4-2.삼각형의 외심과 내심_비상(김원경)

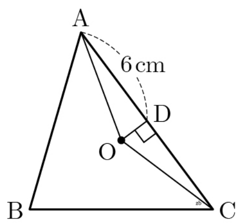
단원 ISSUE

이 단원에서는 **삼각형의 외심을 이용하여 각의 크기를 구하는 문제, 내접원의 반지름의 길이를 구하는 문제** 등이 자주 출제되며 기본 개념에 관한 문제들이 많이 출제되므로 개념을 확실히 익힌 후 학습합니다.

평가문제

[단원 마무리]

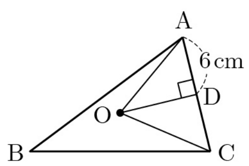
1. **다음 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외심 O에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 D라고 할 때, $\triangle \mathrm{AOC}$의 둘레의 길이가 $24\mathrm{cm}$이었다. 이때 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외접원의 넓이는?**



① $24\pi\,\mathrm{cm}^2$　② $25\pi\,\mathrm{cm}^2$
③ $30\pi\,\mathrm{cm}^2$　④ $32\pi\,\mathrm{cm}^2$
⑤ $36\pi\,\mathrm{cm}^2$

[중단원 학습 점검]

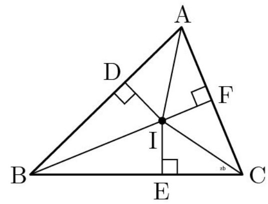
2. **다음 그림과 같이 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외심 O에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\triangle \mathrm{AOC}$의 둘레의 길이가 $36\,\mathrm{cm}$일 때, 외접원의 둘레의 길이는?**



① $12\pi\,\mathrm{cm}$　② $16\pi\,\mathrm{cm}$
③ $18\pi\,\mathrm{cm}$　④ $20\pi\,\mathrm{cm}$
⑤ $24\pi\,\mathrm{cm}$

[단원 마무리]

3. **다음 그림에서 점 I가 $\triangle \mathrm{ABC}$의 내심일 때, 다음 보기 중에서 옳은 것의 개수는?**



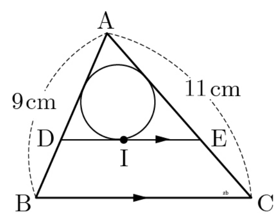
<보기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}}$　ㄴ. $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{CF}}$
ㄷ. $\overline{\mathrm{IA}} = \overline{\mathrm{IB}} = \overline{\mathrm{IC}}$　ㄹ. $\angle \mathrm{IAD} = \angle \mathrm{ICE}$
ㅁ. $\triangle \mathrm{IAF} \equiv \triangle \mathrm{ICF}$

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[중단원 학습 점검]

4. **다음 그림과 같이 $\triangle \mathrm{ABC}$의 내심 I를 지나고 $\overline{\mathrm{BC}}$에 평행한 직선이 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, $\triangle \mathrm{ADE}$의 넓이가 $20\,\mathrm{cm}^2$이었다. 이때 $\triangle \mathrm{ADE}$의 내접원의 반지름의 길이는?**

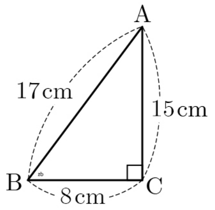


① $1\,\mathrm{cm}$　② $1.5\,\mathrm{cm}$
③ $2\,\mathrm{cm}$　④ $2.5\,\mathrm{cm}$
⑤ $3\,\mathrm{cm}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401589

[단원 마무리]

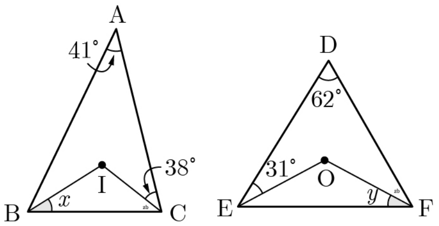
5. 다음 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 $\triangle ABC$의 외접원의 넓이를 $a\pi\mathrm{cm}^2$, 내접원의 둘레의 길이를 $b\pi\mathrm{cm}$라 할 때, $a-b$의 값은?



① $\frac{261}{4}$　② $\frac{265}{4}$　③ $\frac{269}{4}$　④ $\frac{273}{4}$　⑤ $\frac{277}{4}$

[중단원 학습 점검]

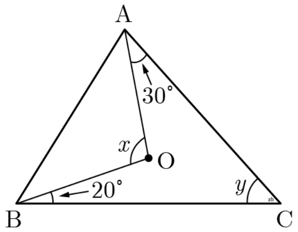
6. 다음 그림에서 점 I와 점 O가 각각 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 내심과 외심일 때, $\angle x-\angle y$의 크기는?



① 3°　② 3.5°　③ 4°　④ 4.5°　⑤ 5°

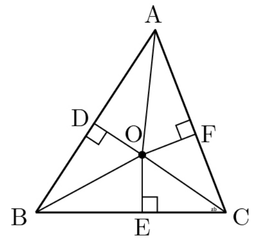
실전문제

7. 점 O가 $\triangle ABC$의 외심이고, $\angle OAC=30^\circ$, $\angle OBC=20^\circ$일 때, $\angle x-\angle y$의 크기는?



① 50°　② 60°　③ 70°　④ 80°　⑤ 90°

8. 다음 그림에서 점 O가 $\triangle ABC$의 외심일 때, 다음 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

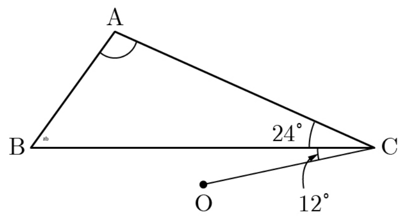


<보기>

ㄱ. $\triangle COE\equiv\triangle COF$	ㄴ. $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$
ㄷ. $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$	ㄹ. $\angle BOE=\angle COE$
ㅁ. $\triangle AOD\equiv\triangle BOD$	ㅂ. $\angle OAD=\angle OAF$

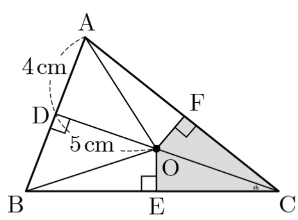
① ㄱ, ㄴ, ㅂ　② ㄱ, ㄹ, ㅁ　③ ㄷ, ㅁ, ㅂ　④ ㄴ, ㄹ, ㅁ　⑤ ㄴ, ㄹ, ㅂ

9. 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이고 $\angle ACB=24^\circ$, $\angle OCB=12^\circ$일 때, $\angle BAC$의 크기는?



① 94°　② 96°　③ 98°　④ 100°　⑤ 102°

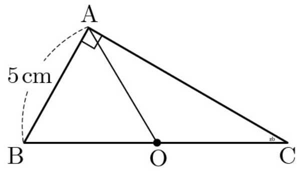
10. 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이고 $\triangle ABC=56\mathrm{cm}^2$, $\overline{AD}=4\mathrm{cm}$, $\overline{OD}=5\mathrm{cm}$일 때, 사각형 $OECF$의 넓이를 구하면?



① $10\mathrm{cm}^2$　② $12\mathrm{cm}^2$　③ $15\mathrm{cm}^2$　④ $18\mathrm{cm}^2$　⑤ $20\mathrm{cm}^2$

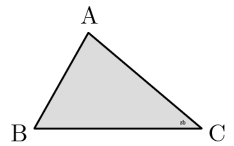
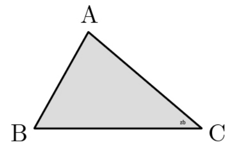
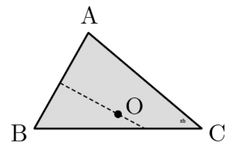
I410-ECN-0199-2021-001-001401589

11. $\angle BAC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 점 O는 변 BC의 중점이다. $\overline{AB}=5\,\mathrm{cm}$, $\angle OAB:\angle OAC=2:1$일 때, $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는?



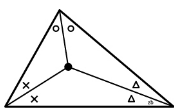
① $5\pi\,\mathrm{cm}^2$ ② $10\pi\,\mathrm{cm}^2$
③ $15\pi\,\mathrm{cm}^2$ ④ $20\pi\,\mathrm{cm}^2$
⑤ $25\pi\,\mathrm{cm}^2$

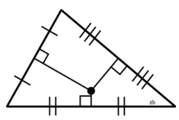
12. 삼각형 ABC에 대하여 다음과 같은 순서로 종이 접기 활동을 하였다.

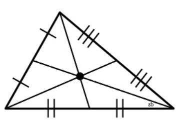
	(1) 두 꼭짓점 B, C가 겹치도록 접은 후 펼친다.
	(2) 두 꼭짓점 A, B가 겹치도록 접은 후 펼친다.
	(3) 접은 두 선이 만나는 점을 O로 표시한다.

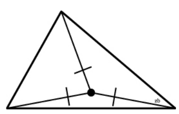
삼각형에 나타낸 점이 점 O인 것을 <보기>에서 고른 것은?

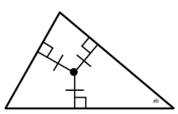
<보기>

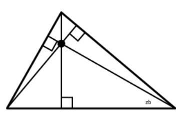
ㄱ. 

ㄴ. 

ㄷ. 

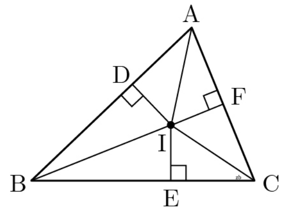
ㄹ. 

ㅁ. 

ㅂ. 

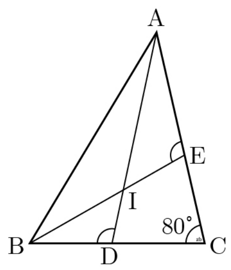
① ㄱ, ㅁ ② ㄱ, ㅂ
③ ㄴ, ㄹ ④ ㄴ, ㅁ
⑤ ㄷ, ㅂ

13. 점 I가 $\triangle ABC$의 내심일 때, 항상 옳은 것은?



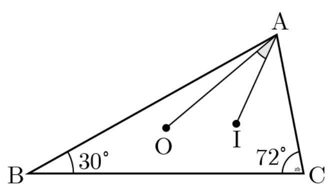
① $\overline{AI}=\overline{CI}$ ② $\overline{AD}=\overline{AF}$
③ $\overline{AF}=\overline{CF}$ ④ $\overline{AD}=\overline{CE}$
⑤ $\overline{IE}=\overline{EC}$

14. 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이고, $\overline{AI}$, $\overline{BI}$의 연장선이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 한다. $\angle C=80^\circ$일 때, $\angle ADB+\angle AEB$의 크기는?



① 190° ② 195°
③ 200° ④ 205°
⑤ 210°

15. 그림에서 점 O와 점 I는 각각 $\triangle ABC$의 외심과 내심이다. $\angle B=30^\circ$, $\angle C=72^\circ$일 때, $\angle IAO$의 크기는?



① 20° ② 21°
③ 22° ④ 23°
⑤ 24°

I410-ECN-0199-2021-001-001401589

정답 및 해설

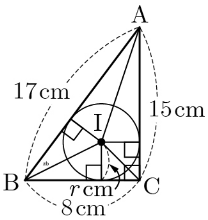
1) [정답] ⑤
[해설] 점 O가 $\triangle ABC$의 외심이므로
$\overline{AC}=12\text{ cm}$
이때 $\triangle AOC$의 둘레의 길이가 24cm이므로
$\overline{AO}=\overline{CO}=6\text{ cm}$
따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는
$\pi\times 6^2=36\pi\text{ cm}^2$

2) [정답] ⑤
[해설] 점 O가 $\triangle ABC$의 외심이므로
$\overline{CD}=\overline{AD}=6\text{cm}$이고, $\overline{OA}=\overline{OC}$이다.
외접원의 반지름의 길이를 $r\text{cm}$라고 하면
$\triangle AOC$의 둘레의 길이가 36 cm이므로
$\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{AC}=2r+12=36$, $2r=24$, $r=12$
따라서 외접원의 반지름의 길이는 12cm이므로 둘레의 길이는 $24\pi\text{cm}$이다.

3) [정답] ①
[해설] ㄱ. $\triangle IAD$와 $\triangle IAF$에서
$\angle ADI=\angle AFI=90^\circ$, $\overline{AI}$는 공통,
$\angle IAD=\angle IAF$ 이므로 $\triangle IAD\equiv\triangle IAF$ (RHA 합동), 즉 $\overline{AD}=\overline{AF}$ (참)
ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ. $\overline{AF}=\overline{CF}$, $\overline{IA}=\overline{IB}=\overline{IC}$,
$\angle IAD=\angle ICE$, $\triangle IAF\equiv\triangle ICF$인지 알 수 없다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ의 한 개다.

4) [정답] ③
[해설] 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로
$\angle DBI=\angle IBC$
$\overline{DE}//\overline{BC}$이므로 $\angle DIB=\angle IBC$(엇각)
즉, $\angle DBI=\angle DIB$이므로 $\overline{DB}=\overline{DI}$
같은 방법으로
$\angle ECI=\angle EIC$이므로 $\overline{EC}=\overline{EI}$
($\triangle ADE$의 둘레의 길이)
$=\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EA}=\overline{AD}+\overline{DI}+\overline{IE}+\overline{EA}$
$=\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{EC}+\overline{EA}=\overline{AB}+\overline{AC}$
$=9+11=20(\text{cm})$
이때 $\triangle ADE$의 내접원의 반지름의 길이를 $r\text{cm}$라 하면
$20=\frac{1}{2}\times r\times 20$에서 $r=2$
따라서 $\triangle ADE$의 내접원의 반지름의 길이는 2cm이다.

5) [정답] ②
[해설] 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\times 17=\frac{17}{2}$ (cm)
따라서 외접원의 넓이는
$\pi\times\left(\frac{17}{2}\right)^2=\frac{289}{4}\pi$ (cm^2)이므로 $a=\frac{289}{4}$
다음 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 $r\text{ cm}$라고 하면



$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$이므로
$\frac{1}{2}\times 8\times 15=\frac{1}{2}\times 17\times r+\frac{1}{2}\times 8\times r+\frac{1}{2}\times 15\times r$
$120=40r$, $r=3$
따라서 내접원의 반지름의 길이가 3 cm이므로 그 둘레의 길이는 $6\pi\text{cm}$이므로 $b=6$
$\therefore\ a-b=\frac{265}{4}$

6) [정답] ②
[해설] $\angle A=41^\circ$, $\angle B=2\angle x$, $\angle C=76^\circ$이므로
$\triangle ABC$에서
$41^\circ+2\angle x+76^\circ=180^\circ$, $\angle x=31.5^\circ$
한편 $\triangle OEF$, $\triangle ODF$는 이등변삼각형이므로
$\angle ODE=31^\circ$, $\angle OEF=\angle y$, $\angle ODF=31^\circ$
$\angle OFD=\angle ODF=31^\circ$
$\triangle ABC$에서
$62^\circ+31^\circ+2\angle y+31^\circ=180^\circ$, $\angle y=28^\circ$
따라서 $\angle x-\angle y=3.5^\circ$

7) [정답] ①
[해설] $\angle y=30^\circ+20^\circ=50^\circ$
$\angle x=2\angle y=2\times 50^\circ=100^\circ$
$\therefore\angle x-\angle y=100^\circ-50^\circ=50^\circ$

8) [정답] ④
[해설] ㄱ. ㄷ. ㅂ. 내심에 대한 성질이다.

9) [정답] ⑤
[해설] $\overline{OB}=\overline{OC}$이므로 $\angle OBC=\angle OCB=12^\circ$
$\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 $\angle OAC=\angle OCA=36^\circ$
$\angle ABC=x$라 하면
$\angle OBA=\angle OAB=(x+12)^\circ$
이제 $\triangle ABC$의 세 내각의 합에서
$x+(x+12)^\circ+36^\circ+24^\circ=180^\circ\ \rightarrow\ x=54^\circ$
$\therefore\angle BAC=(54+12)^\circ+36^\circ=102^\circ$

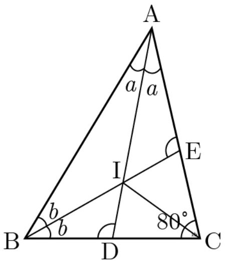
10) [정답] ④
[해설] $\triangle AFO$와 $\triangle CFO$에서 $\overline{OF}$는 공통, $\overline{OA}=\overline{OC}$,
$\angle AFO=\angle CFO=90^\circ$이므로
$\triangle AFO\equiv\triangle CFO$(RHS합동),

$\triangle BOE$와 $\triangle COE$에서 $\overline{OE}$는 공통,
$\overline{OB}=\overline{OC}$, $\angle OEB=\angle OEC=90°$ 이므로
$\triangle BOE \equiv \triangle COE$($RHS$합동)
따라서
$\square OECF=\triangle COE+\triangle COF=\triangle BOE+\triangle AOF$이므로
$\square OECF=\frac{1}{2}\times(\triangle ABC-\triangle ABO)$
$=\frac{1}{2}\times(56-\frac{1}{2}\times8\times5)=18cm^2$

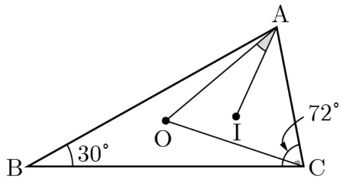
11) [정답] ⑤
[해설] $\angle BAO=90°\times\frac{2}{3}=60°$, $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로
$\triangle ABO$는 정삼각형이다.
$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=5cm$
따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는
$\pi\times5^2=25\pi(cm^2)$

12) [정답] ③
[해설] 종이 접기 활동을 해서 생기는 점 O는 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 외심이다.
따라서 삼각형에 나타낸 점이 외심인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

13) [정답] ②
[해설] 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로
$\overline{DI}=\overline{IE}=\overline{IF}$
$\triangle AIF$와 $\triangle AID$에서
$\overline{AI}$는 공통, $\angle ADI=\angle AFI=90°$, $\overline{DI}=\overline{IF}$이므로 $\triangle AIF\equiv\triangle AID$($RHS$합동)이고,
마찬가지로 $\triangle BID\equiv\triangle BIE$, $\triangle CIE\equiv\triangle CIF$이다.
따라서 옳은 것은 ②이다.

14) [정답] ⑤
[해설]


위의 그림과 같이 $\overline{IC}$를 그으면
$\angle ICD=\frac{1}{2}\angle C=40°$
$\angle IAB=\angle a$, $\angle IBC=\angle b$라 하면
$\angle a+\angle b+40°=90°$
$\therefore \angle a+\angle b=50°$
$\triangle BCE$에서 $\angle AEB=\angle b+\angle C$
$\triangle ADC$에서 $\angle ADB=\angle a+\angle C$
따라서
$\angle AEB+\angle ADB=(\angle b+\angle C)+(\angle a+\angle C)$
$=\angle a+\angle b+2\angle C$
$=50°+160°=210°$

15) [정답] ②
[해설]


위의 그림과 같이 $\overline{OC}$를 그으면 점 O가 $\triangle ABC$의 외심이므로
$\angle AOC=2\angle B=2\times30°=60°$
$\triangle AOC$에서 $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로
$\angle OAC=\frac{1}{2}\times(180°-60°)=60°$
$\triangle ABC$에서
$\angle BAC=180°-(30°+72°)=78°$
점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로
$\angle IAC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times78°=39°$
$\therefore \angle x=\angle OAC-\angle IAC=60°-39°=21°$

I410-ECN-0199-2021-001-001401589