01 곡선과 축 사이의 넓이

(1) 곡선과 x축 사이의 넓이 : 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

(2) 곡선과 y축 사이의 넓이 : 함수 $x=g(y)$가 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_c^d |g(y)|\,dy$

◪ 다음 구간에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $[1,\ 4]$

2. $y=\sin x$ $[0,\ \pi]$

3. $y=\cos x$ $[0,\ \pi]$

4. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $[-1,\ 1]$

◪ 다음 곡선과 직선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

5. $y=\sqrt{x}$, $x=9$

6. $y=\ln x$, $x=e$

7. $y=\dfrac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$

8. $y=1-\dfrac{1}{x}$, $x=e^{-1}$, $x=e$

9. $y=e^{x-1}$, $x=1$, $x=4$

10. $y=xe^x$, $x=-1$, $x=1$

11. $y=\sqrt{x}-1$, $x=0$, $x=4$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

12. $y=\sqrt{x}-1$, $x=0$, $x=2$

13. $y=e^{x}$, $x=0$, $x=1$

14. $y=\ln x+1$, $x=2$, $x=e$

15. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x=2$, $x=4$

16. $y=e^{x}-3$, $x=0$, $x=1$

◪ **다음 곡선과 직선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.**

17. $y=\sqrt{x+4}$, $y=0$, $y=3$

18. $y=e^{x}$, $y=e$

19. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=1$, $y=4$

20. $y=\ln x$, $y=0$, $y=1$

21. $y=\sqrt{x}+1$, $y=3$, $y=6$

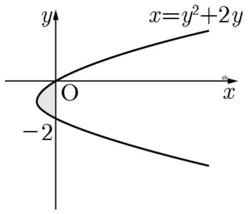
22. $y=e^{x}$, $y=1$, $y=e^{3}$

23. $y=x^{3}-1$, $y=-1$, $y=3$

24. $y=-\ln(x-2)$, $y=0$, $y=2$

◪ 다음 물음에 답하여라.

25. $x=y^2+2y$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $x=y^2+2y$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



26. 곡선 $\frac{1}{3}x=4-y^2$과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

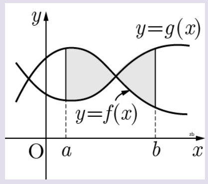
27. 곡선 $y=\frac{1-x}{x+a}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $2\ln 2-1$일 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

28. 곡선 $y=\frac{a-x}{x+1}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1일 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

02 두 곡선 사이의 넓이

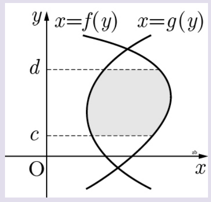
(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

⇨ $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



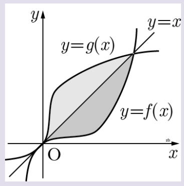
(2) 두 함수 $f(y)$, $g(y)$가 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이

⇨ $S=\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$



(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이

⇨ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배



◪ 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

29. $y=\frac{2}{x}$, $y=-x+3$

30. $y=\frac{e}{x}$, $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$

31. $y=\frac{1}{27}x^2$, $y=\sqrt{x}$

32. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$

33. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x$

34. $y=\sqrt{x-1}$, $y=x-1$

35. $y=2^x$, $y=2^{-x}$, $x=2$

36. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $y=x$

37. $y=2\sqrt{x}$, $x=2\sqrt{y}$

38. $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$, $x=4$, $x=9$

39. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$

40. $y=e^x$, $y=2^{-x}$, $x=1$

41. $y=2\ln x$, $y=-\ln x$, $y=1$

42. $y=|\ln x|$, $y=2$

◪ **다음 구간에서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.**

43. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi\right]$

44. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $[0,\ \pi]$

45. $y=\sin x$, $y=-\cos x$ $[0,\ \pi]$

46. $y=\sin x$, $y=\cos 2x$, $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right]$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

47. $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ $[0, \pi]$

48. $y=\sin x$, $y=\sin^2 x$ $[0,\ 2\pi]$

49. $y=\sin x$, $y=\cos 2x$ $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

◪ 다음 물음에 답하여라.

50. 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선과 이 곡선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

51. 곡선 $y=x\ln x$와 이 곡선 위의 점 $(e,\ e)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

52. 곡선 $y=\ln|2x-3|$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

53. 곡선 $y=\sqrt{x-3}$와 이 곡선 위의 점 $(6,\ \sqrt{3})$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

54. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(4,\ 2)$에서의 접선과 이 곡선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

55. 곡선 $y=e^x$과 이 곡선 위의 점 $(1, e)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

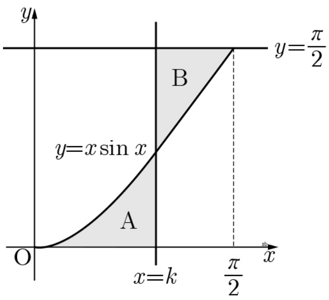
56. 곡선 $y=\sqrt{3x}$과 x축 및 직선 $x=3$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=\sqrt{ax}$가 이등분할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

57. 곡선 $y=x\sqrt{x}$와 y축, $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=kx$ $(k>2)$가 이등분할 때, 양수 k의 값을 구하여라.

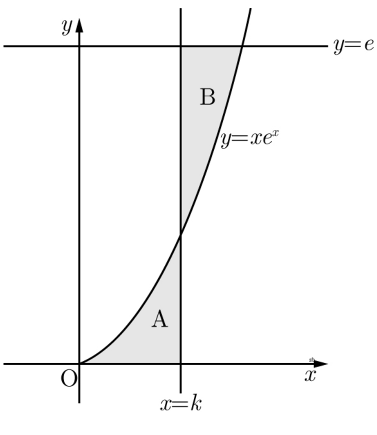
58. 곡선 $y=a\sqrt{x}$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{8}{3}$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

59. 함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=ax$ $(0<a<e)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값을 구하여라.

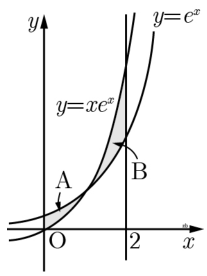
60. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 직선 $x=k$, x축으로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, $y=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값을 구하여라. (단, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$)



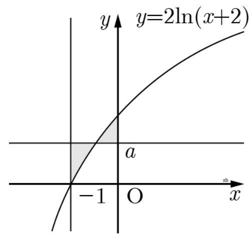
61. 곡선 $y=xe^x$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=e$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값을 구하여라. (단, $0\le k\le 1$)



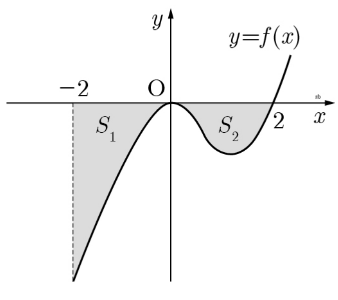
62. 다음 그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 y축으로 둘러싸인 부분 A의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분 B의 넓이를 b라 할 때, $b-a$의 값을 구하여라.



63. $y=2\ln(x+2)$와 두 직선 $x=-1$, $y=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=2\ln(x+2)$와 y축 및 직선 $y=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 실수 a의 값을 구하여라. (단, $0<a<2\ln 2$)



64. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1:S_2$의 값을 구하여라.



◪ 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

65. 함수 $f(x)=2x+3^x$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx+\int_1^{13} g(x)dx$의 값을 구하여라.

66. 함수 $f(x)=e^x+2$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx+\int_3^{e+2} g(x)dx$의 값을 구하여라.

67. 함수 $f(x)=e^x+1$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1} g(x)dx$의 값을 구하여라.

68. 함수 $f(x)=xe^x\ (0\le x\le 1)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^e g(x)dx$의 값을 구하여라.

69. 함수 $f(x)=\sqrt{3x-9}$에 대하여 $\int_0^3 g(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$의 값을 구하여라.

70. 함수 $f(x)=2x+3^x$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 g(x)dx$의 값을 구하여라.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

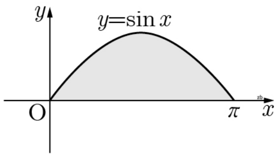
정답 및 해설

1) 2

⇨ $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$이므로

$$\int_1^4\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|dx=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[\ 2\sqrt{x}\ \right]_1^4=2$$

2) 2

⇨ 

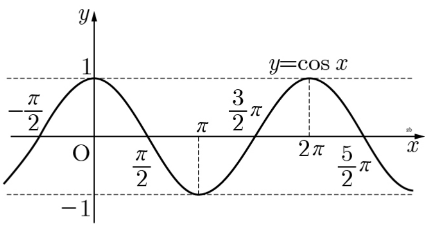
$0\le x\le\pi$일 때, $\sin x\ge 0$이므로

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=2$$

3) 2

⇨ $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $\cos x\ge 0$,

$\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$에서 $\cos x\le 0$이므로



$$\int_0^{\pi}|\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$

$$=\left[\ \sin x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\ -\sin x\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=1+1=2$$

4) $e-\dfrac{1}{e}$

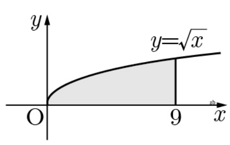
⇨ $e^x>0$, $e^{-x}>0$이므로

$$\int_{-1}^1\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|dx=\int_{-1}^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ e^x-e^{-x}\ \right]_{-1}^1$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

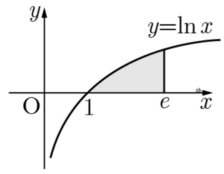
5) 18

⇨ 

다음 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^9\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=18$$

6) 1

⇨ 

다음 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^e\ln x dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e 1dx$$

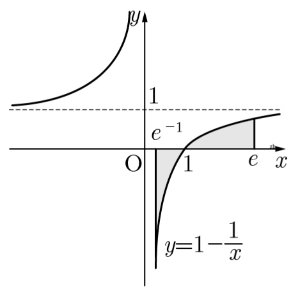
$$=e-[x]_1^e$$

$$=e-(e-1)=1$$

7) ln3

⇨ $\displaystyle\int_1^3\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^3=\ln 3$

8) $\dfrac{1}{e}+e-2$

⇨ 

$0<x<1$에서 $1-\dfrac{1}{x}<0$이고

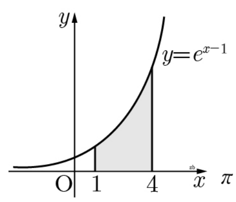
$x\ge 1$에서 $1-\dfrac{1}{x}\ge 0$이므로

$$S=\int_{e^{-1}}^1\left(\frac{1}{x}-1\right)dx+\int_1^e\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=[\ln x-x]_{e^{-1}}^1+[x-\ln x]_1^e$$

$$=\frac{1}{e}+e-2$$

9) e^3-1

⇨ 

$e^{x-1}>0$이므로

$$S=\int_1^4 e^{x-1}dx=\left[e^{x-1}\right]_1^4=e^3-1$$

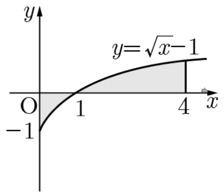
10) $2-\dfrac{2}{e}$

⇨ (도형의 넓이)$=\int_{-1}^{1}|xe^x|dx$

$=-\int_{-1}^{0}xe^x dx+\int_{0}^{1}xe^x dx$

$=[e^x-xe^x]_{-1}^{0}+[xe^x-e^x]_{0}^{1}=2-\dfrac{2}{e}$

11) 2

⇨ 

$0\le x<1$에서 $\sqrt{x}-1\le 0$이고

$x\ge 1$에서 $\sqrt{x}-1\ge 0$이므로

$S=\int_{0}^{4}|\sqrt{x}-1|dx$

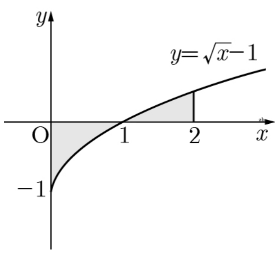
$=\int_{0}^{1}(1-\sqrt{x})dx+\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-1)dx$

$=\left[x-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{0}^{1}+\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right]_{1}^{4}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}=2$

12) $\dfrac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

⇨



$[0,\ 1]$에서 $\sqrt{x}-1\le 0$, $[1,\ 2]$에서 $\sqrt{x}-1\ge 0$이므로 구하는 넓이는

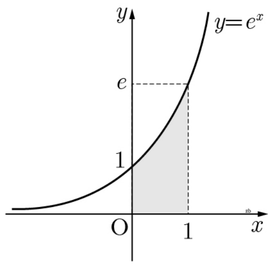
$\int_{0}^{2}|\sqrt{x}-1|dx$

$=\int_{0}^{1}(-\sqrt{x}+1)dx+\int_{1}^{2}(\sqrt{x}-1)dx$

$=\dfrac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

13) $e-1$

⇨ $\int_{0}^{1}|e^x|dx=\int_{0}^{1}e^x dx=\Big[\ e^x\ \Big]_{0}^{1}=e-1$



14) $e-2\ln 2$

⇨ $\int_{2}^{e}|\ln x+1|dx=\int_{2}^{e}(\ln x+1)dx$

$=\Big[\ x\ln x\ \Big]_{2}^{e}$

$=e\ln e-2\ln 2$

$=e-2\ln 2$

15) $2-2\ln 5+2\ln 3$

⇨ $y=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

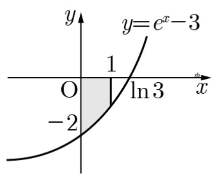
$2\le x\le 4$에서 $1-\dfrac{2}{x+1}>0$이므로

$\int_{2}^{4}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|dx=\int_{2}^{4}\left|1-\dfrac{2}{x+1}\right|dx$

$=\Big[\ x-2\ln|x+1|\ \Big]_{2}^{4}$

$=2-2\ln 5+2\ln 3$

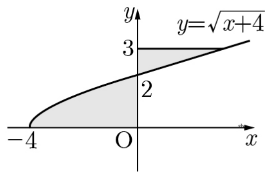
16) $-e+4$

⇨ 

다음 그림에서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1}\{-(e^x-3)\}dx=-[e^x-3x]_{0}^{1}=-e+4$

17) $\dfrac{23}{3}$

⇨ 

$y=\sqrt{x+4}$에서 $x=y^2-4$

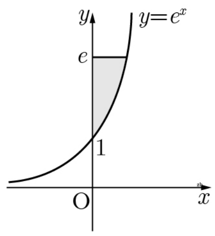
다음 그림에서 구하는 넓이는

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$$\int_0^2\{-(y^2-4)\}dy+\int_2^3(y^2-4)dy$$
$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_2^3$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

18) 1

⇨



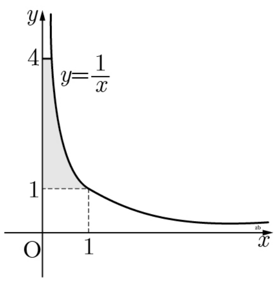
$y=e^x$에서 $x=\ln y$

다음 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^e \ln y\,dy$$
$$=[y\ln y]_1^e-\int_1^e 1\,dy$$
$$=e-[y]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

19) $2\ln 2$

⇨

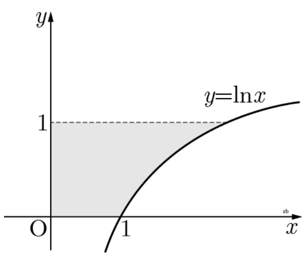


$y=\dfrac{1}{x}$에서 $x=\dfrac{1}{y}$이므로

$$\int_1^4\left|\frac{1}{y}\right|dy=\Big[\ \ln y\ \Big]_1^4=\ln 4=2\ln 2$$

20) $e-1$

⇨



$y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로

$$\int_0^1|e^y|dy=\Big[\ e^y\ \Big]_0^1=e-1$$

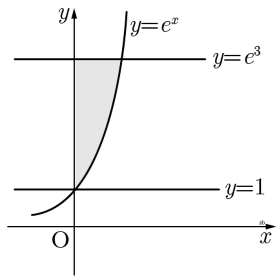
21) 39

⇨ $y=\sqrt{x}+1$에서 $x=(y-1)^2$이므로

$$\int_3^6|(y-1)^2|dy=\int_3^6(y^2-2y+1)dy$$
$$=\left[\ \frac{1}{3}y^3-y^2+y\ \right]_3^6$$
$$=39$$

22) $2e^3+1$

⇨

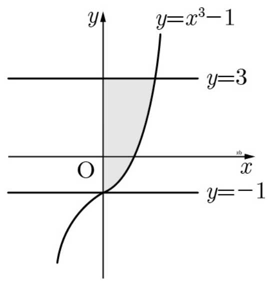


$y=e^x$에서 $x=\ln y$이므로

$$\int_1^{e^3}|\ln y|dy=\Big[\ y\ln y-y\ \Big]_1^{e^3}=2e^3+1$$

23) $3\sqrt[3]{4}$

⇨

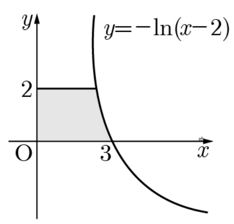


$y=x^3-1$에서 $x=\sqrt[3]{y+1}$이므로

$$\int_{-1}^3\left|\sqrt[3]{(y+1)}\right|dy=\left[\ \frac{3}{4}(y+1)^{\frac{4}{3}}\ \right]_{-1}^3=3\sqrt[3]{4}$$

24) $-\dfrac{1}{e^2}+5$

⇨



$y=-\ln(x-2)$에서

$x-2=e^{-y}\quad \therefore x=e^{-y}+2$

다음 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^2(e^{-y}+2)dy$$
$$=[-e^{-y}+2y]_0^2$$
$$=-\frac{1}{e^2}+5$$

25) $\frac{4}{3}$

⇨ 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{-(y^2+2y)\}dy=-\left[\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

26) 32

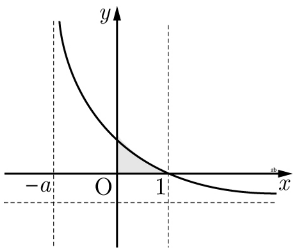
⇨ $\frac{1}{3}x=4-y^2$에서 $x=12-3y^2$

$x=0$에서 $y=\pm 2$

$$\int_{-2}^{2}|12-3y^2|dy=\int_{-2}^{2}(12-3y^2)dy$$
$$=2\int_{0}^{2}(12-3y^2)dy$$
$$=2\Big[\ 12y-y^3\ \Big]_0^2$$
$$=2\{(24-8)-0\}$$
$$=32$$

27) 1

⇨ 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.

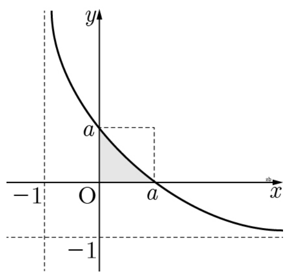


$$\int_0^1\frac{1-x}{x+a}dx=\int_0^1\frac{a+1}{x+a}-1\,dx$$
$$=[(a+1)\ln|x+a|-x]_0^1$$
$$=(a+1)\ln(a+1)-(a+1)\ln a-1$$

$$(a+1)\ln\frac{a+1}{a}-1=2\ln2-1$$

$$(a+1)\ln\frac{a+1}{a}=2\ln2 \qquad \therefore a=1$$

28) $e-1$

⇨ 

$$\int_0^a\frac{a-x}{x+1}dx=\int_0^a\left(-1+\frac{1+a}{x+1}\right)dx$$

$=[-x+(1+a)\ln|x+1|]_0^a=(-a+(1+a)\ln|a+1|)=1$

$(1+a)\ln|a+1|=a+1$

$\ln|a+1|=1$

$a+1=e$ 또는 $a+1=-e$

$a=e-1$ 또는 $a=-1-e$

$a>0$이므로 $a=e-1$

29) $\frac{3}{2}-2\ln2$

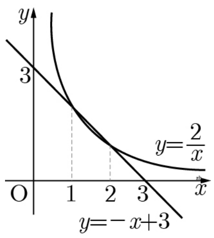
⇨ 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는

$\frac{2}{x}=-x+3$에서

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

다음 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_1^2\left\{(-x+3)-\frac{2}{x}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x-2\ln x\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}-2\ln2$$

30) $2e$

31) 9

⇨ 두 곡선 $y=\frac{1}{27}x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{27}x^2=\sqrt{x}$에서 $x^4=729x$

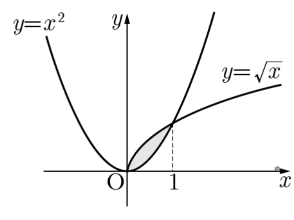
$x(x^3-729)=0$, $x(x-9)(x^2+9x+81)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=9$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^9\left(\sqrt{x}-\frac{1}{27}x^2\right)dx=\left[\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{81}x^3\ \right]_0^9=9$$

32) $\frac{1}{3}$

⇨ 

두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=\sqrt{x}$, $x^4-x=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

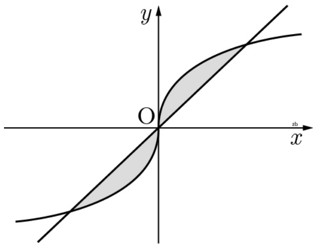
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

33) $\dfrac{1}{2}$

⇨ 곡선과 직선을 그래프로 나타내면



곡선과 직선의 교점을 구하면

$\sqrt[3]{x}=x$, $x=x^3$,

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1$

$$S=2\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x)dx=2\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

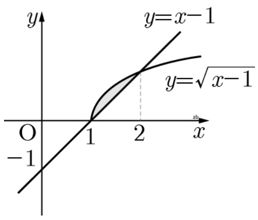
34) $\dfrac{1}{6}$

⇨ 곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x-1}=x-1$에서

$x-1=x^2-2x+1$, $x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

다음 그림에서 구하는 넓이는



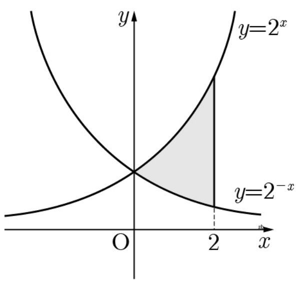
$$\int_1^2\{\sqrt{x-1}-(x-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{6}$$

35) $\dfrac{9}{4\ln 2}$

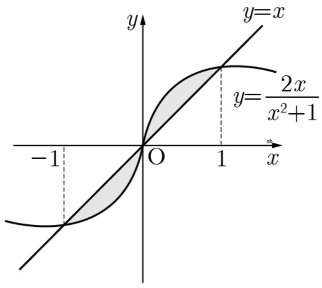
⇨



두 곡선의 교점의 x좌표는 $2^x=2^{-x}$에서 $x=0$

$$\int_0^2(2^x-2^{-x})dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^2=\frac{9}{4\ln 2}$$

36) $2\ln 2-1$



⇨

곡선 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\dfrac{2x}{x^2+1}=x$에서

$2x=x^3+x$, $x^3-x=0$, $x(x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

곡선과 직선은 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx=2\left[\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

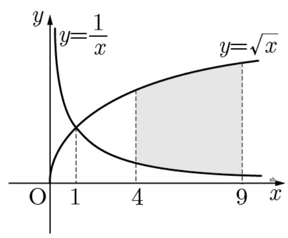
$$=2\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\ln 2-1$$

37) $\dfrac{16}{3}$

38) $\dfrac{38}{3}+2\ln\dfrac{2}{3}$

⇨



두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$의 교점의 x좌표를 구하면

$\sqrt{x}=\dfrac{1}{x}$, $x\sqrt{x}=1$

$\therefore x=1$

$4\le x\le 9$일 때 $\sqrt{x}>\dfrac{1}{x}$

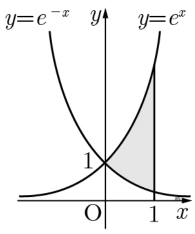
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_4^9\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\ln x\right]_4^9$$

$$=(18-2\ln 3)-\left(\frac{16}{3}-2\ln 2\right)$$

$$=\frac{38}{3}+2\ln\frac{2}{3}$$

39) $e+\dfrac{1}{e}-2$

⇨ 

두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표를 구하면

$e^x=e^{-x}$, $e^{2x}=1$ $\therefore x=0$

$0\le x\le 1$일 때, $e^{-x}\le e^x$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1|e^x-e^{-x}|dx$$

$$=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx$$

$$=[e^x+e^{-x}]_0^1=\left(e+\frac{1}{e}\right)-2=e+\frac{1}{e}-2$$

40) $e-1-\frac{1}{2\ln 2}$

41) $2\sqrt{e}+e^{-1}-3$

⇨

$y=1$일 때, $y=-\ln x$의 $x=\frac{1}{e}$이고, $y=2\ln x$의 $x=\sqrt{e}$이므로

구하고자 하는 도형의 넓이는

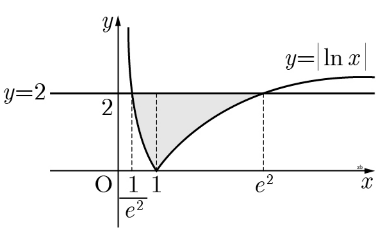
$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}(1+\ln x)dx+\int_1^{\sqrt{e}}(1-2\ln x)dx$$

$$=[x+x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}1dx+[x-2x\ln x]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}2dx$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)+(-1)+2(\sqrt{e}-1)=\frac{1}{e}+2\sqrt{e}-3$$

42) $e^2+\frac{1}{e^2}-2$

⇨ 이를 그림으로 나타내면



$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}2+\ln x dx+\int_1^{e^2}2-\ln x dx$$

$$=[2x+x\ln x-x]_{\frac{1}{e^2}}^{1}+[2x-x\ln x+x]_1^{e^2}$$

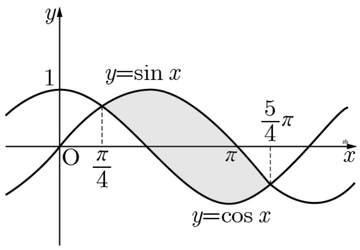
$$=[x+x\ln x]_{\frac{1}{e^2}}^{1}+[3x-x\ln x]_1^{e^2}$$

$$=1-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e^2}\right)+(3e^2-2e^2)-3$$

$$=\frac{1}{e^2}+e^2-2$$

43) $2\sqrt{2}$

⇨



구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\sin x=\cos x$에서 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5}{4}\pi$

$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 $\sin x\ge\cos x$이므로

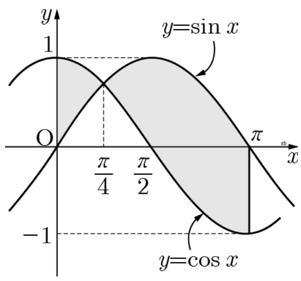
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$$

44) $2\sqrt{2}$

⇨



구간 $[0,\ \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서 $x=\frac{\pi}{4}$ $(0\le x\le\pi)$

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$=2\sqrt{2}$$

45) $2\sqrt{2}$

⇨

$y=\sin x$와 $y=-\cos x$의 교점은 $x=\frac{3}{4}\pi$이므로

구하고자 하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(-\cos x-\sin x)dx$$

$$=[-\cos x+\sin x]_0^{\frac{3}{4}\pi}+[\cos x-\sin x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

46) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

⇨ 구간 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right]$에서 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\cos 2x$의 교점의 x좌표는

$\sin x=\cos 2x$에서 $\sin x=1-2\sin^2 x$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

주어진 구간에서 $\sin x>0$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}|\sin x-\cos 2x|dx=\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

47) $\frac{5}{2}$

⇨

$\sin x=\sin 2x$, $\sin x=2\sin x\cos x$

$2\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$y=\sin x$와 $y=\sin 2x$의 교점을 구하면 $x=\frac{\pi}{3}$이므로

구하고자 하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

48) 4

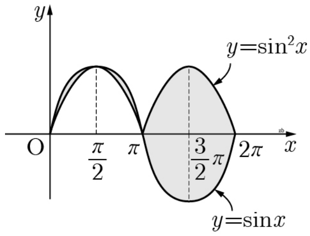
⇨ $\sin x=\sin^2 x$, $\sin^2 x-\sin x=0$,

$\sin x(\sin x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=1$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

그래프는 다음 그림과 같다.



$$S=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin^2 x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin^2 x-\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sin x-\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx+\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\sin x\right)dx$$

$$=\left[-\cos x-\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\left\{1-\frac{\pi}{2}-(-1)\right\}+\left\{(\pi+1)-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)\right\}$$

$$=2-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+2=4$$

49) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$

⇨

우선 $\sin x=\cos 2x$의 교점을 구하면

$\sin x=1-2\sin^2 x$, $2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0\qquad\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos 2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

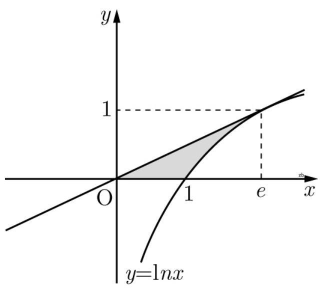
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$$

50) $\frac{e}{2}-1$

⇨

$y=\ln x$와 $(e,1)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{e}(x-e)+1=\frac{1}{e}x$



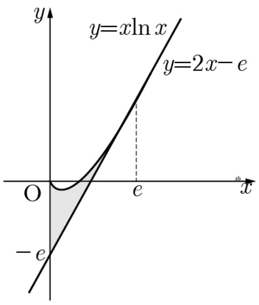
구하고자 하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 1\times e-\int_1^e \ln x dx=\frac{e}{2}-[x\ln x]_1^e+(e-1)=\frac{e}{2}-1$$

51) $\frac{1}{4}e^2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

⇨



$y=x\ln x$에서 $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

따라서 점 $(e,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=(\ln e+1)(x-e)$

$\therefore y=2x-e$

$$\int_0^e\{x\ln x-(2x-e)\}dx$$

$$=\int_0^e\{x\ln x-2x+e\}dx$$

$$=\left[\ \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{5}{4}x^2+ex\ \right]_0^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{4}e^2+e^2=\frac{1}{4}e^2$$

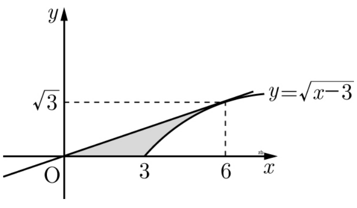
52) 1

53) $\sqrt{3}$

⇨

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$이므로

접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-6)+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x$



따라서 구하고자 하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{3}-\int_3^6\sqrt{x-3}\,dx=3\sqrt{3}-\left[\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_3^6$$

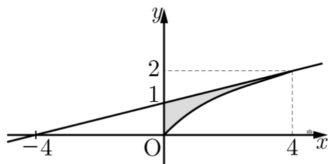
$$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

54) $\dfrac{2}{3}$

⇨ 점 $(4,\ 2)$에서 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{4}(x-4)+2=\dfrac{1}{4}x+1$

접선과 이 곡선,y축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림에 색칠된 부분과 같다.

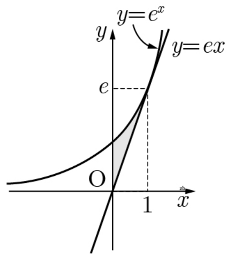


그림에서 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^4\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{1}{8}x^2+x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}$$

55) $\dfrac{e}{2}-1$

⇨



$f(x)=e^x$이라 놓으면 $f'(x)=e^x$

점 $(1,e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$

점 $(1,e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)\ \ \therefore y=ex$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

56) $\dfrac{3}{4}$

⇨ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^3\sqrt{3x}\,dx=\int_0^3\sqrt{ax}\,dx$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(3x)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}\right]_0^3=\left[\frac{2}{3}(ax)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{a}\right]_0^3$$

$3=2\sqrt{3a}$ 이므로 $a=\dfrac{3}{4}$

57) $\dfrac{10}{3}$

⇨ 둘러싸인 부분의 넓이를 $y=kx$가 이등분하고,

$y=kx$와 $y=8$의 교점은 $\left(\dfrac{8}{k},\ 8\right)$이므로

$$32-\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx=2\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8}{k}\right)$$

$$32-\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{64}{k}$$

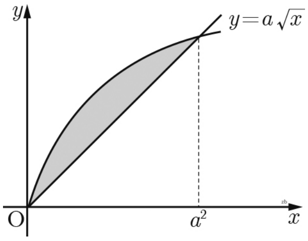
$$\frac{96}{5}=\frac{64}{k}\qquad\therefore\ k=\frac{10}{3}$$

58) 2

⇨ 곡선과 직선의 교점은

$a\sqrt{x}=x,\ x(x-a^2)=0\qquad\therefore\ x=0,\ a^2$

곡선과 직선으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



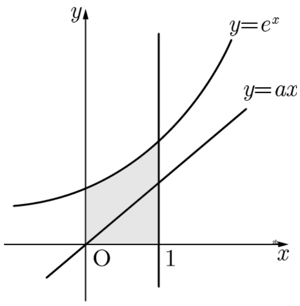
빗금 친 부분의 넓이는

$$\int_0^{a^2} a\sqrt{x}-x\,dx=\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{a^2}=\frac{a^4}{6}=\frac{8}{3}$$

$\therefore a=2$

59) $e-1$

⇨



함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 할 때,

$$S=\int_0^1 e^x dx=\Big[\ e^x\ \Big]_0^1=e-1$$

이 영역의 넓이가 직선 $y=ax$에 의하여 이등분되므로

$$\int_0^1 ax\,dx=\frac{1}{2}S$$

$$\left[\ \frac{1}{2}ax^2\ \right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

$$\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(e-1)$$

$\therefore a=e-1$

60) $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$

⇨

$$S_A=\int_0^k x\sin x dx=\Big[\ -x\cos x\ \Big]_0^k-\int_0^k(-\cos x)dx$$

$$=-k\cos k+\int_0^k\cos x dx$$

$$=-k\cos k+\Big[\ \sin x\ \Big]_0^k$$

$$=-k\cos k+\sin k$$

$$S_B=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\sin x\right)dx$$

$$=\left[\ \frac{\pi}{2}x\ \right]_k^{\frac{\pi}{2}}-\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k-\left\{\Big[\ -x\cos x\ \Big]_k^{\frac{\pi}{2}}-\int_k^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx\right\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k-k\cos k-\Big[\ \sin x\ \Big]_k^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k-k\cos k-1+\sin k$$

이때, $S_A=S_B$이므로

$$-k\cos k+\sin k=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k-k\cos k-1+\sin k,$$

$$\frac{\pi}{2}k=\frac{\pi^2}{4}-1\quad \therefore k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$$

61) $1-\frac{1}{e}$

⇨ (A의 넓이)$=\int_0^k xe^x dx$

(B의 넓이)$=(1-k)e-\int_k^1 xe^x dx$

(A의 넓이)=(B의 넓이)이므로

$$\int_0^k xe^x dx=(1-k)e-\int_k^1 xe^x dx$$

$$\int_0^k xe^x dx+\int_k^1 xe^x dx=(1-k)e$$

$$\int_0^1 xe^x dx=(1-k)e$$

$$1=e-ke\qquad \therefore\ k=1-\frac{1}{e}$$

62) 2

⇨ $xe^x=e^x$인 $x=1$이므로

$$a=\int_0^1 e^x-xe^x\ dx=2\left[e^x\right]_0^1-\left[xe^x\right]_0^1=e-2$$

$$b=\int_1^2 xe^x-e^x dx=\left[xe^x\right]_1^2-2\left[e^x\right]_1^2=e$$

$\therefore\ b-a=2$

63) $4\ln 2-2$

64) $7:1$

⇨ $x=0$에서 중근을 $x=2$에서 근을 가지므로

$f(x)=ax^2(x-2)$

$$S_1=-\int_{-2}^0 f(x)dx=-\int_{-2}^0 ax^2(x-2)dx=-\int_{-2}^0(ax^3-2ax^2)dx$$

$$=-\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3\right]_{-2}^0=\left(4a+\frac{16}{3}a\right)=\frac{28}{3}a$$

$$S_2=-\int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2 ax^2(x-2)dx=-\int_0^2(ax^3-2ax^2)dx$$

$$=-\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3\right]_0^2=-\left(4a-\frac{16}{3}a\right)=\frac{4}{3}a$$

$$\therefore\ S_1:S_2=\frac{28}{3}a:\frac{4}{3}a=7:1$$

65) 26

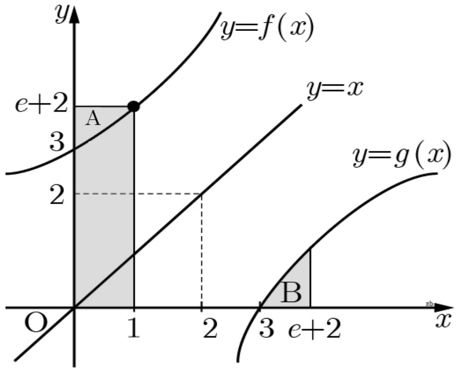
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

⇨ $f(0)=1$이므로 $g(1)=0$

$f(2)=13$이므로 $g(13)=2$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx+\int_1^{13} g(x)dx=2\times 13=26$

66) $e+2$

⇨


역함수는 $y=x$에 대해 대칭이니

$\int_3^{e+2} g(x)dx\ =A$이다.

따라서 구해야 하는 정적분의 값은

직사각형 넓이 $e+2$와 같다.

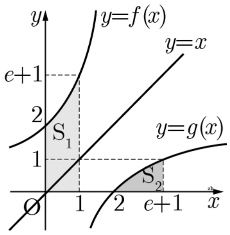
67) $e+1$

⇨ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고 $\int_0^1 f(x)dx=S_1$, $\int_2^{e+1} g(x)dx=S_2$라 하자.

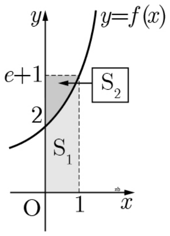
이때, S_2에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 [그림 2]와 같으므로

$\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1} g(x)dx=S_1+S_2=1\times(e+1)=e+1$

[그림1]

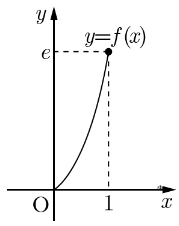


[그림2]



68) e

⇨ 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^e g(x)$는 가로가 1이고 세로가 e인 직사각형의 넓이와 같다.

그러므로 구하고자 하는 값은 e이다.

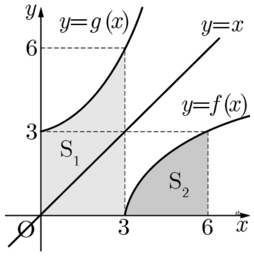
69) 18

⇨ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고 $\int_0^3 g(x)dx=S_1$, $\int_3^6 f(x)dx=S_2$라 하자.

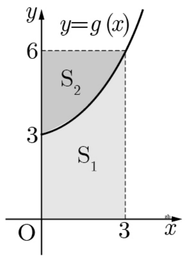
S_2에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 [그림 2]와 같다.

$\therefore \int_0^3 g(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=S_1+S_2=3\times 6=18$

[그림 1]

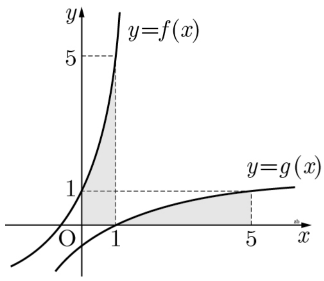


[그림 2]



70) 5

⇨ $f(0)=1$, $f(1)=5$이므로 역함수의 그래프로 나타내보면 다음 그림과 같다.



$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 g(x)dx=1\times 5=5$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110