● 2회차

01 ①	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ⑤
06 ③	07 ②	08 ③	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ③	13 ③	14 ②	15 ①
16 ③	17 ①			

[서술형 1] 36

[서술형 2] $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

[서술형 3] 8

01 -125의 세제곱근 중 실수인 것은

$a=\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

81의 네제곱근 중 양수인 것은

$b=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

$\therefore a+b=-5+3=-2$

02 $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

03 ㄱ. $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

ㄴ. $(-2)^3\times(-2)^2=(-2)^{3+2}=(-2)^5$

ㄷ. $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=3^2=9$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 $\log_2 3\times\log_9 16=\log_2 3\times\log_{3^2} 2^4$

$=\log_2 3\times 2\log_3 2$

$=\frac{1}{\log_3 2}\times 2\log_3 2$

$=2$

05 $\log_a 2=4$에서 $\frac{1}{\log_2 a}=4$

$\therefore \log_2 a=\frac{1}{4}$

$\log_b 8=36$에서 $3\log_b 2=36$

$\log_b 2=12$, $\frac{1}{\log_2 b}=12$

$\therefore \log_2 b=\frac{1}{12}$

$\log_b a=\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}}=3$

06 함수 $y=\log_2 x+1$에서 밑 2는 1보다 크므로 함수 $y=\log_2 x+1$은 증가함수이다.

따라서 $x=8$일 때 최솟값은

$\log_2 8+1=\log_2 2^3+1=3+1=4$

07 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 5)$를 지나므로

$5=\log_2(2a+b)+4$, $\log_2(2a+b)=1$

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉠

$y=\log_2(ax+b)+4=\log_2 a\left(x+\frac{b}{a}\right)+4$이므로

곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은

$x+\frac{b}{a}=0$에서 $x=-\frac{b}{a}$

조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선의 점근선의 방정식은

$x+2=-\frac{b}{a}$ $\therefore x=-2-\frac{b}{a}$

즉 $-2-\frac{b}{a}=-3$이므로 $\frac{b}{a}=1$

$\therefore a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

$a+b=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

Lecture 도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a, y-b)=0$

x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입

08 $3^{2x+1}-2\cdot3^x<1$에서 $3\cdot(3^x)^2-2\cdot3^x-1<0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 $3t^2-2t-1<0$

$(3t+1)(t-1)<0$ $\therefore -\frac{1}{3}<t<1$

이때 $t>0$이므로 $0<t<1$

즉 $0<3^x<1$이므로 $0<3^x<3^0$

$\therefore x<0$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 -1이다.

09 진수의 조건에서 $x>0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=5$

$t=-1$일 때, $\log_2 x=-1$에서 $x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

$t=5$일 때, $\log_2 x=5$에서 $x=2^5=32$

따라서 실수 x의 값의 곱은

$\dfrac{1}{2}\cdot 32=16$

다른 풀이

진수의 조건에서 $x>0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-4t-5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이다.

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=4$이므로 $\log_2 \alpha\beta=4$

$\therefore \alpha\beta=2^4=16$

따라서 실수 x의 값의 곱은 16이다.

10 함수 $y=2^{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$

이때 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=-6$이므로 $b=-6$

즉 함수 $y=2^{x+a}-6$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $2=2^a-6$

$2^a=8=2^3 \qquad \therefore a=3$

$\therefore a-b=3-(-6)=9$

11 ① $30^\circ=30\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{6}$

② $-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=-60^\circ$

③ $90^\circ=90\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{2}$

④ $\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$

⑤ $-240^\circ=-240\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{4}{3}\pi$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

12 $120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{3}\pi$

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이는 $r\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi \qquad \therefore r=2$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

다른 풀이

$120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{3}\pi$

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이는

$r\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi \qquad \therefore r=2$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

13 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0 \qquad \therefore \sin\theta=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

또 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}3\sqrt{3}\sin\theta+\tan\theta&=3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}+(-\sqrt{2})\\&=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

14
$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=2\end{aligned}$$

이때 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

즉 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{2}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$$\begin{aligned}&=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)\\&=(-\sqrt{2})^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-\sqrt{2})\\&=-2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Lecture 곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(3) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

15 단위원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=1$

이때 단위원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하고, 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=x$

P_0과 P_5, P_1과 P_6, P_2와 P_7, P_3과 P_8, P_4와 P_9는 각각 원점에 대하여 대칭이므로 x좌표의 합은 0이다.

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta$

$=(\cos\theta+\cos 6\theta)+(\cos 2\theta+\cos 7\theta)$

$+(\cos 3\theta+\cos 8\theta)+(\cos 4\theta+\cos 9\theta)$

$+(\cos 5\theta+\cos 10\theta)$

$=0$

16 $a>0$이고 최댓값은 3, 최솟값은 -1이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=1$

또 $b>0$이고 주기는 π이므로

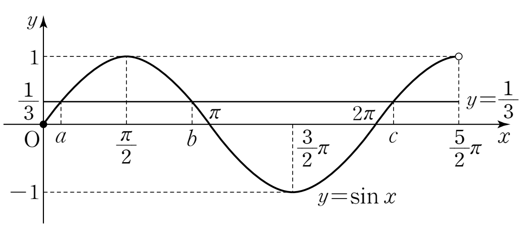
$\dfrac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b+c=2+2+1=5$

17 $3\sin x=1$에서 $\sin x=\dfrac{1}{3}$

즉 주어진 방정식의 해는 다음 그림에서

함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$의 교점의 x좌표이다.



이때 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $a+b=\pi$

또 함수 $y=\sin x$의 그래프의 주기가 2π이므로

$c-a=2\pi$

$\therefore a+\dfrac{b-c}{2}=\dfrac{2a+b-c}{2}=\dfrac{(a+b)-(c-a)}{2}$

$=\dfrac{\pi-2\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\left(a+\dfrac{b-c}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$

[서술형 1] $a^x=5$에서 $a=5^{\frac{1}{x}}$

$b^{2y}=5$에서 $b=5^{\frac{1}{2y}}$

$c^{3z}=5$에서 $c=5^{\frac{1}{3z}}$

$\therefore abc=5^{\frac{1}{x}}\cdot 5^{\frac{1}{2y}}\cdot 5^{\frac{1}{3z}}=5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}$ ❶

즉 $5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}=125=5^3$이므로

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=3$ ❷

위의 식의 양변에 12를 곱하면

$\dfrac{12}{x}+\dfrac{6}{y}+\dfrac{4}{z}=36$ ❸

채점 기준	배점
❶ abc를 밑이 5인 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $\dfrac{12}{x}+\dfrac{6}{y}+\dfrac{4}{z}$의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-\cos\theta)^2-1\cdot(2\cos\theta)<0$ ❶

$\cos^2\theta-2\cos\theta<0$

$\cos\theta=t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$t^2-2t<0$, $t(t-2)<0$

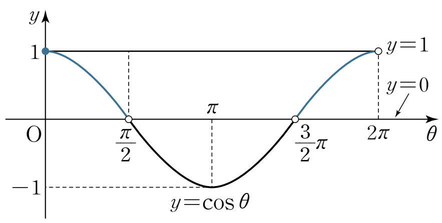
$\therefore 0<t<2$

이때 $-1\le t\le 1$이므로 $0<t\le 1$

$\therefore 0<\cos\theta\le 1$

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, 함수 $y=\cos\theta$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=1$은 다음 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$



❷

채점 기준	배점
❶ 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립할 조건을 알 수 있다.	3점
❷ θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{12}x$의 그래프의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}=24$

즉 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(12, 0)$이다.
점 B의 좌표를 $(k, 0)$이라 하면 점 C의 좌표는 $(12-k, 0)$이므로 $\overline{BC}=(12-k)-k=12-2k$

즉 $12-2k=8$이므로 $k=2$

$\therefore B(2, 0)$

❶

이때 점 A의 x좌표는 2이므로 y좌표는

$y=2\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 2\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\therefore \overline{AB}=1$

❷

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$8\cdot 1=8$

❸

채점 기준	배점
❶ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	3점
❷ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	3점
❸ 직사각형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	1점