3-2-2.여러 가지 수열의 합_천재(류희찬)

개념check

[자연수의 거듭제곱의 합]

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

[분수꼴로 주어진 수열의 합]

• 주어진 분수를 부분분수로 변형한 후 전개하여 계산한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$

(4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

[분모에 근호가 있는 수열의 합]

• 일반항이 분수식이고, a_k의 분모에 근호가 있는 두 식의 합으로 나타내어 질 경우, 분모를 유리화한 후, a_k의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 합의 꼴로 나타내어 계산한다.

기본문제

[문제]

1. $1^2+3^2+5^2+\cdots+11^2$의 값은?

① 256 ② 266 ③ 276 ④ 286 ⑤ 296

[예제]

2. 다음 식의 값은?

$$(1^2-2\cdot1)+(2^2-2\cdot2)+(3^2-2\cdot3)+\cdots+(10^2-2\cdot10)$$

① 265 ② 275 ③ 285 ④ 295 ⑤ 305

[문제]

3. $\sum_{k=1}^{5}(k+1)(k-3)$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

[예제]

4. $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=0.49$일 때, n의 값은?

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

[문제]

5. $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{24^2-1}$의 값은?

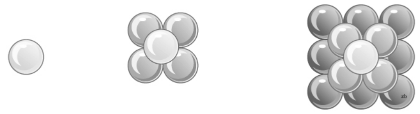
① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{49}{100}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[스스로 확인하기]

6. 다음 그림과 같이 크기가 같은 공을 사각뿔 모양으로 쌓아 올릴 때, 〈n단계〉에 필요한 공의 개수를 a_n이라 하자. a_5+a_6의 값은?

 ⋯

〈1단계〉 〈2단계〉 〈3단계〉 ⋯

① 142 ② 143
③ 144 ④ 145
⑤ 146

[스스로 확인하기]

7. $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+8\times25$의 값은?

① 645 ② 646
③ 647 ④ 648
⑤ 649

[스스로 확인하기]

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{3+6+9+\cdots+3k}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$
③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$
⑤ $\frac{7}{10}$

[스스로 확인하기]

9. 다음 그림과 같이 가로 10칸, 세로 10칸으로 이루어진 표에 $-10,\ -7,\ -4,\ \cdots,\ 17$의 수를 채워 넣었을 때, 표에 채운 모든 수의 합을 구하시오.

17	17	17	⋯	17	17
14	14	14		14	17
	⋮		⋱	⋮	
−4	−4	−4		14	17
−7	−7	−4	⋯	14	17
−10	−7	−4		14	17

① 815 ② 825
③ 835 ④ 845
⑤ 855

[스스로 마무리하기]

10. 자연수 n에 대하여 n^3을 3으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}a_k$의 값은?

① 49 ② 50
③ 51 ④ 52
⑤ 53

[스스로 마무리하기]

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=(2n-1)(2n+1)(2n+3)$를 만족시킬 때,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_k}$의 값은?

① $\frac{29}{330}$ ② $\frac{83}{990}$
③ $\frac{91}{990}$ ④ $\frac{27}{110}$
⑤ $\frac{97}{990}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 마무리하기]

12. $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})=4n^2-2n$일 때, $\sum_{k=1}^{12}a_k$의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

[스스로 마무리하기]

13. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{7}\{k-(\alpha+\beta)\}(k-\alpha\beta)$의 값을 구하시오.

① 42 ② 52 ③ 62 ④ 72 ⑤ 82

유사문제

14. $\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$의 값은?

① 495 ② 505 ③ 515 ④ 525 ⑤ 535

15. $5^2+6^2+7^2+\cdots+14^2+15^2$의 값은?

① 1200 ② 1210 ③ 1220 ④ 1230 ⑤ 1240

16. $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+2)}$의 값은?

① $\frac{34}{55}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{36}{55}$ ④ $\frac{37}{55}$ ⑤ $\frac{38}{55}$

17. $\sum_{k=1}^{20}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}$의 값은?

① 110 ② 115 ③ 120 ④ 125 ⑤ 130

18. 이차방정식 $x^2-(3n+1)x+n(n-1)=0$ (n은 자연수)의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(1+\alpha_k)(1+\beta_k)$의 값은?

① 385 ② 395 ③ 497 ④ 515 ⑤ 525

19. $\sum_{k=1}^{15}\frac{k^2+k+p}{k(k+1)}=\frac{75}{4}$일 때, 상수 p의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}$일 때, a_{10}의 값은?

① $\frac{50}{11}$ ② $\frac{60}{11}$ ③ $\frac{70}{11}$ ④ $\frac{80}{11}$ ⑤ $\frac{90}{11}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $1^2+3^2+5^2+\cdots+11^2$

$=\sum_{k=1}^{6}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{6}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{6}k^2-4\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}1$

$=4\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}-4\cdot\frac{6\cdot7}{2}+1\cdot6$

$=286$

2) [정답] ②

[해설] $(1^2-2\cdot1)+(2^2-2\cdot2)+(3^2-2\cdot3)$
$+\cdots+(10^2-2\cdot10)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k)=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}=275$

3) [정답] ②

[해설] $\sum_{k=1}^{5}(k+1)(k-3)=\sum_{k=1}^{5}(k^2-2k-3)$

$=\sum_{k=1}^{5}k^2-2\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}3$

$=\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-2\cdot\frac{5\cdot6}{2}-3\cdot5=10$

4) [정답] ②

[해설] $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}=\frac{49}{100}$ 에서

$\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{100}$

$\therefore n=49$

5) [정답] ③

[해설] $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{24^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\frac{1}{(2k)^2-1}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2k-1}\right)\left(\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}\left\{\left(\frac{1}{2k-1}\right)-\left(\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$

$=\frac{12}{25}$

6) [정답] ⑤

[해설] $a_1=1$

$a_2=1+4=5$

$a_3=1+4+9=14$

$\vdots$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$a_5=\frac{5\times6\times11}{6}=55,\ a_6=\frac{6\times7\times13}{6}=91$

따라서 $a_5+a_6=55+91=146$

7) [정답] ④

[해설] $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+8\times25$

$=\sum_{k=1}^{8}k(3k+1)=\sum_{k=1}^{8}(3k^2+k)=3\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$

$=3\cdot\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+\frac{8\cdot9}{2}=648$

8) [정답] ③

[해설] $3+6+9+\cdots+3k=3(1+2+3+\cdots+k)$

$=3\sum_{n=1}^{k}n=3\times\frac{k(k+1)}{2}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{3+6+9+\cdots+3k}=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{15}{16}=\frac{5}{8}$

9) [정답] ④

[해설] 같은 수끼리 묶어서 생각하면

$-10+(-7-7-7)+(-4-4-4-4-4)+\cdots$
$+(17+17+\cdots+17)$

$=-10+3\times(-7)+5\times(-4)+\cdots+19\times17$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)(3k-13)=\sum_{k=1}^{10}(6k^2-29k+13)$

$=6\times\frac{10\times11\times21}{6}-29\times\frac{10\times11}{2}+13\times10$

$=845$

10) [정답] ③

[해설] 자연수 k에 대하여

$n=3k-2$ 또는 $n=3k-1$ 또는 $n=3k$으로 분류할 수 있다.

(ⅰ) $n=3k-2$의 꼴일 때

$n^3=(3k-2)^3=27k^3-54k^2+36k-8$

$=3(9k^3-18k^2+12k-3)+1$

(ⅱ) $n=3k-1$의 꼴일 때

$n^3=(3k-1)^3=27k^3-27k^2+9k-1$

$=3(9k^3-9k^2+3k-1)+2$

(ⅲ) $n=3k$의 꼴일 때

$n^3=27k^3=3(9k^3)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

즉 3으로 나눈 나머지가 각각 1, 2, 0이고 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 0이 차례로 반복되므로

$\sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{48} a_k + a_{49} + a_{50}$

$= 16\sum_{k=1}^{3} a_k + a_1 + a_2$

$= 16 \times (1+2+0) + 1 + 2 = 51$

11) [정답] ③

[해설] $\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n-1)(2n+1)(2n+3)$에서

$a_1 = 1 \times 3 \times 5 = 15$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= (2n-1)(2n+1)(2n+3) - (2n-3)(2n-1)(2n+1)$

$= 6(2n-1)(2n+1)$ ($n \geq 2$인 자연수)

$\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{15} + \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{6(2k-1)(2k+1)}$

$= \frac{1}{15} + \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{16}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{1}{15} + \frac{1}{12}\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right)\right\}$

$= \frac{1}{15} + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{33}\right) = \frac{91}{990}$

12) [정답] ②

[해설] $\sum_{k=1}^{12} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}$

$= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{10} + a_{11} + a_{12})$

$\sum_{k=1}^{4} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k})$

$= 4 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = 56$

13) [정답] ①

[해설] 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$에서 두 근을 α, β라고 하면, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{7} \{k - (\alpha + \beta)\}(k - \alpha\beta)$

$= \sum_{k=1}^{7} (k-3)(k-2) = \sum_{k=1}^{7} (k^2 - 5k + 6)$

$= \sum_{k=1}^{7} k^2 - 5\sum_{k=1}^{7} k + \sum_{k=1}^{7} 6$

$= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 5 \times \frac{7 \times 8}{2} + 6 \times 7$

$= 140 - 140 + 42 = 42$

14) [정답] ①

[해설] (준식) $= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k)$

$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 495$

15) [정답] ②

[해설] (준식) $= \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{4} k^2$

$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}$

$= 1210$

16) [정답] ③

[해설] $\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)\right.$

$\left. + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = \frac{36}{55}$

17) [정답] ②

[해설] (준식) $= \sum_{k=1}^{20} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k} = \sum_{k=1}^{20} \frac{k+1}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{20 \cdot 21}{2} + 20\right) = 115$

18) [정답] ④

[해설] 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha_n + \beta_n = 3n + 1$, $\alpha_n\beta_n = n(n-1) = n^2 - n$

$\sum_{k=1}^{10} (1 + \alpha_k)(1 + \beta_k) = \sum_{k=1}^{10} (1 + \alpha_k + \beta_k + \alpha_k\beta_k)$

$= \sum_{k=1}^{10} (1 + 3k + 1 + k^2 - k) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k + 2)$

$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 20 = 515$

19) [정답] ④

[해설] $\sum_{k=1}^{15} \frac{k^2 + k + p}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{15} \left(1 + \frac{p}{k(k+1)}\right)$

$= 15 + \sum_{k=1}^{15} p\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 15 + p\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right)\right\}$

$= 15 + p\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{75}{4} \quad \therefore p = 4$

20) [정답] ②

[해설] $a_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{6}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{10} 6\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 6\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$$=6\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{60}{11}$$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125