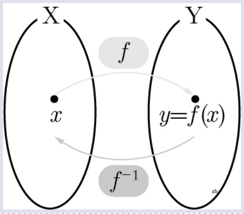
01 역함수

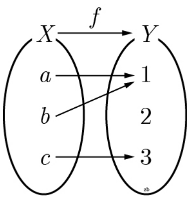
함수 f가 일대일 대응일 때,

$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$



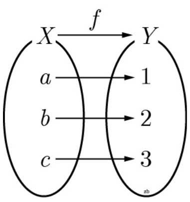
◪ **다음 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중 역함수가 존재하는 것에는 ○표, 존재하지 않는 것에는 ×표를 하여라.**

1.



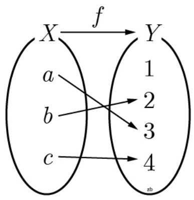
( )

2.



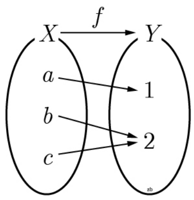
( )

3.



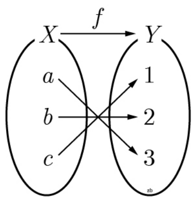
( )

4.



( )

5.



( )

◪ **함수 $f(x)=3x+1$에 대하여 다음 등식을 만족하는 k의 값을 구하여라.**

6. $f^{-1}(-1)=k$

7. $f^{-1}(6)=k$

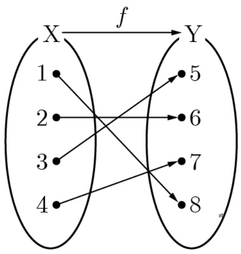
I410-ECN-0199-2017-001-000057208

8. $f^{-1}(0)=k$

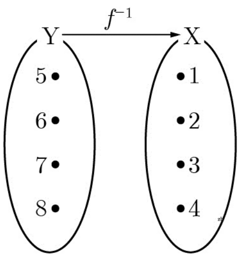
9. $f^{-1}(3-2k)=0$

10. $f^{-1}(k)=6$

◪ 다음과 같은 함수 $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$에 대하여 다음을 구하여라.



11. 역함수 f^{-1}를 그림으로 나타내어라.



12. $f^{-1}(5)$의 값

13. $f^{-1}(7)$의 값

14. $f^{-1}(8)$의 값

15. $f^{-1}(6)$의 값

◪ 다음 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, 다음을 구하여라.

16. $f(x)=2x-1$일 때, $g(1)+g(5)$의 값

17. $f(x)=-3x+1$일 때, $g(-2)+g(7)$의 값

18. $f(x)=-\frac{1}{2}x+5$일 때, $g(4)+g(6)$의 값

◪ 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 다음을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

19. $f^{-1}(1)=k$

20. $f^{-1}(3)=k$

21. $f^{-1}(k)=1$

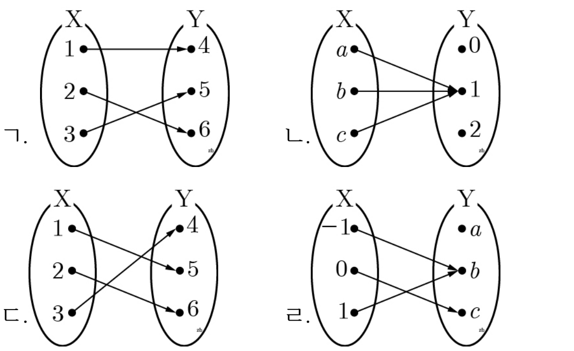
22. $f^{-1}(k)=3$

23. $f^{-1}(3-k)=2$

24. $f^{-1}(5)=k-1$

25. 다음 <보기> 중 역함수가 존재하는 함수인 것만을 있는 대로 고르시오.

<보기>



26. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<4) \\ 2x-1 & (x \geq 4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재할 때, $(f \circ f)(2)$의 값을 구하여라.

27. 두 집합

$\mathrm{X}=\{x \mid a \leq x \leq 4\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid 1 \leq y \leq b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=2x-1$의 역함수가 존재할 때, $b-a$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

28. 집합 $\mathrm{X}=\{x \mid x \geq k\}$에서 집합 X로의 함수 $f(x)=x^2-7x-9$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

◪ 다음 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위한 상수 a의 값 또는 범위를 구하여라.

29. $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x \geq 3) \\ x+a & (x<3) \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} (1+a)x & (x \geq 0) \\ (3-a)x & (x<0) \end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x \geq 0) \\ (1-a)x+1 & (x<0) \end{cases}$

◪ 집합 $\mathrm{X}=\{x|x \geq k\}$에서 집합 X로의 다음 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

32. $f(x)=x^2+4x-4$

33. $f(x)=x^2-2x-40$

◪ 실수 전체의 집합에서 정의된 다음 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 상수 a의 값 또는 a의 값의 범위를 구하여라.

34. $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \ge 2) \\ 3x+a & (x<2) \end{cases}$

35. $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & (x \ge -1) \\ x+a & (x<-1) \end{cases}$

36. $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \ge 0) \\ (a^2-1)x+1 & (x<0) \end{cases}$

37. $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x \ge 0) \\ (1-2a)x-1 & (x<0) \end{cases}$

◪ 집합 $\mathrm{X}=\{x \mid x \ge k\}$에서 X로의 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

38. $f(x)=2x^2-4x$

39. $f(x)=x^2-3x-5$

40. $f(x)=2x^2+4x-2$

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

41. $\mathrm{X}=\{x \mid -1 \le x \le 1\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid a \le y \le b\}$, $f(x)=2x+1$

42. $\mathrm{X}=\{x \mid 2 \le x \le 5\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid a \le y \le b\}$, $f(x)=3x-4$

43. $\mathrm{X}=\{x \mid a \le x \le b\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid 1 \le y \le 9\}$, $f(x)=-2x-1$

44. $\mathrm{X}=\{x \mid -1 \le x \le 3\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid a \le y \le b\}$, $f(x)=-x+3$

◪ 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b, k의 값을 구하여라.

45. 두 집합 $\mathrm{X}=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid a \le y \le b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+3$

46. 집합 $\mathrm{X}=\{x \mid x \le k\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=-x^2+2x$ (단, $k>0$)

2 역함수 구하기

① 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일 대응인지 확인한다.

② $\boxed{y=f(x)}$ ⇨ $\boxed{x=f^{-1}(y)}$ ⇨ $\boxed{y=f^{-1}(x)}$

x에 대하여 푼다. x, y를 바꾼다.

참고 • x와 y를 먼저 바꾼 후 y를 x에 대한 식으로 나타내어도 역함수를 구할 수 있다.

◪ **다음 함수의 역함수를 구하여라.**

47. $y=2x-1$

48. $y=-2x-6$

49. $y=3x+1$

50. $y=\frac{1}{2}x-3$

51. $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$

52. $5x-y-10=0$

53. $y=-2x+1$

54. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$

55. $y=-3x+5$

56. $2x+4y-1=0$

57. $y=-\frac{1}{2}x+2$

58. $3x-y=0$

59. $2x-6y+3=0$

60. $x-5y+11=0$

◪ **다음 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 서로 같을 때, 상수 k의 값을 구하여라.**

61. $f(x)=kx+2$

62. $f(x)=2kx+1$

63. $f(x)=\frac{1}{2}kx+3$

◪ 함수 $f(x)=ax+b$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

64. $f(3)=-2,\ g(4)=1$

65. $f(2)=-2,\ g(-8)=5$

66. $f(5)=-\frac{1}{2},\ g(-2)=2$

67. $f(1)=3,\ g(5)=2$

◪ 함수 $f(x)=ax+b\ (a\neq0)$의 역함수가 $g(x)$일 때, 다음을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

68. $f(1)=2,\ g(4)=3$

69. $g(4)=2,\ g\left(\frac{9}{2}\right)=3$

70. $g(2)=1,\ g(8)=-1$

◪ 두 함수 $f(x)=-x+5,\ g(x)=ax+b$에 대하여 $(g\circ f^{-1})(x)=x-3$일 때, 다음을 구하여라. (단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g의 역함수이다.)

71. 상수 a, b의 값

72. $g^{-1}(3)$의 값

73. $(g^{-1}\circ f)(4)$의 값

74. $(f^{-1}\circ g)(-6)$의 값

◪ 다음 두 함수에 대하여 주어진 합성함수의 함숫값을 구하여라. (단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g의 역함수이다.)

75. $f(x)=3x-2,\ g(x)=-x+3$일 때, $(f^{-1}\circ g)(2)$의 값

76. $f(x)=3x-2,\ g(x)=-x+3$일 때, $(f\circ g^{-1})(2)$의 값

77. $f(x)=2x-3,\ g(x)=\frac{1}{2}x+1$일 때, $(f^{-1}\circ g)(4)$의 값

78. $f(x)=2x-3,\ g(x)=\frac{1}{2}x+1$일 때, $(f\circ g^{-1})(4)$의 값

◪ 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)=ax-4$가 다음을 만족할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

79. $f^{-1}(2)=3$

80. $f^{-1}(-5)=1$

81. $f^{-1}(-2)=4$

◪ 두 함수 $f(x)=ax-1,\ g(x)=-x+b$에 대하여 $(f\circ g)(x)=-3x+5$일 때, 다음을 구하여라. (단, $f^{-1},\ g^{-1}$는 각각 $f,\ g$의 역함수이다.)

82. 상수 $a,\ b$의 값

83. $(g^{-1}\circ f)(2)$의 값

84. $(f^{-1}\circ g)(-1)$의 값

◪ 두 함수 $f,\ g$에 대하여 다음을 구하여라. (단, $f^{-1},\ g^{-1}$는 각각 $f,\ g$의 역함수이다.)

85. $f(x)=2x+3,\ g(x)=3x-\frac{1}{2}$일 때, $(f^{-1}\circ g)(2)$의 값

86. $f(x)=2x+5,\ g(x)=3x-3$에 대하여 $(g\circ f^{-1})(a)=3$을 만족하는 상수 a의 값

◪ 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, 다음을 구하여라.

87. $f(x)=ax+b$이고 $f(2)=1,\ g(4)=3$일 때, 상수 $a,\ b$의 값

88. $f(x)=\frac{1}{3}x-2$일 때, $g(-1)+g(0)$의 값

정답 및 해설

1) ×

2) ○

3) ×

4) ×

5) ○

6) $-\frac{2}{3}$
⇨ $f^{-1}(-1)=k$이므로 $f(k)=-1$

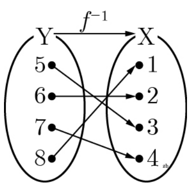
7) $\frac{5}{3}$
⇨ $f^{-1}(6)=k$이므로 $f(k)=6$
$3k+1=6,\ 3k=5 \qquad \therefore\ k=\frac{5}{3}$

8) $-\frac{1}{3}$
⇨ $f^{-1}(0)=k$이므로 $f(k)=0$
$3k+1=0,\ 3k=-1 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{3}$

9) 1
⇨ $f^{-1}(3-2k)=0$이므로 $f(0)=3-2k$
$3\cdot 0+1=3-2k,\ 2k=2 \qquad \therefore\ k=1$

10) 19
⇨ $f^{-1}(k)=6$이므로 $f(6)=k$
$\therefore\ k=3\cdot 6+1=19$

11)



12) 3
⇨ $f^{-1}(5)=3$

13) 4
⇨ $f^{-1}(7)=4$

14) 1
⇨ $f^{-1}(8)=1$

15) 2
⇨ $f^{-1}(6)=2$

16) 4
⇨ $f(1)=f^{-1}(1),\ g(5)=f^{-1}(5)$이므로
$f^{-1}(1)=k$로 놓으면 $f(k)=1$
$2k-1=1,\ k=1 \qquad \therefore\ g(1)=1$
$f^{-1}(5)=l$로 놓으면 $f(l)=5$
$2l-1=5,\ l=3 \qquad \therefore\ g(5)=3$
$\therefore\ g(1)+g(5)=1+3=4$

17) -1
⇨ $g(-2)=f^{-1}(-2),\ g(7)=f^{-1}(7)$이므로
$f^{-1}(-2)=k$로 놓으면 $f(k)=-2$
$-3k+1=-2,\ k=1 \qquad \therefore\ g(-2)=1$
$f^{-1}(7)=l$로 놓으면 $f(l)=7$
$-3l+1=7,\ l=-2 \qquad \therefore\ g(7)=-2$
$\therefore\ g(-2)+g(7)=1+(-2)=-1$

18) 0
⇨ $g(4)=f^{-1}(4),\ g(6)=f^{-1}(6)$이므로
$f^{-1}(4)=k$로 놓으면 $f(k)=4$
$-\frac{1}{2}k+5=4,\ k=2 \qquad \therefore\ g(4)=2$
$f^{-1}(6)=l$로 놓으면 $f(l)=6$
$-\frac{1}{2}l+5=6,\ l=-2 \qquad \therefore\ g(6)=-2$
$\therefore\ g(4)+g(6)=2+(-2)=0$

19) 2
⇨ $f^{-1}(1)=k$이므로 $f(k)=1$
$2k-3=1,\ 2k=4 \qquad \therefore\ k=2$

20) 3
⇨ $f^{-1}(3)=k$이므로 $f(k)=3$
$2k-3=3,\ 2k=6 \qquad \therefore\ k=3$

21) -1
⇨ $f^{-1}(k)=1$이므로 $f(1)=k$
$\therefore\ k=2\cdot 1-3=-1$

22) 3
⇨ $f^{-1}(k)=3$이므로 $f(3)=k$
$\therefore\ k=2\cdot 3-3=3$

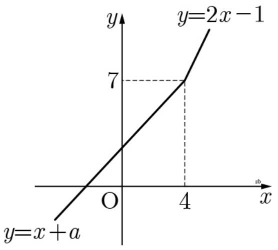
23) 2
⇨ $f^{-1}(3-k)=2$이므로 $f(2)=3-k$
$2\cdot 2-3=3-k \qquad \therefore\ k=2$

24) 5
⇨ $f^{-1}(5)=k-1$이므로 $f(k-1)=5$
$2(k-1)-3=5,\ 2k-5=5 \qquad \therefore\ k=5$

25) ㄱ, ㄷ
⇨ ㄱ, ㄷ 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
ㄴ. X의 원소 a, b, c가 모두 Y의 원소 1에 대응하므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.

ㄹ. X의 원소 -1, 1이 모두 Y의 원소 b에 대응하므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.
따라서 역함수가 존재하는 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

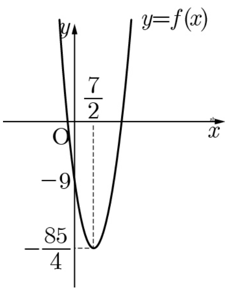
26) 9
⇨ 역함수가 존재하려면 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=x+a$의 그래프가 점 $(4,\ 7)$을 지나야 하므로 $4+a=7$에서 $a=3$
즉, $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<4) \\ 2x-1 & (x \ge 4) \end{cases}$이므로
$(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(5)=9$

27) 6
⇨ 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.
이때, $f(x)$가 증가함수이므로
$f(a)=1$에서 $2a-1=1$ $\quad\therefore\ a=1$
$f(4)=b$에서 $b=2 \cdot 4-1=7$
$\therefore\ b-a=7-1=6$

28) 9
⇨ $f(x)=x^2-7x-9=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{85}{4}$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 정의역이 $x \ge \frac{7}{2}$일 때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다. $\quad\therefore\ k \ge \frac{7}{2}$



또, 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 공역과 치역이 같아야 한다.
이때, $f(k)=k$에서 $k^2-7k-9=k$, $k^2-8k-9=0$
$(k+1)(k-9)=0$ $\quad\therefore\ k=9\left(\because\ k \ge \frac{7}{2}\right)$

29) 5
⇨ 역함수 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로
$3+a=3 \cdot 3-1$, $3+a=8$ $\quad\therefore\ a=5$

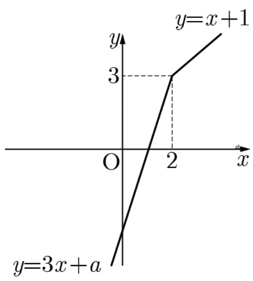
30) $-1<a<3$
⇨ 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 기울기인 $1+a$와 $3-a$의 부호가 같아야 한다.
$(1+a)(3-a)>0$, $(a+1)(a-3)<0$
$\therefore\ -1<a<3$

31) $0<a<1$
⇨ 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 기울기인 a와 $1-a$의 부호가 같아야 한다.
$a(1-a)>0$, $a(a-1)<0$ $\quad\therefore\ 0<a<1$

32) 1
⇨ $f(x)=x^2+4x-4=(x+2)^2-8$이고, 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.
함수 f의 정의역과 치역이 같으므로
$k \ge -2$ …… ㉠
$f(k)=k$에서 $k^2+4k-4=k$
$k^2+3k-4=0$, $(k+4)(k-1)=0$
$\therefore\ k=1$ ($\because$ ㉠)

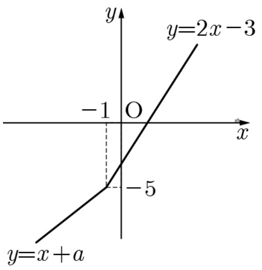
33) 8
⇨ $f(x)=x^2-2x-40=(x-1)^2-41$이고, 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.
또, 함수 f의 정의역과 치역이 같으므로
$k \ge$ …… ㉠
$f(k)=k$에서 $k^2-2k-40=k$
$k^2-3k-40=0$, $(k-8)(k+5)=0$
$\therefore\ k=8$ ($\because$ ㉠)

34) -3
⇨ 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=3x+a$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나야 하므로 $3 \cdot 2+a=3$
$\therefore\ a=-3$

35) -4
⇨ 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.

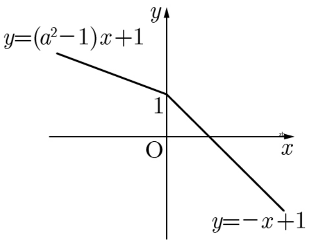


즉, 직선 $y=x+a$의 그래프가 점 $(-1,\ -5)$를 지나야 하므로 $-1+a=-5$

$\therefore\ a=-4$

36) $-1<a<1$

⇨ 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.

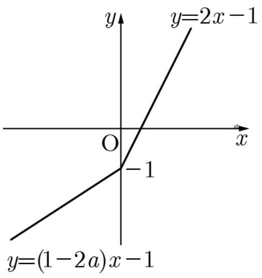


즉, $x<0$에서의 직선의 기울기도 음수이어야 하므로

$a^2-1<0,\ (a+1)(a-1)<0 \qquad \therefore\ -1<a<1$

37) $a<\dfrac{1}{2}$

⇨ 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.

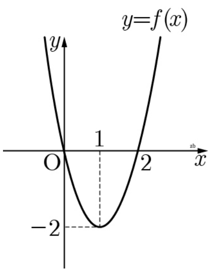


즉, $x<0$에서의 직선의 기울기도 양수이어야 하므로

$1-2a>0 \qquad \therefore\ a<\dfrac{1}{2}$

38) $1,\ \dfrac{5}{2}$

⇨ $f(x)=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 정의역이 $x\geq 1$일 때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다. $\qquad \therefore\ k\geq 1$



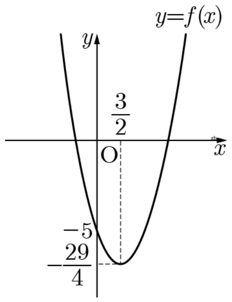
또, 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 공역과 치역이 같아야 한다.

이때, $f(k)=k$에서 $2k^2-4k=k,\ 2k^2-5k=0$

$k(2k-5)=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{5}{2}\ \ (\because\ k\geq 1)$

39) 5

⇨ $f(x)=x^2-3x-5=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{29}{4}$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 정의역이 $x\geq\dfrac{3}{2}$일 때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다. $\qquad \therefore\ k\geq\dfrac{3}{2}$



또, 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 공역과 치역이 같아야 한다.

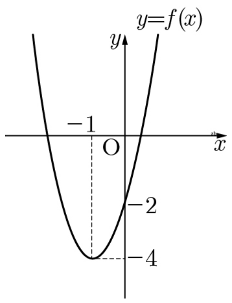
이때, $f(k)=k$에서 $k^2-3k-5=k,\ k^2-4k-5=0$

$(k+1)(k-5)=0 \qquad \therefore\ k=5\left(\because\ k\geq\dfrac{3}{2}\right)$

40) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $f(x)=2x^2+4x-2=2(x+1)^2-4$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 정의역이 $x\geq -1$일 때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$\therefore\ k\geq -1$



또, 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 공역과 치역이 같아야 한다.

이때, $f(k)=k$에서 $2k^2+4k-2=k,\ 2k^2+3k-2=0$

$(2k-1)(k+2)=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{2}\ \ (\because\ k\geq -1)$

41) $a=-1,\ b=3$

⇨ 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.

이때, $f(x)$가 증가함수이므로

$f(-1)=a$에서 $a=2\cdot(-1)+1=-1$
$f(1)=b$에서 $b=2\cdot1+1=3$

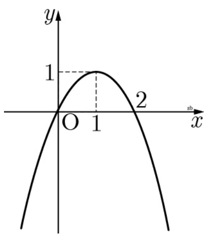
42) $a=2,\ b=11$
⇨ $f(x)$가 증가함수이므로
$f(2)=a$에서 $a=3\cdot2-4=2$
$f(5)=b$에서 $b=3\cdot5-4=11$

43) $a=-5,\ b=-1$
⇨ $f(x)$가 감소함수이므로
$f(a)=9$에서 $-2a-1=9$ $\quad\therefore a=-5$
$f(b)=1$에서 $-2b-1=1$ $\quad\therefore b=-1$

44) $a=0,\ b=4$
⇨ $f(x)$가 감소함수이므로
$f(3)=a$에서 $a=-3+3=0$
$f(-1)=b$에서 $b=-(-1)+3=4$

45) $a=2,\ b=5$
⇨ 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+3$은 일대일 대응이므로
공역과 치역이 같아야 한다.
이때, $f(x)$가 증가함수이므로
$f(-2)=a$에서 $a=-1+3=2$
$f(4)=b$에서 $b=2+3=5$

46) 1
⇨ $f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$
의 그래프가 다음과 같으므로
$x\le1$일 때 $f(x)$의 역함수가 존재한다.
$\therefore\ 0<k\le1\ (\because\ k>0)$



또, 함수 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로
공역과 치역이 같아야 한다.
이때, $f(k)=k$에서
$-k^2+2k=k,\ k^2-k=0$
$k(k-1)=0$ $\quad\therefore k=1\ (\because\ 0<k\le1)$

47) $y=\frac{x+1}{2}$
⇨ $y=2x-1$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$2x=y+1$ $\quad\therefore x=\frac{y+1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{x+1}{2}$

48) $y=-\frac{1}{2}x-3$
⇨ $y=-2x-6$을 x에 대하여 풀면
$2x=-y-6,\ x=-\frac{1}{2}y-3$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=-\frac{1}{2}x-3$

49) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
⇨ $y=3x+1$을 x에 대하여 풀면
$3x=y-1,\ x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

50) $y=2x+6$
⇨ $y=\frac{1}{2}x-3$을 x에 대하여 풀면
$\frac{1}{2}x=y+3,\ x=2y+6$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=2x+6$

51) $y=4x-\frac{3}{2}$
⇨ $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$\frac{1}{4}x=y-\frac{3}{8}$ $\quad\therefore x=4y-\frac{3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=4x-\frac{3}{2}$

52) $y=\frac{1}{5}x+2$
⇨ $5x-y-10=0$을 x에 대하여 풀면
$5x=y+10,\ x=\frac{1}{5}y+2$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{5}x+2$

53) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
⇨ $y=-2x+1$을 x에 대하여 풀면
$2x=-y+1$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

54) $y=2x-\frac{1}{3}$
⇨ $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$을 x에 대하여 풀면
$\frac{1}{2}x=y-\frac{1}{6}$ $\quad\therefore x=2y-\frac{1}{3}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-\frac{1}{3}$

55) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

⇨ $y=-3x+5$를 x에 대하여 풀면

$3x=-y+5$ $\quad\therefore\ x=-\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

56) $y=-2x+\frac{1}{2}$

⇨ x와 y를 서로 바꾸면

$2y+4x-1=0$, $2y=-4x+1$

$\therefore\ y=-2x+\frac{1}{2}$

57) $y=-2x+4$

⇨ $y=-\frac{1}{2}x+2$를 x에 대하여 풀면

$\frac{1}{2}x=-y+2$ $\quad\therefore\ x=-2y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-2x+4$

58) $y=\frac{1}{3}x$

⇨ x와 y를 서로 바꾸면

$3y-x=0$, $3y=x$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

59) $y=3x-\frac{3}{2}$

⇨ x와 y를 서로 바꾸면

$2y-6x+3=0$

$2y=6x-3$

$\therefore\ y=3x-\frac{3}{2}$

60) $y=5x-11$

⇨ x와 y를 서로 바꾸면

$y-5x+11=0$

$\therefore\ y=5x-11$

61) -1

⇨ $f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(kx+2)$

$\qquad\qquad=k(kx+2)+2=k^2x+2k+2$

$k^2x+2k+2=x$이므로

$k^2=1$, $2k+2=0$

$\therefore\ k=-1$

62) $-\frac{1}{2}$

⇨ $f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2kx+1)$

$=2k(2kx+1)+1=4k^2x+2k+1$

$4k^2x+2k+1=x$이므로

$4k^2=1$, $2k+1=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{2}$

63) -2

⇨ $f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1}{2}kx+3\right)=\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}kx+3\right)+3$

$\qquad=\frac{k^2}{4}x+\frac{3}{2}k+3$

$\frac{k^2}{4}x+\frac{3}{2}k+3=x$이므로 $\frac{k^2}{4}=1$, $\frac{3}{2}k+3=0$

$\therefore\ k=-2$

64) $a=-3$, $b=7$

⇨ $f(3)=-2$에서

$3a+b=-2$ …… ㉠

$g(4)=f^{-1}(4)=1$에서 $f(1)=4$

$a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=7$

65) $a=-2$, $b=2$

⇨ $f(2)=-2$에서

$2a+b=-2$ …… ㉠

$g(-8)=f^{-1}(-8)=5$에서 $f(5)=-8$

$5a+b=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=2$

66) $a=\frac{1}{2}$, $b=-3$

⇨ $f(5)=-\frac{1}{2}$에서

$5a+b=-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$g(-2)=f^{-1}(-2)=2$에서 $f(2)=-2$

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=-3$

67) $a=2$, $b=1$

⇨ $f(1)=3$에서

$a+b=3$ …… ㉠

$g(5)=f^{-1}(5)=2$에서 $f(2)=5$

$2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

68) $a=1$, $b=1$

⇨ $f(1)=2$에서 $a+b=2$ …… ㉠

$g(4)=3$에서 $f(3)=4$이므로 $3a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

69) $a=\frac{1}{2}$, $b=3$

⇨ $g(4)=2$에서 $f(2)=4$이므로 $2a+b=4$…… ㉠

$g\left(\frac{9}{2}\right)=3$에서 $f(3)=\frac{9}{2}$이므로 $3a+b=\frac{9}{2}$…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=3$

70) $a=-3$, $b=5$

⇨ $g(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로 $a+b=2$…… ㉠

$g(8)=-1$에서 $f(-1)=8$이므로 $-a+b=8$…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=5$

71) $a=-1$, $b=2$

⇨ $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$에서

$f^{-1}(x)=k$로 놓으면

$f(k)=x$이므로 $-k+5=x$ $\therefore k=-x+5$

즉, $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=g(-x+5)$

$=a(-x+5)+b$

$=-ax+5a+b=x-3$

따라서 $-a=1$, $5a+b=-3$이므로 $a=-1$, $b=2$

72) -1

⇨ $g(x)=-x+2$이므로 $g^{-1}(3)=k$라 하면

$g(k)=3$에서 $-k+2=3$

$\therefore g^{-1}(3)=k=-1$

73) 1

⇨ $(g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(f(4))=g^{-1}(1)$이므로

$g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$에서

$-k+2=1$ $\therefore k=1$

즉, $(g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(1)=1$

74) -3

⇨ $(f^{-1}\circ g)(-6)=f^{-1}(g(-6))=f^{-1}(8)$이므로

$f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$에서

$-k+5=8$ $\therefore k=-3$

즉, $(f^{-1}\circ g)(-6)=f^{-1}(8)=-3$

75) 1

⇨ $(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=k$로 놓으면

$f(k)=g(2)$이므로 $3k-2=1$ $\therefore k=1$

76) 1

⇨ $g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$

$-k+3=2$ $\therefore k=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(1)=1$

77) 3

⇨ $(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=k$로 놓으면

$f(k)=g(4)$이므로 $2k-3=3$ $\therefore k=3$

78) 9

⇨ $g^{-1}(4)=k$로 놓으면 $g(k)=4$이므로

$\frac{1}{2}k+1=4$ $\therefore k=6$

$\therefore (f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))=f(6)=9$

79) 2

⇨ $f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로

$3a-4=2$ $\therefore a=2$

80) -1

⇨ $f^{-1}(-5)=1$에서 $f(1)=-5$이므로

$a-4=-5$ $\therefore a=-1$

81) $\frac{1}{2}$

⇨ $f^{-1}(-2)=4$에서 $f(4)=-2$이므로

$4a-4=-2$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

82) $a=3$, $b=2$

⇨ $f(g(x))=f(-x+b)=a(-x+b)-1$

$=-ax+ab-1=-3x+5$

에서 $-a=-3$, $ab-1=5$ $\therefore a=3$, $b=2$

83) -3

⇨ $f(x)=3x-1$, $g(x)=-x+2$이므로

$(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$에서

$-k+2=5$ $\therefore k=-3$

즉, $(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(5)=-3$

84) $\frac{4}{3}$

⇨ $(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(g(-1))=f^{-1}(3)$이므로

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$에서

$3k-1=3$ $\therefore k=\frac{4}{3}$

즉, $(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(3)=\frac{4}{3}$

85) $\frac{5}{4}$

⇨ $(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}\left(\frac{11}{2}\right)$

$f^{-1}\left(\frac{11}{2}\right)=k$로 놓으면 $f(k)=\frac{11}{2}$이므로

$2k+3=\frac{11}{2}$ $\therefore k=\frac{5}{4}$

86) 9

⇨ $f^{-1}(a)=k$로 놓으면 $f(k)=a$

$2k+5=a$, $k=\frac{a-5}{2}$ $\therefore f^{-1}(a)=\frac{a-5}{2}$

$(g\circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g\left(\frac{a-5}{2}\right)$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$=3\left(\frac{a-5}{2}\right)-3=\frac{3}{2}a-\frac{21}{2}$

따라서 $\frac{3}{2}a-\frac{21}{2}=3$이므로 $a=9$

87) $a=3,\ b=-5$

⇨ $f(2)=1$에서 $2a+b=1$ …… ㉠

$g(4)=3$에서 $f(3)=4$ $\quad\therefore\ 3a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-5$

88) 9

⇨ 함수 f의 역함수가 함수 g이므로 $f^{-1}=g$

$g(-1)=f^{-1}(-1),\ g(0)=f^{-1}(0)$

$f^{-1}(-1)=k$로 놓으면 $f(k)=-1$이므로

$\frac{1}{3}k-2=-1,\ k=3$ $\quad\therefore\ g(-1)=3$

$f^{-1}(0)=l$로 놓으면 $f(l)=0$이므로

$\frac{1}{3}l-2=0,\ l=6$ $\quad\therefore\ g(0)=6$

$\therefore\ g(-1)+g(0)=3+6=9$