



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2019-02-13
2) 제작자 : 교육지대㈜
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 수학적 귀납법

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

■ 임의의 자연수 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 이 참이면 명제 $p(n+2)$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표를 ()안에 써넣어라.

- $p(1)$ 이 참이면 모든 홀수 $2n+1$ 에 대하여 $p(2n+1)$ 이 참이다. ()
- $p(2)$ 가 참이면 모든 짝수 $2n$ 에 대하여 $p(2n)$ 이 참이다. ()
- $p(1), p(2)$ 가 참이면 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다. ()

■ 모든 자연수 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 이 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 참이 명제는 ○표, 참이 아닌 명제는 ×표를 ()안에 써넣어라.

- (가) $p(1)$ 은 참이다.
(나) $p(n)$ 이 참이면 $p(3n)$ 이 참이다.
(다) $p(n)$ 이 참이면 $p(4n)$ 이 참이다.

- $p(36)$ ()
- $p(40)$ ()
- $p(48)$ ()
- $p(52)$ ()

■ 다음 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 구하여라.

8. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 (가) 을 더하면

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \text{(가)} = \frac{k}{k+1} + \text{(가)} = \text{(나)}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

9. 모든 자연수 n 에 대하여

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ $P(n)$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $P(n)$ 이 성립한다.

(ii) (가) 일 때 $P(n)$ 이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \text{이다.}$$

등호의 좌우변에 (나) 를 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1) + \text{(나)} = k^2 + \text{(나)} = \text{(다)}$$

이 성립한다. 따라서 (라) 일 때도 $P(n)$ 이 성립한다.

따라서 (i), (ii)가 성립하므로 모든 자연수 n 에 대하여 $P(n)$ 이 성립함을 알 수 있다.

10. 다음은 5이상의 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n - 1 > n^2$ 이 성립함을 증명한 것이다.

- (i) $n=5$ 일 때,
 (좌변) = 31, (우변) = 25
 이므로 주어진 부등식이 성립한다.
- (ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $2^k - 1 > k^2$
 $n=k+1$ 일 때,
 $2^{k+1} - 1 = 2(\boxed{\text{가}}) + 1 > \boxed{\text{나}} + 1$
 이때
 $\boxed{\text{나}} + 1 > \boxed{\text{다}}$
 $\therefore 2^{k+1} - 1 > \boxed{\text{다}}$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
- (i), (ii)에 의하여 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

11. 다음은 x 가 1이 아닌 양수일 때, 2이상의 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $(1+x)^n < 2^{n-1}(1+x^n)$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

- (i) $n=2$ 일 때,
 (좌변) = $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$,
 (우변) = $2(1+x^2)$
 이 때, (우변) - (좌변) = $\boxed{\text{가}} > 0$ 이므로 성립한다.
- (ii) $n=k$ (k 는 2이상의 자연수)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $(1+x)^k < 2^{k-1}(1+x^k)$
 위의 부등식의 양변에 $1+x$ 를 곱하면
 $(1+x)^{k+1} < 2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$
 이 때,
 $\boxed{\text{나}} - 2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$
 $= 2^{k-1}(1+x+x^2 + \dots + x^{k-1}) \cdot \boxed{\text{다}} > 0$
 이므로
 $(1+x)^{k+1} < 2^{k-1}(1+x^k)(1+x) < \boxed{\text{나}}$
- (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 2이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

12. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 n^3+5n 이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

- (i) $n=1$ 일 때, $1+5=6$ 이므로 n^3+5n 은 6의 배수이다.
- (ii) $n=k$ 일 때, k^3+5k 이 6의 배수라고 가정하면
 $k^3+5k=6m$ (m 은 자연수)이므로
 $(k+1)^3+5(k+1) = (\text{가}) + 3k(k+1)$
 이 때 $3k(k+1)$ 은 6의 배수이므로
 $n = (\text{나})$ 일 때도 6의 배수이다.
 그러므로 (i), (ii)에 의하여 n^3+5n 은 모든 자연수 n 에 대하여 6의 배수이다.

13. 다음은 $h > 0$ 이고, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $(1+h)^n > 1+nh$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

- (i) (가) 일 때,
 (좌변) = $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h = (\text{우변})$
 따라서 주어진 부등식이 성립한다.
- (ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때,
 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $(1+h)^k > 1+kh$
 $(1+h) > 0$ 이므로 위 식의 양변에 (나) 을 곱하면
 $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (1+kh)(1+h)$
 그런데
 $(1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$
 $\therefore (1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
 그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

14. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (n^2 + k) = n^3 + (n+1)^3$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) = (가), (우변) = (가) 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 1$)일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2(m+1)+1} \{(m+1)^2 + k\} \\ &= \sum_{k=1}^{2m+1} \{(m+1)^2 + k\} + \text{(나)} \\ &= \sum_{k=1}^{2m+1} (m^2 + k) + \sum_{k=1}^{2m+1} (2m+1) + \text{(나)} \\ &= \text{(다)} + (2m+1)^2 + \text{(나)} \\ &= (m+1)^3 + (m+2)^3 \end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

15. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = \text{(가)}$ 일 때,

(좌변) = 32, (우변) = 25

따라서 (좌변) > (우변) 이므로 $n = \text{(가)}$ 일 때, 부등식이 성립한다.

(ii) $n = \text{(나)}$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

위 부등식의 양변에 (다) 를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

그런데 $2k^2 - (k+1)^2 = (k-1)^2 - 2 > 0$ 이고

$$k \geq 5 \text{ 이므로 } 2k^2 > \text{(라)}^2$$

$$\therefore 2^{\text{(라)}} > \text{(라)}^2$$

따라서 $n = \text{(라)}$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 5이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

16. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} < 2\sqrt{n}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) = (가) < 2 = (우변) 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2k}} < 2\sqrt{k}$$

$n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k+2}} \\ & < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2k+2}} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2k+2}} - \text{(나)} \\ &= \frac{2\sqrt{2} \sqrt{k^2+k+1} - 2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}} \end{aligned}$$

이때,

$$(2\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+k+1})^2 - \{2\sqrt{2}(k+1)\}^2 \text{ (다)} 0$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

17. 다음은 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)로

정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \frac{n+1}{2n}$ 임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = 1 = \frac{1+1}{2 \cdot 1}$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $a_k = \text{(가)}$ 이라고 가정하면

$$a_{k+1} = \text{(나)} = \frac{\text{(다)}}{2k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{n+1}{2n}$ 이다.

■ 다음을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

18. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

19. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

20. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

21. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

22. $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$2^n > n^2$$

23. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

24. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

25. $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$$

26. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

27. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$(1+h)^n > 1+nh \quad (\text{단, } h > 0)$$

28. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$$

29. $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$2^n > 2n+1$$

30. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$3^n > 3n + 2$$

31. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라

$$3^n > n + 1$$

32. $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라

$$2^n > n^2$$

33. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

34. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

35. $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$3^n > 3n + 7$$

36. 자연수 n 에 대하여 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 으로 정의할 때, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1)$$

37. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

■ 다음 물음에 답하여라.

38. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $n^3 - n$ 이 3의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

39. 모든 자연수 n 에 대하여

$2^{3^n} + 1$ 은 3^{n+1} 으로 나누어 떨어진다.①

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

40. 모든 자연수 n 에 대하여 $7^n + 5^{n-1}$ 이 2의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

41. 자연수 n 에 대하여 등식

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \{i + (n-1)^2\} = (n-1)^3 + n^3$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

42. 자연수 n 에 대하여

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \cdots \textcircled{A} \text{이 성립함을}$$

수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. 이 때, (A) 안에 들어갈 식을 $f(k)$ 라 할 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^3 = 1, (\text{우변}) = \frac{1}{4} \times 1^2 \times 2^2 = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때, \textcircled{A} 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, \textcircled{A} 이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

양변에 (A)을 더하면

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (A) \\ &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (A) \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 \textcircled{A} 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 \textcircled{A} 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

43. 다음은 $n \geq 0$ 인 정수 n 에 대하여 $2^{3^n} + 1$ 이 항상 3^{n+1} 의 배수인 것을 수학적 귀납법으로 보이는 과정이다. (단, $2^{3^0} = 2^{3 \times 3^0 \times \cdots \times 3^0}$, 3은 a 개다.)

(i) $n=0$ 일 때, $3^1 = 2^1 + 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, (가)이 3^{k+1} 의 배수라고 가정하면
(가) = $p \times 3^{k+1}$ 로 표현할 수 있다.

(단, p 는 임의의 자연수)

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (\text{가}) \times (\text{나})$$

2^{2m-1} (단, m 은 자연수)은 3으로 나누었을 때의 나머지가

항상 2이므로 $(2^{2m-1})^2 - 2^{2m-1} + 1$ 은 3의 배수이다.

(나)는 3의 배수이고 (가)는 3^{k+1} 의

배수이므로 $2^{3^{k+1}} + 1$ 는 3^{k+2} 의 배수이다.

그러므로 $n \geq 0$ 인 모든 정수 n 에 대하여 $2^{3^n} + 1$ 은 항상 3^{n+1} 의 배수이다.

(가)에 들어갈 식을 $f(k)$, (나)에 들어갈 식을 $g(k)$ 라고 할 때, $f(2) + g(1)$ 의 값을 구하여라.

44. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \cdots \textcircled{A}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=2$ 일 때, (좌변) = $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, (우변) = $\frac{4}{3}$

$\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ 따라서 $n=2$ 일 때, \textcircled{A} 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq p$)일 때, \textcircled{A} 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

이 부등식의 양변에 (가)을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + (\text{가}) > \frac{2k}{k+1} + (\text{가})$$

이때 $k \geq p$ 에서

$$\frac{2k}{k+1} + (\text{가}) > (\text{나}) \text{ 이 성립한다.}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 \textcircled{A} 이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의해 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 \textcircled{A} 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 할 때, $p+4f(3)+3g(4)$ 의 값을 구하여라.

45. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1 \text{ 이 성립함을}$$

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$ 이 성립한다고 가정하면,

(iii) $n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} \\ &> \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} + \left(\text{가} \right) \\ &= \frac{2}{(\text{나})} + 1 > 1 \end{aligned}$$

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 할 때, $f(0) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

46. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ㉠이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) = (우변) = $\boxed{(가)}$
 따라서 $n=1$ 일 때 ㉠이 성립한다.
 (ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ㉡
 이므로 ㉡의 양변에 $\boxed{(나)}$ 를 더하면
 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \boxed{(나)}$
 $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k + \boxed{(나)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$
 위 등식은 ㉡에 $n=k+1$ 을 대입한 것과 같다.
 따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 c , (나)에 알맞은 식을 $f(k)$ 이라 할 때, $cf(2)$ 의 값을 구하여라.

47. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n} + 6^{n+1}$ 을 5로 나눈 나머지는 2임을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$ 일 때
 $2^4 + 6^2 = 16 + 36 = 52 = 5 \cdot 10 + 2$
 (ii) $n=k$ 일 때
 $2^{4k} + 6^{k+1} = 5m + 2$ (m 은 자연수)라고 가정하면
 (iii) $n=k+1$ 일 때
 $2^{4(k+1)} + 6^{(k+1)+1}$
 $= (\boxed{(가)}) \cdot 2^{4k} + (\boxed{(나)}) \cdot 6^{k+1}$
 $= 5(6m + (\boxed{(다)}) \cdot 2^{4k} + 2) + 2$
 따라서 $n=k+1$ 일 때에도 5로 나눈 나머지는 2이다.
 (i), (ii), (iii)에 의해서 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n} + 6^{n+1}$ 을 5로 나눈 나머지는 2이다.

이 때, (가)+(나)+(다)의 값을 구하여라.

48. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1)2^{k-1} = 2^{n+1} - n - 2$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

(i) $n=1$ 일 때
 (좌변) = 1, (우변) = $2^2 - 1 - 2 = 1$
 이므로 주어진 식이 성립한다.
 (ii) $n=m$ 일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하면
 $\sum_{k=1}^m (m-k+1)2^{k-1} = 2^{m+1} - m - 2$
 $n=m+1$ 일 때
 $\sum_{k=1}^{m+1} (\boxed{(가)}) - k)2^{k-1}$
 $= \sum_{k=1}^m (m-k+1)2^{k-1} + \boxed{(나)}$
 $= 2^{m+1} - m - 2 + \boxed{(나)}$
 $= \dots$ (이하 생략)

위의 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식을 차례로 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(4) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

49. 다음은 n 이 자연수일 때, $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ 은 13으로 나누어 떨어지는 것을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $f(n) = 3^{n+1} + 4^{2n-1}$ 으로 놓으면
 $f(1) = 3^2 + 4 = 13$ 이므로 $f(1)$ 은 13으로 나누어 떨어진다.
 (ii) $f(k)$ 가 13으로 나누어 떨어진다고 가정하면
 $f(k+1) = 3^{k+2} + 4^{2k+1}$
 $= \boxed{(가)}f(k) + \boxed{(나)} \cdot 4^{2k-1}$
 이므로 $f(k+1)$ 도 13으로 나누어 떨어진다.
 따라서 임의의 자연수 n 에 대하여 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ 은 13으로 나누어 떨어진다.

위의 증명 과정 중에서 $\boxed{(나)} - \boxed{(가)}$ 의 값을 구하여라.

50. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{2}$, (우변) $= 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 등식 $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} + \boxed{\text{(가)}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} +$$

$\boxed{\text{(가)}}$

$$= 2 - \boxed{\text{(나)}}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$
이 성립한다.

위의 증명과정에서 $\boxed{\text{(가)}}$, $\boxed{\text{(나)}}$ 에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라고 할 때, $f(2)+g(1)$ 의 값을 구하여라.

51. 다음은 수학적 귀납법을 이용해 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명한 것이다.

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3 \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \sum_{k=1}^1 (3k^2 - 3k + 1) = 1$ 이고

(우변) $= 1^3 = 1$ 이다.

따라서 $n=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (3k^2 - 3k + 1) = m^3 \text{이다.}$$

이 때, 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$\sum_{k=1}^{m+1} (3k^2 - 3k + 1) = m^3 + \boxed{\text{(가)}} = \boxed{\text{(나)}}$$
이므로

$n=m+1$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 명제는 참이다.

(가)에 해당하는 식을 $f(m)$, (나)에 해당하는 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(4)+g(2)$ 의 값을 구하여라.

52. 다음은 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > 3n - 2 \dots\dots \textcircled{7}$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=3$ 일 때, (좌변) $= 8$, (우변) $= 7$ 이므로 부등식 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > 3k - 2$$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 곱하면 $2^{k+1} > 6k - 4$

이때 $(6k - 4) - (\boxed{\text{(나)}}) = 3k - 5 > 0$ 이므로

$$6k - 4 > \boxed{\text{(나)}}$$

$$2^{k+1} > 6k - 4 > \boxed{\text{(나)}} = 3(\boxed{\text{(다)}}) - 2$$

즉, $2^{k+1} > 3(\boxed{\text{(다)}}) - 2$ 이다.

따라서 부등식 $\textcircled{7}$ 은 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에서 부등식 $\textcircled{7}$ 은 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 들어갈 수를 a , (나)에 들어갈 식을 $f(k)$, (다)에 들어갈 식을 $g(k)$ 라고 할 때, $af(2)g(4)$ 의 값을 구하여라.

53. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $n^3 + 3n^2 + 2n$ 이 3의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$

따라서 a_1 은 3의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, a_k 가 3의 배수라고 가정하면

$$a_k = k^3 + 3k^2 + 2k = 3m \text{ (} m \text{은 자연수)}$$

$n=k+1$ 일 때

$$(\text{가})^3 + 3(\text{가})^2 + 2(\text{가})$$

$$= (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3k^2 + 9k + 6$$

$$= 3m + 3(\text{나})$$

$$= 3(m + (\text{나}))$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 a_n 은 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$n^3 + 3n^2 + 2n$ 은 3의 배수이다.

다음 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 이라 할 때, $f(9)+g(2)$ 의 값을 구하여라.

54. 다음은 2이상인 자연수 n 에 대하여

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \quad \cdots \textcircled{A}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = \boxed{\text{가}}$ 인 경우 \textcircled{A} 이 성립함을 보이자.

$$(\text{좌변}) = \frac{3}{2}, (\text{우변}) = \frac{4}{3}$$

이므로 $n = \boxed{\text{가}}$ 인 경우 \textcircled{A} 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 인 경우 \textcircled{A} 이 성립한다고 하자.

$$\text{즉, } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \quad \cdots \textcircled{B}$$

가 성립한다고 한다. $n = k+1$ 인 경우 \textcircled{A} 이 성립함을

보이기 위해 \textcircled{B} 의 양변에 $\boxed{\text{나}}$ 를 더해주고

우변을 정리하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \boxed{\text{나}} > \frac{2k}{k+1} + \boxed{\text{나}} \\ > \boxed{\text{다}}$$

이므로 $n = k+1$ 인 경우 \textcircled{A} 이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 2이상인 모든 자연수 n 에 대하여 \textcircled{A} 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p 라 하고 (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(p-1) + g(p)$ 의 값을 구하여라.

55. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 1$ 이 5의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, $6^1 - 1 = 5$ 는 5의 배수이다.

따라서 $n = 1$ 일 때 $6^n - 1$ 은 5의 배수이다.

(ii) $n = k$ 일 때 $6^k - 1$ 이 5의 배수라고 가정하면

$$6^k - 1 = 5a (a \text{는 자연수}) \text{이므로 } 6^k = 5a + 1$$

$n = k+1$ 일 때,

$$6^{k+1} - 1 = 6 \cdot 6^k - 1 \\ = 6(\boxed{\text{가}}) - 1 \\ = 5(\boxed{\text{나}})$$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 $6^n - 1$ 은 5의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 1$ 은 5의 배수이다.

(가),(나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$ 라고 할 때, $f(1) \times g(2)$ 의 값을 구하여라.

56. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{3}{n(n+1)} = \frac{3n}{n+1} \quad \cdots \textcircled{A}$$

성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

$$(i) \ n = 1 \text{일 때, } (\text{좌변}) = \frac{3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2},$$

$$(\text{우변}) = \frac{3 \cdot 1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n = 1$ 일 때, 등식 \textcircled{A} 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식 \textcircled{A} 이 성립한다고 가정하면,

$$\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{3}{k(k+1)} = \frac{3k}{k+1} \quad \cdots \textcircled{B}$$

\textcircled{B} 의 양변에 (가)를 더하면

$$\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{3}{k(k+1)} + (\text{가}) \\ = \frac{3k}{k+1} + (\text{가}) \\ = (\text{나})$$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 등식 \textcircled{A} 이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 등식 \textcircled{A} 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

다음 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(2) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

57. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $4^{2n-1} + 1$ 이 5로 나누어 떨어짐을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때

$$4^{2-1} + 1 = 4 + 1 = 5$$

이므로 5로 나누어 떨어진다.

(ii) $n = k$ 일 때, $4^{2k-1} + 1$ 이 5로 나누어 떨어진다고 가정하면

$$4^{2k-1} + 1 = 5m \quad (m \text{은 자연수}) \text{이다.}$$

$n = k+1$ 일 때,

$$4^{2k+1} + \boxed{\text{가}} = \boxed{\text{나}} \times 5m - 15 = 5 \times \boxed{\text{다}}$$

즉 $n = k+1$ 일 때도 $4^{2n-1} + 1$ 은 5로 나누어 떨어진다.

따라서 (i), (ii)로부터 모든 자연수 n 에 대하여

$$4^{2n-1} + 1 \text{은 } 5 \text{로 나누어 떨어진다.}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 값을 각각 a , b , (다)에 알맞은 식을 $f(m)$ 이라 할 때, $f\left(\frac{b}{a}\right)$ 의 값을 구하여라.

58. 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1) + 1 \dots$
①이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, $4 > 2+1$ 이므로 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1} > (가) + 1 \dots ②$$

②의 양변에 (나)를 곱하면

$$2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$$

$$2(k^2 + k + 1) - (다) = k^2 - k - 1$$

$$k \geq 2 \text{일 때, } k^2 - k - 1 > 0 \text{이므로}$$

$$\therefore 2^{k+2} > (다)$$

따라서 ①은 $n=(라)$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 부등식 ①은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 $f(k)$, a , $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $af(3)+g(2)h(4)$ 의 값을 구하여라.

59. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{2}$, (우변) $= 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}$

이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k} \dots ⑦$$

⑦의 양변에 (가)을(를) 더하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} + (가) = 2 - \frac{k+2}{2^k} + (가) \\ = 2 - (나)$$

이므로 $n=(다)$ 일 때도 주어진 등식은 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

다음 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $\frac{f(2)h(6)}{g(4)}$ 의 값을 구하여라.

60. 다음은 2이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \dots\dots$ ⑧이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=(가)$ 일 때,

$$(좌변) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (우변) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=(가)$ 일 때 ⑧이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, ⑧이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

$n=k+1$ 일 때,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + (나) < 2 - \frac{1}{k} + (나)$$

이때 $k \geq 2$ 이므로

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - (다)$$

$$= -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

$$\text{즉, } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ⑧이 성립한다.

\therefore (1), (2)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

⑧이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $\alpha \times \frac{1}{f(5)} \times g(5)$ 의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) ○

⇒ $p(1)$ 이 참이면 $p(1+2)=p(3)$ 이 참
 $p(3)$ 이 참이면 $p(3+2)=p(5)$ 가 참
 $p(5)$ 가 참이면 $p(5+2)=p(7)$ 이 참

.....

$p(2n-1)$ 이 참이면 $p(2n-1+2)=p(2n+1)$ 이 참이다.

따라서 $p(1)$ 이 참이면 모든 홀수 $2n+1$ 에 대하여 $p(2n+1)$ 이 참이다.

2) ○

⇒ $p(2)$ 가 참이면 $p(2+2)=p(4)$ 가 참
 $p(4)$ 가 참이면 $p(4+2)=p(6)$ 이 참
 $p(6)$ 이 참이면 $p(6+2)=p(8)$ 이 참

.....

$p(2n-2)$ 가 참이면 $p(2n-2+2)=p(2n)$ 이 참

따라서 $p(2)$ 가 참이면 모든 짝수 $2n$ 에 대하여 $p(2n)$ 이 참이다.

3) ○

⇒ 1번, 2번 문제에 의해 $p(1), p(2)$ 가 참이면 모 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다.

4) ○

⇒ $p(1)$ 이 참이면 $p(3)$ 도 참이다.

$p(3)$ 이 참이면 $p(3^2)$ 도 참이다.

⋮

∴ $p(3^n)$ 는 참이다.

$p(3^n)$ 이 참이면 $p(4 \cdot 3^n)$ 도 참이다.

$p(4 \cdot 3^n)$ 이 참이면 $p(4^2 \cdot 3^n)$ 도 참이다.

⋮

∴ $p(4^m \cdot 3^n)$ 도 참이다. (단, m, n 은 자연수)

∴ $36 = 4 \times 3^2$ 이므로 $p(36)$ 은 참이다.

5) ×

⇒ $40 = 4 \times 10$ 이므로 $p(40)$ 는 참이 아니다.

6) ○

⇒ $48 = 4^2 \cdot 3$ 이므로 $p(48)$ 은 참이다.

7) ×

⇒ $52 = 4 \times 13$ 이므로 $p(52)$ 는 참이 아니다.

8) (가) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (나) $\frac{k+1}{k+2}$

⇒ $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

9) (가) $n=k$ (나) $2k+1$ (다) $(k+1)^2$
 (라) $n=k+1$

10) (가) $2^k - 1$ (나) $2k^2$ (다) $(k+1)^2$

⇒ (i) $n=5$ 일 때

(좌변) $= 2^5 - 1 = 31$, (우변) $= 5^2 = 25$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$) 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k - 1 > k^2$$

$n=k+1$ 일 때,

$$2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2((가)(2^k - 1)) + 1 > (나)(2k^2) + 1$$

이때, $k \geq 5$ 이므로 양변에 k 를 곱하면

$$k^2 \geq 5k$$

$$\text{이때, } 5k = 2k + 3k > 2k + 1$$

$$(나)(2k^2) + 1 = k^2 + k^2 + 1 > k^2 + 2k + 1 = (다)(k+1)^2$$

$$\therefore 2^{k+1} - 1 > (다)(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore (가) : 2^k - 1, (나) : 2k^2, (다) : (k+1)^2$$

11) (가) $(x-1)^2$ (나) $2^k(1+x^{k+1})$ (다) $(x-1)^2$

⇒ (i) $n=2$ 일 때,

$$(좌변) = (1+x)^2 = 1+2x+x^2$$

$$(우변) = 2(1+x^2)$$

이 때,

$$(우변) - (좌변) = x^2 - 2x + 1 = (가)(x-1)^2 > 0 \quad \text{이므로 성립한다.}$$

(ii) $n=k$ (k 는 2이상의 자연수)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+x)^k < 2^{k-1}(1+x^k)$$

위의 부등식의 양변에 $1+x$ 를 곱하면

$$(1+x)^{k+1} < 2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$$

이 때,

$$(나)(2^k(1+x^{k+1})) - 2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$$

$$= 2^{k-1}(2+2x^{k+1}-1-x-x^k-x^{k+1})$$

$$= 2^{k-1}(x^{k+1}-x^k-x+1)$$

$$= 2^{k-1}\{x(x^k-1)-(x^k-1)\}$$

$$= 2^{k-1}(x^k-1)(x-1)$$

$$= 2^{k-1} \frac{(x^k - 1)}{x - 1} (x - 1)^2$$

$$= 2^{k-1} (1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) \cdot (다) ((x-1)^2) > 0$$

이므로

$$(1+x)^{k+1} < 2^{k-1} (1+x^k) (1+x) < (나) (2^k (1+x^{k+1}))$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 2이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore (가) : (x-1)^2, (나) : 2^k (1+x^{k+1}), (다) : (x-1)^2$$

$$12) (가) 6(m+1) \quad (나) k+1$$

$$\Rightarrow (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 8k + 6$$

$$= 6(m+1) + 3k(k+1)$$

이 때 $3k(k+1)$ 은 6의 배수이므로 $n = k+1$ 일 때도 6의 배수이다.

따라서 (가)는 $6(m+1)$ 이고 (나)는 $k+1$ 이다.

$$13) (가) n=2 \quad (나) 1+h \quad (다) >$$

\Rightarrow (i) 수학적 귀납법에서 $n=2$ 일 때 성립하는지 확인해야 하므로 (가)는 $n=2$ 이다.

(ii) $(1+h)^k > 1+kh$ 에서 양변에 $(1+h)$ 를 곱하면 $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k (1+h) > (1+kh)(1+h)$ 가 성립하므로 (나)는 $1+h$ 이다.

$$kh^2 > 0 \text{이므로 } 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h \text{이다.}$$

따라서 (다)는 $>$ 이다.

$$14) (가) 9 \quad (나) 2m^2+8m+7 \quad (다) m^3+(m+1)^3$$

$$\Rightarrow (좌변) = \sum_{k=1}^3 (1+k) = 3 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 9$$

$$(우변) = 1^3 + 2^3 = 9 \quad \therefore (가) = 9$$

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)+1} \{(m+1)^2 + k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{2m+1} \{(m+1)^2 + k\} + (m+1)^2 + 2m+2 + (m+1)^2 + 2m+3$$

$$= \sum_{k=1}^{2m+1} \{(m+1)^2 + k\} + (2m^2 + 8m + 7)$$

$$= \sum_{k=1}^{2m+1} (m^2 + k) + \sum_{k=1}^{2m+1} (2m+1) + (2m^2 + 8m + 7)$$

$$= m^3 + (m+1)^3 + (2m+1)^2 + (2m^2 + 8m + 7)$$

$$= (m+1)^3 + (m+2)^3$$

$$\therefore (나) = 2m^2 + 8m + 7, (다) = m^3 + (m+1)^3$$

$$15) (가) 5 \quad (나) k \quad (다) 2 \quad (라) k+1$$

\Rightarrow (가) $n \geq 5$ 일 때 성립함을 증명하는 것이므로

먼저 $n=5$ 일 때 성립하는지 확인한다.

따라서 (가)는 $n=5$ 이다.

(나) 수학적 귀납법에서 $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하므로 (나)는 $n=k$ 이다.

(다) $n = k+1$ 일 때 성립하는지 확인하기 위해 부등식의 양변에 2를 곱하므로 (다)는 2이다.

(라) $k \geq 5$ 일 때 $2k^2 > (k+1)^2$ 이므로 (라)는

$(k+1)$ 이다.

$$16) (가) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (나) 2\sqrt{k+1} \quad (다) <$$

\Rightarrow (i) $n=1$ 일 때,

$$(좌변) = (가) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) < 2 = (우변) \text{ 이므로 성립한다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2k}} < 2\sqrt{k}$$

$n = k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k+2}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2k+2}}$$

이때,

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2k+2}} - (나) (2\sqrt{k+1})$$

$$= \frac{2\sqrt{k}\sqrt{2k+2} + 1 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{2k+2}}{\sqrt{2k+2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k+1} - 2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$$

이때,

$$(2\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+k+1})^2 - \{2\sqrt{2}(k+1)\}^2$$

$$= (2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k+1})^2 + 4\sqrt{2}\sqrt{k^2+k+1} - \{2\sqrt{2}(k+1)\}^2$$

$$= 8(k^2+k) + 4\sqrt{2}\sqrt{k^2+k+1} - 8(k^2+2k+1)$$

$$= 4\sqrt{2}\sqrt{k^2+k+1} - 8(k+1)$$

$$(다) (<) 0$$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore (가) : \frac{1}{\sqrt{2}}, (나) : 2\sqrt{k+1}, (다) : <$$

$$17) (가) \frac{k+1}{2k} \quad (나) \frac{4a_k-1}{4a_k} \quad (다) k+2$$

\Rightarrow (i) $a_n = \frac{n+1}{2n}$ 에서 $n=k$ 를 대입하면

$$(가)는 \frac{k+1}{2k} \text{이다.}$$

(ii) $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$ 에서 $n=k$ 를 대입하면

$$a_{k+1} = 1 - \frac{1}{4a_k} = \frac{4a_k-1}{4a_k} \text{에서 (나)는 } \frac{4a_k-1}{4a_k} \text{이다.}$$

(iii) $a_k = \frac{k+1}{2k}$ 을 $a_{k+1} = \frac{4a_k-1}{4a_k}$ 에 대입하면

$$\frac{4\left(\frac{k+1}{2k}\right) - 1}{4\left(\frac{k+1}{2k}\right)} = \frac{k+2}{2k+2} \text{이므로 (다)는 } k+2 \text{이다.}$$

18) (i) $n=1$ 일 때,

(좌변)=1

$$(우변)=\frac{1 \times 2}{2}=1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

 \textcircled{A} 의 양변에 $k+1$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.19) (i) $n=1$ 일 때,

$$(좌변)=2, (우변)=\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}=2$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad \cdots \textcircled{A}$$

 \textcircled{A} 의 양변에 $(k+1)(k+2)$ 를 더하면

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.20) (i) $n=1$ 일 때,

$$(좌변)=\frac{1}{2}, (우변)=\frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \quad \cdots \textcircled{A}$$

 \textcircled{A} 의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.21) (i) $n=1$ 일 때,

$$(좌변)=1, (우변)=\left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2=1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

 \textcircled{A} 의 양변에 $(k+1)^3$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\ &= \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4k + 4) \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 \\ &= \left\{ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.22) (i) $n=5$ 일 때

$$(좌변)=2^5=32$$

$$(우변)=5^2=25$$

 $32 > 25$ 이므로 $n=5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

 \textcircled{A} 의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

한편

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0 \text{이므로}$$

$$2k^2 > (k+1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

 \textcircled{A} , \textcircled{C} 에서

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.(i), (ii)에 의해 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.23) (i) $n=2$ 일 때

$$(좌변)=1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4},$$

$$(우변)=2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=2$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots \textcircled{A}$$

한편, $k \geq 2$ 이므로

$$\left\{ 2 - \frac{1}{(k+1)} \right\} - \left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2} > 0$$

$$\therefore 2 - \frac{1}{k+1} > 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

24) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1$$

$$(\text{우변}) = 1^2 = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2 \quad \cdots \textcircled{A}$$

\textcircled{A} 의 양변에 $2k+1$ 을 더하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

25) (i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$(\text{우변}) = 2^4 = 16$$

$24 > 16$ 이므로 $n=4$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k > 2^k \quad \cdots \textcircled{A}$$

\textcircled{A} 의 양변에 $k+1$ 을 곱하면

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \cdot (k+1) > 2^k \cdot (k+1) > 2^{k+1} \quad (\because k \geq 4 \text{이므로 } k+1 > 2)$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 부등식은 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

26) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1$$

$$(\text{우변}) = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \cdots \textcircled{A}$$

\textcircled{A} 의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

27) 성립한다.

\Rightarrow (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

$$(\text{우변}) = 1+2h$$

$1+2h+h^2 > 1+2h$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh \quad \cdots \textcircled{A}$$

\textcircled{A} 의 양변에 $1+h$ 를 곱하면

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h)$$

$$= 1 + (k+1)h + kh^2$$

$$> 1 + (k+1)h \quad (\because kh^2 > 0)$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

28) (i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\text{우변}) = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ 이므로 $n=2$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A} \text{의 양변에 } \frac{1}{k+1} \text{을 더하면}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}$$

$$\text{이때, } \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{(k+1)+1} > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

29) (i) $n=3$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^3=8, (\text{우변})=2 \times 3+1=7$$

따라서 $n=3$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > 2k+1$

양변에 2를 곱하면 $k \geq 3$ 이므로

$$2^{k+1} > 2(2k+1) > 2(k+1)+1$$

$$\therefore 2^{k+1} > 2(k+1)+1$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

30) (i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변})=3^2=9, (\text{우변})=3 \times 2+2=8$$

따라서 $n=2$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k > 3k+2$

양변에 3을 곱하면 $k \geq 2$ 이므로

$$3^{k+1} > 3(3k+2) > 3(k+1)+2$$

$$\therefore 3^{k+1} > 3(k+1)+2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

31) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=3, (\text{우변})=1+1=2$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k > k+1$

양변에 3을 곱하면 $k \geq 1$ 이므로

$$3^{k+1} > 3(k+1) > (k+1)+1$$

$$\therefore 3^{k+1} > (k+1)+1$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

32) (i) $n=5$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^5=32,$$

$$(\text{우변})=5^2=25$$

따라서 $n=5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

한편, $k \geq 5$ 일 때,

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0 \text{이므로}$$

$$2k^2 > (k+1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2^{k+1} > (k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

33) (i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변})=1, (\text{우변})=\frac{1^2 \times 2^2}{4}=1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

양변에 $(k+1)^3$ 을 더하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2 \{k^2 + 4(k+1)\}}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \{(k+1)+1\}^2}{4}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

34) (i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변})=1, (\text{우변})=1^2$$

따라서 $n=1$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

양변에 $(2k+1)$ 을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$

$$=k^2+(2k+1)$$

$$=(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

35) (i) $n=3$ 일 때, (좌변) $=3^3=27,$

(우변) $= 3 \cdot 3 + 7 = 16$, (좌변) $>$ (우변)이므로 주어진 부등식은 $n=3$ 일 때 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 3)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k > 3k+7$ 의 양변에 3을 곱하면

$$3^{k+1} > 3(3k+7) = 9k+21$$

이때 $k \geq 3$ 이면 $9k+21 > 3k+10$ 이므로

$$3^{k+1} > 3k+10 = 3(k+1)+7$$

$\therefore n=k+1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 3이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

36) (i) $n=2$ 일 때, (좌변) $= a_1 = 1$

$$(\text{우변}) = 2(a_2 - 1) = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$$

$\therefore n=2$ 일 때, 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = k(a_k - 1), \quad a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k = k(a_k - 1) + a_k = (k+1)a_k - k$$

$$= (k+1)\left(a_{k+1} - \frac{1}{k+1}\right) - k = (k+1)a_{k+1} - 1 - k$$

$$= (k+1)(a_{k+1} - 1)$$

$\therefore n=k+1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 등식이 성립한다.

37) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^3 = 1$$

$$(\text{우변}) = \left\{ \frac{1(1+1)}{2} \right\}^2 = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2$$

등식의 양변에 $(k+1)^3$ 을 더하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \left\{ \frac{k^2}{4} + (k+1) \right\}$$

$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right)$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 등식이 성립한다.

38) (i) $n=2$ 일 때

$$2^3 - 2 = 6 = 3 \cdot 2$$

따라서 $n=2$ 일 때, $n^3 - n$ 은 3의 배수이다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, $k^3 - k$ 가 3의 배수라고 가정하면 $k^3 - k = 3N$ (N 은 자연수)으로 놓을 수 있다.

$$n = k+1 \text{이면}$$

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k$$

$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$$

$$= 3N + 3(k^2 + k)$$

$$= 3(N + k^2 + k)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $n^3 - n$ 은 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의해 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $n^3 - n$ 은 3의 배수이다.

39) (i) $n=1$ 일 때, $2^3 + 1 = 9 = 3^2$

따라서 $n=1$ 일 때, 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$$2^{3^k} + 1 = 3^{k+1} \cdot m (m \text{은 자연수}), \quad 2^{3^k} = 3^{k+1} \cdot m - 1$$

$$2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = (3^{k+1} \cdot m - 1)^3 + 1$$

$$= 3^{3k+3} \cdot m^3 - 3 \cdot 3^{2k+2} \cdot m^2 + 3 \cdot 3^{k+1} \cdot m + 1 - 1$$

$$= 3^{k+2} (3^{2k+1} \cdot m^3 - 3^{k+1} m^2 + m)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

40) (i) $n=1$ 일 때,

$$7^1 + 5^{1-1} = 7 + 1 = 8 = 2 \cdot 4$$

따라서 $n=1$ 일 때, $7^n + 5^{n-1}$ 은 2의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, $7^k + 5^{k-1}$ 이 2의 배수라고 가정하면 $7^k + 5^{k-1} = 2N$ (N 은 자연수)으로 놓을 수 있다.

$$n = k+1 \text{이면}$$

$$7^{k+1} + 5^k = 7 \cdot 7^k + 5 \cdot 5^{k-1}$$

$$= 7(7^k + 5^{k-1}) - 2 \cdot 5^{k-1}$$

$$= 7 \cdot 2N - 2 \cdot 5^{k-1}$$

$$= 2(7N - 5^{k-1})$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $7^n + 5^{n-1}$ 은 2의 배수이다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $7^n + 5^{n-1}$ 은 2의 배수이다.

41) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + (1-1)^2 = 1$$

$$(\text{우변}) = (1-1)^3 + 1^3 = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때, 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \{i + (k-1)^2\} = (k-1)^3 + k^3$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \{i + k^2\} = \sum_{i=1}^{2k-1} \{i + k^2\} + (2k + k^2) + (2k+1 + k^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-1} \{i + (k-1)^2 + 2k - 1\} + (2k^2 + 4k + 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-1} \{i + (k-1)^2\} + (2k-1)^2 + (2k^2 + 4k + 1)$$

$$= (k-1)^3 + k^3 + (6k^2 + 2) = (k+1)^3 + k^3$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

42) 64

⇒ $n = k+1$ 일 때 성립하는지 확인하기 위해

양변에 $\boxed{(k+1)^3}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + \boxed{(k+1)^3} &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + \boxed{(k+1)^3} \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2 + 4(k+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2 \end{aligned}$$

이 성립하므로

$$f(k) = (k+1)^3 \text{이고 } f(3) = 64 \text{이다.}$$

43) 570

$$\Rightarrow f(k) = 2^{3^k} + 1 \text{ 이므로 } f(2) = 2^{3^2} + 1 = 2^9 + 1 = 513$$

$$g(k) = \frac{2^{3^{k+1}} + 1}{2^{3^k} + 1} \text{ 이므로 } g(1) = \frac{2^{3^2} + 1}{2^{3^1} + 1} = \frac{513}{9} = 57$$

$$\therefore f(2) + g(1) = 570$$

44) 8

⇒ (ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \text{ 이므로}$$

이 부등식의 양변에 $(가) \left(\frac{1}{k+1}\right)$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1}\right) > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1}$$

이때 $k \geq p = (2)$ 에서

$$\frac{2k}{k+1} + \left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{2k+1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k+1} - (나) \left(\frac{2(k+1)}{k+2}\right) \\ = \frac{(2k+1)(k+2) - 2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0$$

$$\text{이므로 } \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1}\right) > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

$$\therefore f(k) = \frac{1}{k+1}, \quad g(k) = \frac{2k+2}{k+2}$$

$$\therefore p + 4f(3) + 3g(4) = 2 + 4 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{10}{6} = 8$$

45) 24

⇒

(i) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1 \text{ 이므로 성립한다.}$$

(ii) $n = k$ 일 때

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

이라고 가정하면

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+3} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1}\right) + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3}\right) \\ &= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3}\right) \end{aligned}$$

(iii) $n = k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+4} \\ = a_{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+4} \\ = a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+4} \\ = \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} + a_k - \frac{1}{k+1} \\ > \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} + (가) \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ = \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} + 1 \\ = \frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)} - \frac{2}{3(k+1)} + 1 \\ = \frac{2}{(나)(3(k+1)(3k+2)(3k+4))} + 1 > 1 \end{aligned}$$

이므로 (i), (ii), (iii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore f(k) = 1 - \frac{1}{k+1}, \quad g(k) = 3(k+1)(3k+2)(3k+4)$$

$$\therefore f(0) + g(0) = 0 + 24 = 24$$

$$46) \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow (i) \quad n = 1 \text{일 때, (좌변)} = (\text{우변}) = (가) \left(\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $n = 1$ 일 때, ②이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, ②이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \dots \textcircled{A}$$

이므로 ②의 양변에 (나) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$ 을 더하면

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + (나) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k + (나) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

위 등식은 ②에 $n = k+1$ 을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore c = \frac{1}{2}, \quad f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$\therefore cf(2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

47) 24

$\Rightarrow n=k+1$ 에서 성립하는지 확인하기 위해

$2^{4n} + 6^{n+1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} 2^{4(k+1)} + 6^{(k+1)+1} &= \boxed{(가)2^4} \cdot 2^{4k} + \boxed{(나)6} \cdot 6^{k+1} \\ &= 5 \left(6 \cdot \frac{2^{4k} + 6^{k+1} - 2}{5} \right) + 10 \cdot 2^{4k} + 12 \\ &= 5(6m + \boxed{(다)2} \cdot 2^{4k} + 2) + 2 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때 도 성립한다.

이상에서 (가)+(나)+(다)=16+6+2=24이다.

48) 37

\Rightarrow (ii) $n=m$ 일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (m-k+1)2^{k-1} = 2^{m+1} - m - 2$$

$n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m+1} ((가)(m+2)-k)2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^m (m-k+2)2^{k-1} + \{(m+2)-(m+1)\}2^{m+1-1} \\ &= \sum_{k=1}^m (m-k+2)2^{k-1} + 2^m \\ &= \sum_{k=1}^m (m-k+1)2^{k-1} + \sum_{k=1}^m 2^{k-1} + 2^m \\ &= \sum_{k=1}^m (m-k+1)2^{k-1} + \frac{2^m-1}{2-1} + 2^m \\ &= \sum_{k=1}^m (m-k+1)2^{k-1} + (나)(2^{m+1}-1) \\ &= 2^{m+1} - m - 2 + (나)(2^{m+1}-1) \\ &= \dots \text{(이하 생략)} \\ &\therefore f(m) = m+2, \quad g(m) = 2^{m+1} - 1 \\ &\therefore f(4) + g(4) = 6 + 31 = 37 \end{aligned}$$

49) 10

$$\Rightarrow f(k) = 3^{k+1} + 4^{2k-1}$$

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 3^{k+2} + 4^{2k+1} = 3 \cdot 3^{k+1} + 16 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 3(3^{k+1} + 4^{2k-1}) + 13 \cdot 4^{2k-1} \\ &\therefore (나) - (가) = 13 - 3 = 10 \end{aligned}$$

50) $\frac{11}{8}$

$$\Rightarrow (가)f(k) = \frac{k+1}{2^{k+1}} \quad (나)g(k) = \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

$$\therefore f(2) + g(1) = \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^2} = \frac{11}{8}$$

51) 88

$$\begin{aligned} \Rightarrow (가) 3(m+1)^2 - 3(m+1) + 1 &= 3m^2 + 3m + 1 \\ \therefore f(m) &= 3m^2 + 3m + 1 \\ (나) m^3 + 3m^2 + 3m + 1 &= (m+1)^3 \\ \therefore g(m) &= (m+1)^3 \\ \therefore f(4) + g(2) &= 61 + 27 = 88 \end{aligned}$$

52) 70

$\Rightarrow n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > 3k-2$

양변에 (가)(2)를 곱하면 $2^{k+1} > 6k-4$

$3n-2$ 에 $n=k+1$ 을 대입하면 $3k+1$ 이다.

이때 $(6k-4) - (나)(3k+1) = 3k-5 > 0$ 이므로

$$6k-4 > (나)(3k+1)$$

$$2^{k+1} > 6k-4 > (나)(3k+1) = 3(다)(k+1)-2$$

즉, $2^{k+1} > 3(다)(k+1)-2$ 이다.

따라서 부등식 ㉠은 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

$$\therefore a=2, \quad f(k)=3k+1, \quad g(k)=k+1$$

$$\therefore af(2)g(4) = 2 \times 7 \times 5 = 70$$

53) 22

\Rightarrow (ii) $n=k$ 일 때, a_k 가 3의 배수라고 가정하면

$$a_k = k^3 + 3k^2 + 2k = 3m \quad (m \text{은 자연수})$$

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (가)(k+1)^3 + 3(가)(k+1)^2 + 2(가)(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3k^2 + 9k + 6 \\ &= 3m + 3(나)(k^2 + 3k + 2) \\ &= 3(m + (나)(k^2 + 3k + 2)) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 a_n 은 3의 배수이다.

$$\therefore f(k) = k+1, \quad g(k) = k^2 + 3k + 2$$

$$\therefore f(9) + g(2) = (9+1) + (2^2 + 3 \cdot 2 + 2) = 22$$

54) 2

$$\Rightarrow p=2, \quad f(k) = \frac{1}{k+1}, \quad g(k) = \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\therefore f(p-1) + g(p) = f(1) + g(2) = \frac{1}{2} + \frac{6}{4} = 2$$

55) 78

$$\Rightarrow (가)f(a) = 5a+1 \quad (나)g(a) = 6a+1$$

$$\therefore f(1) \times g(2) = 6 \times 13 = 78$$

56) $\frac{11}{4}$

$$\Rightarrow 가: f(k) = \frac{3}{(k+1)(k+2)}$$

$$나: g(k) = \frac{3k}{k+1} + \frac{3}{(k+1)(k+2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3k(k+2)+3}{(k+1)(k+2)} = \frac{3(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{3(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{3(k+1)}{k+2} \\
 \therefore f(2)+g(4) &= \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

57) 253

 $\Rightarrow n = k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 4^{2k+1} + 1 &= 16 \times 4^{2k-1} + 1 = 16(4^{2k-1} + 1) - 15 \\
 &= 16 \times 5m - 15 = 5(16m - 3)
 \end{aligned}$$

따라서 $a = 1$, $b = 16$ $f(m) = 16m - 3$ 이므로

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = f(16) = 16 \times 16 - 3 = 253$$

58) 89

 $\Rightarrow n = k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1} > \boxed{k(k+1)+1}$$

 $n = k+1$ 에 성립하는지 확인하기 위해양변에 $\boxed{2}$ 를 곱하면

$$2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$$

$$2(k^2 + k + 1) - \boxed{(k^2 + 3k + 3)} = k^2 - k - 1 > 0 \text{이므로}$$

$$2^{k+2} > \boxed{(k+1)(k+2)+1}$$

따라서 $n = \boxed{k+1}$ 일 때도 성립한다.

이상에서 $f(k) = k(k+1)$, $a = 2$, $g(k) = k^2 + 3k + 3$,
 $h(k) = k+1$ 이므로 $af(3)+g(2)h(4) = 24+65 = 89$ 이다.

59) 12

 $\Rightarrow (i) n = k+1$ 일 때 성립하는지 확인하기 위해 \odot 의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하여야 하므로 (가)는

$$\frac{k+1}{2^{k+1}} \text{이다.}$$

$$(ii) 2 - \frac{2k+4}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \text{이므로 (나)는}$$

$$\frac{k+3}{2^{k+1}} \text{이다.}$$

$$(iii) \text{ 앞의 (ii)에서 } 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}} \text{이므로}$$

 $n = \boxed{k+1}$ 일 때 성립한다. 따라서 (다)는 $\boxed{k+1}$ 이다.

$$\text{즉 } f(k) = \frac{k+1}{2^{k+1}}, g(k) = \frac{k+3}{2^{k+1}}, h(k) = k+1 \text{이므로}$$

$$\frac{f(2)h(6)}{g(4)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot 7}{\frac{7}{32}} = 12 \text{이다.}$$

60) 132

 $\Rightarrow n = \boxed{2}$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이때, $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ 이다.따라서 $n = \boxed{2}$ 일 때 \odot 이 성립한다.(ii) $n = k$ 일 때 \odot 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

위 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면 $n = k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + (\text{나}) &= \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &< 2 - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{(k+1)^2} \right) \dots \odot
 \end{aligned}$$

이때 $k \geq 2$ 이므로

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - (\text{다}) = \left(2 - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

$$\therefore 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \dots \ominus$$

 \odot, \ominus 에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 \odot 이 성립한다.

$$\therefore \alpha = 2, f(k) = \frac{1}{(k+1)^2}, g(k) = 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \alpha \times \frac{1}{f(5)} \times g(5) = 2 \times 6^2 \times \left(2 - \frac{1}{6} \right) = 132$$