단원 ISSUE

이 단원에서는 **원의 방정식과 원과 직선의 위치관계, 접선의 방정식을 묻는 문제**가 주로 출제됩니다.
앞에서 학습한 직선의 방정식과 마찬가지로 원의 방정식을 구하는 공식 역시 여러 가지가 있으므로 주어진 문제에 따라 올바른 방정식을 세워 문제를 해결할 수 있도록 반복적인 학습이 필요합니다.
원과 직선의 위치관계 및 접선의 방정식도 마찬가지로 문제에서 요구하는 바를 정확히 파악하여 식을 세워나가는 것이 중요합니다. 또한, 종종 복잡한 계산을 요구하는 문제가 출제되므로 반복적인 연습을 통해 실수를 최소화하도록 합니다.

평가문제

[중단원 마무리]

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 두 점 $(1,4)$, $(5,2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 $(x-3)^2+(y-3)^2=5$이다.

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 7인 원은 $x^2+y^2=49$이다.

③ 중심이 점 $(2,\ -1)$이고 y축에 접하는 원은 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$이다.

④ 중심이 점 $(3,\ -2)$이고 점 $(2,\ 0)$을 지나는 원은 $(x-3)^2+(y+2)^2=5$이다.

⑤ 세 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ 6)$, $(8,\ 6)$을 지나는 원은 $(x-4)^2+(y-2)^2=25$이다.

[중단원 마무리]

2. x축과 y축에 모두 접하고, 점 $(2,\ 3)$을 지나는 모든 원들의 넓이의 합을 구하면?

① 52π　② 74π
③ 90π　④ 112π
⑤ 136π

[중단원 마무리]

3. 원 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$의 넓이가 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$에 의하여 4등분될 때, 세 실수 p, q, r의 합 $p+q+r$의 값을 구하면?

① $\frac{31}{6}$　② $\frac{29}{6}$
③ 0　④ $-\frac{29}{6}$
⑤ $-\frac{31}{6}$

[대단원 마무리]

4. 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(8,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점과 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-4)^2+(y-5)^2=18$
② $(x-3)^2+(y-5)^2=18$
③ $(x-7)^2+(y-5)^2=18$
④ $(x-7)^2+(y-8)^2=24$
⑤ $(x-3)^2+(y-9)^2=24$

[중단원 마무리]

5. 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $2x+y-a=0$이 두 점 P, Q에서 만날 때, $\triangle OPQ$가 정삼각형이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하면? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{13}$
③ $\sqrt{14}$　④ $\sqrt{15}$
⑤ 4

[중단원 마무리]

6. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+2x+4y+k=0$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하면?

① 5 ② -7 ③ 9 ④ -15 ⑤ 17

[중단원 마무리]

7. 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $ax+by+c=0$이 두 점에서 만날 조건을 구하면?

① $a^2+b^2>c^2$ ② $b^2+c^2>a^2$ ③ $c^2+a^2>b^2$ ④ $a+b+c>0$ ⑤ $a+b+c<0$

[중단원 마무리]

8. 원 $x^2+y^2=5$의 접선 중에서 기울기가 3이고, y절편이 양수인 접선과 원 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $2a-b$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

[중단원 마무리]

9. 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고, 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-\sqrt{3}y-1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-1=0$
② $x-\sqrt{3}y-1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y+1=0$
③ $x+\sqrt{3}y+1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-1=0$
④ $x-\sqrt{3}y=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y=0$
⑤ $\sqrt{3}x-y-1=0$ 또는 $\sqrt{3}x+y-1=0$

[중단원 마무리]

10. 원 $x^2+y^2-6x+4y=0$ 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리가 정수인 점 P의 개수를 구하면?

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 14 ⑤ 16

[중단원 마무리]

11. 직선 $y=2x+10$이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접할 때, 반지름의 길이 r의 값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ 5 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

[중단원 마무리]

12. 점 $(4,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 두 접선 중 기울기가 양수인 접선의 기울기를 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하면? (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)

① 23 ② 25 ③ 28 ④ 31 ⑤ 38

[중단원 마무리]

13. 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있고, 두 직선 $x+2y-3=0,\ x+2y-7=0$에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$, 반지름의 길이를 r라 할 때, $\alpha\beta+r^2$의 값을 구하면?

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{12}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{14}{5}$ ⑤ 3

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 마무리]

14. 두 정점 $A(-4,\ 0)$, $B(4,\ 0)$과 원 $x^2+y^2-10x+9=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때 $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 16
③ 18 ④ 21
⑤ 24

[중단원 마무리]

15. 원 $(x+2)^2+y^2=5$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 그은 접선이 x축, y축과 이루는 도형의 넓이를 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$
⑤ $\frac{1}{6}$

[대단원 마무리]

16. 두 원
$\mathrm{O} : (x+3)^2+(y-9)^2=16$,
$\mathrm{O}' : (x-2)^2+(y+3)^2=4$ 위의 임의의 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최댓값을 구하면?

① 10 ② 16
③ 19 ④ 26
⑤ 31

[대단원 마무리]

17. 원 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$이 직선 $4x-3y+k=0$과 만날 때, 상수 k의 값의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 마무리]

18. 점 $P(-2\sqrt{3},\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$
③ $3\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{3}$
⑤ $5\sqrt{2}$

[대단원 마무리]

19. 점 $A(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y+1)^2=4$에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a의 값들의 곱을 구하면?

① -6 ② -7
③ -8 ④ -9
⑤ -10

실전문제

20. 직선 $y=x$ 위의 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원 중에서 $3x-4y+12=0$과 접하는 원의 개수는 2이다. 두 원의 중심을 각각 $A(a,b)$, $B(c,d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

정답 및 해설

1) [정답] ⑤
[해설] ① 두 점 $(1,4)$, $(5,2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 $(x-3)^2+(y-3)^2=5$이다.
② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 7인 원은 $x^2+y^2=49$이다.
③ 중심이 점 $(2,\ -1)$이고 y축에 접하는 원은 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$이다.
④ 중심이 점 $(3,\ -2)$이고 점 $(2,\ 0)$을 지나는 원은 $(x-3)^2+(y+2)^2=5$이다.
⑤ 세 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ 6)$, $(8,\ 6)$을 지나는 원은 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2) [정답] ②
[해설] 점$(2,\ 3)$은 제1사분면 위의 점이므로 점 $(2,\ 3)$을 지나고, x과 y축에 모두 접하는 원은 제1사분면 위에 존재한다. 따라서 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이므로 구하는 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$이다.
이 원이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$(2-r)^2+(3-r)^2=r^2$
$r^2-10r+13=0$에서 $r=5\pm2\sqrt{3}$이다.
따라서 원의 반지름의 길이는 각각 $5+2\sqrt{3}$, $5-2\sqrt{3}$이므로 구하는 모든 원의 넓이의 합은
$(5+2\sqrt{3})^2\pi+(5-2\sqrt{3})^2\pi$
$=(25+20\sqrt{3}+12)\pi+(25-20\sqrt{3}+12)\pi=74\pi$

3) [정답] ①
[해설] 주어진 원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-2)^2+(y-3)^2=1\ \cdots$㉠
이때, 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$가 원 ㉠의 넓이를 4등분하므로 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$는 원의 중심 $(2,\ 3)$을 지나야 한다. 즉,
$3=2p$, $3=2q+r\ \cdots$㉡
또한, 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$가 수직이어야 하므로 $pq=-1\ \cdots$㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $p=\dfrac{3}{2}$, $q=-\dfrac{2}{3}$, $r=\dfrac{13}{3}$
따라서 $p+q+r=\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{13}{3}=\dfrac{31}{6}$이다.

4) [정답] ③
[해설] 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{1\cdot8+2\cdot2}{1+2},\dfrac{1\cdot6+2\cdot0}{1+2}\right)=(4,\ 2)$이고
선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{4\cdot8-1\cdot2}{4-1},\dfrac{4\cdot6-1\cdot0}{4-1}\right)=(10,\ 8)$이므로
원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{4+10}{2},\dfrac{2+8}{2}\right)=(7,\ 5)$,
원의 반지름의 길이는
$\dfrac{1}{2}\sqrt{(10-4)^2+(8-2)^2}=3\sqrt{2}$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-7)^2+(y-5)^2=18$이다.

5) [정답] ④
[해설] $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2$이므로 점 O에서 직선 $\overline{\mathrm{PQ}}$까지의 거리 d는 $\sqrt{3}$이다.
$d=\dfrac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{3}$이므로 $a=\pm\sqrt{15}$이다.
따라서 $a=\sqrt{15}$이다.

6) [정답] ④
[해설] 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $x+2y-5=0\ \cdots$㉠
$x^2+y^2+2x+4y+k=0$에서
$(x+1)^2+(y+2)^2=5-k\ \cdots$㉡
직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 $(-1,\ -2)$ 사이의 거리는 $\dfrac{|-1-4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$이다.
이때 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하므로
$5-k=(2\sqrt{5})^2$이고 $k=-15$이다.

7) [정답] ①
[해설] 원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리가 반지름의 길이인 1보다 작을 때 두 점에서 만나므로
$\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$, $|c|<\sqrt{a^2+b^2}$
양변이 모두 양수이므로 제곱하여도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다. 따라서 $c^2<a^2+b^2$이다.

8) [정답] ⑤
[해설] 원 $x^2+y^2=5$에 접하고, 기울기가 3인 접선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{5}\sqrt{3^2+1}$이다.
이때 y절편이 양수인 접선의 방정식은
$y=3x+5\sqrt{2}\ \cdots$㉠
또 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $-2x+y=5\ \cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=5-5\sqrt{2}$, $y=15-10\sqrt{2}$이다. 교점의 좌표가 $(5-5\sqrt{2},15-10\sqrt{2})$이므로 $a=5-5\sqrt{2}$, $b=15-10\sqrt{2}$이고 $2a-b=-5$이다.

9) [정답] ①
[해설] 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하려면 직선은 원의 중심 $(1,\ 0)$을 지나야 한다.
따라서 구하는 직선의 방정식의 기울기를 m이라 하면 이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$mx-y-m=0$ ⋯㉠
이 직선이 주어진 원 $(x+1)^2+y^2=1$과 접하므로 중심 $(-1,\ 0)$에서 직선 ㉠까지의 거리를 d라 하면 $d=\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$
$|-2m|=\sqrt{m^2+1}$
$4m^2=m^2+1,\ 3m^2=1$에서 $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⋯㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$\frac{1}{\sqrt{3}}x-y-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$ 또는 $-\frac{1}{\sqrt{3}}x-y+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$
이고 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-1=0$이다.

10) [정답] ④
[해설] $x^2+y^2-6x+4y=0$에서
$(x-3)^2+(y+2)^2=13$
원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리는 $\frac{|6+6+14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$이다.
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리를 d라 하면
$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d\le 2\sqrt{13}+\sqrt{13}$
$\sqrt{13}\le d\le 3\sqrt{13}$이다.
따라서 정수 d는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 14이다.

11) [정답] ②
[해설] 기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하는 직선의 방정식은 $y=2x\pm r\sqrt{2^2+1}$, $y=2x\pm\sqrt{5}r$이다. $\sqrt{5}r=10$에서 $r=2\sqrt{5}$이다.

12) [정답] ④
[해설] 접점을 $Q(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 Q는 원 위의 점이므로 ${x_1}^2+{y_1}^2=9$ ⋯㉠
접점 Q에서의 접선의 방정식을 구하면
$x_1x+y_1y=9$ ⋯㉡
이때 ㉡이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로
$4x_1+3y_1=9$ ⋯㉢
㉢에서 $y_1=-\frac{4}{3}x_1+3$을 ㉠에 대입하면
${x_1}^2+\left(-\frac{4}{3}x_1+3\right)^2=9$
$25{x_1}^2-72x_1=0$
$x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{72}{25}$
이것을 각각 ㉢에 대입하여 y_1을 구하면
$x_1=0$일 때, $y_1=3$, $x_1=\frac{72}{25}$일 때, $y_1=-\frac{21}{25}$
그러므로 기울기는 0 또는 $\frac{24}{7}$이다.
따라서 조건에 맞는 기울기는 $\frac{24}{7}$이므로
$p=7,\ q=24$이고 $p+q=31$이다.

13) [정답] ④
[해설] 원의 중심을 $(t,\ 2t)$로 놓으면 원의 중심에서 각 접선에 이르는 거리가 반지름의 길이 r와 같으므로 $r=\frac{|t+4t-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|t+4t-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}$이고
$5t-3=\pm(5t-7)$이다.
그런데 $5t-3\neq5t-7$이므로 $5t-3=7-5t$이고 $t=1$이다.
따라서 원의 반지름의 길이 $r=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 $\alpha\beta+r^2=\frac{14}{5}$이다.

14) [정답] ②
[해설] $x^2+y^2-10x+9=0$에서 $(x-5)^2+y^2=4^2$
따라서 점 P는 중심이 $(5,\ 0)$, 반지름의 길이가 4인 원 위를 움직인다.
그러므로 $\triangle PAB$의 넓이가 최대일 때는 밑변 AB가 고정되어 있으므로 높이가 최대일 때이다.
즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이므로 구하는 최대 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot4=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4=16$이다.

15) [정답] ③
[해설] 원 $(x+2)^2+y^2=5$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 그은 접선의 방정식은 $(0+2)(x+2)+1\cdot y=5$
$2x+y-1=0$이다.
이 직선은 x절편이 $\frac{1}{2}$, y절편이 1이므로 구하는 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$이다.

16) [정답] ③
[해설] 두 원 O, O′ 위의 임의의 점 P, Q 사이의 거리인 $\overline{PQ}$의 길이가 최대가 되려면 두 원의 중심을 지나는 직선 위에 점 P, Q가 존재해야 한다.
따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 두 원의 중심거리에 두 원의 반지름의 길이를 더한 값과 같으므로
$\sqrt{(-5)^2+12^2}+2+4=19$

17) [정답] ④
[해설] 원 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$에서
$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=25$
$(x-1)^2+(y-2)^2=25$
이 원의 중심 $(1,\ 2)$에서 직선 $4x-3y+k=0$까지의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|4\cdot 1-3\cdot 2+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|k-2|}{5}$

또, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=5$

원과 직선이 만날 조건은 $d\le r$이므로

$\dfrac{|k-2|}{5}\le 5$, $|k-2|\le 25$

$-25\le k-2\le 25$

$-23\le k\le 27$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 4이다.

18) [정답] ③

[해설] 직선 AB의 방정식은

$-2\sqrt{3}x+2y=4$에서 $\sqrt{3}x-y+2=0$이다.

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{2}=1$

이때, 원의 반지름의 길이는 2이므로 현 AB의 길이는 $2\sqrt{2^2-1}=2\sqrt{3}$

점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{3},\ 2)$와 직선 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|-6-2+2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{2}=3$이다.

따라서 구하는 삼각형 PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3=3\sqrt{3}$이다.

19) [정답] ②

[해설] 점 $A(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y+1)^2=4$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+a$

원의 중심 $(0,\ -1)$에서 직선 $mx-y+a=0$에 이르는 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\dfrac{|1+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|a+1|=2\sqrt{m^2+1}$

$4m^2-(a^2+2a-3)=0$

이 방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $m_1m_2=-\dfrac{1}{4}(a^2+2a-3)=-1$이다.

$a^2+2a-3=4$, $a^2+2a-7=0$

따라서 구하는 a의 값들의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -7이다.

20) [정답] ②

[해설] 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 (m,m)라고 하자.

x축과 y축에 동시에 접하므로 반지름은 $|m|$이다.

이 원이 직선 $3x-4y+12=0$와 접하므로

$\dfrac{|3m-4m+12|}{\sqrt{9+16}}=|m|$이다.

$|12-m|=5|m|$

$12-m=\pm 5m$

$m=2$, $m=-3$

따라서 두 원의 중심은 $A(2,2)$, $B(-3,-3)$이다.

$\therefore\ a+b+c+d=-2$