1.함수 $y=\tan 2x$의 주기와 점근선의 방정식을 구하고, 그래프를 그리시오.

2.$0 \le x < 2\pi$일 때, 다음 방정식을 푸시오.
(1) $2\sin x+1=0$ (2) $\sqrt{2}\cos x-1=0$
(3) $\tan x-\sqrt{3}=0$

3.$0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $2\cos x<1$을 푸시오.

4.주기가 $\frac{\pi}{2}$인 함수 $y=3\sin ax+b$의 최댓값이 5일 때, 최솟값은 m이다. 이때 $a+b+m$의 값을 구하시오.
(단, a는 양수이다.)

5.다음 식을 간단히 하시오.
$\sin^2(-\theta)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin^2(\pi-\theta)$

6.$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x-3\sin x=0$을 푸시오.

7.어느 지역의 해양 생태를 조사하기 위해 그 지역의 바다의 수온을 측정했다. t월의 월평균 수온 $T(t)$°C가

$$T(t)=17+8\sin\frac{\pi}{6}(t+7)$$

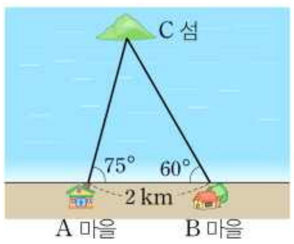
이었을 때, 조사 지역의 월평균 수온이 21°C 이상인 달을 모두 구하시오.

8.삼각형 ABC에서 $A=30°$, $a=2$, $b=2\sqrt{2}$일 때, 다음 물음에 답하시오.
(1) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R의 값을 구하시오.
(2) B의 값을 구하시오. (단, $B<90°$)

9.삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.
(1) $A=45°$, $B=75°$, $c=9$일 때, a
(2) $A=30°$, $a=2$, $c=4$일 때, B

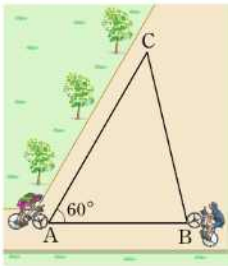
10.삼각형 ABC에서 등식 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$가 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

11.오른쪽 그림과 같이 해안선을 따라 두 마을 A, B가 있다. A 마을과 B 마을에서 C 섬을 바라본 각이 해안선을 기준으로 하여 각각 75°, 60°이고 두 마을 사이의 거리가 2km일 때, A 마을에서 C 섬까지의 거리를 구하시오. (단, 해안선은 직선이다.)



12.삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.
(1) $A=120°$, $b=3$, $c=4$일 때, a
(2) $a=7$, $b=8$, $c=13$일 때, C

13.지민이는 선분 AB와 60°의 각을 이루는 직선을 따라 시속 24km의 속력으로 지점 A에서 자전거를 타고 출발했고, 동시에 연우는 시속 21km의 속력으로 지점 B에서 둘이 만나기로 한 장소인 지점 C를 향하여 자전거를 타고 출발했다. 지민이와 연우가 20분 후에 지점 C에서 만났다고 할 때, 지점 A와 지점 B 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

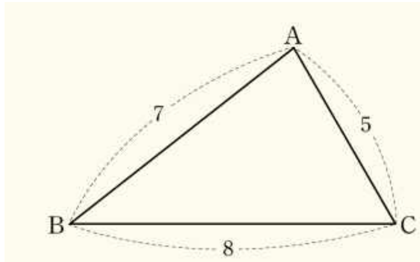


14.어느 문화재 복원가가 발굴한 유물을 원래 모양으로 복원하려고 한다. 문화재 복원가는 유물의 안쪽이 원의 형태로 이루어졌을 것으로 추정하여 오른쪽 그림과 같이 유물의 안쪽 원의 세 지점을 A, B, C라 하고 원의 반지름의 크기를 구하려고 한다. $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=6$, $\angle BAC=60°$일 때, 유물의 안쪽 원의 반지름의 길이를 구하시오.

15.삼각형 ABC에서 $C=\frac{2}{3}\pi$, $b=3$, $c=7$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

16.삼각형 ABC에서 $A=105°$, $B=45°$, $b=2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

17.세 변의 길이가 $a=8$, $b=7$, $c=5$로 주어진 삼각형 ABC의 넓이를 코사인법칙과 삼각함수의 성질을 이용하여 구하여라.

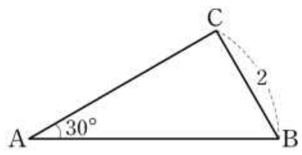


18.반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 8일 때, $\sin A+\sin B+\sin C$의 값을 구하시오.

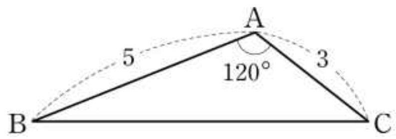
19.삼각형 ABC에서 $\angle A=\frac{\pi}{6}$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{3}$일 때, $\overline{BC}$의 값을 구하시오.

20.삼각형 ABC에서 등식 $a\sin A=b\sin B+c\sin C$가 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

21.오른쪽 그림과 같이 $\angle \mathrm{A}=30°, \overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 AB의 길이의 최댓값을 구하시오.



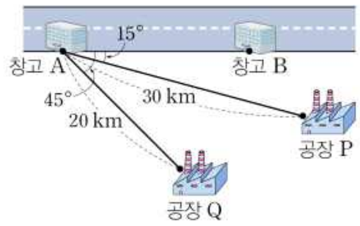
22.다음 그림과 같이 $A=120°$, $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 구하시오.



23.세 변의 길이가 4, 5, 7인 삼각형 ABC에서 가장 큰 각의 크기를 ∠A라고 할 때, $\cos A$의 값을 구하시오.

24.삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=60°$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

25.다음 그림과 같이 공장 P와 공장 Q가 동시에 사용하는 창고 B를 새로 지으려고 한다. 창고 A에서 두 공장 P, Q까지의 거리가 각각 30 km, 20 km이고 공장 P와 창고 A를 이은 직선과 공장 Q와 창고 A를 이은 직선은 도로와 각각 15°, 45°˚의 각을 이룬다. 창고 B를 두 공장과의 거리의 합이 최소가 되는 지점에 지으려고 할 때, 거리의 합의 최솟값을 구하시오.



26.삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=105°$, $\angle \mathrm{B}=30°$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

① 2π ② 4π ③ 6π
④ 8π ⑤ 10π

27.$0 \le x < 2\pi$일 때, 함수 $y=\sin^2 x-\cos^2 x$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

28.함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하여 얻은 그래프의 식으로 옳은 것은?

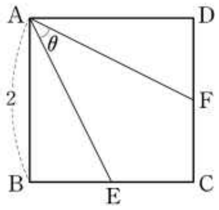
① $y=\sin x$ ② $y=\cos x$
③ $y=-\sin x$ ④ $y=-\cos x$
⑤ $y=2\cos x$

29. $0 \le x < 2\pi$일 때, $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 모든 x의 값의 합은?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π

④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

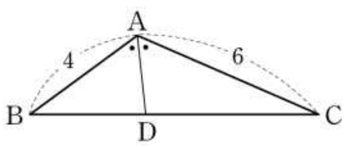
30. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 두 변 BC, CD의 중점이 각각 E, F이고 $\angle \mathrm{EAF}=\theta$일 때, $10(\sin\theta+\cos\theta)$의 값은?



① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

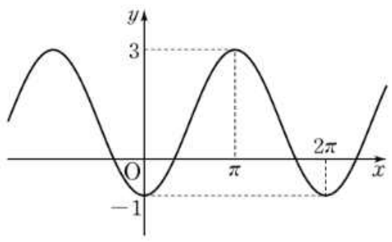
31. 다음 그림과 같이 $\angle \mathrm{A}=120°$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$인 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 AD의 길이는?



① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{12}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$

④ $\frac{14}{5}$ ⑤ 3

32. 함수 $y=a\cos b(x-\pi)+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a>0, b>0$)



33. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\tan(\pi-\theta)}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$를 간단히 하시오.

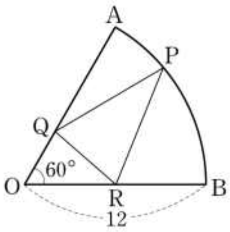
34. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{13}$, $\angle \mathrm{B}=60°$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

35. $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식

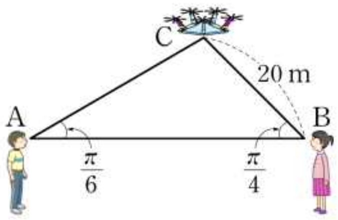
$$\cos^2 x-\sin^2 x+5\cos x+3 \ge 0$$

의 해를 구하시오.

36.다음 그림과 같이 중심각이 $60°$, 반지름의 길이가 12인 부채꼴 OAB 위의 세 점 P, Q, R는 각각 호 AB, 선분 OA, 선분 OB 위를 움직인다. 이때 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.



37.눈높이가 같은 두 학생 A, B가 하늘에 떠 있는 드론 C를 동시에 관찰한 각이 다음 그림과 같이 각각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$이었다. 학생 B부터 드론 C까지의 거리가 20m일 때, 세 지점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



38.제2항이 8, 제6항이 20인 등차수열의 일반항 a_n을 구하시오.

39.등차수열의 합 $2+5+8+11+\cdots+98$의 값을 구하시오.

40.첫째항부터 제5항까지의 합이 35, 첫째항부터 제10항까지의 합이 145인 등차수열의 첫째항과 공차를 구하시오.

41.첫째항부터 제4항까지의 합이 96, 첫째항부터 제11항까지의 합이 110인 등차수열의 첫째항과 공차를 구하시오.

42.관람객을 280명 이상 수용할 수 있는 공연장을 지으려고 한다. 관람석의 첫 번째 열의 좌석 수가 10이고, 두 번째 열 이후의 좌석 수는 그 앞 열의 좌석수보다 4씩 늘어나도록 할 때, 적어도 몇 번째 열까지 지어야 하는지 구하시오.

43.제2항이 15, 제5항이 405인 등비수열의 일반항 a_n을 구하시오.

44.빛이 어느 공장에서 생산한 유리를 통과하면 그 양이 일정한 비율로 줄어든다고 한다. 이 유리를 6장 통과한 후 빛의 양이 처음 빛의 양보다 19% 줄어들었다고 할 때, 이 유리를 3장 통과한 후 빛의 양은 처음 빛의 양보다 몇 % 줄어들었는지 구하시오.

45. 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활동을 통해 알아보시오.

> 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
>
> $n=1$일 때, $S_1=a_1$
>
> $n\geq 2$일 때,
>
> $$S_n=\underbrace{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}+a_n$$
>
> $$=S_{n-1}+a_n$$
>
> 따라서
>
> $a_1=S_1$
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$
>
> 이다.

활동 ❶ 다음은 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+n$일 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수 또는 식을 써넣어 보시오.

> $a_1=\boxed{}$ $\cdots\cdots$ ①
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-\{\boxed{}\}=\boxed{}$
>
> $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ $\cdots\cdots$ ②
>
> ①은 ②에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n은 $a_n=\boxed{}$이다.

활동 ❷ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때, 일반항 a_n을 구해 보시오.

(1) $S_n=n^2-2n$　　(2) $S_n=n^2-2n+1$

활동 ❸ 활동 ❷에서 구한 (1), (2)의 일반항을 비교하고 두 수열의 공통점과 차이점을 발표해 보시오.

46. 세 수 $a-9$, 6, $a+7$이 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 a의 값을 모두 구하시오.

47. 등비수열의 합 $9+3+1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^5}$의 값을 구하시오.

48. 모든 항이 양수이고 첫째항부터 제2항까지의 합이 8, 첫째항부터 제4항까지의 합이 80인 등비수열의 첫째항과 공비를 구하시오.

49. 첫째항부터 제3항까지의 합이 9, 첫째항부터 제6항까지의 합이 -63인 등비수열의 첫째항과 공비를 구하시오.

50. 연이율이 3%이고 1년마다 복리로 매년 초에 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년째 말의 적립금의 원리합계를 소수 첫째 자리에서 반올림하여 구해 보시오. (단, $1.03^{10}=1.34$로 계산한다.)

51. 등차수열 100, 94, 88, 82, $\cdots$에서 처음으로 음수가 되는 항은 제몇 항인지 구하시오.

52.직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루고 둘레의 길이가 36일 때, 이 직각삼각형의 넓이를 구하시오.

53.두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1+b_1=10$이고 두 등차수열의 공차의 합이 10일 때,

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9)$$

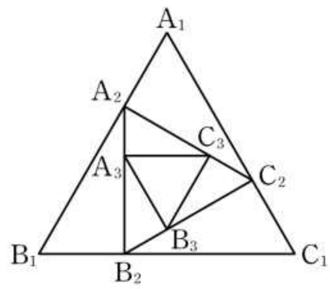
의 값을 구하시오.

54.제5항이 22, 제15항이 -18인 등차수열에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최댓값을 구하시오.

55.등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{a_3+a_5+a_7}{a_1+a_3+a_5}=10$일 때, $\dfrac{a_{100}-a_{98}}{a_{10}-a_8}$의 값을 구하시오.

56.80, a, b, c, 5가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, abc의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.)

57.한 변의 길이가 6인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 세 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1A_1}$을 1 : 2로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$라 하고, 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 세 변 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2A_2}$를 1 : 2로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$이라고 하자. 이와 같은 과정을 반복해서 만든 삼각형 $\mathrm{A_nB_nC_n}$의 넓이를 S_n이라고 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}$의 값을 구하시오.



58.다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)(k+1)$

59.다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하시오.

(1) 1×3, 2×4, 3×5, 4×6, 5×7, $\cdots$, $n(n+2)$

(2) 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, $\cdots$, $(2n-1)^2$

60.다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

61.다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

62. $\sum_{k=1}^{8}a_k=4$, $\sum_{k=1}^{8}a_k^2=44$일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k-1)^2$의 값을 구하시오.

63.두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)=8,\ \sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=8$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값을 구하시오.

64. $\sum_{k=1}^{5}(k-p)^2=15$일 때, 상수 p의 값을 구하시오.

65.다음 식의 값을 구하시오.

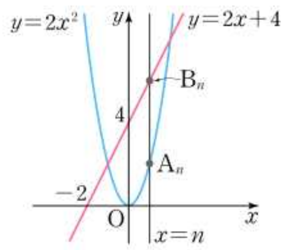
(1)

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

(2) $\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-1}+\frac{2}{4^2-1}+\cdots+\frac{2}{10^2-1}$

66.자연수 n에 대하여 직선 $y=2x+a_n$이 원 $(x-n)^2+(y-4n^2-2n)^2=3n$을 이등분할 때, $\sum_{k=1}^{5}ka_k$의 값을 구하시오.

67.오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2x^2$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 함수 $y=2x+4$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 B_n이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{10}\overline{\mathrm{A_nB_n}}$의 값을 구하시오.



(단, n은 자연수이다.)

68.다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하시오.

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

69.방학을 맞아 지연이는 5일 동안 과수원에서 사과를 수확하는 일을 돕기로 했다. 첫째 날에는 사과 32개를 수확했고, 둘째 날부터는 수확량을 늘리기 위해 전날 수확한 사과의 개수의 $\frac{3}{2}$배를 수확하였다. 사과를 수확한 지 n일째 되는 날에 수확한 사과의 개수를 a_n이라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) a_2, a_3 (2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

70.$200L$의 물이 들어 있는 물통에서 물을 20%만큼 사용하고 $20L$의 물을 넣었다. 이와 같은 과정을 n번 반복한 후 물통에 남아 있는 물의 양을 $a_n L$라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) a_1, a_2

(2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

71.모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

72.모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

73.$h>0$일 때, $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$(1+h)^n>1+nh$$

74.$n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

75.다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 제5항까지 나열하시오.

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n-2\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=-2a_n\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

76.수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=a_n+2n\ (n=1,2,3,\cdots)$을 만족시킨다.
$a_3=7$일 때, a_1을 구하시오.

77.수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ (2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$$

$(n=1,2,3,\cdots)$
으로 정의될 때, a_5를 구하시오.

78.수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오.

(가) $a_1 = 1$ (나) $a_{n+1} + a_n = 2n + 1$

79.농도가 10%인 소금물 500g이 들어 있는 그릇에서 소금물 100g을 덜어 내고 물 100g을 넣고 잘 섞는다. 이와 같은 과정을 n번 반복한 후 소금물의 농도를 a %라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) a_1, a_2 (2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

80.수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n + 4$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$이다.

$\sum_{k=1}^{30} a_k = 45$일 때, a_2의 값을 구하시오.

81.$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$$

82.다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 수 또는 식을 써넣으시오.

(ⅰ) $n = \square$일 때 (좌변)$= 1^3 = 1$, (우변)$= \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1$ 이므로 주어진 등식이 성립한다. (ⅱ) $n = k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$ …… ① ①의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$ $= \boxed{} + (k+1)^3 = \left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$ 따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다. (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

83.세 수 a, 0, b가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 b, a, -3이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

84.등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6은?

① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

85. 1과 23 사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 23$$

의 합이 144일 때, n의 값은?

① 9　② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

86. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열일 때, 수열 $\{2^{a_n}\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은?

① 482　② 532　③ 582
④ 632　⑤ 682

87. 자연수 n에 대하여 3^n+7^n의 일의 자리의 수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k \ge 100$을 만족시키는 n의 최솟값은?

① 36　② 37　③ 38
④ 39　⑤ 40

88. $\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k+1)-\sum_{k=1}^{5}(k^2-k-1)$의 값은?

① 55　② 65　③ 75
④ 85　⑤ 95

89. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의될 때, a_5는?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$　⑤ 1

90. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{5}\frac{S_n}{a_n}$의 값을 구하시오.

91. 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\ \cdots\ +10\times11$

(2) $1\times19+2\times18+3\times17+\ \cdots\ +19\times1$

92. 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

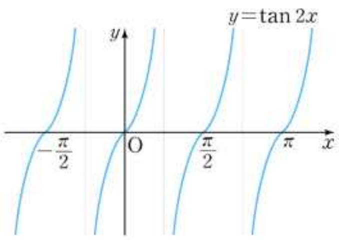
93. 첫째항부터 제10항까지의 합이 100, 첫째항부터 제20항까지의 합이 400인 등차수열의 첫째항부터 제30항까지의 합을 구하시오.

94. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2+11x-n(n+1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라고 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오.

1. 정답 풀이참조
$f(x)=\tan 2x$라고 하면
$f(x)=\tan 2x=\tan(2x+\pi)$



$=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

이므로 함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고
함수 $y=\tan 2x$의 점근선의 방정식은
$2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)
따라서 함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 오른쪽과 같다.

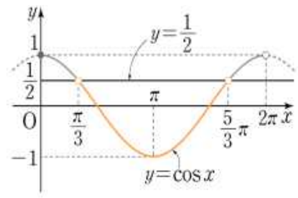
2. 정답 (1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$
(2) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$
(3) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(1) 방정식 $2\sin x+1=0$을 정리하면 $\sin x=-\frac{1}{2}$
$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 구하는 해는
$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) 방정식 $\sqrt{2}\cos x-1=0$을 정리하면 $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 구하는 해는
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(3) 방정식 $\tan x-\sqrt{3}=0$을 정리하면 $\tan x=\sqrt{3}$
$\tan x=\sqrt{3}$에서 방정식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 구하는 해는
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

3. 정답 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$
주어진 식을 정리하면
$\cos x<\frac{1}{2}$이므로 부등식의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 구하는 해는 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$이다.

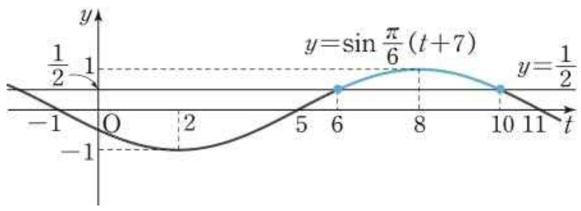
4. 정답 5
$y=3\sin ax+b$는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 최댓값이 $3+b$이다.
$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$에서 $a=4$
$3+b=5$에서 $b=2$
즉, 주어진 함수는 $y=3\sin 4x+2$
함수 $y=3\sin 4x+2$의 최솟값 m은 $-3+2=-1$이다.
따라서 $a+b+m=4+2-1=5$

5. 정답 2
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$이다.
따라서 주어진 식을 간단히 하면
$\sin^2(-\theta)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin^2(\pi-\theta)$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2$

6. 정답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$
$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로
주어진 방정식 $2\cos^2 x-3\sin x=0$은
$2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0$에서
$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$, $(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$
$-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$
따라서 $0\le x<2x$일 때 방정식의 해를 구하면
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

7. 정답 6월, 7월, 8월, 9월, 10월
t월의 월평균 수온이 21 ℃ 이상이 되려면
부등식 $17+8\sin\frac{\pi}{6}(t+7)\ge 21$을 만족하는 t의 값을 구해야 한다. 부등식을 정리하면 $\sin\frac{\pi}{6}(t+7)\ge\frac{1}{2}$
부등식의 해는 함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}(t+7)$의 그래프가 직선

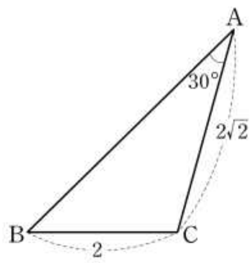
$y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 $6 \le t \le 10$이므로 월평균 수온이 21 ℃ 이상인 달은 6월, 7월, 8월, 9월, 10월이다.

8. 정답 (1) 2 (2) 45°

(1) 사인법칙을 이용하여 R의 값을 구하면 $\frac{a}{\sin A}=2R$에서



$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{2}{2\sin 30°}=2$이다.

(2) 사인법칙을 이용하여 $\sin B$의 값을 구하면

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}=4$, $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $B=45°$ 또는 $B=135°$이고

문제의 조건에서 $B<90°$이므로 $B=45°$이다.

9. 정답 (1) $3\sqrt{6}$ (2) 60°

(1) 삼각형 ABC에서 $A+B+C=180°$이므로 $C=60°$이다.

사인법칙 $\frac{9}{\sin 60°}=\frac{a}{\sin 45°}$에서 $\frac{18}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}a$

$a=3\sqrt{6}$이다.

(2) 사인법칙 $\frac{2}{\sin 30°}=\frac{4}{\sin C}$에서 $\sin C=1$

따라서 $C=90°$

$A+B+C=180°$이므로 $B=60°$이다.

10. 정답 ∠A가 직각인 직각삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

따라서

$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$에서

$\frac{a^2}{4R^2}=\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}$

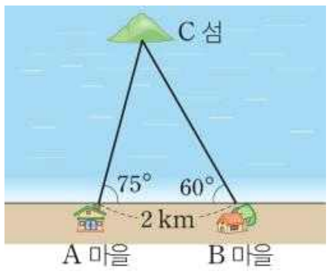
$a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 ∠A가 직각인 직각삼각형이다.

11. 정답 $\sqrt{6}$ km

삼각형의 세 내각의 합이 180°이므로

$A+B+C=180°$에서 $C=45°$이다.



사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin 45°}=\frac{\overline{AC}}{\sin 60°}$에서 $2\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{AC}$

$\overline{AC}=\sqrt{6}$

따라서 A 마을에서 C섬까지의 거리는 $\sqrt{6}$ km이다.

12. 정답 (1) $\sqrt{37}$ (2) 120°

(1) 코사인법칙 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$에서

$a^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos 120°$

$=9+16-24\times\left(-\frac{1}{2}\right)=37$

따라서 $a=\sqrt{37}$ $(a>0)$이다.

(2) 코사인법칙 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$에서

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $C=120°$이다.

13. 정답 5 km

$\overline{AC}=24\times\frac{1}{3}=8$ (km), $\overline{BC}=21\times\frac{1}{3}=7$ (km)이고

$\overline{AB}=x$ km라고 하면 코사인법칙에 의하여

$$7^2=8^2+x^2-2\times8\times x\cos 60°$$

정리하면 $x^2-8x+15=0$에서

$$x=3 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 지점 A와 지점 B 사이의 거리의 최댓값은 5 km이다.

14. 정답 3

$\overline{BC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$x^2=3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos 60°=27$

$x>0$이므로 $x=3\sqrt{3}$

유물의 안쪽 원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 60^{\circ}}=6=2R$에서

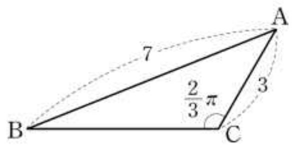
$R=3$

따라서 유물의 안쪽 원의 반지름의 길이는 3이다.

15. 정답 $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

코사인법칙을 이용하면

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times 3\cos\dfrac{2}{3}\pi$



$a^2+3a-40=(a+8)(a-5)=0$

그러므로 $a=5$ 또는

$a=-8$이다.

이때 a는 삼각형의 한 변의 길이이므로 $a>0$이다.

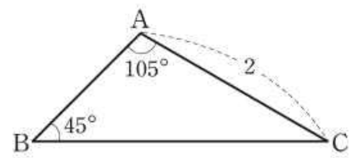
따라서 $a=5$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 5\times 3\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$이다.

16. 정답 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

삼각형 ABC에서 세 내각의 합은 180°이고

$A=105^{\circ}$, $B=45^{\circ}$이므로 $C=30^{\circ}$이다.



사인법칙 $\dfrac{c}{\sin 30^{\circ}}=\dfrac{2}{\sin 45^{\circ}}$에서 $c=\sqrt{2}$

코사인법칙을 이용하면

$2^2=(\sqrt{2})^2+a^2-2\times\sqrt{2}\times a\times\cos 45^{\circ}$

$=2+a^2-2a$

위의 식을 정리하면 $a^2-2a-2=0$

따라서 $a=1\pm\sqrt{3}$이다.

이때 $a>0$이므로 $a=1+\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times 2\times\sin 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

17. 정답 $10\sqrt{3}$

$a=8$, $b=7$, $c=5$이므로 코사인법칙에 의하여

$7^2=8^2+5^2-2\times 8\times 5\times\cos C$

즉, $\cos C=\dfrac{1}{2}$

삼각함수의 성질을 이용하면

$\sin C=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0<C<180^{\circ})$

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times a\times b\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times 5\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

18. 정답 2

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 할 때,

사인법칙 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2k=4$에서

$a=4\sin A$, $b=4\sin B$, $c=4\sin C$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 8이므로

$a+b+c=4(\sin A+\sin B+\sin C)=8$

따라서 $\sin A+\sin B+\sin C=2$

19. 정답 1

$\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{a}$라고 하면 코사인법칙에 의하여

$a^2=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times 2\times\sqrt{3}\times\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=4+3-4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=4+3-6$

$=1$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

20. 정답 $\angle$A가 직각인 직각삼각형

사인법칙 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$에서

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이다.

$a\sin A=b\sin B+c\sin C$가 성립하므로 대입하면

$\dfrac{a^2}{2R}=\dfrac{b^2}{2R}+\dfrac{c^2}{2R}$, 즉 $a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle$A가 직각인 직각삼각형이다.

21. 정답 4

사인법칙에 의하여

$\dfrac{2}{\sin 30^{\circ}}=\dfrac{c}{\sin C}$

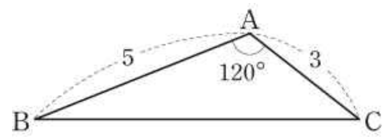
$c=4\sin C$

$0<C<180^{\circ}$에서 $0<\sin C\le 1$이므로

$C=90^{\circ}$일 때 $\sin C=1$이고 선분 AB의 길이의

최댓값은 4이다.

22. 정답 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$



$a^2=5^2+3^2-2\times 5\times 3\times\cos 120^{\circ}=49$에서

$a=7$이다.

사인법칙에 의하여

$\dfrac{7}{\sin 120^\circ}=2R$

즉, $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

23. 정답 $-\dfrac{1}{5}$

삼각형에서 가장 큰 각과 마주보는 변의 길이가 가장 크다.
따라서 각 A와 마주보는 변의 길이는 7이다.
코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{4^2+5^2-7^2}{2\times4\times5}=-\dfrac{1}{5}$

24. 정답 $3\sqrt{3}$

$\overline{AB}=x$라고 하면 $\angle A=60^\circ$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$,
$\overline{AC}=3$이므로 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=x^2+3^2-2\times3\times x\times\cos 60^\circ$

$x^2-3x-4=0$

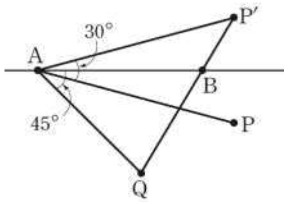
$(x-4)(x+1)=0$

$x>0$이므로 $x=4$이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$

25. 정답 $10\sqrt{7}$ km



위의 그림과 같이 점 P를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 $\overline{BP}=\overline{BP'}$이다.
따라서 점 B에서 두 점 P, Q에 이르는 거리의 합은
$\overline{BP}+\overline{BQ}=\overline{BP'}+\overline{BQ}\ge\overline{P'Q}$
이므로 거리의 합의 최솟값은 선분 P′Q의 길이이다.
삼각형 AP′Q에서
$\overline{AP'}=30$, $\overline{AQ}=20$, $\angle P'AQ=60^\circ$이므로
코사인법칙에 의하여

$\overline{P'Q}^2=\overline{AP'}+\overline{AQ}^2-2\times\overline{AP'}\times\overline{AQ}\times\cos P'AQ$

$=30^2+20^2-2\times30\times20\times\cos 60^\circ$

$=900+400-1200\times\dfrac{1}{2}=700$

따라서 거리의 합의 최솟값은 $10\sqrt{7}$ km이다.

26. 정답 8π

$\angle A=105^\circ$, $\angle B=30^\circ$이므로
$\angle C=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면
사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$이므로

$\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=2R$

$\dfrac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

즉, $R=2\sqrt{2}$
따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는
$\pi R^2=\pi(2\sqrt{2})^2=8\pi$

27. 정답 0

주어진 함수를 정리하면

$y=\sin^2x-\cos^2x$

$=\sin^2x-(1-\sin^2x)$

$=2\sin^2x-1$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로
제곱하면 $0\le\sin^2x\le1$
따라서 최댓값은 $2\times1-1=1$
최솟값은 $2\times0-1=-1$
즉, 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

28. 정답 $-\sin x$

함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

함수 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\cos\left(-x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

즉, $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이다.

29. 정답 $\dfrac{5}{3}\pi$

$0\le x<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{3}\le x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$에서

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$이므로 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{7}{6}\pi=\frac{5}{3}\pi$

30. 정답 14
$\overline{AE}=\overline{AF}=\sqrt{5}$, $\overline{EF}=\sqrt{2}$이므로

$\cos\theta=\frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

따라서 $10(\sin\theta+\cos\theta)=10\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=14$

31. 정답 4
$\angle BAD=\angle CAD=60^\circ$ 이고
$\overline{AB}:\overline{AC}=4:6=2:3$이므로
$\overline{BD}=2k$, $\overline{CD}=3k$ ($k\neq0$인 상수)
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$(2k)^2=4^2+\overline{AD}^2-2\times4\times\overline{AD}\times\cos60^\circ$

$4k^2=16+\overline{AD}^2-4\overline{AD}$

$k^2=4+\frac{1}{4}\overline{AD}^2-\overline{AD}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(3k)^2=6^2+\overline{AD}^2-2\times6\times\overline{AD}\times\cos60^\circ$

$9k^2=36+\overline{AD}^2-6\overline{AD}$

$k^2=4+\frac{1}{9}\overline{AD}^2-\frac{2}{3}\overline{AD}$

따라서 $4+\frac{1}{4}\overline{AD}^2-\overline{AD}=4+\frac{1}{9}\overline{AD}^2-\frac{2}{3}\overline{AD}$이다.

$\left(4+\frac{1}{4}\overline{AD}^2-\overline{AD}\right)-\left(4+\frac{1}{9}\overline{AD}^2-\frac{2}{3}\overline{AD}\right)$

$=\frac{5}{36}\overline{AD}^2-\frac{1}{3}\overline{AD}$

$=\frac{1}{36}\overline{AD}(5\overline{AD}-12)=0$

따라서 $\overline{AD}=\frac{12}{5}$이다.

32. 정답 4
그래프를 보면 함수 $y=a\cos b(x-\pi)+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로 $a+c=3$, $-a+c=-1$
따라서 $a=2$, $c=1$이다.
또한 주기가 2π이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$, 즉 $b=1$
따라서 $a+b+c=4$이다.

33. 정답 $\cos\theta-\sin\theta$

$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\tan(\pi-\theta)}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$=\frac{-\sin\theta}{-\tan\theta}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\cos\theta-\sin\theta$

34. 정답 $12\sqrt{3}$
$\overline{BC}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=a^2+6^2-2\times a\times6\times\cos60^\circ$

$4\times13=a^2+36-6a$

$a^2-6a-16=0$

$(a-8)(a+2)=0$

따라서 $a=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=12\sqrt{3}$

35. 정답 $0\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x<2\pi$

$\cos^2x-\sin^2x+5\cos x+3$

$=\cos^2x-(1-\cos^2x)+5\cos x+3$

$=2\cos^2x+5\cos x+2$

$=(2\cos x+1)(\cos x+2)\ge0$

이때 $\cos x+2\ge0$이므로

$2\cos x+1\ge0$, $\cos x\ge-\frac{1}{2}$

주어진 x의 값의 범위가 $0\le x<2\pi$이므로
부등식의 해는

$0\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x<2\pi$

36. 정답 $12\sqrt{3}$
부채꼴의 호 AB를 연장한 원주 위에 점 P의 선분 OA, 선분 OB에 대한 대칭점을 각각 P_1, P_2라고 하면

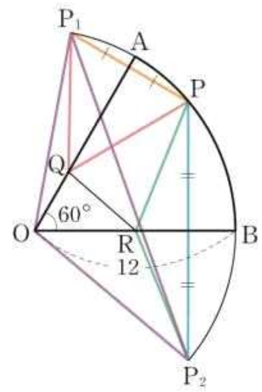
$\overline{PQ}=\overline{P_1Q}$, $\overline{PR}=\overline{P_2R}$ …… ㉮

이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P_1Q}+\overline{QR}+\overline{P_2R}$

$\ge\overline{P_1P_2}$ …… ㉯

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{P_1P_2}$와 같다.



위의 삼각형 OP_1P_2에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{P_1P_2}^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \times 12 \times 12 \times \cos 120^\circ$

$= 144 + 144 + 144$

$= 3 \times 144$

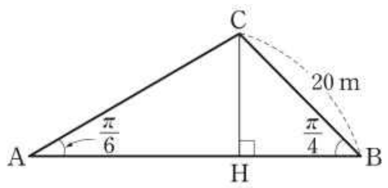
따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은

$\sqrt{3 \times 144} = 12\sqrt{3}$ …… ㉰

단계	채점 기준	비율
㉮	점 P의 대칭점인 점 P_1, P_2를 찾았다.	40%
㉯	삼각형 PQR의 둘레의 길이를 구하는 식을 점 P_1, P_2를 이용하여 새로 세웠다.	30%
㉰	둘레의 길이의 최솟값을 구했다.	30%

37. 정답 $100 + 100\sqrt{3}$

점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{BH} = 20\cos\frac{\pi}{4} = 10\sqrt{2}$,

$\overline{CH} = 20\sin\frac{\pi}{4} = 10\sqrt{2}$,

$\overline{AH} = \dfrac{\overline{CH}}{\tan\frac{\pi}{6}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 10\sqrt{6}$ …… ㉮

따라서

$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$

$= 10\sqrt{2} + 10\sqrt{6}$ …… ㉯

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \times 20 \times (10\sqrt{2} + 10\sqrt{6}) \times \sin\frac{\pi}{4}$

$= 5\sqrt{2}(10\sqrt{2} + 10\sqrt{6})$

$= 100 + 100\sqrt{3}$ …… ㉰

단계	채점 기준	비율
㉮	선분 AH, BH, CH의 길이를 구했다.	30%
㉯	선분 AB의 길이를 구했다.	30%
㉰	삼각형 ABC의 넓이를 구했다.	40%

38. 정답 $3n+2$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2 = a + (2-1)d = a + d = 8$ …… ①

$a_6 = a + (6-1)d = a + 5d = 20$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 5, d = 3$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$이다.

39. 정답 1650

주어진 등차수열 2, 5, 8, 11, ⋯, 98의 합을 구하려면 98이 이 등차수열의 몇 번째 항인지 알아야 한다.

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n이

$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$

이므로 98을 제k항이라고 하면

$3k - 1 = 98$

$3k = 99$

$k = 33$

즉, 98은 이 등차수열의 제33항이다.

따라서 등차수열의 합 2+5+8+11+ ⋯ +98의 값은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제33항까지의 합이므로

$\dfrac{33(2+98)}{2} = 1650$

40. 정답 첫째항 1, 공차 3

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 35$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2} = 145$

이므로

$a + 2d = 7$ ……①

$2a + 9d = 29$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 1, d = 3$이므로 첫째항이 1, 공차가 3이다.

41. 정답 첫째항은 30, 공차는 -4

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_4=\dfrac{4(2a+3d)}{2}=96$

$S_{11}=\dfrac{11(2a+10d)}{2}=110$

이므로

$4a+6d=96$

$11a+55d=110$

정리하면

$2a+3d=48$ …… ①

$a+5d=10$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=30, d=-4$

따라서 이 등차수열의 첫째항은 30이고 공차는 -4이다.

42. 정답 10번째 열까지 설계

n번째 열의 좌석 수를 a_n이라고 하면

첫 번째 열의 좌석 수는 10이므로 $a_1=10$

두 번째 열 이후의 좌석 수는 그 앞 열의 좌석 수보다 4씩 늘어나므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 4인 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\dfrac{n\{2\times10+(n-1)\times4\}}{2}=2n(n+4)$

부등식 $S_n \ge 280$에서

$2n(n+4) \ge 280$

$n^2+4n-140 \ge 0$

$(n-10)(n+14) \ge 0$

$n \le -14$ 또는 $n \ge 10$

이때 n은 자연수이므로 $n \ge 10$이다.

따라서 관람객을 280명 이상 수용할 수 있는 공연장을 지으려면 관람석은 적어도 10번째 열까지 설계해야 한다.

43. 정답 $5\times3^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

제2항이 15이므로 $a_2=ar=15$

…… ①

제5항이 405이므로 $a_5=ar^4=405$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $r^3=\dfrac{405}{15}=27$이므로 $r=3$

$r=3$을 ①에 대입하면 $a=5$

따라서 구하는 일반항 a_n은 $a_n=5\times3^{n-1}$이다.

44. 정답 10 %

처음 빛의 양을 a, 빛이 유리를 1장 통과할 때마다 빛의 양이 r % 줄어든다고 하면 유리를 6장 통과한 후 빛의 양은

$a\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^6$

이때 유리를 6장 통과한 후 빛의 양이 처음 빛의 양보다 19% 줄어들었으므로

$a\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^6=0.81a,\ \left(1-\dfrac{r}{100}\right)^6=0.81$

$\left\{\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^3\right\}^2=0.81$

$\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^3=0.9$

따라서 유리를 3장 통과한 후 빛의 양은 처음 빛의 양보다 10 % 줄어든다.

45. 정답 풀이참조

활동 ❶

$a_1=S_1=\boxed{2}$ …… ①

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-\{\boxed{(n-1)^2+(n-1)}\}$

$=\boxed{2n}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ …… ②

①은 ②에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n은 $a_n=\boxed{2n}$이다.

활동 ❷

(1) $S_n=n^2-2n$이고 $a_1=S_1=-1$

$n\ge2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_n=2n-3\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

이때 a_n에 $n=1$을 대입하여 얻은 값이 $a_1=-1$과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이다.

(2) $S_n=n^2-2n+1$이고 $a_1=S_1=0$

$n\ge2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_n=2n-3\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

이때 a_n에 $n=1$을 대입하여 얻은 값은 -1이고 이는 a_1과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=0,\ a_n=2n-3\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

이다.

활동 ❸

두 수열은 n이 2 이상일 때 모든 항이 같고 첫째항만 다르다.

46. 정답 $a=-9$ 또는 $a=11$

세 수 $a-9,\ 6,\ a+7$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$6^2=(a-9)(a+7),\ 36=a^2-2a-63$

$a^2-2a-99=0$, $(a+9)(a-11)=0$
따라서 $a=-9$ 또는 $a=11$이다.

47. 정답 $\frac{27}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}$

주어진 등비수열 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\frac{1}{3^5}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라고 하면

주어진 수열은 첫째항이 9이고, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 이 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{-n+3}$

이때 $\frac{1}{3^5}$가 주어진 등비수열의 제k항이라고 하면

$3^{-k+3}=3^{-5}$에서 $k=8$

즉, $\frac{1}{3^5}$은 주어진 수열의 제8항이다.

따라서 등비수열의 합 $9+3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^5}$의 값은

첫째항이 9이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$\frac{9\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}$$

48. 정답 첫째항이 2, 공비가 3
과정 1. $r\neq 1$임을 확인하기
등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하자. $r=1$이면 $S_2=2a=8$, $S_4=4a=80$을 동시에 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다. 즉, $r\neq 1$이다.
과정 2. 첫째항과 공비에 대한 식 세우기
등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_2=\frac{a(r^2-1)}{r-1}=8$ …… ①

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=\frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}=80$ …… ②

과정 3. 첫째항과 공비 구하기
①을 ②에 대입하여 풀면 $8(r^2+1)=80$이므로 $r^2=9$
이때 모든 항이 양수이므로 r는 양수이다. 즉, $r=3$ …… ③
③을 ①에 대입하면 $a=2$이다.
따라서 첫째항이 2, 공비가 3이다.

49. 정답 첫째항은 3이고, 공비는 -2

먼저 공비가 1이 아님을 확인해야 한다.
등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 할 때,
$r=1$이면
$S_3=3a=9$
$S_6=6a=-63$
두 경우를 동시에 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
즉, $r\neq 1$이다.
공비가 1이 아니므로 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하면

$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=9$ …… ①

$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=-63$ …… ②

①을 ②에 대입하여 풀면
$9(r^3+1)=-63$
이므로
$r^3+1=-7$
$r^3=-8$
즉, $r=-2$ …… ③
③을 ①에 대입하면 $a=3$이다.
따라서 이 등비수열의 첫째항은 3이고, 공비는 -2이다.

50. 정답 11673333원
연이율이 3 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 100만 원씩 10년 동안 적립한 원리합계를 S라고 하면
$S=1000000(1+0.03)+1000000(1+0.03)^2+\cdots$
$+1000000(1+0.03)^{10}$
$=1000000\times1.03+1000000\times1.03^2+\cdots+1000000\times1.03^{10}$
이고, 이것은 첫째항이 1000000×1.03, 공비가 1.03인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$S=\frac{1000000\times1.03(1.03^{10}-1)}{1.03-1}=\frac{10^6\times1.03\times0.34}{0.03}$
$=11673333.33\cdots$
따라서 원리합계를 소수 첫째 자리에서 반올림하여 나타내면 11673333원이다.

51. 정답 제18항
등차수열 100, 94, 88, 82, $\cdots$는 첫째항이 100, 공차가 -6인 등차수열이므로 일반항 a_n은
$a_n=100+(n-1)\times(-6)=-6n+106$
$a_n<0$에서 $-6n+106<0$
$n>\frac{106}{6}=\frac{53}{3}=17.6666\cdots$
이므로 $n=18, 19, 20, \cdots$일 때 a 우 음수이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제18항이다.

52. 정답 54
직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루므로 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$ (a, d는 양수)라고 하면 빗변의 길이는 $a+d$이다.
세 변의 길이의 합이 36이므로
$(a-d)+a+(a+d)=3a=36$, 즉 $a=12$
이때 빗변의 길이가 $12+d$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$(12-d)^2+12^2=(12+d)^2$, $48d=144$
즉, $d=3$
따라서 직각삼각형 세 변의 길이는 9, 12, 15이고
이 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 9\times 12=54$이다.

53. 정답 450
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1이라 하고 등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d_2라 하면
$d_1+d_2=10$
이고 $a_1+b_1=10$이므로
$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9)$
$=\frac{9\times(2a_1+8d_1)}{2}+\frac{9\times(2b_1+8d_2)}{2}$
$=\frac{9}{2}\{2(a_1+b_1)+8(d_1+d_2)\}$
$=\frac{9}{2}(2\times 10+8\times 10)=450$

54. 정답 200
주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$에서
$a_5=a+4d=22$ …… ①
$a_{15}=a+14d=-18$ …… ②
①, ②를 연립하여 풀면
$a=38$, $d=-4$
따라서 일반항은 $a_n=-4n+42$이다.
$a_n>0$인 경우를 구하면
$-4n+42>0$, $n<\frac{42}{4}=10.5$이므로
등차수열 $\{a_n\}$에서 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}은 양수이고, a_{11}, a_{12}, a_{13}, $\cdots$은 음수이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}이 최대이다.
$S_{10}=\frac{10\{2\times 38+9\times(-4)\}}{2}=200$

55. 정답 10^{45}
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면
$a_n=ar^{n-1}$
이므로
$\frac{a_3+a_5+a_7}{a_1+a_3+a_5}=\frac{ar^2+ar^4+ar^6}{a+ar^2+ar^4}=\frac{r^2(a+ar^2+ar^4)}{a+ar^2+ar^4}=r^2$
즉, $r^2=10$이다.
따라서 구하는 값은
$\frac{a_{100}-a_{98}}{a_{10}-a_8}=\frac{ar^{99}-ar^{97}}{ar^9-ar^7}=\frac{r^{90}(ar^9-ar^7)}{ar^9-ar^7}$
$=(r^2)^{45}=r^{90}=10^{45}$

56. 정답 8000
80, a, b, c, 5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 이 수열의 공비를 r라고 하면
$b=80r^2$, $5=br^2$이므로
80, b, 5는 공비가 r^2인 등비수열을 이룬다.
따라서 b는 80과 5의 등비중항이다.
즉, $b^2=80\times 5=400$
이때 b는 양수이므로 $b=20$이다.
또한 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 b는 a와 c의 등비중항이다. 즉, $b^2=ac$
따라서 $abc=b(ac)=b\times b^2=b^3=20^3=8000$이다.

57. 정답 $\frac{27\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$
삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$은 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로
삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 넓이 S_1은
$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$
세 변 A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n의 길이가 같으므로 삼각형 $\mathrm{A}_nB_nC_n$은 정삼각형이고 한 변의 길이를 a_n이라고 하면
$S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_n)^2$
삼각형 $\mathrm{B_1A_2B_2}$에서 코사인법칙에 의하여
$(a_{n+1})^2=\left(\frac{2}{3}a_n\right)^2+\left(\frac{1}{3}a_n\right)^2-2\times\frac{2}{3}a_n\times\frac{1}{3}a_n\times\cos 60^\circ$
$=\frac{1}{3}(a_n)^2$
$a_n>0$이므로 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_n$
따라서 한 변의 길이가 a_{n+1}인 정삼각형 $\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}}$의 넓이 S_{n+1}은
$S_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_n\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{12}(a_n)^2$

이때 $S_n : S_{n+1} = 3:1$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $9\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고, 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}=\frac{9\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{27\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$$

58. 정답 (1) $\frac{n(n^2+6n+11)}{3}$ (2) $\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\times\frac{n(n+1)}{2}+2n$$

$$=\frac{n(n^2+6n+11)}{3}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)(k+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$$

59. 정답 (1) $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ (2) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(1) 주어진 수열이

$1\times3,\ 2\times4,\ 3\times5,\ 4\times6,\ 5\times7,\ \cdots,\ n(n+2)$

이므로 이 수열의 일반항은

$a_n=n(n+2)$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}2k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

(2) 주어진 수열이

$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 9^2,\ \cdots,\ (2n-1)^2$

이므로 이 수열의 일반항은

$a_n=(2n-1)^2$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}4k^2-\sum_{k=1}^{n}4k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

60. 정답 $\frac{n}{n+1}$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

61. 정답 $\frac{n}{2n+1}$

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

62. 정답 44

$$\sum_{k=1}^{8}(a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{8}(a_k^2-2a_k+1)=\sum_{k=1}^{8}a_k^2-2\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=1}^{8}1$$

$\sum_{k=1}^{8} a_k = 4$, $\sum_{k=1}^{8} a_k^2 = 44$를 대입하면

$$\sum_{k=1}^{8} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{8} a_k + \sum_{k=1}^{8} 1 = 44 - 2 \times 4 + 8 \times 1 = 44$$

63. 정답 76

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k - 2) = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 2 = \sum_{k=1}^{10} a_k - 20$$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k - 2) = 8$에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k - 20 = 8$

즉, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 28$

또한

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k$$
$$= 2 \times 28 - \sum_{k=1}^{10} b_k = 56 - \sum_{k=1}^{10} b_k$$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k - b_k) = 8$에서 $56 - \sum_{k=1}^{10} b_k = 8$

즉, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 48$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 28 + 48 = 76$$

64. 정답 $p=2$ 또는 $p=4$

$$\sum_{k=1}^{5}(k-p)^2 = \sum_{k=1}^{5}(k^2 - 2pk + p^2)$$
$$= \sum_{k=1}^{5} k^2 - 2p\sum_{k=1}^{5} k + p^2\sum_{k=1}^{5} 1$$
$$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 2p \times \frac{5 \times 6}{2} + 5p^2$$
$$= 5p^2 - 30p + 55 = 15$$

이를 정리하면

$p^2 - 6p + 8 = 0$, $(p-2)(p-4) = 0$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}(k-p)^2 = 15$를 만족시키는 상수 p의 값은

$p=2$ 또는 $p=4$

65. 정답 (1) $\sqrt{n+1} - 1$ (2) $\frac{72}{55}$

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \sqrt{n+1} - 1$$

(2) $\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} + \cdots + \frac{2}{10^2-1}$

$$= \sum_{k=1}^{9} \frac{2}{(k+1)^2 - 1} = \sum_{k=1}^{9} \frac{2}{k^2 + 2k}$$
$$= \sum_{k=1}^{9} \frac{2}{k(k+2)}$$
$$= \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55}$$

66. 정답 900

직선 $y = 2x + a_n$이 원 $(x-n)^2 + (y - 4n^2 - 2n)^2 = 3n$을 이등분하므로 직선 $y = 2x + a_n$은 원의 중심 $(n,\ 4n^2 + 2n)$을 지난다.

즉, $4n^2 + 2n = 2n + a_n$, $a_n = 4n^2$

따라서 구하는 $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은

$$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5}(k \times 4k^2) = \sum_{k=1}^{5} 4k^3 = 4\sum_{k=1}^{5} k^3$$
$$= 4 \times \left(\frac{5 \times 6}{2}\right)^2 = 900$$

67. 정답 628

두 점 A_n, B_n은 각각 직선 $x = n$이 두 함수 $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$의 그래프와 만나는 점이므로

두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각

$(n,\ 2n^2)$, $(n,\ 2n+4)$

두 함수 $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$를 연립하여 풀면

$2x^2 = 2x + 4$

$x^2 - x - 2 = 0$, $(x+1)(x-2) = 0$

$x = -1$ 또는 $x = 2$

따라서 두 함수 $y=2x^2$, $y=2x+4$의 그래프는 점 $(-1, 2)$, $(2, 8)$에서 만난다.
두 함수를 $f(x)=2x^2$, $g(x)=2x+4$라고 하면
선분 A_nB_n의 길이는 $|f(n)-g(n)|$이므로
$n=1$일 때
$\overline{A_1B_1}=|f(1)-g(1)|=g(1)-f(1)=6-2=4$
$n \geq 2$일 때
$\overline{A_nB_n}=|f(n)-g(n)|=f(n)-g(n)=2n^2-2n-4$

$$\sum_{n=1}^{10}\overline{A_nB_n}=\overline{A_1B_1}+\sum_{n=2}^{10}\overline{A_nB_n}=4+\sum_{n=2}^{10}(2n^2-2n-4)$$

$$=4+\sum_{n=1}^{10}(2n^2-2n-4)-(-4)$$

$$=8+2\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}-40=628$$

68. 정답 (1) 16(2) $\frac{1}{5}$

(1) $a_5=a_4+5$
$=a_3+4+5$
$=a_2+3+4+5$
$=a_1+2+3+4+5=16$

(2) $a_5=\frac{4}{5}a_4$
$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}a_3$
$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}a_2$
$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{5}\quad(\because a_1=1)$

69. 정답 (1) 48, 72 (2) $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$

(1) 둘째 날에는 첫째 날 수확한 사과의 개수의 $\frac{3}{2}$배를 수확하였으므로
$a_2=\frac{3}{2}\times a_1=\frac{3}{2}\times32=48$
마찬가지로 셋째 날 수확한 사과의 개수를 구하면
$a_3=\frac{3}{2}\times a_2=\frac{3}{2}\times48=72$

(2) $(n+1)$일째 되는 날에는 n일째 되는 날 수확한 사과의 개수의 $\frac{3}{2}$배를 수확하였으므로
$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n\,(n=1, 2, 3, 4)$이다.

70. 정답 (1) 180, 164 (2) $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+20$

(1) $a_1=200\times\frac{4}{5}+20=180$
$a_2=a_1\times\frac{4}{5}+20=180\times\frac{4}{5}+20=164$

(2) $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+20$

71. 정답 풀이참조
과정 1. $n=1$일 때 등식이 성립함을 보이기
$n=1$일 때
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{6}=1$
이므로 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
과정 2. $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하여
$n=k+1$일 때 등식이 성립함을 보이기
$n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\quad\cdots\cdots ①$$

이므로 ①의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.
그러므로 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

72. 정답 풀이참조
(ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$
이므로 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\quad\cdots\cdots ①$$

이므로 ①의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

그러므로 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

73. 정답 풀이참조

과정 1. $n=2$일 때 부등식이 성립함을 보이기

$n=2$일 때

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

$h^2>0$이므로 $1+2h+h^2>1+2h$

따라서 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

과정 2. $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하여 $n=k+1$일 때 부등식이 성립함을 보이기

$n=k\,(k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ …… ①

이므로 ①의 양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}=(1+h)(1+h)^k>(1+h)(1+kh)=1+(k+1)h+kh^2$

$kh^2>0$이므로 $1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$이다.

즉, $(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

그러므로 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

74. 정답 풀이참조

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$이므로

$n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$ …… ①

이므로 ①의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

이때 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$이고

$\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}>\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}$이므로

$2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}$

즉,

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

그러므로 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

75. 정답 (1) $1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7$
(2) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16$

(1) $a_1=1$

$a_2=a_1-2=1-2=-1$

$a_3=a_2-2=(-1)-2=-3$

$a_4=a_3-2=(-3)-2=-5$

$a_5=a_4-2=(-5)-2=-7$

(2) $a_1=1$

$a_2=-2a_1=-2$

$a_3=-2a_2=(-2)\times(-2)=4$

$a_4=-2a_3=(-2)\times 4=-8$

$a_5=-2a_4=(-2)\times(-8)=16$

76. 정답 1

$a_1=a$라고 하면

$a_2=a+2,\ a_3=(a+2)+4=a+6$

$a+6=7$에서 $a=1$

따라서 $a_1=1$

77. 정답 9

식을 정리하면 $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$이므로

$a_2=\frac{3}{1}a_1=3\ (\because a_1=1),\ a_3=\frac{5}{3}a_2=\frac{5}{3}\times 3=5$

$a_4=\frac{7}{5}a_3=\frac{7}{5}\times 5=7,\ a_5=\frac{9}{7}a_4=\frac{9}{7}\times 7=9$

따라서 $a_5=9$

78. 정답 15

(나)에 $n=2$를 대입하면

$a_3+a_2=2\times 2+1=5$

(나)에 $n=4$를 대입하면

$a_5+a_4=2\times4+1=9$

따라서 구하는 식의 값은

$\sum_{n=1}^{5}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+5+9=15$

79. 정답 (1) 8, $\frac{32}{5}$ (2) $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n$

(1) 농도가 10%인 소금물 500 g의 소금의 양은 50 g이다. 소금물을 100 g을 덜어내고 물 100 g을 넣으면 덜어 낸 소금물에 있는 소금은 10 g이므로 남아 있는 소금의 양은 40 g이고, 물은 그대로 500 g이다. 이때 소금물의 농도는

$\frac{40}{500}\times100=8(\%)$이므로 $a_1=8$

같은 과정을 한 번 더 반복하면 덜어 낸 소금물에 있는 소금은 8 g이므로 남아 있는 소금의 양은 32 g이고, 물은 500 g이다. 이때 소금물의 농도는

$\frac{32}{500}\times100=\frac{32}{5}(\%)$이므로 $a_2=\frac{32}{5}$

(2) n번 반복했을 때 소금물의 농도가 a_n%라면

소금의 양은 $\frac{a_n}{100}\times500=5a_n$이므로 $5a_n$ g이다.

같은 과정을 한 번 더 반복하면 남아 있는 소금의 양은

$5a_n\times\frac{4}{5}=4a_n$이므로 $4a_n$ g이고, 물은 500 g이다.

이때 소금물의 농도는

$\frac{4a_n}{500}\times100=\frac{4}{5}a_n(\%)$

따라서 $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n$

80. 정답 -6

$a_2=x$로 놓으면 조건 (가)에 의하여

$a_3=a_1+4=5$, $a_5=a_3+4=9$,

$a_4=a_2+4=x+4$, $a_6=a_4+4=(x+4)+4=x+8$

이고, 조건 (나)에 의하여

$a_1=a_7=a_{13}=a_{19}=a_{25}$

$a_2=a_8=a_{14}=a_{20}=a_{26}$

$a_3=a_9=a_{15}=a_{21}=a_{27}$

$a_4=a_{10}=a_{16}=a_{22}=a_{28}$

$a_5=a_{11}=a_{17}=a_{23}=a_{29}$

$a_6=a_{12}=a_{18}=a_{24}=a_{30}$

이므로

$\sum_{k=1}^{30}a_k=5(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$

$=5\{1+x+5+(x+4)+9+(x+8)\}=5(3x+27)$

따라서 $5(3x+27)=45$에서 $x=-6$

81. 정답 풀이참조

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$

(ⅰ) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{4}{3}$

$\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$이므로 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$ …… ①

이므로 ①의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$

이때

$\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}$

$=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

즉, $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2k+2}{k+2}=\frac{2(k+1)}{k+2}$이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

82. 정답 풀이참조

(ⅰ) $n=\boxed{1}$일 때,

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\left(\frac{1\times2}{2}\right)^2=1$

이므로 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$ …… ①

이므로 ①의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\boxed{\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2}+(k+1)^3=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

83. 정답 18
세 수 a, 0, b가 등차수열을 이루고 있으면 0이 a와 b의 등차중항이므로
$\frac{a+b}{2}=0$, 즉
$a+b=0$ ⋯⋯ ①
세 수 b, a, -3이 등비수열을 이루고 있으면 a가 b와 -3의 등비중항이므로
$a^2=-3b$ ⋯⋯ ②
①, ②을 연립하여 풀면
$b^2=-3b$에서 $b^2+3b=b(b+3)=0$
$b=0$ 또는 $b=-3$
즉, $a=0$, $b=0$ 또는 $a=3$, $b=-3$
이때 $a=0$, $b=0$이면 세 수 0, 0, -3이 등비수열을 이루지 않으므로
$a=3$, $b=-3$
$a^2+b^2=3^2+(-3)^2=18$

84. 정답 11
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_n=a+(n-1)d$이고 $a_5=4a_3$에서
$a+4d=4(a+2d)$
즉, $3a=-4d$ ⋯⋯ ①
$a_2+a_4=4$에서
$(a+d)+(a+3d)=4$
$a+2d=2$, 즉
$a=2-2d$ ⋯⋯ ②
②를 ①에 대입하여 풀면
$3(2-2d)=-4d$
$2d=6$, $d=3$
즉, $a=-4$, $d=3$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -4이고 공차가 3인 등차수열이다.
$a_6=a+5d=(-4)+5\times3=11$

85. 정답 10
23은 등차수열 1, a_1, a_2, ⋯, a_n, 23에서 제$(n+2)$항이므로 이 수열의 공차를 d라고 하면
$1+(n+1)d=23$
$(n+1)d=22$ ⋯⋯ ①
또한
$1+a_1+a_2+\cdots+a_n+23=144$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_n=120$
이때 $a_k=1+kd$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_n$을 d로 나타내면
$(1+d)+(1+2d)+\cdots+(1+nd)=120$
이므로
$1\times n+(1+2+\cdots+n)d=120$
$n+\frac{n}{2}(n+1)d=120$ ⋯⋯ ②
①을 ②에 대입하면
$n+\frac{n\times22}{2}=120$, $12n=120$
따라서 $n=10$

86. 정답 682
수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로
$a_1=1, a_2=3, a_3=5, a_4=7, a_5=9$
따라서 수열 $\{2^{a}_{n}\}$은
$2^{a}_{1}=2^1=2$
$2^{a}_{2}=2^3=8$
$2^{a}_{3}=2^5=32$
$2^{a}_{4}=2^7=128$
$2^{a}_{5}=2^9=512$
이때 수열 $\{2^{a}_{n}\}$은 2^1, 2^3, 2^5, 2^7, 2^9, ⋯이므로
첫째항이 2이고 공비가 4인 등비수열임을 알 수 있다.
따라서 등비수열 $\{2^{a}_{n}\}$의 첫째항부터 제 5항까지의 합은
$\frac{2(4^5-1)}{4-1}=682$

87. 정답 40
$3^1+7^1=10$이므로 $a_1=0$
$3^2+7^2=9+49=58$이므로 $a_2=8$
$3^3+7^3=27+343=370$이므로 $a_3=0$
$3^4+7^4=81+2401=2482$이므로 $a_4=2$
$3^5+7^5=243+16807=17050$이므로 $a_5=0$
⋮
3의 거듭제곱의 일의 자리의 수가 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ⋯과 같이 네 개씩 반복되고 7의 거듭제곱의 일의 자리의 수가 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ⋯과 같이 네 개씩 반복되어서 수열 $\{a_n\}$은 0, 8, 0, 2, 0, 8, 0, 2, ⋯와 같이 항이 네 개씩 반복되는 수열이다.
따라서
$a_1+a_2+a_3+a_4=10$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_{40}=10(a_1+a_2+a_3+a_4)=100$
즉, $\sum_{k=1}^{n}a_k\geq100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 40이다.

88. 정답 95

$$\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k+1)-\sum_{k=1}^{5}(k^2-k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\{2k^2+k+1-(k^2-k-1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(k^2+2k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}2k+\sum_{k=1}^{5}2$$
$$=\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+2\times5$$
$$=55+30+10=95$$

89. 정답 $\frac{1}{5}$

$a_1=1$이고, $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$이므로

$$a_2=\frac{a_1}{a_1+1}=\frac{1}{2}$$
$$a_3=\frac{a_2}{a_2+1}=\frac{1}{3}$$
$$a_4=\frac{a_3}{a_3+1}=\frac{1}{4}$$
$$a_5=\frac{a_4}{a_4+1}=\frac{1}{5}$$

90. 정답 57

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

일반항은 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

첫째항부터 제n항까지의 합은

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=2\times2^{n-1}-1=2^n-1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{S_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{5}(2^n-1)$$
$$=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+(2^4-1)+(2^5-1)$$
$$=(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)-1\times5$$
$$=\frac{2(2^5-1)}{2-1}$$
$$=62-5=57$$

91. 정답 1) 440 (2) 1330

(1) $\sum_{k=1}^{10}k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$$
$$=385+55=440$$

(2) $\sum_{k=1}^{19}k(20-k)=\sum_{k=1}^{19}(-k^2+20k)$
$$=-\frac{19\times20\times39}{6}+20\times\frac{19\times20}{2}$$
$$=-2470+3800=1330$$

92. 정답 풀이참조

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$

(우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots ①$$

이므로 ①의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots$$
$$+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

93. 정답 900

첫째항을 a, 공차를 d 라고 하면

$S_{10}=100$, $S_{20}=400$이므로

$\dfrac{10(2a+9d)}{2}=100$에서

$2a+9d=20$ ⋯⋯ ㉮

$\dfrac{20(2a+19d)}{2}=400$에서

$2a+19d=40$ ⋯⋯ ㉯

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$이다.

따라서

$S_{30}=\dfrac{30(2a+29d)}{2}=\dfrac{30\times 60}{2}=900$ ⋯⋯ ㉰

이다.

단계	채점 기준	비율
㉮	S_{10}을 a와 d의 식으로 나타냈다.	30%
㉯	S_{20}을 a와 d의 식으로 나타냈다.	30%
㉰	S_{30}의 값을 구했다.	40%

94. 정답 10

$x^2+11x-n(n+1)=0$ 의 두 근을 α_n, β_n이라 하고 근과 계수의 관계를 이용하면

$\alpha_n+\beta_n=-11$, $\alpha_n\beta_n=-n(n+1)$ ⋯⋯ ㉮

$\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}=\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\dfrac{11}{n(n+1)}$ ⋯⋯ ㉯

따라서 구하는 식에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{11}{n(n+1)}$$

$$=11\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=11\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=11\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=11\left(1-\frac{1}{11}\right)$$

$=10$ ⋯⋯ ㉰

이다.

단계	채점 기준	비율
㉮	$\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 구했다.	40%
㉯	$\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}$을 변형하여 나타냈다.	30%
㉰	$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구했다.	30%