01

다항식의 연산

예제 01

다항식의 덧셈과 뺄셈

두 다항식 $A=2x^2-x+2$, $B=2x^2-x+3$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $3A-2(A-B)$　　(2) $2A-5(B-A)+B$

접근 방법

다항식의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 때에는 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후, 동류항끼리 모아 계산합니다.

Bible 다항식을 내림차순으로 정리한 후 동류항끼리 모아 계산한다.

상세 풀이

(1)
$$\begin{aligned}3A-2(A-B)&=3A-2A+2B\\&=A+2B\\&=(2x^2-x+2)+2(2x^2-x+3)\\&=2x^2-x+2+4x^2-2x+6\\&=(2+4)x^2+(-1-2)x+(2+6)\\&=6x^2-3x+8\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}2A-5(B-A)+B&=2A-5B+5A+B\\&=7A-4B\\&=7(2x^2-x+2)-4(2x^2-x+3)\\&=14x^2-7x+14-8x^2+4x-12\\&=(14-8)x^2+(-7+4)x+14-12\\&=6x^2-3x+2\end{aligned}$$

정답 ➡ (1) $6x^2-3x+8$　(2) $6x^2-3x+2$

보충 설명

위와 같은 문제의 풀이에서 $3A-2(A-B)$에 주어진 식을 직접 대입하여 풀면 계산이 복잡해져서 실수를 할 수 있고, 시간 또한 많이 걸리게 됩니다. 따라서 먼저 $3A-2(A-B)$를 정리하여 간단히 한 다음 주어진 식을 대입해야 합니다.

풀이집 p.2

숫자 바꾸기

01-1 세 다항식 $A=2x^2+5xy+y^2$, $B=x^2-3xy+2y^2$, $C=-x^2+xy-3y^2$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B+C$　　(2) $2(A+B)-\{B-(A+C)\}$

표현 바꾸기

01-2 세 다항식 $A=2x^2-xy+y^2$, $B=x^2+xy+y^2$, $C=x^2+3xy-2y^2$에 대하여 $3(A+B)-2(B+C)=ax^2-8xy+by^2$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

01-3 세 다항식 A, B, C에 대하여

$$A+B=-x^2+2xy+3y^2,$$
$$B+C=x^2-xy-y^2,$$
$$C+A=2x^2+3xy+2y^2$$

일 때, $X-2A=B+2C$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

정답 **01-1** (1) $2x^2+3xy$ (2) $6x^2+13xy+2y^2$　**01-2** 13
01-3 $3x^2+5xy+4y^2$

예제 02

다항식의 곱셈

다음 식을 전개하여라.

(1) $a^2b(a-3ab+2b^2)$　　(2) $(a+3b)(a^2-2ab+3b^2)$

(3) $(x+y^2)(4x^2+y)$　　(4) $(x^2-2xy+3y)(x-y)$

접근 방법

식을 전개할 때에는 다항식의 각 항에 분배법칙을 적용하고, 지수법칙을 이용하여 계산합니다. 이때, 상수 및 부호에 주의하여 계산하여야 하며, 전개한 식을 나타낼 때에는 보통 내림차순으로 정리합니다.

Bible 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 다항식을 전개한다.

상세 풀이

(1) $a^2b(a-3ab+2b^2)=a^3b-3a^3b^2+2a^2b^3$

(2) $(a+3b)(a^2-2ab+3b^2)=a(a^2-2ab+3b^2)+3b(a^2-2ab+3b^2)$

$=a^3-2a^2b+3ab^2+3a^2b-6ab^2+9b^3$

$=a^3+a^2b-3ab^2+9b^3$

(3) $(x+y^2)(4x^2+y)=x(4x^2+y)+y^2(4x^2+y)$

$=4x^3+xy+4x^2y^2+y^3$

(4) $(x^2-2xy+3y)(x-y)=x^2(x-y)-2xy(x-y)+3y(x-y)$

$=x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

$=x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

정답 ➡ (1) $a^3b-3a^3b^2+2a^2b^3$　(2) $a^3+a^2b-3ab^2+9b^3$
(3) $4x^3+xy+4x^2y^2+y^3$　(4) $x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

보충 설명

다항식의 곱셈

➡ 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 식을 전개한 후 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

풀이집 p.2

숫자 바꾸기

02-1 다음 식을 전개하여라.

(1) $ab^3(a-a^2b+b^2)$　　(2) $(a-2b)(2a^2-ab+b^2)$

(3) $(x^2+y^2)(3x^2-y)$　　(4) $(x^2+3xy-2y)(2x+y)$

표현 바꾸기

02-2 x에 대한 다항식 $(2x^2+3x+k)(x^2+x-3)$의 전개식에서 x의 계수가 7일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★☆☆

02-3 x에 대한 다항식 $(x-2a-1)(2x+3a+5)(x+a)$의 전개식에서 x^2의 계수가 18일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

정답 **02-1** (1) $a^2b^3-a^3b^4+ab^5$ (2) $2a^3-5a^2b+3ab^2-2b^3$
(3) $3x^4-x^2y+3x^2y^2-y^3$ (4) $2x^3+7x^2y+3xy^2-4xy-2y^2$
02-2 16　**02-3** 15

예제 03

다항식의 나눗셈

다음 나눗셈의 몫과 나머지를 각각 구하여라.

(1) $(2x^2+7x+8)\div(x+2)$　　　　(2) $(2x^3+3x^2+4)\div(x^2+x+2)$

접근 방법

차수가 높은 다항식을 차수가 낮은 다항식으로 나눌 때에는 각각의 다항식을 내림차순으로 정리한 뒤, 계수가 0 인 항은 비워 두고 자연수의 나눗셈과 같은 방식으로 나눕니다.
또한 각각의 다항식을 내림차순으로 정리한 뒤, 그 계수들만으로 나눗셈을 하는 방법도 있습니다. 이때, 계수가 없는 항은 0 으로 생각해야 합니다.

Bible 다항식을 내림차순으로 정리한 뒤, 계수가 0인 항은 비워 두고 나눗셈을 한다.

상세 풀이

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+3 \\ \hline
x+2 & 2x^2+7x+8 \\
 & 2x^2+4x \\ \cline{2-2}
 & \quad\ 3x+8 \\
 & \quad\ 3x+6 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|rrr}
 & & 2 & 3 & \\ \hline
1 & 2 & 2 & 7 & 8 \\
 & & 2 & 4 & \\ \hline
 & & & 3 & 8 \\
 & & & 3 & 6 \\ \hline
 & & & & 2
\end{array}
$$

← 몫　← 나머지

따라서 몫은 $2x+3$, 나머지는 2입니다.

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\ \hline
x^2+x+2 & 2x^3+3x^2\qquad\ +4 \\
 & 2x^3+2x^2+4x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\ x^2-4x+4 \\
 & \qquad\ x^2+\ x+2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -5x+2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 2 & 1 & & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 4 \\
 & & & 2 & 2 & 4 & \\ \hline
 & & & & 1 & -4 & 4 \\
 & & & & 1 & 1 & 2 \\ \hline
 & & & & & -5 & 2
\end{array}
$$

← 몫　← 나머지

따라서 몫은 $2x+1$, 나머지는 $-5x+2$입니다.

정답 ➡ (1) 몫 : $2x+3$, 나머지 : 2　(2) 몫 : $2x+1$, 나머지 : $-5x+2$

보충 설명

자연수의 경우 13을 5로 나누면 몫이 2이고 나머지는 3이므로 $13=5\cdot2+3$으로 나타낼 수 있습니다. 다항식의 나눗셈에서도 이와 같은 방법으로 나타낼 수 있습니다.
(1) 이차식 $2x^2+7x+8$을 일차식 $x+2$로 나눈 몫이 $2x+3$이고 나머지가 2이므로 등식
$2x^2+7x+8=(x+2)(2x+3)+2$가 성립합니다.
(2) 삼차식 $2x^3+3x^2+4$를 이차식 x^2+x+2로 나눈 몫이 $2x+1$이고 나머지가 $-5x+2$이므로 등식
$2x^3+3x^2+4=(x^2+x+2)(2x+1)-5x+2$가 성립합니다.

풀이집 p.3

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

03-1 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 각각 구하여라.

(1) $(2x^2+3x+1)\div(x+2)$ (2) $(2x^3-3x^2+1)\div(x^2-2x-1)$

표현 바꾸기

03-2 오른쪽은 다항식 $3x^3+x^2+6x+4$를 $ax+1\ (a\neq 0)$로 나누는 과정을 나타낸 것이다. 상수 a, b, c, d, e에 대하여 $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

$$
\begin{array}{r}
x^2 \qquad +c \\
ax+1\overline{\big)\,3x^3+x^2+6x+4} \\
\underline{bx^3+x^2 \qquad\qquad} \\
6x+4 \\
\underline{dx+e} \\
2
\end{array}
$$

개념 넓히기 ★☆☆

03-3 다항식 $3x^3-4x^2+x-2$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하자. $Q(3)+R(2)$의 값을 구하여라.

정답 **03-1** (1) 몫 : $2x-1$, 나머지 : 3 (2) 몫 : $2x+1$, 나머지 : $4x+2$
03-2 16 **03-3** 1

예제 04

곱셈 공식

다음 식을 전개하여라.

(1) $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$ (2) $(2x+6y)(2x-6y)$

(3) $(x-3)^3$ (4) $(x-1)(x^2+x+1)$

접근 방법

대응하는 곱셈 공식을 생각하여 적용합니다. 분배법칙을 이용하여 전개할 수도 있지만 공식에 익숙해지면 수식을 다루기가 훨씬 수월해지므로 공식을 적용하는 연습을 해 둡니다.

Bible

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(5) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

상세 풀이

(1) $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2$

(2) $(2x+6y)(2x-6y)=(2x)^2-(6y)^2=4x^2-36y^2$

(3) $(x-3)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3=x^3-9x^2+27x-27$

(4) $(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)=x^3-1^3=x^3-1$

정답 ➡ (1) $x^2-xy+\frac{1}{4}y^2$ (2) $4x^2-36y^2$ (3) $x^3-9x^2+27x-27$ (4) x^3-1

보충 설명

다항식의 곱셈을 계산할 때에는 먼저 곱셈 공식을 이용할 수 있는지 생각해 본 후, 곱셈 공식을 이용하는 것이 쉽지 않을 때에는 분배법칙을 이용합니다.

풀이집 p.3

숫자 바꾸기

04-1 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+5y)^2$ (2) $(x+2)(x-2)$

(3) $(2x-3)^3$ (4) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

표현 바꾸기

04-2 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ (2) $(x-1)^3(x+1)^3$

개념 넓히기 ★★☆

04-3 다항식 $(2x+1)^3(x-2)^2$의 전개식에서 x의 계수를 a, x^2의 계수를 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35
④ 40 ⑤ 45

정답 **04-1** (1) $x^2+10xy+25y^2$ (2) x^2-4 (3) $8x^3-36x^2+54x-27$ (4) x^3+27y^3
04-2 (1) x^8-1 (2) $x^6-3x^4+3x^2-1$ **04-3** ⑤

예제 05

복잡한 다항식의 전개

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+y-z)(x-y+z)$

(2) $(x+y-1)(x+y+3)$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

접근 방법

(1)에서는 $(x+y-z)(x-y+z)=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$이므로 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하고, (2)에서는 $x+y$를 한 문자로 치환한 후 곱셈 공식 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용합니다. (3)에서는 공통부분이 생기도록 곱셈의 순서를 바꾼 후에 전개합니다.

Bible 공통부분이 생기도록 항을 묶은 뒤에 식을 전개하고, 공통부분은 한 문자로 치환한 후 식을 전개한다.

상세 풀이

(1) $(x+y-z)(x-y+z)=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}=x^2-(y-z)^2$
$=x^2-(y^2-2yz+z^2)=x^2-y^2-z^2+2yz$

(2) $(x+y-1)(x+y+3)=\{(x+y)-1\}\{(x+y)+3\}$
$=(x+y)^2+\{(-1)+3\}(x+y)+(-1)\cdot 3$
$=x^2+2xy+y^2+2x+2y-3$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=(X+4)(X+6)$$
$$=X^2+10X+24$$
$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$$
$$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$$
$$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$$

정답 ➡ (1) $x^2-y^2-z^2+2yz$ (2) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-3$ (3) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

보충 설명

(3)의 경우, 상수항끼리의 합이 같도록 두 항을 묶어 전개해야 합니다. 즉, $1+4=2+3$이므로 바깥쪽 두 항과 안쪽 두 항을 먼저 묶어 전개하면 각 다항식의 이차항과 일차항이 같게 되어 공통부분을 쉽게 찾을 수 있는 모양이 됩니다.

풀이집 p.4

숫자 바꾸기

05-1 다음 식을 전개하여라.

(1) $(3x+y-2z)(3x-y+2z)$

(2) $(2x+y-3)(2x+y+1)$

(3) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

표현 바꾸기 ◆ 보충 설명

05-2 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+3b+c)^2$ (2) $(2a-3b-c)^2$

개념 넓히기 ★☆☆ ◆ 보충 설명

05-3 $(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$을 전개하면?

① x^6-y^6 ② x^6+y^6 ③ $x^6-x^4y^2+x^2y^4-y^6$
④ $x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6$ ⑤ $x^6-2x^3y^3-y^6$

정답
05-1 (1) $9x^2-y^2-4z^2+4yz$ (2) $4x^2+4xy+y^2-4x-2y-3$ (3) $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$
05-2 (1) $a^2+9b^2+c^2+6ab+6bc+2ca$ (2) $4a^2+9b^2+c^2-12ab+6bc-4ca$
05-3 ①

예제 06

곱셈 공식의 변형(1)

$a+b=2$, $ab=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) a^2+b^2 (2) $(a-b)^2$ (3) a^3+b^3

접근 방법

두 수의 합과 곱이 주어져 있는 경우에는 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a^2+b^2, $(a-b)^2$, a^3+b^3의 값을 구할 수 있습니다.

Bible

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

상세 풀이

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=2^2-2\cdot(-1)=6$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
$=2^2-4\cdot(-1)=8$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$

정답 ➡ (1) 6 (2) 8 (3) 14

보충 설명

두 수의 합(또는 차)과 곱을 알고 있을 때에는 곱셈 공식의 변형을 이용하여 다음의 값들을 구할 수 있도록 충분히 연습해 두어야 합니다.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

풀이집 p.5

숫자 바꾸기

06-1 $a+b=5$, $ab=2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) a^2+b^2 (2) $(a-b)^2$ (3) a^3+b^3

표현 바꾸기

06-2 $x+y=-3$, $xy=1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) x^4+y^4 (2) x^5+y^5

개념 넓히기 ★★☆

06-3 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $(a-b)^2+a^3-b^3$의 값을 구하여라.

(가) $a+b=2\sqrt{5}$, $ab=1$
(나) $a>b$

정답 **06-1** (1) 21 (2) 17 (3) 95 **06-2** (1) 47 (2) -123 **06-3** 92

예제 07

곱셈 공식의 변형(2)

$a+b+c=2$, $ab+bc+ca=1$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $a^2+b^2+c^2$ (2) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

접근 방법

곱셈 공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 임을 알 수 있으므로 세 수의 합과 두 수끼리의 곱의 합이 주어진 경우 세 수의 제곱의 합은 곱셈 공식의 변형을 이용하여 구하도록 합니다.

Bible $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

상세 풀이

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=2^2-2\cdot1=2$

(2) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=2\cdot2-2\cdot1=2$ ($\because$ (1)에서 $a^2+b^2+c^2=2$)

정답 ➡ (1) 2 (2) 2

보충 설명

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

과 같이 변형할 수 있으므로 (2)에서

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

를 이용하여 구할 수도 있습니다.

풀이집 p.5

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

07-1 $a+b+c=3$, $ab+bc+ca=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $a^2+b^2+c^2$

(2) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

표현 바꾸기

07-2 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$일 때, abc의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

07-3 $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=6$일 때, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$의 값을 구하여라.

정답 **07-1** (1) 11 (2) 24 **07-2** $-\frac{1}{4}$ **07-3** 9