단원 ISSUE

이 단원에서는 함수의 개형을 파악하거나 치환을 하는 문제가 자주 출제된다. **정적분의 기하적 의미**에서는 함수의 그래프의 개형을 파악하여 계산을 하는 경우가 많으므로 주의하도록 한다. 또한 **정적분으로 정의된 함수**에서는 치환을 이용하는 경우가 많으므로 문제에서 주어진 조건을 정확히 해석하는 연습이 필요하다.

평가문제

[중단원 학습 점검]

1. 함수 $f(x)=3x-2$에 대하여 정적분 $\int_0^2 x^2 f(x)dx$의 값을 구하면?

① $\frac{16}{3}$　② 6　③ $\frac{20}{3}$　④ 7　⑤ 8

[중단원 학습 점검]

2. 정적분 $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{5}{6}$　③ 1　④ $\frac{7}{6}$　⑤ $\frac{4}{3}$

[중단원 학습 점검]

3. 다음 중 정적분의 값이 가장 큰 것은?

① $\int_0^2 (3x^2-2x)dx$　② $\int_0^1 (t-1)(t+3)dt$
③ $\int_1^4 (2x-1)dx$　④ $\int_{-3}^3 (3y^2+10y-5)dy$
⑤ $\int_0^3 \frac{x^3+1}{x+1}dx$

[중단원 학습 점검]

4. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$이다.
(나) $\int_0^2 f(x)\,dx=5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$
(다) $f(0)=1$

① 3　② 5　③ 7　④ 10　⑤ 12

[대단원 학습 점검]

5. 다음 중 정적분의 값이 가장 큰 것은?

① $\int_0^1 (-x+1)\,dx+\int_1^3 (x-1)\,dx$
② $\int_{-1}^0 (s^3+2s)ds+\int_0^1 (x^3+2x)dx$
③ $\int_1^2 (x^2+x-2)dx-\int_{-2}^1 (x^2+x-2)dx$
④ $\int_1^2 (2x^2-3x+1)dx+\int_2^1 (y^2-3y)dy$
⑤ $\int_{-2}^0 (2x-1)dx+\int_0^2 (2s-1)ds-\int_1^2 (2t-1)dt$

[대단원 학습 점검]

6. 다항함수 $f(x)$에 대하여
$\frac{d}{dx}\int_a^x t^2 f(t)dt=x^7-2x^5+3x^3-4x^2$일 때, $f(-1)$의 값은?

① 0　② -3　③ -5　④ -6　⑤ 6

[대단원 학습 점검]

7. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{1-2h}^{1+h} (x^2 - 2x + a)dx = 6$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 학습 점검]

8. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt = x^3 + ax - 2$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

[중단원 학습 점검]

9. 함수 $f(x) = \int_{-1}^{x} (1 - |t|)\,dt$의 극댓값을 a, 극솟값을 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 학습 점검]

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 등식 $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2$ 을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 학습 점검]

11. 연속함수 $f(x)$가 $x \ge 2$에서 $f(x) \ge 0$이고 다음을 모두 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

(가) $f(2-x) + f(2+x) = 0$
(나) $\int_1^3 \lvert f(x) \rvert dx = 2$, $\int_1^4 f(x)dx = 3$

① -4 ② -3
③ -2 ④ -1
⑤ 0

[중단원 학습 점검]

12. 다음 중 정적분의 값이 가장 큰 것은?

① $\int_1^2 (x+1)^2 dx - \int_1^2 (x-1)^2 dx$

② $\int_{-2}^{3} (x^3 - x^2 + 2)\,dx + \int_3^2 (x^3 - x^2 + 2)\,dx$

③ $\int_1^4 (2x-1)dx - \int_2^4 (2x-1)dx$

④ $\int_{-1}^{1} (x^2 - 2|x| + 1)\,dx$

⑤ $\int_0^3 |x^2 - 2x|\,dx$

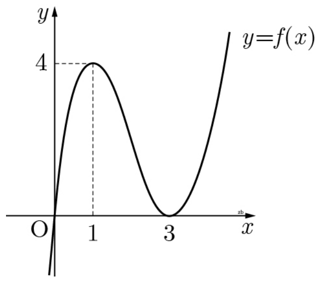
[중단원 학습 점검]

13. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) = 3x^2 + \int_0^2 (2x-1)f(t)\,dt$를 만족할 때, $f(3)$의 값은?

① -15 ② -13
③ -11 ④ -9
⑤ -7

[중단원 학습 점검]

14. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\int_0^3 |f'(x)|dx$의 값은?



① 2　② 4
③ 6　④ 8
⑤ 10

[대단원 학습 점검]

15. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases} -2x+4 & (x<1) \\ 3x^2 & (x \ge 1) \end{cases}$이고 $f(0)=0$일 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{89}{12}$　② $\frac{29}{4}$
③ $\frac{85}{12}$　④ $\frac{83}{12}$
⑤ $\frac{27}{4}$

[대단원 학습 점검]

16. 연속함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족할 때, $\int_{-2}^6 f(x)dx$의 값은?

(가) $\int_4^6 f(x)dx=\frac{9}{2}$

(나) $f(4-x)=f(x)$

(다) $\int_0^4 f(x)dx=6$

① 14　② 15
③ 16　④ 17
⑤ 18

실전문제

17. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $\int_0^1 f(x)dx=0$

(나) $\int_n^{n+2} f(x)dx=\int_n^{n+1} 2xdx$ (단, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

정적분 $\int_3^4 f(x)dx$의 값은?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

18. 함수 $f(x)$가 $\int_0^1 (4ax-1)dx=5$일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

19. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt=xf(x)-2x^2$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① -3　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 1

20. 임의의 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $f(x)=2x^2-6x-\int_1^x f'(t)dt$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 0　② -2
③ -4　④ -6
⑤ -8

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $f(x)=3x-2$이고

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx=\int_0^2(3x^3-2x^2)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{20}{3}$$

2) [정답] ②

[해설] $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$

$$=\int_0^1\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int_0^1(x^2-x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

3) [정답] ④

[해설] ① $\int_0^2(3x^2-2x)dx=\left[x^3-x^2\right]_0^2=8-4=4$

② $\int_0^1(t-1)(t+3)dt=\int_0^1(t^2+2t-3)dt$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_0^1=-\frac{5}{3}$$

③ $\int_1^4(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_1^4=12$

④ $\int_{-3}^3(3y^2+10y-5)dy=\left[y^3-5y\right]_{-3}^3=24$

⑤ $\int_0^3\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$$=\int_0^3\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$$

$$=\int_0^3(x^2-x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^3=\frac{15}{2}$$

4) [정답] ③

[해설] $f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\quad(x\neq 1)$$

함수 $f(x)$는 $x\neq 1$인 모든 점에 대해
닫힌구간 $[1,\ x]$에서의 평균변화율과
x에서의 순간변화율이 일치하므로
$f(x)$는 직선이다. 따라서 $f(x)=ax+b$라 하면
$f(0)=1$ 이므로 $b=1$ 임에서 $f(x)=ax+1$이다.
조건 (나)에서

$$\int_0^2 f(x)\,dx=5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$$

$$\int_0^2(ax+1)\,dx=5\int_{-1}^1(ax^2+x)\,dx$$

$$2a+2=\frac{10}{3}a,\ \ a=\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로 $f(4)=7$ 이다.

5) [정답] ③

[해설] ① $\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx=\frac{5}{2}$

② $\int_{-1}^0(s^3+2s)ds+\int_0^1(x^3+2x)dx$

$$=\int_{-1}^0(x^3+2x)dx+\int_0^1(x^3+2x)dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^3+2x)dx=0$$

③ $-\int_{-2}^1(x^2+x-2)dx+\int_1^2(x^2+x-2)dx$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$

$$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)+\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)$$

$$+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{19}{3}$$

④ $\int_1^2(2x^2-3x+1)dx+\int_2^1(y^2-3y)dy$

$$=\int_1^2(2x^2-3x+1)dx-\int_1^2(x^2-3x)dx$$

$$=\int_1^2(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{10}{3}$$

⑤ $\int_{-2}^0(2x-1)dx+\int_0^2(2s-1)ds-\int_1^2(2t-1)dt$

$$=\int_{-2}^0(2x-1)dx+\int_0^2(2x-1)dx-\int_1^2(2x-1)dx$$

$$=\int_{-2}^2(2x-1)dx-\int_1^2(2x-1)dx$$

$$=\int_{-2}^2(2x-1)dx+\int_2^1(2x-1)dx$$

$$=\int_{-2}^1(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_{-2}^1=0-(4+2)=-6$$

6) [정답] ④

[해설] $\frac{d}{dx}\int_a^x t^2f(t)dt=x^7-2x^5+3x^3-4x^2$에서

$x^2f(x)=x^7-2x^5+3x^3-4x^2$

$f(x)=x^5-2x^3+3x-4$

$f(-1)=-1+2-3-4=-6$

7) [정답] ③

[해설] $g(x)=x^2-2x+a$, $G'(x)=g(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}(x^2-2x+a)dx$$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{G(1+h)-G(1-2h)}{h}=3g(1)$

즉 $3g(1)=6$, $g(1)=2$이므로

$1-2+a=2$, $a=3$

8) [정답] ③

[해설] $\displaystyle\int_1^x f(t)dt=x^3+ax-2$ 의 양변에

$x=1$을 대입하면 $0=1+a-2$,

$\therefore\ a=1$

주어진 식의 양변을 미분하면

$f(x)=3x^2+1$,

$\therefore\ f(2)=12+1=13$

9) [정답] ①

[해설] $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt$

(ⅰ) $x\le 0$일 때

$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}(1+t)\,dt=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{x}$

$=\dfrac{1}{2}x^2+x-\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$

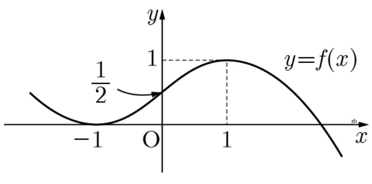
(ⅱ) $x\ge 0$일 때

$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)\,dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt$

$=\left[t+\dfrac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}+\left[t-\dfrac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}=1-\dfrac{1}{2}+x-\dfrac{1}{2}x^2$

$=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같고,



$x=-1$에서 극솟값 0,

$x=1$에서 극댓값 1을 갖는다.

10) [정답] ⑤

[해설] $\displaystyle\int_1^x f(t)dt=xf(x)-\frac{1}{2}x^4-x^3+x^2$ ……㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\dfrac{1}{2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=xf'(x)+f(x)-2x^3-3x^2+2x$

$xf'(x)=2x^3+3x^2-2x$

$f'(x)=2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$

$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-2x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=\dfrac{1}{2}$이므로 $C=\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(-2)=5$이다.

11) [정답] ①

[해설] $f(2-x)+f(2+x)=0$에서 함수 $f(x)$는

점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이고

$x\ge 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$\displaystyle\int_1^3|f(x)|dx=2$에서 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=-1$,

$\displaystyle\int_2^3 f(x)dx=1$임을 알 수 있다.

$\displaystyle\int_1^4 f(x)dx=3$에서

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=3$ 이므로

$\displaystyle\int_3^4 f(x)dx=3$이고

함수 $f(x)$가 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-3$이다.

$\therefore\ \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=-3-1=-4$

12) [정답] ①

[해설] ① $\displaystyle\int_1^2(x+1)^2dx-\int_1^2(x-1)^2dx$

$=\displaystyle\int_1^2\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$=\displaystyle\int_1^2 4xdx=\left[2x^2\right]_1^2=8-2=6$

② $\displaystyle\int_{-2}^{3}(x^3-x^2+2)\,dx+\int_3^2(x^3-x^2+2)\,dx$

$=\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3-x^2+2)dx=\frac{8}{3}$

③ $\displaystyle\int_1^4(2x-1)dx-\int_2^4(2x-1)dx$

$=\displaystyle\int_1^2(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_1^2=2$

④ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-2|x|+1)\,dx=\frac{2}{3}$

⑤ $\displaystyle\int_0^3|x^2-2x|\,dx$

$=\displaystyle\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\dfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

13) [정답] ②

[해설] $f(x)=3x^2+\int_0^2(2x-1)f(t)\,dt$

$=3x^2+2x\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt$

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+2kx-k$,

$k=\int_0^2 f(x)\,dx$

$=\int_0^2(3x^2+2kx-k)dx$

$=\left[x^3+kx^2-kx\right]_0^2=8+4k-2k$

$\therefore\ k=-8$

$f(x)=3x^2-16x+8$

$f(3)=27-48+8=-13$

14) [정답] ④

[해설] $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3a(x-1)(x-3)\ (a\neq0)$

$f(x)=a(x^3-6x^2+9x)+C$ (C는 적분상수)

함수 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $C=0$

또, 점 (1, 4)를 지나므로 $a=1$

$1<x<3$에서 $f'(x)<0$,

$x\leq1$ 또는 $x\geq3$에서 $f'(x)\geq0$이므로

$\int_0^3|f'(x)|dx=\int_0^1 f'(x)dx+\int_1^3\{-f'(x)\}dx$

$=\left[f(x)\right]_0^1+\left[-f(x)\right]_1^3$

$=f(1)-f(0)-f(3)+f(1)$

$=4-0-0+4$

$=8$

15) [정답] ①

[해설] $f'(x)=\begin{cases}-2x+4 & (x<1)\\ 3x^2 & (x\geq1)\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+C_1 & (x<1)\\ x^3+C_2 & (x\geq1)\end{cases}$

$f(0)=0$이므로 $C_1=0$

$x=1$에서 연속이므로 $3=1+C_2$, $C_2=2$

$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (x<1)\\ x^3+2 & (x\geq1)\end{cases}$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(-x^2+4x)dx+\int_1^2(x^3+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4+2x\right]_1^2$

$=\frac{5}{3}+\frac{23}{4}=\frac{89}{12}$

16) [정답] ②

[해설] (나) 에서 $f(4-x)=f(x)$이므로

$f(x)$는 직선 $x=2$에 대해 대칭이다. 따라서

$\int_{-2}^6 f(x)dx$

$=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$,

$\int_0^4 f(x)dx=6$, $\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_4^6 f(x)dx=\frac{9}{2}$

이므로 구하는 값은 $6+9=15$ 이다.

17) [정답] ③

[해설] 조건 (나)에서

$\int_n^{n+2} f(x)dx=\int_n^{n+1}2xdx=2n+1$이므로

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=1+5=6$

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=0+3=3$

$\therefore\ \int_3^4 f(x)dx=6-3=3$

18) [정답] ③

[해설] $\int_0^1(4ax-1)dx=\left[2ax^2-x\right]_0^1=2a-1$

즉 $2a-1=5$이므로 $a=3$

19) [정답] ②

[해설] 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

$\therefore\ f'(x)=4$

$f(x)=4x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=2$이므로 $C=-2$

$\therefore\ f(0)=-2$

20) [정답] ③

[해설] $f(x)=2x^2-6x-\int_1^x f'(t)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x-6-f'(x)$

$2f'(x)=4x-6$ $\qquad\therefore\ f'(x)=2x-3$

$f(x)=\int f'(x)dx=x^2-3x+C$

$f(x)=2x^2-6x-\int_1^x f'(t)dt$에서 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-6=-4$

즉 $f(1)=-4$이므로

$1-3+C=-4$ $\qquad\therefore\ C=-2$

따라서 $f(x)=x^2-3x-2$이므로

$f(2)=4-6-2=-4$