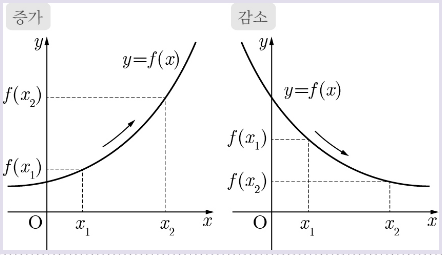
01 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

(1) $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 한다.

(2) $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 **감소**한다고 한다.



◪ 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

1. $f(x)=x^2-2x+2$

2. $f(x)=x^2-4x+2$

3. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x$

4. $f(x)=-x^2+1$

5. $f(x)=-x^2+4x-3$

6. $f(x)=x^3-x^2+1$

7. $f(x)=x^3-3x^2+2$

8. $f(x)=x^3+6x^2+1$

9. $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

10. $f(x)=-x^3+x^2-x$

11. $f(x)=-x^3-3x^2+24x-1$

12. $f(x)=-2x^3+6x+2$

13. $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+6$

14. $f(x)=x^4-2x^2+5$

◪ 주어진 구간에서 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

15. $f(x)=x^2 \quad (0,\ \infty)$

16. $f(x)=x^2 \quad [0,\ \infty)$

17. $f(x)=-x^2 \quad (0,\infty)$

18. $f(x)=-x^2 \quad [0,\ \infty)$

19. $f(x)=x^2-1 \quad (0,\infty)$

20. $f(x)=x^2-2x \quad [1,\ \infty)$

21. $f(x)=-x^2+3 \quad (0,\ \infty)$

22. $f(x)=x^3 \quad (-\infty,\ \infty)$

23. $f(x)=-x^3 \quad (-\infty,\ \infty)$

24. $f(x)=\frac{1}{x} \quad (0,\ \infty)$

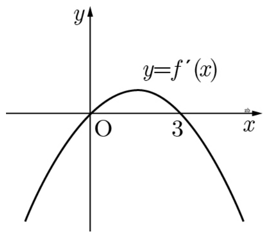
25. $f(x)=-\frac{1}{x} \quad (-\infty,0)$

26. 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+7$이 증가하는 구간을 구하여라.

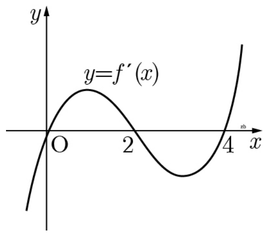
27. 함수 $f(x)=-x^3+\frac{9}{2}x^2+30x+10$이 증가하는 구간을 구하여라.

28. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax+3$이 감소하는 구간을 구하여라. (단, $a>1$)

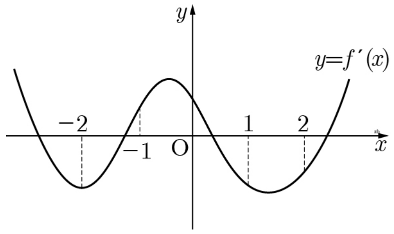
29. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때 함수 $f(x)$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 각각 구하여라.



30. 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때 함수 $f(x)$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 각각 구하여라.



31. 다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 골라라.



ㄱ. $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 감소한다.
ㄴ. $f(x)$는 구간 $(-2,\ -1)$에서 증가한다.
ㄷ. $f(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 감소한다.
ㄹ. $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다.
ㅁ. $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 감소한다.

02 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$가 이 구간에서
① 증가하면 ⇨ $f'(x)\geq 0$
② 감소하면 ⇨ $f'(x)\leq 0$

◪ 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

32. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+kx+2$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

33. 함수 $f(x)=x^3-kx^2+(k+6)x+5$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

34. 함수 $f(x)=x^3+kx^2+kx$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

35. 함수 $f(x)=x^3-2kx^2+kx$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

36. 함수 $f(x)=x^3+kx^2-4kx$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

37. 함수 $f(x)=x^3+2kx^2+12x-5$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

38. 함수 $f(x)=-x^3+x^2+kx$가 실수 전체의 구간에서 감소한다.

39. 함수 $f(x)=-x^3+kx^2-3x$가 실수 전체의 구간에서 감소한다.

40. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+kx+1$이 실수 전체의 구간에서 증가한다.

41. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+kx^2+(5k-4)x+1$이 실수 전체의 구간에서 증가한다.

42. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+kx^2-(5k-4)x+2$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

43. 함수 $f(x)=x^3+(k+1)x^2+(k+1)x-1$이 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

44. 함수 $f(x)=x^3-(k+2)x^2+3kx$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

45. 함수 $f(x)=x^3-3kx^2+3kx$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

46. 함수 $f(x)=x^3-kx^2+4kx+4$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

47. 함수 $f(x)=x^3+kx^2-4kx+3$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

48. 함수 $f(x)=x^3-2kx^2+5kx-4$가 실수 전체의 구간에서 증가한다.

49. 함수 $f(x)=x^3+kx^2-kx+3$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

50. 함수 $f(x)=x^3+kx^2-kx+5$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

51. 함수 $f(x)=-x^3+2x^2+kx-1$이 실수 전체의 구간에서 감소한다.

52. 함수 $f(x)=-x^3+kx^2-3x$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

53. 함수 $f(x)=-x^3+kx^2-3x+3$이 실수 전체의 구간에서 감소한다.

54. 함수 $f(x)=-2x^3+kx^2-kx$가 실수 전체의 구간에서 감소한다.

55. 함수 $f(x)=kx^3+kx^2-x+1$이 실수 전체의 구간에서 감소한다.

56. 함수 $f(x)=kx^3-3x^2+3kx-1$이 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

57. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+kx+1$이 구간 $(0, 3)$에서 감소하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

58. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+kx+1$이 구간 $(-2, 1)$에서 감소하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

59. 함수 $f(x)=-x^3+x^2+kx-4$가 구간 $(1, 2)$에서 증가하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

60. 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$이 증가하는 구간이 $[1,\ 3]$일 때, 상수 $a,\ b$의 값을 구하여라.

61. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$가 감소하는 구간이 $[-2,\ 4]$일 때, 상수 $a,\ b$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 감소, 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가

⇨ $f(x)=x^2-2x+2$에서 $f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가한다.

2) 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 감소, 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가

⇨ $f(x)=x^2-4x+2$에서 $f'(x)=2x-4$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 감소하고, 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가한다.

3) 구간 $(-\infty,-1]$에서 증가, 구간 $[-1,\infty)$에서 감소

⇨ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x$에서 $f'(x)=-x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,-1]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가하고 구간 $[-1,\infty)$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소한다.

4) 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소

⇨ $f(x)=-x^2+1$에서 $f'(x)=-2x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가하고 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소한다.

5) 구간 $(-\infty,2]$에서 증가, 구간 $[2,\infty)$에서 감소

⇨ $f(x)=-x^2+4x-3$에서 $f'(x)=-2x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,2]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가하고, 구간 $[2,\infty)$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소한다.

6) 구간 $(-\infty,\ 0]$, $\left[\frac{2}{3},\ \infty\right)$에서 증가, 구간 $\left[0,\ \frac{2}{3}\right]$에서 감소

⇨ $f(x)=x^3-x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$, $\left[\frac{2}{3},\ \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[0,\ \frac{2}{3}\right]$에서 감소한다.

7) 구간 $(-\infty,\ 0]$, $[2,\ \infty)$에서 증가, 구간 $[0,\ 2]$에서 감소

⇨ $f(x)=x^3-3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$, $[2,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$임므로 증가하고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소한다.

8) 구간 $(-\infty,-4]$, $[0,\infty)$에서 증가, 구간 $[-4,0]$에서 감소

⇨ $f(x)=x^3+6x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,-4]$, $[0,\infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가하고, 구간 $[-4,0]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소한다.

9) 구간 $(-\infty,1]$, $[3,\infty)$에서 증가, 구간 $[1,3]$에서 감소

⇨ $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$, $[3, \infty)$에서 $f'(x) \geq 0$이므로 증가하고, 구간 $[1, 3]$에서 $f'(x) \leq 0$이므로 감소한다.

10) 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소

⇨ $f(x) = -x^3 + x^2 - x$에서

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 1 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} < 0$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

11) 구간 $[-4, 2]$에서 증가, 구간 $(-\infty, -4]$, $[2, \infty)$에서 감소

⇨ $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x - 1$에서

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x+4)(x-2)$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-4, 2]$에서 $f'(x) \geq 0$이므로 증가하고, 구간 $(-\infty, -4]$, $[2, \infty)$에서 $f'(x) \leq 0$이므로 감소한다.

12) 구간 $[-1, 1]$에서 증가, 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 감소

⇨ $f(x) = -2x^3 + 6x + 2$에서

$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 $f'(x) \geq 0$이므로 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 $f'(x) \leq 0$이므로 감소한다.

13) 구간 $[-2, 1]$에서 증가, 구간 $(-\infty, -2]$, $[1, \infty)$에서 감소

⇨ $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 6$에서

$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x+2)(x-1)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 1]$에서 $f'(x) \geq 0$이므로 증가하고, 구간 $(-\infty, -2]$, $[1, \infty)$에서 $f'(x) \leq 0$이므로 감소한다.

14) 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[0,\ 1]$에서 감소, 구간 $[-1,\ 0]$, $[1,\ \infty)$에서 증가

⇨ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$에서

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$

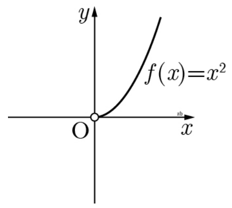
$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[0,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$, $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

15) 증가

⇨ 임의의 양수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이므로 함수 $f(x) = x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.



16) 증가

⇨ $0 \leq x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

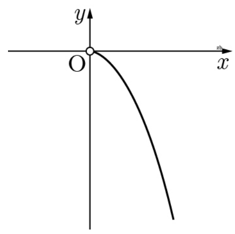
$f(x_1) - f(x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0$

이므로 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x) = x^2$은 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

17) 감소

⇨ 임의의 두 양수 a, b에 대하여 $a < b$일 때, $f(a) > f(b)$이므로 함수 $f(x) = -x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.



18) 감소

⇨ $0 \leq x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1) - f(x_2) = -{x_1}^2 - (-{x_2}^2) = -({x_1}^2 - {x_2}^2)$

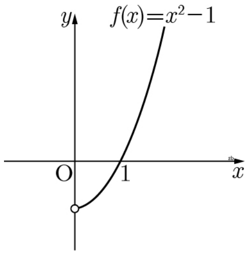
$= -(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$

$\therefore\ f(x_1) > f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

19) 증가

⇨ 임의의 두 양수 a, b에 대하여 $a < b$일 때, $f(a) < f(b)$이므로 함수 $f(x) = x^2 - 1$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.



20) 증가

⇨ $1 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1{}^2-2x_1)-(x_2{}^2-2x_2)$

$=x_1{}^2-x_2{}^2-2(x_1-x_2)$

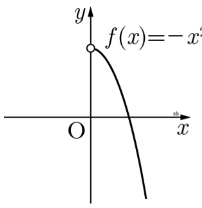
$=(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)<0$

$\therefore\ f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

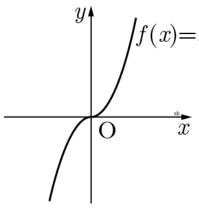
21) 감소

⇨ 임의의 양수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=-x^2+3$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다



22) 증가

⇨ 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.



23) 감소

⇨ $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1{}^3-(-x_2{}^3)=-(x_1{}^3-x_2{}^3)$

$=-(x_1-x_2)(x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2)$

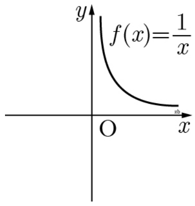
이때 $x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2=\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2{}^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)>0$ $\qquad \therefore\ f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

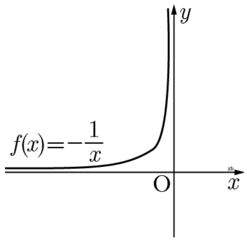
24) 감소

⇨ 임의의 양수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다.



25) 증가

⇨ 임의의 두 음수 a,b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)<f(b)$이므로 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$은 구간 $(-\infty,0)$에서 증가한다.



26) $-1 \le x \le 3$

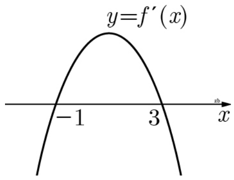
⇨ $f(x)=-x^3+3x^2+9x+7$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

한편, $f'(x) \ge 0$일 때 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x+1)(x-3) \ge 0$에서

$-1 \le x \le 3$



27) $-2 \le x \le 5$

⇨ $f(x)=-x^3+\dfrac{9}{2}x^2+30x+10$에서

$f'(x)=-3x^2+9x+30=-3(x+2)(x-5)$

한편, $f'(x) \ge 0$일 때 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x+2)(x-5) \ge 0$에서

$-2 \le x \le 5$

28) $1 \le x \le a$

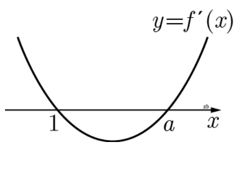
⇨ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax+3$에서

$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$

한편, $f'(x) \le 0$일 때 $f(x)$는 감소하므로

$(x-1)(x-a) \le 0$에서

$1 \le x \le a$ $(\because\ a>1)$



29) 구간 $(-\infty,0]$, $[3,\infty)$에서 감소, 구간 $[0,3]$에서

증가

⇨ 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$과 $[3, \infty)$에서 감소하고, 구간 $[0, 3]$에서 증가한다.

30) 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, 4]$에서 감소, 구간 $[0, 2]$, $[4, \infty)$에서 증가

⇨ 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$과 $[2, 4]$에서 감소하고, 구간 $[0, 2]$와 $[4, \infty)$에서 증가한다.

31) ㅁ

⇨ 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 보면

ㅁ. 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 감소한다.

32) $k \geq 3$

⇨ $f(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 2$에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k$

$f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 6x + k \geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 9 - 3k \leq 0 \qquad \therefore k \geq 3$

33) $-3 \leq k \leq 6$

⇨ 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 2kx + (k+6) \geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 - 2kx + (k+6) = 0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = k^2 - 3(k+6) \leq 0$, $k^2 - 3k - 18 \leq 0$

$(k+3)(k-6) \leq 0$

$\therefore\ -3 \leq k \leq 6$

34) $0 \leq k \leq 3$

⇨ $f(x) = x^3 + kx^2 + kx$에서 $f'(x) = 3x^2 + 2kx + k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $3x^2 + 2kx + k \geq 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 + 2kx + k = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = k^2 - 3k \leq 0$에서 $k(k-3) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq k \leq 3$

35) $0 \leq k \leq \frac{3}{4}$

⇨ $f(x) = x^3 - 2kx^2 + kx$에서 $f'(x) = 3x^2 - 4kx + k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $3x^2 - 4kx + k \geq 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 4kx + k = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 4k^2 - 3k \leq 0$에서 $k(4k-3) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq k \leq \frac{3}{4}$

36) $-12 \leq k \leq 0$

⇨ $f(x) = x^3 + kx^2 - 4kx$에서 $f'(x) = 3x^2 + 2kx - 4k$

$f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2kx - 4k \geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2kx - 4k = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = k^2 + 12k \leq 0$, $k(k+12) \leq 0$

$\therefore -12 \leq k \leq 0$

37) $-3 \leq k \leq 3$

⇨ $f(x) = x^3 + 2kx^2 + 12x - 5$에서

$f'(x) = 3x^2 + 4kx + 12$

$f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 4kx + 12 \geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 4kx + 12 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 4k^2 - 36 \leq 0$, $4(k+3)(k-3) \leq 0$

$\therefore -3 \leq k \leq 3$

38) $k \leq -\frac{1}{3}$

⇨ $f(x) = -x^3 + x^2 + kx$에서 $f'(x) = -3x^2 + 2x + k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.

이차방정식 $-3x^2 + 2x + k = 0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4} = 1^2 + 3k \leq 0$

$\therefore\ k \le -\dfrac{1}{3}$

39) $-3 \le k \le 3$

⇨ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = -3x^2+2kx-3 \le 0$ 이어야한다.

이차방정식 $-3x^2+2kx-3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4} = k^2-9 \le 0 \qquad \therefore -3 \le k \le 3$

40) $k \ge 4$

⇨ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = x^2+4x+k \ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4} = 4-k \le 0 \qquad \therefore\ k \ge 4$

41) $1 \le k \le 4$

⇨ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = x^2+2kx+(5k-4) \ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+2kx+(5k-4)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4} = k^2-(5k-4) = (k-1)(k-4) \le 0$

$\therefore 1 \le k \le 4$

42) $1 \le k \le 4$

⇨ $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3+kx^2-(5k-4)x+2$에서

$f'(x) = -x^2+2kx-5k+4$

$f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하므로 모든 실수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = -x^2+2kx-5k+4 \le 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+2kx-5k+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4} = k^2-5k+4 \le 0,\ (k-1)(k-4) \le 0$

$\therefore\ 1 \le k \le 4$

43) $-1 \le k \le 2$

⇨ 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2+2(k+1)x+(k+1) \ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2(k+1)x+(k+1)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4} = (k+1)^2-3(k+1) \le 0$

$(k+1)(k-2) \le 0 \qquad \therefore\ -1 \le k \le 2$

44) $1 \le k \le 4$

⇨ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x) = 3x^2-2(k+2)x+3k \ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2-2(k+2)x+3k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4} = (k+2)^2-9k \le 0$

$(k-1)(k-4) \le 0 \qquad \therefore\ 1 \le k \le 4$

45) $0 \le k \le 1$

⇨ 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2-6kx+3k \ge 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $3x^2-6kx+3k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4} = 9k^2-9k \le 0$

$\therefore 0 \le k \le 1$

46) $0 \le k \le 12$

⇨ $f(x) = x^3-kx^2+4kx+4$에서

$f'(x) = 3x^2-2kx+4k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2-2kx+4k \ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2-2kx+4k=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4} = k^2-12k \le 0,\ k(k-12) \le 0$

$\therefore\ 0 \le k \le 12$

47) $-12 \le k \le 0$

⇨ $f(x) = x^3+kx^2-4kx+3$에서

$f'(x) = 3x^2+2kx-4k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2+2kx-4k \ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2+2kx-4k=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4} = k^2+12k \le 0,\ k(k+12) \le 0$

$\therefore\ -12 \le k \le 0$

48) $0 \le k \le \dfrac{15}{4}$

⇨ $f(x) = x^3-2kx^2+5kx-4$에서

$f'(x) = 3x^2-4kx+5k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2-4kx+5k \ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2-4kx+5k=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4k^2-15k\le 0,\ 4k\left(k-\frac{15}{4}\right)\le 0$

$\therefore\ 0\le k\le \frac{15}{4}$

49) $-3\le k\le 0$

⇨ $f(x)=x^3+kx^2-kx+3$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-k$

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2kx-k\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2+2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2+3k\le 0,\ k(k+3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 0$

50) $-3\le k\le 0$

⇨ $f(x)=x^3+kx^2-kx+5$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-k$

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2kx-k\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2+2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2+3k\le 0,\ k(k+3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 0$

51) $k\le -\frac{4}{3}$

⇨ $f(x)=-x^3+2x^2+kx-1$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+k$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-3x^2+4x+k\le 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-3x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4+3k\le 0\qquad \therefore\ k\le -\frac{4}{3}$

52) $-3\le k\le 3$

⇨ $f(x)=-x^3+kx^2-3x$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx-3$

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-3x^2+2kx-3\le 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-3x^2+2kx-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-9\le 0,\ (k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 3$

53) $-3\le k\le 3$

⇨ $f(x)=-x^3+kx^2-3x+3$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx-3$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-3x^2+2kx-3\le 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-3x^2+2kx-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-9\le 0,\ (k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 3$

54) $0\le k\le 6$

⇨ $f(x)=-2x^3+kx^2-kx$에서

$f'(x)=-6x^2+2kx-k$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-6x^2+2kx-k\le 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-6x^2+2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-6k\le 0,\ k(k-6)\le 0$

$\therefore\ 0\le k\le 6$

55) $-3\le k\le 0$

⇨ $f(x)=kx^3+kx^2-x+1$에서

$f'(x)=3kx^2+2kx-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $3kx^2+2kx-1\le 0$이 성립해야 하므로 $k\le 0$ … ㉠

또, 이차방정식 $3kx^2+2kx-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2+3k\le 0$에서 $k(k+3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 0$ … ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-3\le k\le 0$

56) $k\ge 1$

⇨ $f(x)=kx^3-3x^2+3kx-1$에서

$f'(x)=3kx^2-6x+3k$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때, $k=0$이면 $f'(x)=-6x$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이 성립하지 않는다.

$\therefore\ k\ne 0$

즉, $f'(x)$는 이차함수이므로

$f'(x)=3kx^2-6x+3k\ge 0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k>0$ … ㉠

이어야 한다. 또, 이차방정식 $3kx^2-6x+3k=0$,

즉 $kx^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-k^2 \le 0$에서 $(k-1)(k+1) \ge 0$

$\therefore\ k \le -1$ 또는 $k \ge 1$ … ㉡

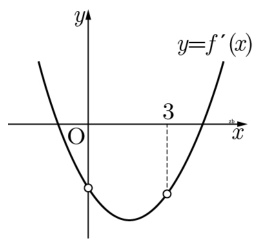
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $k \ge 1$

57) $k \le -9$

⇨ 함수 $f(x)=x^3-3x^2+kx+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x+k$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, 3)$에서 감소하려면 다음 그림과 같이



$0<x<3$에서 $f'(x) \le 0$이어야하므로

$f'(0)=k \le 0$, $f'(3)=27-18+k \le 0$

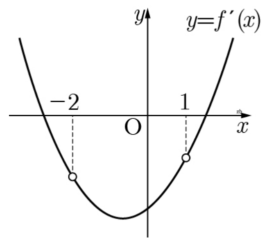
$\therefore\ k \le -9$

58) $k \le -36$

⇨ 함수 $f(x)=x^3-6x^2+kx+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+k$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 1)$에서 감소하려면 다음 그림과 같이



$-2<x<1$에서 $f'(x) \le 0$이어야하므로

$f'(-2)=12+24+k \le 0$, $f'(1)=3-12+k \le 0$

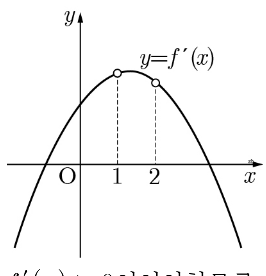
$\therefore\ k \le -36$

59) $k \ge 8$

⇨ 함수 $f(x)=-x^3+x^2+kx-4$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+k$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 증가하려면 다음 그림과 같이



$1<x<2$에서 $f'(x) \ge 0$이어야하므로

$f'(1)=-3+2+k \ge 0$, $f'(2)=-12+4+k \ge 0$

$\therefore\ k \ge 8$

60) $a=6$, $b=-9$

⇨ $f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[1, 3]$이므로 이 구간에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b \ge 0$ … ㉠

이 부등식의 해가 $1 \le x \le 3$이므로

$-3(x-1)(x-3) \ge 0$

$\therefore\ -3x^2+12x-9 \ge 0$ … ㉡

㉠, ㉡은 일치하므로

$2a=12$, $b=-9$

$\therefore\ a=6$, $b=-9$

61) $a=-3$, $b=-24$

⇨ $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[-2, 4]$이므로 이 구간에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b \le 0$ … ㉠

이 부등식의 해가 $-2 \le x \le 4$이므로

$3(x+2)(x-4) \le 0$

$\therefore\ 3x^2-6x-24 \le 0$ … ㉡

㉠, ㉡은 일치하므로

$2a=-6$, $b=-24$

$\therefore\ a=-3$, $b=-24$