단원 ISSUE

이 단원에서는 **삼, 사차방정식과 연립이차방정식, 연립이차부등식에 관련된 문제** 등이 자주 출제되며 방정식 및 부등식을 정확하게 해결할 수 있어야 응용 문제에 대한 접근이 용이하므로 기초적인 문제부터 반복적으로 학습합니다.

평가문제

[소단원 확인 문제]

1. 한 모서리의 길이가 자연수인 정육면체의 밑면의 가로의 길이를 $1\,\mathrm{cm}$ 줄이고 세로의 길이와 높이를 각각 $2\,\mathrm{cm}$, $3\,\mathrm{cm}$씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\dfrac{5}{2}$배가 되었다. 처음 정육면체의 부피를 구하면?

① $6\,cm^3$ ② $8\,cm^3$
③ $10\,cm^3$ ④ $12\,cm^3$
⑤ $14\,cm^3$

[대단원 종합 문제]

2. x에 대한 삼차방정식 $x^3-(a-3)x^2+ax-4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1 ② 0
③ 1 ④ 12
⑤ 17

[대단원 종합 문제]

3. 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 서로 다른 두 실근이 x에 대한 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$의 두 중근일 때, 네 상수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[소단원 확인 문제]

4. 사차방정식 $x^4-3x^3-x^2+5x+2=0$의 모든 실근의 합을 구하면?

① 1 ② 3
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[중단원 연습 문제]

5. 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $\dfrac{\omega}{\omega^2+1}+\dfrac{4\omega^4}{\omega^2-\omega+1}$의 값을 구하면?

① 3 ② ω
③ 0 ④ -3
⑤ $-w$

[중단원 연습 문제]

6. 삼차방정식 $2x^3+3x^2-11x-6=0$의 세 근 중에서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 곱을 구하면?

① -6 ② $-\dfrac{3}{2}$
③ -1 ④ 1
⑤ $\dfrac{3}{2}$

[중단원 연습 문제]

7. x에 대한 삼차방정식 $x^3-6x^2+(3k+5)x-3k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[소단원 확인 문제]

8. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $x=\beta$라 고 할 때, $(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

[중단원 연습 문제]

9. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=3 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$가 오직 한 쌍의 실수인 해를 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{9}{5}$
③ $\frac{11}{5}$ ④ $\frac{13}{5}$
⑤ 3

[대단원 종합 문제]

10. 지름의 길이가 13인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이가 34일 때, 이 직사각형의 가로, 세로 중 긴 변의 길이를 구하면?

① 8 ② 9
③ 10 ④ 11
⑤ 12

[소단원 확인 문제]

11. 부등식 $|2x-1|+2>\sqrt{4x^2+4x+1}$의 해는?

① $x \le \frac{1}{2}$ ② $x < \frac{1}{2}$
③ $x \ge \frac{1}{2}$ ④ $x > \frac{1}{2}$
⑤ $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

[소단원 확인 문제]

12. 영웅이네 가족은 자동차를 타고 미술관에 갔다. 미술관의 주차장은 기본 주차요금이 3000원이고 주차권을 받은 후 1시간이 되는 순간부터 10분당 500원의 주차요금이 발생한다. 영웅이네 가족이 주차권을 받은 후 주차를 하는 데 10분이 걸렸고, 앞으로 미술관을 둘러보는 데 120분이 소요될 예정이다. 그런데 관람객의 수에 따라 소요 시간이 20분까지 더 걸리거나 덜 걸릴 수도 있다고 한다. 영웅이네 가족이 지불할 것으로 예상되는 주차 요금을 y원이라고 할 때, y의 값의 범위를 구하면?

① $4500 \le y \le 6500$
② $5000 \le y \le 7000$
③ $5500 \le y \le 7000$
④ $5500 \le y \le 7500$
⑤ $5500 \le y \le 8500$

[대단원 종합 문제]

13. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x-2 \le 2x-a \\ 3x-4 \le 12-5x \end{cases}$가 해를 갖도록 상수 a의 값을 정할 때, a의 최댓값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 연습 문제]

14. 이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$일 때, 부등식 $f(2x-3)>0$의 해는?

① $1<x<3$ ② $-1<x<1$
③ $-1<x<3$ ④ $x<-1$ 또는 $x>3$
⑤ $x<1$ 또는 $x>3$

[소단원 확인 문제]

15. 연립부등식 $7x-3 \le 2x^2 < 3x+5$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[대단원 종합 문제]

16. 부등식 $2|x+1|-3|x-2| \ge 1$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

[중단원 연습 문제]

17. $-1 \le x \le 1$에서 이차부등식 $x^2-2x+1 \le -x^2+k$가 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$
③ 4 ④ $\frac{9}{2}$
⑤ 5

[중단원 연습 문제]

18. 두 이차방정식 $x^2+2ax+3a=0$, $ax^2+ax+1=0$ 중 한 방정식만 허근을 갖도록 실수 a의 값을 정할 때, a의 최솟값은?

① 2 ② $\frac{7}{3}$
③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$
⑤ 3

[중단원 연습 문제]

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3 \le 0 \\ (x-4)(x-a) \le 0 \end{cases}$을 만족하는 정수 x의 개수가 4개가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-1 \le a \le 0$ ② $-1 \le a < 0$
③ $-1 < a \le 0$ ④ $0 \le a < 1$
⑤ $0 < a \le 1$

[대단원 종합 문제]

20. $-1 \le x \le 1$에서 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$가 항상 성립할 때, $b-a$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하면? (단, q는 소수)

① 15 ② 16
③ 17 ④ 18
⑤ 19

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$라 하면 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$, $\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$,

$3x^3-8x^2-2x+12=0$, $(x-2)(3x^2-2x-6)=0$ 이므로 $x=2$이다. 따라서 처음 정육면체의 부피는 $8\,\mathrm{cm}^3$이다.

2) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^3-(a-3)x^2+ax-4$로 두고 인수분해하면 $f(x)=(x-1)\{x^2-(a-4)x+4\}$이다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(ⅰ) 방정식 $x^2-(a-4)x+4=0$이 $x=1$을 근으로 가지는 경우 $1-(a-4)+4=0$이고 $a=9$이다.

(ⅱ) 방정식 $x^2-(a-4)x+4=0$이 중근을 가지는 경우 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2-16=0$, $a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$이므로 $a=0$ 또는 $a=8$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식이 중근을 가지도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 $9+0+8=17$이다.

3) [정답] ③

[해설] 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근은 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$이고, 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 서로 다른 두 실근이

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$의 두 중근이므로

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$=\left\{\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\right\}^2$

$=(x^2-x-3)^3$

$=x^4-2x^3-5x^2+6x+9$

따라서 $a=-2$, $b=-5$, $c=6$, $d=9$이므로

$a+b+c+d=-2+(-5)+6+9=8$이다.

4) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라고 하면 $f(2)=0$, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

2	1	−3	−1	5	2
		2	−2	−6	−2
−1	1	−1	−3	−1	0
		−1	2	1	
	1	−2	−1	0	

$x^4-3x^3-x^2+5x+2=(x-2)(x^3-x^2-3x-1)$

$=(x-2)(x+1)(x^2-2x-1)=0$이므로

$x=2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$이다.

주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$2+(-1)+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=3$이다.

5) [정답] ④

[해설] 삼차방정식 $x^3=1$은 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이고 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이 성립한다.

그러므로 $\omega^2+1=-\omega$, $\omega^4=\omega^3\omega=\omega$,

$\omega^2-\omega+1=(\omega^2+1)-\omega=-\omega-\omega=-2\omega$이다.

따라서 $\frac{\omega}{\omega^2+1}+\frac{4\omega^4}{\omega^2-\omega+1}=\frac{\omega}{-\omega}+\frac{4\omega}{-2\omega}=-3$이다.

6) [정답] ①

[해설] $f(x)=2x^3+3x^2-11x-6$이라 하면 $f(2)=0$, $f(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

2	2	3	−11	−6
		4	14	6
−3	2	7	3	0
		−6	−3	
	2	1	0	

$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(2x^2+7x+3)$

$=(x-2)(x+3)(2x+1)=0$

그러므로 $x=2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 세 근 중에서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -3이므로 가장 큰 근과 가장 작은 근의 곱은 $2\times(-3)=-6$이다.

7) [정답] ②

[해설] 삼차방정식 $x^3-6x^2+(3k+5)x-3k=0$에서 $f(x)=x^3-6x^2+(3k+5)x-3k$라 하고 조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+3k)$

주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 방정식 $x^2-5x+3k=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$1^2-5+3k\neq0$에서 $k\neq\frac{4}{3}$이고

방정식 $x^2-5x+3k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times3k>0$에서 $k<\frac{25}{12}$이므로 만족하는 자연수 k의 개수는 1, 2의 2개이다.

8) [정답] ③

[해설] 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 에서

$x=y+1$을 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$(y+1)^2+y^2=25$, $2y^2+2y-24=0$,

$y^2+y-12=0$, $(y+4)(y-3)=0$

$y=-4$ 또는 $y=3$이다.

$y=-4$이면 $x=-3$이고 $y=3$이면 $x=4$이므로 두 가지의 경우 모두 $(\alpha+\beta)^2=49$, $\alpha\beta=12$이다.

따라서 구하는 식의 값은 $(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=13$이다.

9) [정답] ②

[해설] $x=2y+3$을 $x^2+y^2=a$에 대입하여 정리하면

$5y^2+12y+9-a=0$이다.

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=6^2-5(9-a)=0$, $5a-9=0$ $\therefore a=\frac{5}{9}$

10) [정답] ⑤

[해설] 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면 $\begin{cases} 2x+2y=34 \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases}$이다.

연립하여 풀면 $\begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$이다.

따라서 가로, 세로 중 긴 변의 길이는 12이다.

11) [정답] ②

[해설] $\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$이므로

주어진 부등식은 $|2x-1|+2>|2x+1|$이다.

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$과 $2x+1=0$, $x=-\frac{1}{2}$이므로

(ⅰ) $x<-\frac{1}{2}$일 때,

$-(2x-1)+2>-(2x+1)$, $-2x+3>-2x-1$,

$3>-1$이므로 범위 내에서 항상 성립한다. 따라서 $x<-\frac{1}{2}$이다.

(ⅱ) $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$일 때,

$-(2x-1)+2>2x+1$, $-2x+3>2x+1$, $x<\frac{1}{2}$

이다. 따라서 $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$이다.

(ⅲ) $x\ge\frac{1}{2}$일 때,

$(2x-1)+2>2x+1$, $1>1$이므로 범위 내에 해가 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 주어진 부등식의 해는 $x<\frac{1}{2}$이다.

12) [정답] ④

[해설] 주차권을 받은 후 나갈 때까지의 시간을 x이라 하면 $|x-130|\le 20$이다.

$110\le x\le 150$이므로 y의 값의 범위는

$3000+5\times 500\le y\le 3000+9\times 500$이고

$5500\le y\le 7500$이다.

13) [정답] ④

[해설] $\begin{cases} x-2 \le 2x-a & \cdots ㉠ \\ 3x-4 \le 12-5x & \cdots ㉡ \end{cases}$

부등식 ㉠을 풀면 $x\ge a-2$이다. $\cdots$㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x\le 2$이다. $\cdots$㉣

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 ㉢과 ㉣의 공통 범위가 존재하여야 하고 $a-2\le 2$를 만족하여야 한다. 따라서 $a\le 4$이고 a의 최댓값은 4이다.

14) [정답] ①

[해설] 이차부등식 $f(x)<0$의 해가

$x<-1$ 또는 $x>3$이므로

부등식 $f(x)>0$의 해는 $-1<x<3$이다.

부등식 $f(2x-3)>0$에서

$2x-3=t$로 치환하면

부등식 $f(t)>0$의 해는 $-1<t<3$이다.

$-1<2x-3<3$ $\therefore 1<x<3$

15) [정답] ②

[해설] 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} 2x^2-7x+3\ge 0 \\ 2x^2-3x-5<0 \end{cases}$ 이다.

(ⅰ) $2x^2-7x+3\ge 0$에서 $(x-3)(2x-1)\ge 0$,

$x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$이다.

(ⅱ) $2x^2-3x-5<0$에서 $(2x-5)(x+1)<0$,

$-1<x<\frac{5}{2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 연립부등식의 해는

$-1<x\le\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 정수 x의 값은 0의 1개이다.

16) [정답] ④

[해설] (ⅰ) $x<-1$일 때,

$-2(x+1)+3(x-2)\ge 1$, $x\ge 9$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ⅱ) $-1\le x<2$일 때,

$2(x+1)+3(x-2)\ge 1$, $x\ge 1$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $1\le x<2$이다.

(ⅲ) $x\ge 2$일 때,

$2(x+1)-3(x-2)\ge 1$, $x\le 7$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le 7$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 부등식의 해는 $1\le x\le 7$이다. 따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

17) [정답] ⑤

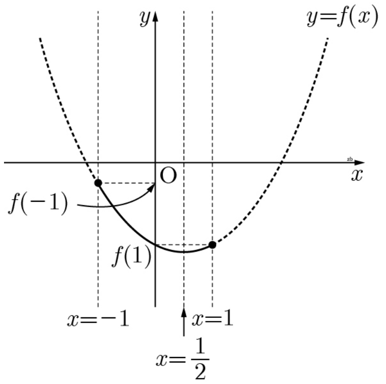
[해설] $x^2-2x+1\le -x^2+k$에서

$2x^2-2x+1-k\le 0$

$f(x)=2x^2-2x+1-k$라 하면

$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-k$이므로 $-1\le x\le 1$에서

$f(x)\le 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)\le 0$이어야 하므로

$f(-1)=5-k\le 0$, $k\ge 5$

따라서 k의 최솟값은 5이다.

18) [정답] ⑤

[해설] $x^2+2ax+3a=0$의 판별식을 D라고 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-3a<0$, $a(a-3)<0$, $0<a<3$이다.

$ax^2+ax+1=0$의 판별식을 D'이라고 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D'=a^2-4a<0$, $a(a-4)<0$, $0<a<4$이다.

따라서 한 방정식만 허근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 $3\le a<4$이고 a의 최솟값은 3이다.

19) [정답] ③

[해설] $\begin{cases} x^2-2x-3\le 0 & \cdots ㉠ \\ (x-4)(x-a)\le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+1)(x-3)\le 0$이고 $-1\le x\le 3$이다.

㉡과 $-1\le x\le 3$을 동시에 만족하는 정수의 개수가 4개이므로 ㉡의 해는 $a\le x\le 4$이고

$-1<a\le 0$이다.

20) [정답] ③

[해설] (ⅰ) $x+a\le x^2$에서 $x^2-x\ge a$이고

$-1\le x\le 1$에서 $x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$이므로

$x^2-x\ge -\frac{1}{4}$이다.

(ⅱ) $x^2\le 2x+b$에서 $x^2-2x\le b$이고

$-1\le x\le 1$에서 $x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로

$x^2-2x\le 3$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $a\le -\frac{1}{4}$, $b\ge 3$이다.

따라서 $b-a\ge 3-(-\frac{1}{4})=\frac{13}{4}$이고

$p+q=4+13=17$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574