01 정적분으로 정의된 함수

1. 정적분으로 정의된 함수

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$(단, a는 상수)

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a)-f(x)$

2. 정적분으로 정의된 함수의 포함한 등식의 해결

(1) $f(x)=g(x)+\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ 의 꼴

⇨ $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = k$ (k는 상수) 로 놓고 계산한다.

(2) $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = g(x)$ (a는 상수) 의 꼴인 경우

⇨ 양변을 x에 대해 미분한다. 이때 $g(x)$가 미정계수를 포함하고 있으면 양변에 $x=a$를 대입한 후 $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$임을 이용한다.

◪ 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라.

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt = 2\sin x - 2$

2. $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = e^x - 1$

3. $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = 3^x + \ln x - 3$ (단, $x>0$)

4. $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = e^{2x} - x - 1$

5. $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = e^{2x} + e^x - 2$

6. $\displaystyle\int_2^x f(t)dt = \ln x + 4x - \ln 2 - 8$ $(x>0)$

◪ 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라.

7. $f(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt$

8. $f(x) = e^x + 2x + \displaystyle\int_0^2 f(t)dt$

9. $f(x) = \sin x - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$

10. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1} - \displaystyle\int_0^2 f(t)dt$

◪ 다음 물음에 답하여라.

11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)dt=\sin 2x+k\sin x$ (단, k는 상수)일 때 함수 $f(x)$를 구하여라.

12. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $xf(x)=x\ln x+\int_{1}^{x} f(t)dt$를 만족할 때, 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, $x>0$)

13. 함수 $f(x)=2\cos x-\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\sin x dx$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하여라.

14. 함수 $f(x)=\cos x+3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라.

15. 함수 $f(x)=x\cos x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

16. 함수 $f(x)=\sin x-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cos t dt$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

17. 함수 $f(x)=9x^2+2^{2x}-2\int_{0}^{1} f(t)dt$일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

18. 함수 $f(x)=x-\int_{0}^{1} f(x)e^x dx$일 때, $f\left(\frac{7}{e}\right)$의 값을 구하여라.

19. 함수 $f(x)$가 $f(x)=e^x+\int_{0}^{1} e^{-t}f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

20. 함수 $e^x+kx-5=\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(1)+k$의 값을 구하여라.

21. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{e}^{x} f(t)dt=x\ln x+x-k$가 성립할 때, $f(k)$의 값을 구하여라. (단, k는 상수)

22. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=1+\ln x-\frac{1}{x^2}\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(t)dt$를 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{e}\right)$의 값을 구하여라.

23. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x+\int_{1}^{e}\frac{2f(t)}{t}dt$를 만족할 때, $f(e)$의 값을 구하여라.

24. 임의의 실수 x에 대하여 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=2\ln x+\int_{1}^{e}f(t)dt\,(x>0)$를 만족할 때, $f(e^3)$의 값을 구하여라.

25. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{3x}f(t)dt=3x^2+\cos 3\pi x$가 성립할 때, $\int_{1}^{2}f(x)dx$의 값을 구하여라.

26. 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=e^x-\int_{0}^{2}tf(t)dt$를 만족시킬 때, $\int_{0}^{2}3xf(x)dx$의 값을 구하여라.

27. 미분가능한 함수 $f(x)$가 등식 $f(x)=\sin x-\int_{0}^{x}f(t)e^{x-t}dt$를 만족할 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

28. 연속인 함수 $f(x)$가 $f(x)=\ln x-\int_{1}^{e}\frac{f(t)}{x}dt$를 만족할 때, $f(e)$의 값을 구하여라. (단, $x>0$)

29. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt=e^{2x}-2x-1$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

30. $\int_{0}^{x}f(t)dt=\frac{4}{3}x^3+3x^2-2x\int_{0}^{1}tf(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라.

31. $f(x)=\frac{3^{2x}-1}{3^x+1}-\int_{0}^{1}f(t)dt$를 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 값을 구하여라.

32. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2+2x+2\int_{0}^{1}f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

33. 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=\cos x+3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$를 만족시킬 때, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx$의 값을 구하여라.

34. $0<x<\pi$일 때, 함수 $f(x)=\int_0^x (1+\sin t)\cos t dt$가 $x=a$에서 극댓값을 가진다. a의 값을 구하여라.

35. 함수 $f(x)=\int_0^{x-1}(t-x)e^t dt$의 최댓값을 구하여라.

36. $x>0$일 때, 함수 $f(x)=\int_x^{x+1}\left(t+1+\frac{2}{t}\right)dt$의 최솟값을 구하여라.

37. 함수 $f(x)=\int_0^x (2\sin t-2\cos 2t)dt \ (0\le x\le 2\pi)$의 극값을 구하여라.

38. $x>0$일 때, 함수 $f(x)=\int_1^{2x}(1-\ln t)dt$는 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

39. 함수 $f(x)=\int_x^{x+1}\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$의 최솟값을 구하여라. (단, $x>0$)

02 정적분으로 정의된 함수의 극한

(1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

◪ 다음 극한값을 구하여라.

40. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (e^t-1)dt$

41. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (e^t+3)dt$

42. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (t+\cos t)dt$

43. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x} (1-\tan t)dt$

44. $\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\pi-x}\int_\pi^x (1+\cos^4 t)dt$

45. $\lim_{x\to \pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x (\sin t+t)dt$

46. $\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}t^2\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt$

47. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}(2^t+\ln t)dt$

48. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt$

49. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}(t^3+2t^2+t)dt$

50. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1+h}^{1+3h}x\cos\pi x dx$

51. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2}^{2+2h}(x^3-2x^2-3x+4)dx$

◪ **다음 물음에 답하여라.**

52. $f(x)=x^3-3x^2+3x+a$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)dt=10$이다. 이 때, 상수 a의 값을 구하여라.

53. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(\sin\pi t+2t+1)dt$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$의 값을 구하여라.

54. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$일 때, $\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_{3}^{x}f(t)dt$의 값을 구하여라.

55. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)dt$의 값을 구하여라.

56. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}\frac{3t}{t^2+1}dt$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)dt$의 값을 구하여라.

57. 모든 실수에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{x} f(t)dt = e^{2x} - x - 1$이 성립할 때, $\lim_{h \to 0+} \frac{f(h)-1}{h}$의 값을 구하여라.

58. 함수 $f(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)} dt$일 때, $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_{1}^{x} f(t)dt$의 값을 구하여라.

59. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_{0}^{x} t \sin(x-t) dt$인 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{h}$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) $f(x)=2\cos x$
⇨ 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2\cos x$

2) $f(x)=e^{x}$
⇨ 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=e^{x}$

3) $f(x)=3^{x}\ln 3+\dfrac{1}{x}$
⇨ $\displaystyle\int_{1}^{x} f(t)dt=3^{x}+\ln x-3$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=3^{x}\ln 3+\dfrac{1}{x}$

4) $f(x)=2e^{2x}-1$
⇨ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2e^{2x}-1$

5) $f(x)=2e^{2x}+e^{x}$
⇨ $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)dt=e^{2x}+e^{x}-2 \quad \cdots ㉠$
㉠에서 적분구간에 변수 x가 있으므로 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=(e^{2x}+e^{x}-2)'=2e^{2x}+e^{x}$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x}+4$
⇨ 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=\dfrac{1}{x}+4$

7) $f(x)=\sin x+\dfrac{2}{1-\pi}$
⇨ $\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓으면
$f(x)=\sin x+k$이므로
$k=\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\sin x+k)dt=[-\cos t+kt]_{0}^{\pi}$
$=2+k\pi$
$\therefore k=\dfrac{2}{1-\pi}$
$\therefore f(x)=\sin x+\dfrac{2}{1-\pi}$

8) $f(x)=e^{x}+2x-e^{2}-3$
⇨ $\displaystyle\int_{0}^{2} f(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓으면
$f(x)=e^{x}+2x+k$
$k=\displaystyle\int_{0}^{2}(e^{t}+2t+k)dt=\left[e^{t}+t^{2}+kt\right]_{0}^{2}=e^{2}+3+2k$
따라서 $k=-e^{2}-3$이므로 $f(x)=e^{x}+2x-e^{2}-3$

9) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{4}$
⇨ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt=k \cdots ㉠$ (k는 상수)라 놓자.
$f(x)=\sin x-k$이고 이를 ㉠에 대입하면
$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-k)\cos t dt=k$
이 때 $\sin t-k=\theta$로 놓으면 $\dfrac{d\theta}{dt}=\cos t$
$t=0$일 때, $\theta=-k$, $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $\theta=1-k$이므로
$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-k)\cos t dt=\int_{-k}^{1-k}\theta d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^{2}\right]_{-k}^{1-k}$
$=\dfrac{1}{2}(1-k)^{2}-\dfrac{1}{2}(-k)^{2}=\dfrac{1}{2}-k$
즉 $\dfrac{1}{2}-k=k$이므로 $2k=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{4}$
$\therefore f(x)=\sin x-\dfrac{1}{4}$

10) $f(x)=\dfrac{x}{2x^{2}+1}-\dfrac{1}{6}\ln 3$
⇨ $\displaystyle\int_{0}^{2} f(t)\,dt=k$라 하면
$f(x)=\dfrac{x}{2x^{2}+1}-k$가 되니
$\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\frac{t}{2t^{2}+1}-k\right)dt=k$
$\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{t}{2t^{2}+1}dt-\int_{0}^{2}kdt=k$
$2t^{2}+1=x$라 하면 $4tdt=dx$이므로
$\displaystyle\int_{1}^{9}\frac{1}{4x}dx-\int_{0}^{2}kdx=k$, $\left[\frac{1}{4}\ln x\right]_{1}^{9}-[kx]_{0}^{2}=k$
$\dfrac{1}{2}\ln 3-2k=k$, $\dfrac{1}{2}\ln 3=3k$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{6}\ln 3$
$f(x)=\dfrac{x}{2x^{2}+1}-\dfrac{1}{6}\ln 3$

11) $f(x)=2\cos 2x-\sqrt{2}\cos x$
⇨ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)dt=\sin 2x+k\sin x \cdots ㉠$
㉠에 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면
$0=\sin\dfrac{\pi}{2}+k\sin\dfrac{\pi}{4}$, $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k=0$ $\therefore k=-\sqrt{2}$
k의 값을 ㉠에 대입하면
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)dt=\sin 2x-\sqrt{2}\sin x$
이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\therefore f(x)=2\cos 2x-\sqrt{2}\cos x$

12) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^{2}+\ln x$

⇨ $xf(x)=x\ln x+\int_{1}^{x}f(t)dt\cdots$ ㉠

㉠에서 적분구간에 변수 x가 있으므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=\ln x+1+f(x)$

$\therefore xf'(x)=\ln x+1$

$x>0$이므로 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}$

$f(x)=\int\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)dx=\int\dfrac{\ln x}{x}dx+\ln x+C$

이때, $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}\quad\therefore\dfrac{1}{x}dx=dt$

즉, $\int\dfrac{\ln x}{x}dx=\int tdt=\dfrac{1}{2}t^2+C=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$

13) $-\dfrac{1}{2}$

⇨ $k=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\sin xdx$라 하면 $f(x)=2\cos x-k$

$k=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\sin xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-k)\sin xdx$

$k=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-k\sin x)dx$

$k=\left[-\dfrac{1}{2}\cos 2x+k\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$k=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{2}-k\quad\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2\cos x-\dfrac{1}{2}$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

14) $-\dfrac{1}{4}$

⇨ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=a$라 하면

$a=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+3a)\sin x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x+3a\sin x\right)dx$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$

즉, $f(x)=\cos x-\dfrac{3}{4}$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}$ 이 된다.

15) $-\pi-1$

⇨

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=c$라 하면

$f(x)=x\cos x+c$

$c=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(t\cos t+c)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cdt$

$=[t\sin t]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx+\dfrac{\pi}{2}c$

$=\dfrac{\pi}{2}-1+\dfrac{\pi}{2}c$

$\therefore\ c=-1$

따라서 $f(x)=x\cos x-1$이므로 $f(\pi)=-\pi-1$이다.

16) $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}$

⇨

$f(x)=\sin x-k$라 하면

$f(x)\cos x=\sin x\cos x-k\cos x$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(t)\cos tdt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x\cos x-k\cos x)dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\sin 2xdx-k[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\left[-\dfrac{1}{4}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

즉 $k=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$이므로

$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}k=\dfrac{1}{4}\qquad\therefore\ k=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ f(\pi)=-\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}$

17) $-\dfrac{1}{\ln 2}-1$

⇨ $\int_{0}^{1}f(t)dt=c$라 하면

$f(x)=9x^2+2^{2x}-2c$이고,

$\int_{0}^{1}(9x^2+2^{2x}-2c)dx=\left[3x^3+4^x\dfrac{1}{\ln 4}-2cx\right]_{0}^{1}$

$=3+\dfrac{4}{\ln 4}-2c-\dfrac{1}{\ln 4}=c$이므로

$3c=3+\dfrac{3}{\ln 4}\quad\therefore c=\dfrac{1}{\ln 4}+1$이다.

따라서 $f(x)=9x^2+4^x-2\left(1+\dfrac{1}{\ln 4}\right)$이고

$f(0)=1-2-\dfrac{2}{\ln 4}=-1-\dfrac{1}{\ln 2}$이다.

18) $\dfrac{6}{e}$

⇨ $\int_{0}^{1}f(x)e^xdx=t$(t:상수)라 하면 $f(x)=x-t$

$t=\int_{0}^{1}(x-t)e^xdx=[(x-t-1)e^x]_{0}^{1}=-te+t+1$

$\therefore t=\dfrac{1}{e}$

$\therefore\ f\left(\frac{7}{e}\right)=\frac{7}{e}-\frac{1}{e}=\frac{6}{e}$

19) $2e$

⇨ $\int_0^1 e^{-t}f(t)dt=k$라 하면 $f(x)=e^x+k$

$k=\int_0^1 e^{-t}(e^t+k)dt=\int_0^1(1+ke^{-t})dt$

$=[t-ke^{-t}]_0^1=1-ke^{-1}+k$

$k=1-ke^{-1}+k,\ ke^{-1}=1\qquad \therefore k=e$

$\therefore f(1)=e+e=2e$

20) 5

⇨ $x=1$을 대입하면 $e+k-5=0$이므로 $k=5-e$

$e^x+(5-e)x-5=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$

양변을 미분하면

$e^x+(5-e)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$f(x)=e^x\qquad \therefore f(1)=e$

$\therefore\ k+f(1)=5$

21) $\ln 2+3$

⇨

$\int_e^x f(t)dt=x\ln x+x-k$의 양변을 x로 미분하면

$f(x)=\ln x+1+1=\ln x+2$

$\int_e^x(\ln t+2)dt=[t\ln t+2t]_e^x-\int_e^x 1dt=x\ln x+x-2e$

$\therefore\ k=2e$

$\therefore\ f(k)=f(2e)=\ln 2e+2=\ln 2+3$

22) -1

⇨ $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(t)dt=c$ (c는 상수)라 하면

$f(x)=1+\ln x-\frac{c}{x^2}$

$c=\int_{\frac{1}{e}}^1\left(1+\ln t-\frac{c}{t^2}\right)dt=\left[x+x\ln x-x+\frac{c}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^1$

$=c-\left(-\frac{1}{e}+ec\right)$

$c=c+\frac{1}{e}-ec,\ ec=\frac{1}{e}\qquad \therefore c=\frac{1}{e^2}$

$\therefore f\left(\frac{1}{e}\right)=1-1-\frac{1}{e^2\cdot\frac{1}{e^2}}=-1$

23) $2-e$

⇨ $\int_1^e\frac{2f(t)}{t}dt=k$라 하면

$k=\int_1^e\frac{2t+2k}{t}dt=\int_1^e 2+\frac{2k}{t}dt$

$k=[2t+2k\ln t]_1^e,\ k=2e-2+2k$

$\therefore k=2-2e$

$\therefore f(x)=x+2-2e,\ f(e)=2-e$

24) $\frac{14-6e}{2-e}$

⇨ $\int_1^e f(t)dt=a$라고 하자.

$f(x)=2\ln x+a$

$\int_1^e(2\ln x+a)dx=a$

$[2x\ln x-2x+ax]_1^e=a$

$2e-2e+ae+2-a=a$

$(e-2)a=-2$

$\therefore\ a=\frac{2}{2-e}$

$\therefore\ f(e^3)=6+a=6-\frac{2}{e-2}$

$=\frac{6e-12-2}{e-2}=\frac{6e-14}{e-2}=\frac{14-6e}{2-e}$

25) 3

⇨ $\int_0^{3x}f(t)dt=3x^2+\cos 3\pi x$의 양변을 미분하면

$3f(3x)=6x-3\pi\sin 3\pi x$

이때 $3x=t$라 하면 $f(t)=\frac{2}{3}t-\pi\sin\pi t$

$\therefore\ \int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{2}{3}x-\pi\sin\pi x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^2+\cos\pi x\right]_1^2=3$

26) $1+e^2$

⇨ $\int_0^2 tf(t)dt=c$라하면 $f(x)=e^x-c$이고,

$c=\int_0^2 tf(t)dt=\int_0^2(xe^x-cx)dx$

$=[xe^x]_0^2-\int_0^2 e^x dx-\left[\frac{1}{2}cx^2\right]_0^2=2e^2-e^2+1-2c$

$3c=e^2+1$

$\therefore\ \int_0^2 3xf(x)dx=3c=e^2+1$

27) -2

⇨ $k(x)=\int_0^x f(t)e^{-t}dt$라 하면

$k'(x)=f(x)e^{-x}$이고,

$f(x)=\sin x-e^x k(x)$이다.

$k(x)=\int_0^x(\sin t-k(t)e^t)e^{-t}dt=\int_0^x\{e^{-t}\sin t-k(t)\}dt$

$k'(x)=e^{-x}\sin x-k(x)$

$f(x)e^{-x}=e^{-x}\sin x-k(x)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\therefore\ k(x)=e^{-x}(\sin x-f(x))$
이 식을 x에 관하여 미분하면
$k'(x)=-e^{-x}(\sin x-f(x))+e^{-x}(\cos x-f'(x))$
$f(x)e^{-x}=-e^{-x}(\sin x-f(x))+e^{-x}(\cos x-f'(x))$
이 식을 정리하면
$f'(x)=\cos x-\sin x$
$f(x)=\sin x+\cos x+C$이고, $f(0)=0$이므로 $C=-1$
$\therefore\ f(x)=\sin x+\cos x-1$
$\therefore\ f(\pi)=-2$

28) $1-\frac{1}{2e}$

⇨ $\int_1^e f(t)dt=C$라 하면 $f(x)=\ln x-\frac{C}{x}$
$C=\int_1^e\left(\ln x-\frac{C}{x}\right)dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e 1dx-C[\ln x]_1^e$
$=e-(e-1)-C$
$C=1-C,\ 2C=1 \qquad \therefore\ C=\frac{1}{2}$
따라서 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2x}$이므로 $f(e)=1-\frac{1}{2e}$

29) $4e^4$

⇨
$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^{2x}-2x-1$
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2e^{2x}-2$
$\therefore\ \int_0^x f(t)dt=2e^{2x}-2$
따라서 $f(x)=4e^{2x}$이므로 $f(2)=4e^4$이다.

30) 7

⇨ $\int_0^x f(t)dt=\frac{4}{3}x^3+3x^2-2x\int_0^1 tf(t)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=4x^2+6x-2\int_0^1 tf(t)dt$
$\int_0^1 tf(t)dt=a$라 하면
$f(x)=4x^2+6x-2a$
$a=\int_0^1 tf(t)dt$
$=\int_0^1 t(4t^2+6t-2a)dt=\int_0^1(4t^3+6t^2-2at)dt$
$=\left[t^4+2t^3-at^2\right]_0^1=1+2-a=-a+3$
즉 $a=-a+3$이므로 $a=\frac{3}{2}$
따라서 $f(x)=4x^2+6x-3$이므로
$f(1)=4+6-3=7$

31) $\frac{-2+\ln 3}{2\ln 3}$

32) $\frac{1}{3}$

⇨ 정적분의 결과 값은 상수이므로
$\int_0^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)라고 하자.
$f(x)=x^2+2x+2a$이고
$\int_0^1 f(t)dt=a$에서 $\int_0^1(t^2+2t+2a)dt=a$
$\left[\frac{t^3}{3}+t^2+2at\right]_0^1=a$
$\frac{1}{3}+1+2a=a$
$\frac{4}{3}=-a,\ a=-\frac{4}{3}$
따라서 $f(x)=x^2+2x-\frac{8}{3}$이고
$f(1)=1+2-\frac{8}{3}=3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$이다.

33) $-\frac{1}{4}$

⇨ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt=a$라고 하자.
$f(x)=\cos x+3a$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+3a)\sin x dx=a$
$\cos x+3a=t$라 하면 $-\sin x dx=dt$
$x=0$일 때 $t=1+3a$이고, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=3a$이므로
$a=\int_{1+3a}^{3a}-tdt$
$a=\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_{1+3a}^{3a}$
$a=-\frac{1}{2}\{9a^2-(1+3a)^2\}$
$-2a=-(1+6a)$
$\therefore\ a=-\frac{1}{4}$

34) $\frac{\pi}{2}$

⇨ $f'(x)=(1+\sin x)\cos x$
$f'(x)=0$에서 $\sin x=-1$ 또는 $\cos x=0$
$0<x<\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 가지므로 $a=\frac{\pi}{2}$

35) $1-\ln 2$

⇨ 함수를 적분하면

$$f(x)=\int_0^{x-1}(t-x)e^t dt$$
$$=\int_0^{x-1}te^t dt-\int_0^{x-1}xe^t dt$$
$$=e^{x-1}(x-1)-\int_0^{x-1}e^t dt-\int_0^{x-1}xe^t dt$$
$$=e^{x-1}(x-1)-e^{x-1}+1-xe^{x-1}+x=x-2e^{x-1}+1$$

$f'(x)=1-2e^{x-1}$이고, $f'(x)=0$인 $x=1-\ln 2$이고,
이 때, $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
$x=1-\ln 2$에서 최댓값을 가진다.
$\therefore\ f(1-\ln 2)=1-\ln 2-1+1=1-\ln 2$

36) $\frac{5}{2}+2\ln 2$

⇨ $g(t)=t+1+\frac{2}{t}$, $\int g(t)\,dt=G(t)+C$(C는 적분상수)라 하면,

$$f(x)=\int_x^{x+1}g(t)\,dt=G(x+1)-G(x)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=G'(x+1)-G'(x)=g(x+1)-g(x)$$
$$=\left(x+1+1+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x+1+\frac{2}{x}\right)$$
$$=1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because x>0)$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(1)=\int_1^2\left(t+1+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+t+2\ln t\right]_1^2$$
$$=\frac{5}{2}+2\ln 2$$

37) $2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $2+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=2\sin x-2\cos 2x=0$

$2\sin x-2(1-2\sin^2 x)=0$
$2\sin x-2+4\sin^2 x=0$
$\sin x=t$로 치환하자.
$4t^2+2t-2=0$
$2t^2+t-1=0$
$(2t-1)(t+1)=0$
$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$
$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

따라서 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, 즉 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극값을 가진다.

$f(x)=\left[-2\cos t-\sin 2t\right]_0^x=-2\cos x-\sin 2x+2$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2=2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2=2+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

38) $\frac{3}{2}e-2$

⇨ $f(x)=\int_1^{2x}(1-\ln t)dt$

$$=\left[t-t\ln t+t\right]_1^{2x}=4x-2x\ln 2x-2$$

$f'(x)=4-2\ln 2x-2=2(1-\ln 2x)$

$f'(x)=0$인 $a=\frac{e}{2}$이고

이때 극댓값 $b=f\left(\frac{e}{2}\right)=e-2$

$\therefore\ a+b=\frac{e}{2}+e-2=\frac{3}{2}e-2$

39) $\frac{3}{2}+2\ln 2$

40) 0

⇨ $F'(t)=e^t-1$이라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(e^t-1)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=e^0-1=0$$

41) 4

⇨ $f(t)=e^t+3$라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0)$$

$\therefore\ f(0)=1+3=4$

42) 1

⇨ $F'(t)=t+\cos t$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(t+\cos t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x F'(t)dt$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=1$

43) 3

⇨ $f(t)=1-\tan t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x}(1-\tan t)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x}f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(2x)-F(-x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(2x)-F(0)-\{F(-x)-F(0)\}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(2x)-F(0)}{2x}\cdot 2+\lim_{x\to 0}\frac{F(-x)-F(0)}{-x}$

$=2F'(0)+F'(0)=3F'(0)=3f(0)=3$

44) -2

⇨ $f(t)=1+\cos^4 t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi-x}\int_{\pi}^{x}(1+\cos^4 t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}f(t)dt$

$=-\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=-F'(\pi)=-f(\pi)=-2$

45) π

⇨ $F'(t)=\sin t+t$라 하면

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}(\sin t+t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}F'(t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$

$=F'(\pi)=\sin\pi+\pi=\pi$

46) $\frac{\pi^2}{2}$

⇨ $f(x)=x^2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}[F(t)]_{\pi}^{x}=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=F'(\pi)$

이때, $F'(\pi)=f(\pi)$이므로

$F'(\pi)=f(\pi)=\pi^2\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi^2}{2}$

47) $\frac{2}{3}$

⇨ $f(t)=2^t+\ln t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}(2^t+\ln t)dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$

$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)=\frac{2}{3}$

48) $\frac{e}{2}$

⇨ $f(t)=e^{t^2}$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{\sqrt{x}}f(t)dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}=$

$\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{e}{2}$

49) 2

⇨ $f(t)=t^3+2t^2+t$이고, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}(t^3+2t^2+t)dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\right\}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}(1+2+1)=2$

50) -2

⇨ $f(x)=x\cos\pi x$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1+h}^{1+3h}f(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x)]_{1+h}^{1+3h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+3h)-F(1+h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+3h)-F(1+h)}{2h}\times 2$

$=2F'(1)$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$2F'(1)=2f(1)=-2$

51) -4

⇨ $f(x)=x^3-2x^2-3x+4$라 하고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하자

$\lim_{h\to 0}\frac{F(2+2h)-F(2)}{h}=2F'(2)=2f(2)$

$=2(8-8-6+4)=-4$

52) 8

⇨ $F(x)=\int f(x)dx$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{x}^{2}f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=f(2)$

$=8-12+6+a=2+a$

즉 $2+a=10$이므로 $a=8$

53) 3

⇨

$f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1)=\sin\pi+2+1=3$이다.

54) $-\frac{2}{\pi}$

⇨ $f(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^x=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$

$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}=f(3)$이므로

$f(3)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{3}{2}\pi=-\frac{2}{\pi}$

55) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=f(1)$

($F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분)

$f(1)=\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$t=\tan s$로 치환하자. $dt=\sec^2 s ds$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 s}{\sec^4 s}\sec^2 s\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 s}{\sec^2 s}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 s ds$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2s}{2}ds=\left[\frac{1}{2}s-\frac{\sin 2s}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

56) $\frac{3}{2}\ln 5$

57) 4

58) $2\ln 2$

59) 0