $k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=4$

이때 $k\leq 2$이므로 $k=-\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}$

14 ①

$y=-2x+a$라 하면 $2x=-y+a$, $x=-\frac{1}{2}y+\frac{a}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

이때 $-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}=bx+5$이므로 $-\frac{1}{2}=b$, $\frac{a}{2}=5$

즉, $a=10$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$ab=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$

$\therefore -5$

15 ③

$2x-1=t$로 놓으면 $2x=t+1$, $x=\frac{t+1}{2}$

$\therefore f(t)=3\times\frac{t+1}{2}-4=\frac{3}{2}t-\frac{5}{2}$

$f^{-1}(14)=a$라 하면 $f(a)=14$이므로

$\frac{3}{2}a-\frac{5}{2}=14$, $3a-5=28$, $3a=33$, $a=11$

$\therefore 11$

16 ①

$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$(f\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(f^{-1}(1))$

그림에서 $f(3)=1$이므로 $f^{-1}(1)=3$

또, $g(1)=3$이므로 $g^{-1}(f^{-1}(1))=g^{-1}(3)=1$

$\therefore g^{-1}(3)+(f\circ g)^{-1}(1)=1+1=2$

$\therefore 2$

17 ③

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(-1)$

$=(g^{-1}\circ f)(-1)$

$=g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(-3)$

$g^{-1}(-3)=a$라 하면 $g(a)=-3$이므로

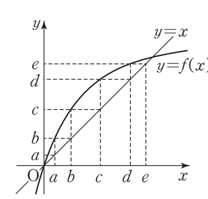
$3a+1=-3$, $3a=-4$, $a=-\frac{4}{3}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-1)=-\frac{4}{3}$

$\therefore -\frac{4}{3}$

18 ①

직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 그림과 같다.



이때 $f^{-1}(d)=k$라 하면 $f(k)=d$이므로 $k=c$, 즉 $f^{-1}(d)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로

$l=b$, 즉 $f^{-1}(c)=b$

$f^{-1}(b)=m$이라 하면 $f(m)=b$이므로 $m=a$

즉, $f^{-1}(b)=a$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

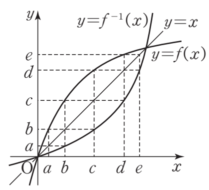
$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)=a$

$\therefore a$

[다른 풀이]

직선 $y=x$를 이용하여 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

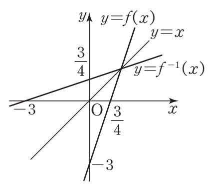
$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)=a$

$\therefore a$

19 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로

$4x-3=x$, $3x=3$, $x=1$

따라서 교점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

즉, $a=1$, $b=1$이므로

$a+b=1+1=2$

$\therefore 2$

20 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

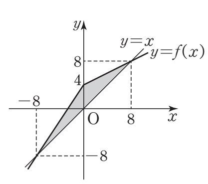
(i) $x<0$일 때,

$\frac{3}{2}x+4=x$, $\frac{1}{2}x=-4$, $x=-8$

(ii) $x\geq 0$일 때,

$\frac{1}{2}x+4=x$, $\frac{1}{2}x=4$, $x=8$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



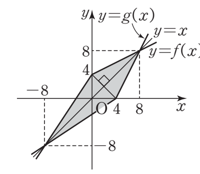
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2}\times 4\times 8+\frac{1}{2}\times 4\times 8\right)=2\times 32=64$$

$\therefore 64$

[다른 풀이]

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times\sqrt{(8+8)^2+(8+8)^2}\times\sqrt{(4-0)^2+(0-4)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 16\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=64$$

$\therefore 64$

기출 BEST 2회

p. 108

01 ①

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-2)=-4$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=7$

$\therefore (f\circ g)(1)+(g\circ f)(2)=-4+7=3$

$\therefore 3$

02 ③

(i) x가 유리수일 때,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)=x$

(ii) x가 무리수일 때, $2-x$도 무리수이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2-x)$

$=2-(2-x)=x$

(i), (ii)에 의하여 $(f\circ f)(x)=x$

$\therefore x$

03 ③

$f(4)-f(3)=2$이고 X의 원소 중 두 수의 차가 2인 것은 1, 3 또는 2, 4이다.

(i) $f(3)=1$, $f(4)=3$일 때,

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=2$에서 $f(1)=a$라 하면 $f(a)=2$

이때 f는 일대일대응이므로 조건을 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(ii) $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때,

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=2$에서 $f(1)=b$라 하면 $f(b)=2$

즉, $b=3$이므로 $f(1)=3$, $f(2)=1$

(i), (ii)에 의하여

$(f\circ f)(3)+f(4)=f(f(3))+f(4)$

$=f(2)+f(4)=1+4=5$

$\therefore 5$

04 ①

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-5)$
$\qquad\qquad =a(2x-5)+b=2ax-5a+b$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$
$\qquad\qquad =2(ax+b)-5=2ax+2b-5$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $2ax-5a+b=2ax+2b-5$

즉, $-5a+b=2b-5$에서 $b=-5a+5$이므로

$f(x)=ax-5a+5=a(x-5)+5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 5)$를 지난다.

$\therefore (5, 5)$

05 ①

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x-5)$
$\qquad\qquad =a(x-5)+b=ax-5a+b$

$h\circ f=g$이므로 $ax-5a+b=-4x+2$

즉, $a=-4$, $-5a+b=2$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-18$

따라서 $h(x)=-4x-18$이므로

$(f\circ h)(-4)=f(h(-4))=f(-2)=-7$

$\therefore -7$

[다른 풀이]

함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하므로 $(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$h=(g\circ f^{-1})(x)$

즉, $(f\circ h)(x)=(f\circ g\circ f^{-1})(x)$이므로

$(f\circ h)(-4)=(f\circ g\circ f^{-1})(-4)$
$\qquad\qquad\qquad =(f\circ g)(1)=f(-2)=-7$

$\therefore -7$

06 ②

$(f\circ(g\circ h))(5)=((f\circ g)\circ h)(5)$
$\qquad\qquad\qquad =(f\circ g)(h(5))$
$\qquad\qquad\qquad =(f\circ g)(15)$
$\qquad\qquad\qquad =3\times 15+4=49$

즉, $k=49$이므로 $\sqrt{k}=7$

$\therefore 7$

07 ①

$(f\circ f\circ f)(5)=f(f(f(5)))=f(f(-2))=f(-5)=-8$

$\therefore -8$

08 ③

(i) $f^1(1)=f(1)=3$
$f^2(1)=f(f(1))=f(3)=2$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(2)=4$
$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=3$
$f^5(1)=f(f^4(1))=f(3)=2$
$\vdots$

즉, $f^n(1)$은 3, 2, 4가 순서대로 반복된다.

이때 $2020=3\times 673+1$이므로

$f^{2020}(1)=f^1(1)=3$

(ii) (i)과 같은 방법으로 하면

$f^n(3)$은 2, 4, 3이 순서대로 반복된다.

이때 $2022=3\times 673+3$이므로

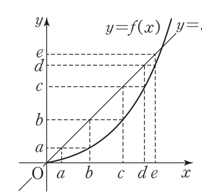
$f^{2022}(3)=f^3(3)=3$

(i), (ii)에 의하여

$f^{2020}(1)+f^{2022}(3)=3+3=6$

$\therefore 6$

09 ③



직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 그림과 같다.

$f(x)=k$라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(k)=a$

이때 그림에서 $f(b)=a$이므로 $k=b$

따라서 $f(x)=b$에서 $f(c)=b$이므로

$x=c$

$\therefore c$

10 ②

$f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로

$3a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(11)=6$에서 $f(6)=11$이므로

$6a+b=11 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-7$

즉, $f(x)=3x-7$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(-4)=-19$

$\therefore -19$

11 ①

$x\geq -1$일 때 $f(x)=2x+4\geq 2$

$x< -1$일 때 $f(x)=3x+5<2$

$f^{-1}(-4)=a$라 하면 $f(a)=-4$이므로

$3a+5=-4$, $3a=-9$, $a=-3$

$\therefore f(-1)+f^{-1}(-4)=2+(-3)=-1$

$\therefore -1$

12 ②

(i) $2x-4\geq 0$, 즉 $x\geq 2$일 때,

$f(x)=2x-4-kx+2=(2-k)x-2$

(ii) $2x-4<0$, 즉 $x<2$일 때,

$$f(x)=-2x+4-kx+2=(-2-k)x+6$$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 한다. 따라서 $x\geq 2$일 때와 $x<2$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(2-k)(-2-k)>0$에서

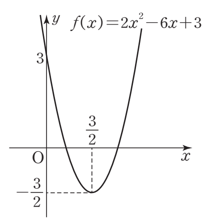
$(k-2)(k+2)>0$, $k<-2$ 또는 $k>2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

$\therefore$ 3

13 ①

$f(x)=2x^2-6x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$



$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 하므로 함수 f의 그래프가 증가 또는 감소함수이어야 한다.

즉, $k\geq\frac{3}{2}$

또, $f(k)=k$이어야 하므로

$2k^2-6k+3=k$, $2k^2-7k+3=0$

$(2k-1)(k-3)=0$, $k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=3$

이때 $k\geq\frac{3}{2}$이므로 $k=3$

$\therefore$ 3

14 ④

$y=ax-1$이라 하면 $ax=y+1$, $x=\frac{1}{a}y+\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

이때 $\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}=2x+b$이므로 $\frac{1}{a}=2=b$

즉, $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

$10ab=10\times\frac{1}{2}\times 2=10$

$\therefore$ 10

15 ②

$\frac{3x-1}{4}=t$로 놓으면 $3x-1=4t$, $3x=4t+1$, $x=\frac{4t+1}{3}$

$\therefore f(t)=3\times\frac{4t+1}{3}+2=4t+3$

$f^{-1}(15)=a$라 하면 $f(a)=15$이므로

$4a+3=15$, $4a=12$, $a=3$

$\therefore$ 3

16 ③

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$

그림에서 $g(4)=3$이므로 $g^{-1}(3)=4$

또, $f(2)=4$이므로 $f^{-1}(g^{-1}(3))=f^{-1}(4)=2$

$g(3)=2$이므로 $g^{-1}(2)=3$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(3)+g^{-1}(2)=2+3=5$

$\therefore$ 5

17 ②

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(10)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(10)\\&=(f^{-1}\circ g)(10)\\&=f^{-1}(28)\end{aligned}$$

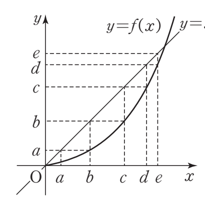
$f^{-1}(28)=a$라 하면 $f(a)=28$

$a^3+1=28$, $a^3=27$, $a=3$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(10)=3$

18 ②

직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 그림과 같다.



그림에서

$(f\circ f)(c)=f(f(c))=f(b)=a$

$f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$이므로 $k=c$

즉, $f^{-1}(b)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로 $l=d$

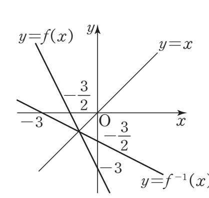
즉, $f^{-1}(c)=d$

$\therefore (f\circ f)(c)+(f\circ f)^{-1}(b)=a+d$

$\therefore a+d$

19 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로

$-2x-3=x$, $3x=-3$, $x=-1$

따라서 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이다.

즉, $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=-1+(-1)=-2$

$\therefore -2$

20 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

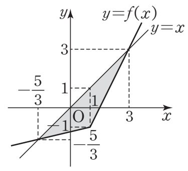
(i) $x<1$일 때,

$$\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}=x,\ \frac{3}{4}x=-\frac{5}{4},\ x=-\frac{5}{3}$$

(ii) $x\geq 1$일 때,

$$2x-3=x,\ x=3$$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



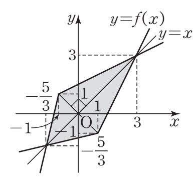
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2}\times 2\times\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\times 2\times 2\right)=2\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{28}{3}$$

$\therefore\ \frac{28}{3}$

[다른 풀이]

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times\sqrt{\left(3+\frac{5}{3}\right)^2+\left(3+\frac{5}{3}\right)^2}\times\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{14\sqrt{2}}{3}\times 2\sqrt{2}=\frac{28}{3}$$

$\therefore\ \frac{28}{3}$

변형 유형 집중공략

p. 112

01 ⑤

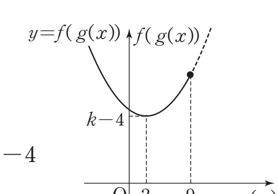
함수 $g(x)=-x^2+4x+5$에 대하여

$$g(x)=-(x^2-4x+4)+9$$
$$=-(x-2)^2+9$$

즉, $g(x)\leq 9$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$$f(g(x))$$
$$=\{g(x)\}^2-4g(x)+k$$
$$=[\{g(x)\}^2-4g(x)+4]+k-4$$
$$=\{g(x)-2\}^2+k-4$$



이때 $g(x)\leq 9$이므로 $g(x)=2$일 때, $(f\circ g)(x)$가 최솟값 8을 갖는다.

$$k-4=8,\ k=12$$

$\therefore$ 12

02 ②

조건 (가)에서 $f(0)=f(2)=0$이므로

$$f(x)=ax(x-2)\ (a\text{는 상수})$$

조건 (나)에서 $ax(x-2)-4(x-2)=0$이므로

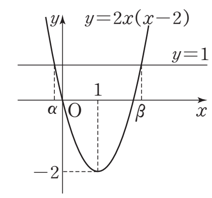
$$(x-2)(ax-4)=0$$

이때 이차방정식의 실근의 개수가 1이므로 $ax-4=0$의 근도 $x=2$이어야 한다.

즉, $a=2$이므로

$$f(x)=2x(x-2)=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$$

이차함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



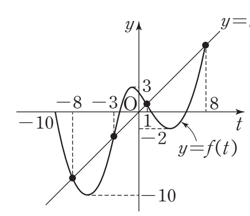
이때 방정식 $f(f(x))=-2$를 만족시키기 위해서는 $f(x)=1$이어야 한다.

또한 그림과 같이 $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값이 α, β이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=-2$를 만족시키는 서로 다른 실근은 2개가 존재한다.

03 ⑤

방정식 $(f\circ f)(x)-f(x)=0$에서 $f(f(x))=f(x)$이므로 $f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=t$

[그림 1]과 같이 $y=f(t)$와 $y=t$의 그래프는 네 점에서 만난다. 이때 교점의 t의 좌표가 방정식 $f(t)=t$의 근과 같으므로

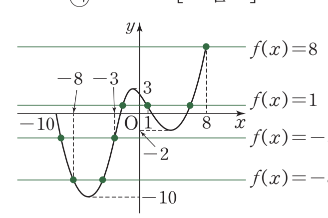


[그림 1]

$f(x)=-8$ 또는 $f(x)=-3$

또는 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=8$ …… ㉠

[그림 2]와 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 ㉠들과의 교점의 개수는 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.



[그림 2]

(i) $f(x)=-8$의 근의 개수는 2개

(ii) $f(x)=-3$의 근의 개수는 2개

(iii) $f(x)=1$의 근의 개수는 3개

(iv) $f(x)=8$의 근의 개수는 1개

(i)~(iv)에 의하여 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는

$$2+2+3+1=8$$

$\therefore$ 8

04 ④

함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다.

$$\frac{1}{4}x^2+a=x,\ \frac{1}{4}x^2-x+a=0,\ x^2-4x+4a=0$$

이때 방정식 $x^2-4x+4a=0$의 두 근을 α, β라 하자.

이 방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지려면

$D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta\geq 0$

(i) $D>0$이므로 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-4a>0$, $a<1$

(ii) $\alpha+\beta=4>0$

(iii) $\alpha\beta=4a\geq 0$, $a\geq 0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $0\leq a<1$

$\therefore 0\leq a<1$

서술형 **What & How 연습문제** p. 116

01 $\dfrac{5}{3}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-3x+k)$

$=4(-3x+k)-1=-12x+4k-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x-1)$

$=-3(4x-1)+k=-12x+3+k$ …… ❶

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-12x+4k-1=-12x+3+k$

즉, $4k-1=3+k$에서 $3k=4$, $k=\dfrac{4}{3}$이므로 …… ❷

$g(x)=-3x+\dfrac{4}{3}$ …… ❸

$\therefore k+g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$ …… ❹

$\therefore \dfrac{5}{3}$

채점기준	배점
❶ 식 $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$를 각각 바르게 간단히 하였다.	4
❷ 상수 k의 값을 바르게 구하였다.	2
❸ 함수 $y=g(x)$를 바르게 구하였다.	1
❹ $k+g\left(\dfrac{1}{3}\right)$의 값을 바르게 구하였다.	1

02 $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)=x^2-ax+b=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 2보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\dfrac{a}{2}\leq 2$, $a\leq 4$ …… ❶

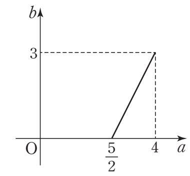
또, 치역이 실수 전체의 집합이므로

$f(2)=4-2a+b=-1$, $b=2a-5$

이때 a, b가 음이 아닌 실수이므로 $b=2a-5\geq 0$에서 $a\geq\dfrac{5}{2}$

$\therefore b=2a-5\ \left(\dfrac{5}{2}\leq a\leq 4\right)$ …… ❷

따라서 점 (a, b)의 자취를 그리면 그림과 같고, 그 길이는



$\sqrt{\left(4-\dfrac{5}{2}\right)^2+(3-0)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ …… ❸

$\therefore \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

채점기준	배점
❶ a의 값의 범위를 바르게 구하였다.	2
❷ b를 a에 대한 식으로 바르게 나타내었다.	3
❸ 점 (a, b)의 자취의 길이를 바르게 구하였다.	2

03 $y=3g(x)-2$

$y=f\left(\dfrac{x+2}{3}\right)$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=f\left(\dfrac{y+2}{3}\right)$

이때 역함수의 성질에 의하여 $f^{-1}(x)=\dfrac{y+2}{3}$ …… ❶

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(x)=\dfrac{y+2}{3}$ …… ❷

$3g(x)=y+2$, $y=3g(x)-2$ …… ❸

$\therefore y=3g(x)-2$

채점기준	배점
❶ $f^{-1}(x)$를 바르게 구하였다.	2
❷ $g(x)$를 바르게 구하였다.	1
❸ 함수 $y=f\left(\dfrac{x+2}{3}\right)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 바르게 나타내었다.	2

04 $\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면 $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+3=x$에서

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$x=2$ 또는 $x=3$ …… ❶

즉, 두 점 A, B의 좌표는 $(2, 2)$, $(3, 3)$이므로 …… ❷

$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$ …… ❸

$\therefore \sqrt{2}$

채점기준	배점
❶ 함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 바르게 구하였다.	3
❷ 두 점 A, B의 좌표를 각각 바르게 구하였다.	2
❸ 선분 AB의 길이를 바르게 구하였다.	2

실전문제 1회

p. 120

01 ⑤

$(g\circ f)(-1)=g(-3)=9$

$(f\circ g)(2)=f(-4)=-6$

$\therefore (g\circ f)(-1)+(f\circ g)(2)=9+(-6)=3$

$\therefore 3$

02 ②

① $f(g(x))=f(|x|)=(|x|)^2=x^2$

② $g(g(x))=g(|x|)=||x||=|x|$

④ $g(f(x))=g(x^2)=|x^2|=x^2$

⑤ $\{g(x)\}^2=(|x|)^2=x^2$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

03 ①

f, $f\circ g$의 대응을 이용하여 함수 $g(x)$의 함숫값을 구하면 다음과 같다.

$(f\circ g)(1)=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

$(f\circ g)(2)=1$이고 $f(5)=1$이므로 $g(2)=5$

$(f\circ g)(3)=4$이고 $f(2)=4$이므로 $g(3)=2$

$(f\circ g)(4)=3$이고 $f(3)=3$이므로 $g(4)=3$

$(f\circ g)(5)=5$이고 $f(4)=5$이므로 $g(5)=4$

$\therefore g(3)+(g\circ f)(2)=2+g(4)=2+3=5$

$\therefore 5$

04 ②

$f(0)=0,\ f(1)=3,\ f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=2$

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서

$f(2)=g(3)=1$

$(f\circ g)(3)=(g\circ f)(3)$에서

$f(1)=g(4)=3$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서

$f(3)=g(2)=4$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서

$f(4)=g(1)=2$

이때 함수 g는 일대일대응이므로 $g(0)=0$

$\therefore g(0)+(g\circ g)(4)=g(0)+g(g(4))=0+g(3)=0+1=1$

$\therefore 1$

05 ⑤

모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=f(g(x))\ge 0$이므로

$\{g(x)\}^2-g(x)-6\ge 0,\ \{g(x)+2\}\{g(x)-3\}\ge 0$

$g(x)\le -2$ 또는 $g(x)\ge 3$

(i) $g(x)\le -2$일 때, $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le -2$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $g(x)\ge 3$일 때,

부등식 $x^2+ax+4\ge 3$, 즉 $x^2+ax+1\ge 0$이 항상 성립하기 위해서는 방정식 $x^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le 0$이어야 한다.

$D=a^2-4\le 0,\ (a+2)(a-2)\le 0,\ -2\le a\le 2$

(i), (ii)에 의하여 $-2\le a\le 2$

$\therefore -2\le a\le 2$

06 ④

$84<100$이므로 $f(84)=f(f(88))$

이때 $f(88)=f(f(92)),\ f(92)=f(f(96)),\ f(96)=f(f(100))$

이고, $f(100)=98$이므로

$f(96)=f(98)=f(f(102))=f(100)=98$

즉, $f(92)=f(98)=98,\ f(88)=f(98)=98$이므로

$f(84)=f(98)=98$

$\therefore 98$

07 ⑤

그림에서 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

$f_1\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{32},\ f_2\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{16}$

$f_3\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(f_2\left(\frac{1}{64}\right)\right)=f\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{8}$

이와 같은 방법으로 하면

$f_4\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{4},\ f_5\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{2},\ f_6\left(\frac{1}{64}\right)=1$이므로

$f_7\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(f_6\left(\frac{1}{64}\right)\right)=f(1)=2$

$\therefore 2$

08 ③

$f(x)=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$

즉, $f(x)\ge 3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로

$g(f(x))=-\{f(x)\}^2+4f(x)+k$

$=-\{f(x)-2\}^2+k+4$

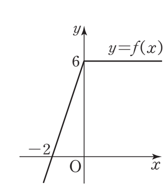
이때 $f(x)\ge 3$이므로 $f(x)=3$일 때, $(g\circ f)(x)$가 최댓값 10을 갖는다.

즉, $-(3-2)^2+k+4=10,\ k+3=10,\ k=7$

$\therefore 7$

09 ③

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같고

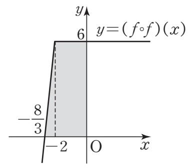


$(f\circ f)(x)=f(f(x))$이므로

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}3f(x)+6 & (f(x)<0)\\ 6 & (f(x)\ge 0)\end{cases}$

그림에서 $f(x)<0$인 x의 범위는 $x<-2$

즉, $(f\circ f)(x)=\begin{cases} 9x+24 & (x<-2) \\ 6 & (x\geq -2) \end{cases}$



이므로 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+2\right)\times 6=14$$

$\therefore$ 14

10 ③

$f(g(2))=f(5)=11$

함수 g에 대하여

$x\geq 3$일 때 $2x\geq 6$이고, $x<3$일 때 $x+3<6$

$g^{-1}(8)=a$라 하면 $g(a)=8$이므로

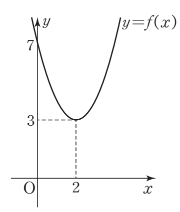
$2a=8$, $a=4$

$\therefore (f\circ g)(2)+g^{-1}(8)=11+4=15$

$\therefore$ 15

11 ②

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 하므로 함수 f의 그래프가 증가 또는 감소함수이어야 한다.



즉, $a\geq 2$이므로 a의 최솟값은 2이다.

또, $f(2)=b$이어야 하므로 $b=3$

따라서 구하는 최솟값은 $ab=2\times 3=6$

$\therefore$ 6

12 ②

$\frac{1}{2}x-5=3$에서 $\frac{1}{2}x=8$, $x=16$

즉, $f^{-1}(16)=g(3)$이므로

$f^{-1}(16)=a$라 하면 $f(a)=16$

$-3a+1=16$, $-3a=15$, $a=-5$

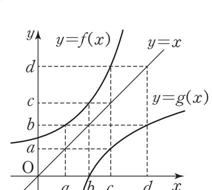
$\therefore g(3)=-5$

$\therefore$ -5

13 ②

$$\begin{aligned}(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(d)&=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(d)\\&=(g\circ f^{-1})(d)\\&=g(f^{-1}(d))\end{aligned}$$

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 그림과 같다.



그림에서 $f(c)=d$이므로 $f^{-1}(d)=c$

$\therefore g(f^{-1}(d))=g(c)=a$

$\therefore a$

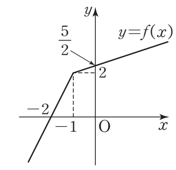
14 ④

$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서 $f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$

(i) $f(x)=0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로



$2x+4=0$, $x=-2$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로 x좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=x$에서 $\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}$, $x=5$

$2x+4=x$에서 $x=-4$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 x의 값의 곱은

$-2\times 5\times(-4)=40$

$\therefore$ 40

15 ①

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서 점 A와 B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 점 A의 좌표가 $(2, 4)$이므로 $B(4, 2)$

즉, $f(2)=4$이므로 $4-f^{-1}(2)=13$, $f^{-1}(2)=-9$

즉, $f(-9)=2$이므로 점 D의 좌표는 $(-9, 2)$이다.

따라서 삼각형 ADB의 넓이는

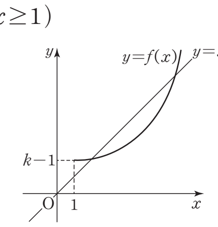
$$\frac{1}{2}\times(4+9)\times(4-2)=13$$

$\therefore$ 13

16 ⑤

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1\ (x\geq 1)$

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $f(x)=x$가 $x\geq 1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$x^2-2x+k=x$, $x^2-3x+k=0$ …… ㉠

의 서로 다른 두 실근이 1보다 크거나 같아야 한다.

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$$D=(-3)^2-4k>0,\ 4k<9,\ k<\frac{9}{4}$$

(ii) 이차함수 $h(x)=x^2-3x+k$의 축의 방정식이 $x=\frac{3}{2}>1$이므로 항상 성립한다.

(iii) $h(1)=1-3+k=k-2\geq 0$, $k\geq 2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $2 \le k < \frac{9}{4}$

즉, $a=2$, $\beta=\frac{9}{4}$이므로 $a\beta=2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$

$\therefore \frac{9}{2}$

17 ③

함수 $f(x)=x^2+\frac{9}{4}(x\ge0)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+k$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, 선분 AB의 길이가 최소일 때는 점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 최소일 때이므로 기울기가 1인 직선과 곡선 $y=f(x)$의 접점이 점 A일 때, 선분 AB의 길이가 최소가 된다.
따라서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+a$라 할 때, 이차방정식 $x^2+\frac{9}{4}=x+a$, 즉

$x^2-x+\frac{9}{4}-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$$D=(-1)^2-4\left(\frac{9}{4}-a\right)=0,\ 4a-8=0,\ a=2$$

$a=2$를 $x^2-x+\frac{9}{4}-a=0$에 대입하면

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

즉, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

$\therefore 2\sqrt{2}$

18 7

$(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$
$=(f\circ g)(ax+4)$
$=ax+4-2=ax+2$ …… ❶
이때 $ax+2=3x+2b$이므로 $a=3$, $b=1$ …… ❷
$\therefore 3a-2b=3\times3-2\times1=7$ …… ❸
$\therefore 7$

채점기준	배점
❶ 합성함수의 성질을 이용하여 $(f\circ(g\circ h))(x)$의 식을 바르게 간단히 하였다.	3
❷ a, b의 값을 각각 바르게 구하였다.	1
❸ $3a-2b$의 값을 바르게 구하였다.	1

19 $\frac{5}{8}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다.

$\frac{1}{3}x^2+k=x$, $x^2-3x+3k=0$ …… ㉠ …… ❶

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 두 점의 좌표는 (α, α), (β, β)이고 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이므로

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{3}$$

$2(\beta-\alpha)^2=3$, $(\beta-\alpha)^2=\frac{3}{2}$ …… ❷

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=3k$ …… ❸

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 $\frac{3}{2}=9-12k$

$12k=\frac{15}{2}$, $k=\frac{5}{8}$ …… ❹

$\therefore \frac{5}{8}$

채점기준	배점
❶ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 이용하여 이차방정식을 바르게 세웠다.	2
❷ $(\beta-\alpha)^2$의 값을 바르게 구하였다.	2
❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 각각 바르게 구하였다.	2
❹ k의 값을 바르게 구하였다.	2

실전문제 2회

p. 124

01 ①

(i) $\frac{x-1}{2x-1}=2$에서 $x-1=4x-2$, $3x=1$, $x=\frac{1}{3}$

즉, $f(2)=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\frac{1}{3}-1=\frac{2}{9}$

(ii) $\frac{x-1}{2x-1}=1$에서 $x-1=2x-1$, $x=0$

즉, $f(1)=-1$

(i), (ii)에 의하여 $f(2)+f(1)=\frac{2}{9}+(-1)=-\frac{7}{9}$

$\therefore -\frac{7}{9}$

02 ②

그림에서 $f(0)=1$이므로

$(f\circ f)(0)=f(1)=0$

$\therefore 0$

03 ③

(i) $(f\circ h)(-1)=g(-1)$에서 $f(h(-1))=5$이므로
$2h(-1)+1=5$, $2h(-1)=4$, $h(-1)=2$
(ii) $(k\circ f)(x)=g(x)$에서 $k(2x+1)=-3x+2$
$x=-1$을 대입하면 $k(-1)=5$
(i), (ii)에 의하여 $h(-1)+k(-1)=2+5=7$
$\therefore 7$

04 ④

ㄱ. $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(-2)=-2$

ㄴ. $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(3)=3$

ㄷ. $f(-x)=\begin{cases} 3 & (x<-3) \\ -x & (|x|\le 3) \\ -3 & (x>3) \end{cases}$ 이므로

$$(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=\begin{cases} 3 & (x<-3) \\ x^2-6 & (|x|\le 3) \\ 3 & (x>3) \end{cases}$$

이고 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} 3 & (x<-3) \\ x^2-6 & (|x|\le 3) \\ 3 & (x>3) \end{cases}$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 ④

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=x+a+a=x+2a$

$(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=x+2a+a=x+3a$

즉, 직선 $y=x+3a$와 원 $x^2+y^2=4$가 접하므로

$y=x+3a$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$$x^2+(x+3a)^2=4,\ 2x^2+6ax+9a^2-4=0$$

이차방정식 $2x^2+6ax+9a^2-4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-2(9a^2-4)=0,\ 9a^2=8,\ a^2=\frac{8}{9},\ a=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{3}$

06 ①

$f^1\left(\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{1}{7}\right)=2\times\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$

$f^2\left(\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{2}{7}\right)=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

$f^3\left(\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{4}{7}\right)=-2\times\frac{4}{7}+2=\frac{6}{7}$

$f^4\left(\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{6}{7}\right)=-2\times\frac{6}{7}+2=\frac{2}{7}$

$f^5\left(\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{2}{7}\right)=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

$f^6\left(\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{4}{7}\right)=-2\times\frac{4}{7}+2=\frac{6}{7},\ \cdots$

즉, $f^n\left(\frac{1}{7}\right)$은 $\frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7}$이 순서대로 반복되고

$99=3\times 33$이므로

$$f\left(\frac{1}{7}\right)+f^2\left(\frac{1}{7}\right)+f^3\left(\frac{1}{7}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{7}\right)$$
$$=33\times\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}\right)=\frac{396}{7}$$

$\therefore \frac{396}{7}$

07 ⑤

$f^{-1}(4)=8$이므로 $f(8)=4$

$f(x-2)=g(2x)$에 $x=10$을 대입하면

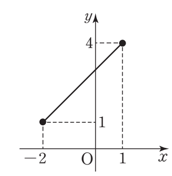
$$f(8)=g(20)=4$$

즉, $g^{-1}(4)=20$

$\therefore 20$

08 ②

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다. 이때 $a>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 1),\ (1,\ 4)$를 지나야 하므로

$f(-2)=1$에서 $-2a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=4$에서 $a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$이므로

$$a-b=1-3=-2$$

$\therefore -2$

09 ④

$(g\circ f)(x)=x$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

이때 $f(x)=\begin{cases} (a+3)x+3 & \left(x\ge\frac{2}{3}\right) \\ (a-3)x+7 & \left(x<\frac{2}{3}\right) \end{cases}$ 이므로

함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $x\ge\frac{2}{3}$일 때와 $x<\frac{2}{3}$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(a+3)(a-3)>0,\ a<-3$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

$\therefore 4$

10 ②

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=g(x)$에서

$((f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=x$이므로

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

$\therefore h(4)=f(g(4))=f(-1)=2$

$\therefore 2$

[다른 풀이]

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=g(x)$에서

$(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=g(x),\ (f^{-1}\circ h)(x)=g(x)$

즉, $f^{-1}(h(4))=g(4)=-1$이므로

$h(4)=a$라 하면 $f^{-1}(a)=-1,\ f(-1)=a$

$$1-(-1)=a,\ a=2$$

즉, $h(4)=2$

$\therefore 2$

11 ③

$f(1)=3,\ f^3(1)=1$

에서 $f(3)=2,\ f(2)=1$

즉, $g(1)=2,\ g(2)=3,\ g(3)=1$

$\therefore (g\circ g)(2)+((f\circ g)^{-1}\circ f)(1)$

$\quad =g(g(2))+(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(1)$

$\quad =g(3)+g^{-1}(1)$

$\quad =g(3)+f(1)=1+3=4$

$\therefore 4$

12 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로

$\quad 5x+4=x,\ 4x=-4,\ x=-1$

즉, $A(-1,\ -1)$

함수 $f(x)=5x+4$의 그래프와 x축의 교점은

$\quad 5x+4=0,\ 5x=-4,\ x=-\frac{4}{5}$

즉, $B\left(-\frac{4}{5},\ 0\right)$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\quad \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times 1=\frac{2}{5}$

$\therefore \frac{2}{5}$

13 ⑤

$f(x)=x+2-\left|\frac{1}{3}x-2\right|$에서 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+4 & (x\geq 6)\\ \frac{4}{3}x & (x<6)\end{cases}$

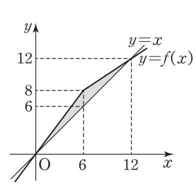
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $\frac{2}{3}x+4=x$에서 $\frac{1}{3}x=4,\ x=12$

(ii) $\frac{4}{3}x=x$에서 $x=0$

즉, 두 교점의 좌표는 $(0,\ 0),\ (12,\ 12)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같고 이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는



$\quad 2\left(\frac{1}{2}\times 2\times 6+\frac{1}{2}\times 2\times 6\right)=24$

$\therefore 24$

14 ③

$f(x)=\begin{cases}2x & (0<x\leq 4)\\ 8 & (4<x\leq 8)\\ 24-2x & (8<x<12)\end{cases}$

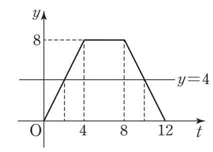
$f(f(k))=4$에서 $f(k)=t$라 하면

$\quad f(t)=4$

그림에서

$\quad 2t=4,\ t=2$ 또는

$\quad 24-2t=4,\ t=10$



(i) $t=2$일 때, $f(k)=2$이므로

$\quad 2k=2$에서 $k=1$

$\quad 24-2k=2$에서 $k=11$

(ii) $t=10$일 때, $f(k)=10$이므로

$\quad$ 이를 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 합은

$\quad 1+11=12$

$\therefore 12$

15 ①

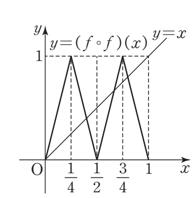
그림에서 $f(x)=\begin{cases}2x & \left(0\leq x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right)\end{cases}$ 이므로

$$f(f(x))=\begin{cases}2f(x) & \left(0\leq f(x)<\frac{1}{2}\right)\\ -2f(x)+2 & \left(\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(2x) & \left(0\leq 2x<\frac{1}{2}\right)\\ 2(-2x+2) & \left(0\leq -2x+2<\frac{1}{2}\right)\\ -2(2x)+2 & \left(\frac{1}{2}\leq 2x<1\right)\\ -2(-2x+2)+2 & \left(\frac{1}{2}\leq -2x+2\leq 1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4x & \left(0\leq x<\frac{1}{4}\right)\\ -4x+2 & \left(\frac{1}{4}\leq x<\frac{1}{2}\right)\\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\right)\\ -4x+4 & \left(\frac{3}{4}<x\leq 1\right)\end{cases}$$

함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 그림과 같고 $y=(f\circ f)(x)$가 항등함수이므로 $(f\circ f)(x)=x$의 해를 구하면 다음과 같다.



(i) $4x=x$에서 $x=0$

(ii) $-4x+4=x$에서 $5x=4,\ x=\frac{4}{5}$

(iii) $-4x+2=x$에서 $5x=2,\ x=\frac{2}{5}$

(ⅳ) $4x-2=x$에서 $3x=2$, $x=\frac{2}{3}$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $A=\left\{0,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{5}\right\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 $0+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{28}{15}$

$\therefore\ \frac{28}{15}$

16 ②

자연수 n의 최솟값이 4이므로

$f^5(x)<f^4(x)$이어야 한다.

즉, $f^4(x)>900$이고 $f^1(x)\le f^2(x)\le f^3(x)\le f^4(x)$이므로

$300<f^3(x)\le 900$, $100<f^2(x)\le 300$

$\frac{100}{3}<f(x)\le 100$

(ⅰ) $x\le 900$일 때, $\frac{100}{3}<3x\le 100$이므로

$\frac{100}{9}<x\le\frac{100}{3}$

즉, 자연수 x는 12, 13, 14, ⋯, 33의 22개이다.

(ⅱ) $x>900$일 때, $\frac{100}{3}<\frac{x}{10}\le 100$이므로

$\frac{1000}{3}<x\le 1000$

즉, $900<x\le 1000$이므로 자연수 x는 100개다.

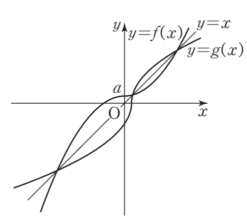
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 자연수 x의 개수는 $22+100=122$

$\therefore$ 122

17 ④

(ⅰ) $a\ge 0$일 때

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같아야 한다.



즉, $x\ge 0$에서 곡선 $y=x^2+a$와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

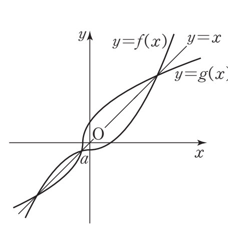
이차방정식 $x^2+a=x$, 즉 $x^2-x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$D=(-1)^2-4a>0$, $a<\frac{1}{4}$

이때 $a\ge 0$이므로 $0\le a<\frac{1}{4}$

(ⅱ) $a<0$일 때

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같아야 한다.



즉, $x<0$에서 곡선 $y=-x^2+a$와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

이차방정식 $-x^2+a=x$, 즉 $x^2+x-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$D=1^2+4a>0$, $a>-\frac{1}{4}$

이때 $a<0$이므로 $-\frac{1}{4}<a<0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{4}$

즉, $\alpha=-\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$이므로 $16\alpha\beta=16\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}=-1$

$\therefore\ -1$

18 -1

조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이다. ⋯⋯ ❶

조건 (나)에서

(ⅰ) $f(f(1))=f(1)-3$이므로 $f(1)=a$라 하면

$f(a)=a-3$

이때 X의 원소에서 두 수의 차가 3인 것은 3, 6이므로 $a=6$

즉, $f(1)=6$, $f(6)=3$ ⋯⋯ ❷

(ⅱ) $f(f(2))=f(2)-6$이므로 $f(2)=b$라 하면

$f(b)=b-6$

이때 X의 원소에서 두 수의 차가 6인 것은 1, 7이므로 $b=7$

즉, $f(2)=7$, $f(7)=1$ ⋯⋯ ❸

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(3)=2$이므로 ⋯⋯ ❹

$(f\circ f)(6)-(f\circ f)(1)=f(f(6))-f(f(1))$

$=f(3)-f(6)$

$=2-3=-1$ ⋯⋯ ❺

$\therefore\ -1$

채점기준	배점
❶ 함수 f가 일대일대응임을 바르게 제시하였다.	3
❷ $f(1)$, $f(6)$의 값을 각각 바르게 구하였다.	3
❸ $f(2)$, $f(7)$의 값을 각각 바르게 구하였다.	3
❹ $f(3)$의 값을 바르게 구하였다.	1
❺ 주어진 식의 값을 바르게 구하였다.	1

19 -2

$g(g(k))=\frac{3}{2}$에서 $g(k)=l$이라 하면 $g(l)=\frac{3}{2}$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=l$

$\frac{3}{2}<2$이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\frac{3}{2}+7=\frac{13}{4}$ ⋯⋯ ❶

즉, $g(k)=\frac{13}{4}$에서 $f\left(\frac{13}{4}\right)=k$ ⋯⋯ ❷

이때 $\frac{13}{4}>2$이므로 $f\left(\frac{13}{4}\right)=-4\times\frac{13}{4}+11=-2$ ⋯⋯ ❸

$\therefore\ -2$

채점기준	배점
❶ $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 바르게 구하였다.	3
❷ $f\left(\frac{13}{4}\right)$을 k에 대한 식으로 바르게 나타내었다.	2
❸ k의 값을 바르게 구하였다.	1

수능형 기출문제 &변형문제

p. 128

01 5

$f(4)=2$이고, 주어진 그래프에서 $g(4)=3$이므로

$g(4)>f(4)$에서 $h(4)=g(4)=3$

함수 $h(x)$는 일대일대응이므로 $h(3)\neq 3$

이때 $g(3)=3$이므로 $h(3)\neq g(3)$

즉, $h(3)=f(3)$이고 $f(3)\geq g(3)$이어야 하므로

$f(3)=h(3)=4$

(i) $h(1)=1$인 경우

$h(1)$은 $f(1)$과 $g(1)$ 중 작지 않은 값을 갖는다.

주어진 그래프에서 $g(1)=2$이므로 $h(1)$의 값은 2 이상의 값을 가져야 한다. 즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $h(2)=1$인 경우

$h(2)$는 $f(2)$와 $g(2)$ 중 작지 않은 값을 갖는다.

주어진 그래프에서 $g(2)=1$이므로 $f(2)=1$

(i), (ii)에 의하여 $f(2)=1$이므로

$f(2)+f(3)=1+4=5$

$\therefore$ 5

02 ②

함수 $g(x)$에서 $x<y$이면 $g(x)<g(y)$이므로

$g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=3,\ g(4)=4$

이때 함수 $h(x)$는 $f(x)$, $g(x)$ 중 크지 않은 값을 갖는다.

(i) $f(1)=4,\ g(1)=1$이므로 $h(1)=g(1)=1$

(ii) $f(2)=4,\ g(2)=2$이므로 $h(2)=g(2)=2$

(iii) $f(3)=2,\ g(3)=3$이므로 $h(3)=f(3)=2$

(iv) $f(4)=3,\ g(4)=4$이므로 $h(4)=f(4)=3$

(i)~(iv)에 의하여 $h(1)+h(3)=1+2=3$

$\therefore$ 3

03 ③

$n=a_m\times 10^m+\cdots+a_3\times 10^3+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0$이라 하면

$$\begin{aligned}f(n)&=f(a_m\times 10^m+\cdots+a_3\times 10^3+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0)\\&=f(a_m\times 10^{m-1}+\cdots+a_3\times 10^2+a_2\times 10+a_1)+a_0\\&=f(a_m\times 10^{m-2}+\cdots+a_3\times 10+a_2)+a_1+a_0\\&=f(a_m\times 10^{m-3}+\cdots+a_3)+a_2+a_1+a_0\\&\ \ \vdots\\&=a_m+\cdots+a_3+a_2+a_1+a_0\end{aligned}$$

즉, $f(n)$의 값은 n의 각 자리의 숫자의 합과 같다.

ㄱ. $f(100)=1+0+0=1$

ㄴ. $(f\circ f)(999)=f(f(999))=f(9+9+9)=f(27)$

$=2+7=9$

ㄷ. [반례] $n=33$일 때, $f(33)=3+3=6$으로 6의 배수이지만 $n=33$은 6의 배수가 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 ④

$n=a_m\times 10^m+\cdots+a_3\times 10^3+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0$이라 하면

$$\begin{aligned}f(n)&=f(a_m\times 10^m+\cdots+a_3\times 10^3+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0)\\&=f(a_m\times 10^{m-1}+\cdots+a_3\times 10^2+a_2\times 10+a_1)+a_0\\&=f(a_m\times 10^{m-2}+\cdots+a_3\times 10+a_2)+a_1+a_0\\&=f(a_m\times 10^{m-3}+\cdots+a_3)+a_2+a_1+a_0\\&\ \ \vdots\\&=a_m+\cdots+a_3+a_2+a_1+a_0\end{aligned}$$

즉, $f(n)$의 값은 n의 각 자리의 숫자의 합과 같다.

ㄱ. $f(2)=2$

ㄴ. $f(1234)=1+2+3+4=10$이므로

$(f\circ f)(1234)=f(f(1234))=f(10)=1+0=1$

ㄷ. $f(33333)=3+3+3+3+3=15$이므로

$f^2(33333)=f(15)=1+5=6$

$f^3(33333)=f(6)=6,\ f^4(33333)=f(6)=6,\ \cdots$

$\therefore f^{100}(33333)=6$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 16

$S=\{9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81,\ 90,\ 99\}$이므로

함수 $f(n)$에 대하여

$f(9)=f(72)=2,\ f(18)=f(81)=4$

$f(27)=f(90)=6,\ f(36)=f(99)=1$

$f(45)=3,\ f(54)=5,\ f(63)=0$

이때 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

즉, $f^{-1}(0)=63$

$f^{-1}(1)=36$ 또는 $f^{-1}(1)=99$

$f^{-1}(2)=9$ 또는 $f^{-1}(2)=72$

$f^{-1}(3)=45$

$f^{-1}(4)=18$ 또는 $f^{-1}(4)=81$

$f^{-1}(5)=54$

$f^{-1}(6)=27$ 또는 $f^{-1}(6)=90$

따라서 집합 X의 개수는 $1\times2\times2\times1\times2\times1\times2=16$이다.

$\therefore$ 16

06 ④

집합 $S=\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$이므로

함수 $f(n)$에 대하여

$f(11)=f(44)=f(77)=2$

$f(22)=f(55)=f(88)=1$

$f(33)=f(66)=f(99)=0$

이때 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

즉, $f^{-1}(0)=33$ 또는 $f^{-1}(0)=66$ 또는 $f^{-1}(0)=99$

$f^{-1}(1)=22$ 또는 $f^{-1}(1)=55$ 또는 $f^{-1}(1)=88$

$f^{-1}(2)=11$ 또는 $f^{-1}(2)=44$ 또는 $f^{-1}(2)=77$

따라서 집합 X의 개수는 $3\times3\times3=27$이다.

$\therefore$ 27

07 ①

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($x>-1$, $a\neq0$, a, b, c는 상수)

라 하면

조건 (나)에서

$f(0)=0$이므로 $c=0$

$f(1)=3$이므로 $a+b=3$ ...... ㉠

$g(8)=2$에서 $f(2)=8$이므로 $4a+2b=8$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

즉, $f(x)=x^2+2x$

이때 $g(15)=k$라 하면 $f(k)=15$이므로

$f(k)=k^2+2k=15$, $k^2+2k-15=0$

$(k+5)(k-3)=0$, $k=3$ ($\because k>-1$)

$\therefore g(15)=3$

$\therefore$ 3

08 ③

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)

라 하면

조건 (나)에서

$f(0)=0$이므로 $d=0$

$f(1)=3$이므로 $a+b+c=3$ ...... ㉠

$g(-1)=-1$에서 $f(-1)=-1$이므로

$-a+b-c=-1$ ...... ㉡

$g(-6)=-2$에서 $f(-2)=-6$이므로

$-8a+4b-2c=-6$ ...... ㉢

㉠+㉡을 계산하면

$2b=2$, $b=1$

$b=1$을 ㉠, ㉢에 대입하여 정리하면

$a+c=2$, $4a+c=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $c=1$

즉, $f(x)=x^3+x^2+x$

이때 $g(39)=k$라 하면 $f(k)=39$이므로

$f(k)=k^3+k^2+k=39$, $k^3+k^2+k-39=0$

$(k-3)(k^2+4k+13)=0$

이때 $k^2+4k+13=0$은 실근을 갖지 않으므로 $k=3$

$\therefore g(39)=3$

$\therefore$ 3