01 중복순열

(1) 중복순열 : 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 중복순열이라 한다.

(2) 중복순열의 수 : 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복순열의 수를 ${}_n\Pi_r$와 같이 나타낸다.

(3) ${}_n\Pi_r = n\times n\times n\times\cdots\times n = n^r$

◪ 다음 값을 구하여라.

1. ${}_3\Pi_3$

2. ${}_4\Pi_0$

3. ${}_5\Pi_0$

4. ${}_7\Pi_1$

5. ${}_3\Pi_2$

6. ${}_2\Pi_4$

7. ${}_2\Pi_3$

8. ${}_2\Pi_5$

9. ${}_3\Pi_5$

10. ${}_4\Pi_2$

11. ${}_6\Pi_1$

12. ${}_7\Pi_2$

◪ 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하여라.

13. ${}_n\Pi_3 = 64$

14. ${}_3\Pi_r = 81$

15. ${}_2\Pi_r = 128$

16. ${}_n\Pi_3 = 125$

17. ${}_n\Pi_5 = 243$

18. ${}_4P_3 + {}_n\Pi_3 = 88$

19. $4\cdot{}_n\Pi_2 = 5\cdot{}_5P_2$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 다음을 중복순열 기호로 나타내어라.

20. A, B, C 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

21. 사과, 배, 자몽 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

22. a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

23. 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

◪ 다음 경우의 수를 구하여라.

24. 세 명의 학생이 ○, × 문제에 답할 때 나올 수 있는 경우의 수

25. 3명의 학생이 특별활동 시간에 방송반, 서예반, 문예반, 컴퓨터반 중 한 반에 가입하는 경우의 수

26. 서로 다른 4개의 물건을 세 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수 (단, 빈 상자가 있을 수 있다.)

27. 다섯 명의 학생이 ○, × 문제에 답할 때 나올 수 있는 경우의 수

28. 3명의 학생이 방과 후 수업으로 개설된 요가, 자전거, 수학, 영어 수업 중에서 한 가지를 택하는 경우의 수

29. ○, ×로 답하는 5개의 문제에 임의로 답을 하는 모든 경우의 수

30. 3장의 편지를 A, B, C, D 네 봉투 중 어느 하나를 선택하여 넣는 경우의 수

31. 3명의 학생이 A, B, C 세 모둠 중 어느 하나를 선택하는 경우의 수

32. 3명의 학생이 A, B, C, D 네 팀 중 어느 하나를 선택하는 경우의 수

33. 2가지 부호 •와 −에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 일렬로 배열하여 만들 수 있는 신호의 개수

34. 네 가지 부호 ●, ◆, ■, ▲를 중복 사용하여 5자리의 부호를 만드는 경우의 수

35. 빨간색, 파란색, 보라색의 3가지 깃발이 있을 때, 이 깃발을 한 개씩 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수

36. 4명의 친구 A, B, C, D가 3개의 숙소 201호, 202호, 203호에 투숙하는 경우의 수 (단, 빈 방이 있을 수 있다.)

37. 4명의 유권자가 2명의 후보 중에서 한 명의 후보에게 각각 투표하는 경우의 수 (단, 투표지에는 유권자의 이름이 공개되고, 무효표는 없는 것으로 한다.)

02 중복순열을 이용하는 경우의 수

(1) 자연수의 개수 : n개의 서로 다른 숫자에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 r자리의 자연수의 개수는

① 0을 포함하지 않는 경우 ⇨ ${}_n\Pi_r = n^r$

② 0을 포함하는 경우 ⇨ 최고자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 수이고 나머지 자리의 숫자는 중복순열의 수를 이용하여 계산한다.

(2) 함수의 개수 : 두 집합 X, Y 에 대하여 $n(X)=r$, $n(Y)=n$일 때, X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_n\Pi_r = n^r$이다.

◪ 다음 경우의 수를 구하여라.

38. 중복을 허락하여 두 개의 숫자 7, 9로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수

39. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수

40. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

41. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

42. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수

43. 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

44. 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 짝수의 개수

45. 4개의 숫자 $1, 2, 3, 4$ 중에서 중복을 허락하여 세 자리 자연수를 만들 때, 200보다 큰 자연수의 개수

46. 중복을 허락하여 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5로 네 자리 자연수를 만들 때, 2000보다 큰 자연수의 개수

47. 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 3200보다 큰 자연수의 개수

48. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 0, 1, 2로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수

49. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 0, 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

50. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 0, 1, 2로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

51. 중복을 허락하여 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

52. 중복을 허락하여 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

53. 중복을 허락하여 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중에서 짝수의 개수

54. 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 정수 중 4의 배수의 개수

◪ 다음 경우의 수를 구하여라.

55. 두 집합 $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수의 개수

56. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수의 개수

57. 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$, $\mathrm{Y}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수의 개수

58. 두 집합 $X=\{a, b, c, d\}$, $Y=\{p, q, r\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수

59. 두 집합 $X=\{0, 1, 2\}$, $Y=\{a, b, c, d\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수

60. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수의 개수

61. 두 집합 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 함수의 개수

62. 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수

63. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{a, b, c, d\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(3)=b$인 함수의 개수

64. 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c, d, e\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일함수의 개수

65. 두 집합 $X=\{a, b, c\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(a)=2$인 함수의 개수

66. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $Y=\{0,\ 1,\ 2\}$로의 함수 f중에서 치역이 $\{1,\ 2\}$인 함수 f의 개수

67. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 집합 A로 가는 함수 f중에서 $f(1)+f(2)=3$을 만족하는 함수 f의 개수

68. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 집합 $Y=\{a,\ b,\ c\}$로의 함수 중에서 공역과 치역이 같은 함수의 개수

69. 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 중에서 치역이 Y인 함수의 개수

정답 및 해설

1) 27
⇨ ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

2) 1
⇨ ${}_4\Pi_0 = 4^0 = 1$

3) 1
⇨ ${}_5\Pi_0 = 5^0 = 1$

4) 7
⇨ ${}_7\Pi_1 = 7^1 = 7$

5) 9
⇨ ${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

6) 16
⇨ ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

7) 8
⇨ ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

8) 32
⇨ ${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

9) 243
⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

10) 16
⇨ ${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$

11) 6
⇨ ${}_6\Pi_1 = 6^1 = 6$

12) 49
⇨ ${}_7\Pi_2 = 7^2 = 49$

13) 4
⇨ ${}_n\Pi_3 = 64$이므로 $n^3 = 64$
$\therefore n = 4$

14) 4
⇨ ${}_3\Pi_r = 81$이므로 $3^r = 81$
$\therefore r = 4$

15) 7
⇨ ${}_2\Pi_r = 128$이므로 $2^r = 128$
$\therefore r = 7$

16) 5
⇨ ${}_n\Pi_3 = 125$이므로 $n^3 = 125$
$\therefore n = 5$

17) 3

18) 4

19) 5

20) ${}_3\Pi_2$

21) ${}_3\Pi_4$

22) ${}_4\Pi_2$

23) ${}_3\Pi_3$

24) 8
⇨ 서로 다른 ○, ×에 대하여 세 사람이 각자 답할 수 있으므로 이것은 2개 중 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$가지다.

25) 64
⇨ 서로 다른 4개의 반에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$가지이다.

26) 81
⇨ 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수이다.
따라서 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$가지이다.

27) 32
⇨ ${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$가지

28) 64

29) 32
⇨ 구하는 경우의 수는 ○, ×의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수이므로
${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

30) 64
⇨ ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$가지

31) 27
⇨ A, B, C 세 모둠 중 세 명의 학생들이 각각 선택할 모둠 세 개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$가지다.

32) 64
⇨ ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$가지

33) 32
⇨ 2가지 부호가 중복이 가능하므로

구하는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore {}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

34) 1024

35) 81
⇨ 3가지 깃발이 중복이 가능하므로 구하는 신호의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore {}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

36) 81
⇨ 서로 다른 3개의 방에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

37) 16
⇨ 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

38) 4
⇨ 중복을 허락하여 두 개의 숫자 7, 9 중 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$가지

39) 9
⇨ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로
${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$가지

40) 27
⇨ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$가지

41) 81
⇨ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 4개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$가지

42) 243
⇨ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 5개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$가지

43) 64
⇨ 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

44) 250
⇨ 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4의 2가지
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$
따라서 구하는 짝수의 개수는
$2 \times 125 = 250$

45) 48

46) 500

47) 112
⇨ 3200보다 큰 수는
32□□, 33□□, 34□□, 4□□□의 꼴이다.
(ⅰ) 32□□, 33□□, 34□□의 꼴인 자연수의 개수
각각의 경우에 대하여 십의 자리와 일의 자리에는 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$3 \times {}_4\Pi_2 = 3 \times 4^2 = 48$
(ⅱ) 4□□□의 꼴인 자연수의 개수
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$
(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
$48 + 64 = 112$

48) 6
⇨ 십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지, 일의 자리에는 0, 1, 2 중 어느 하나가 올 수 있으므로 3가지다.
따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$가지다.

49) 18
⇨ 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지, 나머지 두 자리에는 0, 1, 2 중 중복을 허락하여 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로
${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$가지다.
따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 9 = 18$가지다.

50) 54
⇨ 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지, 나머지 세 자리에는 0, 1, 2 중 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로
${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$가지다.
따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 27 = 54$가지다.

51) 48
⇨ 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 3가지, 나머지 두 자리에는 0, 1, 2, 3 중 중복을 허락하여 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로
${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$가지다.
따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 16 = 48$가지다.

52) 500
⇨ 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 4가지,
나머지 세 자리에는 0, 1, 2, 3, 4 중 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로
${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$가지다.
따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 125 = 500$가지다.

53) 1500

54) 160

55) 9
⇨ 집합 X의 각 원소는 a, b, c 중 어느 하나에 대응되면 되고 이는 3개 중 중복을 허락하여 2개를 뽑아 나열하는 것과 같다. 따라서 함수의 개수는
${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$이다.

56) 81
⇨ ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

57) 64
⇨ ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

58) 81
⇨ 함수의 개수는 Y의 3개의 원소 p, q, r에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 4개의 원소 a, b, c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

59) 64
⇨ 함수의 개수는 Y의 4개의 원소 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 3개의 원소 1,2,3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

60) 243
⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

61) 625
⇨ $f(1)$이 될 수 있는 값은 공역 $\{1,2,3,4,5\}$의 원소 중 하나이다. 따라서 5가지가 가능하다.
$f(2), f(3), f(4)$ 또한 마찬가지로 5가지가 가능하다.
이는 결국 $1,2,3,4,5$ 중 중복을 허용해서 4개를 골라 나열하는 경우의 수이므로
${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$개의 함수가 가능하다.

62) 125
⇨ X에서 Y로의 함수의 개수는 $5^3 = 125$개다.

63) 64
⇨ $f(3) = b$이므로 3에 b를 대응시키면
Y의 4개의 원소 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 3개의 원소 1, 2, 4에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

64) 60
⇨ 일대일함수의 개수는 Y의 5개의 원소 a, b, c, d, e에서 서로 다른 3개를 택하여 X의 3개의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{P}_3 = 60$

65) 16

66) 14
⇨ X에서 $\{1, 2\}$로의 함수의 개수는
${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$개다.
이때, 정의역의 모든 원소가 1 또는 2로 대응되는 경우는 제외되어야 한다.
따라서 구하는 함수의 개수는 $16 - 2 = 14$개다.

67) 250
⇨ (ⅰ) $f(1) = 1$, $f(2) = 2$인 경우, ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$개
(ⅱ) $f(1) = 2$, $f(2) = 1$인 경우, ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$개
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수의 개수는
$125 + 125 = 250$개다.

68) 540
⇨ X에서 Y로의 함수의 개수는
${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$
이때 치역이 $\{x, y\}$ 또는 $\{y, z\}$ 또는 $\{z, x\}$인 함수의 개수는 $3 \cdot ({}_2\Pi_6 - 2) = 3 \cdot 62 = 186$
또, 치역이 $\{x\}$ 또는 $\{y\}$ 또는 $\{z\}$인 함수의 개수는 3이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는
$729 - (186 + 3) = 540$

69) 540
⇨ X에서 Y로의 함수의 개수는
Y의 원소 $1,2,3$의 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$m = {}_3\Pi_6 = 729$
(ⅰ) 치역의 원소가 2개인 경우
치역이 $\{1,2\}$인 함수의 개수는 치역의 원소 $1,2$의 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수에서 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 인 함수의 개수를 빼면 되므로
${}_2\Pi_6 - 2 = 2^6 - 2 = 62$
치역이 $\{1,3\}$ 또는 $\{2,3\}$인 함수의 개수도 각각 62개 이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는
$62 \times 3 = 186$ 이다.
(ⅱ) 치역의 원소가 1개인 경우
치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 또는 $\{3\}$인 함수의 개수는 3
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수의 개수는
$729 - (186 + 3) = 540$이다.