1-4-2.로그함수의 최대, 최소_미래엔(황선욱)

개념check

[로그함수 $y=\log_a x$의 최대 · 최소]

• 로그함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$은 정의역이 $\{x|m\le x\le n\}$일 때,

(1) $a>1$인 경우
$x=m$일 때 최솟값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

(2) $0<a<1$인 경우
$x=m$일 때 최댓값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

[함수 $y=\log_a f(x)$꼴의 최대 · 최소]

• 함수 $y=\log_a f(x)$꼴의 최대 • 최소 구하는 방법

① 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

② ①에서 구한 $f(x)$의 최댓값과 최솟값에서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

유사문제

1. 함수 $y=\log_3(2x+1)-1$의 정의역이 $\{x|0\le x\le 13\}$일 때, 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

2. 정의역이 $\{x\,|0\le x\le 30\}$일 때, 함수 $y=\log_2(x+a)-b$의 최댓값은 -2, 최솟값은 -6일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 5 ② 7
③ 9 ④ 11
⑤ 13

3. 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)+9$가 $a\le x\le b$에서 최댓값 7, 최솟값 6을 가질 때, $\frac{b}{a}$값은?

① 4 ② 6
③ 12 ④ 36
⑤ 48

4. $y=\log_a(bx-bc)$의 점근선의 방정식은 $x=5$이고, 정의역이 $9\le x\le 21$일 때, 최댓값 4, 최솟값 2를 갖는다고 한다. 이때, $3abc$의 값은? (단, $a>1$)

① 24 ② 30
③ 32 ④ 36
⑤ 40

5. $1\le x\le 2$에서 $y=2^{2x+1}$의 최댓값과 $y=\log_{\frac{1}{2}}x-3$의 최솟값의 합은?

① 26 ② 27
③ 28 ④ 29
⑤ 30

6. $1 \le x \le 3$에서 정의된 함수 $y=2^{x+2}\log_3(3x)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라고 할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① 8 ② 12
③ 64 ④ 96
⑤ 128

7. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$의 최댓값은?

① -3 ② -4
③ -5 ④ -6
⑤ -7

8. 정의역이 $\{x \mid 2 \le x \le a\}$일 때, 함수 $y=\log_k(x+1)+5$의 최댓값이 4, 최솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<k<1$이다.)

① 8 ② 13
③ 18 ④ 23
⑤ 26

9. 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 3\}$인 함수 $y=\log_{\sqrt{2}}(x+1)-1$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 12

10. $\frac{1}{27} \le x \le 9$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x+2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] 로그의 밑이 $3>1$이므로 주어진 로그함수는 증가함수이다.
따라서 이 함수는 $x=13$일 때 최댓값을, $x=0$일 때 최솟값을 가진다.
최댓값: $\log_3(26+1)-1=2$
최솟값: $\log_3(0+1)-1=-1$
최댓값과 최솟값의 합은 $2+(-1)=1$이다.

2) [정답] ③
[해설] 함수 $y=\log_2(x+a)-b$는 밑이 1보다 크므로 증가함수이다.
따라서 이 함수는 $x=30$일 때 최댓값 -2를, $x=0$일 때 최솟값 -6을 가진다.
최댓값: $\log_2(30+a)-b=-2 \cdots ㉠$
최솟값: $\log_2(0+a)-b=-6 \cdots ㉡$
㉠과 ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=7$
$\therefore a+b=9$

3) [정답] ①
[해설] $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)+9$의 밑이 1보다 작으므로 x값이 증가하면 y값은 감소한다.
따라서 $x=a$일 때 최댓값 7을 갖고, $x=b$일 때 최솟값 6을 갖는다.
최댓값: $7=-\log_3(2a+3)+9$, $\log_3(2a+3)=2$, $2a+3=9$, $a=3$
최솟값: $6=-\log_3(2b+3)+9$, $\log_3(2b+3)=3$, $2b+3=27$, $b=12$
$\therefore \dfrac{b}{a}=4$이다.

4) [정답] ②
[해설] $y=\log_a(bx-bc)$의 점근선의 방정식이 $x=5$이므로 $c=5$이고, 밑이 1보다 크므로 x값이 증가하면 y값도 증가한다.
따라서 $x=21$일 때 최댓값 4. $x=9$일 때 최솟값 2를 갖는다.
최댓값: $\log_a 16b=4$, $a^4=16b \cdots ㉠$
최솟값: $\log_a 4b=2$, $a^2=4b \cdots ㉡$
㉠,÷㉡을 하면, $a^2=4$, $a>1$이므로 $a=2$, $b=1$
$\therefore 3abc=30$

5) [정답] ③
[해설] $y=2^{2x+1}$은 밑이 1보다 크므로 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
$y=2^{4+1}=32$
$y=\log_{\frac{1}{2}}x-3$은 밑이 1보다 작으므로 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.
$y=\log_{\frac{1}{2}}2-3=-4$
따라서 두 수의 합은 $32+(-4)=28$이다.

6) [정답] ①
[해설] $y=2^{x+2}\log_3(3x)$는 증가함수로 x값이 증가할 때 y값이 증가한다.
따라서 $1\le x\le 3$에서
$x=3$일 때 최댓값 $2^5\log_3 9=2^6$, $a=64$
$x=1$일 때 최솟값 $2^3\log_3 3=8$, $b=8$를 가진다.
$\therefore \dfrac{a}{b}=8$

7) [정답] ①
[해설] 밑이 1보다 작기 때문에 주어진 함수의 진수인 $x^2-6x+17$가 최소일 때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$가 최댓값을 갖는다.
$x^2-6x+17=(x-3)^2+8$
따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$는 $x=3$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}8=-3$을 갖는다.

8) [정답] ⑤
[해설] 로그의 밑이 $0<k<1$이므로 주어진 로그함수는 감소함수이다.
따라서 이 함수는 $x=2$일 때 최댓값 4를, $x=a$일 때 최솟값 2을 가진다.
최댓값: $\log_k(2+1)+5=4 \cdots ㉠$
최솟값: $\log_k(a+1)+5=2 \cdots ㉡$
㉠에 의하여 $k=\dfrac{1}{3}$
㉡에 의하여 $\log_{\frac{1}{3}}(a+1)+5=2$, $a=26$

9) [정답] ②
[해설] 함수 $y=\log_{\sqrt{2}}(x+1)-1$는
$x=1$일 때, 최솟값은
$\log_{\sqrt{2}}(1+1)-1=\log_{\sqrt{2}}2-1=1$
$x=3$일 때, 최댓값 $\log_{\sqrt{2}}(3+1)-1=4-1=3$를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 4이다.

10) [정답] ⑤
[해설] $y=\log_{\frac{1}{3}}x+2$의 밑이 1보다 작으므로 $x=\dfrac{1}{27}$일 때 최댓값을, $x=9$일 때 최솟값을 가진다.
최댓값: $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}+2=5$
최솟값: $\log_{\frac{1}{3}}9+2=0$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125