## 01 곡선과 $x$축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

◪ 다음 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**1.** $y=-(x+1)(x-2)$

**2.** $y=-(x-1)(x-3)$

**3.** $y=2(x+1)(x-2)$

**4.** $y=x^2-1$

**5.** $y=x^2-x$

**6.** $y=x^2-2x$

**7.** $y=x^2-4x+3$

**8.** $y=2x^2+6x$

**9.** $y=-x^2+4x$

**10.** $y=-x^2+x+2$

**11.** $y=-x^2+2x+3$

**12.** $y=x(x+1)(x-1)$

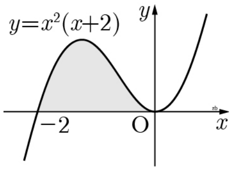
**13.** $y=x(x-1)(x+2)$

**14.** $y=x^3-4x$

**15.** $y=x^3+3x^2+2x$

**16.** $y=-x^3+x$

**17.** 다음 그림과 같이 곡선 $y=x^2(x+2)$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.




◪ 주어진 구간에서 다음 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**18.** $y=x^2$ $[-1,\ 2]$

**19.** $y=-x^2-2$ $[-2,\ 1]$

**20.** $y=x^2-x$ $[0,\ 2]$

**21.** $y=x^2-2x$ $[0,\ 3]$

**22.** $y=x^2-3x$ $[-1,\ 2]$

**23.** $y=x^2-4x$ $[-1,\ 2]$

**24.** $y=x^2+x-2$ $[0,\ 2]$

**25.** $y=x^2-4x+3$ $[0,\ 2]$

**26.** $y=x(x-1)(x-3)$ $[0,\ 2]$

**27.** $y=x^2(x-2)$ $[0,\ 4]$

## 02 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

◪ 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**28.** $y=-2x^2$, $y=-x-1$

**29.** $y=x^2+2$, $y=-x+2$

**30.** $y=x^2-2$, $y=3x+2$

**31.** $y=-x^2+4$, $y=x-2$

**32.** $y=x^2-3x$, $y=x-3$

**33.** $y=x^2+x-3$, $y=2x-1$

**34.** $y=x^2-3x+1$, $y=x-2$

**35.** $y=2x^2-x+1$, $y=3x+1$

**36.** $y=-x^2+3x$, $y=x$

**37.** $y=-x^2+6x$, $y=2x$

**38.** $y=-x^2+7x$, $y=2x+4$

**39.** $y=-x^2+x+4$, $y=-x+1$

**40.** $y=x^3+3$, $y=3x+1$

**41.** $y=x^3-x$, $y=x$

**42.** $y=-x^3+4x+3$, $y=x+1$

◪ 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**43.** $y=x^2$, $y=-x^2+2$

**44.** $y=-x^2+x$, $y=x^2+x-2$

**45.** $y=x(x-2)$, $y=-x(x-2)$

**46.** $y=x^2-3x$, $y=-x^2+5x-6$

**47.** $y=x^2-5x+6$, $y=-x^2+3x$

**48.** $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+4x+11$

**49.** $y=-x^2+4x-3$, $y=x^2-6x+5$

**50.** $y=2x^2-4x-4$, $y=x^2-2x+4$

**51.** $y=x^2-2x-1$, $y=-2x^2+4x-1$

**52.** $y=x^3-2x$, $y=x^2$

**53.** $y=x^2+3x$, $y=-2x^2+6$

**54.** $y=x^3-2x^2$, $y=-x(x-2)$

**55.** $y=x^3-2x$, $y=3x^2-4x$


I410-ECN-0199-2019-001-000244110

**56.** $y=x(x-2)$, $y=-x(x+1)(x-2)$

**57.** $y=x(x+2)$, $y=x(x+2)(x-1)$

◪ 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**58.** $f(x)=x^2$

**59.** $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

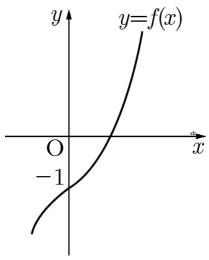
**60.** $f(x)=x^3\ (x\geq 0)$

**61.** $f(x)=\frac{1}{4}x^3\ (x\geq 0)$

**62.** $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x\ (x\geq 0)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

**63.** 함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$의 값을 구하여라.




**64.** 함수 $f(x)=x^2(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_2^3 f(x)dx+\int_4^9 g(x)dx$의 값을 구하여라.

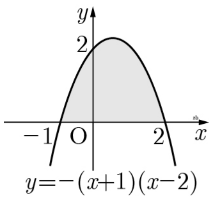
**65.** 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ (x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 g(x)dx$의 값을 구하여라.

**66.** 함수 $f(x)=x^3+2\ (x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$의 값을 구하여라.

## 정답 및 해설

1) $\frac{9}{2}$

⇨ 곡선 $y=-(x+1)(x-2)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $-(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$



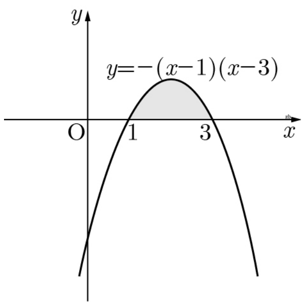

$y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

2) $\frac{4}{3}$

⇨ 곡선 $y=-(x-1)(x-3)$과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $x=1$ 또는 $x=3$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{1}^{3}-(x-1)(x-3)dx=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=0-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$$

3) 9

⇨ 곡선 $y=2(x+1)(x-2)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=-\int_{-1}^{2}2(x+1)(x-2)dx=-\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$$

$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-x^2-4x\right]_{-1}^{2}$$

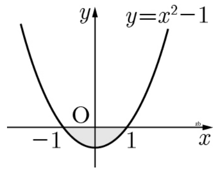
$$=-\left(\frac{16}{3}-4-8\right)+\left(-\frac{2}{3}-1+4\right)=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}=9$$

4) $\frac{4}{3}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x^2-1=(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$




구간 $[-1,\ 1]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$

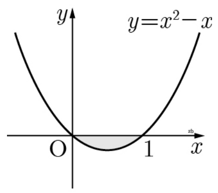
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}$$

5) $\frac{1}{6}$

⇨ 곡선 $y=x^2-x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $x^2-x=0$에서

$x(x-1)=0$ $\quad\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$




따라서 구하는 넓이는

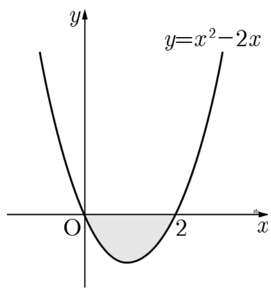
$$\int_{0}^{1}\{-(x^2-x)\}\,dx=-\int_{0}^{1}(x^2-x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{6}$$

6) $\frac{4}{3}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x^2-2x=x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$



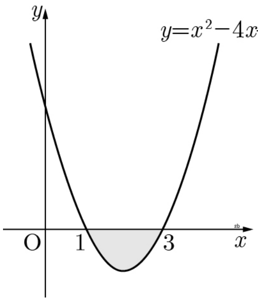

구간 $[0,\ 2]$에서 $y\le 0$이므로

$$-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$

7) $\frac{4}{3}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$




구간 $[1, 3]$에서 $y \le 0$이므로

$-\int_{1}^{3}(x^2-4x+3)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{1}^{3}$

$=-(9-18+9)+\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=\frac{4}{3}$

8) 9

⇨ 곡선 $y=2x^2+6x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$2x^2+6x=0$에서 $2x(x+3)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=-3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{-3}^{0}(-2x^2-6x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_{-3}^{0}=-(18-27)=9$

9) $\frac{32}{3}$

⇨ 곡선 $y=-x^2+4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+4x=0$에서 $-x(x-4)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx$

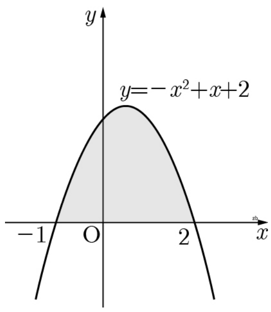
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{4}=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$

10) $\frac{9}{2}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$




구간 $[-1, 2]$에서 $y \ge 0$이므로

$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$

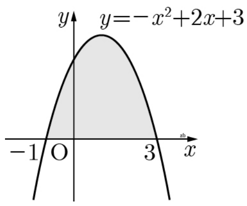
11) $\frac{32}{3}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+2x+3=0$에서

$-(x+1)(x-3)=0$　　　$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1,\ 3]$에서 $y \ge 0$




따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

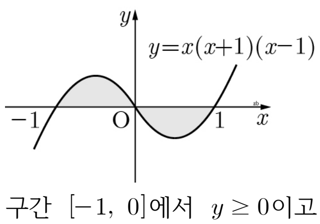
$S=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$

$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$

12) $\frac{1}{2}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $x(x+1)(x-1)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$




구간 $[-1,\ 0]$에서 $y \ge 0$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $y \le 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{-1}^{1}|x(x+1)(x-1)|dx$

$=\int_{-1}^{0}x(x+1)(x-1)dx+\int_{0}^{1}\{-x(x+1)(x-1)\}dx$

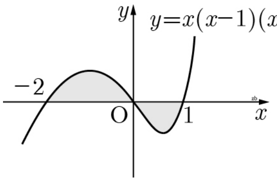
$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

13) $\frac{37}{12}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표를 $x(x-1)(x+2)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$




구간 $[-2,\ 0]$에서 $y\geq 0$이고 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}|x(x-1)(x+2)|dx$$

$$=\int_{-2}^{0}x(x-1)(x+2)dx+\int_{0}^{1}\{-x(x-1)(x+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$

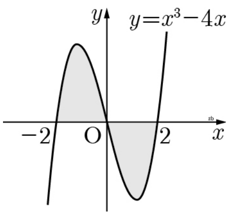
$$=-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{37}{12}$$

14) 8

⇨ 곡선 $y=x^3-4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $x^3-4x=0$에서

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$




따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$

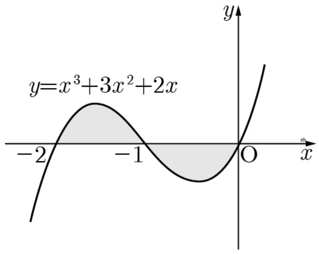
$$=4+4=8$$

15) $\frac{1}{2}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)=0$

에서 $x=-2,\ x=-1,\ x=0$




구간 $[-2,\ -1]$에서 $y\geq 0$이고 $[-1,0]$에서 $y\leq 0$이므로

$$\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx-\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+2x)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{0}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}+x^3+x^2\right]_{0}^{-1}$$

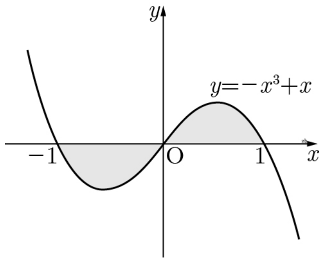
$$=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-(4-8+4)+\left(\frac{1}{4}-1+1\right)=\frac{1}{2}$$

16) $\frac{1}{2}$

⇨ 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$-x^3+x=-x(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1,\ x=0,\ x=1$




구간 $[-1,0]$에서 $y\leq 0$이고 구간 $[0,1]$에서 $y\geq 0$이므로

$$-\int_{-1}^{0}(-x^3+x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

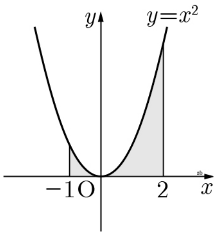
$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

17) $\frac{4}{3}$

⇨ $\int_{-2}^{0}x^2(x+2)\,dx=\int_{-2}^{0}(x^3+2x^2)\,dx$

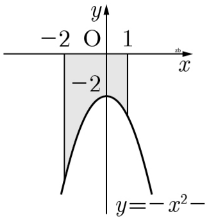
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0}=-\left(4-\frac{16}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

18) 3

⇨ 


$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$$

19) 9

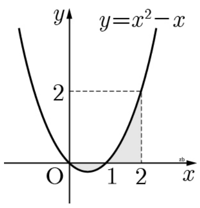
⇨ 


$$\int_{-2}^{1}\{-(-x^2-2)\}\,dx=\int_{-2}^{1}(x^2+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{7}{3}-\left(-\frac{20}{3}\right)=9$$

20) 1

⇨ $y=x^2-x$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{0}^{2}|x^2-x|\,dx$$

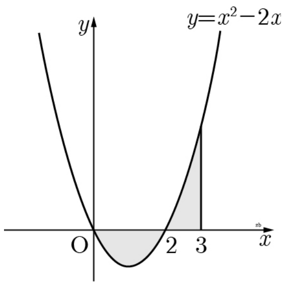
$$=\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=1$$

21) $\frac{8}{3}$

⇨ $y=x^2-2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 구하는 넓이 $S$는

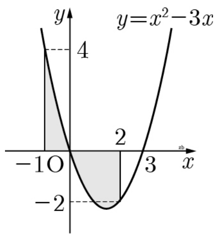
$$S=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)=\frac{8}{3}$$

22) $\frac{31}{6}$

⇨ $y=x^2-3x$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}|x^2-3x|dx$$

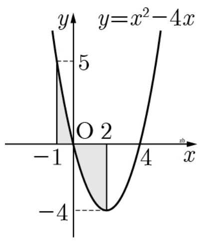
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+6\right)=\frac{31}{6}$$

23) $\frac{23}{3}$

⇨ $y=x^2-4x$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}|x^2-4x|dx$$

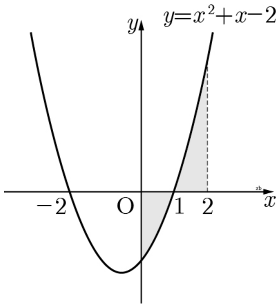
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-2\right)+\left(-\frac{8}{3}+8\right)=\frac{23}{3}$$

24) 3

⇨ $y=x^2+x-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 구하는 넓이 $S$는

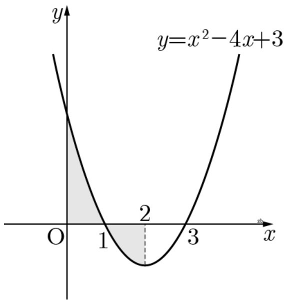
$S=-\int_0^1 (x^2+x-2)dx+\int_1^2 (x^2+x-2)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$

$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=3$

25) 2

⇨ $y=x^2-4x+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 구하는 넓이 $S$는

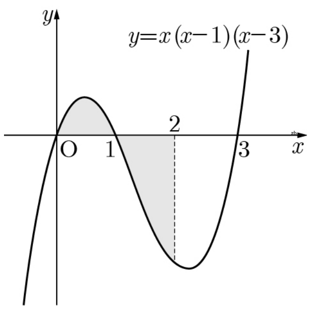
$S=\int_0^1 (x^2-4x+3)dx-\int_1^2 (x^2-4x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)+\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=2$

26) $\frac{3}{2}$

⇨ $y=x(x-1)(x-3)=x^3-4x^2+3x$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 구하는 넓이 $S$는

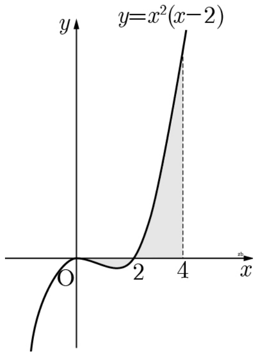
$S=\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx-\int_1^2 (x^3-4x^2+3x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)-\left(4-\frac{32}{3}+6\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

27) 24

⇨ $y=x^2(x-2)=x^3-2x^2$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 구하는 넓이 $S$는

$S=-\int_0^2 (x^3-2x^2)dx+\int_2^4 (x^3-2x^2)dx$

$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_2^4$

$=-\left(4-\frac{16}{3}\right)+\left(64-\frac{128}{3}\right)-\left(4-\frac{16}{3}\right)=24$

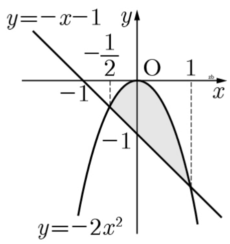
28) $\frac{9}{8}$

⇨ 곡선 $y=-2x^2$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 $x$좌표는 $-2x^2=-x-1$에서

$2x^2-x-1=0$

$(2x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$




따라서 구하는 넓이는

$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \{-2x^2-(-x-1)\}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^2+x+1)dx$

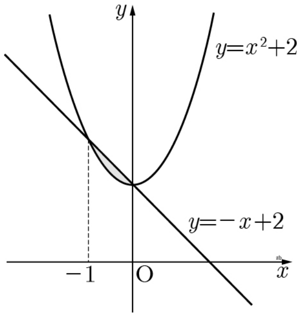
$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^1$

$=\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{24}\right)=\frac{9}{8}$

29) $\frac{1}{6}$

⇨ 교점의 $x$좌표는 $x^2+2=-x+2$에서

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_{-1}^{0}\{(-x+2)-(x^2+2)\}dx$

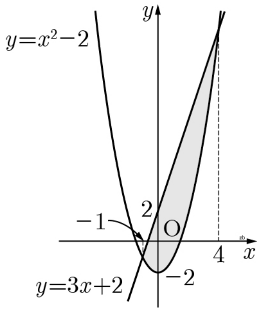
$=\int_{-1}^{0}(-x-x^2)dx$

$=\int_{0}^{-1}(x+x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^{-1}=\frac{1}{6}$

30) $\frac{125}{6}$

⇨ 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=3x+2$의 교점의 $x$좌표는 $x^2-2=3x+2$에서
$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=4$




따라서 구하는 넓이는

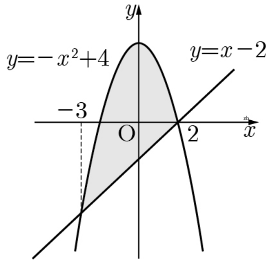
$\int_{-1}^{4}\{(3x+2)-(x^2-2)\}dx$

$=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}$

$=\frac{56}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{125}{6}$

31) $\frac{125}{6}$

⇨ 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=x-2$로 둘러싸인 도형의 넓이는
$y=(-x^2+4)-(x-2)=-x^2-x+6$
의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
교점의 $x$좌표는
$-x^2-x+6=-(x+3)(x-2)=0$에서
$x=-3$ 또는 $x=2$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_{-3}^{2}\{(-x^2+4)-(x-2)\}dx$

$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx$

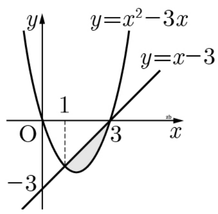
$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{2}$

$=\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)-\left(9-\frac{9}{2}-18\right)$

$=\frac{22}{3}+\frac{27}{2}=\frac{125}{6}$

32) $\frac{4}{3}$

⇨ 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=x-3$의 교점의 $x$좌표는
$x^2-3x=x-3$에서 $x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore$ $x=1$ 또는 $x=3$




이때, 구간 $[1,\ 3]$에서 $x-3\geq x^2-3x$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{1}^{3}\{(x-3)-(x^2-3x)\}dx$

$=\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx$

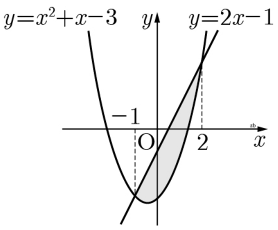
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$

$=(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$

33) $\frac{9}{2}$

⇨ 곡선 $y=x^2+x-3$과 직선 $y=2x-1$의 교점의 $x$좌표는 $x^2+x-3=2x-1$에서 $x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$


I410-ECN-0199-2019-001-000244110




이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $2x-1 \ge x^2+x-3$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{-1}^{2}\{(2x-1)-(x^2+x-3)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

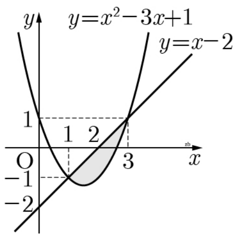
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$

34) $\frac{4}{3}$

⇨ 곡선 $y=x^2-3x+1$과 직선 $y=x-2$의 교점의 $x$좌표는 $x^2-3x+1=x-2$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$




이때, 구간 $[1,\ 3]$에서 $x-2 \ge x^2-3x+1$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{1}^{3}\{(x-2)-(x^2-3x+1)\}dx$

$=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}$

$=(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$

35) $\frac{8}{3}$

⇨ 곡선 $y=2x^2-x+1$과 직선 $y=3x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=(2x^2-x+1)-(3x+1)=2x^2-4x$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y=2x^2-4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$2x^2-4x=0$에서

$2x(x-2)=0$ $\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$\int_{0}^{2}\{(3x+1)-(2x^2-x+1)\}dx$

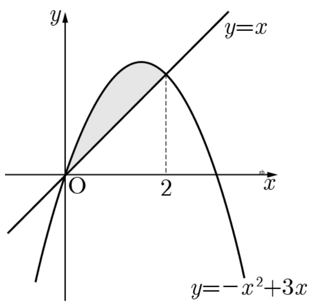
$=\int_{0}^{2}(-2x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}=-\frac{16}{3}+8=\frac{8}{3}$

36) $\frac{4}{3}$

⇨ 교점의 $x$좌표는 $-x^2+3x=x$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_{0}^{2}\{(-x^2+3x)-x\}dx$

$=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$

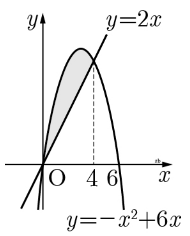
$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$

37) $\frac{32}{3}$

⇨ 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+6x=2x$에서 $x^2-4x=0,\ x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$




이때, 구간 $[0,\ 4]$에서 $-x^2+6x \ge 2x$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{0}^{4}(-x^2+6x-2x)dx$

$=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$

38) $\frac{9}{2}$

⇨ 곡선 $y=-x^2+7x$와 직선 $y=2x+4$로 둘러싸인

도형의 넓이는 $y=(-x^2+7x)-(2x+4)=-x^2+5x-4$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

교점의 $x$좌표는 $-x^2+5x-4=-(x-1)(x-4)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$이므로 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_1^4\{(-x^2+7x)-(2x+4)\}dx$$

$$=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+40-16\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)$$

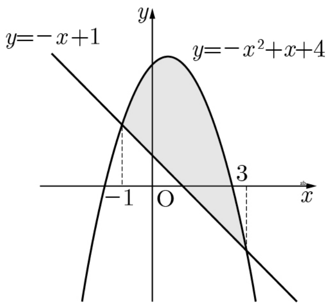
$$=\frac{8}{3}+\frac{11}{6}=\frac{9}{2}$$

39) $\frac{32}{3}$

⇨ 교점의 $x$좌표는 $-x^2+x+4=-x+1$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-1}^3\{(-x^2+x+4)-(-x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$

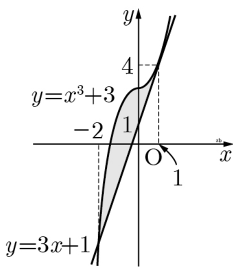
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3$$

$$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

40) $\frac{27}{4}$

⇨ 곡선 $y=x^3+3$과 직선 $y=3x+1$의 교점의 $x$좌표는 $x^3+3=3x+1$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$ $\quad\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$




이때, 구간 $[-2,\ 1]$에서 $x^3+3\geq 3x+1$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^1\{(x^3+3)-(3x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^1(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4)=\frac{27}{4}$$

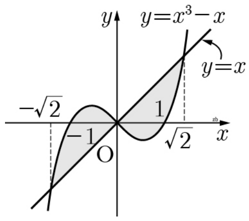
41) 2

⇨ 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $x^3-x=x$에서

$x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$




따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^0\{(x^3-x)-x\}dx+\int_0^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^0(x^3-2x)dx+\int_0^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=1+1=2$$

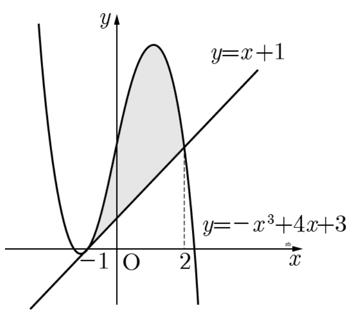
42) $\frac{27}{4}$

⇨ 곡선 $y=-x^3+4x+3$과 직선 $y=x+1$의 교점의 $x$좌표는 $-x^3+4x+3=x+1$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-1}^2\{(-x^3+4x+3)-(x+1)\}dx$$

$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

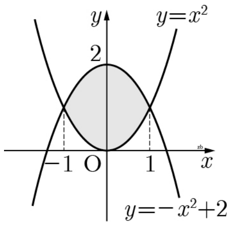
$=(-4+6+4)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)=\frac{27}{4}$

43) $\frac{8}{3}$

⇨ 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2$의 교점의 $x$좌표는 $x^2=-x^2+2$에서

$2x^2-2=0$, $2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$




따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2)-x^2\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$

$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

44) $\frac{8}{3}$

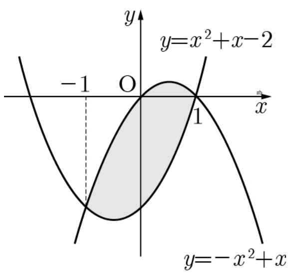
⇨ 두 곡선 $y=-x^2+x$, $y=x^2+x-2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$y=(-x^2+x)-(x^2+x-2)=-2x^2+2$

의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

교점의 $x$좌표는 $-2x^2+2=-2(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x)-(x^2+x-2)\}dx$

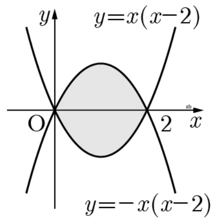
$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{0}^{1}=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{8}{3}$

45) $\frac{8}{3}$

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 $x(x-2)=-x(x-2)$에서

$2x(x-2)=0$ $\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$




이때, 구간 $[0,\ 2]$에서 $-x(x-2)\geq x(x-2)$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_{0}^{2}\{-x(x-2)-x(x-2)\}dx$

$=\int_{0}^{2}(-2x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$

46) $\frac{8}{3}$

⇨ 두 곡선 $y=x^2-3x$, $y=-x^2+5x-6$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$y=(-x^2+5x-6)-(x^2-3x)=-2x^2+8x-6$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

교점의 $x$좌표는

$-2x^2+8x-6=-2(x-1)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$이므로 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_{1}^{3}\{(-x^2+5x-6)-(x^2-3x)\}dx$

$=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}$

$=(-18+36-18)-\left(-\frac{2}{3}+4-6\right)=\frac{8}{3}$

47) $\frac{8}{3}$

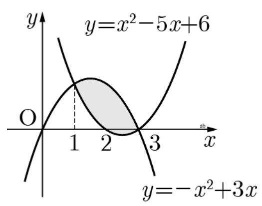
⇨ 두 곡선 $y=x^2-5x+6$, $y=-x^2+3x$의 교점의 $x$좌표는

$x^2-5x+6=-x^2+3x$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\}\,dx$$

$$=\int_1^3 (-2x^2+8x-6)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3$$

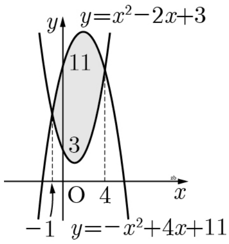
$$=0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

48) $\frac{125}{3}$

⇨ 두 곡선의 교점이 $x$좌표는

$x^2-2x+3=-x^2+4x+11$에서 $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$




이때, 구간 $[-1,\ 4]$에서 $-x^2+4x+11 \geq x^2-2x+3$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^4 \{(-x^2+4x+11)-(x^2-2x+3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^4 (-2x^2+6x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x\right]_{-1}^4$$

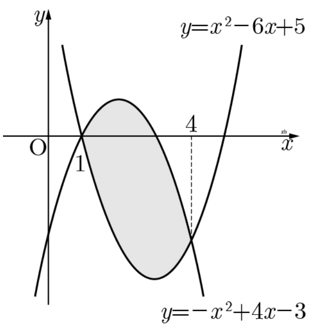
$$=\left(-\frac{128}{3}+48+32\right)-\left(\frac{2}{3}+3-8\right)=\frac{125}{3}$$

49) 9

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+4x-3=x^2-6x+5$, $2(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_1^4 \{(-x^2+4x-3)-(x^2-6x+5)\}dx$$

$$=\int_1^4 (-2x^2+10x-8)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4$$

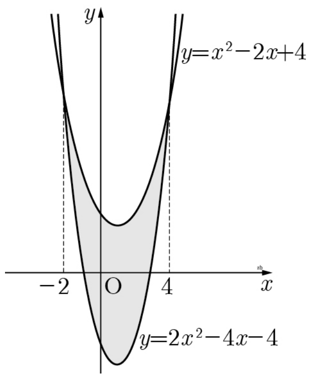
$$=\left(-\frac{128}{3}+80-32\right)-\left(-\frac{2}{3}+5-8\right)=9$$

50) 36

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$2x^2-4x-4=x^2-2x+4$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-2}^4 \{(x^2-2x+4)-(2x^2-4x-4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^4 (-x^2+2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^4$$

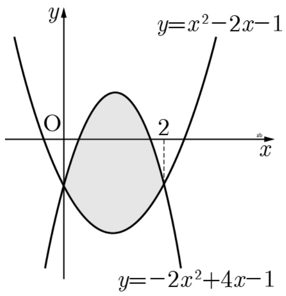
$$=\left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36$$

51) 4

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$x^2-2x-1=-2x^2+4x-1$, $3x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_0^2 \{(-2x^2+4x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

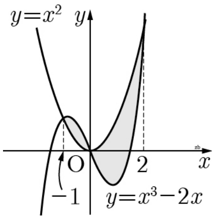
$$=\int_0^2 (-3x^2+6x)dx$$

$$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=4$$

52) $\frac{37}{12}$

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$
$x(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

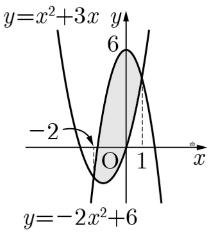



이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^3-2x\ge x^2$이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2\ge x^3-2x$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(-4+\frac{8}{3}+4\right)=\frac{37}{12}$$

53) $\frac{27}{2}$

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는
$x^2+3x=-2x^2+6$에서 $x^2+x-2=0$
$(x-1)(x+2)=0$ $\qquad\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

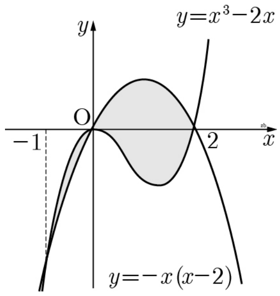



이때, 구간 $[-2,\ 1]$에서 $-2x^2+6\ge x^2+3x$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}\{(-2x^2+6)-(x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-3x^2-3x+6)dx$$
$$=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(-1-\frac{3}{2}+6\right)-(8-6-12)=\frac{27}{2}$$

54) $\frac{37}{12}$

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는
$x^3-2x^2=-x^2+2x$, $x(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

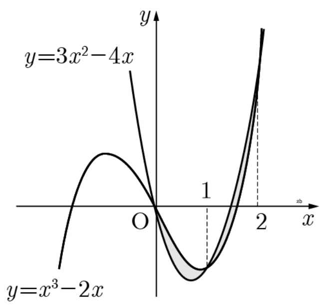



따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x^2)-(-x^2+2x)\}dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^3-2x^2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(-4+\frac{8}{3}+4\right)=\frac{37}{12}$$

55) $\frac{1}{2}$

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 $x^3-2x=3x^2-4x$에서
$x^3-3x^2+2x=0$
$x(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$




이때, 구간 $[0,\ 1]$에서 $x^3-2x\ge 3x^2-4x$이고 구간 $[1,\ 2]$에서 $3x^2-4x\ge x^3-2x$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

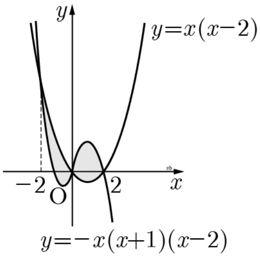
$$S=\int_{0}^{1}\{(x^3-2x)-(3x^2-4x)\}dx$$
$$+\int_{1}^{2}\{(3x^2-4x)-(x^3-2x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)+(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)=\frac{1}{2}$$

56) 8

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는
$x(x-2)=-x(x+1)(x-2)$에서 $x(x-2)(x+2)=0$


I410-ECN-0199-2019-001-000244110

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$




이때, 구간 $[-2,\ 0]$에서 $x(x-2)\geq -x(x+1)(x-2)$ 이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $x(x-2)\leq -x(x+1)(x-2)$이므로 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{0}\{x(x-2)+x(x+1)(x-2)\}dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{-x(x+1)(x-2)-x(x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$

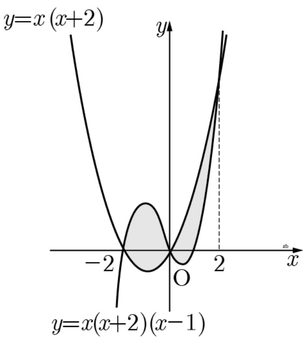
$$=-(4-8)+(-4+8)=8$$

57) 8

⇨ 두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$x(x+2)=x(x+2)(x-1)$, $x(x+2)(2-x)=0$

$\therefore x=-2,\ x=0,\ x=2$




따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-2}^{0}\{x(x+2)(x-1)-x(x+2)\}dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{x(x+2)-x(x+2)(x-1)\}dx$$

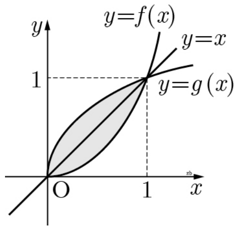
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-(4-8)+(-4+8)=8$$

58) $\frac{1}{3}$

⇨ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면 $S$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $x^2=x$에서 $x(x-1)=0$

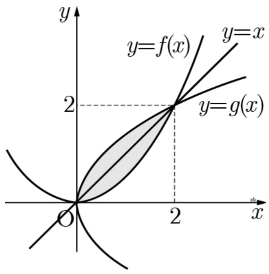
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

59) $\frac{4}{3}$

⇨ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 $S$라고 하면 $S$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{1}{2}x^2=x$에서 $x(x-2)=0$

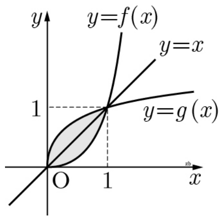
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이 $S$는

$$S=2\int_{0}^{2}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$

60) $\frac{1}{2}$

⇨ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면 $S$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $x^3=x$에서 $x(x-1)(x+1)=0$

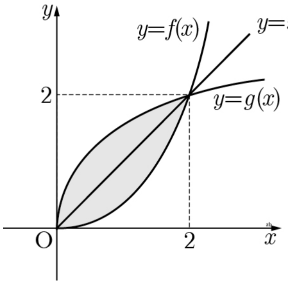
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because$ $x\geq 0$)

따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=2\int_0^1 (x-x^3)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$

61) 2

⇨ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 $S$라고 하면 $S$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{1}{4}x^3=x$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

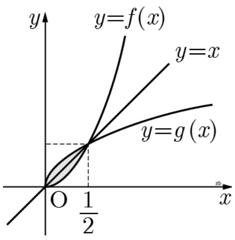
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ $(\because x \ge 0)$

따라서 구하는 넓이 $S$는

$S=2\int_0^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x^4\right]_0^2=2$

62) $\frac{1}{24}$

⇨ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면 $S$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x=x$에서

$\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x=0$, $x(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ $(\because\ x \ge 0)$

따라서 구하는 도형의 넓이를 $S$라 하면

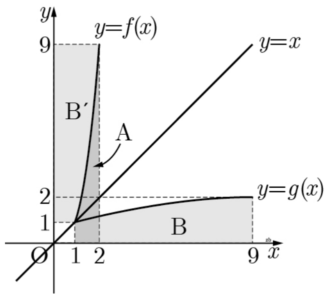
$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{x-\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x\right)\right\}dx$

$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{6}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}$

63) $\frac{51}{4}$

⇨ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림에서 $\int_1^9 g(x)dx$의 값은 색칠된 부분 $B$의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 부분 $B'$의 넓이와 같다.




$\therefore \int_1^9 g(x)dx=(B$의 넓이$)=(B'$의 넓이$)$

$=2\cdot 9-1\cdot 1-(A$의 넓이$)$

$=18-1-\int_1^2 f(x)dx$

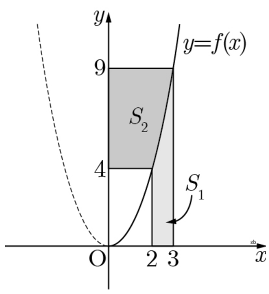
$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$

$=17-(4+2-2)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{51}{4}$

64) 19

⇨ $f(x)=x^2\ (x \ge 0)$에서 $f(2)=4$, $f(3)=9$

이때, $\int_2^3 f(x)dx=S_1$, $\int_4^9 g(x)dx=S_2$라 하면

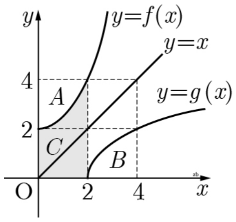



$\therefore \int_2^3 f(x)dx+\int_4^9 g(x)dx$

$=S_1+S_2=3\times 9-2\times 4=19$

65) 8

⇨ 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ (x \ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.




그림에서

($A$의 넓이)=($B$의 넓이)이므로

$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 g(x)dx$

=($C$의 넓이)+($B$의 넓이)

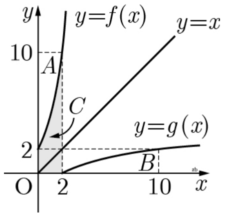
=($C$의 넓이)+($A$의 넓이)

$=2\times4=8$

66) 20

⇨ 함수 $f(x)=x^3+2\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.




그림에서 ($A$의 넓이)=($B$의 넓이)이므로

$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^{10} g(x)dx$

=($C$의 넓이)+($B$의 넓이)

=($C$의 넓이)+($A$의 넓이)

$=2\times10=20$