# 2-1-3.이차방정식의 근과 계수의 관계\_천재(이준열)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

- 1) 제작연월일: 2020-03-05
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

**3.** 이차방정식  $3x^2+4x-2=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고

할 때,  $(\alpha+1)(\beta+1)$ 의 값은?

## 개념check /

#### [이차방정식의 근과 계수의 관계]

- •이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하면
- (1) 두 근의 합:  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
- (2) 두 근의 곱:  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

#### [두 수를 근으로 하는 이차방정식]

- $\alpha$ ,  $\beta$ 를 두 근으로 하고,  $x^2$ 의 계수가 1인 이차방정식은  $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ , 즉  $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 이다.
- $\alpha$ ,  $\beta$ 를 두 근으로 하고,  $x^2$ 의 계수가 a인 이차방정식은  $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ , 즉  $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

#### [이차식의 인수분해]

• 이차방정식  $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하면  $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 

#### 기본문제

[문제]

- **1.** 이차방정식  $x^2-3=0$ 의 두 근의 합과 곱을 구하면?
  - $\bigcirc -2, 3$
- $\bigcirc -3, 0$
- $\bigcirc 0. -2$
- **4** 0. 3
- (5) 0, -3

- [예제]
- **2.** 이차방정식  $x^2-8x+4=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때,  $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}$ 의 값은?
  - 1 1
- 2 2
- 3
- 4
- ⑤ 5

[문제]

- $\bigcirc -5$
- 3 1
- (4) 1

⑤ 3

[예제]

- **4.** 두 수  $-1 + \sqrt{2}i$ ,  $-1 \sqrt{2}i$ 를 근으로 하고  $x^2$ 의 계수가 1인 이차방정식은?
  - ①  $x^2 + 2x + 3 = 0$
- ②  $x^2 2x + 3 = 0$
- $3x^2+2x-3=0$
- (4)  $x^2 3x + 2 = 0$
- $(5) x^2 + 3x 2 = 0$

[문제]

**5.** 두 수  $\sqrt{5}i$ ,  $-\sqrt{5}i$ 를 근으로 하고  $x^2$ 의 계수가 1인 이차방정식은?

① 
$$x^2 - 5 = 0$$

② 
$$x^2 + 5 = 0$$

(3) 
$$x^2 + \sqrt{5} = 0$$

(4) 
$$x^2 + \sqrt{5}x = 0$$

(5) 
$$x^2 + 5x = 0$$

## 평가문제

[소단원 확인 문제]

- **6.** 이차방정식  $x^2-6x+2=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때,  $\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}$ 의 값은?
  - ① 75
- ② 80
- 3 85
- **4**) 90
- ⑤ 95

#### [소단원 확인 문제]

- 7. 이차방정식  $x^2-2x+5=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때, 이차항의 계수가 1이고 두 수  $\alpha+\beta$ ,  $\alpha\beta$ 를 근으로 하는 이차방정식은?
  - ①  $x^2 3x 10 = 0$  ②  $x^2 + 3x 10 = 0$
  - $3) x^2 7x + 10 = 0$
- (4)  $x^2 + 7x + 10 = 0$
- (5)  $x^2 + 7x + 10 = 0$

#### [소단원 확인 문제]

**8.** 이차방정식  $x^2 + ax + b = 0$ 의 근을 구하는데, 주영 이는 일차항의 계수를, 희수는 상수항을 잘못 보고 다음과 같이 근을 구하였을 때, a+b의 값은? (단, a, b는 실수)

주영 : 근은 x=1 또는 x=4야!

희수 : 근은 x = 1 + 2i 또는 x = 1 - 2i인데?

① 1

② 2

3 3

**(4)** 4

(5) 5

#### [중단원 연습 문제]

- **9.** 이차방정식  $2x^2-5x+6=3x-1$ 의 두 근의 합과 곱을 각각 구하면?
  - ①  $\frac{5}{2}$ , 3
- ② 2,  $\frac{7}{4}$
- $34, \frac{7}{2}$
- 4 8, 7
- $5\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

## [중단원 연습 문제]

- **10.** 이차방정식  $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이  $2 + \sqrt{3}i$ 일 때, 실수 a, b에 대하여 a+b의 값은?
  - 1) 4
- ② 3
- ③ 2
- **4** 1
- **⑤** 0

#### [중단원 연습 문제]

- **11.** 이차방정식  $x^2+6x+2=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때,  $\frac{1}{\alpha^2 + 5\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 + 5\beta + 2}$ 의 값은?
  - (1) 0

② 1

3 2

(4) 3

⑤ 4

## [중단원 연습 문제]

 ${f 12.}$  이차식  $5x^2-8x+5$ 을 복소수의 범위에서 인수분 해하면?

$$3 5\left(x-\frac{4-3i}{5}\right)^2$$

$$4 \ 5\left(x - \frac{-4+3i}{5}\right)\left(x + \frac{4+3i}{5}\right)$$

$$5 \ 5 \left(x - \frac{4+3i}{5}\right) \left(x - \frac{4-3i}{5}\right)$$

#### [중단원 연습 문제]

- **13.** 이차방정식  $2x^2-3x+1=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때, 이차항의 계수가 1이고 두 수  $\frac{1}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{\beta}$ 을 근 으로 하는 이차방정식은?
  - ①  $x^2 3x + 2 = 0$  ②  $x^2 3x 2 = 0$
  - $3x^2+3x+2=0$
- (4)  $x^2 + 2x 3 = 0$
- (5)  $x^2 2x + 3 = 0$

#### [대단원 종합 문제]

- **14.** x에 대한 이차방정식  $x^2-(k^2-4)x+2k=0$ 의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 실 수 *k*의 값은?
  - (1) 1
- 2 1
- (3) 2
- **(4)** 2
- **(5)** 0

#### 유사문제

- **15.** 이차방정식  $2x^2+6x-7=0$ 의 두 근의 합은?
  - ① 1
- ② 3
- (3) 3

- $4 \frac{7}{2}$   $5 \frac{7}{6}$
- **16.** 이차방정식  $2x^2-4x+3=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하자.  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha\beta$  를 두 근으로 하고  $x^2$ 의 계수가 2인 이차방정식으로 알맞은 것은?
  - ①  $2x^2 7x 3 = 0$
- ②  $2x^2 7x + 3 = 0$
- $3) 2x^2 7x + 6 = 0$
- $(4) 2x^2 x 3 = 0$
- (5)  $2x^2 x 6 = 0$
- **17.** 이차방정식  $2x^2-6x+3=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 할 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?
  - (1) 0
- ② 2
- 3 4
- **(4)** 6
- **⑤** 8
- **18.** 이차방정식  $ax^2-(a-3)x+a-2=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$  라 하자.  $\alpha$ ,  $\beta$  가 모두 자연수일 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?
  - 1) 6

- 2 8
- 3 10
- 4 12
- **⑤** 14
- **19.** 이차방정식  $x^2 ax + 2 = 0$  의 두 근이  $\alpha$ ,  $\beta$  이고,  $x^2-3x-b=0$ 의 두 근이  $\frac{2}{\alpha}$ ,  $\frac{2}{\beta}$ 이다. 이 때, a-b의 값은? (단, a, b는 실수이다.)
  - ① 3

2) 4

- 3 5
- **4** 6
- ⑤ 7

- **20.** 이차방정식  $x^2 + 3x 2 = 0$  의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$  라고 할 때,  $\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}$  의 값을 구하면?
  - ①  $-\frac{45}{4}$ 
    - $\bigcirc -\frac{9}{4}$
  - $3 \frac{9}{2}$
- $\bigcirc \frac{45}{4}$

# 

#### 정답 및 해설

## 1) [정답] ⑤

[해설] 이차방정식  $x^2-3=0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하고 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha + \beta = -\frac{0}{1} = 0$$
,  $\alpha \beta = \frac{-3}{1} = -3$ 

## 2) [정답] ④

[해설] 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = 8$$
,  $\alpha \beta = 4$ 

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \times 8}{4} = 4$$

## 3) [정답] ③

[해설] 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{3}$$
,  $\alpha\beta = -\frac{2}{3}$ 

$$(\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 1 = -1$$

## 4) [정답] ①

[해설] 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = (-1 + \sqrt{2}i) + (-1 - \sqrt{2}i) = -2$$

$$\alpha\beta = (-1 + \sqrt{2}i)(-1 - \sqrt{2}i)$$

$$=(-1)^2-(\sqrt{2}i)^2=1+2=3$$

따라서 구하는 이차방정식은  $x^2 + 2x + 3 = 0$ 이다.

#### 5) [정답] ②

[해설] 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = \sqrt{5}i + (-\sqrt{5}i) = 0$$

$$\alpha\beta = \sqrt{5}i \times (-\sqrt{5}i) = -\sqrt{5^2}i^2 = 5$$

따라서 구하는 이차방정식은  $x^2+5=0$ 이다.

## 6) [정답] ④

[해설]  $x^2-6x+2=0$ 

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = 6$$
  $\alpha \beta = 2$ 

$$\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)\big\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\big\}}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{6\times(6^2-3\times2)}{2}=\frac{6\times30}{2}=90$$

#### 7) [정답] ③

[해설] 두 근이  $\alpha$ ,  $\beta$ 이므로 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha + \beta = 2$$
,  $\alpha \beta = 5$ 

한편 
$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=7$$
,  $(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=10$ 이므로

 $\alpha+eta$ ,  $\alphaeta$ 를 두 근으로 하고  $x^2$ 의 계수가 1인

이차방정식은 근과 계수의 관계에 의해

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

## 8) [정답] ②

[해설] 주영이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의

ㅂᆫ

 $b = 1 \times 4 = 4$ 

희수는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합

.

-a = (1+2i) + (1-2i) = 2,  $\stackrel{\triangle}{\neg} a = -2$ 

따라서 a=-2, b=4이므로

a + b = 2

## 9) [정답] ③

[해설] 이차방정식  $2x^2-5x+6=3x-1$ 의 우변을 모두 좌변으로 이항하면

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

이 이차방정식의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하고 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha + \beta = -\frac{-8}{2} = 4$$
,  $\alpha \beta = \frac{7}{2}$ 

## 10) [정답] ②

[해설]  $2+\sqrt{3}i$ 이 이차방정식  $x^2+ax+b=0$ 의 근이

므로 켤레근  $2-\sqrt{3}i$ 도 이차방정식의 근이다.

 $2+\sqrt{3}i$ ,  $2-\sqrt{3}i$ 을 근으로 가지므로

두 근의 합은 4,

팝은  $(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=2^2-(\sqrt{3}i)^2=7$ 

따라서 근과 계수의 관계에 의해 주어진 이차방 정식은  $x^2-4x+7=0$ 이므로 a+b=3

# 11) [정답] ④

[해설]  $\alpha$ ,  $\beta$ 는 이차방정식  $x^2+6x+2=0$ 의 두 근이

$$\alpha^2 + 6\alpha + 2 = 0$$
,  $\beta^2 + 6\beta + 2 = 0$ 

$$= \alpha^2 + 5\alpha + 2 = -\alpha, \ \beta^2 + 5\beta + 2 = -\beta$$

$$\frac{1}{\alpha^2 + 5\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 + 5\beta + 2} = \frac{1}{-\alpha} + \frac{1}{-\beta}$$

$$=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha + \beta = -6$$
,  $\alpha \beta = 2$ 

$$=-\frac{-6}{2}=3$$

## 12) [정답] ⑤

[해설]  $5x^2 - 8x + 5 = 0$ 

근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 5 \times 5}}{5}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-9}}{5}=\frac{4\pm3i}{5}$$

 $x^2$ 의 계수는 5이므로

$$5\left(x-\frac{4+3i}{5}\right)\left(x-\frac{4-3i}{5}\right)$$

### 13) [정답] ①

[해설] 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}, \ \alpha \beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

따라서  $\frac{1}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{\beta}$ 을 해로 갖고  $x^2$ 의 계수가 1인 이 차방정식은 근과 계수의 관계에 의해  $x^2-3x+2=0$ 

#### 14) [정답] ③

[해설]  $x^2-(k^2-4)x+2k=0$ 의 두 실근을  $\alpha$ ,  $-\alpha$ 라 고 하면

근과 계수의 관계에 의하여  $\alpha+(-\alpha)=k^2-4=0$  즉 (k+2)(k-2)=0, k=-2 또는 k=2  $\alpha\times(-\alpha)=-\alpha^2=2k$   $\alpha$ 는 실근이므로  $-\alpha^2=2k<0$ . 즉 k=-2

#### 15) [정답] ③

[해설] 근과 계수와의 관계에 의해  $\label{eq:condition} \begin{tabular}{ll} \hline + & -6 \\ \hline -2 \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline -2 \\ \hline -2 \\ \hline -3 \\ \hline -2 \\ \hline -$ 

#### 16) [정답] ③

[해설] 이차방정식  $2x^2-4x+3=0$ 의 두 근이  $\alpha$ ,  $\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해  $\alpha+\beta=2$ ,  $\alpha\beta=\frac{3}{2}$ 이다.

두 수 2,  $\frac{3}{2}$ 의 합은  $\frac{7}{2}$ , 두 수 2,  $\frac{3}{2}$ 의 곱은 3이므로  $x^2$ 의 계수가 2인 이차방정식은  $2\left(x^2-\frac{7}{2}x+3\right)=0$ ,  $2x^2-7x+6=0$ 이다.

## 17) [정답] ④

[해설] 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 3$$
,  $\alpha \beta = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6$$
이다.

#### 18) [정답] ③

[해설] 이차방정식  $ax^2 - (a-3)x + a - 2 = 0$ 의 두 근이  $\alpha$ ,  $\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해  $\alpha + \beta = \frac{a-3}{a}$ ,  $\alpha\beta = \frac{a-2}{a}$ 이다.  $\alpha$ ,  $\beta$ 가 모두 자연수이므로  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha\beta$  모두 자연수이다.

$$\frac{a-3}{a}$$
=  $1-\frac{3}{a}$ 는 자연수이므로  $a=-1, -3$   $\frac{a-2}{a}$ =  $1-\frac{2}{a}$ 는 자연수이므로  $a=-1, -2$  따라서 두 조건을 모두 만족하는  $a$ 값은  $-1$ 이다.  $\alpha+\beta=4, \ \alpha\beta=3$   $\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-6=10$ 

#### 19) [정답] ③

[해설] 근과 계수와의 관계에 의해  $\alpha\beta=a,\ \alpha\beta=2$   $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=3$ 에서  $\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=3$   $\frac{2a}{2}=3,\ a=3$   $\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2}{\beta}=-b$ 에서  $\frac{4}{2}=-b,\ b=-2$   $\therefore a-b=3+2=5$ 

#### 20) [정답] ①

[해설] 이차방정식  $x^2+3x-2=0$ 의 두 근이  $\alpha$ ,  $\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해  $\alpha+\beta=-3$ ,  $\alpha\beta=-2$ 이다.

$$\begin{split} \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 \beta^2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2 \beta^2} \\ &= \frac{-27 - 18}{4} = -\frac{45}{4} \end{split}$$