

01

다항식의 연산

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 O, X 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	다항식의 덧셈과 뺄셈	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 02	다항식의 전개식에서 계수 구하기	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 03	곱셈 공식	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 04	복잡한 다항식의 전개	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 05	곱셈 공식을 이용한 식 또는 수의 계산	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 06	미지수가 2개인 곱셈 공식의 변형	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
발전유형 07	미지수가 3개인 곱셈 공식의 변형	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 08	다항식의 나눗셈	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

필수유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

두 다항식 $A=2x^2-x+5$, $B=x^2-3x+4$ 에 대하여 다음을 계산하여라.

- (1) $2A+B$
- (2) $A-(2A-3B)$
- (3) $A-\{3B-(B+2A)\}$

**풍샘
POINT**

먼저 주어진 식을 간단히 한 후, 주어진 다항식을 대입하여 동류항끼리 계산해!

풀이 • (1) $2A+B=2(2x^2-x+5)+(x^2-3x+4)$
 $=4x^2-2x+10+x^2-3x+4$
 $=4x^2+x^2-2x-3x+10+4$ ^①
 $=5x^2-5x+14$

① 동류항끼리 모아서 계산한다.

(2) STEP1 주어진 식을 간단히 하기

$$A-(2A-3B)$$
^②

$$=A-2A+3B=-A+3B$$

STEP2 A, B 를 대입하기

$$\therefore -A+3B=-(2x^2-x+5)+3(x^2-3x+4)$$
^③

$$=-2x^2+x-5+3x^2-9x+12$$

$$=-2x^2+3x^2+x-9x-5+12$$

$$=x^2-8x+7$$

② 주어진 식에 다항식을 대입할 때는 먼저 주어진 식을 간단히 한다.

③ 다항식을 대입할 때는 항상 괄호를 사용하고 괄호 앞의 부호가 -인 경우 부호가 반대로 바뀌는 것에 주의한다.

(3) STEP1 주어진 식을 간단히 하기

$$A-\{3B-(B+2A)\}$$
^④

$$=A-(3B-B-2A)$$

$$=A-(2B-2A)$$

$$=A-2B+2A$$

$$=3A-2B$$

④ 괄호 안에 괄호가 있을 때는 안쪽의 괄호부터 처리한다.

STEP2 A, B 를 대입하기

$$\therefore 3A-2B=3(2x^2-x+5)-2(x^2-3x+4)$$

$$=6x^2-3x+15-2x^2+6x-8$$

$$=6x^2-2x^2-3x+6x+15-8$$

$$=4x^2+3x+7$$

답 (1) $5x^2-5x+14$ (2) x^2-8x+7 (3) $4x^2+3x+7$

**풍샘 강의
NOTE**

다항식의 덧셈과 뺄셈에서 괄호를 없앨 때는 다음의 성질을 이용한다.

세 다항식 A, B, C 에 대하여

① $A+(B-C)=A+B-C$ ➔ 괄호 앞의 부호가 +이면 괄호 안의 부호를 그대로!

② $A-(B-C)=A-B+C$ ➔ 괄호 앞의 부호가 -이면 괄호 안의 부호를 반대로!

01-1 유사

두 다항식 $A = x^2 - 5xy + 7y^2$, $B = -2x^2 + 3xy + y^2$ 에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A + B$

(2) $2(A - B) + B$

01-2 유사

세 다항식 $A = -x^3 + x^2 - x + 2$,
 $B = 2x^3 - x^2 - 2x + 12$, $C = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ 에 대하여 $A - \{B - 2(A + C)\}$ 를 계산하여라.

01-3 변형

두 다항식 $A = x^2 - 6x - 8$, $B = 3x^2 + 4x$ 에 대하여 $2X + A = 2A + B$ 를 만족시키는 다항식 X 를 구하여라.

01-4 변형

두 다항식 A, B 에 대하여 $A + B = 2x^2 - xy + y^2$,
 $A - B = 4x^2 + 5xy - 3y^2$ 일 때, 다항식 A, B 를 각각 구하여라.

01-5 변형

세 다항식 A, B, C 에 대하여
 $A + B = x^2 + 2xy - 3y^2$, $B + C = 2x^2 - 4xy + 3y^2$,
 $C + A = x^2 + 6xy - 8y^2$ 일 때, $A + B + C$ 를 계산하여라.

01-6 실력

두 다항식 A, B 에 대하여
 $2A + B = 3x^3 + x^2 - 2x + 4$,
 $A - 2B = -x^3 + 3x^2 - 6x - 3$ 일 때,
 $X - B = 2(A - B)$ 를 만족시키는 다항식 X 를 구하여라.

필수유형 02 다항식의 전개식에서 계수 구하기

$(x^3 + 4x^2 + 2x - 1)(x^2 - 6x + 7)$ 의 전개식에서 다음을 구하여라.

- (1) x^2 의 계수
- (2) x^3 의 계수

**풍뎡
POINT**

주어진 식의 모든 항을 전개하는 것이 아니라 구하는 항이 나오는 경우만 선택하여 전개해!

풀이 • $(x^3 + 4x^2 + 2x - 1)(x^2 - 6x + 7)$ 의 전개식에서

(1) STEP1 x^2 항이 나오는 경우 구하기

x^2 항이 나오는 경우는 ①

① x^2 항은 차수가 2가 되는 항이다.

$$(x^3 + 4x^2 + 2x - 1)(x^2 - 6x + 7)$$

(i) $(x^2\text{항}) \times (\text{상수항}) \Rightarrow 4x^2 \times 7 = 28x^2$

(ii) $(x\text{항}) \times (x\text{항}) \Rightarrow 2x \times (-6x) = -12x^2$

(iii) $(\text{상수항}) \times (x^2\text{항}) \Rightarrow (-1) \times x^2 = -x^2$ ②

② $-x^2 = (-1) \times x^2$ 이므로
계수는 -1 이다.

STEP2 x^2 의 계수 구하기

따라서 x^2 의 계수는

$$28 - 12 - 1 = 15$$

(2) STEP1 x^3 항이 나오는 경우 구하기

x^3 항이 나오는 경우는 ③

③ x^3 항은 차수가 3이 되는 항이다.

$$(x^3 + 4x^2 + 2x - 1)(x^2 - 6x + 7)$$

(i) $(x^3\text{항}) \times (\text{상수항}) \Rightarrow x^3 \times 7 = 7x^3$

(ii) $(x^2\text{항}) \times (x\text{항}) \Rightarrow 4x^2 \times (-6x) = -24x^3$

(iii) $(x\text{항}) \times (x^2\text{항}) \Rightarrow 2x \times x^2 = 2x^3$

STEP2 x^3 의 계수 구하기

따라서 x^3 의 계수는

$$7 - 24 + 2 = -15$$

답 (1) 15 (2) -15

**풍뎡 강의
NOTE**

다항식의 곱으로 나타내어진 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수만 구할 때는 분배법칙을 이용하여 특정한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다. 이때 특정한 항이 나오는 경우를 빠짐없이 생각해야 함에 유의한다.

02-1 기본

기출

$(x+3)(x^2+2x+4)$ 의 전개식에서 x 의 계수를 구하여라.

02-2 유사

$(2x^2-5x+1)(3x^2+2x-3)$ 의 전개식에서 다음을 구하여라.

- (1) x^2 의 계수
- (2) x^3 의 계수

02-3 유사

$(2x^3-x^2-5x+6)(x^2-4x+3)$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 a , x^4 의 계수를 b 라고 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

02-4 변형

다항식 $(2x^2+3x+a)(3x^2-5x+4)$ 의 전개식에서 x 의 계수가 7일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

02-5 변형

다항식 $(x-a)(x+a-1)(2x-3a)$ 의 전개식에서 x^2 의 계수가 -11 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

02-6 실력

$(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)^2$ 의 전개식에서 x^4 의 계수를 구하여라.

필수유형 03 곱셈 공식

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+2y-z)^2$

(2) $(-2x+3y)^3$

(3) $(3x+4)(9x^2-12x+16)$

(4) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

**품셈
POINT**

문제에 적절한 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개하고 간단히 정리해!

풀이 •

(1) $(x+2y-z)^2$ ❶

$$\begin{aligned} &= x^2 + (2y)^2 + (-z)^2 + 2 \times x \times 2y + 2 \times 2y \times (-z) \\ &\quad + 2 \times (-z) \times x \\ &= x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2zx \end{aligned}$$

❶ $(x+2y-z)^2$
 $= \{x+2y+(-z)\}^2$
 으로 생각한다.

(2) $(-2x+3y)^3$ ❷

$$\begin{aligned} &= (-2x)^3 + 3 \times (-2x)^2 \times 3y + 3 \times (-2x) \times (3y)^2 + (3y)^3 \\ &= -8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

❷ $(-2x+3y)^3$
 $= \{(-2x)+3y\}^3$
 으로 생각한다.

(3) $(3x+4)(9x^2-12x+16)$

$$\begin{aligned} &= (3x+4)\{(3x)^2-3x \times 4+4^2\} \\ &= (3x)^3+4^3 \\ &= 27x^3+64 \end{aligned}$$

(4) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$ ❸

$$\begin{aligned} &= \{x^2+x \times 2y+(2y)^2\} \{x^2-x \times 2y+(2y)^2\} \\ &= x^4+x^2 \times (2y)^2+(2y)^4 \\ &= x^4+4x^2y^2+16y^4 \end{aligned}$$

❸ $(A^2+AB+B^2)(A^2-AB+B^2)$
 $= A^4+A^2B^2+B^4$
 을 이용한다.

☞ (1) $x^2+4y^2+z^2+4xy-4yz-2zx$ (2) $-8x^3+36x^2y-54xy^2+27y^3$
 (3) $27x^3+64$ (4) $x^4+4x^2y^2+16y^4$

**품셈 강의
NOTE**

곱셈 공식이 기억나지 않으면 분배법칙을 이용해서 전개한 후 식을 정리해도 되지만 빠른 계산을 위해서는 곱셈 공식을 반드시 암기해야 한다. 지수와 계수를 비교하면서 암기하도록 한다.

$$\begin{aligned} &\text{제곱} \\ &(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &\text{세제곱} \quad \text{세제곱} \\ &(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

03-1 기본

다음 식을 전개하여라.

- (1) $(a-b-c)^2$
 (2) $(a+2b)^3$
 (3) $(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$
 (4) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

03-2 유사

다음 식을 전개하여라.

- (1) $(x-1)(x-3)(x-5)$
 (2) $(x+1)(x-2)(x+4)$
 (3) $(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$
 (4) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

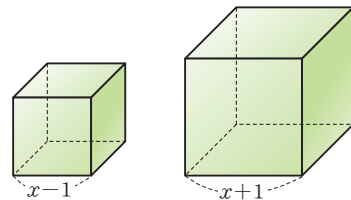
03-3 변형

다음 식을 전개하여라.

- (1) $(3a-b-2)^2 - (-a+3b+1)^2$
 (2) $(x+2)^3 - (x-3)(x^2+3x+9)$

03-4 변형다항식 $(ax-3)^3 + (x-4)^2$ 을 전개한 식에서 x 의 계수가 46일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.**03-5** 변형다항식 $(2x-1)^2(x+2)^3$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 a , x^3 의 계수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.**03-6** 실력

기출

한 모서리의 길이가 $x-1$ 인 정육면체의 부피를 A , 한 모서리의 길이가 $x+1$ 인 정육면체의 부피를 B 라고 할 때, 두 부피의 합 $A+B$ 를 간단히 하면?

- ① $2x^3+6x$ ② $2x^3-6x$
 ③ $2x^3$ ④ $2x^3+6x^2+6x+2$
 ⑤ $2x^3-6x^2+6x-2$

필수유형 04 복잡한 다항식의 전개

다음 식을 전개하여라.

$$(1) (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$$

$$(2) (a+b)^3(a-b)^3$$

$$(3) (x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$$

$$(4) (x+1)(x+3)(x-2)(x-4)$$

풍뎡
POINT

- 곱셈 공식을 적용할 수 있는 부분만 먼저 전개해.
- 공통부분이 있을 때는 일단 한 문자로 치환한 후 곱셈 공식을 이용해.
- () () () ()의 끝은 공통부분이 나오도록 짝을 짓고 곱셈 공식을 이용해.

풀이 • (1) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$ ①

$$= (a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$$

$$= (a^4-1)(a^4+1)$$

$$= a^8-1$$

① $(a-1)(a+1)$ 을 먼저 전개한다.

$$(2) (a+b)^3(a-b)^3$$

$$= \{(a+b)(a-b)\}^3$$
 ②

$$= (a^2-b^2)^3$$

$$= a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$$

② $(a+b)(a-b)$ 를 먼저 전개한다.

$$(3) (x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$$

$$= (\underline{x^2+3}-2x)(\underline{x^2+3}+2x)$$
 ③

$$= (X-2x)(X+2x)$$

$$\leftarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$= X^2-(2x)^2$$
 ④

$$= (x^2+3)^2-(2x)^2$$

$$= x^4+6x^2+9-4x^2$$

$$= x^4+2x^2+9$$

③ $x^2+3=X$ 로 치환한다.

④ X 대신 x^2+3 을 대입한다.

$$(4) (x+1)(x+3)(x-2)(x-4)$$

$$= \{(x+1)(x-2)\} \{(x+3)(x-4)\}$$
 ⑤

$$= (\underline{x^2-x}-2)(\underline{x^2-x}-12)$$
 ⑥

$$= (X-2)(X-12)$$

$$= X^2-14X+24$$
 ⑦

$$= (x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$$

$$= x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$$

$$= x^4-2x^3-13x^2+14x+24$$

⑤ 전개식에서 공통부분이 생기도록 2개씩 묶는다.

⑥ $x^2-x=X$ 로 치환한다.

⑦ X 대신 x^2-x 를 대입한다.

☞ (1) a^8-1 (2) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$ (3) x^4+2x^2+9 (4) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

풍뎡 강의
NOTE

복잡한 식을 전개할 때는 어떻게 접근할 지 먼저 찾아내는 게 중요하다. 동일한 유형의 문제를 많이 풀어 봄으로써 풀이 방법에 익숙해지고, 식에서 특정 부분을 먼저 전개하거나 어떤 것을 치환해야 하는 지 판단하는 능력을 길러야 한다.

04-1 유사

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

(2) $(x+2)^3(x-2)^3$

(3) $(x+1)^3(x^2-x+1)^3$

04-2 유사

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-y+z)(x+y-z)$

(2) $(x^2+3x+2)(x^2+3x-3)$

(3) $(x+1)(x-2)(x^2-x+2)$

04-3 유사

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

(2) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

(3) $(x-1)(x-2)(x+5)(x+6)$

04-4 변형 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$ 을 전개하여라.**04-5** 변형 $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ 을 전개하여라.**04-6** 변형 $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)-3x^2+6x-12$ 를 전개한 식이 $x^4+ax^3+bx^2+cx+28$ 일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

필수유형 05 곱셈 공식을 이용한 식 또는 수의 계산

다음 물음에 답하여라.

- (1) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값이 2^m-1 일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.
- (2) $101 \times (100^2-100+1)$ 의 값이 10^m+1 일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.
- (3) $x^8=16$ 일 때, $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ 의 값을 구하여라.

**품셈
POINT**

복잡한 식 또는 수의 계산은 곱셈 공식을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형해!

풀이 (1) STEP1 주어진 식에 $(2-1)$ 을 곱하기

$$\begin{aligned} & (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \textcircled{1} \\ &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$

① $2-1=1$ 이므로 $(2+1)$ 을 $(2-1)(2+1)$ 로 변형하여 적용한다.

STEP2 m 의 값 구하기

따라서 m 의 값은 32이다.

(2) STEP1 주어진 식을 변형하여 간단히 하기

$$\begin{aligned} 101 \times (100^2-100+1) \textcircled{2} &= (100+1)(100^2-100+1) \textcircled{3} \\ &= 100^3+1 \\ &= 10^6+1 \end{aligned}$$

② $101=100+1$ 로 생각한다.

③ 100이 반복되므로 한 문자로 생각한다.

STEP2 m 의 값 구하기

따라서 m 의 값은 6이다.

$$\begin{aligned} (3) & (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \\ &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) \\ &= (x^4-1)(x^4+1) \\ &= x^8-1 \textcircled{4} \\ &= 16-1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

④ $x^8=16$ 을 대입한다.

답 (1) 32 (2) 6 (3) 15

**품셈 강의
NOTE**

수를 보다 빠르게 계산하는 방법으로 곱셈 공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3, (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

이 자주 쓰인다. 또한, 위의 문제 (1)에서처럼 1을 $(2-1)$ 로 바꾸어 생각하는 센스도 필요하다.

05-1 ● 유사

$(6+5)(6^2+5^2)(6^4+5^4)$ 의 값이 6^m-5^n 일 때, 자연수 m, n 의 값을 각각 구하여라.

05-2 ● 유사

$99 \times (10000 + 100 + 1)$ 의 값이 $10^m - 1$ 일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.

05-3 ● 변형

$x^3=10$ 일 때,

$(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$ 의 값을 구하여라.

05-4 ● 변형

$$(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)\cdots(4^a+1)=\frac{1}{a}(4^b-1)$$

일 때, 자연수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

05-5 ● 변형

$$\frac{2023 \times (2022^2 - 2022 + 1)}{2021 \times 2022 + 1} \text{을 계산하여라.}$$

05-6 ● 실력

곱셈 공식을 이용하면 $103^2 + 499 \times 501$ 은 n 자리의 자연수라고 한다. 이때 n 의 값을 구하여라.

필수유형 06 미지수가 2개인 곱셈 공식의 변형

다음 물음에 답하여라.

(1) $x+y=4$, $x^2+y^2=10$ 일 때, x^3+y^3 의 값을 구하여라.

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=14$ 일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하여라. (단, $x>0$)

(3) $x^2-2x-1=0$ 일 때, $x^3-\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하여라.

포인트

두 수의 합과 곱을 알면 곱셈 공식의 변형을 이용하여 두 수에 대한 식의 값을 구할 수 있어.

먼저 주어진 조건을 이용하여 (1)은 xy 의 값, (2)는 $x+\frac{1}{x}$ 의 값을 구해야 하고

(3)은 $x^2-2x-1=0$ 에서 $x-\frac{1}{x}$ 의 값을 구해야 해.

풀이 (1) STEP1 xy 의 값 구하기

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 4^2 = 10 + 2xy \quad \therefore xy = 3$$

STEP2 x^3+y^3 의 값 구하기

$$\therefore x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 4^3 - 3 \times 3 \times 4 = 28$$

(2) STEP1 $x+\frac{1}{x}$ 의 값 구하기

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{에서}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 14 + 2 = 16 \quad \therefore x+\frac{1}{x} = 4 \quad (\because x>0)$$

STEP2 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값 구하기

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{①} = 4^3 - 3 \times 4 = 52$$

$$\text{① } a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

(3) STEP1 양변을 x 로 나누기

$$x^2-2x-1=0 \text{에서 } x \neq 0 \text{②이므로 양변을 } x \text{로 나누면}$$

$$x-2-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=2$$

STEP2 $x^3-\frac{1}{x^3}$ 의 값 구하기

$$\therefore x^3-\frac{1}{x^3} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x-\frac{1}{x}\right) = 2^3 + 3 \times 2 = 14$$

$$\text{② } x^2-2x-1=0 \text{에 } x=0 \text{을}$$

대입하면 성립하지 않으므로 $x \neq 0$

답 (1) 28 (2) 52 (3) 14

포인트

$x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구할 때는 $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ 의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$$(1) x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

$$(2) x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right), x^3-\frac{1}{x^3} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

06-1 ● 유사

$x-y=3$, $x^2+y^2=17$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(단, $x>0$, $y>0$)

- (1) xy
- (2) x^3-y^3
- (3) $x+y$

06-2 ● 유사

$x-\frac{1}{x}=3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(단, $x>1$)

- (1) $x^2+\frac{1}{x^2}$
- (2) $x^3-\frac{1}{x^3}$
- (3) $x+\frac{1}{x}$

06-3 ● 변형

$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

- (1) x^3+y^3
- (2) x^3-y^3

06-4 ● 변형

$x^2-3x+1=0$ 일 때, $x^3+3x^2+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하여라.

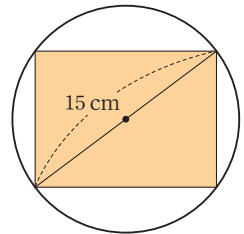
06-5 ● 실력

$a+b=3$, $a^3+b^3=9$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

- (1) a^4+b^4
- (2) a^5+b^5

06-6 ● 실력

오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 15 cm인 원에 둘레의 길이가 42 cm인 직사각형이 내접할 때, 이 직사각형의 넓이를 구하여라.



**발전유형 07****미지수가 3개인 곱셈 공식의 변형**

$a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=12$, $abc=-16$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $ab+bc+ca$

(2) $a^3+b^3+c^3$

(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

(4) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

**풍뎡
POINT**

세 문자에 대한 식의 값을 구하려면 적당한 곱셈 공식의 변형을 이용해!

풀이 •

$$\begin{aligned} (1) \quad (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \text{에서} \\ 2^2 &= 12+2(ab+bc+ca) \\ \therefore ab+bc+ca &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \text{ ①} \quad \text{① (1)에서 } ab+bc+ca=-4 \\ &= 2 \times (12+4) + 3 \times (-16) \\ &= -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{bc+ca+ab}{abc} \\ &= \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \\ &= (ab+bc+ca)^2 \\ &\quad -2(ab \times bc+bc \times ca+ca \times ab) \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c+abc^2+a^2bc) \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\ &= (-4)^2 - 2 \times (-16) \times 2 \\ &= 80 \end{aligned}$$

답 (1) -4 (2) -16 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 80

**풍뎡 강의
NOTE**

곱셈 공식을 적용하기 위해서는 주어진 조건을 이용할 수 있도록 식의 형태를 변형하는 과정이 필요하다.

07-1 기본

$x+y+z=4$, $xy+yz+zx=5$, $xyz=2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x^2+y^2+z^2$

(2) $x^3+y^3+z^3$

07-2 유사

$x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=11$, $xyz=-3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $xy+yz+zx$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

(3) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

07-3 변형

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=20$, $a^3+b^3+c^3=60$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

07-4 변형

$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $abc=-2$ 일 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$ 의 값을 구하여라.

07-5 실력

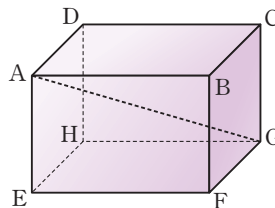
$a-b=-5$, $b-c=-1$ 일 때,

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 의 값을 구하여라.

07-6 실력

기출

다음 그림과 같이 모든 모서리 길이의 합이 20인 직육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. $\overline{AG}=\sqrt{13}$ 일 때, 직육면체 $ABCD-EFGH$ 의 겉넓이를 구하여라.



필수유형 08 다항식의 나눗셈

다음 물음에 답하여라.

- (1) 다항식 $2x^3 + x^2 - x + 5$ 를 다항식 $P(x)$ 로 나누었을 때의 몫이 $2x - 3$ 이고 나머지가 $11x - 4$ 일 때, 다항식 $P(x)$ 를 구하여라.
- (2) 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $x^2 + 3x - 2$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x - 7$ 이고 나머지가 $26x - 9$ 일 때, 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구하여라.

**풍샘
POINT**

$A \div B$ ($B \neq 0$)의 몫이 Q , 나머지가 R 일 때, $A = BQ + R$ 이므로 $A - R = BQ$
즉, $A - R$ 를 Q 로 나누면 나누는 식 B 를 찾을 수 있어!

풀이 ● (1) STEP1 나눗셈을 등식으로 나타내기

$$2x^3 + x^2 - x + 5 = P(x)(2x - 3) + 11x - 4 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} P(x)(2x - 3) &= 2x^3 + x^2 - x + 5 - (11x - 4) \\ &= 2x^3 + x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

STEP2 다항식을 직접 나누어 $P(x)$ 구하기

따라서 $2x^3 + x^2 - 12x + 9$ 를 $2x - 3$ 으로 나누면

오른쪽과 같으므로

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x^3 + x^2 - 12x + 9) \div (2x - 3) \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 3 \\ 2x - 3 \overline{) 2x^3 + x^2 - 12x + 9} \\ \underline{2x^3 - 3x^2} \\ 4x^2 - 12x \\ \underline{4x^2 - 6x} \\ - 6x + 9 \\ \underline{- 6x + 9} \\ 0 \end{array}$$

(2) STEP1 $f(x)$ 구하기

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 3x - 2)(3x - 7) + 26x - 9 \\ &= 3x^3 - 7x^2 + 9x^2 - 21x - 6x + 14 + 26x - 9 \\ &= 3x^3 + 2x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

STEP2 $f(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 몫과 나머지 구하기

다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누면 오른쪽과 같으
므로 몫은 $3x + 5$, 나머지는 x 이다.

$$\begin{array}{r} 3x + 5 \\ x^2 - x + 1 \overline{) 3x^3 + 2x^2 - x + 5} \\ \underline{3x^3 - 3x^2 + 3x} \\ 5x^2 - 4x + 5 \\ \underline{5x^2 - 5x + 5} \\ x \end{array}$$

답 (1) $x^2 + 2x - 3$ (2) 몫: $3x + 5$, 나머지: x

**풍샘 강의
NOTE**

- 자연수의 나눗셈에서 자릿수를 맞춰서 계산하듯이 다항식의 나눗셈에서는 차수를 맞춰서 계산해야 한다. 이때 항이 없는 차수는 그 자리를 비워 두고 계산한다.
- 자연수의 나눗셈에서 나머지가 나누는 수보다 작듯이 다항식의 나눗셈에서는 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작아야 한다. 즉, 나머지의 차수가 나누는 수의 차수보다 작을 때까지 나눈다.

08-1 유사

다항식 $x^4 - 3x^3 + x^2 + 12x - 8$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나누었을 때의 몫이 $x^2 - 2x + 30$ 이고 나머지가 $7x + 4$ 일 때, 다항식 $P(x)$ 를 구하여라.

08-2 유사

다항식 $f(x)$ 를 다항식 $3x^2 - x + 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $2x - 30$ 이고 나머지가 $-3x + 4$ 일 때, 다항식 $f(x)$ 를 $2x^2 - 3x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구하여라.

08-3 변형

다항식 $x^4 + 2x^3 - 4x^2 + ax - 5$ 를 $x^2 - x + 4$ 로 나눌 때의 몫이 $x^2 + bx - 50$ 이고 나머지가 15일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

08-4 변형

다항식 $2x^3 + x^2 + ax + 60$ 이 $x^2 - x + b$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

08-5 실력

$x^2 + 8x + 2 = 0$ 일 때, $2x^3 + 15x^2 - 4x + 6$ 의 값을 구하여라.

08-6 실력

다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 3x + 1$ 로 나눌 때의 몫이 $x^2 - 3x + 2$, 나머지가 $-3x - 30$ 이다. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $Q(-2) + R(6)$ 의 값을 구하여라.

실전 연습 문제

01

세 다항식 $A = x^2 - 2xy$, $B = x^2 - xy + y^2$,
 $C = -2x^2 - 3xy + 4y^2$ 에 대하여 $A - (2B - C)$ 를 계
 산하면?

- ① $-3x^2 - 6xy + 5y^2$ ② $-3x^2 - 3xy + 2y^2$
 ③ $3xy - 3x^2$ ④ $x^2 + 3xy - 6y^2$
 ⑤ $3x^2 + 3xy - 6y^2$

02

두 다항식 $A = x^3 - 2x^2 + 5x$,
 $B = -2x^3 + x^2 - 3x + 4$ 에 대하여
 $A - 2(X + B) = -3A$ 를 만족시키는 다항식 X 를 구
 하여라.

03 서술형

두 다항식 A, B 에 대하여
 $A + B = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$, $A - B = 3x^2 - 4x + 1$ 일
 때, $3A - 2B$ 를 계산하여라.

04

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ 의 전개식에서
 x^4 의 계수는?

- ① 10 ② 12 ③ 15
 ④ 18 ⑤ 20

05

다음 식의 전개가 옳지 않은 것은?

- ① $(a+b-1)^2 = a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b$
 ② $(x-2y)^3 = x^3 - 6x^2y - 12xy^2 - 8y^3$
 ③ $(3a+b)(9a^2 - 3ab + b^2) = 27a^3 + b^3$
 ④ $(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9) = x^4 + 9x^2 + 81$
 ⑤ $(a-2)(a+2)(a^2+4) = a^4 - 16$

06

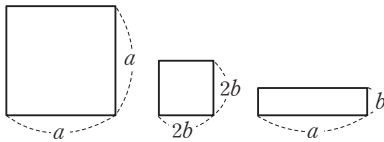
다항식 $(2x+3)^2(2x-1)^3$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를
 a , x^3 의 계수를 b 라고 할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

07

기출

서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 한 변의 길이가 각각 $a, 2b$ 인 두 개의 정사각형과 가로와 세로의 길이가 각각 a, b 이고 넓이가 4인 직사각형이 있다. 두 정사각형의 넓이의 합이 가로와 세로의 길이가 각각 a, b 인 직사각형의 넓이의 5배와 같을 때, 한 변의 길이가 $a+2b$ 인 정사각형의 넓이는?



- ① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

08

$(x+1)(x-2)(x-5)(x+10)$ 을 전개한 식이 $x^4+ax^3+bx^2+cx+100$ 일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

09

$x^2-3x-2=0$ 일 때, $x^3-2x^2-\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}$ 의 값은?

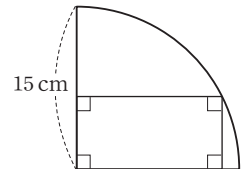
- ① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

10 서술형

두 양수 x, y 에 대하여 $x^2+xy+y^2=7$,
 $x^2-xy+y^2=3$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하여라.

11

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15 cm인 사분원에 내접하는 직사각형이 있다. 이 직사각형의 넓이가 108 cm^2 일 때, 직사각형의 둘레의 길이는?



- ① 30 cm ② 33 cm ③ 36 cm
④ 39 cm ⑤ 42 cm

12

$a+b+c=-8$, $a^2+b^2+c^2=54$, $abc=50$ 일 때,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{10}$ ② $-\frac{1}{25}$ ③ $\frac{1}{15}$
④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

13

$x+y+z=4$, $xy+yz+zx=4$, $xyz=1$ 일 때,
 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값은?

- ① 15 ② 18 ③ 21
 ④ 24 ⑤ 27

14

$x-y=1+\sqrt{3}$, $y-z=1-\sqrt{3}$ 일 때,
 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

15

세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여
 $a^2+b^2+c^2=108$, $a^3+b^3+c^3=3abc$ 를 만족시킬 때,
 삼각형의 둘레의 길이는?

- ① 16 ② 18 ③ 20
 ④ 22 ⑤ 24

16

다항식 x^3+3x^2+a 가 x^2+x+b 로 나누어떨어질 때,
 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

17

기출

두 다항식 $P(x)=3x^3+x+11$, $Q(x)=x^2-x+10$ 에
 대하여 다항식 $P(x)+4x$ 를 다항식 $Q(x)$ 로 나눈 나
 머지가 $5x+a$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

18 서술형

다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때의 몫이 $2x^2+50$ 이고,
 나머지가 $3x+10$ 이다. 다항식 $f(x)$ 를 x^2+x+1 로 나
 누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때,
 $Q(-1)+R(1)$ 의 값을 구하여라.

01

기출

가로 세 칸, 세로 세 칸으로 이루어진 표에 세 다항식 $2x-2$, $2x^2+4x$, $-x^2+x-3$ 을 다음 그림과 같이 한 칸에 하나씩 써넣었다. 가로, 세로, 대각선으로 배열된 각각의 세 다항식의 합이 $6x^2+12x$ 와 같도록 나머지 칸에 써넣으려 할 때, (가)의 위치에 알맞은 다항식은 $f(x)$ 이다. $f(10)$ 의 값을 구하여라.

$2x-2$	$2x^2+4x$	
(가)		$-x^2+x-3$

02

두 다항식 $(1+3x+5x^2)^3$, $(1+3x+5x^2+7x^3)^3$ 의 전개식에서 x 의 계수를 각각 a , b 라고 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

03

세 실수 x, y, z 가 다음 조건을 만족시킬 때, xyz 의 값을 구하여라.

(가) x, y, z 중 적어도 하나는 3이다.

(나) $3(x+y+z)=xy+yz+zx$

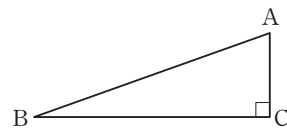
04

기출

다음 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다.

$\overline{AB}=2\sqrt{60}$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 3일 때,

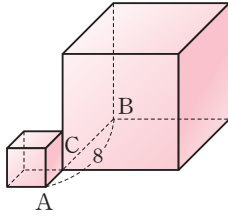
$\overline{AC}^3+\overline{BC}^3$ 의 값을 구하여라.



05

기출

오른쪽 그림과 같이 선분 AB 위의 점 C에 대하여 선분 AC를 한 모서리로 하는 정육면체와 선분 BC를 한 모서리로 하는 정육면체를 만든다. $\overline{AB}=8$ 이고 두 정육면체의 부피의 합이 224일 때, 두 정육면체의 겹넓이의 합을 구하여라.



(단, 두 정육면체는 한 모서리에서 만난다.)

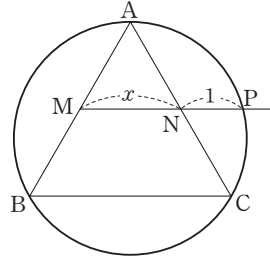
06

$x^3+y^3+z^3=41+3xyz$ 를 만족시키는 자연수의 순서쌍 (x, y, z) 를 구하여라. (단, $x \geq y \geq z$)

07

기출

정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라고 하자. 다음 그림과 같이 점 P는 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점이고 $\overline{NP}=10$ 이다. $\overline{MN}=x$ 라고 할 때, $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ 의 값을 구하여라.



08

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 일 때, $3x^4-6x^3+4x^2-7x+5$ 의 값을 구하여라.