



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2020-03-10

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[지수방정식의 풀이]

• 지수방정식: 지수에 미지수가 있는 방정식

• 지수방정식의 풀이

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (\text{단, } a > 0, a \neq 1)$$

(2) 지수가 같은 경우

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} (a > 0, b > 0) \Leftrightarrow a = b \text{ 또는 } f(x) = g(x)$$

(3) a^x 꼴이 반복되는 경우

$$a^x = t (t > 0) \text{로 치환 후 } t \text{에 대한 방정식을 푼다.}$$

(4) 밑에도 미지수가 있는 경우

$$x^{f(x)} = x^{g(x)} (x > 0) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ 또는 } x = 1$$

[지수부등식의 풀이]

• 지수부등식: 지수에 미지수가 있는 부등식

• 지수부등식의 풀이

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \text{ 꼴로 변형한 후}$$

① $a > 1$ 일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ ② $0 < a < 1$ 일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (2) a^x 꼴이 반복되는 경우

$$a^x = t (t > 0) \text{로 치환 후 } t \text{에 대한 부등식을 푼다.}$$

기본문제

[문제]

1. 다음 중 방정식 $(27^x)^x = 3^{4x}$ 의 해가 될 수 있는 것은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

[예제]

2. 두 집합

$$A = \{x \mid 16^{x+1} \leq 8^{x+2}, x \text{는 정수}\}$$

$$B = \left\{x \mid \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}, x \text{는 정수}\right\}$$

에 대하여 집합 $A - B$ 의 원소의 개수는?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

[문제]

3. 부등식 $4^{3x} \leq 8^{x-1}$ 의 해가 $x \leq p$ 이고,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^x \text{의 해가 } x \leq q \text{일 때, } pq \text{의 값은?}$$

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

4. 카메라의 조리개는 렌즈를 통과하는 빛의 양을 조절하기 위해 사용한다. 조리개의 눈금을 한 눈금 내리면 렌즈를 통과하는 빛의 양은 $\sqrt{3}$ 배가 된다고 할 때, 현재보다 $9\sqrt{3}$ 배 이상의 빛이 렌즈를 통과하게 하려면 조리개의 눈금을 최소한 몇 눈금 내려야 하는지 구하시오.

① 4눈금

② 5눈금

③ 6눈금

④ 7눈금

⑤ 8눈금

[문제]

5. 어느 지역에서 해발 h m인 곳의 기압 P hPa은

$P = 1000 \times 2^{-\frac{h}{a}}$ (a 는 상수)으로 나타내어진다고 한다. 이 지역에서 해발 4000 m인 곳의 기압이 250 hPa일 때, 해발 2000 m인 곳의 기압은 몇 hPa인가? (단, hPa는 기압을 나타내는 단위로 '헥토파스칼'이라 읽는다.)

- ① $250\sqrt{2}$ hPa ② 500 hPa
 ③ $500\sqrt{2}$ hPa ④ 1000 hPa
 ⑤ $1000\sqrt{2}$ hPa

평가문제

[스스로 확인하기]

6. $9^{x-2} \leq 27$ 의 해가 $x \leq p$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} < \left(\frac{9}{25}\right)^{x-3}$ 의 해가 $x < q$ 라 할 때, pq 의 값은?

- ① 16 ② 20
 ③ 24 ④ 28
 ⑤ 30

[스스로 확인하기]

7. 어떤 사건에 대한 정보의 양을 수학적으로 표현한 값을 정보량이라 한다. 정보 공학 이론에 따르면 어떤 사건의 정보량을 I ($I > 0$)라 할 때, 그 사건이 일어날 가능성 p 는 다음과 같다고 한다.

$$p = 2^{-I}$$

두 사건 A, B에 대한 정보량을 각각 I_A , I_B 라 하자.

사건 A에 대한 정보량의 범위가 $\frac{1}{2} \leq I_A \leq 2$ 이고,

사건 B에 대한 정보량의 범위가 $\frac{1}{4} \leq I_B \leq 4$ 일 때,

사건 A가 일어날 가능성 p_A 의 최댓값은 사건 B가 일어날 가능성 p_B 의 최솟값의 몇 배인가?

- ① 2배 ② 4배
 ③ $4\sqrt{2}$ 배 ④ 8배
 ⑤ $8\sqrt{2}$ 배

유사문제

8. 방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$
 ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$
 ⑤ 1

9. 부등식 $\frac{16}{4^{2x}} \geq 2^{1-3x}$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는?

- ① 1 ② 2
 ③ 3 ④ 4
 ⑤ 5

10. 연립부등식 $\begin{cases} \left(\frac{1}{16}\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \\ 9^x > \sqrt[3]{81} \times 3^x \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는?

- ① 2 ② 3
 ③ 4 ④ 5
 ⑤ 6

11. 방정식 $4^{2x-1} = 8^{x+1}$ 의 해를 a 라 할 때, 방정식 $a^{x+2} = \sqrt{125}$ 의 해는?

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$
 ③ $-\frac{3}{4}$ ④ -1
 ⑤ $-\frac{5}{4}$

12. 다음 두 부등식을 동시에 만족하는 정수 x 의 개수는?

$$\begin{aligned} & \cdot 2^{x-2} < 16 \\ & \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-2} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{2x-1} \end{aligned}$$

- ① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

13. 어느 호수의 수면에서 빛의 세기를 $I_0 \text{ W/m}^2$, 수심이 $x \text{ m}$ 인 곳에서 빛의 세기를 $I \text{ W/m}^2$ 라고 하면 $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$ 이라고 한다. 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{16}$ 이하가 될 때, 수심은 최소 몇 m이어야 하는지 구하시오.

- ① 16 m ② 17 m
③ 18 m ④ 19 m
⑤ 20 m

14. 부등식 $4^{2x-1} > \frac{1}{8\sqrt{2}}$ 의 해는?

- ① $x > -\frac{3}{2}$ ② $x > -\frac{7}{4}$
③ $x > -\frac{3}{8}$ ④ $x > -\frac{3}{4}$
⑤ $x > -\frac{11}{8}$

15. 어떤 펌프는 1초에 125L의 물을 운반할 수 있다. 펌프는 최초 구매 시점에서 1년이 지날 때마다 36%씩 효율이 떨어진다. 펌프를 구매하고 시간이 흘렀을 때 효율이 1초에 27L의 물을 운반 할 수 있었다면, 구입한지 몇 년이 지났는가?

- ① 0.5년 ② 1년
③ 1.5년 ④ 2년
⑤ 2.5년



정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $(27^x)^x = 3^{4x}$ 에서 $(3^{3x})^x = 3^{4x}$, $3^{3x^2} = 3^{4x}$ 이므로
 $3x^2 = 4x$, $x(3x-4) = 0$
 따라서 $x=0$ 또는 $x = \frac{4}{3}$

2) [정답] ②

[해설] 부등식 $16^{x+1} \leq 8^{x+2}$ 의 양변을 지수의 밑이 같아지게 변형하면
 $(2^4)^{x+1} \leq (2^3)^{x+2}$, $2^{4x+4} \leq 2^{3x+6}$
 밑 2는 1보다 크므로
 $4x+4 \leq 3x+6$, 즉 $x \leq 2$
 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$ 의 양변을 지수의 밑이 같아지게 변형하면
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$
 밑 $\frac{1}{2}$ 는 1보다 작으므로
 $2x+2 \geq 3x+1$, $x \leq 1$
 따라서 $A = \{x | x \leq 2 \text{인 정수}\}$,
 $B = \{x | x \leq 1 \text{인 정수}\}$ 이고 $A-B = \{2\}$ 이므로
 원소의 개수는 1개이다.

3) [정답] ④

[해설] 부등식 $4^{3x} \leq 8^{x-1}$ 에서 밑이 같아지도록 식을 변형하면 $(2^2)^{3x} \leq (2^3)^{x-1}$, $2^{6x} \leq 2^{3x-3}$
 밑 2는 1보다 크므로 $6x \leq 3x-3$, $x \leq -1$
 따라서 $p = -1$
 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^x$ 에서 밑이 같아지도록 식을 변형하면
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3} \geq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
 밑 $\frac{1}{3}$ 는 1보다 작으므로 $3x+3 \leq 2x$, $x \leq -3$
 따라서 $q = -3$
 $\therefore pq = 3$

4) [정답] ②

[해설] 조리개의 눈금을 현재보다 n 눈금 내리면 렌즈를 통과하는 빛의 양은 $(\sqrt{3})^n$ 배가 되므로
 $(\sqrt{3})^n \geq 9\sqrt{3} = 3^{\frac{5}{2}}$, $3^{\frac{n}{2}} \geq 3^{\frac{5}{2}}$
 이때, 밑 3는 1보다 크므로
 $\frac{n}{2} \geq \frac{5}{2}$, 즉 $n \geq 5$
 따라서 조리개의 눈금을 최소한 5눈금 내려야 한다.

5) [정답] ②

[해설] 해발 4000 m인 곳의 기압이 250 hPa이므로

$$250 = 1000 \times 2^{-\frac{4000}{a}}, \quad \frac{1}{4} = 2^{-\frac{4000}{a}}, \quad 2^{-2} = 2^{-\frac{4000}{a}}$$

$$-2 = -\frac{4000}{a} \text{에서 } a = 2000$$

따라서 해발 2000 m인 곳의 기압은

$$P = 1000 \times 2^{-\frac{2000}{2000}} = 1000 \times 2^{-1} = 500 \text{ (hPa)}$$

6) [정답] ④

[해설] $9^{x-2} \leq 27$ 에서 $3^{2(x-2)} \leq 3^3$

$$3 > 1 \text{이므로 } 2(x-2) \leq 3, \quad x \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{7}{2}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} < \left(\frac{9}{25}\right)^{x-3} \text{에서 } \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} < \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x-3)}$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \text{이므로 } x+2 > 2(x-3), \quad x < 8$$

$$\text{따라서 } q = 8$$

$$\therefore pq = 28$$

7) [정답] ⑤

[해설] 함수 $p = 2^{-I} = \left(\frac{1}{2}\right)^I$ ($I > 0$)은 I 의 값이 증가하면 p 의 값은 감소한다.

따라서 사건 A가 일어날 가능성 p_A 의 최댓값은

$$I_A = \frac{1}{2} \text{일 때 최댓값 } 2^{-\frac{1}{2}} \text{이고,}$$

사건 B가 일어날 가능성 p_B 의 최솟값은

$$I_B = 4 \text{일 때 최솟값 } 2^{-4} \text{이다.}$$

$$\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{2^{-4}} = 2^{\frac{7}{2}} \text{이므로}$$

$$p_A \text{의 최댓값은 } p_B \text{의 최솟값의 } 2^{\frac{7}{2}} = 8\sqrt{2} \text{배이다.}$$

8) [정답] ①

[해설] $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27$ 에서 $3^{1-2x} = 3^3$ 이므로

$$1-2x = 3 \quad \therefore x = -1$$

9) [정답] ③

[해설] $\frac{2^4}{2^{4x}} \geq 2^{1-3x}$, $2^{4-4x} \geq 2^{1-3x}$,

$$4-4x \geq 1-3x, \quad 3 \geq x$$

따라서 자연수의 개수는 3개

10) [정답] ②

[해설] $\left(\frac{1}{16}\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ 에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ 이므로

$$2 \geq x-2, \quad x \leq 4 \text{이다.}$$

$$9^x > \sqrt[3]{81} \times 3^x \text{에서 } 3^{2x} > 3^{\frac{4}{3}+x} \text{이므로}$$

$$2x > x + \frac{4}{3}, x > \frac{4}{3} \text{이다.}$$

따라서 연립부등식의 해는 $\frac{4}{3} < x \leq 4$ 이므로
정수 x 의 개수는 3개다.

11) [정답] ②

[해설] $4^{2x-1} = 8^{x+1}$ 에서 $2^{4x-2} = 2^{3x+3}$

$$4x-2=3x+3, x=5$$

$$a=5 \text{이므로 } 5^{x+2} = \sqrt{125} \text{에서}$$

$$5^{x+2} = 5^{\frac{3}{2}}, x+2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

12) [정답] ①

[해설] 부등식을 풀면 다음과 같다.

$$2^{x-2} < 16, 2^{x-2} < 2^4, x-2 < 4, x < 6$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-2} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{2x-1}, 3^{x+2} \geq 3^{-6x+3}$$

$$x+2 \geq -6x+3, 7x \geq 1, x \geq \frac{1}{7}$$

두 부등식의 공통범위는 $\frac{1}{7} \leq x < 6$ 이므로
 x 의 개수는 5개다.

13) [정답] ①

[해설] $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}} \leq \frac{1}{16} I_0$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}} \leq \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{로 1보다 작으므로 } \frac{x}{4} \geq 4$$

$$x \geq 16$$

따라서 최소 16m이어야 한다.

14) [정답] ③

[해설] $4^{2x-1} > \frac{1}{8\sqrt{2}}$ 에서 $2^{4x-2} > 2^{-\frac{7}{2}}$

지수의 밑이 2 > 1이므로

$$4x-2 > -\frac{7}{2} \text{에서 } x > -\frac{3}{8}$$

15) [정답] ③

[해설] 구입한 지 n 년 된 펌프의 효율은

$$125 \times \left(\frac{36}{100}\right)^n \text{이므로 } 125 \times \left(\frac{6}{10}\right)^{2n} = 27$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \frac{27}{125}, \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \text{이므로}$$

$$2n=3, n=1.5 \text{이다.}$$

따라서 펌프는 구매한지 1.5년이 지난 후이다.