단원 ISSUE

이 단원에서는 **도형의 평행이동과 대칭이동을 묻는 문제**가 자주 출제됩니다.
계산력도 중요하지만 이 단원은 주어진 그래프를 문제에서 요구하는 상황에 맞게 이동시키는 문제가 자주 출제되므로 평행이동과 대칭이동에 관한 정확한 개념 이해가 필수적으로 요구됩니다.
또한, 이를 응용하여 거리의 최솟값을 묻는 문제가 자주 출제되므로 관련 유형을 중점적으로 학습합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. 점 (x,y)를 점 $(x+a,\ y-5)$으로 이동하는 평행이동에 의하여 점 $(-2,4)$가 점 $(1,b)$로 옮겨질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$의 값을 구하면?

① 2　② 3
③ -3　④ 8
⑤ -9

[스스로 마무리하기]

2. 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형이 직선 $y=x$와 x축에 동시에 접할 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$, $b>-2$)

① $5+5\sqrt{2}$　② $7+5\sqrt{2}$
③ $8+6\sqrt{2}$　④ $9+5\sqrt{2}$
⑤ $10+12\sqrt{2}$

[스스로 확인하기]

3. 직선 $2x-4y+k=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선이 점 $(-5,4)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하면?

① -8　② -4
③ 0　④ 4
⑤ 8

[스스로 확인하기]

4. 점 $(3,-2)$를 점 $(2,1)$로 옮기는 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2-2x+a$이 원점을 지나는 포물선으로 이동된다고 할 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -2　② -4
③ 0　④ 4
⑤ 2

[스스로 확인하기]

5. 원 $x^2+y^2-2y=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하였더니 직선 $3x-4y=5$에 접하였다. 이때 자연수 a의 값을 구하면?

① 2　② 3
③ 6　④ 7
⑤ 9

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 마무리하기]

6. $y=x^2+2x$를 $y=x^2-6x+1$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $l : 2x-y=0$이 옮겨지는 직선을 l'이라 할 때, 두 직선 l, l' 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② 3 ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

[스스로 확인하기]

7. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+1,\ y-1)$에 의하여 점 $(2,\ a)$가 직선 $x+2y=5$ 위의 점으로 옮겨질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -2 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 2

[스스로 확인하기]

8. 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$, $\mathrm{B}(6,\ 5)$와 직선 $y=2x-2$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(1,2)$ ② $(2,3)$ ③ $(3,4)$ ④ $(4,5)$ ⑤ $(5,7)$

[스스로 확인하기]

9. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 직선 $y=2x+k$와 접할 때, 모든 실수 k값의 곱을 구하면?

① -2 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 2

[스스로 확인하기]

10. 점 $A(3,1)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[스스로 확인하기]

11. 방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 x축으로 1만큼 평행이동한 후 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형으로 옳은 것은?

① $f(y-1,x)=0$ ② $f(y,x-1)=0$ ③ $f(x-1,y)=0$ ④ $f(x,y-1)=0$ ⑤ $f(y+1,x)=0$

[스스로 마무리하기]

12. 직선 $l : 2x-y+4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1, x축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2라 하자. 두 직선 l, l_1의 교점을 P, 두 직선 l, l_2의 교점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② 3 ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

[스스로 확인하기]

13. 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 직선 $3x-4y+2=0$에 접한다고 한다. 이때 상수 a의 값을 모두 곱하면?

① -6 ② -4 ③ -1 ④ 3 ⑤ 8

[스스로 확인하기]

14. $\sqrt{(x-2)^2+5^2}+\sqrt{(x-4)^2+1^2}$ 의 최솟값이 m 일 때, m^2 의 값을 구하면? (단, x 는 실수이다.)

① 20　② 30　③ 40　④ 50　⑤ 60

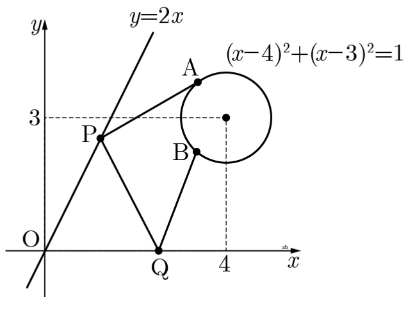
[스스로 확인하기]

15. 원 $(x+2)^2+(y+3)^2=4$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C , 직선 $2x+my+3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선을 l 이라 하자. 직선 l 이 원 C 의 중심을 지날 때, 상수 m 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ 5　⑤ $\frac{7}{2}$

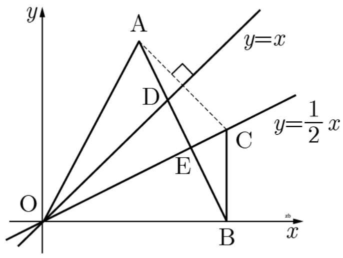
실전문제

16. 그림과 같이 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ 위의 두 점 A, B와 직선 $y=2x$ 위의 점 P, x축 위의 점 Q가 있다. 네 점 A, B, P, Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 의 최솟값은?



① $\sqrt{50}-2$　② $4\sqrt{5}-2$　③ 8　④ $4\sqrt{5}-1$　⑤ $\sqrt{50}+2$

17. 그림과 같이 좌표평면 위에 제 1 사분면의 점 A와 x축 위의 점 B에 대하여 $\overline{AO}=\overline{AB}=3\sqrt{5}$인 이등변삼각형 AOB가 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 점 C는 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이다. 선분 AB가 두 직선 $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 OED의 외접원의 둘레의 길이를 $a\pi$라 하고 삼각형 BCE의 외접원의 둘레의 길이를 $b\pi$라 하자. 이때 a^2+b^2의 값은? (단, O는 원점이다.)



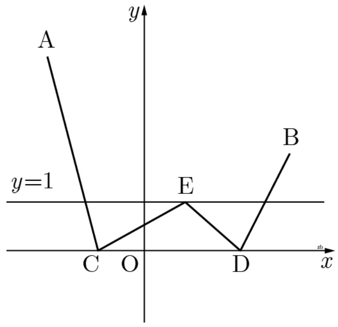
① 32　② 37　③ 41　④ 46　⑤ 53

18. 좌표평면 위에 점 $A(0,1)$과 원 $C: x^2+y^2-6x-6y+17=0$이 있다. x축 위의 점 P와 원 C 위의 점 B에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때 삼각형 ABP의 넓이를 $\frac{q}{p}$이다. 이때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 51　② 53　③ 55　④ 57　⑤ 59

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

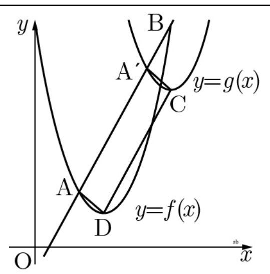
19. 좌표평면 위에 두 점 $A(-2,4)$, $B(3,2)$이 있다. x축 위의 두 점 C, D와 직선 $y=1$ 위의 점 E에 대하여 $\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{ED}+\overline{DB}$의 최솟값은?



① 9　② $\sqrt{89}$　③ 10　④ $\sqrt{109}$　⑤ 11

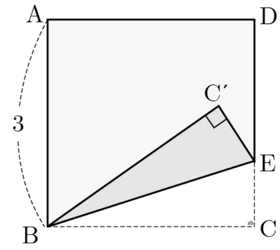
20. 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-6x+11$의 그래프가 직선 $y=2x-1$과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, $y=f(x)$를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y=g(x)$와 일치한다. $y=g(x)$와 직선 $y=2x-1$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점 중 x의 좌표가 작은 점을 A'이라 하고, 이차함수 $f(x)$와 $g(x)$의 꼭짓점은 각각 D, C라 하자. 사각형 $AA'CD$가 다음 조건을 만족할 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 양의 실수이다.)

(가) 선분 AA'과 선분 DC는 평행하다.
(나) 사각형 $AA'CD$의 넓이는 9이다.



① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

21. 아래의 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $ABCD$가 있다. 변 CD를 $1:2$로 내분하는 점을 E라고 할 때, 선분 BE를 접는 선으로 하여 정사각형을 접었더니 점 C가 사각형 $ABED$의 내부의 한 점 C'으로 옮겨졌다. 이때 점 A와 직선 BC' 사이의 거리가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하면? (단, p, q는 서로소이다.)



① 7　② 12　③ 15　④ 17　⑤ 18

22. 포물선 $y=x^2-2x-1$ 위의 서로 다른 두 점이 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$　② $3\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{3}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $4\sqrt{3}$

정답 및 해설

1) [정답] ③
[해설] 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y-5)$에 의해 점 $(-2,\ 4)$를 평행이동하면 $(-2+a,\ 4-5)$이다. 따라서 $-2+a=1$, $b=-1$이므로 $a=3$, $b=-1$이고 $\frac{a}{b}=-3$이다.

2) [정답] ②
[해설] 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$을 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a-1)^2+(y-b-2)^2=5^2$
이 원이 직선 $y=x$와 x축에 동시에 접하므로
$|b+2|=5$에서 $b>-2$이므로 $b=3$
따라서 원의 방정식은 $(x-a-1)^2+(y-5)^2=5^2$이다.
원의 중심 $(a+1,\ 5)$에서 직선 $y=x$ 까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5$, $|a-4|=5\sqrt{2}$
따라서 양수 a의 값은 $4+5\sqrt{2}$이다.
$\therefore a+b=7+5\sqrt{2}$.

3) [정답] ③
[해설] $2x-4y+k=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면
$2(x+3)-4(y-5)+k=0$
$2x-4y+26+k=0$이다.
$2x-4y+26+k=0$이 점 $(-5,4)$를 지나므로
$-10-16+26+k=0$이고 $k=0$이다.

4) [정답] ①
[해설] 점 $(3,\ -2)$를 점 $(2,1)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨다. 포물선 $y=x^2-2x+a$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y-3=(x+1)^2-2(x+1)+a$,
$y=x^2+a+2$이고 이 포물선이 원점을 지나므로 $a=-2$이다.

5) [정답] ③
[해설] 원 $x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$이고, x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 중심은 $(a,2)$이고 반지름이 1인 원으로 옮겨진다. 원과 직선 $3x-4y=5$가 서로 접하므로 원의 중심 $(a,2)$에서 직선 $3x-4y=5$까지의 거리가 반지름의 길이 1과 같다.
$\frac{|3a-8-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3a-13|}{5}=1$
$|3a-13|=5$에서 $3a-13=\pm 5$이고 $a=6,\ \frac{8}{3}$이다. 따라서 자연수 a의 값은 6이다.

6) [정답] ⑤
[해설] $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$,
$y=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$이므로 주어진 평행이동은 x축 방향으로 4만큼, y축 방향으로 -7만큼 평행이동한다. 따라서 직선 l'의 방정식은 $2(x-4)-(y+7)=0$, $2x-y-15=0$이다. 구하는 거리는 직선 l 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|-15|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3\sqrt{5}$이다.

7) [정답] ⑤
[해설] 점 $(2,a)$가 평행이동 $f:(x,y)\to(x+1,y-1)$에 의하여 옮겨진 점은 $(2+1,a-1)=(3,a-1)$이다. 점 $(3,a-1)$은 직선 $x+2y=5$ 위의 점이므로 $3+2(a-1)=5$이고 $a=2$이다.

8) [정답] ③
[해설] 점 $A(4,\ 1)$을 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,\ b)$라 하자. 선분 $\mathrm{AA'}$의 중점 $\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$이 직선 $y=2x-2$ 위에 있으므로 $\frac{b+1}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-2$이고
$2a-b=-3$이다.
직선 $\mathrm{AA'}$과 직선 $y=2x-2$가 수직이므로
$\frac{b-1}{a-4}=-\frac{1}{2}$이고 $a+2b=6$이다.
$2a-b=-3$, $a+2b=6$을 연립하여 풀면
$a=0$, $b=3$이므로 $A'(0,\ 3)$이다.
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'B}}\\&=\sqrt{6^2+(5-3)^2}=2\sqrt{10}\end{aligned}$$
또 직선 $\mathrm{A'B}$의 방정식은 $y=\frac{5-3}{6-0}x+3$,
즉 $y=\frac{1}{3}x+3$이다.
따라서 두 직선 $y=\frac{1}{3}x+3$, $y=2x-2$의 교점의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표는 $P(3,\ 4)$이다.

9) [정답] ④
[해설] 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$이 된다.
원과 직선 $2x-y+k=0$가 서로 접하므로 원의 중심 $(1,-1)$에서 직선 $2x-y+k=0$까지의 거리가 반지름의 길이 1과 같다.
$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=1$, $|k+3|=\sqrt{5}$에서
$k=-3\pm\sqrt{5}$이고 모든 실수 k의 값의 곱은 4이

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

다.

10) [정답] ①
[해설] 점 $A(3,1)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $B(-3,-1)$이고, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $C(-3,1)$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{0+2^2}=2$이다.

11) [정답] ①
[해설] $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 x축으로 1만큼 평행이동하면 $f(x-1,y)=0$이고 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y-1,x)=0$이다.

12) [정답] ④
[해설] 직선 l_1의 방정식은 $-x+2y+4=0$
직선 l_2의 방정식은 $2x+y+4=0$
직선 l, l_1의 방정식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=-4$이므로 $\mathrm{P}(-4,\ -4)$이다.
직선 l, l_2의 방정식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=0$이므로 $\mathrm{Q}(-2,\ 0)$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-2+4)^2+4^2}=2\sqrt{5}$이다.

13) [정답] ①
[해설] 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=4$이고, 이 원을 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2+(y+a)^2=4$이다.
원 $x^2+(y+a)^2=4$이 직선 $3x-4y+2=0$에 접하므로 원 $x^2+(y+a)^2=4$의 중심 $(0,\ -a)$에서 직선 $3x-4y+2=0$에 이르는 거리가 2이어야 한다.
$$\frac{|4a+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$
$4a+2=10$ 또는 $4a+2=-10$
따라서 $a=2$ 또는 $a=-3$이고 a의 값을 모두 곱하면 -6이다.

14) [정답] ③
[해설] x축 위를 움직이는 점을 $\mathrm{P}(x,\ 0)$이라 하고, $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $B(4,\ 1)$이라 하면 주어진 식은 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$이다. 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $\mathrm{B}'(4,-1)$이므로
$\sqrt{(x-2)^2+5^2}+\sqrt{(x-4)^2+1^2}$
$\geq \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}} \geq \overline{\mathrm{AB'}}$
$=\sqrt{(4-2)^2+(-1-5)^2}=2\sqrt{10}$이다.
따라서 $m=2\sqrt{10}$이므로 $m^2=40$이다.

15) [정답] ②
[해설] 원 C의 방정식은 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$이다.
직선 l의 방정식은 $2x-my+3=0$이다.
직선 l이 원 C의 중심 $(-3,\ -2)$를 지나므로 $2\cdot(-3)-m\cdot(-2)+3=0$이고 $2m=3$이므로 $m=\frac{3}{2}$이다.

16) [정답] ②
[해설] 원의 중심을 $C(4,3)$라고 하고 점 C를 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 점을 $C'(a,b)$라고 하자.
선분 CC'의 중점 $\left(\frac{a+4}{2},\frac{b+3}{2}\right)$는 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 $2a-b=-5$
선분 CC'와 직선 $y=2x$는 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.
$\frac{b-3}{a-4}\times 2=-1$에서 $a+2b=10$
두 식 $2a-b=-5$, $a+2b=10$을 연립하면 $a=0$, $b=5$이므로 $C'(0,5)$이다.
점 $C(4,3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C''
라고 하면 $C''(4,-3)$이다.
$\overline{CP}=\overline{C'P}$, $\overline{CQ}=\overline{C''Q}$이고
$\overline{AP}\geq\overline{CP}-1$, $\overline{QB}\geq\overline{QC}-1$이므로
$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}&\geq\overline{CP}-1+\overline{PQ}+\overline{QC}-1\\&=\overline{C'P}+\overline{PQ}+\overline{C''Q}-2\\&\geq\overline{C'C''}-2\end{aligned}$$
$\overline{C'C''}=\sqrt{16+64}=4\sqrt{5}$
$\therefore 4\sqrt{5}-2$

17) [정답] ③
[해설] 점 C가 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로
$C(2c,\ c)$라 하면 $A(c,\ 2c)$이다.
$\overline{AO}=\overline{AB}=3\sqrt{5}$임을 이용하면
$A(3,\ 6)$, $C(6,\ 3)$, $B(6,\ 0)$
직선 AB의 기울기는 $\frac{0-6}{6-3}=-2$이므로
$y=\frac{1}{2}x$와 수직이다.
직선 AB의 방정식은 $y=-2x+12$
점 D는 직선 AB와 $y=x$의 교점이므로
$-2x+12=x$, $x=4$
$\therefore D(4,\ 4)$
삼각형 OED는 직각삼각형이므로
$\triangle OED$의 외접원은 $\overline{OD}$가 지름인 원이다.
$a=\overline{OD}=4\sqrt{2}$
삼각형 BCE의 외접원은 $\overline{BC}$가 지름인 원이다.
$b=\overline{BC}=3$
$\therefore a^2+b^2=41$

18) [정답] ②
[해설] $x^2+y^2-6x-6y+17=0$
$C:(x-3)^2+(y-3)^2=1$
원 C의 중심을 $M(3,\ 3)$, 반지름의 길이를 $r=1$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

이라 하자.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'라 하면 $A'(0,\ -1)$

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$

$\overline{A'B}$의 최솟값은 $\overline{A'M}-r=5-1=4$

이때 네 점 A', P, B, M이 일직선 위에 있다.

직선 $A'M$의 방정식은 $4x-3y-3=0$이고

점 P는 직선 $A'M$의 x절편이므로

$P\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$

$\overline{A'P}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1^2}=\frac{5}{4}$

$\triangle ABP$의 밑변 $\overline{PB}=\overline{A'B}-\overline{A'P}=4-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$

$\triangle ABP$의 높이는 점 $A(0,\ 1)$에서 직선 $A'M$에 이르는 거리이므로 $\frac{|-3-3|}{\sqrt{16+9}}=\frac{6}{5}$이다.

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times\frac{11}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{33}{20}$

$\therefore p+q=20+33=53$

19) [정답] ②

[해설] 점 A를 x축에 대칭이동한 점은 $A'(-2,-4)$이고,

점 B를 x축에 대칭이동한 점은 $B'(3,-2)$이다.

점 B'를 직선 $y=1$에 대칭이동한 점은 $B''(3,4)$이다.

즉, $\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{ED}+\overline{DB}$의 최솟값은 $\overline{A'B''}$이므로

최솟값은 $\overline{A'B''}=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}$이다.

20) [정답] ①

[해설] 주어진 함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=(x-3)^2+2$이므로 꼭짓점 D의 좌표는 $D(3,2)$이다.

이 함수와 직선 $y=2x-1$을 연립하면

$x^2-6x+11=2x-1$에서 $x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 점 A의 좌표는 $A(2,3)$이다.

이때, 조건으로부터 점 A'은 점 A를, 점 C는 점 D를 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동한 점이므로

$A'(2+m,3+n)$, $C(3+m,2+m)$이다.

$\overline{DC}=\sqrt{m^2+n^2}$이고,

직선 AA'의 기울기는 2, 직선 CD의 기울기는 $\frac{n}{m}$이다.

이때 두 직선이 서로 평행하므로 $\frac{n}{m}=2$

$\therefore n=2m$ $\cdots$ ㉠

한편, 점 D와 직선 $2x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-2-1|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$이므로 사각형 $AA'CD$의 높이는 $\frac{3}{\sqrt{5}}$이다.

조건 (나)로부터 $\overline{CD}=\sqrt{m^2+n^2}$이므로

$\frac{3}{\sqrt{5}}\times\sqrt{m^2+n^2}=9$

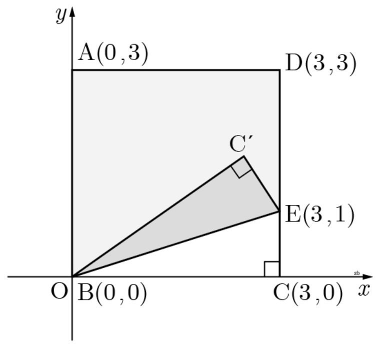
$\therefore m^2+n^2=45$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=3$, $n=6$

$\therefore m+n=9$

21) [정답] ④

[해설] 점 B가 원점인 좌표평면으로 옮기면 점 E의 좌표는 $(3,1)$이므로 다음 그림과 같다.



점 C'는 점 C를 직선 BE에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표를 $C'(a,b)$라 하자.

직선 BE의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x$이므로

직선 CC'의 기울기는 -3이고

$\frac{b}{a-3}=-3$, 즉 $b=-3a+9$이다.

또한 선분 CC'의 중점 $\left(\frac{a+3}{2},\frac{b}{2}\right)$는

직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 점이므로 $\frac{b}{2}=\frac{a+3}{6}$

즉, $3b=a+3$이다.

두 식 $b=-3a+9$와 $3b=a+3$를 연립하면

$a=\frac{12}{5}$, $b=\frac{9}{5}$이므로 $C'\left(\frac{12}{5},\frac{9}{5}\right)$

따라서 직선 BC'의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$,

즉 $3x-4y=0$이고 점 $A(0,3)$와 이 직선 사이의 거리는 $\frac{|-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{5}=\frac{q}{p}$이다.

즉, $p=5$, $q=12$이므로 $p+q=17$이다.

22) [정답] ②

[해설] 포물선 $y=x^2-2x-1$ 위의 두 점을

$P(\alpha,\alpha^2-2\alpha-1)$, $Q(\beta,\beta^2-2\beta-1)$라고 하자.

(단, $\alpha>\beta$)

두 점 P, Q가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

선분 PQ의 중점 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)-2}{2}\right)$

이 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)-2}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-3(\alpha+\beta)-2=0$ …… ㉠

선분 PQ와 직선 $y=x$는 수직이므로

$\dfrac{\alpha^2-\beta^2-2(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=-1$이다.

$\therefore\ \alpha+\beta=1$ …… ㉡ ($\because\ \alpha>\beta$)

㉠에서 $(\alpha+\beta)^2-3(\alpha+\beta)-2\alpha\beta=2$이므로

㉡을 대입하면 $\alpha\beta=-2$이다.

이때 α, β를 두 근으로 하는

x에 대한 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이므로 $x^2-x-2=0$이다.

$(x-2)(x+1)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-1$이다.

그러므로 $P(2,-1)$, $Q(-1,2)$이고,

$\overline{PQ}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ 이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574