단원 ISSUE

이 단원에서는 **충분(필요)조건, 필요충분조건을 판별하는 문제, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 합 또는 곱의 최솟값을 구하는 문제** 등이 자주 출제되며 충분조건과 필요조건에 대한 개념이 헷갈릴 수 있으므로 문제를 통한 정확한 개념 정립이 필요합니다.

평가문제

[대단원 마무리]

1. 명제 '$1 < x \le 4$인 어떤 실수 x에 대하여 $a-2 < x < a+1$'가 참이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[대단원 마무리]

2. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. 명제 $\sim p \to q$가 참일 때, 다음 중에서 항상 옳은 것은?

① $P-Q=\varnothing$　② $Q-P=\varnothing$　③ $P \cap Q=\varnothing$　④ $P \cup Q=U$　⑤ $P \cup Q^C=Q^C$

[중단원 마무리]

3. 다음 중에서 명제가 아닌 것은?

① 마름모는 네 변의 길이가 같다.
② $x=1$일 때, $x^2=1$이다.
③ 10000은 큰 수이다.
④ 어떤 실수 x에 대하여 $x+1=2+x$이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이다.

[중단원 마무리]

4. 두 조건 'p: $|x-3| \ge a$', 'q: $-2 \le x \le 7$'에 대하여 명제 $\sim p \to q$가 참이 되도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[중단원 마무리]

5. 다음 명제의 부정이 참인 것은?

① 정사각형은 직사각형이다.
② 평행사변형은 사다리꼴이다.
③ 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+1>0$이다.
④ 어떤 소수는 짝수이다.
⑤ 자연수는 정수이다.

[중단원 마무리]

6. 다음 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

(가) $x \le 0$인 어떤 실수 x에 대하여 $x+k-2>0$이다.
(나) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)(x-k+5) \ge 0$이다.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[중단원 마무리]

7. 두 조건 $p: |x-1| \ge a$, $q: |x+4| < b$ 에 대하여 명제 $\sim p \to q$가 참이 되도록 하는 양수 a의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[중단원 마무리]

8. 두 조건 'p: $|x-a| \le 4$', 'q: $|x-1| \le 5$' 에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건일 때, 상수 a의 범위는?

① $-2 \le a \le -1$　② $-1 \le a \le 0$
③ $0 \le a \le 2$　④ $2 \le a \le 4$
⑤ $4 \le a \le 8$

[중단원 마무리]

9. 명제 '$a=b$이면 $ac=bc$이다.'에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 명제 '$a=b$이면 $ac=bc$이다.'는 부정이다.
② 명제 '$ac=bc$이면 $a=b$이다.'는 대우이다.
③ 명제 '$a \ne b$이면 $ac \ne bc$이다.'는 역이다.
④ 명제 '$ac \ne bc$이면 $a \ne b$이다.'는 대우가 아니다.
⑤ 명제 '$ac=bc$이면 $a=b$이다.' 는 역이다.

[중단원 마무리]

10. 다음 보기의 (가), (나), (다)에 들어갈 말을 차례대로 적은 것이다. 옳은 것은?

<보기>
(1) $x=2$는 $(x-2)(x-3)=0$이기 위한 $\boxed{\text{(가)}}$조건이다.
(2) $ac=bc$는 $a=b$이기 위한 $\boxed{\text{(나)}}$조건이다.
(3) $|x|+|y|=0$은 $x^2+y^2=0$이기 위한 $\boxed{\text{(다)}}$조건이다.

① (가) : 충분　(나) : 필요　(다) : 필요충분
② (가) : 필요　(나) : 충분　(다) : 필요충분
③ (가) : 충분　(나) : 필요충분　(다) : 필요
④ (가) : 필요　(나) : 필요충분　(다) : 충분
⑤ (가) : 필요충분 (나) : 충분　(다) : 충분

[중단원 마무리]

11. 네 조건 p,q,r,s에 대하여 두 명제 $q \to \sim p$, $s \to r$가 모두 참일 때, 다음 명제 중 $p \to r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는?

① $p \to \sim s$　② $q \to \sim r$
③ $q \to \sim s$　④ $s \to \sim p$
⑤ $\sim s \to q$

[중단원 마무리]

12. 세 조건 p, q, r에 대하여 $p \to r$, $q \to r$이 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① p는 q이기 위한 충분조건이다.
② q는 p이기 위한 필요조건이다.
③ p은 r이기 위한 필요조건이다.
④ $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
⑤ p또는 q는 r이기 위한 충분조건이다.

[중단원 마무리]

13. 실수 전체의 집합에서 세 조건 p: $-2<x<0$ 또는 $x \ge 4$, $q: x \le a$, $r: x \ge b$에 대하여 $\sim q$는 p이기 위한 충분조건이고, $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건일 때, 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 최댓값은?

① -7　② -6
③ -5　④ -4
⑤ -3

[대단원 마무리]

14. 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하자. 두 명제 $\sim p \to q$와 $r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset R$　② $(P^C \cap Q) \subset R$
③ $(Q \cup R^C) \subset Q$　④ $(P^C \cup Q^C) \subset R^C$
⑤ $(P^C \cup Q) \subset R^C$

[대단원 마무리]

15. 세 조건 p, q, r에 대하여 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이고 $\sim r$는 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 명제 중 옳은 것은?

① $\sim p \to r$　② $q \to r$
③ $\sim q \to \sim p$　④ $r \to p$
⑤ $\sim r \to \sim p$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[대단원 마무리]

16. 다음 중에서 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, x, y는 실수)

① p: x는 3의 배수　　q: x는 9의 배수
② p: $x>0$, $y>0$　　q: $xy>0$
③ p: $x=y$　　q: $x^2=y^2$
④ p: $|x+y|=|x|+|y|$　　q: $x\geq 0$, $y\geq 0$
⑤ p: $x^2>y^2$　　q: $|x|>|y|$

[대단원 마무리]

17. 두 조건 p: $x^2-2x-8\neq 0$과 q: $x+k\neq 0$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -3　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 1

[대단원 마무리]

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 명제 'n^2이 4의 배수이면 n이 4의 배수이다.'가 참임을 그 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> n이 4의 배수이면 n^2이 4의 배수가 아니다.
> $n=$ (가) 또는 $n=$ (나) 또는
> $n=$ (다)라 하면
> (i) $n=$ (가)일 때 $n^2=4($ (라) $)+1$
> (ii) $n=$ (나)일 때, $n^2=4(4k^2-4k+1)$
> (iii) $n=$ (다)일 때, $n^2=4($ (마) $)+1$
> 즉 $n=$ (가) 또는 $n=$ (다)이면
> n^2은 4의 배수가 아니다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로
> 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 (가)~(마)에 들어갈 식 중 옳지 않은 것은?

① (가) : $4k-3$　② (나) : $4k-2$
③ (다) : $4k-1$　④ (라) : $4k^2-8k$
⑤ (마) : $4k^2-2k$

[중단원 마무리]

19. 다음은 $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$임을 보이는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 수와 식 중 옳지 않은 것은?

> $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{\boxed{(가)}-\boxed{(나)}}{2(a+b)}$
> $=\dfrac{\boxed{(다)}}{2(a+b)}=\dfrac{(\boxed{(라)})^2}{2(a+b)}\geq 0$
> (등호는 (마)일 때 성립)
> 따라서 $\dfrac{a+b}{2}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$

① (가) : $(a+b)^2$　② (나) : $4ab$
③ (다) : $a^2-2ab+b^2$　④ (라) : $a+b$
⑤ (마) : $a=b$

[중단원 마무리]

20. 양수 a에 대하여 $a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{9a}{a^2+1}$의 최솟값을 구하면?

① 4　② $4\sqrt{2}$
③ 6　④ $6\sqrt{2}$
⑤ 8

[중단원 마무리]

21. 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}=5$일 때, a^2+b^2의 최솟값은?

① 25　② 36
③ 64　④ 121
⑤ 144

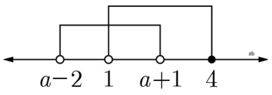
[대단원 마무리]

22. $x>-3$일 때, $x+\dfrac{4}{x+3}$의 최솟값을 m, 그때의 x값을 n이라고 하자. 이때 $m+n$의 값은?

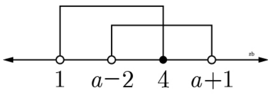
① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

정답 및 해설

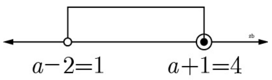
1) [정답] ⑤
[해설] 각 경우를 수직선에 나타내면 다음과 같다.

i)


$a-2<1<a+1$, $0<a<3$

ii)


$a-2<4<a+1$, $3<a<6$

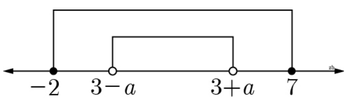
iii)


$a-2=1$, $a+1=4$, $a=3$
따라서 $0<a<6$이고
정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개다.

2) [정답] ④
[해설] 조건 p의 진리집합을 P,
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이므로 $P^C \subset Q$ 이다.
① $P-Q \neq \varnothing$이므로 옳지 않다.
② $Q-P=P^C$이므로 옳지 않다.
③ $P \cap Q \neq \varnothing$이므로 옳지 않다.
④ $P \cup Q=U$이므로 옳다.
⑤ $P \cup Q^C=P$이므로 옳지 않다.

3) [정답] ③
[해설] ③ 큰 수의 기준이 명확하지 않기 때문에 명제가 아니다.

4) [정답] ④
[해설] $\sim p$: $|x-3|<a$, $-a<x-3<a$
$3-a<x<3+a$
q: $-2 \leq x \leq 7$
$P^C=\{x \mid 3-a<x<3+a\}$
$Q=\{x \mid -2 \leq x \leq 7\}$



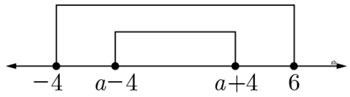
$-2 \leq 3-a$에서 $a \leq 5$,
$3+a \leq 7$에서 $a \leq 4$이므로 $a \leq 4$
따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개다.

5) [정답] ③
[해설] ① 부정 : 정사각형은 직사각형이 아니다. (거짓)
② 부정 : 평행사변형은 사다리꼴이 아니다. (거짓)
③ 부정 : 어떤 실수 x에 대하여
$x^2+2x+1 \leq 0$이다. (참)
④ 부정 : 모든 소수는 홀수이다.
2는 소수이면서 짝수이므로 거짓이다.
⑤ 부정 : 자연수는 정수가 아니다. (거짓)

6) [정답] ③
[해설] (가) 조건에서 $2-k<0$, $k>2$
(나) $x>0$, $x+1>0$이므로
$x-k+5 \geq 0$, $x \geq k-5$
$k-5 \leq 0$, $k \leq 5$
(가), (나)에 의해 $2<k \leq 5$
자연수 k는 3,4,5의 3개다.

7) [정답] ①
[해설] $p: |x-1| \geq a$ 를 정리하면
$x-1 \leq -a$ 또는 $x-1 \geq a$
$x \leq 1-a$ 또는 $x \geq 1+a$ 이고
p의 진리집합 P에 대하여
$P=\{x | x \leq 1-a$ 또는 $x \geq 1+a\}$ 이다.
$q: |x+4|<6$
$\sim q: |x+4| \geq 6$,
$x+4 \leq -6$ 또는 $x+4 \geq 6$ 에서
$x \leq -10$ 또는 $x \geq 2$
q의 진리집합 Q에 대하여
$Q^C=\{x | x \leq -10$ 또는 $x \geq 2\}$ 이고
$\sim q \rightarrow p$가 참이므로 $Q^C \subset P$이다.
따라서 $-10 \leq 1-a$, $1+a \leq 2$
$a \leq 11$, $a \leq 1$ 을 동시에 만족하는 범위는 $a \leq 1$
따라서 양수 a의 최댓값은 1이다.

8) [정답] ③
[해설] p : $|x-a| \leq 4$,
$-4 \leq x-a \leq 4$, $a-4 \leq x \leq a+4$
$P=\{x | a-4 \leq x \leq a+4\}$
q: $|x-1| \leq 5$, $-5 \leq x-1 \leq 5$, $-4 \leq x \leq 6$
$Q=\{x | -4 \leq x \leq 6\}$
p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이다.



$-4 \leq a-4$, $a \geq 0$
$a+4 \leq 6$, $a \leq 2$
따라서 $0 \leq a \leq 2$

9) [정답] ⑤
[해설] ① 명제 '$a=b$이면 $ac=bc$이다.'는 원래의 명제이므로 부정이 아니다.
② 명제 '$ac=bc$이면 $a=b$이다.'는 역이다.
③ 명제 '$a \neq b$이면 $ac \neq bc$이다.'는 역이 아니다.
④ 명제 '$ac \neq bc$이면 $a \neq b$이다.'는 대우이다.
⑤ 명제 '$ac=bc$이면 $a=b$이다.' 는 역이다.

10) [정답] ①
[해설] (1) $x=2$이면 $(x-2)(x-3)=0$이 참이고
역은 성립하지 않으므로 $x=2$는
$(x-2)(x-3)$이기 위한 충분조건이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

(2) $ac=bc$ 이면 $a=b$은 거짓이고 역은 성립하므로 $ac=bc$은 $a=b$이기 위한 필요조건이다.
(3) $|x|+|y|=0$은 $x^2+y^2=0$이기 위한 필요충분조건이다.

11) [정답] ⑤
[해설] $q\rightarrow\sim p$가 참이면 $p\rightarrow\sim q$가 참이다.
$p\rightarrow\sim q$가 참이고, $s\rightarrow r$이 참이므로
$\sim q\rightarrow s$가 참이면 $p\rightarrow r$가 참이다.
$\sim q\rightarrow s$가 참이면 $\sim s\rightarrow q$가 참이다.

12) [정답] ⑤
[해설] $p\rightarrow r$, $q\rightarrow r$ 이 참임에서
① $p\rightarrow q$가 참인지는 알 수 없으므로 p가 q이기 위한 충분조건은 아니다.
② $p\rightarrow q$가 참인지는 알 수 없으므로 q가 p이기 위한 필요조건은 아니다.
③ $p\rightarrow r$가 참이므로 p은 r이기 위한 충분조건이다.
④ $\sim r\rightarrow\ \sim q$가 참이므로 $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
⑤ 'p또는 q 이면 r' 이 참이므로 p 또는 q는 r이기 위한 충분조건이다.

13) [정답] ②
[해설] $p:-2<x<0$ 또는 $x\geq 4$의 진리집합을 P라 하면 $P=\{x|-2<x<0$ 또는 $x\geq 4\}$
$q:x\leq a$의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{x|x\leq a\}$
$r:x\geq b$의 진리집합을 R이라 하면 $R=\{x|x\geq b\}$
$\sim q$는 p이기 위한 충분조건이므로 $Q^C\subset P$이다.
$\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로
$R^C\subset P^C$, $P\subset R$이고 $a\geq 4$이고, $b\leq -2$ 이다.
따라서 $b-a$의 최댓값은 $-2-4=-6$

14) [정답] ⑤
[해설] 조건 p의 진리집합 P, 조건 q의 진리집합 Q, 조건 r의 진리집합 R에 대하여 $\sim p\Rightarrow q$,
$P^C\subset Q$, $r\Rightarrow\sim q$, $q\Rightarrow\sim r$, $Q\subset R^C$이다.
$P^C\subset Q\subset R^C$ 이므로
① $P\not\subset R$
② $P^C\cap Q=Q\subset R^C$
③ $(Q\cup R^C)\subset R^C\not\subset Q$
④ $P^C\cup Q^C\not\subset R^C$
⑤ $(P^C\cup Q)\subset Q\subset R^C$

15) [정답] ③
[해설] $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로
$\sim q\rightarrow\sim p$가 참이고, $p\rightarrow q$가 참이다.
$\sim r$은 q이기 위한 필요조건이므로
$q\rightarrow\sim r$가 참이다.
$\therefore$ $\sim p\rightarrow\ \sim r$가 참이므로 $r\rightarrow\sim p$가 참이다.
①, ②, ④, ⑤은 항상 옳다고 볼 수 없다.

16) [정답] ⑤
[해설] 조건 p,q의 진리집합을 P, Q라고 하면
① $P=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$,
$Q=\{9,\ 18,\ 27,\ \cdots\}$
$P\not\subset Q$, $Q\subset P$이므로
p는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.
② 반례 : $x=-1$, $y=-1$이면 $q\rightarrow p$가 성립하지 않는다.
③ 반례 : $x=1$, $y=-1$ 이면 $q\rightarrow p$가 성립하지 않는다.
④ 반례 : $x=-2$, $y=-1$이면 $p\rightarrow q$가 성립하지 않는다.
⑤ $p\rightarrow q$, $q\rightarrow p$가 모두 참이다.

17) [정답] ②
[해설] $p:(x-4)(x+2)\neq 0$
$\sim p:(x-4)(x+2)=0$
$q:x+k\neq 0$,
$\sim q:x+k=0$
p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$p\rightarrow q$가 참이므로 $\sim q\rightarrow\sim p$가 참이다.
$Q^C=\{x|x+k=0\}=\{-k\}$
$P^C=\{x|(x-4)(x+2)=0\}=\{-2,\ 4\}$
$Q^C\subset P^C$이므로 $-k=-2$ 또는 $-k=4$
$k=2$ 또는 $k=-4$
그러므로 k값들의 합은 -2

18) [정답] ④
[해설] n은 4의 배수가 아니므로
$n=4k-3$, $n=4k-2$, $n=4k-1$
(ⅰ) $n^2=(4k-3)^2$
$=16k^2-24k+9=4(4k^2-6k+2)+1$
(ⅱ) $n^2=(4k-2)^2$
$=16k^2-16k+4=4(4k^2-4k+1)$
(ⅲ) $n^2=(4k-1)^2$
$=16k^2-8k+1=4(4k^2-2k)+1$
(라)는 $4k^2-6k+2$이다.

19) [정답] ④
[해설] $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}$
$=\dfrac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$
$a=b$일 때, $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}=0$,
$a\neq b$일 때, $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}>0$
따라서 $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}\geq 0$이므로 $\dfrac{a+b}{2}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$
④ $a-b$이므로 옳지 않다.

20) [정답] ③

[해설] $a+\frac{1}{a}+\frac{9a}{a^2+1}=\frac{a^2+1}{a}+\frac{9a}{a^2+1}$

$\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{9a}{a^2+1}}=6$

21) [정답] ⑤

[해설] a, b, x, y가 실수일 때

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$이 성립하므로

$x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$일 때,

$(a^2+b^2)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{9}\right)\geq\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}\right)^2=25$

$(a^2+b^2)\times\frac{25}{144}\geq 25$, $a^2+b^2\geq 144$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 144이다.

22) [정답] ③

[해설] $x+\frac{4}{x+3}=x+3+\frac{4}{x+3}-3$

$x+3+\frac{4}{x+3}\geq 2\sqrt{(x+3)\times\frac{4}{x+3}}=4$ 에서

$x+\frac{4}{x+3}$의 최솟값은 1이므로 $m=1$

한편, 등호는 $x+3=\frac{4}{x+3}$일 때 성립하므로

$(x+3)^2=4$, $x+3=2$ 또는 $x+3=-2$

$x=-1$ 또는 $x=-5$ $(x>-3)$

따라서 $x=-1$이므로 $n=-1$, $m+n=0$