



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-02-13

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 거듭제곱근의 대소비교

(1) 근호가 다른 두 거듭제곱근의 대소비교

: 두 수 $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ (단, m, n 은 서로소)의 대소는 m 과 n 의 최소공배수를 이용하여 $\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[mn]{b^m}$ 꼴로 고쳐서 지수를 같게하여 비교한다.**참고** 밑과 지수가 다른 두 수는 지수를 같게 만들어 대소관계를 비교한다.

■ 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{4}$

3. $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

4. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$

5. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{\sqrt{6}}$

6. $\sqrt[6]{\sqrt{3}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$

7. $2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}$

■ 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

8. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$

9. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{7}$

10. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{10}$

11. $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{26}$

12. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[12]{7}$

13. $\sqrt[9]{10}$, $\sqrt[6]{7}$, $\sqrt{2}$

14. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[9]{10}$

15. $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{\sqrt[3]{12}}$, $\sqrt[6]{4}$

16. $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$

02 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

(1) 곱셈공식을 이용하여 식의 값 구하기

- ① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (복호동순)
 ② $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (복호동순)
 ③ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 ④ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (복호동순)

(2) $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 식의 값 구하기

- ① a^{2x} 의 값이 주어질 때, $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 식의 값 구하기

: 구하는 식의 분모와 분자에 a^x 또는 a^{3x} 를 곱한다.

- ② $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값이 주어질 때, a^{2x} 의 값 구하기

: 분모와 분자에 a^x 를 곱한다.■ $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

17. $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$

18. $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$

19. $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2$

20. $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

21. $(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 + (a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3$

22. $(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}})$

23. $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

24. $(a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})$

■ $a + a^{-1} = 9$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

25. $a^2 + a^{-2}$

26. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

27. $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

■ $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 1$)

28. $a + a^{-1}$

29. $a - a^{-1}$

30. $a^2 + a^{-2}$

31. $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}$

■ $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

32. $a - a^{-1}$

33. $a + a^{-1}$

34. $a^2 + a^{-2}$

35. $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

■ $a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} = 4$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

36. $a + a^{-1}$

37. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

38. $a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}$

■ $a^{2x} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

39. $\frac{a^{6x} - a^{-6x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$

40. $\frac{a^{5x} + a^{-7x}}{a^x + a^{-3x}}$

41. $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$

42. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$

■ $a^{2x} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

43. $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{3x} + a^{-3x}}$

44. $\frac{a^{3x} + a^{-x}}{a^x + a^{-3x}}$

45. $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$

46. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$

■ $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(단, $a > 0$)

47. $a^{3x} + a^{-3x}$

48. $a^x - a^{-x}$

49. a^{2x}

■ 다음 각 조건을 만족하는 양수 a 에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

50. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 5$ 일 때, $a^{2x} + a^{-2x}$ 의 값

51. $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 5$ 일 때, $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}$ 의 값

52. $a^2 + a^{-2} = 27$ 일 때, $a - a^{-1}$ 의 값

53. $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값

54. $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, $a^2 + a^{-2}$ 의 값

55. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5$ 일 때, $\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 10}{a + a^{-1} - 3}$ 의 값

56. $a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} = 5$ 일 때, $(a + a^{-1}) \div (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})$ 의 값

57. $a^{2x} = \frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{a^{3x} - a^{-x}}{a^x - a^{-3x}}$ 의 값

58. $a^{2x} = 5$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x} + a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값

■ 다음에 알맞은 값을 구하여라.

59. $\frac{3^a + 3^{-a}}{3^a - 3^{-a}} = \frac{3}{2}$ 일 때, 81^a 의 값

60. $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x}}$ 의 값

61. $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{3}$ 일 때, $4^x + 4^{-x}$ 의 값

62. $\frac{3^a - 3^{-a}}{3^a + 3^{-a}} = \frac{3}{5}$ 일 때, $9^a - 9^{-a}$ 의 값

63. $\frac{2^a - 2^{-a}}{2^a + 2^{-a}} = \frac{1}{2}$ 일 때, 4^{-a} 의 값

64. $\frac{2^a + 2^{-a}}{2^a - 2^{-a}} = -2$ 일 때, 4^a 의 값

03 거듭제곱을 주어진 문자로 나타내기

$a > 0, b > 0, mn \neq 0$ 일 때,

$a^m = b^n = k$ 일 때, $a = k^{\frac{1}{m}}, b = k^{\frac{1}{n}}$ 이므로 지수법칙에 의해

$ab = k^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \frac{a}{b} = k^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$ 으로 나타낼 수 있다.

▣ 다음 각 조건을 만족하는 0이 아닌 실수, x, y 에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

65. $8^x = 10, 125^y = 10$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

66. $8^x = 27^y = 6$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

67. $3^x = 12^y = 6$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

68. $5^x = 6^y = 30$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

69. $25^x = 4^y = 10$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

70. $2^x = \left(\frac{1}{5}\right)^y = \sqrt{10}$ 일 때, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 의 값

71. $5^x = 4^y = 20$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

72. $20^x = 8, 5^y = 16$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값

73. $2^x = 7, 7^{\frac{y}{2}} = 16$ 일 때, xy 의 값

74. $2^x = 27, 18^y = 81$ 일 때, $\frac{9}{x} - \frac{12}{y}$ 의 값

75. $15^x = 3^y = 5$ 일 때, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 의 값

76. $36^x = 81^y = 2$ 일 때, $\frac{2y-x}{2xy}$ 의 값

77. $5^x = 81$, $15^y = 27$ 일 때, $\frac{4}{x} - \frac{3}{y}$ 의 값

78. $18^x = 27$, $2^y = 9$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{2}{y}$

79. $67^x = 27$, $603^y = 81$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$

80. $9^x = 32$, $36^y = 16$ 일 때, $\frac{5}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값

81. $5^x = 16$, $20^y = 64$ 일 때, $\frac{4}{x} - \frac{6}{y}$ 의 값

82. $2^x = 9^y = 12$ 일 때, $\frac{4}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값

83. $20^x = 32$, $5^y = 16$ 일 때, $\frac{5}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값

84. $9^x = 8^y = 36$ 일 때, $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y}$ 의 값

85. $2^x = 3^y = 36$ 일 때, $\frac{4(x^2+y^2)-x^2y^2}{2(x+y)}$ 의 값



정답 및 해설

- 1) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$
 $\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$ 이고,
 $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} \quad \therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$
- 2) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$
 $\Rightarrow \sqrt[4]{3} = \sqrt[20]{3^5} = \sqrt[20]{243}, \sqrt[5]{4} = \sqrt[20]{4^4} = \sqrt[20]{256}$ 이고,
 $\sqrt[20]{243} < \sqrt[20]{256} \quad \therefore \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$
- 3) $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2} \times 2} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{(2^3)^3} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[12]{512}$
 $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times 3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[12]{(3^3)^2} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$
 이므로 $\sqrt[12]{512} < \sqrt[12]{729}$
 $\therefore \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$
- 4) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}, \sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$ 이고,
 $\sqrt[12]{625} > \sqrt[12]{512} \quad \therefore \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}$
- 5) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{\sqrt{6}}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{2} = \sqrt[24]{2^8} = \sqrt[24]{256}, \sqrt[4]{\sqrt{6}} = \sqrt[8]{6} = \sqrt[24]{6^3} = \sqrt[24]{216}$ 이고,
 $\sqrt[24]{256} > \sqrt[24]{216} \quad \therefore \sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{\sqrt{6}}$
- 6) $\sqrt[6]{\sqrt{3}} < \sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$
 $\Rightarrow \sqrt[6]{\sqrt{3}} = \sqrt[12]{3} = \sqrt[60]{3^5} = \sqrt[60]{243},$
 $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[15]{4} = \sqrt[60]{4^4} = \sqrt[60]{256}$ 이고,
 $\sqrt[60]{243} < \sqrt[60]{256} \quad \therefore \sqrt[6]{\sqrt{3}} < \sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$
- 7) $2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} > \sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow (2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2})$
 $= \sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$
 $= \sqrt[6]{3^2} - \sqrt[6]{2^3}$
 $= \sqrt[6]{9} - \sqrt[6]{8} > 0$
 $\therefore 2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} > \sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}$
- 8) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$
 $\Rightarrow \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}$ 에서 2, 3, 4의 최소공배수가 12이
 고 $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}, \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$
 이때, $2^6, 3^4, 5^3$ 의 대소를 비교하면 $2^6 < 3^4 < 5^3$
 $\therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$
- 9) $\sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{7} < \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{7}, \sqrt{3}$ 에서 2, 3, 4의 최소공배수가 12이
 고, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{3^6}, \sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{4^4}, \sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}$
 이때, $3^6, 4^4, 7^3$ 의 대소를 비교하면 $4^4 < 7^3 < 3^6$
 $\therefore \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{7} < \sqrt{3}$

- 10) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$
 $\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$ 이므로
 $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} < \sqrt[6]{10}$
 $\therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$
- 11) $\sqrt[6]{26} < \sqrt[3]{6} < \sqrt{5}$
 $\Rightarrow \sqrt[6]{26}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{6}$ 에서 3, 2, 6의 최소공배수가 6이
 고, $\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2}, \sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3}, \sqrt[6]{26}$
 이때, $6^2, 5^3, 26$ 의 대소를 비교하면 $26 < 6^2 < 5^3$
 $\therefore \sqrt[6]{26} < \sqrt[3]{6} < \sqrt{5}$
- 12) $\sqrt[12]{7} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[3]{3}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}, \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}, \sqrt[12]{7} = 7^{\frac{1}{12}}$ 에서
 지수 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ 의 분모의 최소공배수는 12 이므
 로 $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = (3^4)^{\frac{1}{12}} = 81^{\frac{1}{12}}$
 $\sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{12}} = (5^2)^{\frac{1}{12}} = 25^{\frac{1}{12}}$
 $\sqrt[12]{7} = 7^{\frac{1}{12}}$
 $\therefore \sqrt[12]{7} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[3]{3}$
- 13) $\sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{7} < \sqrt{2}$
 $\Rightarrow \sqrt[9]{10}, \sqrt[6]{7}, \sqrt{2}$ 에서 9, 6, 2의 최소공배수가 18
 이고, $\sqrt[9]{10} = \sqrt[18]{10^2}, \sqrt[6]{7} = \sqrt[18]{7^3}, \sqrt{2} = \sqrt[18]{2^9}$
 $10^2, 7^3, 2^9$ 의 대소를 비교하면
 $10^2 < 7^3 < 2^9$
 $\therefore \sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{7} < \sqrt{2}$
- 14) $\sqrt[3]{2} < \sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{5}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{2}, \sqrt[9]{10}, \sqrt[6]{5}$ 에서 3, 6, 9의 최소공배수가 18
 이고, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[18]{2^6}, \sqrt[9]{10} = \sqrt[18]{10^2}, \sqrt[6]{5} = \sqrt[18]{5^3}$
 이때, $2^6, 5^3, 10^2$ 의 대소를 비교하면 $2^6 < 10^2 < 5^3$
 $\therefore \sqrt[3]{2} < \sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{5}$
- 15) $\sqrt{\sqrt[3]{12}} < \sqrt[6]{4} < \sqrt[4]{3}$
 $\Rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[12]{12}, \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{4^2}$ 에서 4, 12, 6의 최소
 공배수가 12이고 $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}, \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{4^2}$
 $3^3, 12, 4^2$ 의 대소를 비교하면
 $12 < 4^2 < 3^3$
 $\therefore \sqrt{\sqrt[3]{12}} < \sqrt[6]{4} < \sqrt[4]{3}$
- 16) $\sqrt{\sqrt[3]{10}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{\sqrt{6}}$
 $\Rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[12]{10}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[12]{10}$ 에서
 6, 3, 12의 최소공배수가 12이므로
 $\sqrt[12]{6^2}, \sqrt[12]{2^4}, \sqrt[12]{10}$
 이때, $10 < 2^4 < 6^2$ 이므로 $\sqrt[12]{10} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{6^2}$

$$\therefore \sqrt{\sqrt[3]{10}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{\sqrt{6}}$$

17) $a - a^{-1}$

⇒ 곱셈 공식 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 을 이용하면

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}})^2 - (a^{-\frac{1}{2}})^2 = a - a^{-1}$$

18) $a - b$

$$\Rightarrow (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 = a - b$$

19) 4

⇒ 곱셈 공식 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 을 이용하면

$$\begin{aligned} & (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 \\ &= (a + 2 + a^{-1}) - (a - 2 + a^{-1}) = 4 \end{aligned}$$

20) $a + b$

$$\Rightarrow (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}})^3 = a + b$$

21) $2a + 6a^{-\frac{1}{3}}$

⇒ 곱셈 공식 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ 을 이용하면

$$\begin{aligned} & (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 + (a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= (a + 3a^{\frac{1}{3}} + 3a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1}) + (a - 3a^{\frac{1}{3}} + 3a^{-\frac{1}{3}} - a^{-1}) \\ &= 2a + 6a^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

22) $a + a^{-1}$

⇒ 곱셈 공식 $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ 을 이용하면

$$\begin{aligned} & (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}) \\ &= (a^{\frac{1}{3}})^3 + (a^{-\frac{1}{3}})^3 = a + a^{-1} \end{aligned}$$

23) $a - b$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{4}} = A, b^{\frac{1}{4}} = B \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned} & a^{\frac{1}{2}} = A^2, b^{\frac{1}{2}} = B^2 \\ & \therefore (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (A - B)(A + B)(A^2 + B^2) \\ &= (A^2 - B^2)(A^2 + B^2) \\ &= A^4 - B^4 \\ &= (a^{\frac{1}{4}})^4 - (b^{\frac{1}{4}})^4 \\ &= a - b \end{aligned}$$

24) $a - a^{-1}$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{4}} = A, a^{-\frac{1}{4}} = B \text{로 놓으면}$$

$$(a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})$$

$$= (A - B)(A + B)(A^2 + B^2)$$

$$= (A^2 - B^2)(A^2 + B^2)$$

$$= A^4 - B^4$$

$$= (a^{\frac{1}{4}})^4 - (a^{-\frac{1}{4}})^4 = a - a^{-1}$$

25) 79

⇒ $a + a^{-1} = 9$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 81 \quad \therefore a^2 + a^{-2} = 79$$

26) $\sqrt{11}$

$$\Rightarrow (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{11} \quad (\because a > 0)$$

27) $8\sqrt{11}$

⇒ $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{11}$ 의 양변을 세제곱하면

$$a^{\frac{3}{2}} + 3(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) + a^{-\frac{3}{2}} = 11\sqrt{11}$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 11\sqrt{11} - 3\sqrt{11} = 8\sqrt{11}$$

28) 11

⇒ $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면

$$a - 2 + a^{-1} = 9 \quad \therefore a + a^{-1} = 11$$

29) $3\sqrt{13}$

$$\Rightarrow (a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 11^2 - 4 = 117$$

$$\therefore a - a^{-1} = 3\sqrt{13} \quad (\because a > 1)$$

30) 119

⇒ $a + a^{-1} = 11$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 121$$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = 119$$

31) 36

⇒ $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면

$$a^{\frac{3}{2}} - 3(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) - a^{-\frac{3}{2}} = 27$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = 27 + 3 \cdot 3 = 36$$

32) $\pm 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow (a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4$$

$$= 7^2 - 4 = 45$$

$$\therefore a - a^{-1} = \pm 3\sqrt{5}$$

33) 7

$$\Rightarrow a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}})^2 + (a^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2$$

$$= 3^2 - 2 = 7$$

34) 47

$$\Rightarrow a + a^{-1} = 7 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 49 \quad \therefore a^2 + a^{-2} = 47$$

35) 18

$$\Rightarrow a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 + (a^{-\frac{1}{2}})^3$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 3^3 - 3 \times 1 \times 3$$

$$= 18$$

36) 52

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} = 4 \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$a + 3(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}) + a^{-1} = 64$$

$$\therefore a + a^{-1} = 64 - 3 \cdot 4 = 52$$

37) $3\sqrt{6}$

$$\Rightarrow (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 52 + 2 = 54$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \quad (\because a > 0)$$

38) 14

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} = 4 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a^{\frac{2}{3}} + 2 + a^{-\frac{2}{3}} = 16 \quad \therefore a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} = 14$$

39) $\frac{21}{4}$

$$\Rightarrow \text{분모, 분자에 } a^{6x} \text{을 각각 곱하면}$$

$$\frac{a^{6x} - a^{-6x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{a^{12x} - 1}{a^{8x} - a^{4x}} = \frac{(a^{2x})^6 - 1}{(a^{2x})^4 - (a^{2x})^2}$$

$$= \frac{64 - 1}{16 - 4} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$$

40) $\frac{13}{4}$

$$\Rightarrow \text{분모, 분자에 } a^{7x} \text{을 각각 곱하면}$$

$$\frac{a^{5x} + a^{-7x}}{a^x + a^{-3x}} = \frac{a^{12x} + 1}{a^{8x} + a^{4x}} = \frac{(a^{2x})^6 + 1}{(a^{2x})^4 + (a^{2x})^2}$$

$$= \frac{64 + 1}{16 + 4} = \frac{65}{20} = \frac{13}{4}$$

41) $\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \text{분모, 분자에 } a^{3x} \text{을 각각 곱하면}$$

$$\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{6x} + 1}{a^{4x} + a^{2x}} = \frac{(a^{2x})^3 + 1}{(a^{2x})^2 + a^{2x}} = \frac{8 + 1}{4 + 2}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

42) 3

 \Rightarrow 분모, 분자에 a^x 을 각각 곱하면

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3$$

43) $\frac{13}{14}$

$$\Rightarrow \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^{3x} \text{을 곱하면}$$

$$\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{3x} + a^{-3x}}$$

$$= \frac{a^{3x}(a^{3x} - a^{-3x})}{a^{3x}(a^{3x} + a^{-3x})} = \frac{a^{6x} - 1}{a^{6x} + 1} = \frac{(a^{2x})^3 - 1}{(a^{2x})^3 + 1}$$

$$= \frac{27 - 1}{27 + 1} = \frac{13}{14}$$

44) 3

$$\Rightarrow \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^{3x} \text{을 곱하면}$$

$$\frac{a^{3x} + a^{-x}}{a^x + a^{-3x}}$$

$$= \frac{a^{3x}(a^{3x} + a^{-x})}{a^{3x}(a^x + a^{-3x})} = \frac{a^{6x} + a^{2x}}{a^{4x} + 1} = \frac{(a^{2x})^3 + a^{2x}}{(a^{2x})^2 + 1}$$

$$= \frac{27 + 3}{9 + 1} = 3$$

45) $\frac{14}{3}$

$$\Rightarrow \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^{3x} \text{을 곱하면}$$

$$\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$$

$$= \frac{a^{3x}(a^{3x} + a^{-3x})}{a^{3x}(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{6x} + 1}{a^{4x} - a^{2x}} = \frac{(a^{2x})^3 + 1}{(a^{2x})^2 - a^{2x}}$$

$$= \frac{27 + 1}{9 - 3} = \frac{14}{3}$$

46) 2

$$\Rightarrow \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면}$$

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = 2$$

47) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

$$\Rightarrow a^{3x} + a^{-3x} = (a^x)^3 + (a^x)^{-3}$$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

48) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow a^{2x} = (a^x)^2 = 2 \text{에서 } a^x = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a^x - a^{-x} = a^x - (a^x)^{-1}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

49) 2

$$\Rightarrow \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 3$$

$$a^{2x} + 1 = 3a^{2x} - 3, \quad 2a^{2x} = 4 \quad \therefore a^{2x} = 2$$

50) $\frac{13}{6}$

$$\Rightarrow \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 5$$

$$a^{2x} + 1 = 5a^{2x} - 5, \quad 4a^{2x} = 6 \quad \therefore a^{2x} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^{2x} + a^{-2x} = a^{2x} + (a^{2x})^{-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{13}{6}$$

51) 140

$$\Rightarrow a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 - (a^{-\frac{1}{2}})^3$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^3 + 3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 5^3 + 3 \times 1 \times 5$$

$$= 140$$

52) ± 5

$$\Rightarrow (a - a^{-1})^2 = a^2 + a^{-2} - 2 = 27 - 2 = 25$$

$$\therefore a - a^{-1} = \pm 5$$

53) 18

$$\Rightarrow a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}})^2 + (a^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

54) 119

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a - 2 + a^{-1} = 9 \quad \therefore a + a^{-1} = 11$$

$$a + a^{-1} = 11 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 121 \quad \therefore a^2 + a^{-2} = 121 - 2 = 119$$

55) 5

$$\Rightarrow (i) \quad a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5 \text{의 양변을 제제곱하면}$$

$$a^{\frac{3}{2}} + 3(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) + a^{-\frac{3}{2}} = 125$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 125 - 3 \times 5 = 110$$

$$(ii) \quad a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a + 2 + a^{-1} = 25 \quad \therefore a + a^{-1} = 23$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여}$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 10}{a + a^{-1} - 3} = \frac{100}{20} = 5$$

56) 4

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{3}} = A, \quad a^{-\frac{1}{3}} = B \text{라 하자.}$$

$$A^2 + B^2 = 5, \quad AB = 1$$

$$(\text{준식}) = (A^3 + B^3) \div (A + B) = \frac{(A+B)(A^2 - AB + B^2)}{A+B}$$

$$= A^2 + B^2 - 1 = 5 - 1 = 4$$

57) $\frac{1}{2}$

\Rightarrow 주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{3x} - a^{-x}}{a^x - a^{-3x}}$$

$$= \frac{a^x(a^{3x} - a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-3x})} = \frac{a^{4x} - 1}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{(a^{2x})^2 - 1}{a^{2x} - (a^{2x})^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{1}{2}$$

58) $\frac{73}{15}$

\Rightarrow 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x} 을 곱하면

$$\frac{a^{3x} + a^{-3x} + a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{3x}(a^{3x} + a^{-3x} + a^x - a^{-x})}{a^{3x}(a^x + a^{-x})}$$

$$= \frac{a^{6x} + 1 + a^{4x} - a^{2x}}{a^{4x} + a^{2x}}$$

$$= \frac{(a^{2x})^3 + 1 + (a^{2x})^2 - a^{2x}}{(a^{2x})^2 + a^{2x}}$$

$$= \frac{125 + 1 + 25 - 5}{25 + 5} = \frac{73}{15}$$

59) 25

\Rightarrow 분모, 분자에 3^a 를 각각 곱하면

$$\frac{3^{2a} + 1}{3^{2a} - 1} = \frac{9^a + 1}{9^a - 1} = \frac{3}{2}$$

이것을 정리하면 $9^a = 5$

$$\therefore 81^a = 9^{2a} = (9^a)^2 = 5^2 = 25$$

60) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2}, \quad 2a^x - 2a^{-x} = a^x + a^{-x}, \quad a^x = 3a^{-x},$$

$$a^{2x} = 3, \quad a^x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^x + a^{-x}} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

61) $\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^x(2^x - 2^{-x})}{2^x(2^x + 2^{-x})} = \frac{2^{2x} - 1}{2^{2x} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 3 = 2^{2x} + 1, \quad 2 \cdot 2^{2x} = 4 \quad \therefore 2^{2x} = 2$$

$$\therefore 4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + (2^{2x})^{-1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

62) $\frac{15}{4}$

⇒ 분모, 분자에 3^a 를 각각 곱하면

$$\frac{3^{2a}-1}{3^{2a}+1} = \frac{9^a-1}{9^a+1} = \frac{3}{5}$$

이것을 정리하면 $9^a = 4$

$$\therefore 9^a - 9^{-a} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

63) $\frac{1}{3}$

⇒ 분모, 분자에 2^a 를 각각 곱하면

$$\frac{2^{2a}-1}{2^{2a}+1} = \frac{4^a-1}{4^a+1} = \frac{1}{2}$$

이것을 정리하면 $4^a = 3 \quad \therefore 4^{-a} = \frac{1}{3}$

64) $\frac{1}{3}$

⇒ 분모, 분자에 2^a 를 각각 곱하면

$$\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1} = \frac{4^a+1}{4^a-1} = -2$$

이것을 정리하면 $4^a = \frac{1}{3}$

65) 3

⇒ $8^x = 10$ 에서 $8 = 10^{\frac{1}{x}}$ ㉠ $125^y = 10$ 에서 $125 = 10^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠×㉡을 하면

$$1000 = 10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}}, \quad 10^3 = 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

66) 3

⇒ $8^x = 6$ 에서 $8 = 6^{\frac{1}{x}}$ ㉠ $27^y = 6$ 에서 $27 = 6^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠×㉡에서

$$216 = 6^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \quad 6^3 = 6^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

67) 2

⇒ $3^x = 12^y = 6$ 이므로 $3 = 6^{\frac{1}{x}}, \quad 12 = 6^{\frac{1}{y}}$

$$6^{\frac{1}{x}} \times 6^{\frac{1}{y}} = 6^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 3 \times 12 = 36 = 6^2$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

68) 1

⇒ $5^x = 30$ 에서 $5 = 30^{\frac{1}{x}}$ ㉠ $6^y = 30$ 에서 $6 = 30^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠×㉡에서

$$5 \times 6 = 30^{\frac{1}{x}} \times 30^{\frac{1}{y}} = 30^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

69) 2

⇒ $25^x = 10$ 에서 $25 = 10^{\frac{1}{x}}$ ㉠ $4^y = 10$ 에서 $4 = 10^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠×㉡에서

$$100 = 10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}}, \quad 10^2 = 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

70) 2

⇒ $2^x = \sqrt{10}$ 에서 $2 = (\sqrt{10})^{\frac{1}{x}}$ ㉠ $\left(\frac{1}{5}\right)^y = \sqrt{10}$ 에서 $\frac{1}{5} = (\sqrt{10})^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠÷㉡에서

$$10 = (\sqrt{10})^{\frac{1}{x}} \div (\sqrt{10})^{\frac{1}{y}}$$

$$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{10})^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$$

71) 1

⇒ $5^x = 4^y = 20$ 이므로 $5 = 20^{\frac{1}{x}}, 4 = 20^{\frac{1}{y}}$

$$20^{\frac{1}{x}} \times 20^{\frac{1}{y}} = 20^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 5 \times 4 = 20$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

72) 2

⇒ $20^x = 8$ 에서 $8^{\frac{1}{x}} = (2^3)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{3}{x}}$ ㉠ $5^y = 16$ 에서 $5 = 16^{\frac{1}{y}} = (2^4)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{4}{y}}$ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$$4 = 2^{\frac{3}{x}} \div 2^{\frac{4}{y}}, \quad 2^2 = 2^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 2$$

73) 8

⇒ $7^{\frac{y}{2}} = 16 = 2^4$ 에 $2^x = 7$ 을 대입하면

$$7^{\frac{y}{2}} = (2^x)^{\frac{y}{2}} = 2^{\frac{xy}{2}} = 2^4 \text{이므로}$$

$$\frac{xy}{2} = 4 \quad \therefore xy = 8$$

74) -6

75) 1

$$\Rightarrow 15^x = 5 \text{에서 } 15 = 5^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$3^y = 5 \text{에서 } 3 = 5^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \div \textcircled{8} \text{에서}$$

$$5 = 5^{\frac{1}{x}} \div 5^{\frac{1}{y}} = 5^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$$

76) 2

77) -1

$$\Rightarrow 5^x = 81 \text{에서 } 5 = 81^{\frac{1}{x}} = (3^4)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{4}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$15^y = 27 \text{에서 } 15 = 27^{\frac{1}{y}} = (3^3)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{3}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \div \textcircled{8} \text{에서}$$

$$\frac{1}{3} = 3^{\frac{4}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}}, \quad 3^{-1} = 3^{\frac{4}{x} - \frac{3}{y}}$$

$$\therefore \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = -1$$

78) 2

$$\Rightarrow 18^x = 27 \text{에서 } 18 = 27^{\frac{1}{x}} = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$2^y = 9 \text{에서 } 2 = 9^{\frac{1}{y}} = (3^2)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{2}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \div \textcircled{8} \text{에서}$$

$$9 = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{2}{y}}, \quad 3^2 = 3^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 2$$

79) -2

$$\Rightarrow 67^x = 27 \text{에서 } 67 = 27^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$603^y = 81 \text{에서 } 603 = 81^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \div \textcircled{8} \text{에서 } \frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}} \text{ 이므로 } 3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

80) -2

$$\Rightarrow 9^x = 32 \text{에서 } 9 = 32^{\frac{1}{x}} = (2^5)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{5}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$36^y = 16 \text{에서 } 36 = 16^{\frac{1}{y}} = (2^4)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \div \textcircled{8} \text{에서}$$

$$\frac{1}{4} = 2^{\frac{5}{x}} \div 2^{\frac{4}{y}}, \quad 2^{-2} = 2^{\frac{5}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

81) -2

82) 2

$$\Rightarrow 2^x = 9^y = 12 \text{이므로 } 2 = 12^{\frac{1}{x}}, \quad 9 = 12^{\frac{1}{y}}$$

$$12^{\frac{4}{x} + \frac{1}{y}} = (12^{\frac{1}{x}})^4 \times 12^{\frac{1}{y}} = 2^4 \times 9 = 144 = 12^2$$

$$\therefore \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

83) 2

84) $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = 36 \text{에서 } 3 = 36^{\frac{1}{2x}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$8^y = (2^3)^y = 2^{3y} = 36 \text{에서 } 2 = 36^{\frac{1}{3y}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \times \textcircled{8} \text{에서}$$

$$6 = 36^{\frac{1}{2x}} \times 36^{\frac{1}{3y}}, \quad 36^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y}}$$

$$\therefore \frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{2}$$

85) -8

$$\Rightarrow 2^x = 36 \Rightarrow 2 = 36^{\frac{1}{x}}$$

$$3^y = 36 \Rightarrow 3 = 36^{\frac{1}{y}}$$

$$2 \times 3 = 36^{\frac{1}{x}} \times 36^{\frac{1}{y}} = 36^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 36^{\frac{x+y}{xy}}$$

$$6 = 36^{\frac{x+y}{xy}}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}$$

$$x+y = \frac{1}{2}xy$$

$$\therefore \frac{4(x^2+y^2)-x^2y^2}{2(x+y)} = \frac{4\{(x+y)^2-2xy\}-x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$= \frac{4\left\{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-2xy\right\}-x^2y^2}{2\left(\frac{1}{2}xy\right)}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{4}x^2y^2-2xy\right)-x^2y^2}{xy}$$

$$= \frac{x^2y^2-8xy-x^2y^2}{xy}$$

$$=-8$$