10

평면좌표

예제 01

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

두 점 $A(-2, 1)$, $B(0, 3)$에서 같은 거리에 있고, x축 위에 있는 점의 좌표를 구하여라.

접근 방법

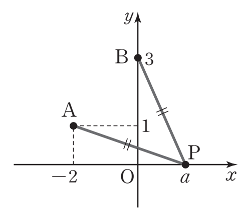
x축 위에 있는 점을 $P(a, 0)$이라 하고, 점 A와 점 P를 이은 선분의 길이가 점 B와 점 P를 이은 선분의 길이와 같다는 것을 이용합니다.

Bible 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

상세 풀이

구하는 x축 위의 점을 $P(a, 0)$이라고 하면

$$\overline{AP}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+4a+5}$$
$$\overline{BP}=\sqrt{(a-0)^2+(0-3)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+9}$$



$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$a^2+4a+5=a^2+9,\ 4a=4$$
$$\therefore a=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 0)$입니다.

정답 ➡ $(1, 0)$

보충 설명

구하는 점이 x축 위에 있으므로 구하는 점을 $P(a, 0)$이라고 할 수 있습니다. 이것은 x축 위에 있는 모든 점들은 y좌표가 0이기 때문입니다.

또한 구하는 점이 y축 위에 있다면, y축 위에 있는 모든 점들의 x좌표는 0이므로 구하는 점의 좌표를 $(0, b)$라고 할 수 있습니다.

이와 유사하게 구하는 점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때는 점의 좌표를 (a, a), 직선 $y=-x$ 위에 있을 때는 점의 좌표를 $(a, -a)$, 직선 $y=px+q$ (p, q는 상수) 위에 있을 때는 점의 좌표를 $(a, ap+q)$라고 합니다.

풀이집 p.141

숫자 바꾸기

01-1 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점의 좌표를 구하여라.

표현 바꾸기

01-2 다음 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(6,\ -3)$, $\mathrm{B}(8,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=2x$ 위의 점

(2) 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=-x+2$ 위의 점

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

10

01-3 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ -5)$, $\mathrm{C}(3,\ 3)$

(2) $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$, $\mathrm{C}(6,\ 1)$

정답 **01-1** $(0,\ -1)$ **01-2** (1) $(1,\ 2)$ (2) $(1,\ 1)$
01-3 (1) $(3,\ -2)$ (2) $(2,\ -2)$

예제 02

삼각형의 모양

다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하여라.

(1) $A(1,\ 3),\ B(-1,\ 1),\ C(5,\ -1)$

(2) $A(-1,\ 3),\ B(-2,\ -4),\ C(3,\ 1)$

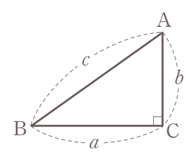
접근 방법

주어진 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 세 변의 길이를 각각 구한 후, 그 길이를 이용하여 삼각형의 모양을 판별합니다.

Bible 피타고라스 정리

직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b, 빗변의 길이를 c라고 할 때

$$c^2=a^2+b^2$$

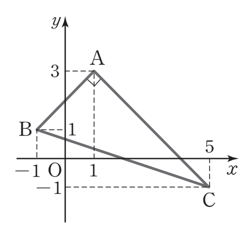


상세 풀이

(1) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(-1-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+\{3-(-1)\}^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$\therefore\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$$

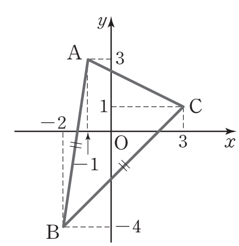
따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형입니다.



(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{\{-2-(-1)\}^2+(-4-3)^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+\{1-(-4)\}^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$
$$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형입니다.



정답 ➡ (1) $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 (2) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형

보충 설명

삼각형의 모양을 결정하는 요소에는 변의 길이와 각의 크기가 있습니다. 그러나 좌표평면에서 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표가 주어질 때, 점의 좌표만을 이용하여 내각의 크기를 구하기는 쉽지 않습니다. 따라서 두 점 사이의 거리 공식을 이용해서 세 변의 길이를 각각 구한 후, 그 길이를 이용하여 삼각형의 모양을 판별합니다.

이때, 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형 ABC는 $a^2+b^2=c^2$일 때, 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이고, $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$이면 이등변삼각형, $a=b=c$이면 정삼각형입니다.

풀이집 p.142

숫자 바꾸기

02-1 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하여라.

(1) $A(5,\ 1)$, $B(-1,\ -2)$, $C(-3,\ 2)$

(2) $A(-3,\ 1)$, $B(-1,\ -5)$, $C(1,\ -1)$

표현 바꾸기

02-2 세 점 $A(2,\ 3)$, $B(-2,\ -1)$, $C(4,\ k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle A=90^{\circ}$인 직각삼각형일 때, 삼각형 ABC의 빗변의 길이는?

① 6 ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ 7

10

개념 넓히기 ★★☆

02-3 세 점 $A(-2,\ 1)$, $B(2,\ -1)$, $C(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, ab의 값을 구하여라.

정답 **02-1** (1) $\angle B=90^{\circ}$인 직각삼각형 (2) $\angle C=90^{\circ}$이고, $\overline{BC}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형
02-2 ② **02-3** 6

예제 03	선분의 내분과 외분
	두 점 $A(2,\ -3)$, $B(5,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하여라.

접근 방법

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 $m:n$으로 내분하는 점을 구할 때 내분점의 공식에서

(i) 분모는 $m+n$　　(ii) 분자는 $x \Rightarrow \begin{array}{cc} m & n \\ \times & \\ x_1 & x_2 \end{array}$, $y \Rightarrow \begin{array}{cc} m & n \\ \times & \\ y_1 & y_2 \end{array}$ 와 같이 대각선으로 곱하여 더한 값

(i), (ii)에서 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$입니다.

이때, 외분점의 공식은 내분점의 공식에서 분모, 분자의 연산 기호를 $+$에서 $-$로 바꾸면 됩니다.

> **Bible** 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로
> (1) 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$
> (2) 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

상세 풀이

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$x_1=\frac{2\cdot5+1\cdot2}{2+1}=4,\ y_1=\frac{2\cdot3+1\cdot(-3)}{2+1}=1 \qquad \therefore P(4,\ 1)$$

또한 점 Q의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면

$$x_2=\frac{2\cdot5-1\cdot2}{2-1}=8,\ y_2=\frac{2\cdot3-1\cdot(-3)}{2-1}=9 \qquad \therefore Q(8,\ 9)$$

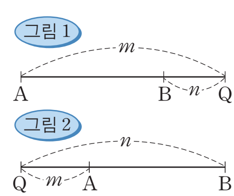
따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+8}{2},\ \frac{1+9}{2}\right)=(6,\ 5)$$

정답 ➡ $(6,\ 5)$

보충 설명

수직선 위에서 선분의 외분점의 위치가 왼쪽, 오른쪽 중 어느 쪽인지 혼동될 때가 많습니다. 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점을 Q라고 하면 [그림 1]과 같이 $m>n$일 때 점 Q는 점 B의 오른쪽에 놓이고, [그림 2]와 같이 $m<n$일 때 점 Q는 점 A의 왼쪽에 놓이게 됩니다. 즉, m, n 중에서 작은 값을 가지는 쪽의 연장선 위에 점을 찍어 놓고 비례를 생각하면 됩니다.



풀이집 p.143

숫자 바꾸기

03-1 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(3,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하여라.

표현 바꾸기

03-2 수직선 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 써넣어라.

(1) 점 B가 선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점일 때, 점 C는 선분 AB를 $\boxed{}$(으)로 외분하는 점이다.

(2) 점 B가 선분 AC를 $3:2$로 외분하는 점일 때, 점 C는 선분 AB를 $\boxed{}$(으)로 내분하는 점이다.

10

개념 넓히기 ★★☆

03-3 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$을 지나는 직선 AB 위에 $\overline{AB}=2\overline{BP}$가 성립하도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

정답 **03-1** $(-6,\ -3)$ **03-2** (1) $5:2$ (2) $1:2$ **03-3** $(1,\ -1)$ 또는 $(7,\ -5)$

예제 04

삼각형의 무게중심

세 점 $A(1,\ -2)$, $B(3,\ 6)$, $C(5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 세 변 AB, BC, CA의 중점을 차례대로 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표를 구하여라.

접근 방법

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표가 주어졌을 때는 삼각형의 무게중심을 구하는 공식을 이용합니다.

Bible 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

상세 풀이

선분 AB의 중점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{(-2)+6}{2}\right) \qquad \therefore D(2,\ 2)$$

선분 BC의 중점 E의 좌표는

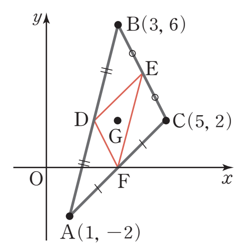
$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{6+2}{2}\right) \qquad \therefore E(4,\ 4)$$

선분 CA의 중점 F의 좌표는

$$\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{2+(-2)}{2}\right) \qquad \therefore F(3,\ 0)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4+3}{3},\ \frac{2+4+0}{3}\right) \qquad \therefore (3,\ 2)$$



정답 ➡ $(3,\ 2)$

보충 설명

세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점 D, E, F는 각각 $D\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, $E\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{x_3+x_1}{2},\ \dfrac{y_3+y_1}{2}\right)$이므로 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$입니다.

즉, 삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 DEF의 무게중심이 같음을 알 수 있습니다.

마찬가지 방법으로 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분(외분)하는 점을 차례대로 P, Q, R라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심이 같음을 알 수 있습니다.

풀이집 p.144

숫자 바꾸기

04-1 세 점 A$(3,\ 1)$, B$(-1,\ -3)$, C$(5,\ -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 세 변 AB, BC, CA의 중점을 차례대로 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표를 구하여라.

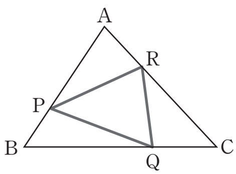
표현 바꾸기

◆ 다른 풀이

04-2 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 내분하는 점이 각각

$$\mathrm{P}(-2,\ 2),\ \mathrm{Q}(3,\ -2),\ \mathrm{R}(2,\ 6)$$

일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하여라.



개념 넓히기 ★☆☆

◆ 보충 설명

04-3 세 점 A$(a,\ -1)$, B$(b,\ 2)$, C$(-3,\ ab)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

정답 **04-1** $\left(\frac{7}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$ **04-2** $(1,\ 2)$ **04-3** 26

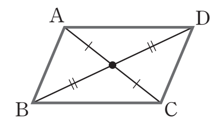
예제 05

평행사변형의 성질

세 점 $A(1,\ 5)$, $B(-1,\ -1)$, $C(4,\ 2)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 하는 꼭짓점 D의 좌표를 구하여라.

접근 방법

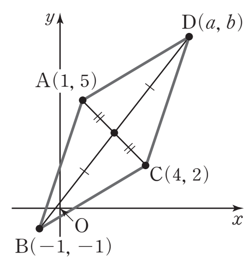
오른쪽 그림과 같이 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치합니다. 따라서 꼭짓점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, 두 대각선 AC, BD의 중점의 좌표를 각각 구합니다.



Bible 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선의 중점은 일치한다.

상세 풀이

꼭짓점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 평행사변형의 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치합니다.



이때, 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{5+2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$$

이고, 선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)=\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b-1}{2}\right)$$

이므로 $\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{b-1}{2}=\dfrac{7}{2}$

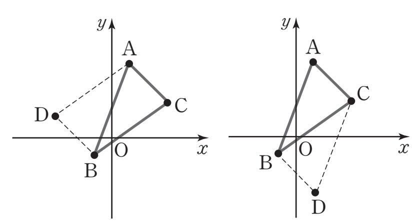
$$\therefore a=6,\ b=8$$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(6,\ 8)$입니다.

정답 ➡ $(6,\ 8)$

보충 설명

문제에서 주어진 세 점으로부터 평행사변형을 만드는 방법은 오른쪽 그림과 같이 두 가지가 더 있습니다.
하지만 문제에서 평행사변형 ABCD가 되도록 하는 점의 좌표를 구하라고 하였고, 평행사변형은 네 꼭짓점을 차례대로 읽어야 하므로 평행사변형 ABCD로 읽을 수 없습니다. 따라서 오른쪽 그림과 같은 두 경우는 생각하지 않은 것입니다.



그러나 표현 바꾸기 05-2와 같은 경우는 각 꼭짓점을 지칭하고 있지 않으므로 평행사변형을 만드는 다양한 방법을 생각해 볼 수 있습니다.

풀이집 p.145

숫자 바꾸기

05-1 네 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(-3, b)$, $\mathrm{C}(2, 5)$, $\mathrm{D}(4, 4)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

05-2 네 점 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, (a, b)를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형일 때, 〈보기〉에서 점 (a, b)가 될 수 있는 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $(2, 1)$　　ㄴ. $(2, -1)$　　ㄷ. $(0, -1)$

ㄹ. $(-2, 1)$　　ㅁ. $(-2, -1)$

10

개념 넓히기 ★★★ 　◆ 보충 설명

05-3 네 점 $\mathrm{A}(a, 2)$, $\mathrm{B}(b, -2)$, $\mathrm{C}(2, -3)$, $\mathrm{D}(3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, ab의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

정답 **05-1** 4　**05-2** ㄱ, ㄷ, ㄹ　**05-3** 44

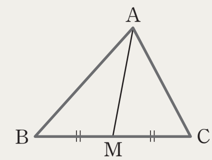
예제 06

좌표를 이용한 도형의 성질의 증명

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이 성립함을 증명하여라.

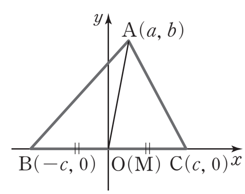


접근 방법

위와 같은 삼각형의 성질을 파포스(Pappos)의 정리 또는 중선정리라고 합니다.
삼각형의 한 변이 좌표축 위에, 중점 M이 원점에 오도록 삼각형을 좌표평면 위에 놓은 후, 좌표평면 위에서 꼭짓점의 좌표를 적당히 정하여 두 점 사이의 거리 공식을 이용합니다.

Bible 좌표평면 위에서 도형의 성질을 증명할 때는 원점, 좌표축의 위치를 잘 고려한다.

상세 풀이



오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 이 좌표평면의 원점이 됩니다.
이때, 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}\\&=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)\\&=2(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

또한 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$$

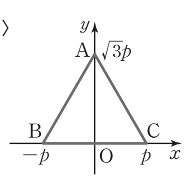
$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

정답 ➡ 풀이 참조

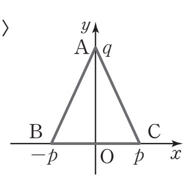
보충 설명

도형에 대한 문제를 좌표를 이용하여 풀 때에는 다음을 고려하여 좌표평면 위에 도형을 놓습니다.
① 가장 많이 이용되는 점을 원점, 가장 많이 이용되는 직선을 x축 또는 y축으로 합니다.
② 주어진 도형에 대칭축이 있으면 대칭축을 좌표축으로, 대칭의 중심이 있으면 그것을 원점으로 잡습니다.
예를 들어, 정삼각형이나 이등변삼각형, 직각삼각형의 경우에는 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 됩니다.

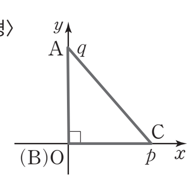
〈정삼각형〉



〈이등변삼각형〉



〈직각삼각형〉



풀이집 p.146

숫자 바꾸기

06-1 삼각형 ABC에서 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 D라고 할 때,

$$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{DC}^2)$$

이 성립함을 증명하여라.

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

06-2 직사각형 ABCD와 임의의 한 점 P에 대하여

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$$

임을 증명하여라.

10

개념 넓히기 ★★★

06-3 삼각형 ABC에서 변 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 D라고 할 때,

$$3\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=k(\overline{AD}^2+3\overline{BD}^2)$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

정답 **06-1** p.488 참조 **06-2** p.488 참조 **06-3** 4