



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2022-01-10
2) 제작자 : 교육지대(주)
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초
제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호
되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무
단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법
외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

단원 ISSUE

이 단원에서는 거듭제곱근을 지수로 나타내어 계산하는 문제, 지
수에 대한 조건이 주어진 경우 식의 값을 구하는 문제 등이 자주
출제되며 거듭제곱근과 지수법칙에 대한 이해를 바탕으로 한 반복
학습이 필요합니다.

평가문제

[대단원 평가하기]

1. $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{64}}{81}} - \sqrt{\frac{\sqrt[6]{64}}{9}}$ 을 간단히 하면?

- ① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
③ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3}$ ④ 0
⑤ $\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{2}}{3}$

[중단원 마무리하기]

2. $a > 0$ 일 때, $\frac{\sqrt[5]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt{a}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m}$ 을 만족시키는

서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값을
구하면?

- ① 131 ② 132
③ 133 ④ 134
⑤ 135

[중단원 마무리하기]

3. $\sqrt{81}$ 의 제곱근 중 양수인 것을 a , 256의 네 제
곱근 중 양의 실수인 것을 b 라 할 때, $b-a$ 의 값을
구하면?

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 평가하기]

4. 실수 전체 집합의 부분집합 A, B, C 를
 $A = \{-27, -9, -4, -3, 3, 4, 9, 27\}$,
 $B = \{x | x = \sqrt{a}, a \in A\}$, $C = \{x | x = \sqrt[3]{a}, a \in A\}$ 라
할 때, 집합 B 와 집합 C 가 공통으로 가지는 원소
를 고르면?

- ① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt{3}$
③ 3 ④ $3\sqrt{3}$
⑤ 9

[중단원 마무리하기]

5. $\sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt[4]{2^3}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt{64}}{27}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}$ 을 만족할 때, 실
수 a, b 에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[중단원 마무리하기]

6. $a^2 = 27, b^5 = 16, c^6 = 125$ 를 만족시키는 세 양수
 a, b, c 와 자연수 n 에 대해 $(ab^2c^3)^n$ 가 자연수가 되
기 위한 n 의 최솟값을 구하면?

- ① 5 ② 10
③ 15 ④ 20
⑤ 25

[대단원 평가하기]

7. $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{4}{c}$ 일 때, $8^a = 9^b = x^c$ 을 만족하는 양수 x
의 값을 구하면?

- ① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$
③ $7\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$
⑤ $9\sqrt{2}$

[중단원 마무리하기]

8. $\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{10}{3}$ 을 만족하는 x 에 대하여 3^x 의 값들의 곱을 구하면?

- ① -3 ② 1
 ③ 3 ④ 4
 ⑤ 5

[중단원 마무리하기]

9. $a^{-2}=8, b^3=27, c^3=9$ 를 만족시키는 세 양수 a, b, c 와 자연수 n 에 대해 $\left(\frac{bc}{a}\right)^n$ 가 자연수가 되기 위한 n 의 최솟값을 구하면?

- ① 3 ② 6
 ③ 9 ④ 12
 ⑤ 15

[대단원 평가하기]

10. $5^x=27, a^y=81$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=2$ 이 성립할 때, 양수 a 에 대하여 $5a$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 6
 ③ 9 ④ 12
 ⑤ 15

[대단원 평가하기]

11. 양수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$ 이고 $x^y=y^{2x}$ 일 때, x 의 값을 구하면?

- ① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{27}{64}$
 ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{27}{16}$
 ⑤ $\frac{9}{4}$

[대단원 평가하기]

12. 양수 x 에 대해 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2}$ 를 만족할 때,

$\frac{x+x^{-1}}{x^2+x^{-2}+12}=\frac{q}{p}$ 가 된다. 서로소 p, q 에 대해 $p+q$ 의 값을 구하면?

- ① 10 ② 11
 ③ 12 ④ 13
 ⑤ 14

[중단원 마무리하기]

13. $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{7}{2}$ 을 만족할 때, 2^x 의 값들의 곱을 구하면?

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$
 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1
 ⑤ 2

[중단원 마무리하기]

14. 실수 x, y 에 대하여 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=8, 30^y=16$ 일 때,

$2^{\frac{3}{x}+\frac{4}{y}}$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 6
 ③ 9 ④ 12
 ⑤ 15

[중단원 마무리하기]

15. $6^{\frac{1}{x}}=4$ 일 때, $\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{q}{p}$ 가 성립한다. 서로소 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하면?

- ① 10 ② 11
 ③ 12 ④ 13
 ⑤ 14

실전문제

16. 자연수 n ($n \geq 2$)에 대하여, 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$ 라 할 때, $f_3(-3) + f_4(4) + f_5(0)$ 의 값은?

- ① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

17. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 2^{144} 의 n^2 제곱근 전체의 집합을 A_n 이라 하자. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, $A_n \cap N \neq \emptyset$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은?

- ① 11 ② 15
③ 22 ④ 25
⑤ 27

18. $5^{2x} = 7$ 일 때, $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}} = \frac{b}{a}$ 라 하자. $b - a$ 의 값은? (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

- ① 22 ② 29
③ 36 ④ 43
⑤ 50

19. $a = \sqrt[6]{4 - \sqrt{3}}$ 일 때, $\frac{a^{19} - a^7}{a + a^{-5}} = p + q\sqrt{3}$ 이다. 두 유리수 p, q 에 대하여 $p + q$ 의 값은?

- ① 16 ② 38
③ 57 ④ 91
⑤ 124

20. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

$\sqrt{ac} \times \sqrt[6]{a^3bc^3} \div \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} \times \sqrt[6]{b}$ 을 간단히 한 것은?

- ① ac ② \sqrt{abc}
③ $ac\sqrt[6]{b}$ ④ abc
⑤ $\sqrt{\frac{ac}{b}}$



정답 및 해설

1) [정답] ⑤

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad & \sqrt[4]{\frac{\sqrt{64}}{81}} - \sqrt{\frac{\sqrt{64}}{9}} = \frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{81}} - \frac{\sqrt[12]{64}}{\sqrt{9}} \\ & = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt[4]{8} - \sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

2) [정답] ③

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad & \frac{\sqrt[5]{a^4 \sqrt[4]{a^3 \sqrt{a}}}}{\sqrt[4]{a^3 \sqrt[3]{a} \sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a^4 \times \sqrt[20]{a^3 \times \sqrt[60]{a}}}}{\sqrt[4]{a^3 \times \sqrt[12]{a^3 \times \sqrt[24]{a}}}} \\ & = \frac{\sqrt[120]{a^{24} \times a^6 \times a^2}}{\sqrt[120]{a^{30} \times a^{10} \times a^5}} = \sqrt[120]{\frac{a^{32}}{a^{45}}} = \sqrt[120]{a^{-13}} = \sqrt[120]{\left(\frac{1}{a}\right)^{13}} \\ & m = 13, n = 120, \quad m + n = 133 \end{aligned}$$

3) [정답] ①

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad & a = \sqrt{\sqrt{81}} = 3, \quad \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4, \quad b = 4 \\ & \text{따라서 } b - a = 1 \end{aligned}$$

4) [정답] ③

[해설] 집합 B와 C는 실수 전체 집합의 부분집합
이므로 원소의 값은 실수만 가능하다.
 $B = \{\sqrt{3}, 2, 3, 3\sqrt{3}\}$
 $C = \{-3, -\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{9}, 3\}$
 따라서 집합 B와 집합 C가 공통으로 가지는
원소는 3이다.

5) [정답] ⑤

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad & \sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt[4]{2^3}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt{64}}{27}} = \frac{3}{\sqrt[4]{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ & = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \times 3^{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ & \text{이므로 } a = 4, \quad b = 2, \quad a + b = 6 \end{aligned}$$

6) [정답] ②

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad & a^2 = 27 \text{이므로 } a = 3^{\frac{3}{2}} \text{이다.} \\ & \text{같은 방법으로 } b = 2^{\frac{4}{5}}, c = 5^{\frac{1}{2}} \text{이다.} \\ & (ab^2c^3)^n = 3^{\frac{3n}{2}} \times 2^{\frac{8n}{5}} \times 5^{\frac{3n}{2}} \text{이 자연수가 되기 위한} \\ & n \text{의 최솟값은 2.5의 최소 공배수 10이다.} \end{aligned}$$

7) [정답] ②

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad & 8^a = 9^b = x^c = k \text{라고 하면} \\ & 8 = k^{\frac{1}{a}}, \quad 9 = k^{\frac{1}{b}}, \quad x = k^{\frac{1}{c}} \text{이다.} \\ & \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{4}{c} \text{이므로 } k^{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} = k^{\frac{4}{c}}, \\ & \left(k^{\frac{1}{a}} \times k^{\frac{1}{b}}\right)^2 = \left(k^{\frac{1}{c}}\right)^4, \quad (8 \times 9)^2 = x^4 \text{이다.} \\ & \text{따라서 } x = (8 \times 9)^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2} \text{이다.} \end{aligned}$$

8) [정답] ②

$$\text{[해설]} \quad \frac{3^{2x} - 3^{-2x}}{3^x - 3^{-x}} = \frac{10}{3} \text{에서 } 3^x = t \text{라 하면}$$

$$\frac{t^2 - \frac{1}{t^2}}{t - \frac{1}{t}} = t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0, \quad (3t-1)(t-3) = 0$$

$$\text{따라서 } t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 3 \text{ 그러므로}$$

$$3^x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } 3^x = 3$$

따라서 3^x 의 값들의 곱은 1이다.

9) [정답] ②

$$\text{[해설]} \quad a^{-2} = 8 \text{이므로 } a = 2^{-\frac{3}{2}} \text{이다.}$$

$$\text{같은 방법으로 } b = 3, c = 3^{\frac{2}{3}} \text{이다.}$$

$$\frac{bc}{a} = \frac{3 \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{5}{3}}$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^n \text{가 자연수이면 } n \text{은 6의 배수이다.}$$

따라서 n 의 최솟값은 6이다.

10) [정답] ③

$$\text{[해설]} \quad 5^x = 27 \text{에서 } 3^{\frac{3}{x}} = 5$$

$$a^y = 81 \text{에서 } 3^{\frac{4}{y}} = a$$

두 식의 양변을 곱하면

$$3^{\frac{3}{x} + \frac{4}{y}} = 5a, \quad \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 2 \text{이므로 } 5a = 9$$

11) [정답] ②

$$\text{[해설]} \quad x^y = y^{2x} \text{에서 } y = x^{\frac{y}{2x}} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \text{에서 } \frac{4}{3}x = y \text{이므로 } \frac{4}{3}x = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{x}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{4}, \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{27}{64}$$

12) [정답] ③

$$\text{[해설]} \quad \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2 = 8,$$

$$x + \frac{1}{x} = 10 \text{이다. 다시 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 100 \text{이므로 } x^2 + \frac{1}{x^2} = 98 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{x + x^{-1}}{x^2 + x^{-2} + 12} = \frac{10}{110} = \frac{1}{11} \text{이므로}$$

$p+q=12$ 이다.

13) [정답] ④

[해설] $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{7}{2}$ 에서 $2^x=t(t>0)$ 라 하면

$$\frac{t^3-\frac{1}{t^3}}{t-\frac{1}{t}}=t^2+1+\frac{1}{t^2}=\frac{7}{2} \text{ 이므로 } t^2+\frac{1}{t^2}=\frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

$t^2=a$ 로 치환하면 $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$ 이므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$ 이다.

따라서 $t=2^x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 또는 $\sqrt{2}$ 이다. 따라서

모든 2^x 의 값들의 곱은 1이다.

14) [정답] ②

[해설] $\left(\frac{1}{5}\right)^x=8$ 에서 $\frac{1}{5}=2^{\frac{3}{x}}$, $30^y=16$ 에서 $30=2^{\frac{4}{y}}$

$$2^{\frac{3}{x}+\frac{4}{y}}=\frac{1}{5}\times 30=6$$

15) [정답] ③

[해설] $6^{\frac{1}{x}}=4$ 에서 $2^{2x}=6$

$\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 의 분모, 분자에 2^x 를 곱하면

$$\frac{2^x(2^x-2^{-x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=\frac{5}{7}$$

$p=7$, $q=5$, $p+q=12$

16) [정답] ③

[해설] n 이 홀수면 a 의 부호에 관계없이

$f_n(a)=1$ 이고, n 이 짝수일 때 $a>0$ 이면

$f_n(a)=2$, $a<0$ 이면 $f_n(a)=0$ 이다.

따라서 주어진 값은 $1+2+1=4$ 이다.

17) [정답] ⑤

[해설] 집합 A_n 에 속하는 원소를 x 라 하자.

$x^{n^2}=2^{144}$ 이므로 $x=2^{\frac{144}{n^2}}$ 이고,

$A_n \cap N \neq \emptyset$ 이려면 이때 x 는 자연수여야 한다.

즉, $\frac{144}{n^2}=\left(\frac{12}{n}\right)^2$ 가 자연수이려면

자연수 n 은 12의 약수이다. (단, $n \geq 2$)

따라서 2, 3, 4, 6, 12이므로

모든 자연수 n 의 값의 합은 27이다.

18) [정답] ③

[해설] $5^{2x}=7$ 이므로 $5^x=\sqrt{7}$ 이다.

$$\frac{5^{3x}+5^{-3x}}{5^x+5^{-x}}=\frac{7\sqrt{7}+\frac{1}{7\sqrt{7}}}{\sqrt{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}}$$

분모 분자에 $\sqrt{7}$ 을 곱하면

$$\text{위 식은 } \frac{49+\frac{1}{7}}{7+1}=\frac{344}{56}=\frac{43}{7} \text{ 이다.}$$

따라서 $a=7$, $b=43$ 이므로 $b-a=36$ 이다.

19) [정답] ②

[해설] $a^6=4-\sqrt{3}$ 이다.

$$\frac{a^{19}-a^7}{a+a^{-5}}=\frac{a^{24}-a^{12}}{a^6+1}=\frac{a^{12}(a^6-1)(a^6+1)}{a^6+1}$$

$$=a^{12}\times(a^6-1)=(4-\sqrt{3})^2\times(3-\sqrt{3})$$

$$=81-43\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

따라서 $p=81$, $q=-43$ 이 되어 $p+q=38$ 이다.

20) [정답] ④

$$[\text{해설}] \sqrt{ac}\times\sqrt[6]{a^3bc^3}\div\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\times\sqrt[6]{b}$$

$$=\sqrt{ac}\times\sqrt[6]{a^3c^3}\times\sqrt[6]{b}\times\sqrt[3]{b^2}\times\sqrt[6]{b}$$

$$=\sqrt{ac}\times\sqrt{ac}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b^2}$$

$$=abc$$