01 함수의 연속과 불연속

(1) 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라 한다.

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
즉 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

② 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

③ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

(2) 함수의 불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라 한다.

◪ **다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.**

1. $f(x)=x^2$

2. $f(x)=x^2+5$

3. $f(x)=x^2-3x$

4. $f(x)=|x-1|$

5. $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$

6. $f(x)=\dfrac{|x|}{x-1}$

7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1)\\ 3 & (x=1)\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$

9. $f(x)=[x]$ **(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)**

◪ **[ ]안에 주어진 x의 값에 대하여 다음 함수의 연속성을 조사하여라.**

10. $f(x)=x^2-1$ $[x=1]$

11. $f(x)=x^2-2x$ $[x=0]$

12. $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ $[x=0]$

13. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$ $[x=1]$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

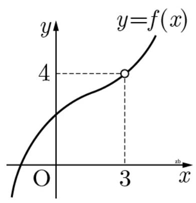
14. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & (x \neq 3) \\ 2 & (x=3) \end{cases}$ $[x=3]$

15. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $[x=0]$

16. $f(x)=[x]$ $[x=1]$

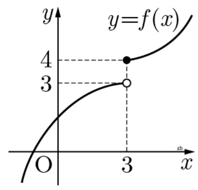
17. $f(x)=[x]$ $\left[x=\dfrac{1}{2}\right]$ **(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)**

18. **그래프가 다음과 같은 함수 $y=f(x)$가 $x=3$에서 불연속인 이유를 <보기>에서 모두 골라라.**



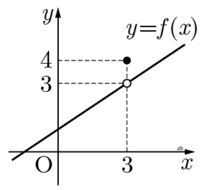
<보기>
ㄱ. $f(3)$이 정의되어 있지 않다.
ㄴ. 극한값 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$가 존재하지 않는다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to3}f(x)\neq f(3)$

19. **그래프가 다음과 같은 함수 $y=f(x)$가 $x=3$에서 불연속인 이유를 <보기>에서 모두 골라라.**



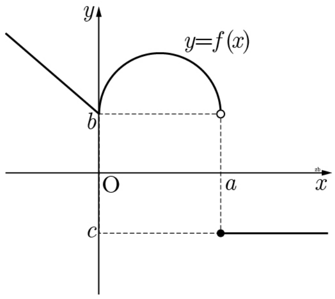
<보기>
ㄱ. $f(3)$이 정의되어 있지 않다.
ㄴ. 극한값 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$가 존재하지 않는다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to3}f(x)\neq f(3)$

20. **그래프가 다음과 같은 함수 $y=f(x)$가 $x=3$에서 불연속인 이유를 <보기>에서 모두 골라라.**



<보기>
ㄱ. $f(3)$이 정의되어 있지 않다.
ㄴ. 극한값 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$가 존재하지 않는다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to3}f(x)\neq f(3)$

21. **그래프가 다음과 같은 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 불연속인 이유를 <보기>에서 모두 골라라.**



<보기>

ㄱ. $f(a)$의 값이 존재하지 않는다.

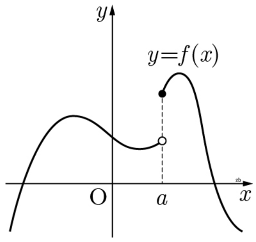
ㄴ. $\lim_{x\to a+} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㅁ. $\lim_{x\to a} f(x)$와 $f(a)$의 값이 존재하지만 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$이다.

22. **그래프가 다음과 같은 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 불연속인 이유를 <보기>에서 모두 골라라.**



<보기>

ㄱ. $f(a)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to a+} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㅁ. $\lim_{x\to a} f(x)$와 $f(a)$의 값이 존재하지만 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$이다.

◪ **다음과 같은 실수의 집합을 구간의 기호로 나타내어라.**

23. $\{x | -4 \le x \le 1\}$

24. $\{x | -3 < x < 2\}$

25. $\{x | 1 \le x < 4\}$

26. $\{x | -5 < x \le 0\}$

27. $\{x | x \ge -2\}$

28. $\{x | x < 3\}$

◪ **다음 함수의 정의역을 구간의 기호로 나타내어라.**

29. $f(x) = 2x^2 - 2$

30. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

◪ **다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.**

31. $f(x) = x^2 + 1$

32. $f(x) = x^2 - 9$

33. $f(x)=x^2+2x-3$

34. $f(x)=\sqrt{2-x}$

35. $f(x)=\sqrt{3-x}$

36. $f(x)=\sqrt{5-x}$

37. $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$

38. $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

39. $f(x)=3$

40. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

41. $f(x)=\dfrac{x}{x+5}$

42. $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$

◪ **다음 함수 $f(x)$가 주어진 점에서 연속이 되도록 a, b의 값을 정하여라.**

43. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax-2}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$**가** $x=2$**에서 연속**

44. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+2}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$ **가** $x=2$**에서 연속**

45. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-6}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$**가** $x=2$**에서 연속**

46. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$**가** $x=1$**에서 연속**

47. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-4}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ **가** $x=1$**에서 연속**

48. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$ **가** $x=1$**에서 연속**

49. **함수** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+5}+b}{x+1} & (x\neq -1) \\ 1 & (x=-1) \end{cases}$**가** $x=-1$**에서 연속**

50. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+7}-b}{x-2} & (x \neq 2) \\ 2 & (x=2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속

◪ 다음 함수가 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

51. $f(x)=\begin{cases} ax-b & (x<-1,\ x>1) \\ x^2 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$

52. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ ax+b & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$

53. $f(x)=\begin{cases} ax-1 & (x<1 \text{ 또는 } x>2) \\ x^2+x-b & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

54. $f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x<1 \text{ 또는 } x>2) \\ x^2-x+b & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

55. $f(x)=\begin{cases} ax+2 & (x<1 \text{ 또는 } x>3) \\ x^2+4x+b & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$

56. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$

57. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-a}{x-3} & (x \neq 3) \\ b & (x=3) \end{cases}$

◪ 다음 물음에 답하여라.

58. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

59. 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x^2-a & (x \leq 1) \\ x^3+2a & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

60. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4}$인 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, $f(2)\cdot f(-2)$의 값을 구하여라.

61. $x \neq \pm 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(1)\cdot f(-1)$의 값을 구하여라.

62. 함수 $f(x)=\dfrac{ax-4}{\sqrt{x^2+3}-2}$가 $x>-1$에서 연속일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

63. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{ax-5}{\sqrt{x^2+3}-2}$인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

64. $x \geq -2$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x+1)f(x) = \sqrt{x+2} - 1$을 만족할 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

65. $x \geq -2$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 등식 $(x-2)f(x) = \sqrt{x+2} - 2$를 만족할 때, $4f(2)$의 값을 구하여라.

66. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 등식 $(x-2)f(x) = x^2 + x + k$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

67. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 등식 $(x-3)f(x) = x^2 + x + k$를 만족한다. 이때, $f(3)$의 값을 구하여라.

68. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x+1)f(x) = x^2 + ax - 2$를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

69. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 등식 $(x^2 + x - 2)f(x) = x^3 + ax + b$를 만족시킬 때, a, b의 값을 구하여라.

70. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 등식 $(x^2 + x - 6)f(x) = x^3 + ax + b$를 만족할 때, a, b의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 연속

⇨ $f(1)=1,\ \lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

2) 연속

⇨ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+5)=6=f(1)$이므로

$x=1$에서 연속이다.

3) 연속

⇨ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2-3x)=-2=f(1)$이므로

$x=1$에서 연속이다.

4) 연속

⇨ $f(1)=0,\ \lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

5) 불연속

⇨ $f(1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

6) 불연속

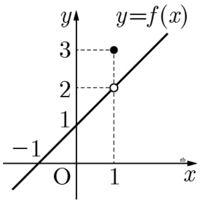
⇨ $f(1)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

7) 불연속

⇨ $f(1)=3,\ \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



8) 불연속

⇨ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$

$f(1)=1$이므로 $f(1)\neq\lim_{x\to1}f(x)$이다.

따라서 $x=1$에서 불연속이다.

9) 불연속

⇨ $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}[x]=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}[x]=0$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

10) 연속

⇨ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2-1)=0=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

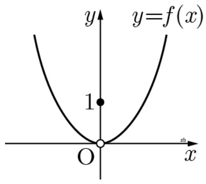
11) 연속

⇨ $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x^2-2x)=0=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

12) 불연속

⇨ $f(0)=1,\ \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

13) 불연속

⇨ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$이고

$f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

14) 연속

⇨ $\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x-1)=2$

$f(3)=2$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이므로 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

15) 불연속

⇨ $f(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

16) 불연속

⇨ $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}[x]=0$

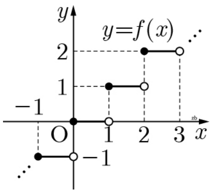
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}[x]=1$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

17) 연속
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 정수 n에 대하여



$\lim_{x\to n+}f(x)=n$, $\lim_{x\to n-}f(x)=n-1$

$\therefore \lim_{x\to n+}f(x)\neq\lim_{x\to n-}f(x)$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}+}[x]=0$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}-}[x]=0$이므로

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서는 연속이다.

18) ㄱ
⇨ $f(3)$이 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

19) ㄴ
⇨ $\lim_{x\to3+}f(x)=4$, $\lim_{x\to3-}f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)\neq\lim_{x\to3-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

20) ㄷ
⇨ $f(3)=4$이고, $\lim_{x\to3}f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)\neq f(3)$

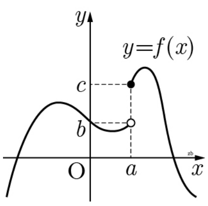
따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

21) ㄹ
⇨ $f(a)=c$, $\lim_{x\to a+}f(x)=c$, $\lim_{x\to a-}f(x)=b$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

22) ㄹ
⇨ 다음 그림에서

$f(a)=c$, $\lim_{x\to a+}f(a)=c$, $\lim_{x\to a-}f(x)=b$이므로 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.



23) $[-4,\ 1]$

24) $(-3,\ 2)$

25) $[1,\ 4)$

26) $(-5,\ 0]$

27) $[-2,\ \infty)$

28) $(-\infty,\ 3)$

29) $(-\infty,\ \infty)$
⇨ 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $(-\infty,\ \infty)$

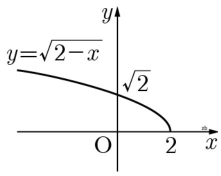
30) $[-2,\ 2]$
⇨ 주어진 함수의 정의역은 $4-x^2\geq0$, 즉 $-2\leq x\leq2$인 x의 값들의 집합이므로 $[-2,\ 2]$

31) $(-\infty,\ \infty)$
⇨ 함수 $f(x)=x^2+1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

32) $(-\infty,\ \infty)$
⇨ 함수 $f(x)=x^2-9$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

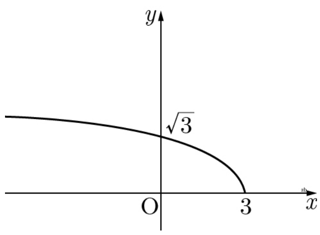
33) $(-\infty,\infty)$
⇨ 함수 $f(x)=x^2+2x-3$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\infty)$이다.

34) $(-\infty,\ 2]$
⇨ $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ 2]$이다.

35) $(-\infty,3]$
⇨ $y=\sqrt{3-x}=\sqrt{-(x-3)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 연속이 되는 구간은 $(-\infty,3]$이다.

36) $(-\infty,\ 5]$

⇨ 함수 $f(x)=\sqrt{5-x}$는 $5-x\ge 0$일 때, 즉 구간 $(-\infty,\ 5]$에서 연속이다.

37) $(-\infty,\ -1]\cup[3,\ \infty)$

⇨ 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$은 $x^2-2x-3\ge 0$, 즉 $(x-3)(x+1)\ge 0$에서 $x\le -1$ 또는 $x\ge 3$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ -1]\cup[3,\ \infty)$이다.

38) $(-\infty,-1]\cup[5,\infty)$

⇨ 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$는 $x^2-4x-5\ge 0$,

즉 $x\le -1$ 또는 $x\ge 5$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,-1]\cup[5,\infty)$이다.

39) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ 함수 $f(x)=3$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

40) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$

⇨ 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$는 분수함수이므로 $x\neq 1$일 때 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$이다.

41) $(-\infty,-5)\cup(-5,\infty)$

⇨ 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+5}$는 분수함수이므로 $x\neq -5$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,-5)\cup(-5,\infty)$이다.

42) $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$

⇨ 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$은 $x\neq -\dfrac{1}{2}$일 때, 즉 구간 $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$에서 연속이다.

43) $a=1,\ b=3$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-ax-2}{x-2}=b$

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\lim_{x\to 2}(x^2-ax-2)=0$

$4-2a-2=0\ \ \therefore a=1$

$b=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$

$\therefore a=1,\, b=3$

44) $a=-3,\ b=1$

⇨ $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+2}{x-2}=b\ \cdots$㉠

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+2)=0$이므로

$4+2a+2=0,\ 2a=-6\qquad \therefore\ a=-3\ \cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

45) $a=1,\ b=5$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-6}{x-2}=b$

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\therefore \lim_{x\to 2}(x^2+ax-6)=0$

$4+2a-6=0\ \ \therefore a=1$

$b=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$

$\therefore a=1, b=5$

46) $a=1,\ b=3$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-2}{x-1}=b$

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\therefore \lim_{x\to 1}(x^2+ax-2)=0$

$1+a-2=0\ \ \therefore a=1$

$b=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$

$\therefore a=1, b=3$

47) $a=3,\ b=5$

⇨ $x=1$에서 연속이려면 $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$이어야 하므로

$b=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-4}{x-1}$

한편, $x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다

따라서 $\lim_{x\to 1}(x^2+ax-4)=1+a-4=0$에서 $a=3$

$\therefore\ b=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+4)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+4)=5$

$\therefore\ a=3,\ b=5$

48) $a=8,\ b=16$

⇨ $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 하므

로

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=2$ … ㉠

한편, $x\to1$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}-b)=2a-b=0$에서

$b=2a$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$

$=a\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=a\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}=2$

$\therefore a=8,\ b=16$

49) $a=4,\ b=-8$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{a\sqrt{x+5}+b}{x+1}=1$ …㉠

$x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(a\sqrt{x+5}+b)=0$이므로

$2a+b=0$ $\therefore b=-2a$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{a\sqrt{x+5}-2a}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{a\{(x+5)-4\}}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{a(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{a}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{a}{4}$

즉 $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-8$

50) $a=12,\ b=36$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+7}-b}{x-2}=2$ …… ㉠

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+7}-b)=0$

$3a-b=0$ $\therefore b=3a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+7}-b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x+7}-3)}{x-2}$

$=a\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=a\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{a}{6}=2$

$\therefore a=12, b=36$

51) $a=0,\ b=-1$

⇨ $\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$, $a-b=1$ …… ㉠

$\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$, $-a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0,\ b=-1$

52) $a=0,\ b=1$

⇨ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서 $-a+b=1$ … ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서 $a+b=1$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=1$

53) $a=4,\ b=-1$

⇨ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=2$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$2a-1=2^2+2-b$ $\therefore 2a+b=7$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$a-1=1^2+1-b$ $\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=-1$

54) $a=2,\ b=3$

⇨ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$과 $x=2$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$a+1=1^2-1+b$ $\therefore a-b=-1$ … ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$2a+1=2^2-2+b$ $\therefore 2a-b=1$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$

55) $a=8,\ b=5$

⇨ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$a+2=1+4+b$ $\therefore a-b=3$ …㉠

또 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$

$3a+2=9+12+b$ $\therefore 3a-b=19$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8,\ b=5$

56) $a=4,\ b=4$

⇨ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2-a}{x-2}=b\ \cdots$㉠

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2-a)=0$이므로

$4-a=0\qquad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

$\therefore b=4$

57) $a=12,\ b=7$

⇨ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{x^2+x-a}{x-3}=b\ \cdots$㉠

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2+x-a)=0$이므로

$9+3-a=0\qquad \therefore a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+4)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+4)=7$

$\therefore b=7$

58) 7

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}(2x+5)=a,\ 2+5=a,\ \therefore a=7$

59) $\frac{2}{3}$

⇨ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^3+2a)=1+2a$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x^2-a)=3-a$

$f(1)=3-a$

즉 $1+2a=3-a$이므로

$3a=2\qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

60) -3

⇨ $f(x)$가 $x=2$와 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}(x+1)=3=f(2)$

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-2}(x+1)=-1=f(-2)$

$\therefore f(2)\cdot f(-2)=3\cdot(-1)=-3$

61) 8

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-1}(x+3)=2$

$\therefore\ f(1)\cdot f(-1)=4\times2=8$

62) 8

⇨ 함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 연속이므로 $x=1$에서 연속

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$f(1)=k$라 하면 $\lim_{x\to1}\frac{ax-4}{\sqrt{x^2+3}-2}=k\qquad\cdots$㉠

$x\to1$일 때, (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax-4)=a-4=0$에서 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{4(\sqrt{x^2+3}+2)}{x+1}=8$

$\therefore\ f(1)=8$

63) 10

⇨ 함수 $f(x)$가 양의 실수 전체에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$f(1)=k$라고 하면

$\lim_{x\to1}\frac{ax-5}{\sqrt{x^2+3}-2}=k$ ⋯⋯ ㉠

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax-5)=0$에서 $a-5=0$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{5x-5}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{5(\sqrt{x^2+3}+2)}{x+1}=10$

$\therefore f(1)=10$

64) $\frac{1}{2}$

⇨ $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\therefore f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}=\frac{1}{2}$

65) 1

⇨ $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore 4f(2)=4\lim_{x\to2}f(x)=4\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

$=4\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=4\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=4\cdot\frac{1}{4}=1$

66) 5

⇨ $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{x^2+x+k}{x-2}$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$를 만족시켜야 한다.

$x\to2$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+x+k)=4+2+k=0$에서 $k=-6$

$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+3)=5$

67) 7

⇨ $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$을 만족해야 한다.

$x\neq3$일 때, $f(x)=\frac{x^2+x+k}{x-3}$

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^2+x+k)=12+k=0$ $\therefore k=-12$

$\therefore f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+4)=7$

68) -3

⇨ $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$을 만족해야 한다.

$x\neq-1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax-2}{x+1}$

$x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax-2)=0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-2)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3$

69) $a=-3$, $b=2$

⇨ $x\neq-2$, $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$f(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-2}$

$x\to-2$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-2}(x^3+ax+b)=-8-2a+b=0$에서

$2a-b=-8$ ⋯ ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-2}$

$x\to1$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=1+a+b=0$에서

$a+b=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$

70) $a=-7$, $b=6$

⇨ $x\neq2$, $x\neq-3$일 때, $f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-6}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-6}$

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 2}(x^3+ax+b)=0$

즉, $8+2a+b=0$이므로 $2a+b=-8$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$f(-3)=\lim_{x \to -3}\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-6}$

$x \to -3$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to -3}(x^3+ax+b)=0$

즉, $-27-3a+b=0$이므로 $3a-b=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=6$