01 곱셈공식의 변형 - 문자가 2개일 때

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(4) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

◪ $a,\ b$의 값이 주어졌을 때, <보기>의 식의 값을 구하여라.

1. $a=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3}$

<보기>
$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$

2. $a=\sqrt{3}+1,\ b=\sqrt{3}-1$

<보기>
a^3+b^3

3. $a=\sqrt{5}+2,\ b=\sqrt{5}-2$

<보기>
a^3-b^3

4. $a=1+\sqrt{2},\ b=1-\sqrt{2}$

<보기>
a^3-b^3

5. $a=1+\sqrt{2},\ b=1-\sqrt{2}$

<보기>
a^3+b^3

6. $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$일 때

<보기>
x^3+y^3+3xy

◪ a,b의 조건이 다음과 같을 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

7. $a-b=-2,\ ab=3$일 때

8. $a-b=5,\ ab=2$일 때

9. $a+b=6,\ ab=3$일 때

10. $a+b=-3,\ ab=2$일 때

11. $a-b=3,\ ab=2$일 때

12. $a+b=2,\ ab=-1$일 때

13. $a+b=3,\ ab=-10$일 때

14. $a-b=-4,\ ab=3$일 때

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

◪ a, b의 조건이 다음과 같을 때, a^3+b^3의 값을 구하여라.

15. $a=\sqrt{3}+1, b=\sqrt{3}-1$일 때,

16. $a=\sqrt{2}+2, b=\sqrt{2}-2$일 때

17. $a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3}$일 때

18. $a+b=1, ab=-2$일 때

19. $a+b=5,\ ab=3$일 때

20. $a+b=-4,\ ab=-5$일 때

21. $a+b=3,\ ab=-2$일 때

22. $a+b=4,\ ab=2$일 때

23. $a+b=3,\ ab=-2$일 때

24. $a+b=3,\ a^2+b^2=5$일 때

25. $a+b=2,\ a^2+b^2=6$일 때

26. $a+b=5,\ a^2+b^2=21$일 때

27. $a+b=-1,\ (a-b)^2=9$일 때

28. $a^2=4+2\sqrt{3},\ b^2=4-2\sqrt{3}$일 때 ($a>0,\ b>0$)

◪ a, b의 조건이 다음과 같을 때, a^3-b^3의 값을 구하여라.

29. $a=-1+\sqrt{2},\ b=-1-\sqrt{2}$일 때

30. $a=\sqrt{3}+1,\ b=\sqrt{3}-1$일 때

31. $a-b=-1,\ ab=-5$일 때

32. $a-b=-4,\ ab=3$일 때

33. $a-b=3,\ ab=-2$

34. $a-b=-4, ab=-5$

35. $a-b=3,\ ab=1$일 때

36. $a-b=1,\ ab=4$일 때

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

37. $a-b=2, (a+b)^2=12$일 때

38. $a-b=-3,\ a^2+b^2=11$

39. $a-b=-2,\ a^2+b^2=6$

40. $a-b=-4,\ a^2+b^2=14$

41. $a+b=-1,\ a^2+b^2=5$(단, $a>b$)

02 곱셈공식의 변형 - 문자가 3개일 때

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(3) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

◪ $a,\ b,\ c$의 조건이 다음과 같을 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

42. $a+b+c=\sqrt{6}, ab+bc+ca=2$일 때

43. $a+b+c=3,\ ab+bc+ca=-1$일 때

44. $a+b+c=9,\ ab+bc+ca=8$일 때

45. $a+b+c=-2,\ ab+bc+ca=-1$일 때

46. $a+b+c=3, ab+bc+ca=2$일 때

47. $a+b+c=2, ab+bc+ca=-2$일 때

48. $a+b+c=3, ab+bc+ca=2$일 때

49. $a+b+c=4, ab+bc+ca=1$일 때

◪ $a,\ b,\ c$의 조건이 다음과 같을 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하여라.

50. $a+b+c=3, ab+bc+ca=2, abc=-3$일 때

51. $a+b+c=4, ab+bc+ca=1, abc=-6$일 때

52. $a+b+c=2, a^2+b^2+c^2=6, abc=-2$일 때

53. $a+b+c=5, a^2+b^2+c^2=11, abc=4$일 때

54. $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=12,\ abc=2$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

03 곱셈공식의 변형 - 분수꼴

(1) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

(2) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4,\ \left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$

(3) $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

◪ x의 조건이 다음과 같을 때, 주어진 식의 값을 구하여라.

55. $x+\frac{1}{x}=3$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

(3) $x-\frac{1}{x}$

56. $x+\frac{1}{x}=4$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

(3) $x-\frac{1}{x}$

57. $x-\frac{1}{x}=6$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(3) $x+\frac{1}{x}$

58. $x-\frac{1}{x}=5$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(3) $x+\frac{1}{x}$

59. $x-\frac{1}{x}=-1$일 때(단, $0<x<1$)

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x+\frac{1}{x}$

(3) $x^3-\frac{1}{x^3}$

60. $x^2-3x-1=0$일 때

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}$

61. $x^2-4x+1=0$일 때

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$

62. $x^2-3x+1=0$일 때

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

63. $x^2-2x-1=0$일 때

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}$

64. $x^2-x-1=0$일 때,

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}$

65. $x^2-x+1=0$

(1) $x+\frac{1}{x}$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}$

66. $x^2-5x+1=0$

(1) $x+\frac{1}{x}$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}$

67. $x^2+3x+1=0$일 때

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3+x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

◪ a의 조건이 다음과 같을 때, 주어진 식의 값을 구하여라.

68. $a+\frac{1}{a}=3$일 때, $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

69. $a+\frac{1}{a}=2$일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$

70. $a+\frac{1}{a}=3$일 때, $a^3+\frac{1}{a^3}$

71. $a+\frac{1}{a}=-2$일 때, $a^3+\frac{1}{a^3}$

72. $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$일 때, $a^3+\frac{1}{a^3}$

73. $a+\frac{1}{a}=-5$일 때, $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

74. $a-\frac{1}{a}=-3$일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$

75. $a-\frac{1}{a}=1$일 때, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$

76. $a-\frac{1}{a}=4$일 때, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

77. $a-\frac{1}{a}=3$일 때, $a^3-\frac{1}{a^3}$

78. $a-\frac{1}{a}=-5$일 때, $a^3-\frac{1}{a^3}$

79. $a-\frac{1}{a}=4$일 때, $a^3-\frac{1}{a^3}$

◪ **곱셈 공식을 이용하여 다음 수를 계산하여라.**

80. 193×207

81. $197\times203+202\times202-199\times199$

82. $101\times(10000-100+1)-99$

83. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)$

84. $(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

85. $(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)$

86. $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

87. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)$

88. $\frac{2014\times2016+1}{2015}$

89. $\frac{121+1011\times989}{100}$

90. $\frac{99\times101\times(10^4+1)}{2017^2-2015\times2019}$

정답 및 해설

1) 52

⇨ $a+b=4, ab=1$이므로

$$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}=\frac{a^3+b^3}{ab}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{4^3-3\cdot1\cdot4}{1}=52$$

2) $12\sqrt{3}$

⇨ $a+b=2\sqrt{3}$, $ab=2$이므로

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

3) 76

⇨ $a-b=4, ab=1$이므로

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=4^3+3\cdot1\cdot4=76$$

4) $10\sqrt{2}$

⇨ $a-b=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

$ab=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=(2\sqrt{2})^3+3\cdot(-1)\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

5) 14

⇨ $a+b=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,

$ab=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$$

6) 1

⇨ $x^3+y^3+3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+3xy$

$$=(x+y)^3-3xy(x+y-1)$$

$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$를 대입하면

$$(x+y)^3-3xy(x+y-1)$$
$$=(1)^3-3\left(\frac{1-3}{4}\right)(1-1)=1$$

7) 10

⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-2)^2+2\cdot3=10$

8) 29

⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=5^2+2\cdot2=29$

9) 30

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\cdot3=30$

10) 5

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-3)^2-2\cdot2=5$

11) 13

⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=3^2+2\cdot2=13$

12) 6

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\cdot(-1)=6$

13) 29

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-10)=29$

14) 22

⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-4)^2+2\cdot3=22$

15) $12\sqrt{3}$

⇨ $a+b=2\sqrt{3}$, $ab=2$이므로

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

16) $28\sqrt{2}$

⇨ $a+b=2\sqrt{2}$, $ab=-2$이므로

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot(-2)\cdot2\sqrt{2}=28\sqrt{2}$$

17) 52

⇨ $a+b=4$, $ab=1$이므로

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot1\cdot4=52$

18) 7

⇨ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1^3-3\cdot(-2)\cdot1=7$

19) 80

⇨ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=5^3-3\cdot3\cdot5=80$

20) -124

⇨ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$$=(-4)^3-3\cdot(-5)\cdot(-4)=-124$$

21) 45

⇨ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$$=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$$

22) 40

⇨ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot2\cdot4=40$

23) 45

⇨ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$

24) 9

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$5=3^2-2ab \quad \therefore ab=2$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3\cdot2\cdot3=9$

25) 14

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$6=2^2-2ab \quad \therefore ab=-1$

$$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$$

26) 95

⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
$21=5^2-2ab \quad \therefore ab=2$
$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=5^3-3\cdot2\cdot5=95$

27) -7
⇨ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$이므로
$9=(-1)^2-4ab \quad \therefore ab=-2$
$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-1)^3-3\cdot(-2)\cdot(-1)=-7$

28) $12\sqrt{3}$
⇨ $a^2b^2=4$에서 $ab=2(\because a>0, b>0)$
이때, $a^2+b^2=8$이고 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
$8=(a+b)^2-2\cdot2, \ (a+b)^2=12$
$\therefore a+b=2\sqrt{3}(\because a>0, b>0)$
$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

29) $10\sqrt{2}$
⇨ $a-b=2\sqrt{2}, \ ab=-1$이므로
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\cdot(-1)\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

30) 20
⇨ $a-b=2, \ ab=2$이므로
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=2^3+3\cdot2\cdot2=20$

31) 14
⇨ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-1)^3+3\cdot(-5)\cdot(-1)=14$

32) -100
⇨ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-4)^3+3\cdot3\cdot(-4)$
$=-100$

33) 9
⇨$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=3^3+3\cdot(-2)\cdot3=9$

34) -4
⇨ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-4)^3+3\cdot(-5)\cdot(-4)=-4$

35) 36
⇨ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=3^3+3\cdot1\cdot3=36$

36) 13
⇨ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=1^3+3\cdot4\cdot1=13$

37) 20
⇨ $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$이므로
$12=2^2+4ab \quad \therefore ab=2$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=2^3+3\cdot2\cdot2=20$

38) -36
⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로
$11=(-3)^2+2ab \quad \therefore ab=1$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-3)^3+3\cdot1\cdot(-3)=-36$

39) -14
⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로
$6=(-2)^2+2ab \quad \therefore ab=1$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-2)^3+3\cdot1\cdot(-2)=-14$

40) -52
⇨ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로
$14=(-4)^2+2ab \quad \therefore ab=-1$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-4)^3+3\cdot(-1)\cdot(-4)=-52$

41) 9
⇨ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$5=1-2ab \quad \therefore ab=-2$
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=1+8=9$
$\therefore a-b=3(\because a>b)$
$a-b=3, \ ab=-2$이므로
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=3^3+3\cdot(-2)\cdot3=9$

42) 2
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(\sqrt{6})^2-2\cdot2=2$

43) 11
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\cdot(-1)=11$

44) 65
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=9^2-2\cdot8=65$

45) 6
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(-2)^2-2\cdot(-1)=6$

46) 5
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\cdot2=5$

47) 8
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=2^2-2\cdot(-2)=8$

48) 5

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\cdot2=5$

49) 14
⇨ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=4^2-2\cdot1=14$

50) 0
⇨ $a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=3(5-2)+3\cdot(-3)=0$

51) 34
⇨ $a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=4(14-1)+3\cdot(-6)=34$

52) 8
⇨ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$4=6+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=-1$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=2\{6-(-1)\}+3\cdot(-2)$
$=8$

53) 32
⇨ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$25=11+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=7$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=5(11-7)+3\cdot4=32$

54) 38
⇨ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$4=12+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=-4$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=2\{12-(-4)\}+3\cdot2=38$

55) (1) 7 (2) 5 (3) $\pm\sqrt{5}$
⇨ (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$
(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$
(3) $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

56) (1) 14 (2) 12 (3) $\pm2\sqrt{3}$
⇨ (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$
(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$
(3) $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

57) (1) 38 (2) 40 (3) $\pm2\sqrt{10}$
⇨ (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=6^2=2=38$
(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=6^2+4=40$
(3) $\frac{x+1}{x}=\pm\sqrt{40}=\pm2\sqrt{10}$

58) (1) 27 (2) 29 (3) $\pm\sqrt{29}$
⇨ (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=5^2+2=27$
(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=5^2+4=29$
(3) $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{29}$

59) (1) 3 (2) $\sqrt{5}$ (3) -4
⇨ (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(-1)^2+2=3$
(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=(-1)^2+4=5$
$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}\ (\because 0<x<1)$
(3) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=(-1)^3+3\cdot(-1)=-4$

60) (1) 11 (2) 36
⇨ $x\neq0$이므로 $x^2-3x-1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-3-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=3$
(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$
(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=3^3+3\cdot3=36$

61) (1) 14 (2) 52
⇨ $x\neq0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-4+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=4$
(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$
(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=4^3-3\cdot4=52$

62) (1) 7 (2) 18
⇨ (1) $x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의
양변을 x로 나누면
$x-3+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=3$
$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$
(2) $x+\frac{1}{x}=3$이므로

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\cdot3=18$

63) (1) 6 (2) 14

⇨ $x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=2$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=2^3+3\cdot2=14$

64) (1) 3 (2) 4

⇨ (1) $x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면 $x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$

(2) $x-\frac{1}{x}=1$이므로

$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=1^3+3\cdot1=4$

65) (1) 1 (2) -1 (3)-2

⇨ (1) $x^2-x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=1$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1^2-2=-1$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=1-3\cdot1=-2$

66) (1) 5 (2) 23 (3) 110

⇨ (1) $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=5$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=125-3\cdot5=110$

67) (1) 7 (2) -14

⇨ (1) $x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면 $x+3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-3$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-3)^2-2=7$

(2) $x+\frac{1}{x}=-3$이므로

$x^3+x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$
$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=\{(-3)^3-3\cdot(-3)\}+\{(-3)^2-2\}+(-3)$
$=-18+7-3=-14$

68) 5

⇨ $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=3^2-4=5$

69) 2

⇨ $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=2^2-2=2$

70) 18

⇨ $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)=3^3-3\cdot3=18$

71) -2

⇨ $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$
$=(-2)^3-3\cdot(-2)=-2$

72) $\frac{65}{8}$

⇨ $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\cdot\frac{5}{2}=\frac{65}{8}$

73) 21

⇨ $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=(-5)^2-4=21$

74) 11

⇨ $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2=(-3)^2+2=11$

75) 5

⇨ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4=1^2+4=5$

76) 20

⇨ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4=4^2+4=20$

77) 36

⇨ $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$
$=3^3+3\cdot3=36$

78) -140

⇨ $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$
$=(-5)^3+3\cdot(-5)=-140$

79) 76

⇨ $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\cdot\left(a-\frac{1}{a}\right)=4^3+3\cdot4=76$

80) 39951

⇨ $193=200-7$, $207=200+7$이므로

$200=a$로 놓으면

$193\times207=(a-7)(a+7)=a^2-49$

$=200^2-49=39951$

81) 41194

⇨ $197\times203+202\times202-199\times199$

$=(200-3)(200+3)+(200+2)^2-(200-1)^2$

$=200^2-9+200^2+800+4-200^2+400-1$

$=40000+1200-6$

$=41194$

82) 999902

⇨ $100=a$로 놓으면

$101\times(10000-100+1)-99$

$=(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)$

$=(a^3+1)-(a-1)=a^3-a+2$

$=100^3-100+2=999902$

83) 255

⇨ $(a-1)(a+1)=a^2-1$을 이용하기 위하여

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱하면

$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)$

$=2^8-1=255$

84) $\frac{2^{16}-1}{3}$

⇨ 주어진 식의 좌변에 $\frac{1}{3}(2^2-1)$을 곱하면

$\frac{1}{3}(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=\frac{1}{3}(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=\frac{1}{3}(2^8-1)(2^8+1)=\frac{2^{16}-1}{3}$

85) $\frac{3^{32}-1}{8}$

⇨ 주어진 식의 좌변에 $\frac{1}{8}(9-1)$을 곱하면

$\frac{1}{8}(9-1)(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)$

$=\frac{1}{8}(9^2-1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)$

$=\frac{1}{8}(9^4-1)(9^4+1)(9^8+1)$

$=\frac{1}{8}(9^8-1)(9^8+1)$

$=\frac{1}{8}(9^{16}-1)=\frac{3^{32}-1}{8}$

86) $\frac{3^{16}-1}{2}$

⇨ 주어진 식에 $\frac{1}{2}(3-1)$을 곱하면

$\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

↳ $\frac{1}{2}(3-1)=1$

$=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1)=\frac{3^{16}-1}{2}$

87) $\frac{255}{128}$

⇨ 주어진 식에 $2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$을 곱하면

$2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^8}\right)$

$=2\cdot\frac{2^8-1}{2^8}=\frac{255}{128}$

88) 2015

⇨ $\frac{2014\times2016+1}{2015}=\frac{(2015-1)(2015+1)+1}{2015}$

$=\frac{2015^2-1+1}{2015}$

$=2015$

89) 10000

⇨ $\frac{121+1011\times989}{100}=\frac{121+(1000+11)(1000-11)}{100}$

$=\frac{121+10^6-121}{100}$

$=10000$

90) $\frac{10^8-1}{4}$

⇨ $2017=a$라 하면

$\frac{99\times101\times(10^4+1)}{2017^2-2015\times2019}=\frac{(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)}{a^2-(a-2)(a+2)}$

$=\frac{10^8-1}{a^2-a^2+4}$

$=\frac{10^8-1}{4}$