01 로그함수 $y=\log_a x$의 최대 · 최소

정의역이 $\{x|m \le x \le n\}$일 때,
로그함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\ne 1)$은
(1) $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 $\log_a m$,
$x=n$일 때 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.
(2) $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 $\log_a m$,
$x=n$일 때 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

◪ 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

1. $y=\log_2 x\ \ (1 \le x \le 64)$

2. $y=\log_{\frac{1}{3}} x\ \left(\frac{1}{9} \le x \le 27\right)$

3. $y=\log_3 (3x+1)\ \left(\frac{2}{3} \le x \le \frac{80}{3}\right)$

4. $y=\log_2 x\ \ (2 \le x \le 64)$

5. $y=\log_2 x\ \left(\frac{1}{2} \le x \le 16\right)$

6. $y=-\log_5 (x-2)+3\ \ (7 \le x \le 127)$

7. $y=\log_{\frac{1}{2}} (x+1)\ \left(-\frac{1}{2} \le x \le 7\right)$

8. $y=\log_{\frac{1}{2}} (2x-1)+1\ \left(\frac{5}{8} \le x \le 1\right)$

9. $y=\log_3 (x+1)-1\ \ (2 \le x \le 26)$

10. $y=\log_{\frac{1}{3}} (3x+1)\ \left(\frac{2}{3} \le x \le 2\right)$

11. $y=\log_2 (x-1)\ \ (5 \le x \le 33)$

12. $y=\log_{\frac{1}{2}} (1-x)+3\ \left(-3 \le x \le \frac{1}{2}\right)$

13. $y=\log_{\frac{1}{4}} (2x+1)+3\ \left(-\frac{3}{8} \le x \le \frac{3}{2}\right)$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 물음에 답하여라.

14. $4 \le x \le 10$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+a$의 최댓값이 4일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

15. $1 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x)=3^{-x+2}+1$의 최댓값을 a, 함수 $g(x)=\log_2(x+1)+2$의 최솟값을 b라 할 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

16. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$인 두 함수 $f(x)=4^{x-1}$, $g(x)=-\log_2(x+2)$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

02 함수 $y=\log_a f(x)$꼴의 최대 • 최소

① 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.
② ①에서 구한 $f(x)$의 최댓값과 최솟값에서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

◪ 주어진 정의역에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

17. $y=\log_3(-x^2+10x)$ $(1 \le x \le 7)$

18. $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2+8x-2)$, $\{x \mid 1 \le x \le 3\}$

19. $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x+23)$, $\{x \mid 1 \le x \le 7\}$

20. $y=\log_2(x^2-6x+10)$ $(2 \le x \le 5)$

21. $y=\log_2(x^2+2x-4)$, $\{x \mid 2 \le x \le 5\}$

22. $y=\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x+8)$ $(1 \le x \le 4)$

23. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+5)$, $\{x \mid 0 \le x \le 3\}$

24. $y=\log_3\{(x-2)^2+3\}$, $\{x \mid 1 \le x \le 5\}$

25. $y=\log_2(x^2-2x+4)$, $\{x \mid 2 \le x \le 6\}$

26. $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+8x+9)$ $(-2 \le x \le 2)$

◪ 다음 함수의 최댓값을 구하여라.

27. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+17)$

28. $y=\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

29. $y=\log_3(x-1)+\log_3(7-x)$

◪ 다음 함수의 최솟값을 구하여라.

30. $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

31. $y=\log_2(x^2+4x+12)$

32. $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

33. 정의역이 $\{x\,|\,4\le x\le 6\}$인 함수 $y=\log_a(x^2-6x+10)$의 최솟값이 1일 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>1$)

34. 구간 $[-1,2]$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

35. 함수 $y=\log_4(x+5)+\log_4(1-x)$의 최댓값을 α라 할 때, 2^α의 값을 구하여라.

36. 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $y=\log_a(x^2-2x+10)$의 최댓값이 -2일 때, $6a$의 값을 구하여라.

37. 함수 $f(x)=\log_a(x^2-4x+6)$의 최댓값이 -2일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

38. $a>1$일 때, 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)=\log_a(-x^2+6x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 1이라고 한다. 이때, a의 값을 구하여라.

39. $-4\le x\le 2$일 때 함수 $y=\log_a\left(-\frac{1}{2}x^2-2x+14\right)$의 최댓값이 -2일 때, 최솟값을 구하여라.

40. 함수 $y=\log_a(x^2-4x+12)$의 최솟값이 64일 때, 상수 a의 값을 구하여라.(단, $0\le x\le 2,\ a>1$)

03 로그함수 $y=\log_a x$의 최대 • 최소의 응용

(1) 치환을 이용한 로그함수의 최대 • 최소
: $\log_a x = t$로 치환하여 최댓값과 최솟값을 구한다.
(2) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 로그함수의 최대 • 최소
: 로그의 밑, 지수 조건과 ,로그의 여러 가지 성질을 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

◪ 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

41. $y=6(\log_3 x)^2-3\log_{\sqrt{3}} x^2 \ (3 \le x \le 9)$

42. $y=2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{3}} x^2 \ (1 \le x \le 3)$

43. $y=-(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2+3 \ \left(\frac{1}{4} \le x \le 2\right)$

44. $y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+4 \ (1 \le x \le 8)$

45. $y=(\log_2 x)^2+\log_2 2x \ \left(\frac{1}{2} \le x \le 2\right)$

46. $y=(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_3 x)+2\log_3 x+4 \ (1 \le x \le 81)$

47. $y=(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2+2 \ (1 \le x \le 16)$

48. $y=(\log x)^2+\log x^4-1, \ (0.01 \le x \le 1000)$

49. $y=(\log_3 x)^2+4\log_3 x-1 \ \left(\frac{1}{9} \le x \le 3\right)$

50. $y=-(\log x)^3+6(\log x)^2-9\log x-1 \ (1 \le x \le 100)$

51. $f(x)=(\log_2 16x)\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4}\right) \ \left(\frac{1}{4} \le x \le 4\right)$

52. $y=\left(\log_2 \frac{x}{8}\right)(\log_2 2x) \ (1 \le x \le 16)$

53. $y=(\log_3 x)\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{27}\right)+3\log_3 x+2 \ (3 \le x \le 30)$

54. $y=\frac{1}{3}x^{-1+\log_3 x}\ \ (1\le x\le 9)$

55. $y=4x^{\log_2 x-4}(2\le x\le 32)$

56. $y=x^{2-\log_2 x}\ \ (1\le x\le 8)$

57. $f(x)=32x^{\log_2 x-4}(2\le x\le 16)$

◪ $x>0,\ y>0$**일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.**

58. $\log_{\frac{1}{7}}\left(x+\frac{4}{y}\right)+\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{x}+9y\right)$

59. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+2y\right)$

60. $\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+\frac{1}{y}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{x}+y\right)$

◪ $x>0,\ y>0$**일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.**

61. $y=\log_2(x+2)-\log_4 x$

62. $y=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-\log_2 x^2-\log_x 4-1$

63. $\log_6\left(x+\frac{5}{y}\right)+\log_6\left(\frac{1}{x}+5y\right)$

64. $\log_3\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_3\left(2y+\frac{1}{x}\right)$

65. $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}+y\right)$

◪ **다음 물음에 답하여라.**

66. $1\le x\le 27$**에서**
함수 $y=\left(\log_3\frac{x}{3}\right)\left(\log_3\frac{x}{27}\right)$**의 최댓값을** M**, 최솟값을** m**이라 할 때,** $M-m$**의 값을 구하여라.**

67. $1 \le x \le 27$에서
함수 $f(x)=(\log_3 3x)^2+\log_{\frac{1}{3}} x^4+7$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M+m$의 값을 구하여라.

68. $x>1$일 때, $\log_3 x+\log_x 81$의 최솟값을 구하여라.

69. 양수 x, y에 대하여 $x+3y=18$일 때, $\log_3 x+\log_3 y$의 최댓값을 구하여라.

70. $x>0$, $y>0$에 대하여 $2x+y=16$일 때, $\log_2 x+\log_2 y$의 최댓값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 최댓값 : 6, 최솟값 : 0

⇨ 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 최댓값은 $x=64$일 때 $y=\log_2 64=6$,
최솟값은 $x=1$일 때, $y=\log_2 1=0$

2) 최댓값 : 2, 최솟값 : -3

⇨ $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 밑이 $\frac{1}{3}$이므로
$x=\frac{1}{9}$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}=2$
$x=27$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 27=-3$

3) 최댓값 : 4, 최솟값 : 1

⇨ 함수 $y=\log_3(3x+1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $\frac{2}{3} \le x \le \frac{80}{3}$이므로
최댓값은 $x=\frac{80}{3}$일 때 $\log_3(80+1)=\log_3 3^4=4$,
최솟값은 $x=\frac{2}{3}$일 때 $\log_2(2+1)=\log_3 3=1$이다.

4) 최댓값 : 6, 최솟값 : 1

⇨ $y=\log_2 x$는 밑이 2이므로
$x=64$일 때, 최댓값은 $\log_2 64=6$
$x=2$일 때, 최솟값은 $\log_2 2=1$

5) 최댓값 : 4, 최솟값 : -1

⇨ 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $\frac{1}{2} \le x \le 16$이므로
최댓값은 $x=16$일 때, $\log_2 16=\log_2 2^4=4$,
최솟값은 $x=\frac{1}{2}$일 때 $\log_2 \frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$이다.

6) 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

⇨ 함수 $y=-\log_5(x-2)+3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 최댓값은 $x=7$일 때
$y=-\log_5(7-2)+3=2$,
최솟값은 $x=127$일 때 $y=-\log_5(127-2)+3=0$

7) 최댓값 : 1, 최솟값 : -3

⇨ 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 최댓값은 $x=-\frac{1}{2}$일 때
$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$,
최솟값은 $x=7$일 때
$y=\log_{\frac{1}{2}}(7+1)=\log_{\frac{1}{2}}8=-3$

8) 최댓값 : 3, 최솟값 : 1

⇨ 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $\frac{5}{8} \le x \le 1$이므로
최댓값은 $x=\frac{5}{8}$일 때 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}+1=3$
$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}+1=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=2+1=3$,
최솟값은 $x=1$일 때 $\log_{\frac{1}{2}}1+1=1$이다.

9) 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

⇨ 함수 $y=\log_3(x+1)-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $2 \le x \le 26$이므로
최댓값은 $x=26$일 때
$\log_3 27-1=\log_3 3^3-1=3-1=2$,
최솟값은 $x=2$일 때 $\log_3 3-1=1-1=0$이다.

10) 최댓값 : -1, 최솟값 : $\log_{\frac{1}{3}}7$

⇨ $y=\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)$은 밑이 $\frac{1}{3}$이므로
$x=\frac{2}{3}$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$
$x=2$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}}7$

11) 최댓값 : 5, 최솟값 : 2

⇨ $y=\log_2(x-1)$은 밑이 2이므로
$x=33$일 때, 최댓값은 $\log_2 32=5$
$x=5$일 때, 최솟값은 $\log_2 4=2$

12) 최댓값: 4, 최솟값: 1

⇨ $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)+3$은 밑이 $\frac{1}{2}$이므로
$1-x$가 최소일 때
즉 $x=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 4를 갖고,
$x=-3$일 때, 최솟값 $-2+3=1$을 갖는다.

13) 최댓값 : 4, 최솟값 : 2

⇨ 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)+3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $-\frac{3}{8} \le x \le \frac{3}{2}$이므로
최댓값은 $x=-\frac{3}{8}$일 때

$\log_{\frac{1}{4}}\left(-\frac{3}{4}+1\right)+3=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}+3=4$,

최솟값은 $x=\frac{3}{2}$일 때

$\log_{\frac{1}{4}}(3+1)+3=\log_{\frac{1}{4}}4+3=2$ 이다.

14) 5

15) 1

⇨ $3^{-1}<1$이므로 $f(x)$는 x가 최소일 때, 최댓값을 가진다.

$\therefore\ f(1)=3^{1}+1=4=a$

$2>1$이므로 $g(x)$는 x가 최소일 때, 최솟값을 가진다.

$\therefore\ g(1)=\log_{2}2+2=3=b$

$\therefore\ a-b=4-3=1$

16) 2

17) 최댓값 : $2\log_{3}5$, 최솟값 : 2

⇨ $f(x)=-x^{2}+10x=-(x-5)^{2}+25$로 놓으면

$1\le x\le 7$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=9$,

최댓값은 $f(5)=25$이다.

$y=\log_{3}(-x^{2}+10x)=\log_{3}f(x)$의 밑이 3이므로

$f(5)=25$일 때, 최댓값은 $\log_{3}25=2\log_{3}5$

$f(1)=9$일 때, 최솟값은 $\log_{3}9=2$

18) 최댓값 : -3, 최솟값 : $\log_{\frac{1}{2}}40$

⇨ $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x^{2}+8x-2)$ 에서

$f(x)=2x^{2}+8x-2=2(x+2)^{2}-10$으로 놓으면

$1\le x\le 3$일 때, $8\le f(x)\le 40$

이때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $f(x)=8$일 때 $\log_{\frac{1}{2}}8=-3$,

최솟값은 $f(x)=40$일 때 $\log_{\frac{1}{2}}40$ 이다.

19) 최댓값 : $-\log_{3}2$, 최솟값 : -3

⇨ $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^{2}+4x+23)$에서

$f(x)=-x^{2}+4x+23=-(x-2)^{2}+27$로 놓으면

$1\le x\le 7$일 때, $2\le f(x)\le 27$

이때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $f(x)=2$일 때 $\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_{3}2$,

최솟값은 $f(x)=27$일 때 $\log_{\frac{1}{3}}27=-\log_{3}3^{3}=-3$ 이다.

20) 최댓값 : $\log_{2}5$, 최솟값 : 0

⇨ $f(x)=x^{2}-6x+10=(x-3)^{2}+1$로 놓으면

$2\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)=1$,

최댓값은 $f(5)=5$이다.

$y=\log_{2}(x^{2}-6x+10)=\log_{2}f(x)$의 밑이 2이므로

$f(5)=5$일 때, 최댓값은 $\log_{2}5$

$f(3)=1$일 때, 최솟값은 $\log_{2}1=0$

21) 최댓값 : $\log_{2}31$, 최솟값 : 2

⇨ $y=\log_{2}(x^{2}+2x-4)$ 에서

$f(x)=x^{2}+2x-4=(x+1)^{2}-5$로 놓으면

$2\le x\le 5$일 때, $4\le f(x)\le 31$

이때, 함수 $y=\log_{2}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

최댓값은 $f(x)=31$일 때 $\log_{2}31$,

최솟값은 $f(x)=4$일 때, $\log_{2}4=2$이다.

22) 최댓값: -1, 최솟값: $-\frac{3}{2}$

⇨ $y=\log_{\frac{1}{4}}(x^{2}-4x+8)=\log_{\frac{1}{4}}\{(x-2)^{2}+4\}$은

$x=2$일 때, 최댓값 $\log_{\frac{1}{4}}4=-1$을 갖고

$x=4$일 때, 최솟값 $\log_{\frac{1}{4}}8=-\frac{3}{2}$를 갖는다.

23) 최댓값 : -2, 최솟값 : -3

⇨ $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^{2}-2x+5)$에서

$f(x)=x^{2}-2x+5=(x-1)^{2}+4$로 놓으면

$0\le x\le 3$일 때, $4\le f(x)\le 8$

이때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $f(x)=4$일 때 $\log_{\frac{1}{2}}4=-\log_{2}2^{2}=-2$,

최솟값은 $f(x)=8$일 때 $\log_{\frac{1}{2}}8=-\log_{2}2^{3}=-3$이다.

24) 최댓값 : $\log_{3}12$, 최솟값 : 1

⇨ $y=\log_{3}\{(x-2)^{2}+3\}$에서

$f(x)=(x-2)^{2}+3$으로 놓으면

$1\le x\le 5$일 때, $3\le f(x)\le 12$

이때, 함수 $y=\log_{3}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

최댓값은 $f(x)=12$일 때 $\log_{3}12$,

최솟값은 $f(x)=3$일 때 $\log_{3}3=1$이다.

25) 최댓값 : $\log_{2}28$, 최솟값 : 2

⇨ $y=\log_{2}(x^{2}-2x+4)$에서

$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$으로 놓으면
$2 \le x \le 6$일 때, $4 \le f(x) \le 28$
이때, 함수 $y=\log_2 f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
최댓값은 $f(x)=28$일 때 $\log_2 28$,
최솟값은 $f(x)=4$일 때, $\log_2 4=2$이다.

26) 최댓값 : 0, 최솟값 : $\log_{\frac{1}{3}} 33$

⇨ $f(x)=2x^2+8x+9=2(x+2)^2+1$로 놓으면
$-2 \le x \le 2$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(-2)=1$,
최댓값은 $f(2)=33$이다.
$y=\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+8x+9)=\log_{\frac{1}{3}} f(x)$의 밑이 $\frac{1}{3}$이므로
$f(-2)=1$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 1=0$
$f(2)=33$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 33$

27) -3
⇨ $\log_{\frac{1}{2}}\{(x+3)^2+8\}$
$x=-3$일 때, 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$을 가진다.

28) 2
⇨ $y=\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$
$=\log_3(x-1)+\log_3(7-x)$
$=\log_3(x-1)(7-x)=\log_3(-x^2+8x-7)$
$=\log_3\{-(x-4)^2+9\}$
이므로 $x=4$일 때 최댓값 $\log_3 9=2$를 갖는다.

29) 2
⇨ $y=\log_3(x-1)(7-x)=\log_3(-x^2+8x-7)$
$=\log_3\{-(x-4)^2+9\}$
따라서 최댓값은 $\log_3 9=2$이다.

30) -2
⇨ $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)(7-x)$
$(x-1)(7-x)=-x^2+8x-7=-(x-4)^2+9$이 므 로
$\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$를 최솟값으로 가진다.

31) 3
⇨ (밑)$=2>1$이므로 $f(x)=x^2+4x+12$라 할 때
$f(x)$가 최솟값을 가지면 $y=\log_2(x^2+4x+12)$가 최솟값을 가진다.
$f(x)=x^2+4x+12=(x+2)^2+8$
따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $\log_2 8=3$을 가진다.

32) -2

33) 2
⇨ $y=\log_a(x^2-6x+10)$에서
$f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$로 놓으면
$4 \le x \le 6$일 때, $2 \le f(x) \le 10$
이때, $a>1$이므로 함수 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $f(x)=2$에서 최솟값 1을 가진다.
즉, $\log_a 2=1$이므로 $a=2$

34) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$

35) 3
⇨ 진수 조건에 의해 $x+5>0$, $1-x>0$이므로
$-5<x<1$
$y=\log_4(x+5)+\log_4(1-x)=\log_4(-x^2-4x+5)$
$=\log_4\{-(x+2)^2+9\}$
이므로 $x=-2$일 때, 최댓값 $\log_4 9$를 갖는다.
$\therefore\ 2^{\alpha}=2^{\log_4 9}=2^{\log_2 3}=3$

36) 2

37) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
⇨ $f(x)=\log_a(x^2-4x+6)$가 최댓값을 가지므로
$0<a<1$이고, 이때 x^2-4x+6이 최소일 때,
$f(x)$가 최댓값을 가지므로
$f(x)=\log_a(x^2-4x+6)=\log_a\{(x-2)^2+2\}$
즉 $\log_a 2=-2$
$a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

38) $\frac{9}{5}$
⇨ 밑이 1보다 크니 진수가 최댓값과 최솟값의 경우에, $f(x)$도 그에 따라 최댓값과 최솟값을 갖는다.
즉, 구간 $[1, 4]$에서 $-x^2+6x=-(x-3)^2+9$의 최댓값과 최솟값은 각각 $9, 5$이므로
$M=\log_a 9$, $m=\log_a 5$
$M-m=1$이므로 $\log_a \frac{9}{5}=1$ $\therefore\ a=\frac{9}{5}$

39) $-\frac{8}{3}$

40) $2^{\frac{3}{64}}$
⇨ 밑이 $a>1$이므로 진수의 최댓값이 로그함수의 최댓값이 된다.
$0 \le x \le 2$에서 진수의 최솟값은 8이므로
$y=\log_a 8=64$ $\therefore\ a=2^{\frac{3}{64}}$

41) 최댓값 : 0, 최솟값 : -6

⇨ $y=6(\log_3 x)^2-3\log_{\sqrt{3}} x^2=6(\log_3 x)^2-12\log_3 x$

$3\le x\le 9$에서 로그의 밑이 3이므로

$\log_3 3\le \log_3 x\le \log_3 9$

$\log_3 x=t$로 치환하면 $1\le t\le 2$

이때, 주어진 함수는 $y=6t^2-12t=6(t-1)^2-6$

따라서 $t=2$, 즉 $x=9$일 때, 최댓값은 0,

$t=1$, 즉 $x=3$일 때, 최솟값은 -6이다.

42) 최댓값: 0, 최솟값: $-\dfrac{1}{2}$

⇨ $1\le x\le 3$

$\log_{\frac{1}{3}}1\ge \log_{\frac{1}{3}}x\ge \log_{\frac{1}{3}}3$

$0\ge \log_{\frac{1}{3}}x\ge -1$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$라고 하자.($-1\le t\le 0$)

$y=2t^2+2t=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

따라서 $t=-\dfrac{1}{2}$일 때, 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$이고,

$t=0$ 또는 $t=-1$일 때, 최댓값 0을 가진다.

43) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

⇨ $y=-(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2+3$

$=-(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+2\log_{\frac{1}{2}} x+3$

$\dfrac{1}{4}\le x\le 2$에서 로그의 밑이 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 2\le \log_{\frac{1}{2}} x\le \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 치환하면 $-1\le t\le 2$

이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$

따라서 $t=1$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값은 4,

$t=-1$, 즉 $x=2$일 때 최솟값은 0이다.

44) 최댓값 : 7, 최솟값 : 3

⇨ $1\le x\le 8$에서 로그의 밑이 2이므로

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 8$

$\log_2 x=t$로 치환하면 $0\le t\le 3$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-2t+4=(t-1)^2+3$

따라서 $t=3$, 즉 $x=8$일 때 최댓값은 7,

$t=1$, 즉 $x=2$일 때 최솟값은 3이다.

45) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\dfrac{3}{4}$

⇨ $y=(\log_2 x)^2+\log_2 2x$,

즉 $y=(\log_2 x)^2+\log_2 x+1$에서

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

이때, $\dfrac{1}{2}\le x\le 2$에서 $-1\le t\le 1$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=1$일 때 3,

최솟값은 $t=-\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{3}{4}$이다.

46) 최댓값 : 5, 최솟값 : -4

⇨ $y=(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_3 x)+2\log_3 x+4$,

즉 $y=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+4$에서

$\log_3 x=t$로 놓으면

$y=-t^2+2t+4=-(t-1)^2+5$

이때, $1\le x\le 81$에서 $0\le t\le 4$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=1$일 때 5,

최솟값은 $t=4$일 때 -4이다.

47) 최댓값 : 10, 최솟값 : 1

⇨ $y=(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2+2$,

즉 $y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+2$에서

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

이때, $1\le x\le 16$에서 $0\le t\le 4$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=4$일 때 10,

최솟값은 $t=1$일 때 1이다.

48) 최댓값 : 20, 최솟값 : -5

⇨ $y=(\log x)^2+\log x^4-1$,

즉 $y=(\log x)^2+4\log x-1$ 에서

$\log x=t$ 로 놓으면 $y=t^2+4t-1=(t+2)^2-5$

$0.01\le x\le 1000$에서 $-2\le t\le 3$이므로

함수의 최댓값은 $t=3$일 때 20,

최솟값은 $t=-2$일 때 -5이다.

49) 최댓값 : 4, 최솟값 : -5

⇨ $y=(\log_3 x)^2+4\log_3 x-1$에서

$\log_3 x=t$로 놓으면 $y=t^2+4t-1=(t+2)^2-5$

이때, $\dfrac{1}{9}\le x\le 3$에서 $-2\le t\le 1$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=1$일 때 4,

최솟값은 $t=-2$일 때 -5이다.

50) 최댓값: -1, 최솟값: -5

51) 최댓값: 9, 최솟값 0

⇨ $f(x)=(4+\log_2 x)(2-\log_2 x)$

$\log_2 x=t$라 하면 $-2\le t\le 2$의 범위에서

$f(t)=-t^2-2t+8=-(t+1)^2+9$는 $t=-1$일 때, 최댓값 9, $t=2$일 때, 최솟값 0을 갖는다.

52) 최댓값 : 5, 최솟값 : -4

⇨ $y=\left(\log_2 \frac{x}{8}\right)(\log_2 2x)$

$=(\log_2 x-\log_2 8)(\log_2 2+\log_2 x)$

$=(\log_2 x-3)(1+\log_2 x)$

$=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $y=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$

이때, $1\le x\le 16$에서 $0\le t\le 4$이므로

함수의 최댓값은 $t=4$일 때 5,

최솟값은 $t=1$일 때, -4이다.

53) 최댓값: 11, 최솟값: 7

⇨ $\log_3 x=t$, $1\le t\le 1+\log_3 10=4.\mathrm{xxx}$이고

주어진 식은 $y=-(t-3)^2+11$이므로

$t=3$일 때, 최댓값 11, $t=1$일 때, 최솟값은 7

54) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{3}$

⇨ $f(x)=\frac{1}{3}x^{-1+\log_3 x}=\frac{1}{3}x^{\log_3 \frac{x}{3}}$은 증가함수이므로

$x=1$일 때, $f(1)=\frac{1}{3}$으로 최솟값을 갖고

$x=9$일 때 $f(9)=\frac{1}{3}\times 9^{\log_3 \frac{9}{3}}=\frac{1}{3}\times 9=3$으로 최댓값을 갖는다.

55) 최댓값: 128, 최솟값: $\frac{1}{4}$

⇨ 주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=2+(\log_2 x-4)\log_2 x$

$\log_2 x=t$라 하면 $1\le t\le 5$이다.

$\log_2 y=(t-2)^2-2$

y가 최대일 때, $\log_2 y$도 최대이므로

$t=5$일 때, $\log_2 M=9-2=7$ $\quad\therefore\ M=2^7$

y가 최소일 때, $\log_2 y$도 최소이므로

$t=2$일 때, $\log_2 m=-2$ $\quad\therefore\ m=2^{-2}$

56) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{1}{8}$

⇨ 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=(2-\log_2 x)\log_2 x$

$=2\log_2 x-(\log_2 x)^2=-(\log_2 x-1)^2+1$

$1\le x\le 8$일 때, $0\le\log_2 x\le 3$이므로

(ⅰ) $\log_2 x=1$일 때, $\log_2 y=1$ $\quad\therefore\ y=2$

(ⅱ) $\log_2 x=3$일 때, $\log_2 y=-3$ $\quad\therefore\ y=\frac{1}{8}$

57) 최댓값: 32, 최솟값 2

⇨ 주어진 함수식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 f(x)=5+(\log_2 x-4)\log_2 x$

$\log_2 f(x)=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+5=(\log_2 x-2)^2+1$

$2\le x\le 16$일 때, $1\le\log_2 x\le 4$이고,

따라서 $\log_2 f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 5, 1이므로

$\log_2 M=5$ $\quad\therefore\ M=2^5=32$

$\log_2 m=1$ $\quad\therefore\ m=2^1=2$

58) -2

⇨ $\log_{\frac{1}{7}}\left(x+\frac{4}{y}\right)+\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{x}+9y\right)$

$=\log_{\frac{1}{7}}\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+9y\right)$

$=\log_{\frac{1}{7}}\left(9xy+\frac{4}{xy}+37\right)$

이때, $x>0$, $y>0$에서 $9xy>0$, $\frac{4}{xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$9xy+\frac{4}{xy}+37\ge 2\sqrt{9xy\cdot\frac{4}{xy}}+37=49$

(단, 등호는 $9xy=\frac{4}{xy}$, 즉 $xy=\frac{2}{3}$일 때 성립)

$\log_{\frac{1}{7}}\left(9xy+\frac{4}{xy}+37\right)\le\log_{\frac{1}{7}}49=-2$

따라서 구하는 최댓값은 -2이다.

59) -2

⇨ $\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+2y\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+2y\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(2xy+\frac{2}{xy}+5\right)$

$2xy>0$, $\frac{2}{xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2xy+\frac{2}{xy}+5\ge 2\sqrt{2xy\times\frac{2}{xy}}+5=9$

$\left(\text{단, 등호는 } 2xy=\frac{2}{xy}\text{일 때 성립}\right)$

이때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 밑이 $\frac{1}{3}$로 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+2y\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(2xy+\frac{2}{xy}+5\right)\le\log_{\frac{1}{3}}9=-2$

따라서 구하는 최댓값은 -2이다.

60) -4

⇨ $\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+\frac{1}{y}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{x}+y\right)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x}+y\right)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(3xy+\frac{3}{xy}+10\right)$

이때, $x>0$, $y>0$에서 $3xy>0$, $\frac{3}{xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$3xy+\frac{3}{xy}+10 \geq 2\sqrt{3xy \cdot \frac{3}{xy}}+10=16$

(단, 등호는 $3xy=\frac{3}{xy}$, 즉 $xy=1$일 때 성립)

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\left(3xy+\frac{3}{xy}+10\right) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16=-4$

따라서 구하는 최댓값은 -4이다.

61) $\frac{3}{2}$

⇨ $y=\log_2(x+2)-\frac{1}{2}\log_2 x$

$=\log_2\frac{x+2}{\sqrt{x}}=\log_2\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

$\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\times\frac{2}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{2}$ 이므로

y의 최솟값은 $\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}$ 이다.

62) -3

⇨ $\log_2 x=t$라 하면

$y=t^2+\frac{1}{t^2}-2\left(t+\frac{1}{t}\right)-1=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2\left(t+\frac{1}{t}\right)-3$

$=\left(t+\frac{1}{t}-1\right)^2-4$

$t+\frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2$이므로 y의 최솟값은

$t+\frac{1}{t}=2$일 때, $y=(2-1)^2-4=-3$이다.

63) 2

⇨ $\log_6\left(x+\frac{5}{y}\right)+\log_6\left(\frac{1}{x}+5y\right)=\log_6\left(x+\frac{5}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+5y\right)$

$=\log_6\left(5xy+\frac{5}{xy}+26\right)$

이때, $x>0$, $y>0$에서 $5xy>0$, $\frac{5}{xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$5xy+\frac{5}{xy}+26 \geq 2\sqrt{5xy \cdot \frac{5}{xy}}+26=36$

(단, 등호는 $5xy=\frac{5}{xy}$, 즉 $xy=1$일 때 성립)

$\therefore \log_6\left(5xy+\frac{5}{xy}+26\right) \geq \log_6 36=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

64) 2

65) 2

⇨ $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}+y\right)=\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)$

$=\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}+2\right)$

이때, $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$xy+\frac{1}{xy}+2 \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{xy}}+2=4$

(단, 등호는 $xy=\frac{1}{xy}$, 즉 $xy=1$일 때 성립)

$\therefore \log_2\left(xy+\frac{1}{xy}+2\right) \geq \log_2 4=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

66) 4

⇨ $y=\left(\log_3\frac{x}{3}\right)\left(\log_3\frac{x}{27}\right)$

$=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 27)$

$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)$

$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

이때, $1 \leq x \leq 27$에서 $0 \leq t \leq 3$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=0$일 때 3, 최솟값은 $t=2$일 때 -1이다.

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로 $M-m=4$

67) 18

⇨ $\log_3 x=t$라 하면 $0 \leq t \leq 3$이고 주어진 함수 $f(t)=(1+t)^2-4t+7=t^2-2t+8=(t-1)^2+7$이 므로 $t=1$일 때, 최솟값 7을 갖고, $t=3$일 때, 최댓값 11을 갖는다.

따라서 $M+m=7+11=18$이다.

68) 4

⇨ $x>1$일 때, $\log_3 x>0$, $\log_x 81>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 x+\log_x 81 \geq 2\sqrt{\log_3 x\times\log_x 81}$

$=2\sqrt{\log_x x\times 4\log_x 3}=4$

(단, 등호는 $\log_3 x=\log_x 81$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4 이다.

69) 3

70) 5