08

연립방정식

예제 01

미지수가 2개인 연립일차방정식

연립방정식 $\begin{cases} x+ay=1 \\ ax+4y=2 \end{cases}$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, a는 상수이다.)

(1) 해가 없을 때의 a의 값을 구하여라.

(2) 해가 무수히 많을 때의 a의 값을 구하여라.

접근 방법

가감법을 이용하여 한 문자에 대한 일차방정식을 구한 후 해를 구하거나 두 직선의 위치 관계를 이용하여 해를 구합니다.

Bible

x에 대한 방정식 $ax=b$에서

(i) $a\neq 0$일 때, $x=\dfrac{b}{a}$

(ii) $a=0$일 때, $\begin{cases} b\neq 0\text{이면 해가 없다. (불능)} \\ b=0\text{이면 해가 무수히 많다. (부정)} \end{cases}$

상세 풀이

$\begin{cases} x+ay=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax+4y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times a-$㉡을 하면 $(a^2-4)y=a-2$, $(a+2)(a-2)y=a-2$

(1) $a=-2$이면 $0\cdot y=-4$이므로 해가 없습니다.

(2) $a=2$이면 $0\cdot y=0$이므로 해가 무수히 많습니다.

다른 풀이

연립방정식 $\begin{cases} x+ay=1 \\ ax+4y=2 \end{cases}$에서

(1) 해가 없으려면 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{4}\neq\dfrac{1}{2}$이므로 $a=-2$

(2) 해가 무수히 많으려면 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a=2$

정답 ➡ (1) -2 (2) 2

보충 설명

연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$의 해의 개수는 다음과 같습니다.

(i) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$일 때, 해가 없습니다.

(ii) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$일 때, 해가 무수히 많습니다.

풀이집 p.100

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

01-1 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=-3 \\ 2x+(a-1)y=6 \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, a는 상수이다.)

(1) 해가 없을 때의 a의 값을 구하여라.

(2) 해가 무수히 많을 때의 a의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

01-2 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+ay=a \end{cases}$ 를 풀어라. (단, a는 상수이다.)

08

개념 넓히기 ★★☆

01-3 두 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y=b \\ 3x+y=13 \end{cases}$ 이 같은 해를 가지도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

정답

01-1 (1) 2 (2) -1

01-2 (i) $a=\pm1$일 때, 해가 무수히 많다. (ii) $a\neq\pm1$일 때, $x=a$, $y=0$

01-3 $a=\frac{1}{2}$, $b=5$

예제 02

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} y=x+3 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

접근 방법

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 다음 이차방정식에 대입하여 연립방정식의 해를 구하도록 합니다.

Bible 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 연립방정식의 해를 구한다.

상세 풀이

(1) $y=x+3$을 $x^2+y^2=17$에 대입하면 $x^2+(x+3)^2=17$, $2x^2+6x-8=0$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

$x=-4$일 때 $y=-1$, $x=1$일 때 $y=4$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

(2) $x-y=1$에서 $x=y+1$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 $x^2-xy+y^2=3$에 대입하면 $(y+1)^2-(y+1)y+y^2=3$

$y^2+y-2=0$, $(y+2)(y-1)=0$ $\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$, $y=1$을 ㉠에 대입하면 $x=2$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

정답 ➡ (1) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

보충 설명

(1)에서 주어진 연립방정식의 해는 **12 원의 방정식**에서 배우게 되는 직선과 원의 교점의 좌표가 됩니다.

풀이집 p.100

숫자 바꾸기

02-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y-x=2 \\ x^2-3xy+y^2=1 \end{cases}$

표현 바꾸기

02-2 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$ 을 만족시키는 x, y에 대하여 $y-x$의 최댓값을 구하여라.

08

개념 넓히기 ★★☆

02-3 연립방정식 $\begin{cases} -2x+y=a \\ 2x^2+y^2=24 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

정답

02-1 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

02-2 21

02-3 $6\sqrt{2}$

예제 03 이차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ x^2+xy=24 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0 \\ x^2+3xy-2y^2=8 \end{cases}$

접근 방법

이차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 한 이차방정식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 연립방정식의 해를 구하도록 합니다.

Bible 한 이차방정식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입한다.

상세 풀이

(1) $x^2-4y^2=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-2y)(x+2y)=0$ $\therefore x=2y$ 또는 $x=-2y$

(ⅰ) $x=2y$를 $x^2+xy=24$에 대입하면 $4y^2+2y^2=24$, $y^2=4$ $\therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm4$, $y=\pm2$ (복부호동순)

(ⅱ) $x=-2y$를 $x^2+xy=24$에 대입하면 $4y^2-2y^2=24$, $y^2=12$ $\therefore y=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore x=\mp4\sqrt{3}$, $y=\pm2\sqrt{3}$ (복부호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $x^2+xy-6y^2=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-2y)(x+3y)=0$ $\therefore x=2y$ 또는 $x=-3y$

(ⅰ) $x=2y$를 $x^2+3xy-2y^2=8$에 대입하면 $4y^2+6y^2-2y^2=8$, $y^2=1$ $\therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm1$ (복부호동순)

(ⅱ) $x=-3y$를 $x^2+3xy-2y^2=8$에 대입하면 $9y^2-9y^2-2y^2=8$, $y^2=-4$ $\therefore y=\pm2i$

$\therefore x=\mp6i$, $y=\pm2i$ (복부호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6i \\ y=-2i \end{cases}$

정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립방정식의 일반적인 풀이는 다음과 같습니다.

(1) 인수분해되는 식이 있는 경우

인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입하여 해를 구합니다.

(2) 인수분해되는 식이 없는 경우

이차항 또는 상수항을 소거한 후 얻은 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 해를 구합니다.

풀이집 p.101

숫자 바꾸기

03-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+xy=12 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+2xy+y^2=4 \end{cases}$

표현 바꾸기

03-2 연립방정식 $\begin{cases} xy+x=4 \\ 2xy-y=3 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 최솟값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

03-3 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=5 \\ 2x^2+3xy+y^2=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ 4x^2-7xy+y^2=-6 \end{cases}$

08

정답

03-1 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

03-2 5

03-3 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

예제 04

x, y에 대한 대칭식인 연립방정식

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x+y-xy=4 \end{cases}$

접근 방법

곱셈 공식의 변형 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$를 이용하여 $x+y$, xy의 값을 구한 후 $x+y=a$, $xy=b$를 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근임을 이용합니다.

Bible $x+y=a$, $xy=b$이면 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근이다.

상세 풀이

(1) $x^2+y^2=25$에서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 $25=(x+y)^2-2\cdot12$

$(x+y)^2=49 \qquad \therefore x+y=\pm7$

(i) $x+y=7$, $xy=12$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-7t+12=0$의 두 근입니다.

$(t-3)(t-4)=0 \qquad \therefore t=3$ 또는 $t=4$

(ii) $x+y=-7$, $xy=12$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+7t+12=0$의 두 근입니다.

$(t+4)(t+3)=0 \qquad \therefore t=-4$ 또는 $t=-3$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} a^2-2b=16 & \cdots\cdots ㉠ \\ a-b=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $b=a-4$이므로 ㉠에 대입하여 정리하면 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=4$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $b=-6$, $a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=0$

(i) $x+y=-2$, $xy=-6$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-6=0$의 두 근입니다.

$\therefore t=-1+\sqrt{7}$ 또는 $t=-1-\sqrt{7}$

(ii) $x+y=4$, $xy=0$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t=0$의 두 근입니다.

$t(t-4)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=4$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-1+\sqrt{7} \\ y=-1-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1-\sqrt{7} \\ y=-1+\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

(1)의 $xy=12$에서 $y=\dfrac{12}{x}$이므로 이 식을 $x^2+y^2=25$에 대입하여 연립방정식을 풀 수도 있습니다.

풀이집 p.102

숫자 바꾸기

04-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ xy=20 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y-xy=1 \end{cases}$

표현 바꾸기

04-2 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=-1 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

08

개념 넓히기 ★★☆

04-3 연립방정식 $\begin{cases} xy+2x+2y=0 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ 를 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라. (단, $xy\neq0$)

정답

04-1 (1) $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

04-2 10 **04-3** 2

예제 05

정수 조건의 부정방정식

다음 방정식을 만족시키는 양의 정수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $xy-x-2y-1=0$　　(2) $xy-2x-y-3=0$

접근 방법

주어진 부정방정식을 (일차식)$\cdot$(일차식)$=$(정수) 꼴로 변형한 후 약수와 배수의 성질을 이용하여 해를 구합니다.

Bible 정수 조건의 부정방정식 ➡ (일차식)$\cdot$(일차식)$=$(정수) 꼴로 변형

상세 풀이

(1) $xy-x-2y-1=0$에서 $x(y-1)-2(y-1)-3=0$

$\therefore (x-2)(y-1)=3$

x, y가 양의 정수이므로 $x-2$, $y-1$은 $x-2\geq-1$, $y-1\geq0$인 정수이고 3의 약수입니다.

따라서 $x-2$, $y-1$의 값은 다음과 같습니다.

$x-2$	1	3
$y-1$	3	1

⇨

x	3	5
y	4	2

즉, 구하는 방정식의 해는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $xy-2x-y-3=0$에서 $x(y-2)-(y-2)-5=0$

$\therefore (x-1)(y-2)=5$

x, y가 양의 정수이므로 $x-1$, $y-2$는 $x-1\geq0$, $y-2\geq-1$인 정수이고 5의 약수입니다.

따라서 $x-1$, $y-2$의 값은 다음과 같습니다.

$x-1$	1	5
$y-2$	5	1

⇨

x	2	6
y	7	3

즉, 구하는 방정식의 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

정답 ➡ (1) $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

보충 설명

(1)에서 만약 x, y의 조건이 정수라면 $x-2=-3$, $y-1=-1$인 경우와 $x-2=-1$, $y-1=-3$인 경우, 즉 $x=-1$, $y=0$과 $x=1$, $y=-2$도 주어진 방정식의 근이 됩니다.

풀이집 p.104

숫자 바꾸기

05-1 다음 방정식을 만족시키는 양의 정수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $xy-x-y-5=0$ (2) $xy-2x+y-6=0$

표현 바꾸기

05-2 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$을 만족시키는 양의 정수 x, y의 값을 각각 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

05-3 이차방정식 $x^2+ax-a+1=0$의 두 근이 모두 양의 정수일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

정답

05-1 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

05-2 $\begin{cases} x=6 \\ y=30 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=10 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=30 \\ y=6 \end{cases}$

05-3 -5

예제 06

실수 조건의 부정방정식

다음 방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $x^2+2y^2+4x-4y+6=0$

(2) $x^2+4xy+5y^2+2y+1=0$

접근 방법

주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 변형하고 실수 조건에 의하여 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 해를 구합니다.

Bible x, y가 실수일 때, $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$

상세 풀이

(1) $x^2+2y^2+4x-4y+6=0$에서

$$(x^2+4x+4)+2(y^2-2y+1)=0$$

$$\therefore (x+2)^2+2(y-1)^2=0$$

x, y는 실수이므로 $x+2$, $y-1$도 실수입니다.

따라서 $x+2=0$, $y-1=0$이므로

$$x=-2,\ y=1$$

(2) $x^2+4xy+5y^2+2y+1=0$에서

$$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2+2y+1)=0$$

$$\therefore (x+2y)^2+(y+1)^2=0$$

x, y는 실수이므로 $x+2y$, $y+1$도 실수입니다.

따라서 $x+2y=0$, $y+1=0$이므로

$$x=2,\ y=-1$$

정답 ➡ (1) $x=-2$, $y=1$ (2) $x=2$, $y=-1$

보충 설명

(2)에서 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $x^2+4yx+5y^2+2y+1=0$이고, x가 실수이므로 이차방정식 $x^2+4yx+5y^2+2y+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(2y)^2-1\cdot(5y^2+2y+1)\geq 0,\ y^2+2y+1\leq 0,\ (y+1)^2\leq 0$$

y도 실수이므로 $y+1=0$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$$

이와 같이 이차방정식의 판별식에서의 실근 조건을 이용하여 해를 구할 수도 있습니다.

풀이집 p.105

숫자 바꾸기

06-1 다음 방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $2x^2+y^2-4x+6y+11=0$

(2) $2x^2+3y^2-4xy-4y+4=0$

표현 바꾸기

06-2 방정식 $4x^2+4y^2+4xy-6y+3=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+3y$의 값을 구하여라.

08

개념 넓히기 ★☆☆

◆ 다른 풀이

06-3 방정식 $x^2y^2-16xy+x^2+16y^2+16=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+16y^2의 값을 구하여라.

정답 **06-1** (1) $x=1$, $y=-3$ (2) $x=2$, $y=2$ **06-2** 1
06-3 32

예제 07 공통근

두 이차방정식

$$x^2+3x+m=0,\ x^2+mx+3=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가지도록 하는 상수 m의 값과 이때의 공통근을 구하여라.

접근 방법

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근이 α이면 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$을 만족시키므로 $f(\alpha)+g(\alpha)=0$, $f(\alpha)-g(\alpha)=0$입니다. 따라서 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)-g(x)=0$에서도 $x=\alpha$가 근이 됩니다. 이처럼 문제에서 주어진 방정식의 공통근을 α라고 하면 두 이차방정식의 차도 α를 근으로 가지게 됨을 이용합니다.

Bible 공통근 문제는 최고차항 또는 상수항을 소거한다.

상세 풀이

주어진 두 이차방정식의 공통근을 α라고 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+3\alpha+m=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+m\alpha+3=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면 $(3-m)\alpha+m-3=0$

$$(3-m)(\alpha-1)=0 \qquad \therefore m=3 \text{ 또는 } \alpha=1$$

(i) $m=3$일 때, 두 이차방정식이 $x^2+3x+3=0$으로 일치하므로 공통인 근이 2개 존재합니다.

(ii) $\alpha=1$일 때, $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$$1+3+m=0 \qquad \therefore m=-4$$

(i), (ii)에서 $m=-4$이고, 이때의 공통근은 $x=1$입니다.

정답 ➡ $m=-4$, 공통근 : $x=1$

보충 설명

일반적으로 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근이 α일 때, $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$에서 $af(\alpha)-bg(\alpha)=0$(a, b는 실수)을 만족시키므로 방정식 $af(x)-bg(x)=0$도 α를 근으로 가지게 됨을 알 수 있습니다.

풀이집 p.106

숫자 바꾸기

07-1 두 이차방정식

$$x^2+4mx-5=0,\ x^2+mx+3m-5=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가지도록 하는 상수 m의 값과 이때의 공통근을 구하여라.

표현 바꾸기

07-2 두 이차방정식

$$x^2+(m-1)x+2m=0,\ x^2-(m-3)x-2m=0$$

이 0이 아닌 공통근을 가질 때, 상수 m의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

07-3 세 방정식

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0$$

이 공통근을 가질 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

정답 **07-1** $m=1$, 공통근 : $x=1$ **07-2** -2
07-3 $a=-\frac{9}{4}$, $b=\frac{9}{4}$