

1-4-1.로그함수의 뜻과 그래프_천재(류희찬)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2020-03-10

2) 제작자 : 교육지대㈜

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다. ◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

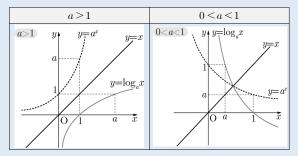
[로그함수]

a > 0, $a \neq 1$ 일 때,

•로그함수: 지수함수 $y=a^x$ 의 역함수, $y=\log_a x$

[로그함수의 그래프]

• 로그함수 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 의 그래프



- 로그함수의 그래프의 성질
- ① 정의역: 양의 실수 전체의 집합, 치역: 실수 전체의 집합
- ② 점근선: *y*축
- ③ a>1일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가 0< a<1일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

[로그함수를 이용한 수의 대소 비교]

- •로그함수 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 에서
- ① a>1일 때, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$
- ② 0 < a < 1일 때, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

[로그함수의 그래프의 평행이동]

- •로그함수 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 의 그래프를
- x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식
- $\Rightarrow y = \log_a(x m) + n$

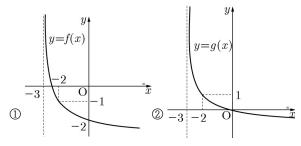
[로그함수의 그래프의 대칭이동]

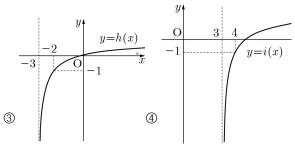
- •로그함수 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 의 그래프를
- ① x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 $\Rightarrow y = -\log_a x$
- ② y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 \Rightarrow $y = \log_a(-x)$
- ③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 \Rightarrow $y=-\log_a(-x)$

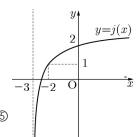
기본문제

[예제]

1. 지수함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 3$ 를 y = x에 대칭이동한 함수의 그래프로 옳은 것은?







[문제]

2. 다음 중 평행이동, 대칭이동했을 때, $y = \log_2 x$ 와 겹쳐질 수 없는 함수는?

- ① $y = \log_2(x-2)$
- $2 y = \log_2 x + 2$
- $3y = -\log_4 x + 1$
- $y = 2^{x-1} + 3$

$$(5) y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$$

[예제]



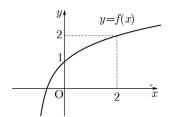
3. 다음 $\langle \pm 1 \rangle$ 중 함수 $y = \log_3(x-1) + 3$ 의 그래프와 동일한 점근선을 가지고 있는 함수를 있는 대로 고르시오.

<보기>

- $\neg y = \log_2(5-5x) + 3$
- $\bot. y = \log_2 x + 1$
- \Box . $y = -\log_7(2x-2) + 5$
- 1 -

- ② ⊏
- ③ ᄀ, ∟
- ④ ¬, ⊏
- ⑤ ∟, ⊏

- [문제]
- **4.** 다음은 $f(x) = \log_3(x-a) + b$ 의 그래프이다. y = f(x)에 대한 설명을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보기>

- ㄱ. $y=3^{x-1}-1$ 과 y=x에 대하여 대칭이다.
- \cup . 점근선은 y = -1이다.
- □. (8, 3)을 지난다.
- ① ¬
- ② L
- ③ ¬, ⊏
- ④ ∟, ⊏
- ⑤ ┐, ∟, ⊏

- [예제]
- 5. 로그함수의 성질을 이용하여 두 수의 크기를 비교한 것 중 옳지 않은 것은?
 - ① $\log_{\frac{1}{2}} 6 < \log_{\frac{1}{2}} 5$

 - $3 \log_{\log 15} 30 < \log_{\log 15} 40$
 - $4 \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2}$
 - ⑤ $\log_{\pi} 10 < \log_{\pi} 100$

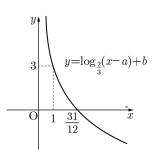
- [문제]
- **6.** 세 수 A=3, $B=\log_3 30$, $C=4\log_3 2$ 의 크기를 로그함수의 성질을 이용하여 옳게 비교한 것은?
 - ① A < C < B
- ② B < A < C
- \bigcirc *C* < *A* < *B*
- ⑤ C < B < A

평가문제

[스스로 확인하기]

- 7. 방정식 $x^2 7x + 4 = 0$ 의 두 근이 α , β 일 때, 로 그함수 $y = \log_{\alpha\beta}\{x (\alpha + \beta)\}$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?
- \neg . 정의역은 $\{x | x > 7\}$ 이다.
- \bot . x의 값이 증가하면 y의 값은 증가한다.
- ㄷ. 그래프는 (8, 1)을 지난다.
- ① ¬
- ② □
- ③ 7, ∟
- ④ ∟, ⊏
- ⑤ 7, ∟, ⊏

- [스스로 확인하기
- **8.** 다음은 로그함수 $y = \log_{\frac{2}{3}}(x-a) + b$ 의 그래프이다. 이때, 3ab의 값은?



1 1

2 2

3 3

4

⑤ 5

[스스로 확인하기]

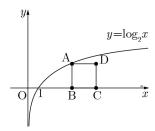
9. 실수 a, b가 $0 < a < \frac{1}{b} < c < 1$ 을 만족시킬 때, 다음 세 수의 부호로 알맞은 것을 고르시오.

$$\log_a b$$
 , $\log_b c$, $\log_c a$

- ① $\log_a b < 0$, $\log_b c < 0$, $\log_c a < 0$
- ② $\log_a b < 0$, $\log_b c < 0$, $\log_a c > 0$
- $3 \log_a b < 0$, $\log_b c > 0$, $\log_a a < 0$
- $(4) \log_a b > 0$, $\log_b c < 0$, $\log_c a > 0$
- $(5) \log_a b > 0$, $\log_b c > 0$, $\log_c a < 0$

[스스로 확인하기]

10. 다음 그림과 같이 로그함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위에 점 A와 x축 위의 두 점 B, C에 대하여 사각 형 ABCD가 한 변의 길이가 2인 정사각형일 때, 점 D의 x좌표는?



① 2

② 3

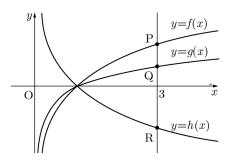
3 4

4) 5

⑤ 6

[스스로 확인하기]

11. 1 < a < b일 때, 직선 x = 3이 세 함수 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$, $h(x) = -\log_a x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. $\overline{PQ}: \overline{QR} = 1:3$ 일 때, g(a)의 값을 구하시오.



- ① $\frac{1}{2}$
- $2\frac{1}{2}$
- $3\frac{1}{4}$
- $4 \frac{1}{5}$

[스스로 확인하기]

12. 다음은 지수함수와 로그함수를 이용하여 수를 비교한 것이다. 이때 빈 칸에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

(2)
$$x_1 > 0$$
, $x_2 > 0$ 이고 $a > 1$ 일 때 $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \square x_2$ $0 < a < 1$ 일 때 $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \square x_2$

- ② >, >, <, <
- ③ <, >, >, <
- 4 <, >, <, >
- ⑤ <, <, >, >

[스스로 확인하기]

- **13.** x>0에서 정의된 함수 $f(x)=\log_2(3x^2+1)$, $g(x)=\log_3(x+2)$ 에 대하여 $(g^{-1}\circ f^{-1})(2)$ 의 값을 구하시오.
 - 1 1

② 3

3 5

4 7

⑤ 9

[스스로 마무리하기]

14. 다음 $\langle \pm 1 \rangle$ 에서 함수 $y = -3^{x-3} + 3$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㄱ. 치역은 $\{y|y \le 3$ 인 모든 실수 $\}$ 이다.
- $\mathsf{L}.\ x$ 의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
- \sqsubset . 역함수는 $y = \log_{\frac{1}{2}}(3-x) + 3$ 이다.
- 1) L
- ② ⊏
- ③ 7, ∟
- ④ ¬. ⊏
- ⑤ ᄀ, ㄴ, ㄷ

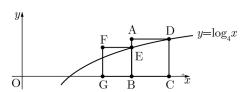
유사문제

15. 로그함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-k) + 4$ 의 그래프가 점

(5, 3)을 지날 때, 이 그래프의 점근선의 방정식은? (단, k는 상수이다.)

- ① x = 1
- ② x = 2
- (3) x = 3
- (4) y = 1
- ⑤ y = 2

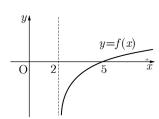
16. 다음 그림에서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이 가 2일 때, 정사각형 EFGB의 한 변의 길이는?



- ① $\frac{1}{2} + \log_4 7$
- ② $3 \log_4 7$

③ 3

- $4 3 + \log_4 7$
- $54 \log_4 7$
- **17.** 함수 y = f(x)의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이때, 상수 m, n에 대하여 곱 mn의 값은?



- $\bigcirc -2$

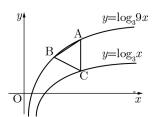
3 0

4 1

⑤ 2

- **18.** 세 수 $A = \log_5 3$, $B = \log_9 23$, $C = \log_3 5$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?
 - ① A < B < C
- ② A < C < B
- $\textcircled{4} \ B < A < C$
- ⑤ C < A < B

19. 함수 $y = \log_3 9x$ 의 그래프 위의 두 점 A, B와로그함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프 위의 점 C에 대하여선분 AC가 y축에 평행하고, 삼각형 ABC가 정삼각형이다. 점 B의 좌표를 (p, q)라고 할 때, $q + \log_3 p$ 의 값은?



- ① $2 \log_3 5$
- ② $2 \log_3 4$
- $3 \log_3 5$
- $4 \log_3 4$
- $5 3 + \log_3 4$

4

정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설] y=x에 대칭이동한 함수는 역함수와 같다.

따라서
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 3$$
의 역함수를 구하기 위해

주어진 함수를
$$x$$
에 대해 정리하면

$$y+3=3^{-x-1}$$
, $\log_3(y+3)=-x-1$

$$x = -\log_3(y+3) - 1$$

위 식에서 x대신 y, y대신 x를 대입하면

$$y = -\log_3(x+3) - 1$$

이는 $-\log_3 x$ 를 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프이므로 ①과 같

다.

2) [정답] ③

[해설] ① $y = \log_2 x$ 를 x축의 방향으로 2만큼 평행이 동하면 $y = \log_2(x-2)$ 이다.

② $y = \log_2 x$ 를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동 하면 $y = \log_2 x + 2$ 이다.

④ $y = \log_2 x$ 를 y = x에 대하여 대칭이동 한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y = 2^{x-1} + 3$ 이다.

⑤ $y = \log_2 x$ 를 y = -x에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \circ | \cdot \cdot \rangle.$$

3) [정답] ④

[해설] 함수 $y = \log_3(x-1) + 3$ 의 그래프의 점근선은 x = 1이다.

<보기>에서 x=1을 점근선으로 갖는 함수는

 $y = \log_2 5(1-x) + 3 = \log_2 (5-5x) + 3$,

 $y = -\log_7 2(x-1) + 5 = -\log_7 (2x-2) + 5$ or:

4) [정답] ③

[해설] f(x)가 (0, 1)과 (2, 2)를 지나므로

$$\log_3(-a) + b = 1$$
, $\log_3(2-a) + b = 2$

두 식을 연립하면 a = -1, b = 1

따라서 $f(x) = \log_3(x+1) + 1$

ㄱ. $y = \log_3(x+1) + 1$ 에서 x와 y의 자리를 바꾼

후 y에 대해 정리하면 $y=3^{x-1}-1$ 이다. (참)

L. 점근선은 x = -1이다. (거짓)

C. f(8) = 3이므로 (8, 3)을 지난다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5) [정답] ④

[해설] ① $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 에서 로그의 밑 $\frac{1}{2}$ 은 1보다 작으므로 x값이 증가하면 y값은 감소한다. 따라서

$$\log_{\frac{1}{2}}6 < \log_{\frac{1}{2}}5$$
 (참)

② $y = \log_3 x$ 에서 로그의 밑 3은 1보다 크므로 x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

따라서
$$\log_3 \frac{1}{8} < \log_3 \frac{1}{7}$$
 (참)

③ $y = \log_{\log 15} x$ 에서 로그의 밑 $\log 15$ 는 $1 = \log 10$ 보다 크므로 x값이 증가하면 y값도 증가한다. 따라서 $\log_{\log 15} 30 < \log_{\log 15} 40$ (참)

④ $y = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$ 에서 로그의 밑 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 은 1보다 작으므로 x값이 증가하면 y값은 감소한다. 따라서 $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2}$ (거짓)

⑤ $y = \log_{\pi} x$ 에서 로그의 밑 π 는 1보다 크므로 x값이 증가하면 y값도 증가한다. 따라서 $\log_{\pi} 10 < \log_{\pi} 100$ (참)

6) [정답] ④

[해설] $A = 3 = \log_3 27$, $B = \log_3 30$,

 $C = 4\log_3 2 = \log_3 16$

이때 $y = \log_3 x$ 에서 로그의 밑 3은 1보다 크므로 x값이 증가하면 y값도 증가한다.

따라서 C < A < B

7) [정답] ③

[해설] 방정식 $x^2-7x+4=0$ 의 두 근이 α , β 이면, 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=4$ 따라서 $y=\log_{\alpha}\{x-(\alpha+\beta)\}=\log_{4}(x-7)$

ㄱ. 정의역은 $\{x | x > 7\}$ 이다. (참)

oxdot . 로그의 밑이 4>1이므로 함수는 x값이 증가하면 y값도 증가한다. (참)

ㄷ. 함수의 그래프는 (8, 0)을 지난다. (거짓)

8) [정답] ②

[해설] $y = \log_{\frac{2}{3}}(x-a) + b$ 에서 (1, 3)을 지나므로

$$\frac{31}{12} - a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-b} \cdots \bigcirc$$

ⓒ에 ⊙을 대입하면

$$\frac{19}{12} + \left(\frac{2}{3}\right)^{3-b} = \frac{19}{12} + \frac{8}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-b} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-b}$$

$$\frac{19}{12} = \frac{19}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-b}, \ \left(\frac{2}{3}\right)^{-b} = \frac{9}{4}, \ b = 2$$

b=2를 \bigcirc 에 대입하면 $a=\frac{1}{3}$

$$\therefore 3ab = 3 \times \frac{1}{3} \times 2 = 2$$

9) [정답] ②

- [해설] (i) 0 < a < 1이므로 함수 $y = \log_a x$ 는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
 - b>1이므로 $\log_a b < \log_a 1 = 0$
 - (ii) 1 < b이므로 함수 $y = \log_b x$ 는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
 - c < 1이므로 $\log_b c < \log_b 1 = 0$
 - (iii) 0 < c < 1이므로 함수 $y = \log_c x$ 는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
 - a < 1이므로 $\log_a a > \log_a 1 = 0$

10) [정답] ⑤

[해설] 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 b=2

즉 $2 = \log_2 a$ 에서 $a = 2^2 = 4$ 따라서 A(4, 2)이므로 D(6, 2)

11) [정답] ①

[해설] 세 점 P, Q, R의 좌표는

 $P(3, \log_a 3), Q(3, \log_b 3), R(3, -\log_a 3)$

PQ: QR = 1:3이므로

$$3(\log_a 3 - \log_b 3) = \log_b 3 - (-\log_a 3)$$

 $2\log_a 3 = 4\log_b 3$

$$\frac{\log_a 3}{\log_b 3} = 2 \quad \stackrel{\sim}{\neg}, \quad \frac{\log b}{\log_a} = \log_a b = \frac{1}{\log_b a} = 2$$

따라서
$$g(a) = \log_b a = \frac{1}{2}$$

12) [정답] ④

[해설] (1) a > 1일 때 $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$$0 < a < 1$$
일 때 $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

- (2) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
- a > 1일 때 $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

0 < a < 1일 때 $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

13) [정답] ①

[해설] $f^{-1}(2) = a$ 라 하면 역함수의 성질에 따라

$$f(a) = 2$$
이므로 $f(a) = \log_2(3a^2 + 1) = 2$

로그의 정의에 따라 $3a^2+1=4$. $a^2=1$

그런데 a는 f의 정의역의 원소이므로 a>0이기 에 a=1

따라서 $f^{-1}(2) = 1$ 이므로

$$(g^{-1} \, \circ \, f^{-1})(2) = g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1)$$

 $g^{-1}(1) = b$ 라 하면 역함수의 성질에 따라

g(b) = 1이므로 $g(b) = \log_3(b+2) = 1$

로그의 정의에 따라 b+2=3, b=1

따라서
$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(1) = 1$$

14) [정답] ①

[해설] $\neg . -3^{x-3} + 3 < 3$ 이므로 치역은

 $\{y|y<3$ 인 모든 실수 $\}$ 이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=-3^{x-3}+3$ 은 $y=3^{x-3}-3$ 을 x축에 대하여 대칭이동한 함수이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (참)

 \Box . $y = -3^{x-3} + 3$ 에서 x = y로 나타내면

$$y-3=-3^{x-3}$$
, $3-y=3^{x-3}$, $x-3=\log_3(3-y)$,

 $x = \log_3(3 - y) + 3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

 $y = \log_3(3-x) + 3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

15) [정답] ③

[해설] $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-k) + 4$ 가 (5,3)을 지나므로

$$3 = \log_{\frac{1}{2}}(5-k) + 4$$
 $\therefore k = 3$

따라서 주어진 함수는 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 4$ 이고,

이는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3만

큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이 므로 점근선의 방정식은 x=3

16) [정답] ①

[해설] 정사각형 *ABCD*의 한 변의 길이가 2이므로

점 D의 y좌표는 2이고, $\log_4 x = 2$ 이므로

점 D의 x좌표는 $4^2 = 16$ 이다.

점 B의 x좌표는 16-2=14이므로

정사각형 *EFGB*의 한 변의 길이인

점 E의 y좌표는

$$\log_4 14 = \log_4 (2 \times 7) = \frac{1}{2} + \log_4 7$$
 or:

17) [정답] ①

[해설] $f(x) = \log_3(x-m) + n$ 의 그래프가 (5,0)을 지

나므로 $0 = \log_3(5-m) + n$ 이다.

점근선의 방정식은 x = 2이므로

m = 2이다. $0 = \log_3(5-2) + n = 1 + n$, n = -1이

므로 $mn = 2 \times (-1) = -2$

18) [정답] ①

[해설]
$$A = \log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5}$$

$$B = \log_9 23 = \frac{1}{2} \log_3 23 = \log_3 23^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{23}$$

$$C = \log_3 5 = \log_3 \sqrt{25}$$

$$\frac{1}{\log_3 5} < 1 < \log_3 \sqrt{23} < \log_3 \sqrt{25}$$
 이므로

A < B < C

19) [정답] ④

[해설]
$$y = \log_3 9x = 2 + \log_3 x$$
 이므로 $y = \log_3 9x$ 는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $\overline{AC} = 2$ 이고, 정삼각형 ABC 의 높이는 $\sqrt{3}$ 이다. $A(a,\log_3 9a)$ 라 하면 $B(a-\sqrt{3},-1+\log_3 9a)$ 이고, 점 B 는 $y = \log_3 9x$ 위의 점이므로 $-1+\log_3 9a = \log_3 9(a-\sqrt{3})$ $\log_3 3a = \log_3 9(a-\sqrt{3})$ $a = 3(a-\sqrt{3})$ $\therefore a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 따라서 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\log_3\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 $q + \log_3 p = \log_3\frac{9\sqrt{3}}{2} + \log_3\frac{\sqrt{3}}{2} = \log_3\frac{27}{4}$ $= \log_3 27 - \log_3 4 = 3 - \log_3 4$