13 원의 방정식

유형의 이해에 따라 □ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.		1st	2nd
필수유형 01	원의 방정식(1) – 표준형	□	□
필수유형 02	원의 방정식(1) – 원의 중심에 대한 조건이 주어진 경우	□	□
필수유형 03	원의 방정식(2) – 일반형	□	□
필수유형 04	좌표축에 접하는 원의 방정식	□	□
발전유형 05	자취의 방정식	□	□
필수유형 06	원과 직선의 위치 관계	□	□
필수유형 07	현의 길이	□	□
필수유형 08	원 밖의 한 점과 접점 사이의 거리	□	□
필수유형 09	원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대·최소	□	□
필수유형 10	기울기가 주어진 원의 접선의 방정식	□	□
필수유형 11	원 위의 점에서의 접선의 방정식	□	□
필수유형 12	원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식	□	□
필수유형 13	두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식	□	□
필수유형 14	두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식 – 공통인 현	□	□
발전유형 15	두 원에 동시에 접하는 접선의 길이	□	□

필수유형 01 원의 방정식(1) – 표준형

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $(1,\ -3)$이고 점 $(-2,\ 0)$을 지나는 원

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 4)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원

풍쌤 POINT

원의 중심과 반지름의 길이만 알면 원의 방정식을 세울 수 있어!

중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ← 원의 방정식의 표준형

풀이

(1) **STEP 1** 중심이 점 $(1,\ -3)$인 원의 방정식 세우기

구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+3)^2=r^2$ ❶

STEP 2 점 $(-2,\ 0)$을 지나는 원의 방정식 구하기

이 원이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$(-2-1)^2+(0+3)^2=r^2 \qquad \therefore\ r^2=18$

따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+3)^2=18$

(2) **STEP 1** 원의 중심의 좌표 구하기

원의 중심은 선분 AB의 중점이므로❷
$\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right) \qquad \therefore\ (2,\ 3)$

STEP 2 원의 반지름의 길이 구하기

원의 반지름의 길이는
$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(4-2)^2}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

STEP 3 원의 방정식 구하기

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ ❸

다른 풀이

원의 반지름의 길이는 원의 중심 $(2,\ 3)$과 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$

❶ 원의 중심이 점 $(1,\ -3)$이므로 표준형을 이용한다.

❷ 지름의 중점이 원의 중심이다.

❸ 원의 방정식의 표준형에 중심의 좌표와 반지름의 길이를 대입한다.

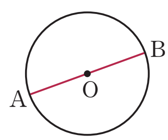
답 (1) $(x-1)^2+(y+3)^2=18$ (2) $(x-2)^2+(y-3)^2=10$

풍쌤 강의 NOTE

지름의 양 끝 점 A, B를 알 때

(1) 원의 중심은 지름의 중점 ➡ 선분 AB의 중점

(2) 반지름의 길이는 지름의 길이의 $\dfrac{1}{2}$ ➡ $\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$



01-1 유사

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 원점이고 점 $(4,\ 2)$를 지나는 원

(2) 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 원

01-2 유사

다음 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-4,\ -3)$

(2) $\mathrm{A}(-1,\ -3)$, $\mathrm{B}(-5,\ -1)$

01-3 변형

원 $(x+3)^2+(y-4)^2=16$과 중심이 같고 점 $(3,\ 1)$을 지나는 원의 넓이를 구하여라.

01-4 변형

원 $x^2+y^2+ax+10y+10=0$의 중심의 좌표가 $(1,\ -5)$일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

01-5 변형

두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식이 $x^2+y^2-4y-14=0$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

01-6 실력

직선 $3x-2y+12=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

필수유형 02 원의 방정식(1) – 원의 중심에 대한 조건이 주어진 경우

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 x축 위에 있고 원점과 점 $(1, -3)$을 지나는 원

(2) 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 $(1, 0)$, $(4, -1)$을 지나는 원

풍쌤 POINT

- 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $(x-a)^2+y^2=r^2$
- 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $x^2+(y-a)^2=r^2$
- 중심이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 원의 방정식 ➡ $(x-a)^2+\{y-f(a)\}^2=r^2$

풀이

(1) 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$❶, 반지름의 길이를 r라고 하면

원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $a^2=r^2$ …… ㉠

또, 이 원이 점 $(1, -3)$을 지나므로

$(1-a)^2+(-3)^2=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-5)^2+y^2=25$

다른 풀이

원의 중심을 $\mathrm{A}(a, 0)$이라 하고 $\mathrm{B}(0, 0)$, $\mathrm{C}(1, -3)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$❷이므로

$\sqrt{a^2}=\sqrt{(a-1)^2+3^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $-2a+10=0$ $\quad\therefore a=5$

따라서 원의 중심은 $(5, 0)$이고 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5^2}=5$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-5)^2+y^2=25$

❶ 원의 중심이 x축 위에 있으므로 중심의 y좌표가 0이다.

❷ 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취를 원이라고 한다.

(2) 중심의 좌표를 (a, a)❸, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로 $(1-a)^2+(-a)^2=r^2$ …… ㉠

또, 이 원이 점 $(4, -1)$을 지나므로

$(4-a)^2+(-1-a)^2=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-4)^2=25$

❸ 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 x좌표와 y좌표가 같다.

답 (1) $(x-5)^2+y^2=25$ (2) $(x-4)^2+(y-4)^2=25$

풍쌤 강의 NOTE

중심에 대한 조건이 주어지고, 두 점을 지나는 원의 방정식을 구할 때는

❶ 중심에 대한 조건을 이용하여 원의 방정식을 세운다.

❷ 지나는 두 점의 좌표를 ❶의 식에 각각 대입하여 만든 두 방정식을 풀어 원의 방정식을 구한다.

02-1 유사

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 x축 위에 있고 원점과 점 $(2,\ 2\sqrt{2})$를 지나는 원

(2) 중심이 x축 위에 있고 두 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ -1)$을 지나는 원

02-2 유사

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 y축 위에 있고 두 점 $(0,\ 1)$, $(-4,\ -3)$을 지나는 원

(2) 중심이 y축 위에 있고 두 점 $(-2,\ 2)$, $(3,\ 1)$을 지나는 원

02-3 유사

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 1)$, $(-5,\ -5)$를 지나는 원

(2) 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 $(1,\ -3)$, $(-3,\ 5)$를 지나는 원

02-4 변형

중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 두 점 $(-2,\ -2)$, $(4,\ 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

02-5 변형

중심이 직선 $y=-2x+1$ 위에 있고 두 점 $(3,\ -4)$, $(-2,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

02-6 실력

중심이 직선 $2x+y+4=0$ 위에 있고 두 점 $(0,\ -4)$, $(-2,\ -6)$을 지나는 원이 있다. y좌표가 -5인 원 위의 두 점을 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

필수유형 03 원의 방정식(2) – 일반형

다음 물음에 답하여라.

(1) 방정식 $x^2+y^2+6ax-8ay+1=0$이 원을 나타내도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(2) 세 점 $(0, 0)$, $(-2, 6)$, $(-6, -2)$를 지나는 원의 방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

- 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원을 나타내려면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴로 변형했을 때, $r^2>0$이어야 해!
- 세 점을 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 세 점의 좌표를 대입해!

풀이

(1) STEP1 주어진 방정식을 표준형으로 변형하기

$x^2+y^2+6ax-8ay+1=0$에서❶

$x^2+6ax+9a^2+y^2-8ay+16a^2=-1+9a^2+16a^2$❷

$(x+3a)^2+(y-4a)^2=25a^2-1$

STEP2 a의 값의 범위 구하기

이 방정식이 원을 나타내려면 $25a^2-1>0$❸이어야 하므로

$(5a+1)(5a-1)>0$

$\therefore a<-\frac{1}{5}$ 또는 $a>\frac{1}{5}$

❶ x, y를 각각 완전제곱식으로 만들면 표준형이 된다.

❷ 완전제곱식의 합의 꼴을 만들기 위해서는 상수항을 우변으로 이항한 후 양변에 $\left\{\frac{(\text{일차항의 계수})}{2}\right\}^2$을 더한다.

❸ 표준형으로 변형하면 우변은 반지름의 길이의 제곱이므로 양수이어야 한다.

(2) STEP1 원의 방정식을 일반형으로 놓기

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$❹

이라고 하자.

STEP2 지나는 세 점의 좌표를 대입하여 원의 방정식 구하기

이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ ······ ㉠

원 ㉠이 두 점 $(-2, 6)$, $(-6, -2)$를 지나므로 이를 각각 대입하면

$4+36-2A+6B=0$ $\quad \therefore A-3B=20$ ······ ㉡

$36+4-6A-2B=0$ $\quad \therefore 3A+B=20$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=8$, $B=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+8x-4y=0$

❹ 세 점을 지나는 원의 방정식은 일반형으로 식을 세우고 미지수의 값을 구한다.

답 (1) $a<-\frac{1}{5}$ 또는 $a>\frac{1}{5}$ (2) $x^2+y^2+8x-4y=0$

풍쌤 강의 NOTE

원의 방정식을 구하는 문제는 대부분 표준형을 이용하지만 세 점이 주어질 때만은 일반형을 이용해야 쉽다. 원의 방정식을 일반형으로 놓은 후 세 점의 좌표를 대입하여 미지수의 값을 구한다.

03-1 기본

원 $x^2+y^2-8ax+2y+8=0$의 중심의 좌표가 $(4,\ b)$이고 반지름의 길이가 r일 때, abr의 값을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

03-2 유사

방정식 $x^2+y^2+2x-ay+2=0$이 원을 나타내도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

03-3 유사

세 점 $(0,\ 0)$, $(-2,\ -4)$, $(3,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

03-4 변형

방정식 $x^2+y^2-4ky+3k^2-2k-9=0$이 반지름의 길이가 3 이하인 원을 나타낼 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

03-5 변형

방정식 $x^2+y^2-6x+a^2-4a-3=0$이 원을 나타낼 때, 원의 넓이가 최대가 되도록 하는 원의 반지름의 길이를 구하여라. (단, a는 상수이다.)

03-6 실력

네 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(1,\ -1)$, $(3,\ k)$가 한 원 위에 있을 때, 양수 k의 값을 구하여라.

필수유형 04 좌표축에 접하는 원의 방정식

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $(-3, 2)$, $(-2, 1)$을 지나고 x축에 접하는 원

(2) 점 $(2, -4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원

풍쌤 POINT

좌표축에 접하는 원은 중심의 좌표로부터 반지름의 길이를 구할 수 있으므로 원의 중심을 이용하여 반지름의 길이를 나타내고, 원의 방정식을 세워!

풀이

(1) **STEP1** 원의 방정식을 표준형으로 놓기

중심의 좌표를 (a, b)라고 하면 이 원이 x축에 접하므로 구하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ ❶ …… ㉠

STEP2 지나는 두 점의 좌표를 대입하여 연립하기

원 ㉠이 점 $(-3, 2)$를 지나므로 $(-3-a)^2+(2-b)^2=b^2$

$\therefore a^2+6a-4b+13=0$ …… ㉡

또, 원 ㉠이 점 $(-2, 1)$을 지나므로 $(-2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore a^2+4a-2b+5=0$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면❷ $a=-3$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=5$

STEP3 원의 방정식 구하기

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-1)^2+(y-5)^2=25$

(2) **STEP1** 주어진 조건에 맞는 원의 방정식 세우기

점 $(2, -4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제4사분면 위에 있다.

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$❸이므로 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

STEP2 점 $(2, -4)$를 대입하여 원의 방정식 구하기

이 원이 점 $(2, -4)$를 지나므로 $(2-r)^2+(-4+r)^2=r^2$

$r^2-12r+20=0$, $(r-2)(r-10)=0$

$\therefore r=2$ 또는 $r=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 또는 $(x-10)^2+(y+10)^2=100$

답 (1) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-1)^2+(y-5)^2=25$

(2) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 또는 $(x-10)^2+(y+10)^2=100$

❶ x축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 원의 중심의 y좌표의 절댓값과 같다.

❷ ㉢$-2\times$㉡을 하면 $a^2+2a-3=0$이므로 $a=-3$ 또는 $a=1$

❸ x축, y축에 동시에 접하면 (반지름의 길이) $=|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$ $=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|$

풍쌤 강의 NOTE

① 중심이 점 (a, b)이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|b|$이다. ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

② 중심이 점 (a, b)이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$이다. ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

③ 반지름의 길이가 r이고 x축, y축에 동시에 접하는 원은

➡ $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=r$

04-1 유사

두 점 $(2, 0)$, $(1, -1)$을 지나고 y축에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

04-2 유사

점 $(1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

04-3 변형

점 $(0, -1)$에서 y축에 접하고 점 $(-4, 3)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

04-4 변형

x축에 접하는 원 $x^2+y^2-8ax+4y+1=0$의 중심이 제3사분면 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

04-5 변형

중심이 직선 $y=-3x-8$ 위에 있고, 제3사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

04-6 실력

중심이 곡선 $y=x^2-2$ 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원들의 넓이의 합을 구하여라.

발전유형 05 자취의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $A(1,\ -2)$와 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=20$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 중점의 자취의 방정식을 구하여라.

(2) 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $1:2$인 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

(1) 구하는 점을 $Q(x, y)$, 원 위의 점을 $P(a, b)$로 놓고 x, y 사이의 관계식을 구해!

(2) 점의 자취의 방정식은 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구해!

풀이

(1) STEP 1 $P(a, b)$로 놓기

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$(a-3)^2+(b+2)^2=20$ …… ㉠

STEP 2 구하는 점을 $Q(x, y)$로 놓고 x, y 사이의 관계식 구하기

선분 AP의 중점을 $Q(x,\ y)$라고 하면

$x=\dfrac{a+1}{2},\ y=\dfrac{b-2}{2}$ ❶

$\therefore\ a=2x-1,\ b=2y+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(2x-4)^2+(2y+4)^2=20$

$\therefore\ (x-2)^2+(y+2)^2=5$

❶ 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)의 중점을 (x, y)라고 하면 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

(2) STEP 1 $P(x, y)$로 놓고 거리의 비를 이용하여 식 세우기

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로❷ $2\overline{AP}=\overline{BP}$

즉, $2\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

STEP 2 점 P의 자취의 방정식 구하기

양변을 제곱하여 정리하면

$4\{(x+2)^2+y^2\}=(x-1)^2+y^2$

$4x^2+16x+16+4y^2=x^2-2x+1+y^2$

$3x^2+3y^2+18x+15=0,\ x^2+y^2+6x+5=0$

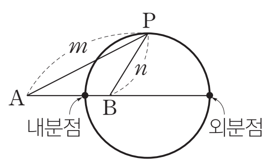
$\therefore\ (x+3)^2+y^2=4$

❷ 점 P의 자취의 방정식은 아폴로니우스의 원을 이용해 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식으로 구할 수도 있다.

답 (1) $(x-2)^2+(y+2)^2=5$ (2) $(x+3)^2+y^2=4$

풍쌤 강의 NOTE

두 정점으로부터의 거리의 비가 일정한 평면 위의 점의 자취는 원이다.
즉, 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$인 점 P의 자취는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원으로, 이를 아폴로니우스의 원이라고 한다.



05-1 유사

점 A$(0,\ 2)$와 원 $(x-4)^2+(y-6)^2=16$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 중점의 자취의 방정식을 구하여라.

05-2 유사

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(4,\ -2)$로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

05-3 변형

점 P$(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점일 때, 점 Q$(a-2,\ b+3)$의 자취의 방정식을 구하여라.

05-4 변형

두 점 A$(4,\ -1)$, B$(1,\ -2)$와 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=36$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 무게중심이 그리는 도형의 넓이를 구하여라.

05-5 변형

두 점 O$(0,\ 0)$, A$(10,\ 0)$을 이은 선분 OA를 빗변으로 하는 직각삼각형의 다른 한 꼭짓점을 P라고 할 때, 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

05-6 실력

두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(3,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $2:3$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하여라.

필수유형 06 원과 직선의 위치 관계

원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다. (3) 만나지 않는다.

풍쌤 POINT

원과 직선의 위치 관계를 파악하는 방법은 다음과 같이 두 가지가 있어.

[방법1] (원의 중심과 직선 사이의 거리)와 (반지름의 길이)를 비교해!

[방법2] 원과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 이용해!

풀이

STEP 1 원의 중심과 직선 사이의 거리 구하기

원 $x^2+y^2=8$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x+k$,

즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|0-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

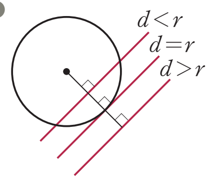
STEP 2 원과 직선의 위치 관계 파악하기

원의 반지름의 길이는 $r=2\sqrt{2}$이고, 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이를 비교❶해 보면 다음과 같다.

(1) $\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$에서 $|k|<4$ $\therefore -4<k<4$

(2) $\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$에서 $|k|=4$ $\therefore k=\pm4$

(3) $\frac{|k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$에서 $|k|>4$ $\therefore k<-4$ 또는 $k>4$

❶


다른 풀이

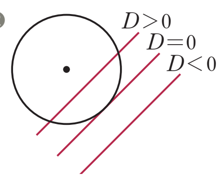
STEP 1 x에 대한 이차방정식을 만들고 판별식 구하기

$y=x+k$를 $x^2+y^2=8$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=8$

이차방정식 $2x^2+2kx+k^2-8=0$의 판별식을 D❷라고 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-2\times(k^2-8)=-k^2+16$$

❷


STEP 2 원과 직선의 위치 관계 파악하기

(1) $-k^2+16>0$에서 $-4<k<4$

(2) $-k^2+16=0$에서 $k=\pm4$

(3) $-k^2+16<0$에서 $k<-4$ 또는 $k>4$

답 (1) $-4<k<4$ (2) $k=\pm4$ (3) $k<-4$ 또는 $k>4$

풍쌤 강의 NOTE

판별식을 이용하는 방법이 이해하기는 쉽지만 원의 중심이 원점이 아닌 경우에는 계산이 복잡하다. 따라서 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이를 비교하여 파악하는 것이 더 간단하다.

06-1 유사

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 접한다.
(3) 만나지 않는다.

06-2 변형

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$와 직선 $2x-y-k=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

06-3 변형

중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 넓이가 5π인 원이 직선 $kx-y+5\sqrt{2}=0$과 한 점에서 만날 때, 모든 상수 k의 값의 곱을 구하여라.

06-4 변형

원 $(x-4)^2+(y-3)^2=12$와 직선 $y=kx+3$이 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하여라.

06-5 변형

직선 $3x-4y+k=0$이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$와는 만나고, 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$와는 만나지 않도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

06-6 변형

기출

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원 중에서 직선 $3x-4y+12=0$과 접하는 원의 개수는 2이다. 두 원의 중심을 각각 A, B라고 할 때, $\overline{AB}^2$의 값을 구하여라.

필수유형 07 현의 길이

다음 물음에 답하여라.

(1) 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $3x+4y+5=0$이 만나서 생기는 현의 길이를 구하여라.

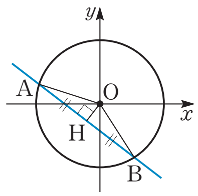
(2) 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=16$과 직선 $y=-x+k$가 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{14}$가 되도록 하는 모든 상수 k의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

원과 직선이 두 점에서 만날 때, 두 교점을 잇는 현의 길이를 구할 때는 원의 중심에서 현에 내린 수선이 그 현을 이등분함을 이용하여 구해.

풀이

(1) 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $3x+4y+5=0$이 만나는 두 점을 A, B, 원의 중심 O에서 직선에 내린 수선의 발을 H라고 하면❶



$\overline{OH}=\dfrac{|5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$❷

$\overline{OA}=3$❸이므로 직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 현의 길이는

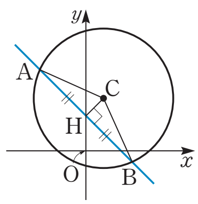
$\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{2}$

❶ $\overline{OH}$는 현 AB를 수직이등분한다.

❷ $\overline{OH}$는 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리

❸ $\overline{OA}$는 원의 반지름이다.

(2) 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=16$의 중심 $(1,\ 3)$을 C라 하고, 원과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$이 만나는 두 점 A, B, 점 C에서 직선에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{14}=\sqrt{14}$

직각삼각형 AHC에서 $\overline{CH}=\sqrt{4^2-(\sqrt{14})^2}=\sqrt{2}$ ······ ㉠

또, 점 $C(1,\ 3)$과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\dfrac{|1+3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|4-k|}{\sqrt{2}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

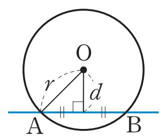
$\dfrac{|4-k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\ |4-k|=2$ $\quad\therefore k=2$ 또는 $k=6$

답 (1) $4\sqrt{2}$ (2) $k=2$ 또는 $k=6$

풍쌤 강의 NOTE

반지름의 길이가 r인 원과 직선이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라고 하면

➡ $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}$

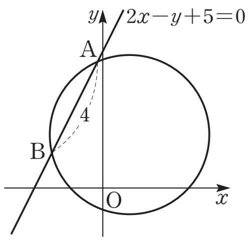


07-1 기본

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=49$와 직선 $3x-y+10=0$이 만나서 생기는 현의 길이를 구하여라.

07-2 유사

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$과 직선 $2x-y+5=0$이 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=4$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.



07-3 유사

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$와 x축이 만나서 생기는 현의 길이를 구하여라.

07-4 변형

원 $x^2+y^2=64$와 직선 $2x-y+10=0$의 두 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 넓이를 구하여라.

07-5 실력

원 $x^2+(y-4)^2=25$와 직선 $y=mx$가 만나서 생기는 현의 길이의 최솟값과 그때의 상수 m의 값을 구하여라.

07-6 실력

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $y=mx+1$의 두 교점 A, B와 원의 중심 C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이 되도록 하는 상수 m의 값의 합을 구하여라.

필수유형 08 원 밖의 한 점과 접점 사이의 거리

점 $\mathbf{P(-3,\ 3)}$에서 원 $\boldsymbol{x^2+y^2-6x+2y-6=0}$에 그은 접선의 접점을 $\mathbf{T}$라고 할 때, 선분 $\mathbf{PT}$의 길이를 구하여라.

풍쌤 POINT

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 접점과 원의 중심을 지나는 직선은 접선과 수직임을 이용하고 원의 중심, 접점, 원 밖의 한 점을 세 꼭짓점으로 하는 직각삼각형을 그려 피타고라스 정리를 이용해!

풀이

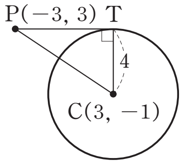
STEP 1 원의 중심의 좌표 구하기

$x^2+y^2-6x+2y-6=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라고 하면

$C(3,\ -1)$



STEP 2 $\triangle CTP$에서 $\overline{CP}$, $\overline{CT}$의 길이 구하기

접선 PT와 반지름 CT는 수직이므로[1]

삼각형 CTP는 $\angle CTP=90^\circ$인 직각삼각형이다.

점 $P(-3,\ 3)$과 원의 중심 $C(3,\ -1)$ 사이의 거리는

$\overline{CP}=\sqrt{(-3-3)^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{13}$

$\overline{CT}$는 원의 반지름이므로

$\overline{CT}=4$

STEP 3 $\overline{PT}$의 길이 구하기

따라서 직각삼각형 CTP에서[2]

$\overline{PT}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CT}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-4^2}=6$

답 6

[1] 접선과 반지름은 수직으로 만난다.

[2] 피타고라스 정리를 이용한다.

풍쌤 강의 NOTE

원 밖의 한 점과 접점 사이의 거리를 구하는 방법

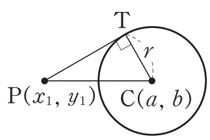
❶ 원의 방정식을 표준형으로 고쳐 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

❷ 원의 중심 $C(a,\ b)$와 점 $P(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리 $\overline{CP}$를 구한다.

➡ $\overline{CP}=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}$

❸ 직각삼각형 CTP에서 피타고라스 정리를 이용하여 선분 PT의 길이를 구한다.

➡ $\overline{PT}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CT}^2}=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2}$



$\overline{CT}\perp\overline{PT}$

08-1 유사

점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 접점을 T라고 할 때, 선분 PT의 길이를 구하여라.

08-2 유사

점 $\mathrm{P}(-2,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$에 그은 접선의 접점을 T라고 할 때, 선분 PT의 길이를 구하여라.

08-3 변형

점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$에 그은 접선의 길이가 5일 때, a의 값을 모두 구하여라.

08-4 변형

점 $\mathrm{A}(5,\ -1)$에서 원 $(x+3)^2+(y-5)^2=16$에 그은 접선의 접점을 P라 하고 원의 중심을 C라고 할 때, 삼각형 APC의 넓이를 구하여라.

08-5 변형

점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 할 때, 사각형 AOBP의 넓이를 구하여라. (단, O는 원점이다.)

08-6 실력

점 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$에서 원 $(x-2)^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

필수유형 09 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대·최소

다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $(-1,\ 5)$에서 원 $(x+4)^2+(y-1)^2=16$에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(2) 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=4$ 위의 점 P와 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

풍쌤 POINT

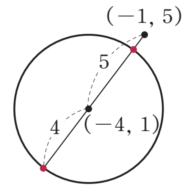
원의 중심과 직선 사이의 거리를 먼저 구해! 그다음 원 위의 점을 움직이면서 최댓값을 갖는 경우와 최솟값을 갖는 경우를 각각 찾아!

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m은 각각 다음과 같아.
$M=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)$+$(반지름의 길이)
$m=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)$-$(반지름의 길이)

풀이

(1) STEP 1 원의 중심과 점 $(-1, 5)$ 사이의 거리 구하기

원 $(x+4)^2+(y-1)^2=16$의 중심 $(-4,\ 1)$과 점 $(-1,\ 5)$ 사이의 거리는 $\sqrt{\{-1-(-4)\}^2+(5-1)^2}=5$



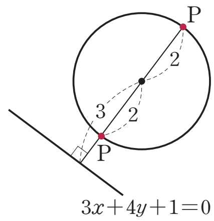
STEP 2 거리의 최댓값과 최솟값 구하기

이때 원의 반지름의 길이는 4이므로 점 $(-1,\ 5)$에서 원에 이르는 거리의 (최댓값)$=5+4=9$, (최솟값)$=5-4=1$

(2) STEP 1 원의 중심과 직선 사이의 거리 구하기

원 $(x+2)^2+(y-5)^2=4$의 반지름의 길이를 r라고 하면 $r=2$
원의 중심 $(-2,\ 5)$와 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리를 d라고 하면

$$d=\frac{|-6+20+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$



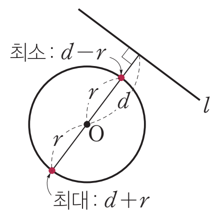
STEP 2 거리의 최댓값과 최솟값 구하기

따라서 원 위의 점 P와 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리의 (최댓값)$=d+r=3+2=5$, (최솟값)$=d-r=3-2=1$

답 (1) 최댓값: 9, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 5, 최솟값: 1

풍쌤 강의 NOTE

원과 만나지 않는 직선 l과의 거리가 최대, 최소가 되는 원 위의 점은 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점이다. 즉, 원의 반지름의 길이를 r, 원의 중심과 직선 l 사이의 거리를 d $(d>r)$라고 하면 원 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m은
➡ $M=d+r,\ m=d-r$



09-1 유사

점 $(-1, 9)$에서 원 $(x+6)^2+(y+3)^2=16$에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

09-2 유사

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점 P와 직선 $2x-y+2=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

09-3 변형

원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 P와 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값이 $5\sqrt{2}$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

09-4 변형

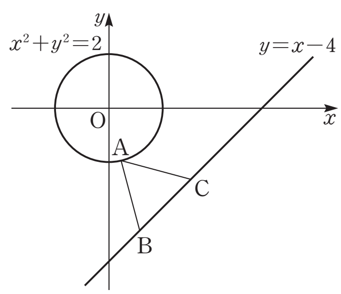
두 점 $A(-3, 4)$, $B(3, 1)$에 대하여 점 P가 $\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$을 만족시킬 때, 점 P와 직선 $y=2x+5$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

09-5 실력

원 $x^2+y^2+2x-8y+12=0$ 위의 점 P와 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리가 정수인 점 P의 개수를 구하여라.

09-6 실력 기출

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=2$ 위를 움직이는 점 A와 직선 $y=x-4$ 위를 움직이는 두 점 B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 만들 때, 정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비를 구하여라.



필수유형 10 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 직선 $y=\sqrt{3}x+1$에 평행한 직선

(2) 원 $(x-1)^2+(y-4)^2=10$에 접하고 기울기가 3인 직선

풍쌤 POINT

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구할 때는

[방법1] 공식 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$을 이용해!

[방법2] 구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$으로 놓고 판별식을 이용해!

[방법3] 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용해!

풀이

(1) 직선 $y=\sqrt{3}x+1$에 평행한 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ ❶이고,
원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로 접선의 방정식은
$y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$ ❷ $\quad\therefore y=\sqrt{3}x\pm4$ ❸

다른 풀이 1

접선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$ (k는 상수)로 놓고, $x^2+y^2=4$에
대입하면 $x^2+(\sqrt{3}x+k)^2=4 \quad \therefore 4x^2+2\sqrt{3}kx+k^2-4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k)^2-4(k^2-4)=0,\ k^2=16 \qquad \therefore k=\pm4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x\pm4$

다른 풀이 2

접선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$, 즉 $\sqrt{3}x-y+k=0$으로 놓으면
원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=2,\ |k|=4 \qquad \therefore k=\pm4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x\pm4$

(2) 기울기가 3인 접선의 방정식을 $y=3x+b$ (b는 상수)라고 하면 원의 중심 $(1,\ 4)$와 접선 $y=3x+b$, 즉 $3x-y+b=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같으므로

$$\frac{|3-4+b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10},\ |b-1|=10$$

$\therefore b=11$ 또는 $b=-9$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x+11$ 또는 $y=3x-9$

답 (1) $y=\sqrt{3}x\pm4$ (2) $y=3x+11$ 또는 $y=3x-9$

❶ 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

❷ 공식 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$에 $m=\sqrt{3}$, $r=2$를 대입한다.

❸ 원에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선은 항상 2개이다.

풍쌤 강의 NOTE

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$이지만 이 공식은 원의 중심이 원점인 경우에만 이용할 수 있다. 즉, 원의 중심이 원점이 아닌 경우에는 해당 공식을 쓰지 못하므로 (원의 중심과 접선 사이의 거리)=(원의 반지름의 길이)임을 이용한다.

10-1 유사

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 직선 $2x-y-3=0$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

10-2 유사

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°인 접선의 방정식을 구하여라.

10-3 유사

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=16$에 접하고 기울기가 -2인 두 직선의 y절편의 곱을 구하여라.

10-4 변형

직선 $x+2y-2=0$에 수직이고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

10-5 변형

직선 $4x-3y-6=0$에 수직이고 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=2$에 접하는 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

10-6 실력

원 $x^2+y^2=100$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-6, 8)$, $\mathrm{B}(0, -10)$과 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하여라.

필수유형 11 원 위의 점에서의 접선의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식이 점 $(-3,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

(2) 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=18$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구할 때는

[방법1] 공식 $x_1x+y_1y=r^2$을 이용해! ← 원이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$인 경우는 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ 이용!

[방법2] 구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$으로 놓고, 판별식을 이용해!

풀이

(1) 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5$ ❶

이 접선이 점 $(-3,\ k)$를 지나므로 $-3+2k=5$ $\quad\therefore k=4$

❶ 공식 $x_1x+y_1y=r^2$에 $x_1=1$, $y_1=2$를 대입한다.

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{0-2}{0-1}=2$

이때 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고, 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 접선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

이 접선이 점 $(-3,\ k)$를 지나므로 $k=-\dfrac{1}{2}\times(-3)+\dfrac{5}{2}=4$

(2) 원의 중심 $(-2,\ 3)$과 접점 $(1,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{3-6}{-2-1}=1$

이때 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 -1이고, 점 $(1,\ 6)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-6=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+7$

다른 풀이

원 $(x+2)^2+(y-3)^2=18$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 방정식은 $(1+2)(x+2)+(6-3)(y-3)=18$ ❷

$x+2+y-3=6$ $\quad\therefore y=-x+7$

❷ 공식 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$에 $x_1=1$, $y_1=6$을 대입한다.

답 (1) 4 $\quad$ (2) $y=-x+7$

풍쌤 강의 NOTE

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 두 점 $(a,\ b)$, $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선이 접선과 수직임을 이용하여 구한다.

11-1 유사

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 방정식이 점 $(k,\ -2)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

11-2 유사

원 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

11-3 변형

원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -1일 때, ab의 값을 구하여라.

11-4 변형

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+4x-4y+k=0$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

11-5 변형

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

11-6 변형

원 $(x-3)^2+(y-2)^2=45$ 위의 서로 다른 두 점 $(-3,\ -1)$, $(a,\ b)$에서의 두 접선이 서로 평행할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

필수유형 12 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=4$ 밖의 한 점 $A(2, 4)$에서 이 원에 그은 접선의 방정식을 모두 구하여라.

풍쌤 POINT

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구할 때는

[방법1] 접점을 (x_1, y_1)이라 하고 이 점에서의 접선의 방정식이 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용해!

[방법2] (원의 중심과 접선 사이의 거리)=(반지름의 길이)임을 이용해!

풀이

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=4$

이 접선이 점 $A(2, 4)$를 지나므로

$2x_1+4y_1=4$에서 $x_1=2-2y_1$ ...... ㉠

또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2-2y_1)^2+{y_1}^2=4$

$5{y_1}^2-8y_1=0$, $y_1(5y_1-8)=0$ $\therefore y_1=0$ 또는 $y_1=\frac{8}{5}$

y_1의 값을 ㉠에 대입하면

$y_1=0$일 때 $x_1=2$, $y_1=\frac{8}{5}$일 때 $x_1=-\frac{6}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$x=2$ 또는 $3x-4y+10=0$❶

❶ $x_1x+y_1y=4$에 $x_1=-\frac{6}{5}$, $y_1=\frac{8}{5}$을 대입하면

$-\frac{6}{5}x+\frac{8}{5}y=4$

$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=2$

$\therefore 3x-4y+10=0$

다른 풀이

점 $A(2, 4)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-4=m(x-2)$ $\therefore mx-y-2m+4=0$ ...... ㉠

이때 원 $x^2+y^2=4$와 직선 ㉠이 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$\frac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|-2m+4|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2-16m+16=4m^2+4$

$16m=12$ $\therefore m=\frac{3}{4}$ ...... ㉡

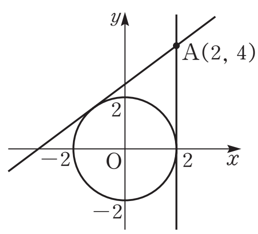
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$3x-4y+10=0$

또, 오른쪽 그림에서 나머지 접선의 방정식은 $x=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$3x-4y+10=0$ 또는 $x=2$



답 $3x-4y+10=0$ 또는 $x=2$

풍쌤 강의 NOTE

일반적으로 원 밖의 한 점(a, b)에서 원에 그은 접선은 2개 존재한다. 그런데 위의 [다른 풀이]의 방법으로 풀면 접선의 방정식이 $x=a$ 또는 $y=b$인 경우를 빠뜨릴 수 있으므로 주의한다.

12-1 유사

원 $x^2+y^2=20$ 밖의 한 점 $\mathrm{A}(-6,\ 2)$에서 이 원에 그은 접선의 방정식을 모두 구하여라.

12-2 유사

원 $(x-3)^2+(y-5)^2=9$ 밖의 한 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$에서 이 원에 그은 접선의 방정식을 모두 구하여라.

12-3 변형

기출

점 $(0,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라고 할 때, $16k^2$의 값을 구하여라.

12-4 변형

점 $(-3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

12-5 변형

두 원 O: $x^2+y^2=9$, O': $(x+3)^2+(y-6)^2=9$에 대하여 직선 l이 원 O에 접하면서 원 O'의 넓이를 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 모두 구하여라.

12-6 실력

점 $(k,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 모든 k의 값의 곱을 구하여라.

필수유형 13 두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 원 $x^2+y^2+x-6y+9=0$, $x^2+y^2-2x+3y+k=0$의 교점을 지나는 직선이 점 $(1, 1)$을 지날 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 원 $x^2+y^2-6x-2y+a=0$, $x^2+y^2-4x+3=0$의 교점과 두 점 $(2, 0)$, $(0, -2)$를 지나는 원의 방정식을 구하여라.(단, a는 상수이다.)

풍쌤 POINT

(1) 두 원의 방정식을 변변 빼고 남은 일차방정식이 두 원의 교점을 지나는 직선(공통인 현)의 방정식이야.

(2) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식에 지나는 두 점의 좌표를 대입해!

풀이

(1) STEP1 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-6y+9-(x^2+y^2-2x+3y+k)=0$

$\therefore 3x-9y+9-k=0$

STEP2 k의 값 구하기

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$3-9+9-k=0 \qquad \therefore k=3$

(2) STEP1 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 세우기

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-2y+a+k(x^2+y^2-4x+3)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

STEP2 주어진 두 점을 이용하여 두 상수 a, k의 값 구하기

이 원이 두 점 $(2, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$4-12+a+k(4-8+3)=0$에서 $a-k=8$ …… ㉡

$4+4+a+k(4+3)=0$에서 $a+7k=-8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $k=-2$

STEP3 원의 방정식 구하기

$a=6$, $k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x-2y+6-2(x^2+y^2-4x+3)=0$

$\therefore x^2+y^2-2x+2y=0$

답 (1) 3 (2) $x^2+y^2-2x+2y=0$

풍쌤 강의 NOTE

두 점에서 만나는 두 원 C: $x^2+y^2+ax+by+c=0$, C': $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 도형의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ (k는 임의의 실수)은

(1) $k=-1$일 때, 두 원 C, C'의 교점을 지나는 직선의 방정식이다. → 두 원의 교점을 지나는 직선은 하나뿐이다.

(2) $k\neq-1$일 때, 두 원 C, C'의 교점을 지나는 원의 방정식이다. → 두 원의 교점을 지나는 원은 무수히 많다.

13-1 유사

두 원 $x^2+y^2+8x+ky-8=0$, $x^2+y^2-kx-2y=0$의 교점을 지나는 직선이 점 $(2,\ -3)$을 지날 때, 상수 k의 값을 구하여라.

13-2 유사

두 원 $x^2+y^2+4x-18y+a=0$, $x^2+y^2-8x-14y+32=0$의 교점과 두 점 $(1,\ 2)$, $(-5,\ 8)$을 지나는 원의 중심의 좌표를 $(b,\ c)$라고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

13-3 변형

두 원 $x^2+y^2+ax+4y-3=0$, $x^2+y^2+2x+ay-1=0$의 교점을 지나는 직선이 직선 $y=-3x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

13-4 변형

두 원 $x^2+y^2+8ax+4ay+16=0$, $x^2+y^2+4ax-2ay+4=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 넓이가 52π일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

13-5 변형

두 원 $x^2+y^2-10x+8y-4=0$, $x^2+y^2-2x-4=0$의 교점을 지나고 중심이 y축 위에 있는 원의 넓이를 구하여라.

13-6 실력

원 $x^2+y^2+ax+2y-7a=0$이 원 $x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 둘레를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

필수유형 14 두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식 – 공통인 현

두 원 O: $x^2+y^2+4x-5=0$, O': $x^2+y^2-2y-3=0$의 공통인 현의 길이를 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 원의 공통인 현의 방정식을 구하여라.

(2) 원 O의 중심과 공통인 현 사이의 거리를 구하여라.

(3) 두 원의 공통인 현의 길이를 구하여라.

풍쌤 POINT

두 원의 공통인 현에 대한 문제는 두 원의 중심을 지나는 직선이 공통인 현을 수직이등분함을 이용해.

풀이

오른쪽 그림과 같이 두 원

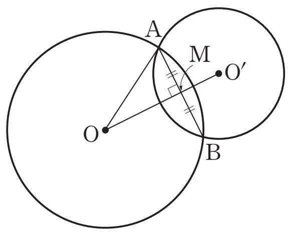
O: $x^2+y^2+4x-5=0$,

O': $x^2+y^2-2y-3=0$

의 중심을 각각 O, O′이라 하고,

두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$❶과

$\overline{AB}$의 교점을 M이라고 하자.



❶ $\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$의 수직이등분선이다.

(1) 두 원 O, O'의 교점을 지나는 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2+4x-5-(x^2+y^2-2y-3)=0$

$\therefore 2x+y-1=0$ …… ㉠

(2) 원 O: $x^2+y^2+4x-5=0$에서 $(x+2)^2+y^2=9$이므로

원 O의 중심은 $\mathrm{O}(-2, 0)$이다.

점 $\mathrm{O}(-2, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{|-4-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(3) 직각삼각형 AOM에서❷ $\overline{\mathrm{OA}}=3$❸이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

따라서 공통인 현 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=4$

❷ 현의 길이를 구할 때는 직각삼각형을 그려 피타고라스 정리를 적용한다.

❸ 원 $(x+2)^2+y^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=3$이다.

답 (1) $2x+y-1=0$ (2) $\sqrt{5}$ (3) 4

풍쌤 강의 NOTE

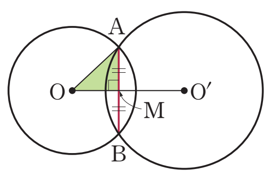
두 원의 공통인 현의 길이를 구하는 방법

❶ 직선 AB의 방정식을 구한다.

❷ 한 원의 중심 O에서 직선 AB까지의 거리 $\overline{\mathrm{OM}}$을 구한다.

❸ 직각삼각형 AOM에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이를 구한다.

❹ $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}$임을 이용한다.



14-1 유사

두 원 O: $x^2+(y-3)^2=13$, O': $(x-4)^2+y^2=8$의 공통인 현의 길이를 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 원의 공통인 현의 방정식을 구하여라.

(2) 원 O의 중심과 공통인 현 사이의 거리를 구하여라.

(3) 두 원의 공통인 현의 길이를 구하여라.

14-2 유사

두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+4x-4y+3=0$의 공통인 현의 길이를 구하여라.

14-3 변형

두 원 O: $x^2+y^2+2x-4y-4=0$,
O': $x^2+y^2-6x-10y+20=0$의 공통인 현을 $\overline{\mathrm{AB}}$라고 할 때, 원 O의 중심 O에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라.

14-4 변형

두 원 $x^2+y^2=10$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 넓이를 구하여라.

14-5 실력

두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이가 최대가 되도록 하는 양수 r의 값을 구하여라.

14-6 실력

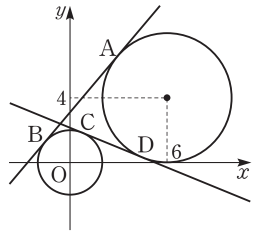
두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-6x-6y+k=0$의 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

발전유형 15 두 원에 동시에 접하는 접선의 길이

두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-6)^2+(y-4)^2=16$에 동시에 접하는 두 접선이 오른쪽 그림과 같고 접점을 각각 A, B, C, D라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB의 길이

(2) 선분 CD의 길이



풍쌤 POINT

두 원에 동시에 접하는 접선의 길이를 구할 때는 보조선을 그어 직각삼각형을 만들어!
이때 직각삼각형은 두 원의 중심을 잇는 선분을 빗변으로 하고 한 변은 구하고자 하는 접선의 길이와 같도록 만들어야 해.
접선을 평행이동한 형태로!

풀이

원 $(x-6)^2+(y-4)^2=16$의 중심을 O′이라고 하면 O′(6, 4)이므로

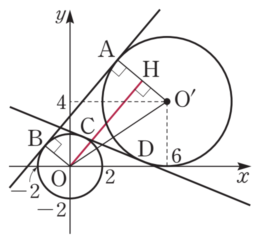
$\overline{OO'}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 $\overline{O'A}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{O'H}=4-2=2$이므로 직각삼각형 OO′H에서

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-2^2}$

$=4\sqrt{3}$



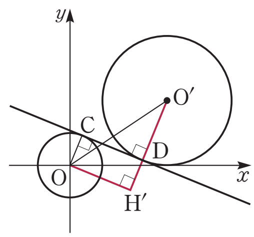
(2) 오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 $\overline{O'D}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H′이라고 하면 $\overline{O'H'}=4+2=6$이므로

직각삼각형 OH′O′에서

$\overline{CD}=\overline{OH'}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H'}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-6^2}$

$=4$

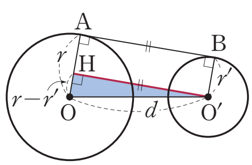


답 (1) $4\sqrt{3}$ (2) 4

풍쌤 강의 NOTE

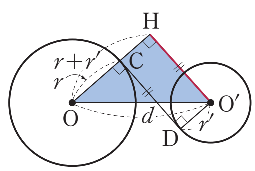
두 원의 반지름의 길이가 각각 r, r' $(r>r')$이고 중심 사이의 거리가 d일 때

(1)



➡ $\overline{AB}=\overline{O'H}=\sqrt{d^2-(r-r')^2}$

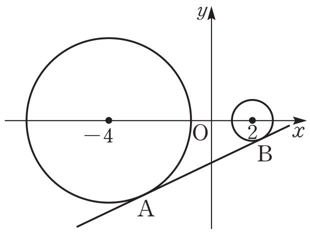
(2)



➡ $\overline{CD}=\overline{O'H}=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$

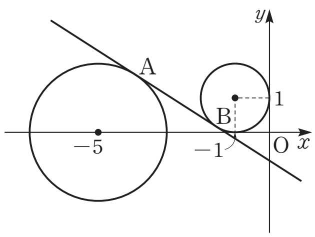
15-1 유사

다음 그림과 같이 두 원 $(x-2)^2+y^2=1$, $(x+4)^2+y^2=9$에 동시에 접하는 접선을 그을 때, 두 접점 A, B 사이의 거리를 구하여라.



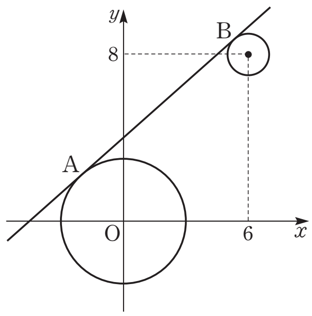
15-2 유사

다음 그림과 같이 두 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, $(x+5)^2+y^2=4$에 동시에 접하는 접선을 그을 때, 두 접점 A, B 사이의 거리를 구하여라.



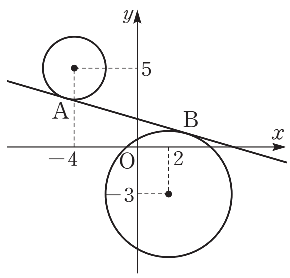
15-3 변형

다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x-6)^2+(y-8)^2=1$에 동시에 접하는 접선을 긋고 접점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이가 $4\sqrt{6}$이다. 이때 양수 r의 값을 구하여라.



15-4 변형

다음 그림과 같이 두 원 $(x+4)^2+(y-5)^2=r^2$, $(x-2)^2+(y+3)^2=16$에 동시에 접하는 접선을 긋고 접점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이가 8이다. 이때 양수 r의 값을 구하여라.



실전 연습 문제

01

원 $x^2+y^2+4x-10y+19=0$과 중심이 같고 점 $(-1, 4)$를 지나는 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$
④ 4π ⑤ $2\sqrt{10}\pi$

02

중심이 직선 $y=-2x+2$ 위에 있고 지름의 양 끝 점이 $(1, 5)$, $(a, 3)$인 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-4)^2=4$
② $(x+1)^2+(y-3)^2=4$
③ $(x+1)^2+(y-4)^2=5$
④ $(x+2)^2+(y-5)^2=5$
⑤ $(x+2)^2+(y-5)^2=8$

03

방정식 $x^2+y^2+6x-8y+k+9=0$이 제2사분면 위에 있는 원을 나타낼 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $5<k<10$ ② $6<k<15$ ③ $7<k<15$
④ $7<k<16$ ⑤ $8<k<16$

04 서술형

중심이 직선 $2x+y+1=0$ 위에 있고 x축에 접하면서 점 $(-2, 1)$을 지나는 원이 두 개가 있다. 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하여라.

05

두 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=20$을 만족시킬 때, $(a+5)^2+(b-12)^2$의 최댓값은?

① 121 ② 144 ③ 169
④ 196 ⑤ 225

06

중심의 좌표가 $(3, 0)$이고 y축에 접하는 원과 직선 $y=mx+4$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

07

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 직선 $x+y+2=0$, $x+y-6=0$에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

08

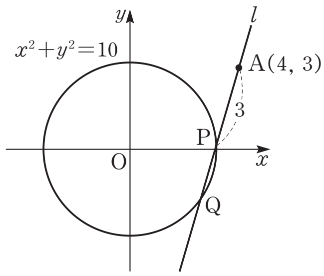
두 점 $\mathrm{A}(2, 7)$, $\mathrm{B}(8, 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 직선 $y=x+k$와 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

09

기출

다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(4, 3)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 $x^2+y^2=10$과 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{\mathrm{AP}}=3$일 때, 직선 l의 기울기는?



① $\frac{23}{7}$　② $\frac{24}{7}$　③ $\frac{25}{7}$　④ $\frac{26}{7}$　⑤ $\frac{27}{7}$

10

점 $\mathrm{P}(5, a)$에서 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$에 그은 접선의 접점을 T라고 할 때, $\overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{21}$이다. 이때 양수 a의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

11 서술형

원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P와 직선 $3x+4y+20=0$ 사이의 거리가 정수인 점 P의 개수를 구하여라.

12

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선과 원 $x^2+y^2=20$에 접하면서 기울기가 2이고 y절편이 양수인 직선의 교점이 (a, b)일 때, a^2+b^2의 값은?

① 20　② 25　③ 40　④ 52　⑤ 61

13

원 $x^2+y^2=13$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(2, 3)$, $\mathrm{Q}(3, -2)$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2의 교점을 R라고 할 때, 사각형 OPRQ의 넓이를 구하여라.

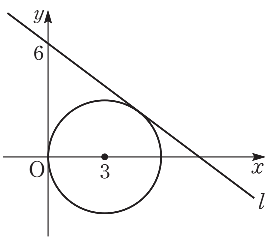
(단, O는 원점이다.)

14

두 원 O: $x^2+y^2=1$, O': $(x-3)^2+(y+1)^2=1$에 대하여 직선 l이 원 O에 접하면서 원 O'의 넓이를 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 모두 구하여라.

15 서술형

오른쪽 그림과 같이 점 $(0, 6)$에서 원 $(x-3)^2+y^2=9$에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선을 l이라고 하자.



직선 l과 x축, y축에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 원은 2개이다. 이때 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하여라.

16

원 $x^2+y^2-4x-4y-1=0$이 원 $x^2+y^2-8x-4ay+a^2+15=0$의 둘레를 이등분할 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ 1
④ $\frac{8}{7}$ ⑤ $\frac{9}{7}$

17

두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+ax+2=0$의 교점과 두 점 $(0, -1)$, $(2, 1)$을 지나는 원의 중심의 좌표를 (b, c)라고 할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -5 ② -3 ③ -1
④ 3 ⑤ 5

18

두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2-4x-3y+k=0$의 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$가 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

상위권 도약 문제

정답과 풀이 312쪽

01

세 점 $A(-6,\ 0)$, $B(6,\ 0)$, $C(0,\ 6\sqrt{3})$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내접원의 방정식을 구하여라.

02

원 $x^2+y^2-12x+20=0$ 밖의 점 P에서 이 원에 그은 접선의 접점을 T라고 하자. 점 $A(2,\ 5)$에 대하여 $\overline{PT}=\overline{PA}$를 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

03

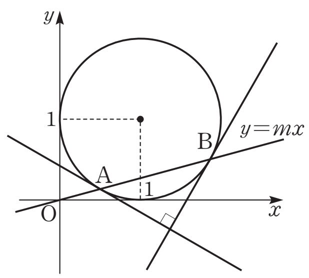
기출

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 중에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원은 2개이다. 두 원의 반지름의 길이를 각각 a, b라고 할 때, $100ab$의 값을 구하여라.

04

기출

좌표평면에서 중심이 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원과 직선 $y=mx$ $(m>0)$가 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합은?



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

05

좌표평면 위의 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 7)$과 직선 $y=-x+8$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\angle APB=\angle AQB=90^\circ$일 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

06

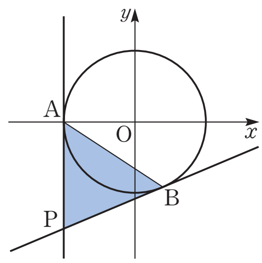
기출

좌표평면 위에 원 C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$와 두 점 $A(4, 3)$, $B(1, 7)$이 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심과 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

07

오른쪽 그림과 같이 점 $P(-4, -6)$에서 원 $x^2+y^2=16$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $A(-4, 0)$, B라고 할 때, 삼각형 APB의 넓이를 구하여라.



08

원 $(x-3)^2+y^2=9$를 오른쪽 그림과 같이 현 AB를 접는 선으로 하여 접었더니 점 $P(4, 0)$에서 x축과 접하였다. 이때 선분 AB의 길이를 구하여라.