01 등비수열의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$에서

(1) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $|r|<1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le -1$ 일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

◪ 다음 수열의 수렴과 발산을 조사하여라.

1. $5,\ 5,\ 5,\ \cdots$

2. $1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{27}{8},\ \frac{81}{16},\ \cdots$

3. $1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ -\frac{27}{8},\ \frac{81}{16},\ \cdots$

4. $2,\ \sqrt{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \cdots$

5. $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$

6. $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$

7. $\{(1.1)^n\}$

8. $\{2^n\}$

9. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

10. $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

11. $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$

12. $\left\{\left(-\frac{5}{3}\right)^n\right\}$

13. $\left\{\left(-\frac{9}{8}\right)^n\right\}$

14. $\left\{\frac{3^n}{4^n}\right\}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

15. $\{(-0.9)^n\}$

16. $\{(-1.2)^n\}$

◪ 다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

17. $\left\{4+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

18. $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{1-n}\right\}$

19. $\left\{\frac{4^n}{3^{n+1}}\right\}$

20. $\left\{\frac{2^n+1}{3^n-1}\right\}$

21. $\left\{\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}\right\}$

22. $\left\{\frac{3^n-2^n}{4^n+3^n}\right\}$

23. $\left\{\frac{4^n-3^n}{4^{n+1}}\right\}$

24. $\left\{\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}}\right\}$

25. $\left\{\frac{2^n-5\cdot 3^n}{2^n+3^n}\right\}$

26. $\left\{\frac{3^n-6\cdot 4^n}{3^n+4^n}\right\}$

27. $\left\{\frac{3^n+5^n}{2^{n+1}}\right\}$

28. $\left\{\frac{5^{n+1}+1}{5^n+3^n}\right\}$

29. $\left\{\frac{6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}\right\}$

30. $\left\{\frac{2\cdot 3^{n+1}+5}{3^n}\right\}$

31. $\left\{\frac{4^{n+1}+2^n}{4^n-3^{n+1}}\right\}$

32. $\left\{\frac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}\right\}$

33. $\left\{\dfrac{\sqrt{5^n}+1}{2^n}\right\}$

34. $\{5^n-3^n-2^n\}$

35. $\{3^{-n}+4^{-n}\}$

36. $\left\{(3^n+2^n)^{\frac{1}{n}}\right\}$

37. $\left\{(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\right\}$ (단, $0<b<a$)

02 등비수열의 수렴 조건

(1) 수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건
⇨ $-1<r\le 1$
(2) 수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건
⇨ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

◪ 다음 등비수열이 수렴하기 위한 x의 범위를 구하여라.

38. $1,\ 3x,\ 9x^2,\ 27x^3,\ \cdots$

39. $1,\ \dfrac{x}{2},\ \dfrac{x^2}{4},\ \dfrac{x^3}{8},\ \dfrac{x^4}{16},\ \cdots$

40. $1,\ -\dfrac{x}{2},\ \dfrac{x^2}{4},\ -\dfrac{x^3}{8},\ \cdots$

41. $\dfrac{2x}{3},\ -\dfrac{4x^2}{9},\ \dfrac{8x^3}{27},\ -\dfrac{16x^4}{81},\ \cdots$

42. $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right\}$

43. $\left\{\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^n\right\}$

44. $\{(2x-1)^n\}$

45. $\{(x-1)^{2n-1}\}$

46. $\{x(x-1)^{n-1}\}$

47. $\{x(x-2)^{n-1}\}$

48. $\{(x+5)(x-3)^{n-1}\}$

03 r^n을 포함한 식의 극한값

r^n을 포함한 식의 극한값은 다음의 경우로 나누어 조사한다.

① $|r|>1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$

③ $|r|<1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$

④ $r=-1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n$은 진동(발산)

◪ **다음은 $r>0$ 일 때, $a_n=\dfrac{r^n}{1+r^n}$ 의 극한값을 r의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.**

49. $0<r<1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\square$**이므로** $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}=\square$

50. $r=1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\square$**이므로** $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}=\square$

51. $r>1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ **이므로** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=\square$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\square$

◪ **다음은 $r>0$ 일 때, $a_n=\dfrac{1-r^n}{1+r^n}$ 의 극한값을 r의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.**

52. $0<r<1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\square$**이므로** $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\square$

53. $r=1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\square$**이므로** $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\square$

54. $r>1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ **이므로** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=\square$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\square$

◪ **다음은 $r>0$ 일 때, $a_n=\dfrac{r^{n+1}-1}{r^n+1}$ 의 극한값을 r의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.**

55. $0<r<1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\square$**이므로** $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\square$

56. $r=1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\square$**이므로** $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\square$

57. $r>1$**일 때**

$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ **이므로** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=\square$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}=\square$

◪ 다음은 $a_n=\dfrac{r^n+r^2}{r^n+2}$의 극한값을 r의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

58. $|r|<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\square$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+r^2}{r^n+2}=\square$

59. $r=1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\square$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+r^2}{r^n+2}=\square$

60. $r=-1$일 때

n이 짝수이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+r^2}{r^n+2}=\square$

n이 홀수이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+r^2}{r^n+2}=\square$

따라서 $r=-1$일 때, a_n은 □한다.

61. $|r|>1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=\square$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}}{1+2\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^n}=\square$$

◪ 다음은 $a_n=\dfrac{r^n-r^{2n}}{1+r^{2n}}$의 극한값을 r의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

62. $|r|<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\square$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\square$

63. $r=1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\square$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\square$

64. $r=-1$일 때

n이 짝수이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\square$

n이 홀수이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\square$

따라서 $r=-1$일 때, a_n은 □한다.

65. $|r|>1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=\square$

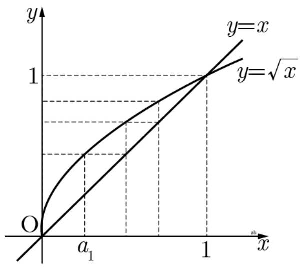
주어진 식의 분모, 분자를 r^{2n}으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^{2n}}+1}=\square$$

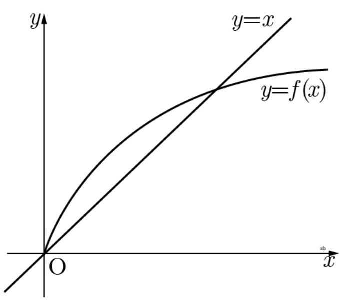
04 수열의 극한의 활용

(1) 그래프를 이용한 극한
⇨ $a_{n+1}=f(a_n)$ 꼴의 극한은 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프를 이용한다.
(2) 수열의 극한과 도형
⇨ 도형의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 수열의 일반항을 찾는다.

66. 함수 $f(x)=\sqrt{x}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의하자. 이때 다음 그래프를 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

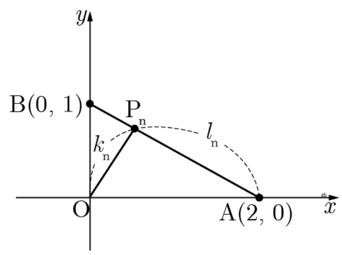


67. 함수 $f(x)=\sqrt{x}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의하자. 이때, 다음 그래프를 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

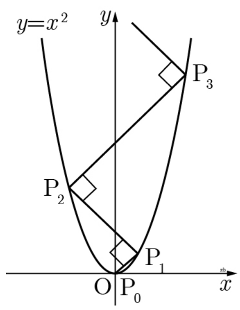


68. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2^n)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 원점 O와 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에 대하여 사각형 $\mathrm{AOQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$의 값을 구하여라.

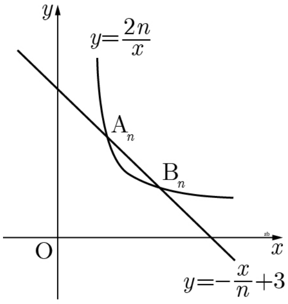
69. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $1:n$으로 내분하는 점을 P_n이라 하자. $\overline{\mathrm{OP}_k}=k_n$, $\overline{\mathrm{AP}_n}=l_n$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\cdot l_n}{k_n}$의 값을 구하여라.



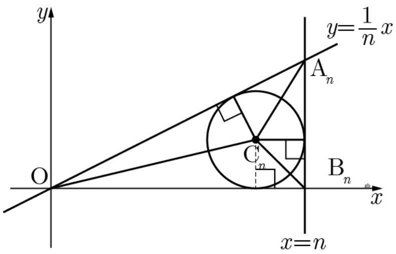
70. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다. $l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}_0(0,0)$, $\mathrm{P}_1(1,1)$)



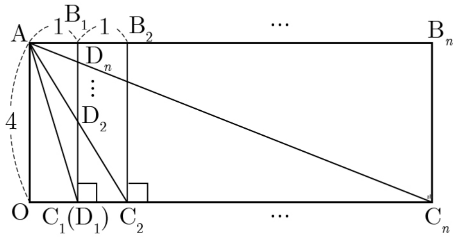
71. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{2n}{x}$과 직선 $y=-\frac{x}{n}+3$의 두 교점을 A_n, B_n이라고 한다. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(l_{n+1}-l_n)$의 값을 구하여라.



72. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값을 구하여라.



73. 그림과 같이 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 4인 직사각형 OAB_1C_1에서 가로의 길이를 1만큼 늘여서 직사각형 OAB_kC_k (단, $k=1, 2, \cdots, n$)를 만들었다. 직사각형 OAB_nC_n에서 대각선 AC_n과 선분 B_1C_1의 교점을 D_n이라고 하자.



이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}$의 값을 구하여라.(단, n은 자연수)

74. 전자계산기의 근호 ($\sqrt{}$)키를 누르면 계산기는 표시창에 나타난 수의 양의 제곱근을 보여준다. 지금 표시창에 어떤 양수 a가 나타나 있을 때, 근호키를 계속하여 누르면 표시창에 나타나는 값은 어떤 값에 가까워지는지 구하여라.

75. 한 자동차 업체에서는 매일 생산되는 200대의 수출용 자동차를 배에 선적하기 전에 임시주차장으로 주차시켜 놓는다고 한다. 그리고 전날까지 임시주차장에 있던 수출용 자동차 중에서 $\frac{2}{5}$가 선적이 된다고 한다. 이 자동차업체가 이와 같은 방법으로 자동차를 계속해서 생산하고 선적하여 수출해나간다고 할 때, 임시주차장의 자동차 수용은 최소한 몇 대 이상이 되어야 하는지 구하여라.

정답 및 해설

1) 수렴
⇨ 공비는 1이고 $-1<1\le 1$이므로 수렴한다.

2) 발산
⇨ 공비는 $\frac{3}{2}$이고 $\frac{3}{2}>1$이므로 발산한다.

3) 진동(발산)
⇨ 공비 r가 $r\left(=-\frac{3}{2}\right)\le -1$ 이므로 진동(발산)한다.

4) 수렴
⇨ 공비 r가 $-1<r\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<1$이므로 0에 수렴한다.

5) 수렴
⇨ 공비는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 $-1<\frac{1}{\sqrt{3}}\le 1$ 이므로
수렴한다.

6) 발산
⇨ 주어진 등비수열의 공비는 $\frac{3}{2}$이고, $\frac{3}{2}>1$이므로 발산한다.

7) 발산
⇨ 공비 r가 $r(=1.1)>1$이므로 양의 무한대로 발산한다.

8) 발산
⇨ 공비는 2이고 $2>1$이므로 발산한다.

9) 수렴
⇨ 공비는 $-\frac{1}{2}$이고 $-1<-\frac{1}{2}\le 1$이므로
수렴한다.

10) 수렴
⇨ 공비 r가 $-1<r\left(=-\frac{1}{3}\right)<1$이므로 0에 수렴한다.

11) 진동(발산)
⇨ 주어진 등비수열의 공비는 $-\frac{4}{3}$이고, $-\frac{4}{3}\le -1$ 이므로 진동(발산)한다.

12) 진동(발산)
⇨ 공비는 $-\frac{5}{3}$이고 $-\frac{5}{3}\le -1$이므로
진동(발산)한다.

13) 진동(발산)
⇨ 공비 r가 $r\left(=-\frac{9}{8}\right)\le -1$ 이므로 진동(발산)한다.

14) 수렴
⇨ $\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$에서 주어진 등비수열의 공비는 $\frac{3}{4}$이고, $-1<\frac{3}{4}<1$이므로 0에 수렴한다.

15) 수렴
⇨ 공비 r가 $-1<r(=-0.9)<1$이므로 0에 수렴한다.

16) 진동(발산)
⇨ 공비는 -1.2이고 $-1.2\le -1$이므로 진동(발산)
한다.

17) 수렴, 4
⇨ 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$의 공비는 $-\frac{1}{3}$이고,
$-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{4+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}4+\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n =4+0=4(\text{수렴})$$

18) 발산
⇨ $\left(\frac{3}{5}\right)^{1-n}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{3}\right)^n$에서 공비는 $\frac{5}{3}$이고, $\frac{5}{3}>1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{1-n}=\infty$(발산)

19) 발산
⇨ $\frac{4^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$에서 공비는 $\frac{4}{3}$이고, $\frac{4}{3}>1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^{n+1}}=\infty$(발산)

20) 수렴, 0
⇨ 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=0$$

21) 수렴, 1
⇨ 분자, 분모를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

22) 수렴, 0

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0-0}{1+0}=0$

23) 수렴, $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{4^n-3^n}{4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4}=\frac{1}{4}$

24) 수렴, $\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5}=\frac{1-0}{5}=\frac{1}{5}$

25) 수렴, -5

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5\times 3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=-5$

26) 수렴, -6

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3^n-6\cdot 4^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-6}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{0-6}{0+1}=-6$

27) 발산

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{2}\right)^n}{2}=\frac{\infty+\infty}{2}=\infty$

28) 수렴, 5

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+1}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5$

29) 수렴, 6

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=6$

30) 수렴, 6

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1}=6$

31) 수렴, 4

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^n}{4^n-3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$

32) 수렴, 3

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}=3$

33) 발산

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5^n}+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\infty$

34) 발산

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(5^n-3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$
$=\infty$(발산)

35) 수렴, 0

$\Rightarrow$ $3^{-n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서 공비는 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}3^{-n}=0$

$4^{-n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$에서 공비는 $\frac{1}{4}$이고, $-1<\frac{1}{4}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}4^{-n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(3^{-n}+4^{-n})=0+0=0$(수렴)

36) 수렴, 3

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(3^n+2^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[3^n\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$
$=\lim_{n\to\infty}3\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$
$=3$

37) 수렴, a

$\Rightarrow$ $b<a$이므로 a^n+b^n에서 a^n으로 묶는다.

$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[a^n\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$
$=\lim_{n\to\infty}a\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$
$=a\left(\because 0<\frac{b}{a}<1\right)$

38) $-\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 공비가 $3x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<3x\le 1$ $\therefore -\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{3}$

39) $-2<x\le 2$

$\Rightarrow$ 공비가 $\frac{x}{2}$ 인 등비수열이므로 주어진 수열이 수렴하려면 $-1<\frac{x}{2}\le 1$ $\therefore -2<x\le 2$

40) $-2\le x<2$

⇨ 공비가 $-\frac{x}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{2}\le 1$ $\quad\therefore\ -2\le x<2$

41) $-\frac{3}{2}\le x<\frac{3}{2}$

⇨ (ⅰ) 첫째항: $\frac{2x}{3}=0$ $\therefore x=0$

(ⅱ) 공비: $-1<-\frac{2x}{3}\le 1$ $\therefore -\frac{3}{2}\le x<\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-\frac{3}{2}\le x<\frac{3}{2}$

42) $-2<x\le 2$

⇨ 첫째항이 $\frac{x}{2}$, 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 주어진

등비수열이 수렴하려면 $-1<\frac{x}{2}\le 1$ $\therefore -2<x\le 2$

43) $-1<x\le 5$

⇨ 공비가 $\frac{x-2}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x-2}{3}\le 1$, $-3<x-2\le 3$

$\therefore\ -1<x\le 5$

44) $0<x\le 1$

⇨ 공비가 $2x-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2x-1\le 1$, $0<2x\le 2$ $\quad\therefore 0<x\le 1$

45) $0\le x\le 2$

⇨ 수열 $\{(x-1)^{2n-1}\}$은 첫째항이 $x-1$이고 공비가 $(x-1)^2$인 등비수열이므로 수렴하는 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) 첫째항: $x-1=0$ $\therefore x=1$

(ⅱ) 공비: $-1<(x-1)^2\le 1$

$(x-1)^2\le 1$에서 $x^2-2x\le 0$, $x(x-2)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 2$

(ⅰ),(ⅱ)에서 $0\le x\le 2$

46) $0\le x\le 2$

⇨ 첫째항이 x이고 공비가 $x-1$이므로 주어진

등비수열이 수렴하려면

$x=0$ 또는 $-1<x-1\le 1$

$\therefore\ 0\le x\le 2$

47) $x=0$ 또는 $1<x\le 3$

⇨ 수열 $\{x(x-2)^{n-1}\}$은 첫째항이 x이고 공비가 $x-2$인 등비수열이므로 수렴하는 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) 첫째항: $x=0$

(ⅱ) 공비: $-1<x-2\le 1$ $\therefore 1<x\le 3$

(ⅰ),(ⅱ)에서 $x=0$ 또는 $1<x\le 3$

48) $x=-5$, $2<x\le 4$

⇨ 첫째항이 $x+5$이고 공비가 $x-3$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$x+5=0$ 또는 $-1<x-3\le 1$

$\therefore x=-5$, $2<x\le 4$

49) 0, 0

50) 1, $\frac{1}{2}$

51) 0, 1

52) 0, 1

53) 1, 0

54) 0, -1

55) 0, -1

56) 1, 0

57) 0, r

58) 0, $\frac{1}{2}r^2$

59) 1, $\frac{2}{3}$

60) $\frac{2}{3}$, 0, 발산

61) 0, 1

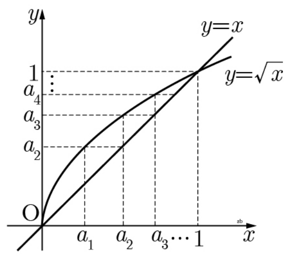
62) 0, 0

63) 1, 0

64) 0, -1, 발산

65) 0, -1

66) 1

⇨ 

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$이므로

$a_2=\sqrt{a_1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$a_3=\sqrt{a_2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

$a_4=\sqrt{a_3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$

$\vdots$

$a_n=\sqrt{a_{n-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

위의 그림에서 a_n은 $y=x$와 $y=\sqrt{x}$의 그래프의 교점의 x좌표인 1에 가까워진다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=1$

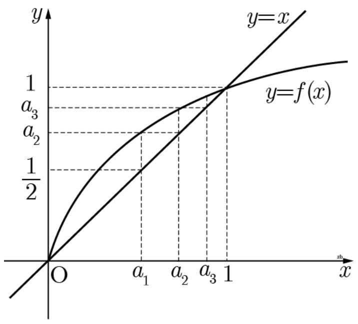
[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

67) 1

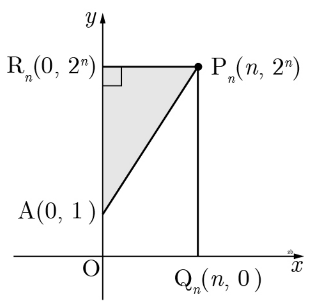
⇨ 주어진 수열 $\{a_n\}$을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 a_1, a_2, a_3, $\cdots$은 $y=x$와 $y=\sqrt{x}$의 교점 $(1,\ 1)$와 x좌표에 가까이 간다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$이다.

68) 1

⇨



그림에서 $S_n=\frac{1}{2}\cdot(1+2^n)\cdot n=\frac{(2^n+1)n}{2}$,

$T_n=\frac{1}{2}\cdot(2^n-1)\cdot n=\frac{(2^n-1)n}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2^n-1)n}{2}}{\frac{(2^n+1)n}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$

69) $\sqrt{5}$

⇨ $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:n$으로 내분하는 점 P_n의 좌표는

$\mathrm{P}_n\left(\frac{2n}{n+1},\ \frac{1}{n+1}\right)$

$k_n=\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{4n^2+1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+1}$

$l_n=\overline{\mathrm{AP}_n}=\sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}-2\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{5}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot l_n}{k_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{5}n}{n+1}}{\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{5}n}{\sqrt{4n^2+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}=\sqrt{5}$

70) $2\sqrt{2}$

⇨ 직선 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$의 기울기가 1이므로 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 기울기는 -1이다.

점 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 방정식은 $y=-x+2$

이때, 직선 $y=-x+2$와 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이 점 P_2이므로 점 P_2의 x좌표는

$-x+2=x^2$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

그런데 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$이므로 $\mathrm{P}_2(-2,\ 4)$

마찬가지 방법으로 점 P_3, P_4의 좌표를 구해 보면

$\mathrm{P}_3(3,\ 9)$, $\mathrm{P}_4(-4,\ 16)$

$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=5\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}=7\sqrt{2}$, $\cdots$이므로

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}=(2n-1)\sqrt{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}n-\sqrt{2}}{n}$

$=2\sqrt{2}$

71) 1

⇨ $y=-\frac{x}{n}+3$을 $y=\frac{2n}{x}$에 대입하면

$\frac{2n}{x}=-\frac{x}{n}+3$, $2n^2=-x^2+3nx$

$x^2-3nx+2n^2=0$, $(x-n)(x-2n)=0$

$\therefore x=n$ 또는 $x=2n$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

따라서 $\mathrm{A}_n(n,\ 2)$, $\mathrm{B}_n(2n,\ 1)$이므로

$l_n=\sqrt{(2n-n)^2+(1-2)^2}=\sqrt{n^2+1}$

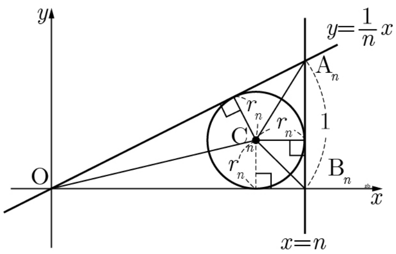
$\therefore \lim_{n\to\infty}(l_{n+1}-l_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{(\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1})}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$

72) $\dfrac{1}{4}$

⇨ 

두 점의 좌표는 $\mathrm{A}_n(n,\ 1)$, $\mathrm{B}_n(n,\ 0)$이고,

$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 내접원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n=\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n+\triangle \mathrm{C}_n\mathrm{OB}_n+\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot n\cdot 1=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{n^2+1}\cdot r_n+\dfrac{1}{2}\cdot n\cdot r_n+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot r_n$

$\therefore r_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n+1}$

$\therefore S_n=\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{n^2+1}\cdot\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n+1}$

$=\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{2(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$

$\therefore \dfrac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{2(\sqrt{n^2+1}+n+1)}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{4}$

73) 2

⇨ 주어진 조건에서 가로의 길이가 n이므로

$\overline{OC_n}=n$

삼각형 AOC_n은 밑변의 길이가 n, 높이가 4인 직각 삼각형이다.

$\therefore \overline{AC_n}=\sqrt{n^2+4^2}$

삼각형 AB_1D_n과 삼각형 AB_nC_n은 서로 닮음이다.

$\overline{AB_1}:\overline{B_1D_n}=\overline{AB_n}:\overline{B_nC_n}$에서 $1:\overline{B_1D_n}=n:4$

$\therefore \overline{B_1D_n}=\dfrac{4}{n}$

따라서 구하는 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+16}-n}{\dfrac{4}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+16}-n)(\sqrt{n^2+16}+n)}{\dfrac{4}{n}(\sqrt{n^2+16}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{16}{4\left(\sqrt{1+\dfrac{16}{n^2}}+1\right)}$

$=\dfrac{16}{4\times 2}=2$

74) 1

⇨ $a_1=\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$이고, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$이므로

$a_2=\sqrt{a_1}=a^{\frac{1}{4}}$, $a_3=\sqrt{a_1}=a^{\frac{1}{8}}$, $a_4=\sqrt{a_3}=a^{\frac{1}{16}}$, $\cdots$,

$a_n=\sqrt{a_{n-1}}=a^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$

75) 500대 이상

⇨ n일 째 임시주차장에 놓여 있는 자동차의 수를 a_n이라고 하면 $a_{n+1}=\dfrac{3}{5}a_n+200$

이때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}a_n+200\right)$에서

$\alpha=\dfrac{3}{5}\alpha+200$, $2\alpha=1000$

$\therefore \alpha=500$

즉, 임시주차장의 자동차 수용은 최소한 500대 이상이 되어야 한다.