단원 ISSUE

이 단원에서는 **이차방정식과 이차함수 및 이차함수의 최대, 최소를 묻는 문제**가 자주 출제됩니다. 주어진 이차함수를 그래프로 그리는 방법을 이해하도록 하며 복합적인 내용이 자주 출제되니 여러 유형을 반복적으로 학습하도록 합니다.

평가문제

[중단원 마무리]

1. x에 대한 이차함수 $y=x^2-(2m-1)x-(3-m^2)$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 자연수 m의 최솟값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[중단원 마무리]

2. 이차함수 $y=x^2-7x+12$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 a, 이차함수 $y=-3x^2+x-1$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 b, 이차함수 $y=-x^2+4x-4$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 c라 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

[중단원 마무리]

3. 이차함수 $y=x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[중단원 마무리]

4. 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축과 두 점 $(-4,0)$, $(2,0)$에서 만날 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면?

① -48 ② -56 ③ -64 ④ -72 ⑤ -80

[중단원 마무리]

5. 이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프 위의 점 $(2,3)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 방정식이 $y=bx+c$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[대단원 마무리]

6. 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프는 직선 $y=2x+1$과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 중 한 점의 x좌표가 $3+\sqrt{5}$이다. 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[중단원 마무리]

7. 실수 a에 대하여 이차함수 $y=x^2+ax+3a$의 그래프와 직선 $y=x+4a$의 위치관계에 대한 설명으로 옳은 것은?

① a가 음수일 때만 만난다.
② a가 양수일 때만 만난다.
③ a가 양수일 때 접한다.
④ a의 값에 관계없이 항상 만난다.
⑤ a의 값에 관계없이 항상 만나지 않는다.

[대단원 마무리]

8. 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프가 실수 a의 값에 관계없이 직선 $y=mx+n$과 접할 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① -4　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 2

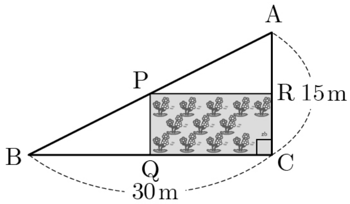
[중단원 마무리]

9. 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=mx-3$이 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위는 $a<m<b$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하면?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리]

10. 다음 그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 30m, 15m인 직각삼각형 모양의 땅에 직사각형 모양의 꽃밭을 만들려고 한다. 이 꽃밭의 넓이의 최댓값을 구하면?



① 110.5m^2　② 111m^2
③ 111.5m^2　④ 112m^2
⑤ 112.5m^2

[중단원 마무리]

11. $-3\le x\le 2$에서 이차함수 $y=-2x^2+4|x|+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

[중단원 마무리]

12. 높이가 15m인 옥상에서 지면과 수직인 방향으로 공을 던질 때, t초 후의 지면으로부터의 공의 높이 $h\text{m}$가 $h=-5t^2+10t+15$라고 한다. 이 공은 $t=a$일 때 최고 높이 $b\text{m}$에 도달한다고 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면?

① 21　② 22
③ 23　④ 24
⑤ 25

[중단원 마무리]

13. 이차함수 $y=ax^2-4x-2a+3$이 $x=2$에서 최솟값 b를 가질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -3　② -2
③ -1　④ 0
⑤ 1

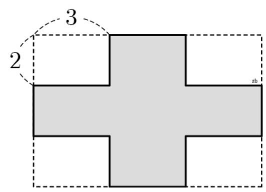
[대단원 마무리]

14. $2\le x\le k$에서 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 최댓값은 19일 때, 상수 k의 값을 구하면? (단, $k>2$이다.)

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[대단원 마무리]

15. 그림과 같이 직사각형 모양의 종이에서 가로, 세로의 길이가 각각 3, 2인 직사각형을 네 귀퉁이에서 잘랐더니 남은 부분의 둘레의 길이가 40이었다. 이때 남은 부분의 넓이의 최댓값을 구하면?



① 47　② 54
③ 65　④ 76
⑤ 82

[중단원 마무리]

16. **이차함수 $y=f(x)$가 $x=-2$에서 최댓값 3을 갖고 $f(0)=-5$일 때, $-1\le x\le 1$에서 이차함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하면?**

① -16　② -15
③ -14　④ -13
⑤ -12

[중단원 마무리]

17. **어떤 가수의 콘서트의 입장권 한 장의 가격을 x만 원, 콘서트를 통해 얻은 이익금을 y만 원이라고 하면 x와 y 사이에는 $y=-250x^2+4000x-7500$인 관계가 성립한다고 한다. 이때 이익이 최대가 되도록 하는 입장권 한 장의 가격과 그때의 이익금을 구하면?**

① 입장권 4만 원일 때, 이익금 4500만 원
② 입장권 4만 원일 때, 이익금 8500만 원
③ 입장권 4만 원일 때, 이익금 9600만 원
④ 입장권 8만 원일 때, 이익금 8500만 원
⑤ 입장권 8만 원일 때, 이익금 9600만 원

[중단원 마무리]

18. **이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 $f(1)=f(-7)$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)**

<보기>

ㄱ. 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다.
ㄴ. $b\ge 9$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이다.
ㄷ. $-\frac{7}{2}\le x\le -\frac{3}{2}$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $\frac{1}{4}$이다.

① ㄱ　② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

실전문제

19. **이차함수 $y=x^2+2x-a+3$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 정수 a의 최댓값은?**

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

20. **이차함수 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 1이고, 직선 $y=4x+5$에 접한다. x의 값의 범위가 $0\le x\le 3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 1이다. 이때 $f(2)$의 값은?**

① -2　② -1
③ 2　④ 4
⑤ 5

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] 이차함수 $y=x^2-(2m-1)x-(3-m^2)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-(2m-1)x-(3-m^2)=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라고 하면
$D=(-2m+1)^2+4(3-m^2)<0$
$(4m^2-4m+1)+(12-4m^2)<0$
$-4m+13<0$
$m>\frac{13}{4}=3.25$
따라서 구하는 자연수 m의 최솟값은 4이다.

2) [정답] ②

[해설] 이차방정식 $x^2-7x+12=0$의 판별식을 D_1라 하면 $D_1>0$이므로 $x^2-7x+12=0$는 서로 다른 두 실근을 갖고 $a=2$이다.
이차방정식 $-3x^2+x-1=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2<0$이므로 $-3x^2+x-1=0$는 서로 다른 두 허근을 갖고 $a=0$이다.
이차방정식 $-x^2+4x-4=0$의 판별식을 D_3라 하면 $D_3=0$이므로 $-x^2+4x-4=0$는 중근을 갖고 $a=1$이다. 따라서 $a^2+b^2+c^2=5$이다.

3) [정답] ④

[해설] 이차함수 $y=x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+4k+b)=0$
$a^2-2ak+k^2-k^2-4k-b=0$
$\therefore (-2a-4)k+a^2-b=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$-2a-4=0,\ a^2-b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=4$
$\therefore a+b=2$

4) [정답] ③

[해설] 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-4,\ 2$이므로 $-4,\ 2$는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $-4+2=-\frac{a}{2},\ -4\cdot 2=\frac{b}{2}$이므로 $a=4,\ b=-16\quad \therefore ab=-64$

5) [정답] ④

[해설] 이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프가 점 $(2,3)$을 지나므로 $3=4-6+a$에서 $a=5$이다.
직선 $y=bx+c$도 점 $(2,3)$을 지나므로 $3=2b+c$에서 $c=-2b+3$이다.
따라서 직선 $y=bx-2b+3$과 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프가 서로 접하므로 이차방정식 $bx-2b+3=x^2-3x+5$,
즉 $x^2-(b+3)x+2b+2=0$에서
$D=\{-(b+3)\}^2-4(2b+2)=0$
$b^2-2b+1=0,\ (b-1)^2=0$이므로 $b=1$이다.
따라서 $c=-2b+3=1$이므로 $a+b+c=7$이다.

6) [정답] ①

[해설] 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 해이다.
따라서 두 그래프의 교점의 x좌표가 $3+\sqrt{5}$이므로 이는 두 식 $y=x^2+px+q,\ y=2x+1$을 연립한 이차방정식 $x^2+px+q=2x+1$, $x^2+(p-2)x+q-1=0$의 두 근이 $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-p+2$에서 $p=-4$이고 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=q-1$에서 $q=5$이다.
따라서 $p+q=1$이다.

7) [정답] ④

[해설] $x^2+ax+3a=x+4a$에서 $x^2+(a-1)x-a=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(a-1)^2+4a=0$
$a^2+2a+1\geq 0,\ (a+1)^2\geq 0$
따라서 $y=x^2+ax+3$와 $y=x+4a$는 a의 값에 관계없이 적어도 한 점에서 만난다.

8) [정답] ④

[해설] 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 접하므로
$mx+n=x^2-2ax+a^2+2a-1$
즉, $x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$의 판별식 $D=0$이다.
$D=(2a+m)^2-4(a^2+2a-n-1)$
$=4am+m^2-8a+4n+4$
$=(4m-8)a+m^2+4n+4=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로
$4m-8=0$이고, $m^2+4n+4=0$이다.
두 식을 연립하여 풀면 $m=2,\ n=-2$이므로 $m+n=0$이다.

9) [정답] ②

[해설] $y=2x^2+x-1$과 $y=mx-3$이 만나지 않으므로 연립방정식의 실근이 존재하지 않는다.
$2x^2+x-1=mx-3$
$2x^2+(1-m)x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(1-m)^2-4\times 2\times 2<0$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$m^2-2m-15<0$
$(m+3)(m-5)<0$
$-3<m<5$이다.
따라서 $a=-3$, $b=5$이고 $a+b=2$이다.

10) [정답] ⑤
[해설] 직사각형 모양의 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라고 하면 $\triangle APR \backsim \triangle ABC$이므로 $\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AR}:\overline{PR}$이다.
즉, $15:30=(15-y):x$에서
$15x=30(15-y)$
$x=2(15-y)$이다.
이때 변의 길이는 항상 양수이므로
$y>0$, $15-y>0$에서 $0<y<15$이다.
직사각형 PQCR의 넓이를 S m^2라고 하면
$S=xy=2y(15-y)=-2(y^2-15y)$
$=-2\left(y^2-15y+\frac{225}{4}\right)+\frac{225}{2}$
$=-2\left(y-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{2}$
따라서 S는 $y=\frac{15}{2}$일 때 최댓값 $\frac{225}{2}$를 가지므로 꽃밭의 넓이의 최댓값은 $\frac{225}{2}=112.5(\mathrm{m}^2)$이다.

11) [정답] ①
[해설] $f(x)=-2x^2+4|x|+1$이라 하면
(ⅰ) $-3\le x<0$일 때,
$f(x)=-2x^2-4x+1=-2(x+1)^2+3$
(ⅱ) $0\le x\le 2$일 때,
$f(x)=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-3\le x\le 2$일 때,
$y=f(x)$의 최댓값과 최솟값은
$M=f(-1)=f(1)=3$, $m=f(-3)=-5$
$\therefore M+m=-2$

12) [정답] ①
[해설] $h=-5t^2+10t+15=-5(t^2-2t+1)+20$
$=-5(t-1)^2+20$
이므로 $t=1$일 때 공의 최대높이는 20m이다.
따라서 $a=1$, $b=20$이므로 $a+b=21$

13) [정답] ①
[해설] 이차함수 $y=ax^2-4x-2a+3$은 $x=2$일 때, 최솟값 b를 가지므로
$y=a(x-2)^2+b=ax^2-4ax+4a+b$
$=ax^2-4x-2a+3$
즉, $-4a=-4$, $4a+b=-2a+3$이므로
$a=1$, $b=-3$ $\quad\therefore ab=-3$

14) [정답] ⑤
[해설] $2\le x\le k$에서 이차함수
$y=x^2-2x+4=(x^2-2x+1)+3=(x-1)^2+3$은 꼭짓점의 x좌표가 1이므로 $x=2$일 때 최솟값은 4이고, $x=k$일 때 최댓값 19를 갖는다.
$k^2-2k+4=19$
$k^2-2k-15=0$
$(k-5)(k+3)=0$
$k=5$ 또는 $k=-3$
따라서 $k>2$이므로 $k=5$이다.

15) [정답] ④
[해설] 잘라내기 전의 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라고 하면 잘라내고 남은 도형의 둘레의 길이가 40이므로
$2a+2b=40$
$b=20-a$ $\cdots$㉠
또한 $a-6>0$에서 $a>6$
$b-4>0$, $(20-a)-4>0$에서 $a<16$
그러므로 $6<a<16$ $\cdots$㉡
이때 남은 부분의 넓이를 S라고 하면 넓이 S는 전체 넓이 ab에서 4개의 직사각형의 넓이를 빼야하므로 $S=ab-4\times 6=ab-24$ $\cdots$㉢
㉠을 ㉢에 대입하여 정리하면
$S=a(20-a)-24$ $=-(a^2-20a+100)+76$
$S=-(a-10)^2+76$
따라서 ㉡의 범위에서 남은 부분의 넓이 S의 최댓값은 $a=10, b=10$일 때, 76이다.

16) [정답] ②
[해설] 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로 이차함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=a(x+2)^2+3$이다. 이 함수의 그래프가 점$(0,\ -5)$를 지나므로
$f(0)=4a+3=-5$에서 $a=-2$이다.
따라서 이차함수의 식은 $y=-2(x+2)^2+3$이다.
이차함수 $y=-2(x+2)^2+3$의 그래프는 주어진 범위 $-1\le x\le 1$에서 꼭짓점의 x좌표가 이 범위에 속하지 않으므로 $x=1$일 때, 최소이고 최솟값은 $f(1)=-2\times 3^2+3=-15$이다.

17) [정답] ④
[해설] $y=-250x^2+4000x-7500$
$=-250(x-8)^2+8500$
따라서 $x=8$일 때 최댓값 8500을 갖는다. 즉 입장권 한 장의 가격을 8만원으로 정할 때, 이익이 최대가 되고 최대 이익금은 8500만원이다.

18) [정답] ②
[해설] 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$에서
ㄱ. $f(1)=f(-7)$이므로
$1+a+b=49-7a+b$에서 $a=6$이다.
즉, $f(x)=x^2+6x+b=(x+3)^2+b-9$
따라서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-3)$이다.
ㄴ. 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-3)=b-9$이

므로 $b \geq 9$ 이면 모든 실수 x 에 대하여
$f(x) \geq f(-3) \geq 0$ 이다.
ㄷ. $-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$ 에서
이차함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값
$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}+3\right)^2+b-9=b-\frac{27}{4}$ 이고
$x=-3$일 때, 최솟값 $f(-3)=b-9$ 이다.
최댓값과 최솟값의 차는 $\left(b-\frac{27}{4}\right)-(b-9)=\frac{9}{4}$ 이다. 따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

19) [정답] ①
[해설] 조건을 만족할 때 이차방정식
$x^2+2x-a+3=0$의 근이 존재하지 않는다.
판별식 D가 $\frac{D}{4}=1-(-a+3)<0$이므로 $a<2$이고 정수 a의 최댓값은 1이다.

20) [정답] ④
[해설] $f(x)=a(x-1)^2+p$라 하면
$a>0$일 때, 최솟값은 $f(1)=p=1$이고
최댓값은 $f(3)=4a+1=5$ $\therefore a=1$
$f(x)=(x-1)^2+1$이므로
$x^2-2x+2=4x+5$
$x^2-6x-3=0$에서 판별식 $D\neq 0$으로
직선과 접하지 않는다.
따라서 $a<0$이고 $0 \leq x \leq 3$에서
$x=1$일 때 최대, $x=3$일 때 최소이다.
최댓값 $f(1)=p=5$
최솟값 $f(3)=4a+5=1$ $\therefore a=-1$
$f(x)=-(x-1)^2+5$
$\therefore f(2)=4$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574