



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-12

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 등비수열의 수렴과 발산등비수열 $\{r^n\}$ 에서(1) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ (발산)(2) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ (수렴)(3) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ (수렴)(4) $r \leq -1$ 일 때, 수열 $\{r^n\}$ 은 진동한다. (발산)

■ 다음 수열의 수렴과 발산을 조사하여라.

1. $5, 5, 5, \dots$

2. $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \dots$

3. $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \dots$

4. $2, \sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

5. $3, \sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \dots$

6. $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$

7. $\{(1.1)^n\}$

8. $\{2^n\}$

9. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

10. $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

11. $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$

12. $\left\{\left(-\frac{5}{3}\right)^n\right\}$

13. $\left\{\left(-\frac{9}{8}\right)^n\right\}$

14. $\left\{\frac{3^n}{4^n}\right\}$

15. $\{(-0.9)^n\}$

16. $\{(-1.2)^n\}$

▣ 다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

17. $\left\{4 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

18. $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{1-n}\right\}$

19. $\left\{\frac{4^n}{3^{n+1}}\right\}$

20. $\left\{\frac{2^n+1}{3^n-1}\right\}$

21. $\left\{\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}\right\}$

22. $\left\{\frac{3^n-2^n}{4^n+3^n}\right\}$

23. $\left\{\frac{4^n-3^n}{4^{n+1}}\right\}$

24. $\left\{\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}}\right\}$

25. $\left\{\frac{2^n-5 \cdot 3^n}{2^n+3^n}\right\}$

26. $\left\{\frac{3^n-6 \cdot 4^n}{3^n+4^n}\right\}$

27. $\left\{\frac{3^n+5^n}{2^{n+1}}\right\}$

28. $\left\{\frac{5^{n+1}+1}{5^n+3^n}\right\}$

29. $\left\{\frac{6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}\right\}$

30. $\left\{\frac{2 \cdot 3^{n+1}+5}{3^n}\right\}$

31. $\left\{\frac{4^{n+1}+2^n}{4^n-3^{n+1}}\right\}$

32. $\left\{\frac{3 \cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}\right\}$

$$33. \left\{ \frac{\sqrt{5^n} + 1}{2^n} \right\}$$

$$34. \{5^n - 3^n - 2^n\}$$

$$35. \{3^{-n} + 4^{-n}\}$$

$$36. \left\{ (3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

$$37. \left\{ (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \right\} \text{ (단, } 0 < b < a \text{)}$$

02 등비수열의 수렴 조건

(1) 수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하기 위한 조건
 $\Rightarrow -1 < r \leq 1$

(2) 수열 $\{ar^{n-1}\}$ 이 수렴하기 위한 조건
 $\Rightarrow a=0$ 또는 $-1 < r \leq 1$

■ 다음 등비수열이 수렴하기 위한 x 의 범위를 구하여라.

$$38. 1, 3x, 9x^2, 27x^3, \dots$$

$$39. 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{8}, \frac{x^4}{16}, \dots$$

$$40. 1, -\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}, -\frac{x^3}{8}, \dots$$

$$41. \frac{2x}{3}, -\frac{4x^2}{9}, \frac{8x^3}{27}, -\frac{16x^4}{81}, \dots$$

$$42. \left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^n \right\}$$

$$43. \left\{ \left(\frac{x-2}{3} \right)^n \right\}$$

$$44. \{(2x-1)^n\}$$

$$45. \{(x-1)^{2n-1}\}$$

$$46. \{x(x-1)^{n-1}\}$$

$$47. \{x(x-2)^{n-1}\}$$

$$48. \{(x+5)(x-3)^{n-1}\}$$

03 r^n 을 포함한 식의 극한값

r^n 을 포함한 식의 극한값은 다음의 경우로 나누어 조사한다.

- ① $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$
- ② $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$
- ③ $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$
- ④ $r = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ 은 진동(발산)

■ 다음은 $r > 0$ 일 때, $a_n = \frac{r^n}{1+r^n}$ 의 극한값을 r 의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

49. $0 < r < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \square$$

50. $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \square$$

51. $r > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \square$$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \square$$

■ 다음은 $r > 0$ 일 때, $a_n = \frac{1-r^n}{1+r^n}$ 의 극한값을 r 의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

52. $0 < r < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \square$$

53. $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \square$$

54. $r > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \square$$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \square$$

■ 다음은 $r > 0$ 일 때, $a_n = \frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}$ 의 극한값을 r 의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

55. $0 < r < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r^n+1} = \square$$

56. $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r^n+1} = \square$$

57. $r > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \square$$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n} = \square$$

■ 다음은 $a_n = \frac{r^n + r^2}{r^n + 2}$ 의 극한값을 r 의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

58. $|r| < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r^2}{r^n + 2} = \square$$

59. $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r^2}{r^n + 2} = \square$$

60. $r = -1$ 일 때

$$n \text{이 짝수이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r^2}{r^n + 2} = \square$$

$$n \text{이 홀수이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r^2}{r^n + 2} = \square$$

따라서 $r = -1$ 일 때, a_n 은 □한다.

61. $|r| > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \square$$

주어진 식의 분모, 분자를 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r^2}{r^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^n} = \square$$

■ 다음은 $a_n = \frac{r^n - r^{2n}}{1 + r^{2n}}$ 의 극한값을 r 의 범위에 따라 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

62. $|r| < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \square$$

63. $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \square \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \square$$

64. $r = -1$ 일 때

$$n \text{이 짝수이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \square$$

$$n \text{이 홀수이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \square$$

따라서 $r = -1$ 일 때, a_n 은 □한다.

65. $|r| > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \square$$

주어진 식의 분모, 분자를 r^{2n} 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^{2n}} + 1} = \square$$

04 수열의 극한의 활용

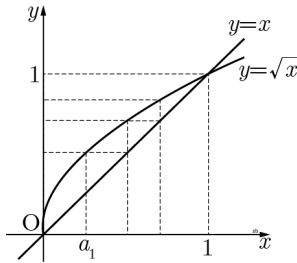
(1) 그래프를 이용한 극한

$\Rightarrow a_{n+1} = f(a_n)$ 꼴의 극한은 $y=x$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용한다.

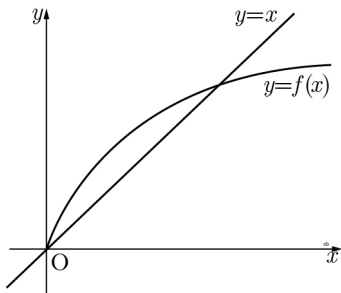
(2) 수열의 극한과 도형

\Rightarrow 도형의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 수열의 일반항을 찾는다.

66. 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 으로 정의하자. 이때 다음 그래프를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하여라.



67. 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 으로 정의하자. 이때, 다음 그래프를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

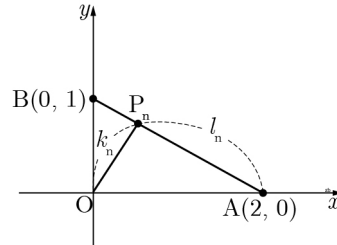


68. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 $P(n, 2^n)$ 에 서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n 이라 하자. 원점 O 와 점 $A(0, 1)$ 에 대하여 사각형 AOQ_nP_n 의 넓이를 S_n , 삼각형 AP_nR_n 의 넓이를 T_n

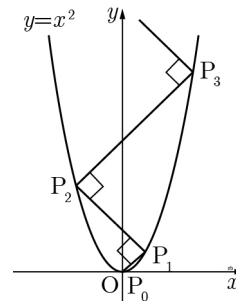
이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

69. 좌표평면 위의 두 점 $A(2, 0), B(0, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1:n$ 으로 내분하는 점을 P_n 이라 하자.

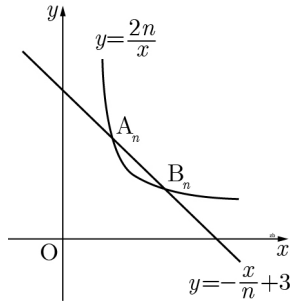
$\overline{OP_n} = k_n, \overline{AP_n} = l_n$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot l_n}{k_n}$ 의 값을 구하여라.



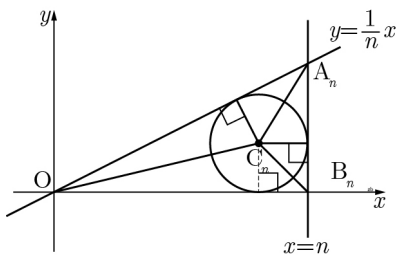
70. 자연수 n 에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n 이 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다. $l_n = \overline{P_{n-1}P_n}$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{n}$ 의 값을 구하여라. (단, $P_0(0,0), P_1(1,1)$)



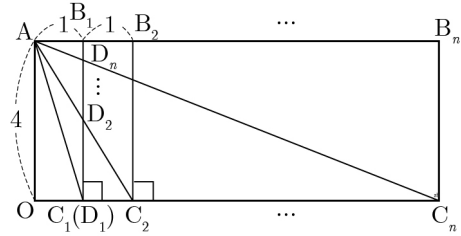
71. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \frac{2n}{x}$ 과 직선 $y = -\frac{x}{n} + 3$ 의 두 교점을 A_n, B_n 이라고 한다. 선분 A_nB_n 의 길이를 l_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n+1} - l_n)$ 의 값을 구하여라.



72. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 두 직선 $y = \frac{1}{n}x$ 와 $x = n$ 이 만나는 점을 A_n , 직선 $x = n$ 과 x 축이 만나는 점을 B_n 이라 하자. 삼각형 A_nOB_n 에 내접하는 원의 중심을 C_n 이라 하고, 삼각형 A_nOC_n 의 넓이를 S_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값을 구하여라.



73. 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 1인 직사각형 OAB_1C_1 에서 가로의 길이를 1만큼 늘여서 직사각형 OAB_kC_k (단, $k = 1, 2, \dots, n$)를 만들었다. 직사각형 OAB_nC_n 에서 대각선 AC_n 과 선분 B_1C_1 의 교점을 D_n 이라고 하자.



- 이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AC_n - OC_n}{B_1D_n}$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 자연수)

74. 전자계산기의 근호 ($\sqrt{\quad}$)키를 누르면 계산기는 표시창에 나타난 수의 양의 제곱근을 보여준다. 지금 표시창에 어떤 양수 a 가 나타나 있을 때, 근호키를 계속하여 누르면 표시창에 나타나는 값은 어떤 값에 가까워지는지 구하여라.

75. 한 자동차 업체에서는 매일 생산되는 200대의 수출용 자동차를 배에 선적하기 전에 임시주차장으로 주차시켜 놓는다고 한다. 그리고 전날까지 임시주차장에 있던 수출용 자동차 중에서 $\frac{2}{5}$ 가 선적이 된다고 한다. 이 자동차업체가 이와 같은 방법으로 자동차를 계속해서 생산하고 선적하여 수출해나간다고 할 때, 임시주차장의 자동차 수용은 최소한 몇 대 이상이 되어야 하는지 구하여라.



정답 및 해설

1) 수렴

⇒ 공비는 1이고 $-1 < 1 \leq 1$ 이므로 수렴한다.

2) 발산

⇒ 공비는 $\frac{3}{2}$ 이고 $\frac{3}{2} > 1$ 이므로 발산한다.

3) 진동(발산)

⇒ 공비 r 가 $r\left(-\frac{3}{2}\right) \leq -1$ 이므로 진동(발산)한다.

4) 수렴

⇒ 공비 r 가 $-1 < r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

5) 수렴

⇒ 공비는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고 $-1 < \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 1$ 이므로 수렴한다.

6) 발산

⇒ 주어진 등비수열의 공비는 $\frac{3}{2}$ 이고, $\frac{3}{2} > 1$ 이므로 발산한다.

7) 발산

⇒ 공비 r 가 $r(=1.1) > 1$ 이므로 양의 무한대로 발산한다.

8) 발산

⇒ 공비는 2이고 $2 > 1$ 이므로 발산한다.

9) 수렴

⇒ 공비는 $-\frac{1}{2}$ 이고 $-1 < -\frac{1}{2} \leq 1$ 이므로 수렴한다.

10) 수렴

⇒ 공비 r 가 $-1 < r\left(-\frac{1}{3}\right) < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

11) 진동(발산)

⇒ 주어진 등비수열의 공비는 $-\frac{4}{3}$ 이고, $-\frac{4}{3} \leq -1$ 이므로 진동(발산)한다.

12) 진동(발산)

⇒ 공비는 $-\frac{5}{3}$ 이고 $-\frac{5}{3} \leq -1$ 이므로 진동(발산)한다.

13) 진동(발산)

⇒ 공비 r 가 $r\left(-\frac{9}{8}\right) \leq -1$ 이므로 진동(발산)한다.

14) 수렴

⇒ $\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 에서 주어진 등비수열의 공비는 $\frac{3}{4}$ 이고, $-1 < \frac{3}{4} < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

15) 수렴

⇒ 공비 r 가 $-1 < r(=-0.9) < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

16) 진동(발산)

⇒ 공비는 -1.2 이고 $-1.2 \leq -1$ 이므로 진동(발산)한다.

17) 수렴, 4

⇒ 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ 의 공비는 $-\frac{1}{3}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{4 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 4 + 0 = 4$ (수렴)

18) 발산

⇒ $\left(\frac{3}{5}\right)^{1-n} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{5}{3}$ 이고, $\frac{5}{3} > 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{1-n} = \infty$ (발산)

19) 발산

⇒ $\frac{4^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{4}{3}$ 이고, $\frac{4}{3} > 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n+1}} = \infty$ (발산)

20) 수렴, 0

⇒ 분모, 분자를 3^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 0$$

21) 수렴, 1

⇒ 분자, 분모를 3^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

22) 수렴, 0

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{4}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

23) 수렴, $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{4} = \frac{1}{4}$$

24) 수렴, $\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{5} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$$

25) 수렴, -5

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5 \times 3^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = -5$$

26) 수렴, -6

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 6 \cdot 4^n}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = \frac{0-6}{0+1} = -6$$

27) 발산

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n}{2} = \frac{\infty + \infty}{2} = \infty$$

28) 수렴, 5

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 1}{5^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} = 5$$

29) 수렴, 6

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 5^n}{6^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n} = 6$$

30) 수렴, 6

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1} + 5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} = 6$$

31) 수렴, 4

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 2^n}{4^n - 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \left(\frac{2}{4}\right)^n}{1 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 4$$

32) 수렴, 3

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^n - 3^n}{4^n + 3^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 3$$

33) 발산

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5^n} + 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} = \infty$$

34) 발산

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} = \infty \text{ (발산)}$$

35) 수렴, 0

$$\Rightarrow 3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ 에서 공비는 } \frac{1}{3} \text{ 이고, } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{로 } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} = 0$$

$$4^{-n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ 에서 공비는 } \frac{1}{4} \text{ 이고, } -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{-n} + 4^{-n}) = 0 + 0 = 0 \text{ (수렴)}$$

36) 수렴, 3

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3^n \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

37) 수렴, a

$$\Rightarrow b < a \text{ 이므로 } a^n + b^n \text{ 에서 } a^n \text{ 으로 묶는다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^n \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= a \left(\because 0 < \frac{b}{a} < 1 \right) \end{aligned}$$

$$38) -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{공비가 } 3x \text{ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면}$$

$$-1 < 3x \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

$$39) -2 < x \leq 2$$

$$\Rightarrow \text{공비가 } \frac{x}{2} \text{ 인 등비수열이므로 주어진 수열이 수렴}$$

$$\text{하려면 } -1 < \frac{x}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 < x \leq 2$$

$$40) -2 \leq x < 2$$

⇒ 공비가 $-\frac{x}{2}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq x < 2$$

$$41) -\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2}$$

⇒ (i) 첫째항: $\frac{2x}{3}=0 \quad \therefore x=0$

(ii) 공비: $-1 < -\frac{2x}{3} \leq 1 \quad \therefore -\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2}$

$$42) -2 < x \leq 2$$

⇒ 첫째항이 $\frac{x}{2}$, 공비가 $\frac{x}{2}$ 이므로 주어진

등비수열이 수렴하려면 $-1 < \frac{x}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 < x \leq 2$

$$43) -1 < x \leq 5$$

⇒ 공비가 $\frac{x-2}{3}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x-2}{3} \leq 1, \quad -3 < x-2 \leq 3$$

$$\therefore -1 < x \leq 5$$

$$44) 0 < x \leq 1$$

⇒ 공비가 $2x-1$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < 2x-1 \leq 1, \quad 0 < 2x \leq 2 \quad \therefore 0 < x \leq 1$$

$$45) 0 \leq x \leq 2$$

⇒ 수열 $\{(x-1)^{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $x-1$ 이고 공비가 $(x-1)^2$ 인 등비수열이므로 수렴하는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 첫째항: $x-1=0 \quad \therefore x=1$

(ii) 공비: $-1 < (x-1)^2 \leq 1$

$$(x-1)^2 \leq 1 \text{에서 } x^2-2x \leq 0, \quad x(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에서 $0 \leq x \leq 2$

$$46) 0 \leq x \leq 2$$

⇒ 첫째항이 x 이고 공비가 $x-1$ 이므로 주어진

등비수열이 수렴하려면

$$x=0 \text{ 또는 } -1 < x-1 \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2$$

$$47) x=0 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3$$

⇒ 수열 $\{x(x-2)^{n-1}\}$ 은 첫째항이 x 이고 공비가 $x-2$ 인 등비수열이므로 수렴하는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 첫째항: $x=0$

(ii) 공비: $-1 < x-2 \leq 1 \quad \therefore 1 < x \leq 3$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $1 < x \leq 3$

$$48) x=-5, \quad 2 < x \leq 4$$

⇒ 첫째항이 $x+5$ 이고 공비가 $x-3$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$x+5=0 \text{ 또는 } -1 < x-3 \leq 1$$

$$\therefore x=-5, \quad 2 < x \leq 4$$

$$49) 0, 0$$

$$50) 1, \frac{1}{2}$$

$$51) 0, 1$$

$$52) 0, 1$$

$$53) 1, 0$$

$$54) 0, -1$$

$$55) 0, -1$$

$$56) 1, 0$$

$$57) 0, r$$

$$58) 0, \frac{1}{2}r^2$$

$$59) 1, \frac{2}{3}$$

$$60) \frac{2}{3}, 0, \text{ 발산}$$

$$61) 0, 1$$

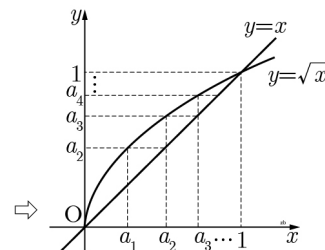
$$62) 0, 0$$

$$63) 1, 0$$

$$64) 0, -1, \text{ 발산}$$

$$65) 0, -1$$

$$66) 1$$



$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n} \text{ 이므로}$$

$$a_2 = \sqrt{a_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{a_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$a_4 = \sqrt{a_3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$$

⋮

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

위의 그림에서 a_n 은 $y=x$ 와 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표인 1에 가까워진다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

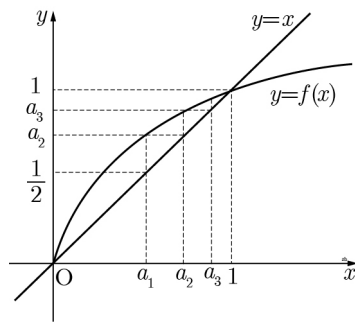
[다른 풀이]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

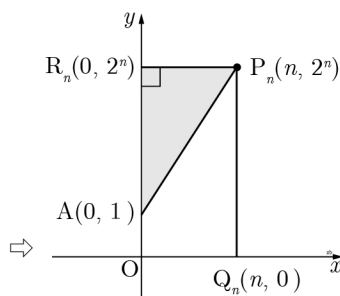
67) 1

⇒ 주어진 수열 $\{a_n\}$ 을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 a_1, a_2, a_3, \dots 은 $y=x$ 와 $y=\sqrt{x}$ 의 교점 $(1, 1)$ 와 x 좌표에 가까워 간다. 그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 이다.

68) 1



$$\text{그림에서 } S_n = \frac{1}{2} \cdot (1+2^n) \cdot n = \frac{(2^n+1)n}{2},$$

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot (2^n-1) \cdot n = \frac{(2^n-1)n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2^n-1)n}{2}}{\frac{(2^n+1)n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n+1} = 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$$

69) $\sqrt{5}$

⇒ \overline{AB} 를 1:n으로 내분하는 점 P_n 의 좌표는

$$P_n\left(\frac{2n}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$k_n = \overline{OP_n} = \sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{4n^2+1}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+1}$$

$$l_n = \overline{AP_n} = \sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot l_n}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\sqrt{5}n}{n+1}}{\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{5}n}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{5}$$

70) $2\sqrt{2}$

⇒ 직선 P_0P_1 의 기울기가 1이므로 직선 P_1P_2 의 기울기는 -1 이다.

점 $P_1(1, 1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선 P_1P_2 의 방정식은 $y=-x+2$

이때, 직선 $y=-x+2$ 와 함수 $y=x^2$ 의 그래프의 교점이 점 P_2 이므로 점 P_2 의 x 좌표는

$$-x+2=x^2 \text{에서 } (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $P_1(1, 1)$ 이므로 $P_2(-2, 4)$

마찬가지 방법으로 점 P_3, P_4 의 좌표를 구해 보면

$$P_3(3, 9), P_4(-4, 16)$$

$$\overline{P_0P_1} = \sqrt{2}, \overline{P_1P_2} = 3\sqrt{2}, \overline{P_2P_3} = 5\sqrt{2},$$

$$\overline{P_3P_4} = 7\sqrt{2}, \dots \text{이므로}$$

$$l_n = \overline{P_{n-1}P_n} = (2n-1)\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}n - \sqrt{2}}{n} = 2\sqrt{2}$$

71) 1

⇒ $y=-\frac{x}{n}+3$ 을 $y=\frac{2n}{x}$ 에 대입하면

$$\frac{2n}{x} = -\frac{x}{n} + 3, 2n^2 = -x^2 + 3nx$$

$$x^2 - 3nx + 2n^2 = 0, (x-n)(x-2n) = 0$$

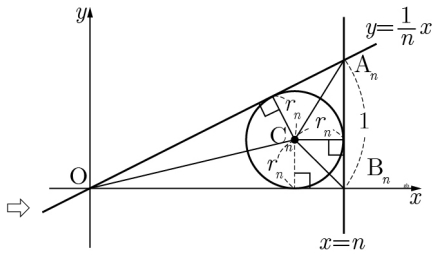
$$\therefore x=n \text{ 또는 } x=2n$$

따라서 $A_n(n, 2), B_n(2n, 1)$ 이므로

$$l_n = \sqrt{(2n-n)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{n^2+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n+1} - l_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{(\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

72) $\frac{1}{4}$



두 점의 좌표는 $A_n(n, 1), B_n(n, 0)$ 이고,

$\triangle A_nOB_n$ 의 내접원의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면
 $\triangle A_nOB_n = \triangle A_nOC_n + \triangle C_nOB_n + \triangle A_nC_nB_n$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n^2+1} \cdot r_n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot r_n + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r_n$$

$$\therefore r_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n + 1}$$

$$\therefore S_n = \triangle A_nOC_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n^2+1} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n + 1}$$

$$= \frac{n\sqrt{n^2+1}}{2(\sqrt{n^2+1} + n + 1)}$$

$$\therefore \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n\sqrt{n^2+1}}{2(\sqrt{n^2+1} + n + 1)}}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2(\sqrt{n^2+1} + n + 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{4}$$

73) 2

\Rightarrow 주어진 조건에서 가로의 길이가 n 이므로

$$\overline{OC_n} = n$$

삼각형 AOC_n 은 밑변의 길이가 n , 높이가 4인 직각 삼각형이다.

$$\therefore \overline{AC_n} = \sqrt{n^2+4^2}$$

삼각형 AB_1D_n 과 삼각형 AB_nC_n 은 서로 닮음이다.

$$\overline{AB_1} : \overline{B_1D_n} = \overline{AB_n} : \overline{B_nC_n} \text{에서 } 1 : \overline{B_1D_n} = n : 4$$

$$\therefore \overline{B_1D_n} = \frac{4}{n}$$

따라서 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{AC_n} - \overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+16} - n}{\frac{4}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+16} - n)(\sqrt{n^2+16} + n)}{\frac{4}{n}(\sqrt{n^2+16} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{4\left(\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}} + 1\right)} \\ &= \frac{16}{4 \times 2} = 2 \end{aligned}$$

74) 1

$\Rightarrow a_1 = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ 이고, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ 이므로

$$a_2 = \sqrt{a_1} = a^{\frac{1}{4}}, a_3 = \sqrt{a_2} = a^{\frac{1}{8}}, a_4 = \sqrt{a_3} = a^{\frac{1}{16}}, \dots,$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}} = a^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$$

75) 500대 이상

$\Rightarrow n$ 일째 임시주차장에 놓여 있는 자동차의

$$\text{수를 } a_n \text{이라고 하면 } a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + 200$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}a_n + 200\right) \text{에서}$$

$$\alpha = \frac{3}{5}\alpha + 200, 2\alpha = 1000$$

$$\therefore \alpha = 500$$

즉, 임시주차장의 자동차 수용은 최소한 500대 이상이 되어야 한다.