

2022학년도 2학기 제1차 지필평가

1학년 수학

과목코드 02

2022. 10. 13. 3교시

- 본 시험은 선택형 [18] 문항, 논술형 [2] 문항, 쪽수는 [6] 쪽입니다.
- 답안지에 계열, 학년, 반, 번호, 과목코드를 정확히 기입하고 가장 알맞은 답을 컴퓨터용 사인펜으로 ●와 같이 표기하시오.
- 논술형 문항의 답은 OMR 카드 논술형 답란에 검정색 펜(볼펜)으로 서술하고, 답안 수정 시에는 두 줄을 긋고 재작성하시오.

1. 방정식 $4x - 3y - 1 = 0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은? [4.0점]

- ① $4x - 3y - 1 = 0$
- ② $4x - 3y + 1 = 0$
- ③ $4x + 3y + 1 = 0$
- ④ $3x - 4y + 1 = 0$
- ⑤ $3x + 4y - 1 = 0$

$$-4x + 3y - 1 = 0$$

$$4x - 3y + 1 = 0$$

2. 다음 중 거짓인 명제는? [4.0점]

- ① $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.
- ② 두 홀수의 합은 짝수이다.
- ③ 어떤 짝수는 15의 약수이다.
- ④ 모든 정사각형은 직사각형이다.
- ⑤ 마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분한다.



3. 집합 $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은? [4.0점]

- ① $a \notin A$
- ② $\{b\} \in A$
- ③ $\{a, b\} \notin A$
- ④ $\{a, b\} \subset A$
- ⑤ $\{\{a, b\}\} \subset A$

4. 집합 A 와 집합 A 의 원소의 개수 $n(A)$ 를 바르게 짝지은 것은? [4.2점]

- | A | $n(A)$ |
|--|--------|
| ① $\{x x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ | 5 |
| ② $\{x x \text{는 한 자리의 홀수}\}$ | 4 |
| ③ $\{x x \text{는 } 9 < x < 15 \text{인 소수}\}$ | 1 |
| ④ $\{x x \text{는 } x^2 - x - 6 \leq 0 \text{인 정수}\}$ | 3 |
| ⑤ $\{x x \text{는 } x^2 + 8x + 16 = 0 \text{인 자연수}\}$ | 0 |

$$(x+4)^2 = 0$$

$$(x-3)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 3$$

5. 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 4y - 6 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 넓이가 직선 $y = -2x$ 에 의해 이등분될 때, 실수 a 의 값은? [4.2점]

- ① -4
- ② -3
- ③ 1
- ④ $2\sqrt{5}$
- ⑤ 5

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 = a^2 + 10$$

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 = a^2 + 10$$

$$2 = -2(a+3)$$

$$2 = -2a - 6$$

$$2a = -8$$

$$a = -4$$

6. 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $-x^2 + 3ax - 9 > 0$ 이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 곱은? [4.2점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

$$-x^2 + 3ax - 9 \leq 0$$

$$x^2 - 3ax + 9 \geq 0$$

$$x^2 - 3ax + 9 \geq 0$$

$$x^2 - 3ax + 9 \geq 0$$

$$p \leq 0$$

$$9a^2 - 36 \leq 0$$

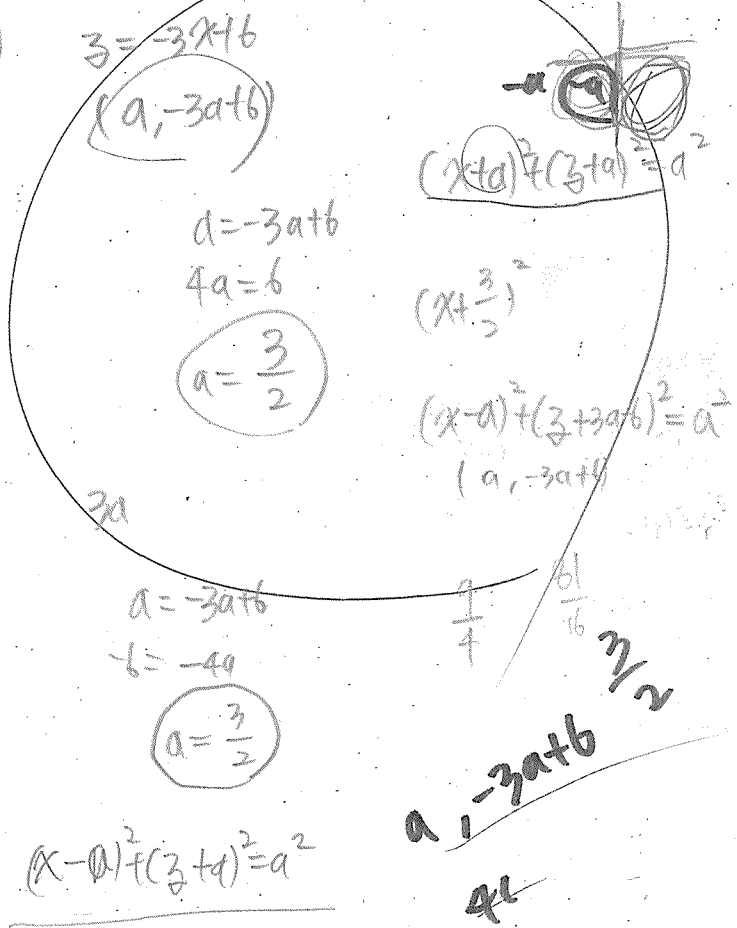
$$-2 \leq a \leq 2$$

$$-2 - 1 0 1 2$$

$$-1 \cdot -4 = 4$$

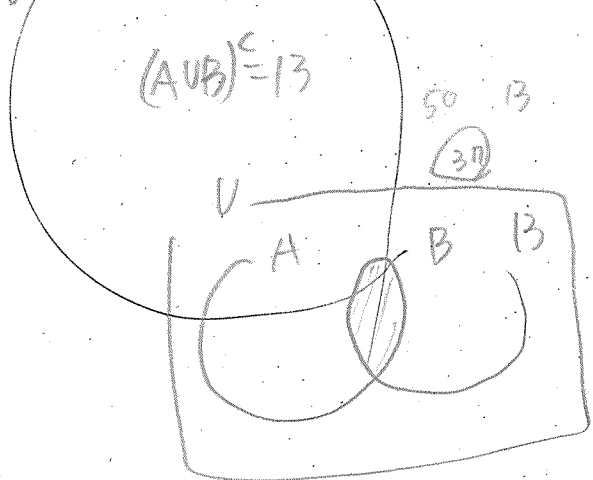
7. 중심이 직선 $3x+y=6$ 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원 중에서 제4사분면 위에 있는 원의 넓이는? [45점]

- ① 5π ② 7π ③ 9π ④ 11π ⑤ 15π



8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50$, $n(A) = 26$, $n(B) = 19$, $n(A^c \cap B^c) = 13$ 일 때, $n(A \cap B)$ 는? [45점]

- ① 6 ② 8 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19



$A \cup B = 31$

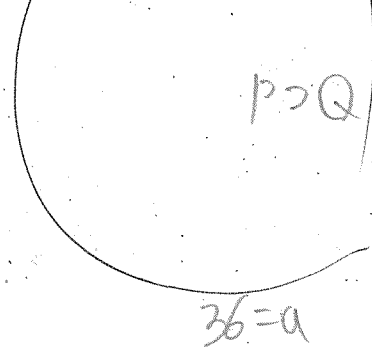
$26 \quad 19$
 $45 - 31$

9. x 가 실수일 때, 두 조건

$p: (x+4)^2 = a, q: x=2$ 또는 $x=b$

에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수) [47점]

- ① 26 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 46



$(b+4)^2 = 36$

$b^2 + 8b + 16 = 36$

$b^2 + 8b - 20 = 0$

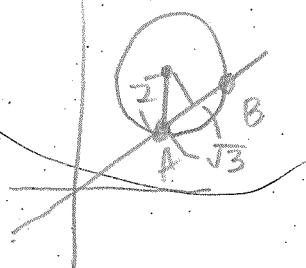
$(b+10)(b-2) = 0$

$b = -10$ or 2

10. 원점을 지나고 기울기가 m 인 직선이 원 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 과 서로 다른 두 점 A, B 에서 만난다. $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 일 때, 양수 m 의 값은? [47점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$(0,0) \quad m$
 $3 = mx$



$mx - 3 = 0$

$(-2, 0) \quad r = 2$

$d = \frac{|-2m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$4 = 3 + \frac{4m^2}{m^2 + 1}$

$1 = \frac{4m^2}{m^2 + 1}$

$4m^2 = m^2 + 1$

$3m^2 = 1$

$m^2 = \frac{1}{3}$

$m = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

11. 점 (1, 4)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱은? [5.0점]

- ① $-\frac{11}{4}$ ② -2 ③ $-\frac{11}{8}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{4}{11}$

$$3-4=m(x-1)$$

$$mx-3-m+4=0$$

$$(0,0) \quad r=\sqrt{5}$$

$$\frac{|-m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$m^2-8m+16=5m^2+5$$

$$4m^2-8m-11=0$$

$$\Delta_B = -\frac{11}{4}$$

12. 어느 반 학생 중에서 A 뮤지컬을 관람한 학생은 21명, B 뮤지컬을 관람한 학생은 18명이다. 이 반 학생 중에서 A 뮤지컬과 B 뮤지컬을 모두 관람한 학생이 7명 이상일 때, A 뮤지컬 또는 B 뮤지컬을 관람한 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합은? [5.0점]

- ① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

A 21

$A \cap B \geq 7$

B 18

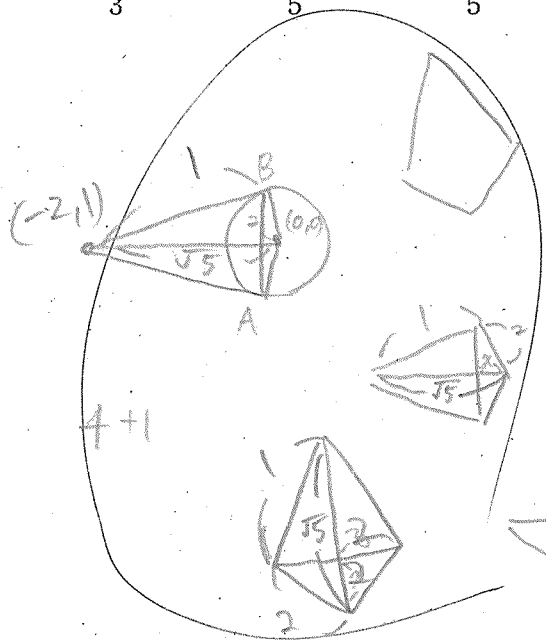
$$21+18-7=32$$

53

$$21+18-18=21$$

13. 점 P(-2, 1)에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이는? (단, 점 O는 원점) [5.2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$



$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{8}{5}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

14. 세 조건 p, q, r가

$$p: |x-2| > a,$$

$$q: x^2 - 8x + 7 > 0,$$

$$r: |2x-5| \leq 1$$

일 때, 명제 $r \rightarrow \sim p$ 와 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이 되도록 하는 양수 a의 값은? [5.2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$r \subset \sim p \subset \sim q$$

$$(a>0)$$

$$|x-2| \leq a$$

$$\sim p: 2-a \leq x \leq 2+a$$

$$\sim q: x^2 - 8x + 7 \leq 0$$

$$(x-1)(x-7) \leq 0$$

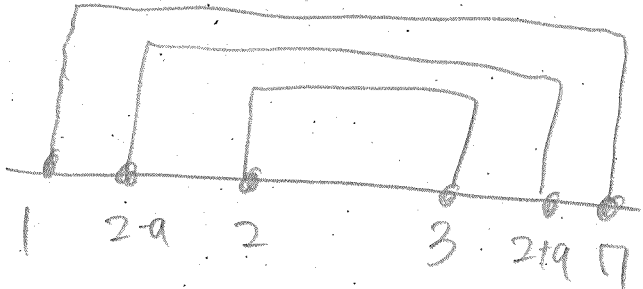
$$1 \leq x \leq 7$$

$$-1 \leq 2x-5 \leq 1$$

$$4 \leq 2x \leq 6$$

$$r: 2 \leq x \leq 3$$

$$2 \leq 3$$



$$1 \leq 2-a \leq 2$$

$$3 \leq 2+a \leq 7$$

$$-1 \leq -a \leq 0$$

$$1 \leq a \leq 5$$

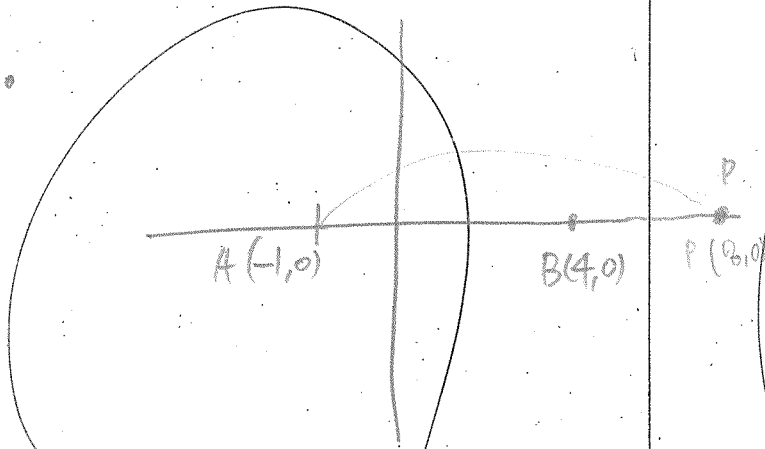
$$1 \geq a \geq 0$$

$$\textcircled{1} 2$$

15. 두 점 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$ 에 대하여 점 P 가 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3:2$ 를 만족하면서 좌표평면 위를 움직일 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은? [5.3점]

① 4 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 15

-1, 0



$$3\overline{BP} = 2\overline{AP}$$

$$9\overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$$

$$A(-1, 0) \quad B(4, 0) \quad P(a, b)$$

$$9\{(a-4)^2 + b^2\} = 4\{(a+1)^2 + b^2\}$$

$$9a^2 - 72a + 144 + 9b^2 = 4a^2 + 8a + 4 + 4b^2$$

$$5a^2 - 80a + 140 + 5b^2 = 0$$

$$a^2 - 16a + 28 + b^2 = 0$$

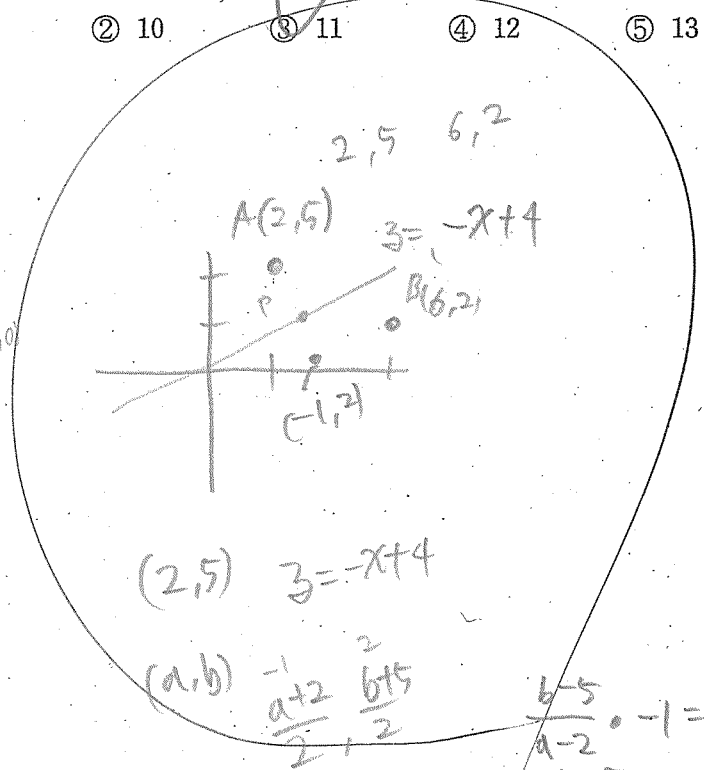
$$(a-8)^2 + b^2 = 36$$

$$P(8, 0)$$

$$9\overline{BP} = 4\overline{AP}$$

16. 좌표평면 위의 두 점 $A(2, 5)$, $B(6, 2)$ 와 직선 $y = -x + 4$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 a , 이때 점 P 의 좌표를 (b, c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? [5.3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



$$(2, 5) \quad 3 = -x + 4$$

$$(a, b) \quad \frac{a+2}{2} \quad \frac{b+5}{2}$$

$$\frac{b+5}{2} = \frac{-a+2}{2} + 4$$

$$b+5 = -a-2+b$$

$$a+b=1$$

$$-a+b=3$$

$$2b=4$$

$$a=-1 \quad b=2$$

$$(-1, 2) \quad (6, 2)$$

$$-1-6 \quad 2-6 \quad \pi = a$$

$$(-1, 2) \quad (2, 5)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + 7 = 11$$

17. 어느 고등학교 학생 100명을 대상으로 두 체험 활동 A, B를 신청한 학생 수를 조사하였더니 다음과 같은 사실을 알게 되었다.

- 체험 활동 A를 신청한 학생은 체험 활동 B를 신청한 학생보다 10명이 많다.
- 어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생은 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생보다 60명이 적다.

체험 활동 A만 신청한 학생 수의 최댓값은? [5.5점]

- ① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

Handwritten solution for problem 17:

Let $U = 100$ be the total number of students.

Let A be the set of students who participated in activity A, and B be the set of students who participated in activity B.

Given: $|A| = |B| + 10$ and $|U \setminus (A \cup B)| = 60$.

Let $x = |A \setminus B|$ and $y = |B \setminus A|$.

Then $|A \cap B| = |A| - x = |B| + 10 - x = y + 10$.

The total number of students is $|U| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| + |U \setminus (A \cup B)| = x + (y + 10) + y + 60 = 100$.

Simplifying, we get $2y + x + 70 = 100$, or $2y + x = 30$.

Since $x = |A \setminus B|$ and $y = |B \setminus A|$, we have $x \geq 0$ and $y \geq 0$.

From $2y + x = 30$, we get $x = 30 - 2y$.

Since $x \geq 0$, we have $30 - 2y \geq 0$, or $y \leq 15$.

Since $y \geq 0$, we have $0 \leq y \leq 15$.

The maximum value of x is 30, which occurs when $y = 0$.

Therefore, the maximum number of students who participated in activity A only is 30.

18. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직이는 점 P와 두 점 A(-4, 2), B(4, 6)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? [5.5점]

- ① 12 ② 18 ③ 24 ④ 36 ⑤ 64

Handwritten solution for problem 18:

Let $P(x, y)$ be a point on the circle $x^2 + y^2 = 4$.

Let $A(-4, 2)$ and $B(4, 6)$ be two fixed points.

We want to find the maximum and minimum values of $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$.

Using the distance formula, we have $\overline{PA}^2 = (x + 4)^2 + (y - 2)^2$ and $\overline{PB}^2 = (x - 4)^2 + (y - 6)^2$.

Adding these, we get $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (x + 4)^2 + (y - 2)^2 + (x - 4)^2 + (y - 6)^2$.

Simplifying, we get $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2x^2 + 2y^2 + 16x - 8y + 20$.

Since $x^2 + y^2 = 4$, we have $2x^2 + 2y^2 = 8$.

Therefore, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 8 + 16x - 8y + 20 = 28 + 16x - 8y$.

Let $z = 16x - 8y$. We want to find the maximum and minimum values of z on the circle $x^2 + y^2 = 4$.

Using the method of Lagrange multipliers, we find that the maximum value of z is $8\sqrt{2}$ and the minimum value is $-8\sqrt{2}$.

Therefore, the maximum value of $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ is $28 + 8\sqrt{2}$ and the minimum value is $28 - 8\sqrt{2}$.

The difference between the maximum and minimum values is $(28 + 8\sqrt{2}) - (28 - 8\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$.

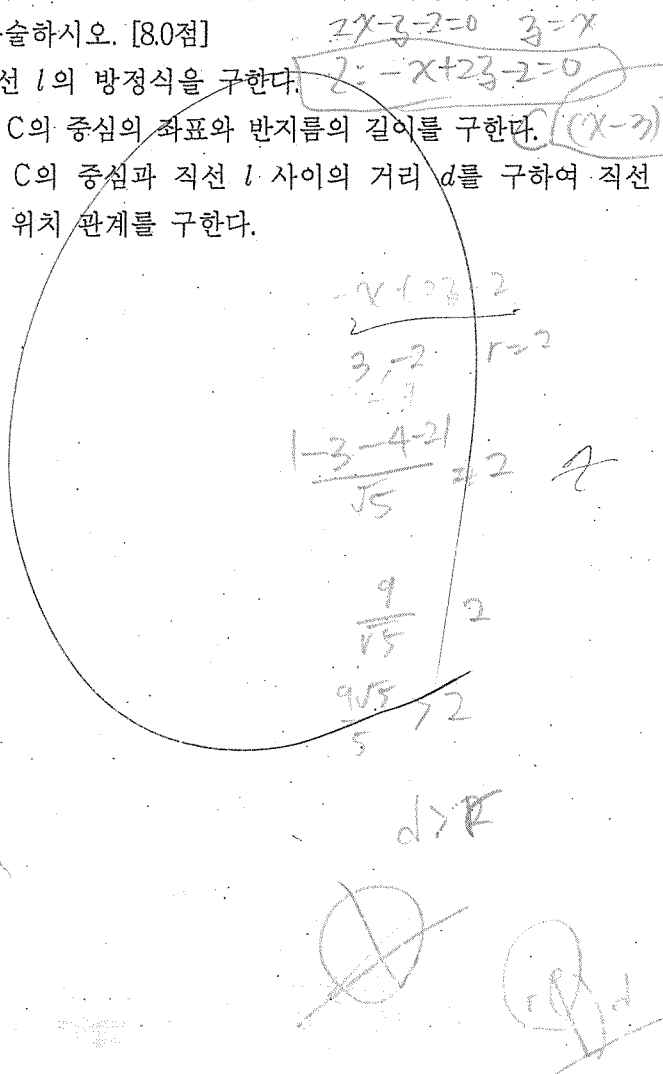
Therefore, the value of $a - b$ is $16\sqrt{2}$.

[논술형 1] 직선 $2x - y - 2 = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 l 이라 하고, 원 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원을 C 이라 할 때, 직선 l 과 원 C 의 위치 관계를 구하는 과정과 답을 다음 단계에 따라 논술하시오. [8.0점]

[1단계] 직선 l 의 방정식을 구한다.

[2단계] 원 C 의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

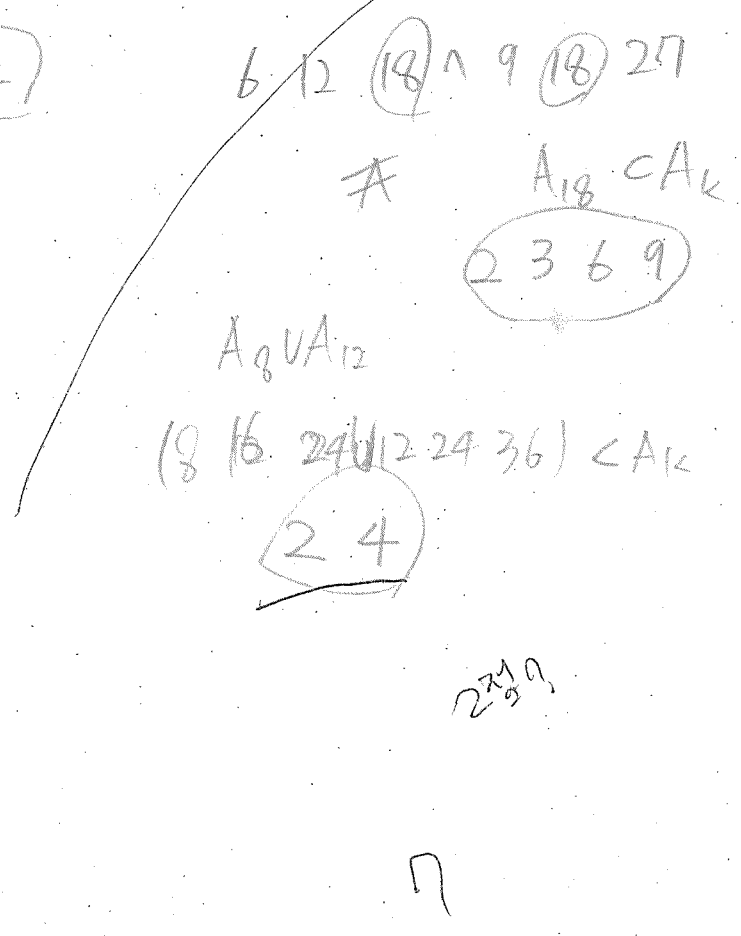
[3단계] 원 C 의 중심과 직선 l 사이의 거리 d 를 구하여 직선 l 과 원 C 의 위치 관계를 구한다.



$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 & 3 &= x \\ 2 &= -x + 2y - 2 = 0 \\ & & & \\ -x + 2y - 2 &= 0 & & \\ (3, -2) & & & \\ \frac{-3 - 4 - 2}{\sqrt{5}} &= \frac{-9}{\sqrt{5}} & & \\ & & & \end{aligned}$$

[논술형 2] 집합 $A_k = \{x | x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 라고 할 때,

$(A_6 \cap A_9) \subset A_k$ 을 만족시키는 자연수 k 의 합을 M_1 이라 하고, $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 을 만족시키는 자연수 k 의 합을 M_2 라고 하자. 이때 $M_1 + M_2$ 의 값을 구하는 과정과 답을 논술하시오. [7.0점]



※ 확인사항

답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 시험문제의 저작권은 포곡고등학교에 있습니다. 저작권법에 의해 보호받는 저작물이므로 무단전제 및 재배포시 저작권법에 의거 처벌될 수 있습니다.