02

로그

로그의 계산

예제 01

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{7}+\log_3\sqrt{7}$ (2) $\log_3 4\times\log_4\sqrt{3}$

(3) $\frac{1}{3}\log_2\frac{5}{4}-\log_2\frac{\sqrt[3]{10}}{8}$ (4) $\left(\log_2 5+\log_4\frac{1}{5}\right)\left(\log_5 2+\log_{25}\frac{1}{2}\right)$

접근 방법

로그의 성질을 이용합니다. 로그의 밑이 다른 경우에는 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 만듭니다.

Bible $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ (2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

(4) $\log_a M=\frac{\log_c M}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

상세 풀이

(1) $\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{7}+\log_3\sqrt{7}=\log_3\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_3\sqrt{7}=\log_3\left\{\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{7}\right\}=\log_3\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7}}\times\sqrt{7}\right)=\log_3 3=1$

(2) $\log_3 4\times\log_4\sqrt{3}=\log_3 4\times\frac{\log_3\sqrt{3}}{\log_3 4}=\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{3}\log_2\frac{5}{4}-\log_2\frac{\sqrt[3]{10}}{8}=\frac{1}{3}(\log_2 5-\log_2 2^2)-\left(\frac{1}{3}\log_2 10-\log_2 2^3\right)$

$=\frac{1}{3}\log_2 5-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(\log_2 2+\log_2 5)+3=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+3=2$

(4) $\left(\log_2 5+\log_4\frac{1}{5}\right)\left(\log_5 2+\log_{25}\frac{1}{2}\right)=(\log_2 5+\log_{2^2}5^{-1})(\log_5 2+\log_{5^2}2^{-1})$

$=\left(\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 5\right)\left(\log_5 2-\frac{1}{2}\log_5 2\right)$

$=\frac{1}{2}\log_2 5\times\frac{1}{2}\log_5 2=\frac{1}{4}\log_2 5\times\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{4}$

정답 ➡ (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\frac{1}{4}$

보충 설명

로그의 성질 $\log_a M^k=k\log_a M$에서 $\log_2 3^{\log_2 3}=\log_2 3\times\log_2 3=(\log_2 3)^2$과 $(\log_2 3)^{\log_2 3}$은 서로 다르다는 것에 주의합니다.

풀이집 p.14

숫자 바꾸기

01-1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3\log_5 3-2\log_5 75$

(2) $\log_2 9+\log_2\left(\frac{8}{3}\right)^3$

(3) $\log_3 5\times\log_5 7\times\log_7 9$

(4) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

표현 바꾸기

01-2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $2^{\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5}$

(2) $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{1023} 1024)$

개념 넓히기 ★☆☆

01-3 $\log_3 12$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{3^a+3^b}{3^{-a}+3^{-b}}$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

정답 **01-1** (1) $\log_5 3-4$ (2) $9-\log_2 3$ (3) 2 (4) 5
01-2 (1) 120 (2) 10 **01-3** ③

예제 02

로그의 성질의 활용

$\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_5 \frac{16}{27}$ (2) $\log_5 \frac{2}{\sqrt{6}}$

접근 방법

$\log_5 2$와 $\log_5 3$의 값이 주어져 있으므로 로그의 성질을 이용하여 로그의 진수를 2와 3으로 나타냅니다.

Bible 조건에 있는 로그의 값을 이용할 수 있도록 주어진 로그의 식을 변형한다.

상세 풀이

(1) $\log_5 \frac{16}{27}=\log_5 16-\log_5 27$

$=\log_5 2^4-\log_5 3^3$

$=4\log_5 2-3\log_5 3$ ← $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$

$=4a-3b$

(2) $\log_5 \frac{2}{\sqrt{6}}=\log_5 2-\log_5 \sqrt{6}$ ← $\sqrt{6}=(2\times3)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_5 2-\frac{1}{2}\log_5 (2\times3)$

$=\log_5 2-\frac{1}{2}(\log_5 2+\log_5 3)$

$=\frac{1}{2}\log_5 2-\frac{1}{2}\log_5 3$ ← $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$

$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$

$=\frac{1}{2}(a-b)$

정답 ➡ (1) $4a-3b$ (2) $\frac{1}{2}(a-b)$

보충 설명

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수) ← 진수가 거듭제곱 꼴이면 (진수의 지수)×(로그)

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ ← 진수가 곱의 꼴이면 (로그)+(로그)

(3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ← 진수가 나눗셈의 꼴이면 (로그)−(로그)

풀이집 p.14

숫자 바꾸기

02-1 $\log_{10}5=a$, $\log_{10}7=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_{10}3.5$ (2) $\log_{10}\sqrt{14}$

표현 바꾸기

02-2 $3^a=2$, $5^b=3$일 때, $\log_{120}150$을 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{3ab+b+2}{ab+a+1}$ ② $\dfrac{3ab+b+1}{ab+a+2}$ ③ $\dfrac{ab+b+2}{ab+b+1}$

④ $\dfrac{ab+b+2}{3ab+b+1}$ ⑤ $\dfrac{ab+b+1}{3ab+b+2}$

개념 넓히기 ★★☆

02-3 $\log_2 45=a$, $\log_2 75=b$라고 할 때, $\log_2\dfrac{5}{3}$를 a, b로 나타내면?

① $a-b$ ② $a+b$ ③ $b-a$

④ $2a$ ⑤ $2b$

정답 **02-1** (1) $a+b-1$ (2) $\frac{1}{2}(1-a+b)$ **02-2** ④
02-3 ③

예제 03

이차방정식과 로그의 계산

이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하고 $m=\alpha-\beta$라고 할 때, $\log_m \alpha+\log_m \beta$의 값을 구하여라.

접근 방법

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 두 근의 합 $\alpha+\beta$와 두 근의 곱 $\alpha\beta$의 값을 알 수 있고, 이들로부터 두 근의 차 $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있습니다.

Bible 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

상세 풀이

이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=5$$

$m=\alpha-\beta$이므로

$$m^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5^2-4\times5=5$$

$\therefore m=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>\beta$이므로 $m=\alpha-\beta>0$)

$$\begin{aligned}\therefore \log_m \alpha+\log_m \beta&=\log_{\sqrt{5}} \alpha+\log_{\sqrt{5}} \beta\\&=\log_{\sqrt{5}} \alpha\beta\\&=\log_{5^{\frac{1}{2}}} 5\\&=2\log_5 5 \quad \leftarrow \log_{a^n} x=\frac{1}{n}\log_a x\\&=2\end{aligned}$$

정답 ➡ 2

보충 설명

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이므로 두 근의 합과 곱을 구할 수 있습니다. 따라서 곱셈 공식의 변형 공식

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

를 이용하면 이차방정식의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha-\beta$, $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ 등 여러 가지 식의 값을 구할 수 있습니다.

풀이집 p.15

숫자 바꾸기

03-1 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하고 $b=\beta-\alpha$라고 할 때, $\log_b \alpha^{\frac{1}{3}}+\log_b \beta^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$이다. 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

03-2 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $3^{\alpha}\times 3^{\beta}+\log_3 \alpha+\log_3 \beta$

(2) $\log_3\left(2\alpha+\frac{3}{\beta}\right)+\log_3\left(2\beta+\frac{3}{\alpha}\right)$

개념 넓히기 ★★☆

03-3 이차방정식 $2x^2-mx+8=0$의 두 근을 α, β라 하고 $\log_\alpha 2+\log_\beta 2=-\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값을 구하여라.

정답 **03-1** 36 **03-2** (1) 244 (2) 3 **03-3** 17

예제 04

상용로그의 정수 부분

상용로그의 정수 부분이 x인 자연수 전체의 개수를 $f(x)$, 역수의 상용로그의 정수 부분이 y인 자연수 전체의 개수를 $g(y)$라고 할 때, $\log f(9)-\log g(-3)$의 값을 구하여라.

접근 방법

$N>1$일 때, N의 정수 부분이 n자리인 수이면 $\log N$의 정수 부분은 $n-1$입니다. 즉,

$$n-1\le\log N<n$$

$0<N<1$일 때, N의 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나면 $\log N$의 정수 부분은 $-n$입니다. 즉,

$$-n\le\log N<-n+1$$

Bible

$$\log(\underbrace{\square\square\cdots\square}_{n\text{자리}}.\square\square)=(n-1)+0.\times\times\times,\quad \log(0.\overbrace{00\cdots0}^{(n-1)\text{개}}\underset{\uparrow\,\text{소수점 아래 } n\text{째 자리}}{\square}\square\square)=(-n)+0.\times\times\times$$

상세 풀이

상용로그의 정수 부분이 9인 자연수를 M이라고 하면

$$9\le\log M<10 \qquad \therefore 10^9\le M<10^{10}$$

따라서 $M=10^9,\ 10^9+1,\ \cdots,\ 10^{10}-1$이므로 자연수 M의 개수 $f(9)$는

$$f(9)=10^{10}-10^9=10^9\times(10-1)=9\times10^9$$

역수의 상용로그의 정수 부분이 -3인 자연수를 N이라고 하면

$$-3\le\log\frac{1}{N}<-2,\ -3\le-\log N<-2$$

$$2<\log N\le3 \qquad \therefore 10^2<N\le10^3$$

따라서 $N=10^2+1,\ 10^2+2,\ \cdots,\ 10^3$이므로 자연수 N의 개수 $g(-3)$은

$$g(-3)=10^3-10^2=10^2\times(10-1)=9\times10^2$$

$$\therefore \log f(9)-\log g(-3)=\log(9\times10^9)-\log(9\times10^2)=\log\frac{9\times10^9}{9\times10^2}=\log10^7=7$$

정답 ➡ 7

보충 설명

상용로그의 정수 부분의 성질이 혼동될 때가 있습니다. 간단한 예를 들어 생각해 봅시다.
$\log10=1$에서 두 자리 정수의 상용로그의 정수 부분이 $2-1=1$, $\log100=2$에서 세 자리 정수의 상용로그의 정수 부분이 $3-1=2$이므로 N의 정수 부분이 n자리인 수일 때, $\log N$의 정수 부분은 $n-1$임을 알 수 있습니다.
마찬가지 방법으로 $\log0.1=-1$, $\log0.01=-2$에서 N의 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나면 $\log N$의 정수 부분은 $-n(n>0)$이라는 것을 알 수 있습니다.

풀이집 p.16

숫자 바꾸기

04-1 상용로그의 정수 부분이 x인 자연수 전체의 개수를 $f(x)$, 역수의 상용로그의 정수 부분이 y인 자연수 전체의 개수를 $g(y)$라고 할 때, $\log f(10) - \log g(-5)$의 값을 구하여라.

02

표현 바꾸기

04-2 상용로그의 정수 부분이 2인 수 중에서 가장 큰 정수를 a, 상용로그의 정수 부분이 -2인 수 중에서 가장 작은 수를 b라고 할 때, ab의 값은?

① 0.9　② 0.99　③ 1
④ 9.99　⑤ 10

개념 넓히기 ★☆☆

04-3 상용로그의 정수 부분이 m인 자연수 전체의 개수를 x, 역수의 상용로그의 정수 부분이 $-n$인 자연수 전체의 개수를 y라고 할 때, $\log x - \log y$를 m, n에 대한 식으로 나타내면? (단, $m \geq 0$, $n > 0$)

① $m-n$　② $m+n$　③ $m-n+1$
④ $m+n-1$　⑤ $m+2n$

정답 **04-1** 6　**04-2** ④　**04-3** ③

예제 05

상용로그의 소수 부분

양수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라고 할 때, $f(20)+f(300)+f(5000)$의 값을 구하여라.

접근 방법

$\log 20$, $\log 300$, $\log 5000$을 (정수 부분)+(소수 부분) 꼴로 나타냅니다.

이때, $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)에서

$$\log 1\le\alpha<\log 10$$

이므로 상용로그의 소수 부분은 정수 부분이 한 자리인 수의 상용로그로 나타낼 수 있습니다.

Bible $\log x$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라고 할 때, α는 0 이상 1 미만의 수이다.

상세 풀이

$\log 20=\log(2\times10)=\log 10+\log 2=1+\log 2$이므로 $f(20)=\log 2$

$\log 300=\log(3\times10^2)=\log 10^2+\log 3=2+\log 3$이므로 $f(300)=\log 3$

$\log 5000=\log(5\times10^3)=\log 10^3+\log 5=3+\log 5$이므로 $f(5000)=\log 5$

$$\begin{aligned}\therefore f(20)+f(300)+f(5000)&=\log 2+\log 3+\log 5\\&=\log(2\times3\times5)\\&=\log 30\end{aligned}$$

정답 ➡ $\log 30$

보충 설명

양수 x에 대하여 상용로그 $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)일 때, $\log x$의 정수 부분 n을 보면 $x(x>1)$의 정수 부분이 몇 자리 수인지 또는 소수 $x(0<x<1)$의 소수점 아래 몇째 자리에서 0이 아닌 숫자가 처음으로 나타나는지를 알 수 있습니다.

따라서 $\log 20$에서 20은 두 자리 수이므로 $\log 20$의 정수 부분은 1이고

$$f(20)=\log 20-1=\log 2$$

임을 알 수 있습니다. $\sqrt{5}$의 정수 부분이 2이므로 $\sqrt{5}$의 소수 부분은 $\sqrt{5}-2$가 되는 것과 비슷한 원리입니다.

이와 마찬가지 방법으로

$$f(300)=\log 300-2=\log 3$$

$$f(5000)=\log 5000-3=\log 5$$

도 성립함을 알 수 있습니다.

풀이집 p.16

숫자 바꾸기

05-1 양수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라고 할 때, $f(40)+f(50^2)+f(100^3)$의 값을 구하여라.

02

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

05-2 양의 실수 x에 대하여 함수

$$f(x)=\log x-[\log x]$$

라고 할 때, 다음 중 $f(x)$의 값이 가장 큰 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 6230 ② 476 ③ 0.71
④ 0.082 ⑤ 0.00024

개념 넓히기 ★★☆

05-3 자연수 n에 대하여 $\log n$의 소수 부분을 $f(n)$이라고 할 때, 집합

$$A=\{f(n)\mid 1\le n\le 150,\ n\text{은 자연수}\}$$

의 원소의 개수는?

① 131 ② 133 ③ 135
④ 137 ⑤ 139

정답 05-1 1 05-2 ④ 05-3 ③

예제 06

상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 성질 (1)

3^{30}은 n자리인 자연수이고 가장 큰 자리의 숫자가 a이다. $n+a$의 값을 구하여라.
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

접근 방법

3^{30}에 상용로그를 취하여 (정수 부분)+(소수 부분) 꼴로 나타낸 다음, 상용로그의 정수 부분을 이용하여 몇 자리 자연수인지 알아냅니다. 또한 양수 A에 대하여

$$\log 2=0.3010<\log A<0.4771=\log 3$$

이면 $A=2.\times\times\times$ 이므로 상용로그의 소수 부분을 이용하여 가장 큰 자리의 숫자를 알아낼 수 있습니다.

Bible 자릿수는 정수 부분으로, 가장 큰 자리의 숫자는 소수 부분으로 알아낸다.

상세 풀이

3^{30}에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{30}=30\log 3=30\times 0.4771=14.313$$

$\log 3^{30}$의 정수 부분이 14이므로 3^{30}은 15자리 수입니다.

$$\therefore n=15$$

이제 가장 큰 자리의 숫자를 알아보기 위하여 $\log 3^{30}$의 소수 부분 0.313을 살펴보면

$$\log 2=0.3010<0.313<0.4771=\log 3$$

즉, 0.313은 $\log 2$와 $\log 3$ 사이의 값이므로 $0.313=\log 2.\square$로 놓을 수 있습니다.

$$\log 3^{30}=14+0.313=\log 10^{14}+\log 2.\square=\log(2.\square\times 10^{14})$$

$$\therefore 3^{30}=2.\square\times 10^{14}$$

따라서 3^{30}의 가장 큰 자리의 숫자는 2이므로 $a=2$

$$\therefore n+a=15+2=17$$

정답 ➡ 17

보충 설명

$3^{30}=2.\square\times 10^{14}$을 자세히 살펴보면

① $\log 3^{30}$의 정수 부분이 14라는 것은 3^{30}을 10의 거듭제곱 꼴로 나타내었을 때 $a\times 10^{14}$ $(1\le a<10)$ 꼴이 된다는 의미입니다. 따라서 $a=2.\square$의 정수 부분이 한 자리이므로 3^{30}은 15자리 수라는 것을 알 수 있습니다.

② $\log 3^{30}$의 소수 부분이 $\log 2.\square=0.313$이라는 것은 3^{30}을 10의 거듭제곱 꼴로 나타내었을 때 $2.\square\times 10^{n}$ (n은 자연수) 꼴이 된다는 의미입니다. 따라서 상용로그의 값이 좀 더 자세히 주어지면 가장 큰 자리 다음 자리의 숫자도 알 수 있습니다.

풀이집 p.18

숫자 바꾸기

06-1 7^{40}은 n자리인 자연수이고 가장 큰 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b이다. $n+a+b$의 값을 구하여라.

(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 7=0.8451$로 계산한다.)

표현 바꾸기

06-2 3^n이 10자리 정수가 되도록 하는 모든 정수 n의 값의 합은?

(단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① 37 ② 39 ③ 41
④ 57 ⑤ 60

개념 넓히기 ★★☆

06-3 두 양의 정수 x, y에 대하여 x^6, y^8이 각각 12자리, 14자리 수일 때, xy는 몇 자리 정수인지 구하여라.

정답 06-1 41 06-2 ② 06-3 4자리

예제 07 상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 성질(2)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$은 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 a가 나타난다. $n+a$의 값을 구하여라. (단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

접근 방법

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$을 (정수 부분)+(소수 부분) 꼴로 나타낸 다음, $\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$의 정수 부분을 이용하여 소수점 아래 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는지 알아냅니다. 그 다음 $\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$의 소수 부분을 이용하여 $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$의 어림값을 구하면 소수점 아래 처음으로 나타나는 0이 아닌 숫자가 무엇인지 알아낼 수 있습니다.

> **Bible** $\log N=-\square.\triangle\triangle=\underbrace{(-\square-1)}_{\text{정수 부분}}+\underbrace{(1-0.\triangle\triangle)}_{\text{소수 부분}}$

상세 풀이

$\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}=30\log\frac{1}{3}=-30\log 3=(-30)\times 0.4771=-14.313=(-15)+0.687$$

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$의 정수 부분이 -15이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$은 소수점 아래 15째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타납니다.

또한 $\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$의 소수 부분이 0.687이므로

$$\log 4=2\log 2=0.6020<0.687<0.6990=1-\log 2=\log 5$$

에서 $0.687=\log 4.\square$로 놓을 수 있습니다. 이때,

$$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{30}=(-15)+0.687=\log 10^{-15}+\log 4.\square=\log(4.\square\times 10^{-15})$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{30}=4.\square\times 10^{-15}$$

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$은 소수점 아래 15째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 4가 나타나므로

$n=15$, $a=4$ $\quad\therefore n+a=15+4=19$

정답 ➡ 19

보충 설명

예제 06은 아주 큰 수의 어림값을 구할 때, **예제 07**은 아주 작은 수의 어림값을 구할 때 사용하는 방법입니다. 이와 같은 방법으로 전자계산기가 없던 시절에 아주 큰 수와 아주 작은 수를 계산할 수 있었습니다.

풀이집 p.18

숫자 바꾸기

07-1 $\left(\frac{1}{7}\right)^{40}$은 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 a가 나타난다. $n+a$의 값을 구하여라. (단, $\log 2=0.3010$, $\log 7=0.8451$로 계산한다.)

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

07-2 $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$은 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 a가 나타난다. $n+a$의 값은? (단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

개념 넓히기 ★★☆

07-3 23^{100}이 137자리 수일 때, $\left(\frac{1}{23}\right)^{10}$은 소수점 아래 a째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. a의 값을 구하여라.

정답 07-1 35 07-2 ④ 07-3 14

예제 08

상용로그의 소수 부분이 같을 때

$10 \le x < 100$일 때, $\log x^2$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같도록 하는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하여라.

접근 방법

$\log A$, $\log B$의 소수 부분이 같으면 $\log A = m + \alpha$, $\log B = n + \alpha$ (m, n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)에서
$\log A - \log B = (m+\alpha) - (n+\alpha) = m - n$으로 정수가 됩니다. 이때, $\log A > \log B$이면
$\log A - \log B$는 자연수가 되므로 $\log A$와 $\log B$ 중 큰 수에서 작은 수를 빼면 계산이 더 간단합니다.

Bible $\log A$와 $\log B$의 소수 부분이 같다. $\Longleftrightarrow$ $\log A - \log B$는 정수이다.

상세 풀이

$\log x^2$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으면 $\log x^2 - \log \frac{1}{x} =$(자연수) $\left(\because 10 \le x < 100\text{이므로 } x^2 > \frac{1}{x}\right)$이므로

$2\log x + \log x =$(자연수)　　$\therefore 3\log x =$(자연수)　　…… ㉠

이때, $10 \le x < 100$에서 $1 \le \log x < 2$이므로 $3 \le 3\log x < 6$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $3\log x = 3, 4, 5$이므로 $\log x = 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$　　$\therefore x = 10, 10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은 $10 \times 10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{5}{3}} = 10^{1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = 10^4$

정답 ➡ 10^4

보충 설명

위의 예제를 뒤의 **예제 09**처럼 상용로그의 소수 부분 α의 범위를 나누어 풀 수도 있습니다.
$10 \le x < 100$에서 $1 \le \log x < 2$이므로 $\log x = 1 + \alpha\ (0 \le \alpha < 1)$로 놓으면

(i) $\log x^2 = 2\log x = 2(1+\alpha) = 2 + 2\alpha = \begin{cases} 2+2\alpha & \left(0 \le \alpha < \frac{1}{2}\right) \\ 3+(2\alpha-1) & \left(\frac{1}{2} \le \alpha < 1\right) \end{cases}$ 에서 $\log x^2$의 소수 부분은

$2\alpha \left(0 \le \alpha < \frac{1}{2}\right)$ 또는 $2\alpha - 1 \left(\frac{1}{2} \le \alpha < 1\right)$

(ii) $\log \frac{1}{x} = -\log x = -1 - \alpha = \begin{cases} -1-\alpha = -1+0 & (\alpha = 0) \\ (-2)+(1-\alpha) & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$ 에서 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분은

$0\ (\alpha = 0)$ 또는 $1 - \alpha\ (0 < \alpha < 1)$

(i), (ii)에서 $\log x^2$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 서로 같으므로 $2\alpha = 0$ 또는 $2\alpha = 1 - \alpha$ 또는 $2\alpha - 1 = 1 - \alpha$

$\therefore \alpha = 0$ 또는 $\alpha = \frac{1}{3}$ 또는 $\alpha = \frac{2}{3}$

따라서 $\log x = 1$ 또는 $\log x = \frac{4}{3}$ 또는 $\log x = \frac{5}{3}$이므로 위와 같은 답을 얻을 수 있습니다.

풀이집 p.20

숫자 바꾸기

08-1 $10 \le x < 100$일 때, $\log x^4$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같도록 하는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하여라.

표현 바꾸기

08-2 다음 물음에 답하여라.

(1) $\log x$의 정수 부분이 2일 때, $\log x^4$과 $\log x^2$의 소수 부분이 같도록 하는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하여라.

(2) $\log x$의 정수 부분이 1일 때, $\log x^3$과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분이 같도록 하는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

08-3 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 M이라고 할 때, $\log M$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(가) $[\log x]=5$

(나) $\log x^2-[\log x^2]=\log \frac{1}{x}-\left[\log \frac{1}{x}\right]$

정답 **08-1** 10^7 **08-2** (1) $10^{\frac{9}{2}}$ (2) $10^{\frac{14}{5}}$ **08-3** 16

예제 09

상용로그의 소수 부분의 합이 1일 때

$10 \leq x < 100$이고, $\log x$의 소수 부분과 $\log x^3$의 소수 부분의 합이 1일 때, $\log x$의 소수 부분이 될 수 있는 수의 합을 구하여라.

접근 방법

$10 \leq x < 100$이므로 $\log x$는 $1 \leq \log x < 2$ 또는 $\log x = 1 + \alpha\ (0 \leq \alpha < 1)$와 같이 2가지 방법으로 나타낼 수 있습니다. 그런데 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^3$의 소수 부분의 합이 1이라는 조건이 주어져 있으므로 $\log x = 1 + \alpha\ (0 < \alpha < 1)$로 놓고 문제를 풉니다.

Bible $\log x = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)일 때, $\log x^m = m \log x = mn + m\alpha$ (m은 자연수)의 소수 부분은 $m\alpha$가 정수일 때를 기준으로 범위를 나누어서 구한다.

상세 풀이

$10 \leq x < 100$에서 $1 \leq \log x < 2$이므로 $\log x$의 소수 부분을 α라고 하면

$\log x = 1 + \alpha\ (0 < \alpha < 1)$ ← $\log x$의 소수 부분과 $\log x^3$의 소수 부분의 합이 1이므로 $\alpha \neq 0$

$\therefore \log x^3 = 3 \log x = 3 + 3\alpha\ (0 < 3\alpha < 3)$

(i) $0 < 3\alpha < 1$, 즉 $0 < \alpha < \frac{1}{3}$일 때, $\log x^3$의 소수 부분은 3α이므로

$$\alpha + 3\alpha = 1 \qquad \therefore \alpha = \frac{1}{4}$$

(ii) $1 \leq 3\alpha < 2$, 즉 $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{2}{3}$일 때, $\log x^3$의 소수 부분은 $3\alpha - 1$이므로

$$\alpha + (3\alpha - 1) = 1 \qquad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

(iii) $2 \leq 3\alpha < 3$, 즉 $\frac{2}{3} \leq \alpha < 1$일 때, $\log x^3$의 소수 부분은 $3\alpha - 2$이므로

$$\alpha + (3\alpha - 2) = 1 \qquad \therefore \alpha = \frac{3}{4}$$

(i)~(iii)에 의하여 α의 값의 합은 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

정답 ➡ $\frac{3}{2}$

보충 설명

$\log x^3 = 3 \log x = 3 + 3\alpha$에서 $\log x^3$의 소수 부분을 3α로 착각하지 않도록 주의합니다.

예를 들어, $\alpha = \frac{3}{4}$일 때 $3\alpha = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$에서 $\log x^3 = 3 \log x = 3 + 3\alpha = 5 + \frac{1}{4}$이므로 $\log x^3$의 소수 부분은 $3\alpha = \frac{9}{4}$가 아니라 $3\alpha - 2 = \frac{1}{4}$입니다.

따라서 $0 < \alpha < 1$에서 $0 < 3\alpha < 3$이므로 위와 같이 3α가 자연수가 되는 때를 기준으로 범위를 나누어서 풉니다.

풀이집 p.21

숫자 바꾸기

09-1 $10<x<100$일 때, $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1인 모든 실수 x의 값의 곱을 구하여라.

표현 바꾸기

09-2 다음 물음에 답하여라.

(1) $\log x$의 정수 부분이 3이고, $\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 $\frac{3}{4}$일 때, $\log\sqrt{x}$의 소수 부분을 구하여라.

(2) $\log x$의 정수 부분이 3이고, $\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1일 때, $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

09-3 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 M이라고 할 때, $\log M$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

> (가) $[\log x]=2$
> (나) $\log x^2-[\log x^2]=1-\log x+[\log x]$

정답 **09-1** 1000 **09-2** (1) $\frac{7}{12}$ (2) $\frac{1}{4}$ **09-3** 5