● 3회차

01 ①	02 ②	03 ③	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 ④	08 ②	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ③	13 ⑤	14 ②	15 ②
16 ⑤	17 ⑤			

[서술형 1] $a=2,\ b=3$

[서술형 2] (1) 3초, $80\ \mathrm{cm}$ (2) $-40\ \mathrm{cm/s}$

[서술형 3] $\frac{1}{2}$

01 $f(x)=x^3+ax+5$에서 $f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=-3\cdot a\leq 0$

$\therefore a\geq 0$

따라서 실수 a의 최솟값은 0이다.

02 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -6을 가지므로

$f'(1)=0,\ f'(3)=0,\ f(3)=-6$

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$ …… ㉠

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$ …… ㉡

$f(3)=-6$에서 $27+9a+3b+c=-6$ …… ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=9$

$a=-6,\ b=9$를 ㉢에 대입하면

$c=-6$

따라서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-6$의 극댓값은

$f(1)=1-6+9-6=-2$

03 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+(a^2-2a)$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(a^2-2a)>0$

$-2a^2+6a>0,\ a^2-3a<0$

$a(a-3)<0$ $\quad\therefore 0<a<3$

따라서 정수 a는 $1, 2$이므로 그 합은

$1+2=3$

04 $K(t)=6t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$에서

$K'(t)=6+4t-2t^2=-2(t+1)(t-3)$

$K'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because t\geq 0$)

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$K'(t)$		$+$	0	$-$
$K(t)$	0	$\nearrow$	18	$\searrow$

즉 함수 $K(t)$는 구간 $[0, 3]$에서 증가하므로 약의 약효는 3시간이 경과할 때까지 증가한다.

05 $x=-4,\ x=2,\ x=9$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-4,\ x=2,\ x=9$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 모든 x값의 합은

$-4+2+9=7$

06 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 실수)로 놓으면 $f(0)=0$에서 $d=0$

조건 (가)에서

$x^4+ax^3+bx^2+cx=x^4-ax^3+bx^2-cx$

이므로 $2ax^3+2cx=0$

$\therefore a=0,\ c=0$

즉 $f(x)=x^4+bx^2$에서 $f'(x)=4x^3+2bx$

조건 (나)에서 $f'(1)=0$이므로 $4+2b=0$

$\therefore b=-2$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2$이므로

$f(-1)=1-2=-1$

07 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)로 놓으면

$f(-x)=-f(x)$이므로

$-x^3+ax^2-bx+c=-x^3-ax^2-bx-c$

$2ax^2+2c=0$ $\quad\therefore a=0, c=0$

$\therefore f(x)=x^3+bx$

$f(\sqrt{3})=0$이므로 $3\sqrt{3}+b\sqrt{3}=0$ $\quad\therefore b=-3$

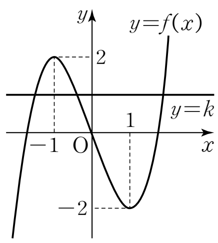
즉 $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-2<k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

08 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

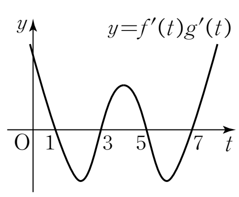
$g'(t)=3t^2-30t+63=3(t-3)(t-7)$

이때 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면

$f'(t)g'(t)<0$이어야 하므로

$9(t-1)(t-3)(t-5)(t-7)<0$

함수 $y=f'(t)g'(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$1<t<3$ 또는 $5<t<7$

따라서 두 점 P, Q가 처음으로 서로 반대 방향으로 움직이기 시작하는 시각은 $t=1$

Lecture **속도와 운동 방향**

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면

(점 P의 속도)$\times$(점 Q의 속도)<0

09 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는

$2+0.5t$ (cm)

t초 후의 정삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+0.5t)^2=\frac{\sqrt{3}}{16}t^2+\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}$

이므로 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{8}t+\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 4초 후의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot 4+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

오답 피하기

한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$이다.

10 $f(x)=\int(2x^2+ax+3)dx$에서

$f'(x)=2x^2+ax+3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(-1)=1$에서

$2-a+3=1$ $\quad\therefore a=4$

11 $f'(x)=3x^2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3x^2dx$$
$$=x^3+C$$

이때 $f(-1)=3$이므로 $-1+C=3$ $\quad\therefore C=4$

따라서 $f(x)=x^3+4$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+4x\right]_0^2$$
$$=12$$

12
$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$
$$=\left\{\int_1^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx\right\}-\int_3^2 f(x)dx$$
$$=-\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx-\int_3^2 f(x)dx$$
$$=-A+B-C$$

Lecture 정적분의 성질

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

13 연속함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로 주기가 2인 연속함수이다.

즉

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=\cdots$$

$$=\int_8^{10} f(x)dx=5$$

이므로

$$\int_{-2}^{10} f(x)dx=6\int_0^2 f(x)dx=6\cdot5=30$$

14 $F(x)=\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

$=x^3-3x+a$

이때 $F(0)=3$이므로 $a=3$

따라서 $F(x)=x^3-3x+3$이므로

$F(1)=1-3+3=1$

15 $f(t)=3t^2-2t+5$, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}(3t^2-2t+5)dt$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$

$$=F'(1)+F'(1)$$

$$=2F'(1)$$

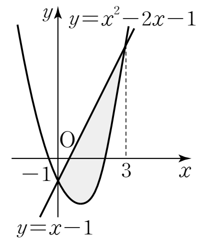
$$=2f(1)$$

$$=2(3-2+5)=12$$

16 $x^2-2x-1=x-1$에서 $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$

즉 곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는 0, 3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_0^3\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=\frac{9}{2}$$

17 ㄱ. 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=0$$

따라서 점 P는 $t=4$일 때 출발점에 있다.

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$

따라서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $\int_0^6 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot2$

$=3$

$\int_2^5|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$

$=3$

$\therefore \int_0^6 v(t)dt=\int_2^5|v(t)|dt$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[서술형 1] $f(x)=ax^3-6ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le2$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	↗	b	↘	$-16a+b$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 b, $x=2$에서 최솟값 $-16a+b$를 갖는다.

❶

이때 최댓값이 3이므로 $b=3$
또 최솟값이 -29이므로
$-16a+b=-29$ ······ ㉠
$b=3$을 ㉠에 대입하면
$a=2$

❷

채점 기준	배점
❶ 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	4점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] (1) t초 후의 로켓의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=-10t+30$
로켓이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로
$v=0$에서
$-10t+30=0$ $\therefore t=3$
따라서 로켓이 최고 높이에 도달하는 시각은 $t=3$이고 그때의 높이는 $35+90-45=80$ (cm)이다.

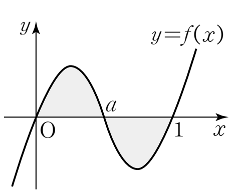
❶

(2) 로켓이 다시 지면에 떨어지는 순간의 위치는 0이므로
$x=0$에서 $-5t^2+30t+35=0$
$-5(t-7)(t+1)=0$ $\therefore t=7$ ($\because t>0$)
따라서 7초 후의 로켓의 속도는
$-70+30=-40$ (cm/s)

❷

채점 기준	배점
❶ 로켓이 최고 높이에 도달하는 시각과 그때의 높이를 구할 수 있다.	3점
❷ 로켓이 다시 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] $x^3-(a+1)x^2+ax=0$에서
$x(x-a)(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=1$ ($\because 0<a<1$)
즉 곡선 $y=x^3-(a+1)x^2+ax$와 x축의 교점의 x좌표는 0, a, 1이고 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$$

❶

$$\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(a+1)+\frac{1}{2}a$$
$$=\frac{a}{6}-\frac{1}{12}$$
이므로 $\frac{a}{6}-\frac{1}{12}=0$
$\therefore a=\frac{1}{2}$

❷

채점 기준	배점
❶ $\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$임을 알 수 있다.	4점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	3점