

<u>수</u>학 계산력 강화

(2)조건이 주어진 합성함수의 함숫값





◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2018-07-26

2) 제작자 : 교육지대㈜

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

■ 함수 f에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & (x는 유리수) \\ x^2+1 & (x는 무리수) \end{cases}$$

로 정의할 때, 다음 값을 구하여라.

1. $(f \circ f)(-2)$

2. $(f \circ f)(\sqrt{3})$

3. $(f \circ f) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

 $oldsymbol{\square}$ 함수 $f(x) = egin{cases} \frac{x}{2} & (x \end{cases} & \end{cases} & (x \end{cases} & \end{cases} & \end{cases}$ 에 대하여 다음 값을 x+1 $(x \end{cases} & \end{cases} & \end{cases}$ 구하여라.

4. $(f \circ f)(3)$

5. $(f \circ f \circ f)(10)$

 $m{\square}$ 함수 $f(x) = egin{cases} -2x+1 & (x<1) \\ 3 & (x=1) \text{ 에 대하여 다음 값을} \\ x-4 & (x>1) \end{cases}$ 구하여라.

6. $(f \circ f)(2)$

7. $(f \circ f \circ f)(5)$

8. $(f \circ f \circ f \circ f)(-1)$

 $oldsymbol{\square}$ 함수 $f(x) = egin{cases} x-2 & (x \div & \hatharpoonup & \hat$ 을 구하여라.

9. $(f \circ f)(\sqrt{2})$

10. $(f \circ f)(\sqrt{3})$

ightharpoonup 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \le 2) \\ 1 & (x = 3) \\ 2 & (x = 4) \end{cases}$

로 정의할 때, 다음 값을 구하여라.

11. f(4)

- **12.** $(f \circ f)(3)$
- **13.** $(f \circ f \circ f)(2)$
- **14.** $(f \circ f \circ f)(1) + (f \circ f)(4) + f(3)$
- **15.** 함수 f(x) = ax가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 상 수 a의 값을 구하여라.
- **16.** 함수 $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ 가 $f \circ f = f$ 를 만족하 는 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.
- **17.** 함수 f(x) = ax가 $(f \circ f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 실수 a의 값을 구하여라.
- **18.** 두 함수 f(x) = 2x + 1, $g(x) = x^2 2$ 가 $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하게 하는 함수 h(x)에 대 하여 h(1)의 값을 구하여라.

- 19. 두 함수 f(x) = 2x + 3, g(x) = 3x + 27 $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족하게 하는 함수 h(x)에 대 하여 h(2)의 값을 구하여라.
- \blacksquare 두 함수 f(x) = 2x 1, g(x) = 4x + 7에 대하여 다음 을 구하여라.
- **20.** $f \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 h(x)
- **21.** $k \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 k(x)
- ightharpoonup 함수 f(x) = ax + b(a > 0)에 대하여 $(f \circ f)(x)$ 가 다 음과 같을 때, f(1)의 값을 구하여라.
- **22.** $(f \circ f)(x) = 16x + 5$
- **23.** f(x) = 2x 1
- \blacksquare 세 함수 f, g, h가 다음 조건을 만족할 때, 함수 f(x)를 구하여라.
- **24.** $(h \circ g)(x) = 2x + 2$ $(h \circ (g \circ f))(x) = 4x - 8$
- **25.** $(h \circ q)(x) = -x + 4$ $(h \circ (g \circ f))(x) = \frac{1}{2}x + 1$

- 26. 세 함수 f, g, h대하여 $f(x) = 2x - 3, \ g(x) = 3x + 5$ **0**] **1.** $(f \circ h)(x) = g(x)$ 가 성립할 때, h(2)의 값을 구하 여라.
- **27.** 함수 *f*에 대하여 $f^1\!=\!f,\;f^{n+1}\!=\!f\,\circ\,f^n$ (n은 자연수) 으로 정의한다. 이때 $f(x)=x-rac{1}{2}$ 에 대하여 $f^{100}(2)$ 의 값을 구하여라.
- $f^{2}(x) = (f \circ f)(x), \ f^{3}(x) = (f \circ f^{2})(x),$ \cdots , $f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x)$ 라고 할 대, 주어진 함수 f(x)에 대하여 다음을 구하여라.

$$f(x) = 2x$$

- **28.** $f^2(1)$
- **29.** $f^3(1)$
- **30.** $f^n(1)$
- $f^{2}(x) = (f \circ f)(x), \ f^{3}(x) = (f \circ f^{2})(x),$ \cdots , $f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x)$ 라고 할 대, 주어진 함수 f(x)에 대하여 다음을 구하여라.

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

31. $f^2(x)$

- **32.** $f^3(x)$
- **33.** $f^{1004}(2)$
- **34.** $f^{100}(2)$
- **35.** $f^{1500}\left(\frac{5}{4}\right)$
- $oldsymbol{\square}$ 다음 두 함수 f, g에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 함수 h(x)를 구하여라.
- **36.** f(x) = 2x 1, g(x) = -x + 2
- **37.** f(x) = x 3, g(x) = -3x + 1
- **38.** f(x) = 2x + 3, g(x) = 4x 5
- **39.** f(x) = 3x + 2, g(x) = 6x 3

40.
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$
, $g(x) = 2x + 3$

ightharpoonup 다음 두 함수 f, g에 대하여 $f \circ h = g$ 를 만족하는 함수 h(x)를 구하여라.

41.
$$f(x) = 2x + 4$$
, $g(x) = 4x - 6$

42.
$$f(x) = 2x - 1$$
, $g(x) = -x + 3$

43.
$$f(x) = x - 3$$
, $g(x) = -3x + 1$

44.
$$f(x) = -x + 5$$
, $g(x) = 2x - 3$

45.
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$
, $g(x) = 2x + 3$

46.
$$f(x) = 3x + 2$$
, $g(x) = x^2 - 3x + 2$

 $oldsymbol{\square}$ $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n$ (n은 자연수)으로 정의할 때, 함 수 f(x) = x + 2에 대하여 다음을 구하여라.

47.
$$f^2(x), f^3(x)$$

48.
$$f^n(x)$$

49.
$$f^{100}(3)$$

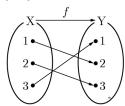
수 f(x) = 3x에 대하여 다음을 구하여라.

50.
$$f^2(x), f^3(x)$$

51.
$$f^n(x)$$

52.
$$f^{10}(1)$$

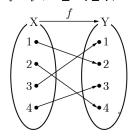
 $oldsymbol{\square}$ 집합 X에 대하여 함수 f: X o Y가 다음 그림과 다음 값을 구하여라. $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, n$ 은 자연수)



53.
$$f^2(1), f^3(1)$$

54.
$$f^{3n}(1)$$

- **55.** $f^{20}(1)$
- $oldsymbol{\square}$ 집합 X에 대하여 함수 f: X o Y가 다음 그림과 같을 때 다음 값을 구하여라. $f^1 = f, \ f^{n+1} = f \circ f^n, \ n$ 은 자연수)



- **56.** $f^2(2), f^4(2)$
- **57.** $f^{4n}(2)$
- **58.** $f^{31}(2)$

4

정답 및 해설

$$1) - 9$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(-2 \cdot (-2) + 1) = f(5) = -2 \cdot 5 + 1 = -9$$

$$2) -7$$

$$\Rightarrow$$
 $(f \circ f)(\sqrt{3}) = f(f(\sqrt{3}))$
= $f((\sqrt{3})^2 + 1)$ $(\because \sqrt{3}$ 은 무리수)
= $f(4) = -2 \cdot 4 + 1$ $(\because 4$ 는 유리수)
= -7

3)
$$-2$$

$$\Rightarrow (f \circ f) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = f \left(f \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = f \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1 \right)$$
$$= f \left(\frac{3}{2} \right) = -2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -2$$

$$\Rightarrow$$
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(4) = 2$

$$\Rightarrow$$
 $(f \circ f \circ f)(10) = f(f(f(10))) = f(f(5)) = f(6) = 3$

$$⇒ f(2) = 2 - 4 = -20]$$
 □로

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-2) = 5$$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(-1) = f(f(f(-1))) = f(f(3)) = f(-1) = 3$$

8)
$$-1$$

$$(f \circ f \circ f \circ f)(-1) = f(f(f(f(-1))))$$

$$= f(f(f(3)))$$

$$= f(f(-1)) = f(3) = -1$$

$$\Rightarrow$$
 $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 $f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 = 4$

$$\therefore (f \circ f)(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) = f(4)$$
$$= 2 (\because 4 는 유리수)$$

10) 4

$$\Rightarrow$$
 $\sqrt{3}$ 은 무리수이므로 $f(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3})^2 = 6$

$$\Rightarrow f(4) = 2$$

$$\Rightarrow$$
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 3$

$$\Rightarrow$$
 $(f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) = f(f(4)) = f(2) = 4$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(1) + (f \circ f)(4) + f(3)$$

$$= f(f(f(1))) + f(f(4)) + 1 = f(f(3)) + f(2) + 1$$

$$= f(1) + 4 + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$$

15)
$$-1$$
, 1

16)
$$a = 1$$
, $b = 0$

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b)$$
$$= a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = ax + b$$
이므로

$$a^2 = a$$
, $ab + b = b$

$$a^2 = a \, \text{old} \, a^2 - a = 0$$

$$a(a-1)=0 \qquad \therefore \ a=1 \ (\because \ a \not= 0)$$

$$b = 0$$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(ax))$$
$$= f(a^2x) = a^3x$$

$$a^3x = x$$
이므로 $a^3 = 1$

18)
$$-2$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = g(x)$$
에서

f(x)=1이 되도록 하는 x의 값을 구하면 2x+1=1

$$\therefore x = 0$$

$$f(0) = 1$$

따라서
$$h(f(0)) = g(0)$$
이므로

$$h(1) = q(0) = -2$$

19)
$$\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow$$
 $g(h(x)) = f(x)$ 에서 $x = 2$ 를 대입하면

$$g(h(2)) = f(2)$$

$$3h(2)+2=2\cdot 2+3=7$$

$$3h(2) = 5$$

$$h(2) = \frac{5}{3}$$

20) h(x) = 2x + 4

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
에서

$$2h(x)-1=4x+7$$

$$2h(x) = 4x + 8$$

$$\therefore h(x) = 2x + 4$$

21)
$$k(x) = 2x + 9$$

$$\Rightarrow k(f(x)) = g(x)$$
에서 $k(2x-1) = 4x+7$

$$2x-1=t$$
로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$

$$k(t) = 4 \cdot \frac{t+1}{2} + 7 = 2t + 9$$

$$\therefore k(x) = 2x + 9$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b)$$
$$= a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

즉,
$$a^2x + ab + b = 16x + 5$$
이므로

$$a^2 = 16$$
, $ab + b = 5$

$$\therefore a=4, b=1 (\because a>0)$$

따라서
$$f(x) = 4x + 1$$
이므로 $f(1) = 5$

23)
$$\frac{19}{8}$$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(k) = f(f(f(k))) = f(f(2k-1))$$
$$= f(2(2k-1)-1) = f(4k-3)$$
$$= 2(4k-3)-1 = 8k-7$$

따라서
$$8k-7=12$$
이므로

$$8k = 19$$
 : $k = \frac{19}{8}$

24)
$$f(x) = 2x - 5$$

$$\Rightarrow (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f) = (h \circ g)(f(x))$$
$$= 2f(x) + 2$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = 4x - 8$$
이므로

$$2f(x) + 2 = 4x - 8$$

$$2f(x) = 4x - 10$$
 : $f(x) = 2x - 5$

25)
$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\Rightarrow (h \circ (g \circ f))(x)$$

$$= ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

$$= -f(x) + 4$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = \frac{1}{2}x + 1$$
이므로

$$-f(x)+4=\frac{1}{2}x+1$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
이므로

$$2h(x) - 3 = 3x + 5$$

$$h(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 + 4 = 7$$

$$27) -48$$

$$\Rightarrow f^{1}(x) = f(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$f^{2}(x) = f(f(x)) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) = x - 1$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x-1) = x - \frac{3}{2}$$

$$f^n(x) = x - \frac{n}{2}$$

$$f^{100}(2) = 2 - \frac{100}{2} = -48$$

28) 4

$$\Rightarrow f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x)$$
$$= 2 \cdot 2x = 2^2x$$

29) 8

$$\Rightarrow f^{3}(x) = (f \circ f^{2})(x) = f(f^{2}(x))$$
$$= f(2^{2}x) = 2 \cdot 2^{2}x = 2^{3}x$$

$$f^3(1) = 8$$

$$\Rightarrow f^2(x) = 2^2 x, \ f^3(x) = 2^3 x, \ \dots$$
이므로

$$f^n(x) = 2^n x$$

$$f^n(1) = 2^n \cdot 1 = 2^n$$

31)
$$f^2(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow f^{2}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

32)
$$f^3(x) = x$$

$$\Rightarrow f^{3}(x) = (f \circ f^{2})(x) = f(f^{2}(x))$$

$$= f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x-x+1}} = x$$

33)
$$\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{1004}(x) = f^{3 \times 334 + 2}(x) = f^{2}(x) = \frac{x - 1}{x}$$

$$\therefore f^{1004}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

34) -1

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{x-1}{x}, \ f^3(x) = x,$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(x)$$
이므로

$$f^{100}(x) = f^{3 \times 33 + 1}(x) = f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$f^{100}(2) = \frac{1}{1-2} = -1$$

35)
$$\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow f^{1500}(x) = f^{3 \times 500}(x) = f^{3}(x) = x$$

$$f^{1500}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

36)
$$h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = g(x)$$
이므로 $h(2x-1) = -x+2$

$$2x-1=t$$
로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$

$$h(t) = -\frac{t+1}{2} + 2 = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$$

$$\therefore h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

37)
$$h(x) = -3x - 8$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = g(x)$$
이므로 $h(x-3) = -3x+1$

$$x-3=t$$
로 놓으면 $x=t+3$

$$h(t) = -3(t+3) + 1 = -3t - 8$$

$$\therefore h(x) = -3x - 8$$

38)
$$h(x) = 2x - 11$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = g(x)$$
이므로 $h(2x+3) = 4x-5$

$$2x+3=t$$
로 놓으면 $x=\frac{t-3}{2}$

$$h(t) = 4\left(\frac{t-3}{2}\right) - 5 = 2t - 11$$

$$\therefore h(x) = 2x - 11$$

39)
$$h(x) = 2x - 7$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = g(x)$$
이므로 $h(3x+2) = 6x-3$

$$3x+2=t$$
로 놓으면 $x=\frac{t-2}{3}$

$$h(t) = 6\left(\frac{t-2}{3}\right) - 3 = 2t - 7$$

$$\therefore h(x) = 2x - 7$$

40)
$$h(x) = 4x - 1$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = g(x)$$
이므로 $h\left(\frac{1}{2}x+1\right) = 2x+3$

$$\frac{1}{2}x+1=t$$
로 놓으면 $x=2t-2$

$$h(t) = 2(2t-2) + 3 = 4t-1$$

$$\therefore h(x) = 4x - 1$$

41)
$$h(x) = 2x - 5$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
이므로

$$2h(x) + 4 = 4x - 6$$
 $\therefore h(x) = 2x - 5$

$$\therefore h(x) = 2x - 3$$

42)
$$h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
이므로

$$2h(x) - 1 = -x + 3$$

$$2h(x)-1 = -x+3$$
 $\therefore h(x) = -\frac{1}{2}x+2$

43)
$$h(x) = -3x + 4$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
이므로

$$h(x) - 3 = -3x + 1$$

$$h(x) = -3x + 4$$

44)
$$h(x) = -2x + 8$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
이므로

$$-h(x)+5=2x-3$$

$$h(x) = -2x + 8$$

45)
$$h(x) = 4x + 4$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = g(x)$$
이므로

$$\frac{1}{2}h(x) + 1 = 2x + 3$$

$$\therefore h(x) = 4x + 4$$

46)
$$h(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$$

$$\Rightarrow f(h(x)) = q(x)$$
이므로

$$3h(x) + 2 = x^2 - 3x + 2$$
 $\therefore h(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$

$$h(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$$

47)
$$f^2(x) = x+4$$
, $f^3(x) = x+6$

$$\Rightarrow f^2(x) = f(f(x)) = f(x+2) = x+4$$

$$f^{3}(x) = f(f^{2}(x)) = f(x+4) = x+6$$

48)
$$f^n(x) = x + 2n$$

$$\Rightarrow f^1(x) = x + 2 = x + 2 \cdot 1$$

$$f^2(x) = x + 4 = x + 2 \cdot 2$$
,

$$f^3(x) = x + 6 = x + 2 \cdot 3, \dots$$
이므로

$$f^n(x) = x + 2n$$

$$\Rightarrow f^{100}(3) = 3 + 2 \cdot 100 = 203$$

50)
$$f^2(x) = 3^2x$$
, $f^3(x) = 3^3x$

$$\Rightarrow f^2(x) = f(f(x)) = f(3x) = 3^2x$$

$$f^{3}(x) = f(f^{2}(x)) = f(3^{2}x) = 3^{3}x$$

51)
$$f^n(x) = 3^n x$$

$$\Rightarrow f^1(x) = 3x, \ f^2(x) = 3^2x, \ f^3(x) = 3^3x, \ \cdots$$
이므로

$$f^n(x) = 3^n x$$

$$\Rightarrow f^{10}(1) = 3^{10} \cdot 1 = 3^{10}$$

53)
$$f^2(1) = 3$$
, $f^3(1) = 1$

$$\Rightarrow f^2(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$$

$$f^3(1) = f^2(2) = f(3) = 1$$

54)
$$f^{3n}(1) = 1$$

$$\Rightarrow f^{1}(1) = 2, f^{2}(1) = 3, f^{3}(1) = 1$$

$$f^4(1) = 2$$
, $f^5(1) = 3$, $f^6(1) = 1$, · · · 이므로

$$f^{3n}(1) = 1$$

55)
$$f^{20}(1) = 3$$

$$\Rightarrow f^{3n+2}(1) = f^2(f^{3n}(1)) = f^2(1) = 3$$

$$f^{20}(1) = f^{3 \cdot 6 + 2}(1) = 3$$

56)
$$f^2(2) = 3$$
, $f^4(2) = 2$

$$\Rightarrow f^2(2) = f(f(2)) = f(4) = 3$$

$$f^4(2) = f^3(4) = f^2(3) = f(1) = 2$$

57)
$$f^{4n}(2) = 2$$

$$\Rightarrow f^1(2) = 4, \ f^2(2) = 3, \ f^3(2) = 1, \ f^4(2) = 2$$

$$f^5(2)=4$$
, $f^6(2)=3$, $f^7(2)=1$, $f^8(2)=2$, \cdots 이므로

$$f^{4n}(2) = 2$$

58)
$$f^{31}(2)) = 1$$

$$\Rightarrow f^{4n+3}(2) = f^3(f^{4n}(2)) = f^3(2) = 1$$

$$\therefore f^{31}(2) = f^{4 \cdot 7 + 3}(2) = 1$$