● 1회차

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 ②	05 ④
06 ①	07 ①	08 ②	09 ④	10 ②
11 ④	12 ③	13 ②	14 ②	15 ①
16 ④	17 ②			

[서술형 1] 7
[서술형 2] $-8<k<0$
[서술형 3] $\frac{1}{3}$

01 $f(x)=2x^2-2x+1$로 놓으면 $f'(x)=4x-2$
접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-2a+1)$이라 하면 접선의 기울기는
$f'(a)=4a-2=2 \qquad \therefore a=1$
즉 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

02 $f(x)=2x^3-3ax^2+6(a-1)x-1$에서
$f'(x)=6x^2-6ax+6(a-1)$
$\quad\;\;=6(x-1)(x-a+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a-1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극소	↘	극대	↗

즉 함수 $f(x)$는 $1<x<a-1$에서 감소하므로
$a-1=4 \qquad \therefore a=5$

03 $f(x)=x^3-9x^2+ax-b$에서
$f'(x)=3x^2-18x+a$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 3을 가지므로
$f'(1)=0,\ f(1)=3$
$3-18+a=0,\ 1-9+a-b=3$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=15,\ b=4$
$\therefore ab=15\cdot 4=60$

04 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$이고 $a,\ b,\ c,\ d$는 실수)로 놓으면 조건 (가)에서
$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$
이므로 $2bx^2+2d=0$
$\therefore b=0,\ d=0$
즉 $f(x)=ax^3+cx$이므로 $f'(x)=3ax^2+c$
조건 (나)에서
$f'(-1)=0,\ f(-1)=-2$
$3a+c=0,\ -a-c=-2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-1,\ c=3$
따라서 $f(x)=-x^3+3x$이므로
$f(-2)=8-6=2$

05 $f'(x)=3x^2+2ax+3$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot 3>0$
$(a+3)(a-3)>0$
$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

06 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면
$v(t)=x'(t)=-3t^2+12t-9$
$\quad\;\;=-3(t-2)^2+3$
따라서 함수 $v(t)$는 $t=2$에서 최댓값 3을 가지므로 점 P의 속도의 최댓값은 3이다.

07 t초 후의 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각
$4+0.6t,\ 8+0.2t$
이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면
$S=(4+0.6t)(8+0.2t)$
$\;\;=0.12t^2+5.6t+32$
즉 직사각형의 넓이의 변화율은
$\frac{dS}{dt}=0.24t+5.6$
직사각형의 가로와 세로의 길이가 같아질 때, 즉
$4+0.6t=8+0.2t$
$0.4t=4 \qquad \therefore t=10$

따라서 $t=10$일 때 직사각형의 넓이의 변화율은
$2.4+5.6=8\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

Lecture **시각에 대한 변화율**

어떤 물체의 시각 t에서의 넓이가 S, 부피가 V일 때, 시각 t의 변화율은 다음과 같이 구한다.

(i) t초 후의 넓이, 부피 등의 관계식을 세운다.

(ii) t에 대하여 미분한다. 즉

(넓이의 변화율)$=\dfrac{dS}{dt}$, (부피의 변화율)$=\dfrac{dV}{dt}$

(iii) (ii)에서 구한 식에 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

08 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(ax^2+bx+4)dx=ax^2+bx+4$이므로

$ax^2+bx+4=3x^2+x+c$

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=4$이므로

$abc=3\cdot1\cdot4=12$

09 $F(x)=\displaystyle\int f(x)dx=\int(3x^2-12x+9)dx$

$\qquad=x^3-6x^2+9x+C$

이때 곡선 $y=F(x)$가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$F(0)=-2$에서 $C=-2$

$\therefore\ F(x)=x^3-6x^2+9x-2$

$F'(x)=f(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$F'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

즉 함수 $y=F(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2, $x=3$에서 극솟값 -2를 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$2-(-2)=4$

10 $\displaystyle\int_1^0(3x-2x^2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_1^0=-\frac{5}{6}$

11 $|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\ge1)\\ -x+1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^2|x-1|dx=\int_{-1}^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

12 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 1이므로

$f(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a>0$, a는 상수)

로 놓을 수 있다.

또 함수 $y=f(x)$는 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$f(0)=-1$에서 $-a=-1$ $\qquad\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=x^2-1$이므로

$$\int_{-2}^2 xf(x)dx=\int_{-2}^2 x(x^2-1)dx$$
$$=\int_{-2}^2(x^3-x)dx$$
$$=0$$

다른 풀이

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-x)=f(x)$

$g(x)=xf(x)$로 놓으면

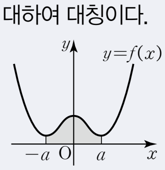
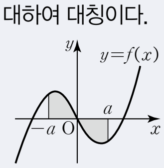
$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

즉 함수 $y=g(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$\displaystyle\int_{-2}^2 xf(x)dx=\int_{-2}^2 g(x)dx=0$

Lecture **y축 또는 원점에 대하여 대칭인 함수의 정적분**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

<table>
<tr><th>$f(-x)=f(x)$일 때</th><th>$f(-x)=-f(x)$일 때</th></tr>
<tr><td>함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
</td><td>함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
</td></tr>
<tr><td>$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$
이므로
$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$</td><td>$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$
이므로
$\int_{-a}^a f(x)dx=0$</td></tr>
</table>

13 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (t^2+2t)\,dt=x^2+2x$이므로

$f(1)=1+2=3$

14 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=4+\displaystyle\int_1^1 f(t)\,dt=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=8x+f(x)$

$xf'(x)=8x$ $\therefore f'(x)=8$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,dx=\int 8\,dx$

$=8x+C$

㉠에서 $f(1)=4$이므로 $8+C=4$

$\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=8x-4$이므로

$f(2)=16-4=12$

15 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$

$=\dfrac{1}{4}f(2)$

$=\dfrac{1}{4}\cdot(8+8-4)$

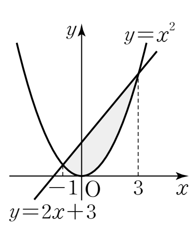
$=3$

16 $x^2=2x+3$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+3$이 만나는 점의 x좌표는 -1, 3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\displaystyle\int_{-1}^3 \{(2x+3)-x^2\}\,dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^3 (-x^2+2x+3)\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3$

$=\dfrac{32}{3}$

17 시각 $t=10$에서의 점 P의 위치는

$0+\displaystyle\int_0^{10} v(t)\,dt=\int_0^2 (t^2-4t)\,dt+\int_2^{10} a(t-2)\,dt$

$=\left[\dfrac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^2+\left[\dfrac{1}{2}at^2-2at\right]_2^{10}$

$=32a-\dfrac{16}{3}$

이때 시각 $t=10$에서의 위치가 0이므로

$32a-\dfrac{16}{3}=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{6}$

[서술형 1] $f(x)=2x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

❶

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-5$	↗	k	↘	$k-1$	↗	$k+4$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 k, $x=1$에서 극솟값 $k-1$, $x=-1$에서 최솟값 $k-5$를 갖는다.

즉 $k-5=-1$에서 $k=4$

❷

따라서 $a=4$, $b=4-1=3$이므로

$a+b=4+3=7$

❸

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	1점
❷ k의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $-2x^3+6x^2+k=0$에서

$2x^3-6x^2=k$

❶

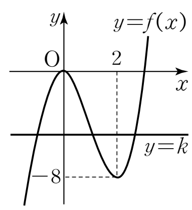
$f(x)=2x^3-6x^2$으로 놓으면
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=2$에서 극솟값 -8을 갖는다.

❷

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$-8<k<0$



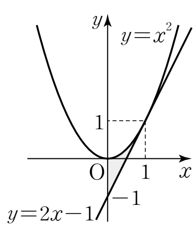
❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	2점
❷ 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	2점
❸ 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$

❶

이때 $x^2=2x-1$에서 $x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_0^1 \{x^2-(2x-1)\}dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

❷

채점 기준	배점
❶ 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
❷ 곡선 $y=x^2$과 이 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	4점