단원 ISSUE

이 단원에서는 **지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동에 대한 문제, 지수방정식과 지수부등식을 계산하는 문제** 등이 자주 출제되며 응용문제의 경우, 고1에서 학습한 내용을 바탕으로 해결할 수 있습니다.

평가문제

[중단원 마무리하기]

1. 지수함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a,b)의 개수는? (단, a, b는 1보다 큰 자연수이다.)

(가) $f(2)\times g(13)=2^{2021}$
(나) $f(2)<g(8)$

① 24 ② 25
③ 26 ④ 28
⑤ 30

[중단원 마무리하기]

2. 함수 $y=3^{-x+2}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동 하였다. 이때 점근선의 방정식을 구하면?

① $y=-5$ ② $y=-1$
③ $y=1$ ④ $y=5$
⑤ $x=0$

[중단원 마무리하기]

3. 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 두 점 A, B의 x좌표가 각각 a, b 라고 하자. $b-a=\sqrt{20}$, $\overline{AB}=6$ 일 때, 3^b-3^a의 값을 구하면? (단, $a<b$)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 평가하기]

4. $a>1$일 때, 함수 $y=a^x$ 위의 세 점 $(-1,\ A)$, $(-a,\ B)$, $(-a^a,\ C)$와 실수 X, Y, Z 에 대하여 $a^3=A^{-X}B^{-Y}C^{-Z}$가 항상 성립한다.
$X+Y+Z=f(a)$라 할 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{4}$
⑤ $\frac{7}{4}$

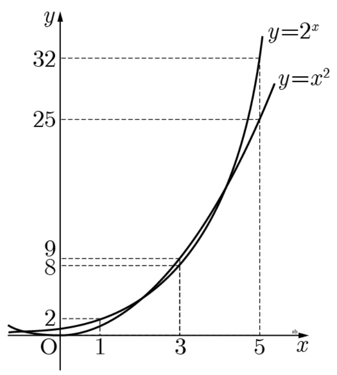
[대단원 평가하기]

5. 함수 $f(x)=4^x$에 대하여 $f(-2a)=p$, $f(b)=q$라 할 때, $f(a+b)$의 값을 p,q로 나타내면?

① $\frac{q}{p}$ ② $\frac{q}{\sqrt{p}}$
③ $\frac{p}{q}$ ④ $\frac{p}{\sqrt{q}}$
⑤ pq

[대단원 평가하기]

6. $y=x^2$과 $y=2^x$의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식 $2^x=x^2$의 모든 양수인 근의 합을 구하면?



① 3 ② 6
③ 9 ④ 16
⑤ 25

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[대단원 평가하기]

7. 함수 $y=-2^{x-3}+k$의 그래프가 제 1사분면 을 지나지 않도록 하는 상수 k의 최댓값을 구하면?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$
③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

[중단원 마무리하기]

8. 정의역이 $\{x|1 \le x \le 7\}$인 함수 $f(x)=a^{x-3}$의 최댓값이 최솟값의 8배이다. $a>1$일 때, a의 값을 구하면?

① $\sqrt[3]{2}$ ② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$ ④ 2
⑤ $\sqrt{5}$

[중단원 마무리하기]

9. 정의역이 $\{x|3 \le x \le 5\}$인 함수 $y=a^{x^2-6x+14}$의 최댓값이 최솟값의 4배이다. $a>1$일 때, a의 값을 구하면?

① $\sqrt[3]{2}$ ② $\sqrt[4]{2^3}$
③ $\sqrt{2}$ ④ 2
⑤ 4

[대단원 평가하기]

10. 정의역이 $\{x|1 \le x \le 6\}$인 함수 $y=2^{-x^2+6x+9}$는 $x=a$에서 최솟값을 가지고 $x=b$ 에서 최댓값을 가진다. 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리하기]

11. 어느 강에서 수면에서의 빛의 밝기가 $I_0 cd$ (칸델라)일 때, 수심이 $x m$인 곳에서의 빛의 밝기를 $I_x cd$라 하면 $I_x=I_0 \times 5^{-0.4x}$가 성립한다고 한다. 이 강의 물속 어느 지점에서의 빛의 밝기가 수면에서의 빛의 밝기의 $\frac{1}{25}$이라 할 때, 이 지점의 수심은 몇 m인지 구하면?

① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

[대단원 평가하기]

12. 부등식 $2^{x^2+2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^x<4^{x+4}$를 만족하는 정수 x의 값을 구하면?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

[중단원 마무리하기]

13. 방정식 $\frac{8^{x^2+1}}{4^{4x+1}}=16$을 만족하는 모든 실근의 곱을 구하면?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

실전문제

14. 함수 $y=9^{3-x}+2$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 치역은 $\{y|y<2\}$이다.
② x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
③ 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이다.
④ 그래프는 점 $(3,3)$을 지난다.
⑤ 그래프는 함수 $y=9^x$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.

15. 집합 $A=\{(x,y)\mid y=4\times 2^x\}$에 대하여 $(m,n)\in A$일 때, 항상 A의 원소인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $(m+1, 4n)$ ㄴ. $\left(m-2, \frac{n}{4}\right)$

ㄷ. (m^2, n^m) ㄹ. $\left(-m, \frac{16}{n}\right)$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ
③ ㄱ, ㄹ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄹ

16. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=8-2^{-2x+3}$, $g(x)=3^{-x+4}-5$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB 위에 있고 y좌표가 정수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_2=4$

ㄴ. $a_n=a_{n+1}$을 만족시키는 n의 최솟값은 4이다.

ㄷ. $a_n<a_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 다음 <보기>에서 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하여 일치시킬 수 있는 그래프의 식만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $y=\dfrac{2^x}{\sqrt[4]{64}}$

ㄴ. $y=2\{(\sqrt[3]{2})^{2x}-1\}$

ㄷ. $y=(2\sqrt[4]{2})^x$

ㄹ. $y=16\cdot 2^x+3$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄹ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 실수에서 정의된 함수 $y=\dfrac{2^{x+3}}{2^{2x}-2^x+1}$의 최댓값은?

① 8 ② 9
③ 10 ④ 11
⑤ 12

19. x에 대한 지수방정식 $4^x+2^{x+1}-2^{x-2}+a=0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=3$일 때, 양수 a의 값은?

① 2 ② 4
③ 8 ④ 16
⑤ 32

20. 어느 바다의 수면에서의 빛의 세기가 $A_0\,\mathrm{cd}$이고, 수심이 $h\,\mathrm{m}$인 곳의 빛의 세기를 $A_h\,\mathrm{cd}$라 할 때,

$$A_h=A_0\times 2^{-\frac{h}{4}}$$

이다. 이 바다에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{8}$배인 곳의 수심은 몇 m인가?

① 4 ② 8
③ 12 ④ 16
⑤ 15

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] (ⅰ) (가)조건에 의하여 $a^2b^{13}=2^{2021}$ … ㉠

a, b는 1보다 큰 자연수이면서 2의 거듭제곱꼴이어야 하므로 $a=2^m$, $b=2^n$(m, n은 자연수)라 하자.

이를 ㉠에 대입하면 $2m+13n=2021$ … ㉡

그런데 $2m$은 짝수이므로

$13n$은 홀수이어야 한다.

따라서 n은 홀수이므로

$n=2k-1$(k는 자연수)라 하자. … ㉢

㉢를 ㉡에 대입하면

$2021=2m+13(2k-1)=2m+26k-13$

$\therefore m=1017-13k$ … ㉣

그런데 m과 k가 자연수이므로 $1017-13k\geq 1$

$\therefore 1\leq k\leq \dfrac{1016}{13}=78.\times\times$

(ⅱ) (나)조건에 의하여 $a^2<b^8$이고,

$a=2^m$, $b=2^n$ (m, n은 자연수)이므로

$2^{2m}<2^{8n}$이다. 즉, $m<4n$ … ㉤

㉢과 ㉣를 ㉤에 대입하면

$1017-13k<4(2k-1)$ $\therefore k>\dfrac{1021}{21}=48.\times\times$

따라서 자연수 k의 범위는 $49\leq k\leq 78$이고,

순서쌍 (a,b)의 개수는 자연수 k의 개수와

같으므로 $78-48=30$이다.

2) [정답] ①

[해설] 함수 $y=3^{-x+2}+3$의 그래프를 x축의 방향으로

-3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=3^{-(x+3)+2}+3+2=3^{-x-1}+5$

원점에 대하여 대칭이동하면 $y=-3^{x-1}-5$,

점근선의 방정식은 $y=-5$이다.

3) [정답] ④

[해설] $y=3^x$위의 두 점의 x좌표가 각각 a,b이므로

$A(a,3^a)$, $B(b,3^b)$

$a<b$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(b-a)^2+(3^b-3^a)^2}=\overline{AB}$

$\sqrt{20+(3^b-3^a)^2}=6$, $3^b-3^a=4$

4) [정답] ⑤

[해설] $y=a^x$가 세 점 $(-1,A),(-a,B),(-a^a,C)$을

지나므로 $A=\dfrac{1}{a}$, $B=a^{-a}$, $C=a^{-a^a}$에서

$A=a^{-1},B=a^{-a}$, $C=a^{-a^a}$ 이므로

$a=A^{-1}$, $a=B^{-\frac{1}{a}}$, $a=C^{-\frac{1}{a^a}}$이고,

세 식의 양변을 곱하면 $a^3=A^{-1}B^{-\frac{1}{a}}C^{-\frac{1}{a^a}}$이다.

따라서 $f(a)=1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^a}$에서 $f(2)=\dfrac{7}{4}$

5) [정답] ②

[해설] $f(a+b)=4^{a+b}=4^a\times 4^b$

$p=f(-2a)=4^{-2a}=(4^a)^{-2}$이므로 $4^a=p^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$

$q=f(b)=4^b$, 따라서 $f(a+b)=\dfrac{q}{\sqrt{p}}$

6) [정답] ②

[해설] 그림에서 $y=x^2$는 $(1,1),(3,9),(5,25)$를 지나고

$y=2^x$는 $(1,2),(3,8),(5,32)$를 지남을 알 수 있다.

2^x-x^2의 부호는 $x=1,x=3,x=5$ 일 때 차례로 양수, 음수, 양수이다. 따라서 1과 3사이,

3과 5사이에서 $2^x-x^2=0$인 x가 존재할 것이라 예측할 수 있고, 실제로 $x=2$, $x=4$일 때 각각 $2^2=2^2$, $2^4=4^2$로 등식이 성립한다. 따라서

$x=2$, $x=4$는 이 방정식의 근이고

그래프에서 $x>4$일 때

$y=2^x$가 $y=x^2$보다 증가속도가 빠르므로

두 그래프는 더 이상 만나지 않는다.

따라서 양수인 모든 근의 합은 $2+4=6$이다.

7) [정답] ②

[해설] 함수 $y=-2^{x-3}+k$는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축으로 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프이다.

$x\geq 0$일 때 $y>0$이면 제 1사분면을 지난다.

따라서 $x\geq 0$에서 항상 $k\leq 2^{x-3}$ 이다.

$x=0$일 때 2^{x-3}의 값이 최소가 된다.

따라서 $k\leq 2^{-3}$ 이므로 k의 최댓값은 $\dfrac{1}{8}$이다.

8) [정답] ②

[해설] $f(x)=a^{x-3}$에서 $a>1$이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $f(1)=a^{-2}$로 최솟값을 가지고 $f(7)=a^4$으로 최댓값을 가진다.

최댓값이 최솟값의 8배이므로

$a^4=8a^{-2}$, $a^6=8$ 에서 $a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

9) [정답] ③

[해설] $x^2-6x+14=(x-3)^2+5$에서

정의역이 $\{x|3\leq x\leq 5\}$이므로

$x=3$ 일 때 최솟값 5를 가지고

$x=5$일 때 최댓값 9를 가진다.

$a>1$이므로 함수 y의 최솟값은 a^5, 최댓값은 a^9

최댓값이 최솟값의 4배이므로

$a^9=4a^5$, $a^4=4$, $a=\sqrt{2}$

10) [정답] ③

[해설] $-x^2+6x+9=-(x-3)^2+18$

함수 $y=2^{-x^2+6x+9}$에서 밑이 1보다 크므로

$x=3$일 때 최댓값 2^{18} 을 가지고

$x=6$일 때, 최솟값 2^9를 가진다.

따라서 $a=6$, $b=3$, $a-b=3$

11) [정답] ①

[해설] 수면에서의 빛의 밝기가 $I_0 cd$일 때, 수심 xm

인 곳에서의 빛의 밝기는 $\frac{1}{25}I_0$이므로

$\frac{1}{25}I_0=I_0\times5^{-0.4x}$에서

$5^{-0.4x}=\frac{1}{25}$, $-0.4x=-2$, $x=5$

따라서 수심은 $5m$이다.

12) [정답] ③

[해설] $2^{x^2+2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^x<4^{x+4}$에서

$2^{x^2+2x}<2^{-2x}<2^{2x+8}$

밑이 1보다 크므로

$x^2+2x<-2x<2x+8$

$x^2+2x<-2x$에서 $x^2+4x<0$,

$(x+4)x<0$, $-4<x<0$

$-2x<2x+8$에서 $-8<4x$, $-2<x$

두 부등식을 연립하면 $-2<x<0$

따라서 이를 만족하는 정수 x는 $x=-1$ 이다.

13) [정답] ③

[해설] $\frac{8^{x^2+1}}{4^{4x+1}}=16$에서 $\frac{2^{3x^2+3}}{2^{8x+2}}=2^4$이므로

$2^{3x^2+3}=2^{8x+6}$

따라서 $3x^2+3=8x+6$이므로

$3x^2-8x-3=0$, $(3x+1)(x-3)=0$ 에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 곱은 -1이다.

14) [정답] ②, ④

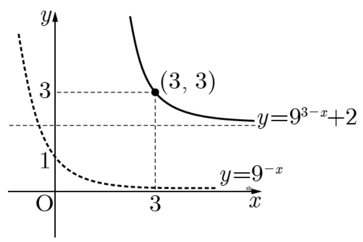
[해설] $y=9^{3-x}+2=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}+2$

지수함수 $y=9^{3-x}+2$의 그래프는

함수 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를

x축의 방향으로 3만큼

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수이다.



① 치역은 $\{y|y>2\}$이다.

③ 그래프의 점근선은 직선 $y=2$이다.

⑤ 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를

평행이동하면 겹쳐진다.

15) [정답] ⑤

[해설] $(m,n)\in A$이므로 $n=4\times2^m$이다.

ㄱ. $x=m+1$, $y=4n$을 $y=4\times2^x$에 대입하면

$4n=4\times2^{m+1}=8\times2^m$이다. $\therefore n=2\times2^m$

따라서 $(m+1,4n)$은 집합 A의 원소가 아니다.

ㄴ. $x=m-2$, $y=\frac{n}{4}$을 $y=4\times2^x$에 대입하면

$\frac{n}{4}=4\times2^{m-2}=2^m$이다. $\therefore n=4\times2^m$

따라서 $\left(m-2,\frac{n}{4}\right)$은 집합 A의 원소이다.

ㄷ. $x=m^2$, $y=n^m$을 $y=4\times2^x$에 대입하면

$n^m=4\times2^{m^2}$이다.

그런데 $n=4\times2^m$이므로

$n^m=4^m\times2^{m^2}$이어야 한다.

따라서 1이 아닌 m에 대해 $4\times2^{m^2}\neq4^m\times2^{m^2}$이므로 (m^2,n^m)은 집합 A의 원소가 아니다.

ㄹ. $x=-m$, $y=\frac{16}{n}$을 $y=4\times2^x$에 대입하면

$\frac{16}{n}=4\times2^{-m}$이다.

그런데 $n=4\times2^m$이므로

$\frac{16}{n}=\frac{16}{4\times2^m}=4\times2^{-m}$이다.

따라서 $\left(-m,\frac{16}{n}\right)$은 집합 A의 원소이다.

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

16) [정답] ②

[해설] 점 $A(n,8-2^{-2n+3})$, $B(n,3^{-n+4}-5)$이므로

$n=1$일 때는 $A(1,6)$, $B(1,22)$이므로

$a_1=22-5=17$

ㄱ. $n=2$일 때, $A\left(2,\frac{15}{2}\right)$, $B(2,4)$이므로

선분 AB 위에 있고 y좌표가 정수인 점은

$(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(2,7)$이므로

$a_2=4$이다. ($\therefore$ 참)

ㄴ. $n=3$일 때, $A\left(3,8-\frac{1}{8}\right)$, $B(3,-2)$이므로

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$a_3=7+1+2=10$

$n=4$일 때, $A\left(4, 8-\frac{1}{32}\right)$, $B(4, -4)$이므로

$a_4=7+1+4=12$

$n=5$일 때, $A\left(5, 8-\frac{1}{2^7}\right), B\left(5, -5+\frac{1}{3}\right)$이므로

$a_5=7+1+4=12$

따라서 $a_n=a_{n+1}$을 만족시키는

n의 최솟값은 4이다. ($\therefore$ 참)

ㄷ. $n=6$일 때, $A\left(6, 8-\frac{1}{2^9}\right)$, $B\left(6, -5+\frac{1}{3^2}\right)$

이므로 $n \geq 4$일 때, $a_n=12$이다.

따라서 $a_n < a_{n+1}$을 만족시키는

자연수 n은 2, 3으로 개수는 2이다. ($\therefore$ 거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17) [정답] ④

[해설] ㄱ. $y=2^{x-\frac{3}{2}}$이므로 일치 가능하다.

ㄴ. $y=2^{\frac{2}{3}x+1}-2$이므로 일치 불가능하다.

ㄷ. $y=2^{\frac{5}{4}x}$이므로 일치 불가능하다.

ㄹ. $y=2^{x+4}+3$이므로 일치 가능하다.

18) [정답] ①

[해설] $y=\frac{2^{x+3}}{2^{2x}-2^x+1}=\frac{8}{2^x-1+\frac{1}{2^x}}$이다.

($\because 2^x>0$)

함수가 최댓값을 갖기 위해서는 분모의 값이 최소여야 한다.

산술기하평균에 의해

$2^x+\frac{1}{2^x}-1 \geq 2\sqrt{1}-1=1$이므로

함수 y의 최댓값은 $\frac{8}{1}=8$이다.

19) [정답] ③

[해설] $2^x=t$라고 치환하면

주어진 방정식은

$t^2+2t-\frac{t}{4}+a=0$, $t^2+\frac{7}{4}t+a=0$

지수방정식의 두 근 α, β의 합이 3이므로

$2^{\alpha+\beta}=2^3=8=a$이다.

20) [정답] ③

[해설] 바다의 수심이 hm 인 곳의 빛의 세기가

수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{8}$이면 $A_h=\frac{1}{8}A_0$이다.

이를 주어진 관계식에 대입하면

$\frac{1}{8}A_0=A_0\times 2^{-\frac{h}{4}}$이므로 $2^{-3}=2^{-\frac{h}{4}}$이다.

즉, $-3=-\frac{h}{4}$이다. $\therefore h=12$

따라서 이 바다에서 빛의 세기가

수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{8}$ 배인 곳의

수심은 12m 이다.