

2021학년도 2학기 제2차 지필평가

2학년 수학 II

과목코드 02

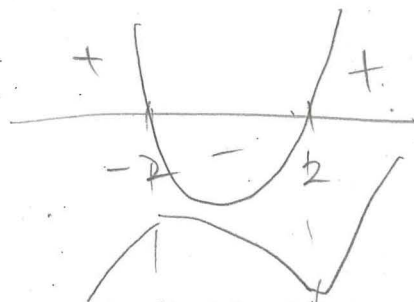
2021. 12. 10. 1교시

- 본 시험은 선택형 [17]문항, 논술형 [3]문항, 쪽수는 [7]쪽입니다.
- 답안지에 계열, 학년, 반, 번호, 과목코드를 정확히 기입하고 가장 알맞은 답을 컴퓨터용 사인펜으로 ●와 같이 표기하시오.
- 논술형 문항의 답은 OMR 카드 논술형 답란에 검정색 펜(볼펜)으로 서술하고, 답안 수정 시에는 두 줄을 긋고 재작성하시오.

1. 함수 $f(x) = x^3 - 12x + 36$ 이 감소하는 구간은? [4.4점]

- ① $[-1, 3]$ ② $[-2, 2]$ ③ $[-3, 1]$ ④ $[-4, 0]$ ⑤ $[-5, -1]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x+2)(x-2) \end{aligned}$$



2. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서 속도가 $v(t) = t^2 - 3t$ 일 때, 점 P의 가속도가 3인 시간은? [4.4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} 2t - 3 &= 3 \\ 2t &= 6 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

3. 부정적분을 바르게 한 것은? (단, C 는 적분상수이다.) [4.4점]

- ① $\int 3dx = 3$ ② $\int x dx = 2x^2 + C$
 ③ $\int x^2 dx = 3x^2 + C$ ④ $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$
 ⑤ $\int x^4 dx = \frac{1}{4}x^5 + C$

4. 함수 $f(x)$ 가 $f'(x) = 10x^9 - 9x^8 + 8x^7 - \dots + 2x - 1$ 을 만족시키고 $f(1) = 2$ 일 때, $f(-1)$ 의 값은? [4.5점]

- ① 10 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{10}{10}x^{10} - \frac{9}{9}x^9 + \frac{8}{8}x^8 - \dots + \frac{2}{2}x^2 - x + C \\ &= x^{10} - x^9 + x^8 - \dots + x^2 - x + C \\ C &= 2 \\ f(-1) &= 10 + 2 \end{aligned}$$

5. 두 곡선 $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4.5점]

- ① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 0 \\ 2x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{6} \times (2-0)^3$$

$$\frac{1}{3} \times 8$$

6. 지면에서 30m/s의 속도로 지면과 수직하게 위로 쏘아 올린 물 로켓의 t 초 후의 높이를 x m라고 하면

$$x = -5t^2 + 30t$$

인 관계가 성립한다고 한다. 물 로켓이 도달한 최고 높이는? [4.6점]

- ① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

$$-10t + 30 = 0$$

$$-10(t-3) = 0$$

$$t = 3 \text{ 일 때}$$

$$x = -5 \cdot 9 + 90$$

$$= -45 + 90 = 45$$

7. 곡선 $y = x^2 + x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = -1$, $x = 1$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4.6점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2



$$x(x+1)$$

$$\int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx + \int_0^1 (x^2 + x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$

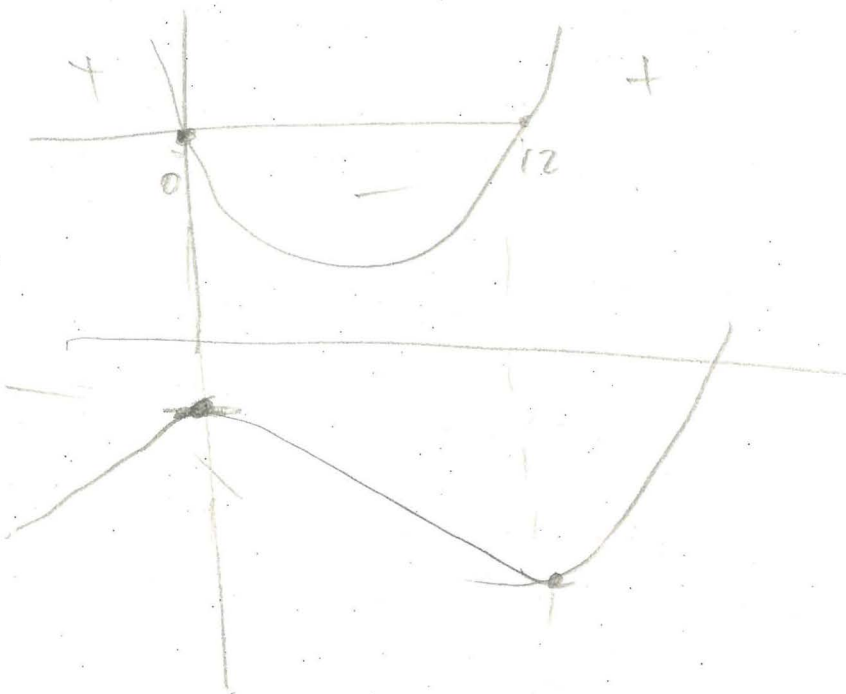
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

8. 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$ 가 $x \geq 0$ 일 때, 부등식 $f(x) \geq k$ 이 항상 성립하도록 하는 상수 k 의 최댓값과 같은 함수값은? [4.7점]

- ① $f(1)$ ② $f(2)$ ③ $f(3)$ ④ $f(4)$ ⑤ $f(5)$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(6-12)$$



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$$

9. 일차함수 $f(x)$ 가 $\int_{-1}^1 xf(x) dx = 4$, $\int_{-1}^1 f(x) dx = -16$ 을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4.7점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$$f(x) = ax + b$$

$$\int_{-1}^1 x(ax+b) dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{b}{2}x^2$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{b}{2} - \left(-\frac{1}{3}a + \frac{b}{2}\right) = 4$$

$$\frac{2}{3}a = 4$$

$$2a = 12$$

$$a = 6 \text{ --- ①}$$

$$f(x) = 6x - 8$$

$$18 - 8$$

$$= 10$$

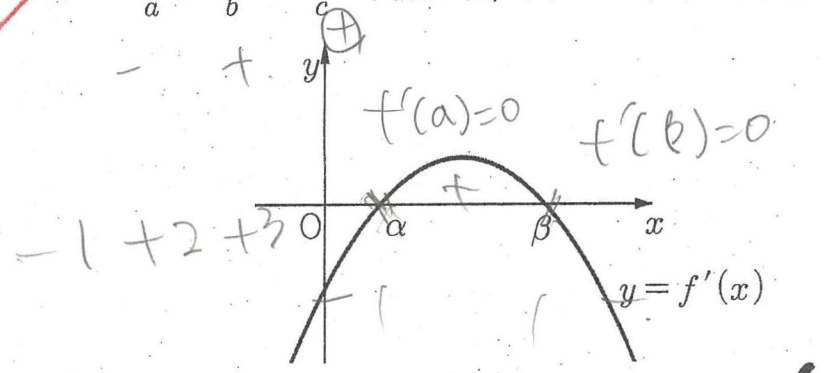
$$\frac{1}{2}ax^2 + bx$$

$$\frac{1}{2}a + b - \left(\frac{1}{2}a - b\right)$$

$$2b = -16$$

$$b = -8$$

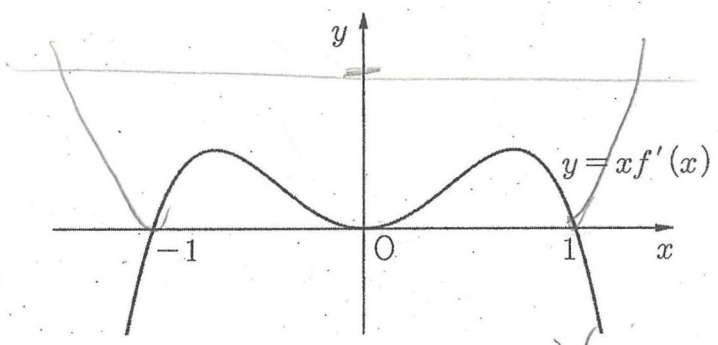
10. 함수 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수 $y = f(x)$ 의 극솟값이 양수일 때, $\frac{|a|}{a} + \frac{2|b|}{b} + \frac{3|c|}{c}$ 의 값은? (단, a, b, c 는 0이 아닌 상수이다.) [47점]



- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$-3x^2 + 2ax + b$

11. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 함수 $y = xf'(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $f(0) = 0$ 이면 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는? (단, $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$) [48점]



- ① 네 개 ② 세 개 ③ 두 개 ④ 한 개 ⑤ 실근이 존재하지 않는다.

$$\frac{36}{3} = 12$$

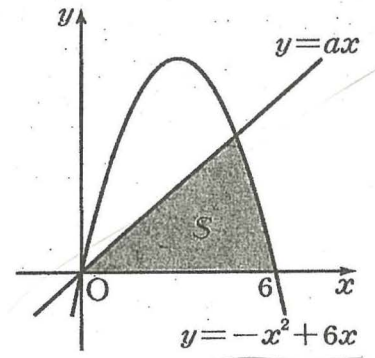
$$\frac{108 - nb}{3} = 32$$

$$36 - 12a + 3a^2 - \frac{a^3}{6} = \frac{nb}{3}$$

$$36 - 12a + 3a^2 - \frac{a^3}{6} = 0$$

$$a^3 - 18a^2 + 108a - 64 = 0$$

12. 그림에서 직선 $y = ax$, 곡선 $y = -x^2 + 6x$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 의 값이 $\frac{76}{3}$ 일 때, 상수 a 의 값은? (단, $0 < a < 6$ 이다.) [48점]



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$-x^2 + 6x - ax = 0$$

$$-x^2 + (6-a)x = 0$$

$$-x(x - (6-a)) = 0$$

$$\frac{1}{6} \times (6-a)^3 = \frac{76}{3}$$

$$\frac{1}{6} \times (216 - 3 \cdot 36a + 3 \cdot 6a^2 - a^3) = \frac{76}{3}$$

$$36 - 18a + 3a^2 - \frac{a^3}{6} = \frac{76}{3}$$

$$36 - 18a + 3a^2 - \frac{a^3}{6} = \frac{76}{3}$$

$$- \frac{a^3}{6} + 3a^2 - 18a + 36 - \frac{76}{3} = 0$$

$$- \frac{a^3}{6} + 3a^2 - 18a + \frac{108}{3} - \frac{76}{3} = 0$$

$$- \frac{a^3}{6} + 3a^2 - 18a + \frac{32}{3} = 0$$

$$a^3 - 18a^2 + 108a - 64 = 0$$

$$a^3 - 18a^2 + 108a - 64 = 0$$

$$(a-4)(a^2 - 14a + 16) = 0$$

$$(a-4)(a-2)(a-8) = 0$$

13. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 아래 조건을 만족할 때, $f(-1)$ 의 값은? [4.9점]

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 $-2, 0, 3$ 뿐이다.
 (나) 함수 $y=f(x)$ 가 $x=\alpha, x=\beta, x=\gamma$ 에서 극값을 가질 때, $\alpha\beta\gamma > 0$ 을 만족한다. (단, α, β, γ 는 서로 다른 실수이다.)

- ① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

~~f(x)~~

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(x+2)(x-3) \\ &= (x^3 + 2x^2)(x-3) \\ &= (x^4 - 3x^3 + 2x^3 - 6x^2) \\ &= (x^4 - x^3 - 6x^2) \end{aligned}$$

$$1 + 1 - 6$$

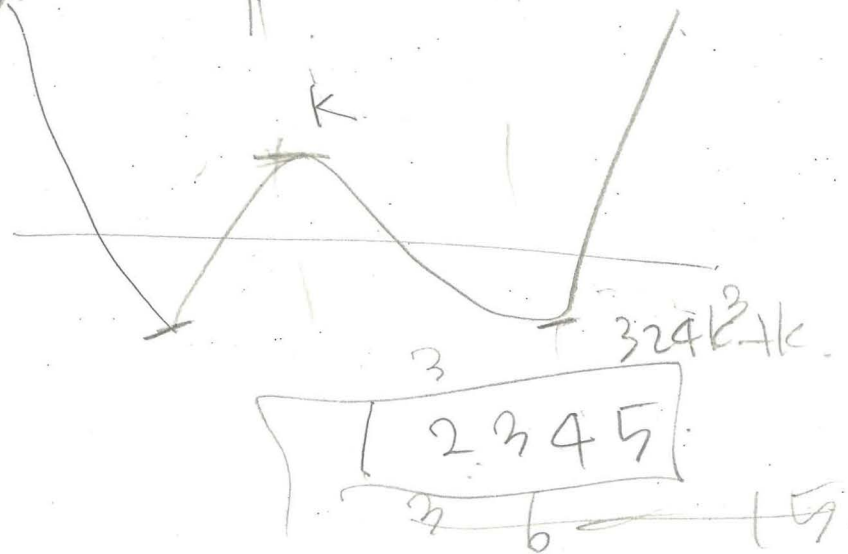
$$-4$$

$$1 + 1 - 6$$

14. 함수 $f(x) = 2x^3 - 3kx^2 + k$ 에 대하여 방정식 $|f(x)| = 6$ 이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 자연수 k 값들의 합은? [4.9점]

- ① 9 ② 12 ③ 14 ④ 15 ⑤ 18

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6kx \\ &= 6x(x - k) \end{aligned}$$



$$2(6k)^3 - 3k(6k)^2 + k$$

$$= 2 \cdot 216k^3 - 3k \cdot 36k^2 + k$$

$$= 432k^3 - 108k^3 + k$$

$$= 324k^3 + k$$

$$k < 6 < 324k^3 + k$$

$$k < 6$$

$$324k^3 + k > 6$$

$$k^3 + \frac{1}{324}$$

15. 최고차항의 계수가 양수인 삼차다항식 $f(x)$ 가 다음을 만족한다.

- 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근 a, b 를 갖는다.
(단, $a < b$)
- 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근 c, d, e 를 갖는다.
(단, $c < d < e$)
- $|f(a)| = |f(0)| < |f(b)|$, $f'(0) < 0$ 을 만족한다.

$c \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 모두 고른 것은? [5.0점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^a g(t) dt = af(a)$

ㄴ. $\int_0^b g(t) dt = bf(b)$

ㄷ. $f(b) = -\frac{1}{e-b} \int_b^e g(t) dt$

① ㄱ

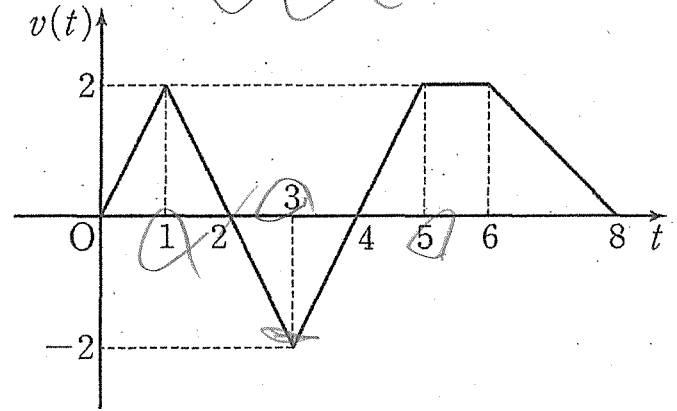
② ㄱ, ㄴ

③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 수직선 위를 움직이는 점 P는 좌표가 1인 점에서 출발하며, 시간 t 에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같다. 수직선 위의 점 Q는 좌표가 k 인 점에서 움직이지 않을 때, 시간 $t=0$ 에서 $t=8$ 까지 두 점 P, Q가 두 번 이상 만나기 위한 상수 k 의 최댓값은? [5.0점]



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

17. 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에
서 속도가 다음과 같을 때, 출발해서 시간 $t=2$ 까지 점 P
가 움직인 거리는? [5.1점]

함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 와 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여

$$v(t) = \int_1^{t^2+1} f(x)dx + \int_1^{f(t^2+1)} g(x)dx - 3 \text{ 이다.}$$

- ① $\frac{7}{2}$ ☒ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

[논술형 1] 실수 전체의 집합에서 정의된

함수 $f(x) = x^3 - kx^2 + 3x + 5$ 의 역함수가 존재하도록 하는
상수 k 값의 범위를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [6.0점]

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx + 3$$

$$D/f = k^2 - (3 \cdot 3)$$

$$= k^2 - 9 \leq 0$$

$$k^2 \leq 9$$

$$-3 \leq k \leq 3$$

[논술형 2] 다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$F(x) = xf(x) - 4x^3 + 3x^2$$

이 성립하고 $F(2) = 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [7.0점]

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - 12x^2 + 6x$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 12x^2 + 6x$$

$$xf'(x) = 12x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 12x - 6$$

$$f(x) = 6x^2 - 6x + C$$

$$f(2) = 24 - 12 + C = 0$$

$$12 + C = 0$$

$$C = -12$$

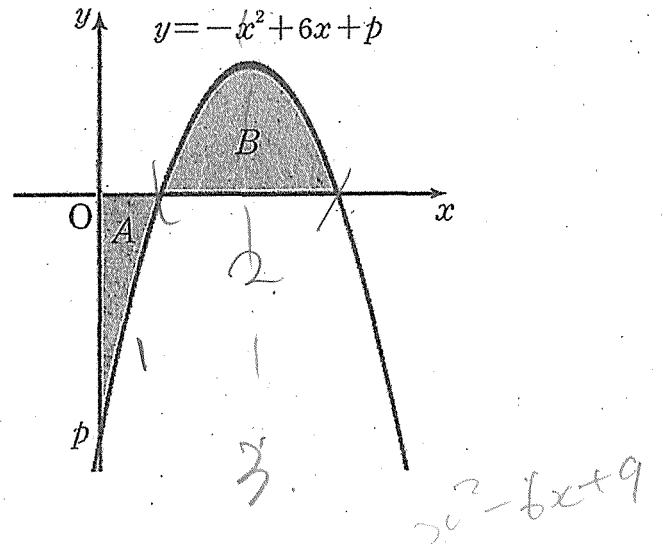
$$f(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

24

15

$$12 - \frac{2}{3} + \frac{36}{3}$$

[논술형 3] 그림과 같이 곡선 $y = -x^2 + 6x + p$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B 라고 할 때, $A:B=1:2$ 이다. 이때 상수 p 의 값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [7.0점]



$$y = -(x^2 - 6x) + p$$

$$= -(x-3)^2 + 9 + p$$

$$A:B = 1:2 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 (x^2 - 6x - p) dx + \int_1^3 (-x^2 + 6x + p) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - px \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + px \right]_1^3 = 0$$

$$\frac{1}{3} - 3 - p + (-9 + 27 + 3p - (-\frac{1}{3} + 9 + p)) = 0$$

$$= p + 12 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{38}{3} + p = 0 \quad p = -\frac{38}{3}$$

※ 확인사항

답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 시험문제의 저작권은 포곡고등학교에 있습니다. 저작권법에 의해 보호받는 저작물이므로 무단전제 및 재배포시 저작권법에 의거 처벌될 수 있습니다.