개념check

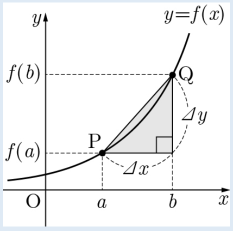
[평균변화율과 미분계수]

• 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이고 평균변화율은 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



• 미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

[미분계수의 기하적 의미]

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

[미분가능성과 연속성]

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다.

기본문제

[예제]

1. 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[문제]

2. 함수 $f(x)=x^2+3x$에서 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은?

① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[문제]

3. 함수 $f(x)=x^2+2x$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 3일 때, 상수 a의 값은?

① 0 ② 3
③ 5 ④ 7
⑤ 10

[예제]

4. 함수 $f(x)=x^2-2$의 $x=3$에서의 미분계수는?

① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[문제]

5. 함수 $f(x)=4x-1$의 $x=1$에서의 미분계수는?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[문제]

6. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하는 원이 있다. 시각 t에서의 원의 반지름의 길이가 $2t+1$일 때, 시각 t에서의 원의 넓이를 $f(t)$라 하자. 이때, $f'(2)$의 값은?

① 16π　② 17π
③ 18π　④ 19π
⑤ 20π

[예제]

7. 곡선 $y=3x^2-1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는?

① 4　② 5
③ 6　④ 7
⑤ 8

[문제]

8. 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $(2,\ 8)$에서의 접선의 기울기는?

① 2　② 4
③ 6　④ 8
⑤ 10

[예제]

9. 함수 $f(x)=|x-2|$가 $x=k$에서 연속이지만 미분가능하지 않을 때, 상수 k의 값은?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[문제]

10. 함수 $f(x)=|x^2-4|$가 $x=k$에서 연속이지만 미분가능하지 않을 때, 가능한 상수 k 값의 합은?

① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

[예제]

11. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2 & (x<1) \\ 2x+b & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

[문제]

12. 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x<1) \\ bx^2+x & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① 2　② 3
③ 4　④ 5
⑤ 6

평가문제

[중단원 학습 점검]

13. 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은?

① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

[중단원 학습 점검]

14. 곡선 $y=-x^2+3x-4$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는?

① -3　② -1
③ 1　④ 3
⑤ 5

[중단원 학습 점검]

15. 함수 $f(x)=2x-1+|x-2|$ 가 $x=k$에서 연속이나 미분가능하지 않을 때, 상수 k의 값은?

① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

[중단원 학습 점검]

16. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-1)-5}{x^2-4}=12$$

일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은?

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

유사문제

17. 함수 $f(x)=x^2+x-1$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 순간변화율이 같을 때, a의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

18. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=10$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

19. 함수 $f(x)=x^2+2x$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

20. 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$을 만족하고 $f'(0)=3$일 때, $f'(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

21. $x=-1$에서 연속이지만 미분계수가 존재하지 않는 함수를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)=|x^2+x|$

ㄴ. $g(x)=(x+1)^2$

ㄷ. $h(x)=\frac{1}{x+1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

22. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=1$일 때, 극한값 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-2\Delta x)-f(a+3\Delta x)}{\Delta x}$의 값은?

① 3 ② 1 ③ -1 ④ -3 ⑤ -5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$

$=\dfrac{9}{3}=3$

2) [정답] ③

[해설] $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$

$=\dfrac{10-(-2)}{3}=4$

3) [정답] ①

[해설] $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$

$=\dfrac{a^2+4a+3-(a^2+2a)}{1}$

$=2a+3=3$

$a=0$

4) [정답] ⑤

[해설] $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(3+\Delta x)^2-2\}-(3^2-2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6$

5) [정답] ②

[해설] $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{4(1+\Delta x)-1\}-(4-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4\Delta x}{\Delta x}=4$

6) [정답] ⑤

[해설] $f(t)=\pi(2t+1)^2=4\pi t^2+4\pi t+\pi$

$f'(2)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\pi(2\Delta t+5)^2-\pi(4+1)^2}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{4\pi\Delta t^2+20\pi\Delta t}{\Delta t}=20\pi$

7) [정답] ③

[해설] $f(x)=3x^2-1$로 놓으면

점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기는

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수

$f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{3(1+\Delta x)^2-1\}-2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+3\Delta x)=6$

8) [정답] ③

[해설] $f(x)=x^2+2x$로 놓으면

점 $(2,8)$에서의 접선의 기울기는

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수

$f'(2)$와 같으므로

$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)\}-8}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6$

9) [정답] ②

[해설] $f(x)=|x-2|=\begin{cases}-x+2 & (x\le 2)\\ x-2 & (x\ge 2)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)=0$

이므로 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{x-2}=1$

$\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$\therefore k=2$

10) [정답] ①

[해설] $f(x)=|x^2-4|$

$=\begin{cases}x^2-4 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -x^2+4 & (-2<x<2)\end{cases}$는

$x\ne 2$, $x\ne -2$에서 연속이고 미분가능하다.

$x=-2$에서 $f(-2)=0$이고

$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}|x^2-4|=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=f(-2)$

즉, 함수 $f(x)=|x^2-4|$은 $x=-2$에서 연속이다.

한편,

$\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$

$$\lim_{x \to -2+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \to -2+} \frac{-x^2+4}{x+2} = 4$$

이므로 $f'(-2)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x^2-4|$은 $x=-2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

같은 방법으로 $x=2$에서도 연속이지만 미분가능하지 않다.

$\therefore$ 가능한 모든 상수 k 값의 합은 0이다.

11) [정답] ③

[해설] 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

$x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x \to 1} f(x)$에서 $a=2+b$ $\cdots$ ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$가 존재하므로

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{ax^2-(2+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{ax^2-a}{x-a} = \lim_{x \to 1-} a(x+1) = 2a$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{(2x+b)-(2+b)}{x-1} = 2$$

$2a=2$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=0$

12) [정답] ①

[해설] 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

$x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x \to 1} f(x)$에서 $3+a=b+1$

즉 $a-b=-2$ $\cdots$ ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{3x+a-(3+a)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{bx^2+x-b-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)(bx+1+b)}{x-1} = 2b+1\text{에서}$$

$2b+1=3$

즉, $b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$

$\therefore b-a=2$

13) [정답] ②

[해설] $f(0)=0$, $f(2)=4-2=2$이므로

x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 1$$

14) [정답] ③

[해설] $f(x)=-x^2+3x-4$라 하면

곡선 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $x=1$에서의 미분계수와 같으므로

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2+3x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = 1$$

따라서 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는 1

15) [정답] ⑤

[해설] $g(x)=2x-1$, $h(x)=|x-2|$라고 하면

$g(x)$는 모든 실수에서 연속이며 미분가능하고

$h(x)$는 모든 실수에서 연속이지만 $x=2$에서 미분 불가능하다.

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2-} f(x) = 3$$

이므로 $f(x)$는 $x=2$를 포함한 실수 전체에서 연속이다.

또한,

$$\lim_{x \to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{3x-6}{x-2} = 3$$

$$\lim_{x \to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$\therefore k=2$

16) [정답] ③

[해설] $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-1)-5}{x^2-4} = 12$이고 $\lim_{x \to 2}(x^2-4)=0$이므로 $\lim_{x \to 2}\{f(x-1)-5\}=0$이다.

즉, $f(1)=5$

$x-1=k$라고 하면 $x \to 2$일 때 $k \to 1$이므로

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x-1)-5}{x^2-4} = \lim_{k \to 1} \frac{f(k)-5}{(k+1)^2-4}$$

$$= \lim_{k \to 1} \frac{f(k)-5}{k^2+2k-3} = \lim_{k \to 1} \frac{f(k)-5}{(k-1)(k+3)}$$

$$= \lim_{k \to 1} \frac{f(k)-f(1)}{k-1} \times \frac{1}{k+3} = \frac{1}{4} f'(1) = 12\text{이므로}$$

$f'(1)=48$

따라서 $f(1)+f'(1)=53$이다.

17) [정답] ④

[해설] $f(x)$의 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{(9+3-1)-(1+1-1)}{2} = \frac{11-1}{2} = 5$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2+x-a^2-a}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)+(x-a)}{x-a}$$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$=\lim_{x\to a}(x+a+1)=2a+1$

즉 $2a+1=5$이므로 $a=2$

18) [정답] ③

[해설] $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}f'(1)=\dfrac{3}{2}\times 10=15$

19) [정답] ①

[해설] $f(1)=3$, $f(3)=15$이므로 평균변화율은

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{15-3}{3-1}=6$

20) [정답] ⑤

[해설] $x=y=0$을 주어진 식에 대입하면 $f(0)=-1$

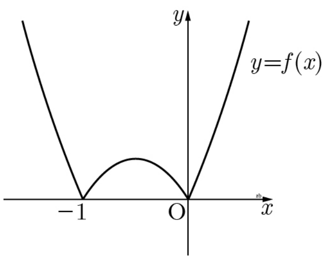
$f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2)+f(h)+2h+1-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+2=f'(0)+2=5$

21) [정답] ①

[해설] ㄱ.



함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<-1,\ x>0) \\ -x^2-x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to -1+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\dfrac{-x^2-x}{x+1}=1$

$\lim_{x\to -1-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\dfrac{x^2+x}{x+1}=-1$

이므로 $x=-1$에서의 미분계수가 존재하지 않는다.

ㄴ. $g(x)=(x+1)^2$는 $x=-1$에서 연속이고, 미분계수가 존재한다.

ㄷ. 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

22) [정답] ⑤

[해설] $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a-2\Delta x)-f(a+3\Delta x)}{\Delta x}$에서 $\Delta x=h$로 치환하면

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)+f(a)-f(a+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3$

$=-2f'(a)-3f'(a)=-5f'(a)=-5$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125