개념check

[함수의 최대와 최소]

• 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 함수의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
① 주어진 구간에서 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.
② 주어진 구간의 양 끝에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.
③ ①, ②에서 구한 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

[방정식의 실근의 개수]

1. 방정식 $f(x)=0$의 실근
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표이다.
(2) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

2. 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근
(1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수이다.

[부등식에의 활용]

• 모든 실수 x에 대하여
(1) 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하려면
⇨ ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
(2) 부등식 $f(x) \leq 0$이 성립하려면
⇨ ($f(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.

• $x \geq a$일 때,
(1) 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하려면
⇨ ($x \geq a$일 때, $f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.
(2) 부등식 $f(x) \leq 0$이 성립하려면
⇨ ($x \geq a$일 때, $f(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.

[속도와 가속도]

• 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$
(2) $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

기본문제

[예제]

1. 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+4$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 26 ② 28
③ 30 ④ 32
⑤ 34

[문제]

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$의 닫힌구간 $[0, 4]$에서의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -18 ② -17
③ -16 ④ -15
⑤ -14

[예제]

3. 방정식 $x^3-6x^2+32=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[문제]

4. 방정식 $3x^4-6x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[예제]

5. 방정식 $2x^3-9x^2+12x-k=0$이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 모든 상수 k의 값의 합은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[문제]

6. 방정식 $2x^4-4x^2-1-a=0$이 서로 다른 세 실근만을 갖도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[예제]

7. $x\geq 2$일 때, 부등식 $x^3-12x+k>0$가 성립하기 위한 정수 k의 최솟값은?

① 16 ② 17
③ 18 ④ 19
⑤ 20

[문제]

8. 모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^4\geq 4x+k$
가 성립하기 위한 상수 k의 최댓값은?

① -6 ② -5
③ -4 ④ -3
⑤ -2

[예제]

9. 수직선 위에서 원점을 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3+2t$ 일 때, 점 P의 시각 $t=2$에서의 가속도는?

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

[문제]

10. 수직선 위에서 원점을 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-3t^2$일 때, 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때의 시각 t의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[예제]

11. 지상 $15\,\mathrm{m}$의 높이에서 $20\,\mathrm{m/s}$의 속도로 똑바로 위로 던진 공의 시각이 t초일 때의 높이 $x\,\mathrm{m}$가 $x=-5t^2+20t+15$일 때, $t=1$에서의 공의 속도는?

① $-10\,\mathrm{m/s}$ ② $-5\,\mathrm{m/s}$
③ $0\,\mathrm{m/s}$ ④ $5\,\mathrm{m/s}$
⑤ $10\,\mathrm{m/s}$

[문제]

12. 직선 철로를 달리는 열차가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리 $x\mathrm{m}$가 $x=20t-2t^2$일 때, 열차가 제동을 건 후 정지할 때까지 움직인 거리는?

① $10\,\mathrm{m}$ ② $30\,\mathrm{m}$
③ $50\,\mathrm{m}$ ④ $70\,\mathrm{m}$
⑤ $90\,\mathrm{m}$

평가문제

[중단원 학습 점검]

13. 방정식 $x^3-12x=4$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[중단원 학습 점검]

14. 수직선 위에서 원점을 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^2-4t$일 때, 시각 $t=5$에서의 속도는?

① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[중단원 학습 점검]

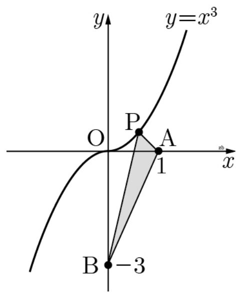
15. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-2x^2+a\geq 0$이 성립하도록 하는 상수 a의 최솟값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[중단원 학습 점검]

16. 다음 그림과 같이 곡선 $y=x^3$ 위의 제 1사분면에 위치한 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -3)$이 있다. 삼각형 APB의 넓이를 S라 할 때, S가 최솟값이 될 때의 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은?



① 2　② 10　③ 30　④ 68　⑤ 130

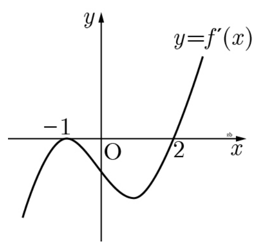
[중단원 학습 점검]

17. 직선 철로 위를 달리는 어느 열차에 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리 $x\,\mathrm{m}$가 $x=21t-\dfrac{1}{7}t^3$이다. 이 열차에 제동을 건 후 정지할 때까지 움직인 거리는?

① $92\,\mathrm{m}$　② $94\,\mathrm{m}$　③ $96\,\mathrm{m}$　④ $98\,\mathrm{m}$　⑤ $100\,\mathrm{m}$

[대단원 학습 점검]

18. 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않을 필요충분조건은? (단, 중근은 하나로 생각한다.)



① $f(-1)=0$　② $f(2)=0$　③ $f(-1)>0$　④ $f(2)>0$　⑤ $f(-1)<0$

[대단원 학습 점검]

19. 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수
$f(x)=2x^3-3x^2+a$의 최솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

[대단원 학습 점검]

20. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라고 하자.
$f(t)-g(t)=t^3-12t^2+at$이고, 시각 $t=2$에서 두 점 P, Q의 속도가 같을 때, 다시 속도가 같아지는 시각에서의 두 점 사이의 거리는? (단, a, b는 상수이다.)

① 0　② 6　③ 12　④ 18　⑤ 24

[대단원 학습 점검]

21. 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥의 겉넓이가 6π이다. 이 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 r, h에 대하여, $r+h$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[대단원 학습 점검]

22. 방정식 $x^3-12x+1=k$가 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 값의 개수는?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[대단원 학습 점검]

23. $a>0$인 실수 a에 대하여 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 함수 $y=x^3-3x^2$의 최솟값을 $f(a)$라고 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값은?

① -12 ② -11
③ -10 ④ -9
⑤ -8

[대단원 학습 점검]

24. 곡선 $y=x^3-4x$와 직선 $y=-x+k$가 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 값의 개수는?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

유사문제

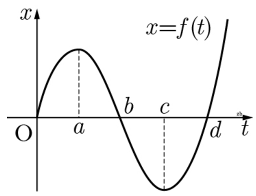
25. 방정식 $x^3-3x^2-9x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 a의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 30 ② 31
③ 32 ④ 33
⑤ 34

26. 지면으로부터 $60\,\mathrm{m}$의 높이에서 초속 $20\,\mathrm{m}$로 지면과 수직인 방향으로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이 $x\,\mathrm{m}$가 $x=-5t^2+20t+60$일 때, 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는?

① -40 ② -35
③ -30 ④ -25
⑤ -20

27. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $t>0$일 때, 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $t=b$일 때, 점 P는 운동방향을 바꾼다.
ㄴ. $t=c$일 때, 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 방향을 처음 바꿀 때의 가속도는 음수이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 닫힌 구간 $[1,4]$에서 부등식 $x^3-\dfrac{9}{2}x^2+a\le 0$이 성립하도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

29. 방정식 $3x^4-4x^3-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

30. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^2-2t$이다. 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 것은 출발한 지 몇 초 후인가?

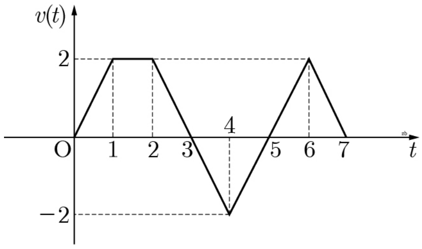
① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

31. **방정식 $x^4-4x^3+4x^2+a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하면?**

① 0 ② -1
③ 1 ④ -2
⑤ 2

32. **수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)(0 \le t \le 7)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?**



<보기>

ㄱ. $t=3$에서 가속도는 0이다.
ㄴ. $4<t<5$일 때 점 P의 속력은 감소한다.
ㄷ. $t=0$에서 $t=7$까지 점 P의 운동방향은 총 2번 바뀐다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	3	↗	31

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=3$일 때 31이고, 최솟값은 $x=1$일 때 3이다.

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은 34

2) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$이므로

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	5	↘	-22	↗	-15

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=0$일 때 5이고, 최솟값은 $x=3$일 때 -22이다.

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은 -17

3) [정답] ③

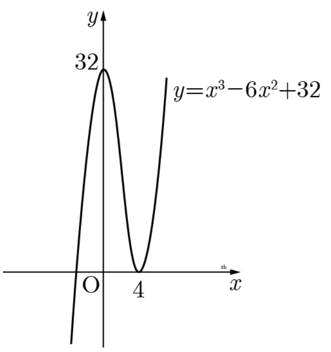
[해설] $f(x)=x^3-6x^2+32$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만나므로 방정식 $x^3-6x^2+32=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

4) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=3x^4-6x^2+2$으로 놓으면

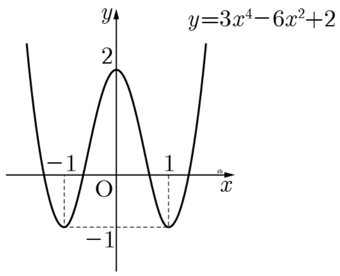
$f'(x)=12x^3-12x=12x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	2	↘	-1	↗



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 네 점에서 만나므로 방정식 $3x^4-6x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

5) [정답] ④

[해설] 주어진 방정식을 $2x^3-9x^2+12x=k$의 꼴로 변형하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=2x^3-9x^2+12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

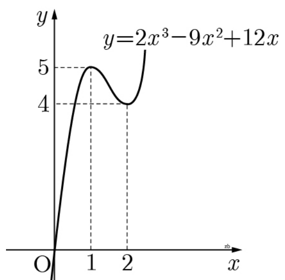
$f(x)=2x^3-9x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗



주어진 방정식이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 k의 값의 범위는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점에서 만나도록 하는 k의 값이므로 $k=4,\ k=5$

$\therefore$ 모든 상수 k의 값의 합은 9

6) [정답] ②

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[해설] $2x^4-4x^2-1-a=0$을 변형하면

$2x^4-4x^2-1=a$

$f(x)=2x^4-4x^2-1$로 놓으면

$y=f(x)$와 $y=a$의 교점의 x 좌표가

방정식 $f(x)-a=0$의 근이 된다.

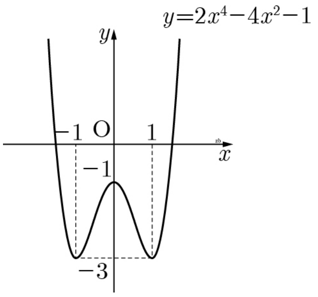
$f'(x)=8x^3-8x=8x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고,

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	-1	↘	-3	↗



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 두 점에서 만나도록 하는 a의 값이므로

$a=-1$

7) [정답] ②

[해설] $x^3-12x+k>0$에서 $x^3-12x>-k$

$f(x)=x^3-12x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[2, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	-16	↗

따라서 $x\geq 2$일 때, 주어진 부등식을 성립하게 하는 k의 값의 범위는 $-k<-16$

$k>16$

따라서 부등식이 성립하기 위한 정수 k의 최솟값은 17이다.

8) [정답] ④

[해설] 주어진 부등식을 변형하면

$x^4-4x\geq k$

$f(x)=x^4-4x$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗

따라서 주어진 부등식이 성립하게 하는 k의 값의 범위는 $k\leq -3$

$\therefore$ 상수 k의 최댓값은 -3이다.

9) [정답] ②

[해설] 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2,\ a=\dfrac{dv}{dt}=6t$

따라서 시각 $t=2$에서의 가속도는

$\therefore a=12$

10) [정답] ②

[해설] 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t=3t(t-2)$

점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때에는

속도의 값이 0이므로, 이 때의 시각은 $t=2$

11) [정답] ⑤

[해설] 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-10t+20$

따라서 $t=1$에서의 속도는

$v=10(\text{m/s})$

12) [정답] ③

[해설] 열차가 제동을 걸고 t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dx}{dt}=20-4t$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$20-4t=0$에서 $t=5$

즉, $t=0$에서 $t=5$까지 열차가 이동한 거리는

$20\times 5-2\times 5^2=50$

13) [정답] ④

[해설] $x^3-12x=4$에서 $x^3-12x-4=0$

$f(x)=x^3-12x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

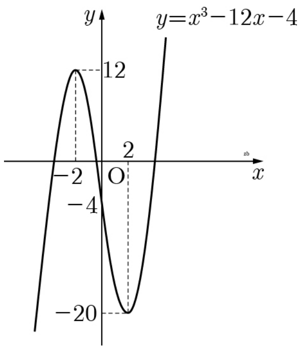
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고,

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-20	↗

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125



따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-12x=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

14) [정답] ⑤
[해설] 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=2t-4$
따라서 시각 $t=5$에서의 점 P의 속도는
$v=6$

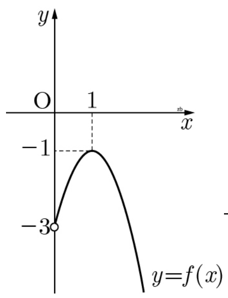
15) [정답] ②
[해설] $f(x)=x^4-2x^2+a$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

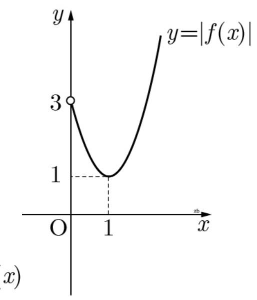
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-1$	↗	a	↘	$a-1$	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-1$이므로
$x^4-2x^2+a\geq 0$이 성립하는 상수 a의 값의 범위는 $a-1\geq 0$에서 $a\geq 1$
$\therefore$ a의 최솟값은 1이다.

16) [정답] ①
[해설] 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -3)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=3x-3$
$\mathrm{P}(t,\ t^3)$ $(t>0)$에 대하여 삼각형 APB의 넓이 S가 최소가 되려면 점 P와 직선 $y=3x-3$ 사이의 거리가 최소가 되어야 한다.
$\mathrm{P}(t,\ t^3)$과 $3x-y-3=0$ 사이의 거리는
$d=\dfrac{|3t-t^3-3|}{\sqrt{9+1}}$
즉, $|3t-t^3-3|$이 최소일 때 삼각형 APB의 넓이가 최소가 된다.
$f(x)=-x^3+3x-3$이라 하면
$f'(x)=-3x^2+3$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고,
$y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	-1	↘





$\therefore x=1$일 때 $|3t-t^3-3|$이 최소가 되므로
△APB의 넓이가 최소일 때 점 P의 좌표는
$(1,\ 1)$
이때의 x좌표와 y좌표의 합은 2
[다른 풀이] 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -3)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=3x-3$
삼각형 APB의 넓이 S가 최소가 되려면
점 P에서의 접선의 기울기가
직선 AB의 기울기와 같아야 한다.
$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
$3x^2=3$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$
따라서 제 1사분면에 위치한 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로 x좌표와 y좌표의 합은 2이다.

17) [정답] ④
[해설] 시각 t에서의 열차의 속도를 v라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{3}{7}t^2+21$
열차가 정지할 때 $v=0$이므로
$-\dfrac{3}{7}t^2+21=0$에서 $t^2=49$
$t\geq 0$이므로 $t=7$
따라서 열차에 제동을 건 후 정지할 때까지
움직인 거리는 98m이다.

18) [정답] ④
[해설] 주어진 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=2$에서 극소이다.
방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않으려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 하므로 $f(2)>0$이어야 한다.

19) [정답] ⑤
[해설] $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$	$a+4$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 $x=2$에서 최대이다.
$f(0)=a$, $f(1)=a-1$, $f(2)=a+4$
이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이므로
$a-1=3$, $a=4$
따라서 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서의
함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(2)=4+a=8$

20) [정답] ①
[해설] $h(t)=f(t)-g(t)$로 놓으면
$h'(t)=3t^2-24t+a$
시각 $t=2$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로
$h'(2)=12-48+a=0$, 즉 $a=36$
따라서 $h(t)=t^3-12t^2+36t$이므로
$h'(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)=0$에서
$t=2$ 또는 $t=6$
따라서 두 점 P, Q가 다시 속도가 같아지는 시각은 $t=6$이고 이때 $h(6)=0$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 0이다.

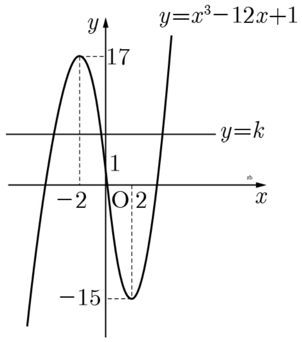
21) [정답] ③
[해설] $2\pi r^2+2\pi rh=6\pi$에서 $h=\dfrac{3-r^2}{r}$ $\cdots$ ㉠
원기둥의 부피를 $V(r)$이라고 하면
$V(r)=\pi r^2 h=3\pi r-\pi r^3$
$V'(r)=3\pi-3\pi r^2=-3\pi(r+1)(r-1)$
$V'(r)=0$에서 $r=-1$ 또는 $r=1$
$r>0$이므로 $r=1$
구간 $(0,\ \sqrt{3})$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 원기둥의 부피는 $r=1$일 때 최대이다.
㉠에 $r=1$을 대입하면 $h=2$
$\therefore r+h=3$

22) [정답] ⑤
[해설] $f(x)=x^3-12x+1$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고,
$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $1<k<17$
$\therefore$ 정수 k의 개수는 15

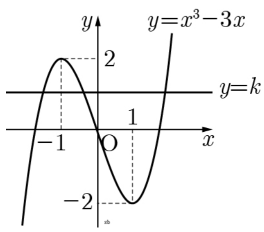
23) [정답] ③
[해설] $g(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면
$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

$a=1$일 때 닫힌구간 $[0,a]$에서의 최솟값은
$f(1)=g(1)=-2$
$a=2$일 때 닫힌구간 $[0,a]$에서의 최솟값은
$f(2)=g(2)=-4$
$a=3$일 때 닫힌구간 $[0,a]$에서의 최솟값은
$f(3)=g(2)=-4$
따라서 $f(1)+f(2)+f(3)=-10$이다.

24) [정답] ③
[해설] 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나면
방정식 $x^3-4x=-x+k$의 서로 다른 근의 개수는 3이다.
$x^3-4x=-x+k$에서 $x^3-3x=k$
$f(x)=x^3-3x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고,
$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$-2 < k < 2$

$\therefore$ 정수 k의 값의 개수는 3이다.

25) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)<0 \qquad \therefore -5<a<27$

따라서 $M=26$, $m=-4$이므로

$M-m=26-(-4)=30$

26) [정답] ①

[해설] 물체가 지면에 떨어질 때 $x=0$이므로

$-5t^2+20t+60=0$

$t^2-4t-12=0$, $(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=6(\because t>0)$

물체의 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-10t+20$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는

$v=-60+20=-40$

27) [정답] ④

[해설] ㄱ. $t=b$일 때, 접선의 기울기, 즉 속도는 음수이므로 0이 아니다.

즉 $t=b$일 때, 점 P는 운동방향을 바꾸지 않는다.

ㄴ. $f'(c)=0$이므로 $t=c$일 때, 점 P의 속도는 0이다.

ㄷ. 주어진 그래프에서

t	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

방향을 처음으로 바꿀 때, $t=a$

즉 $t=a$에서 $f'(t)$의 그래프에서의 기울기는 음수이므로 가속도는 음수이다.

28) [정답] ④

[해설] $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-9x=3x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-\dfrac{7}{2}$	↘	$a-\dfrac{27}{2}$	↗	$a-8$

구간 $[1,4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=a-\dfrac{7}{2}$이다.

구간 $[1,4]$에서 $f(x)\le 0$이려면 $f(1)\le 0$이어야 하므로

$f(1)=a-\dfrac{7}{2}\le 0 \qquad \therefore a\le\dfrac{7}{2}$

따라서 이를 만족하는 정수 a의 최댓값은 3이다.

29) [정답] ③

[해설] $f(x)=3x^4-4x^3-1$이라 하면

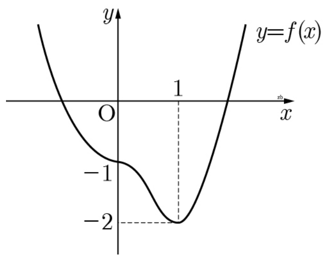
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

$f(0)=-1$, $f(1)=3-4-1=-2$

즉 함수 $f(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

30) [정답] ①

[해설] 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t-2$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서

$2t-2=0 \qquad \therefore t=1$

31) [정답] ②

[해설] $x^4-4x^3+4x^2+a=0$에서 $x^4-4x^3+4x^2=-a$

$f(x)=x^4-4x^3+4x^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(0)=0$, $f(1)=1-4+4=1$,

$f(2)=16-32+16=0$

이때 방정식 $f(x)=-a$가 서로 다른 세 실근을 가지려면

$-a=1 \qquad \therefore a=-1$

32) [정답] ⑤

[해설] ㄱ. $t=3$에서 속도 $v(t)$의 그래프의 기울기가

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

음수이므로 0은 아니다.
ㄴ. $4 < t < 5$일 때, 속도 $v(t)$의 그래프에서 속도의 절댓값인 점 P의 속력은 감소한다.
ㄷ. 점 P의 운동방향은 $t=3$, $t=5$에서 총 2번 바뀐다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125