01 삼각함수 사이의 관계

삼각함수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

참고 $(\sin x)^2$, $(\cos x)^2$은 $\sin^2 x$, $\cos^2 x$로 간단히 나타낸다.

◪ $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

1. $\sin\theta\cos\theta$

2. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

3. $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

◪ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

4. $\sin\theta\cos\theta$

5. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

6. $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

7. $\sin^4\theta+\cos^4\theta$

◪ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

8. $\sin\theta\cos\theta$

9. $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

10. $\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$

11. $\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

12. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

13. $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

14. $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

15. $\dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+1\right)$

◪ 다음 식의 값을 구하여라.

16. $\cos\theta=\frac{1}{2}$ **일 때,** $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

17. $\sin\theta=\frac{3}{7}$ **일 때,** $\cos\theta\tan\theta$

18. $\cos\theta=\frac{1}{4}$ **일 때,** $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

19. $\tan\theta=3$ **일 때,** $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

20. $\cos\theta=\frac{1}{3}$ **일 때,** $1+\tan^2\theta$

21. $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **일 때,** $1+\frac{1}{\tan^2\theta}$

22. $\tan\theta=\frac{4}{3}$ **일 때,** $\sin\theta\cos\theta$

23. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$ **일 때,** $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

24. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ **일 때,** $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

25. $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ **일 때,** $\sin\theta\cos\theta$ **의 값**

26. $\sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{2}$ **일 때,** $\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

27. $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ **일 때,** $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ **의 값**

28. $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ **일 때,** $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ **의 값**

29. $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$ **일 때,** $(\sin\theta+\cos\theta)^2$

◪ θ는 제2사분면의 각이고 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

30. $\sin\theta+\cos\theta$

31. $\cos\theta-\sin\theta$

32. $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

33. $\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$

34. $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

◪ 다음 식의 값을 구하여라.

35. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$의 값

36. $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$이고, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$일 때, $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$의 값

37. 각 θ가 제4사분면의 각이고 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$일 때, $\cos\theta-\sin\theta$의 값

38. 각 θ가 제4사분면의 각이고 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$일 때, $\cos\theta-\sin\theta$의 값

39. 각 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값

40. 각 θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값

41. 각 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$일 때, $\cos\theta-\sin\theta$의 값

42. 각 θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값

◪ 다음 식을 간단히 하여라.

43. $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

44. $\tan\theta\times\cos\theta-\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

45. $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

46. $\tan\theta-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

47. $\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

48. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$

49. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

50. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+\frac{(1-\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$

51. $\left(\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}\right)^2-\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)^2+\left(\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$

52. $\left(1+\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)$

53. $\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

54. $\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$ $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

55. $\sqrt{1-\cos^2\theta\tan^2\theta}$ $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

56. $\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$ $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

57. $\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$ $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

58. $\sin x + \cos x = -1$일 때, $\sin^{2016}x + \cos^{2016}x$의 값을 구하여라.

59. $\log_2 \sin^2\theta + \log_4 \cos^4\theta = \log_2 \frac{1}{16}$이 성립할 때, $\sin\theta - \cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

02 삼각함수 사이의 관계의 응용

(1) 삼각함수와 이차방정식
이차방정식의 두 근이 삼각함수로 주어진 경우에는 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 삼각함수 사이에 관계를 이용할 수 있는 식을 세운다.

◪ 다음 이차방정식의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

60. $x^2 - \sqrt{2}x + k = 0$

61. $3x^2 + 2x + k = 0$

62. $x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + k = 0$

63. $x^2 + kx + \frac{1}{4} = 0$ $(k > 0)$

64. $4x^2 + kx - 1 = 0$ $(k > 0)$

65. $10x^2 - kx + 3 = 0$ $(k > 0)$

66. $3x^2 - kx + 1 = 0$ $(k > 0)$

67. $x^2 + kx + \frac{1}{3} = 0$ $(k > 0)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

68. x에 대한 이차방정식 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, $|\sin\theta - \cos\theta|$의 값을 구하여라.

69. 이차방정식 $x^2 - 2\sqrt{2}x + k = 0$의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$일 때, 상수 k의 값을 구하여라. $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

70. 이차방정식 $5x^2+\sqrt{5}x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이고 θ는 제2사분면의 각일 때, $a+\tan\theta$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

71. 이차방정식 $x^2-(2a-1)x+1-2a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

72. 이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 두 근을 $\sin\theta$, $\cos\theta$라 할 때, $\tan\theta$, $\dfrac{1}{\tan\theta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식을 구하여라.

정답 및 해설

1) $\dfrac{3}{8}$

⇨ $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 양변을 제곱하자.

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

2) $\dfrac{8}{3}$

⇨ $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{1}{\frac{3}{8}}=\dfrac{8}{3}$

3) $\dfrac{11}{16}$

⇨ $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11}{3}=\dfrac{11}{6}$

4) $-\dfrac{3}{8}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

5) $-\dfrac{8}{3}$

⇨ $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

이때, $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ 에서

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ 이므로

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{-\frac{3}{8}}=-\dfrac{8}{3}$

6) $-\dfrac{8}{3}$

⇨ $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{8}{3}$

7) $\dfrac{23}{32}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$ $\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore\ \sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1-2\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)^2$

$=1-\dfrac{9}{32}=\dfrac{23}{32}$

8) $-\dfrac{4}{9}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{9}$ $(\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

9) $\dfrac{17}{9}$

⇨ $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{17}{9}$

10) $-\dfrac{3}{4}$

⇨ $\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\dfrac{3}{4}$

11) $\dfrac{81}{16}$

⇨ $\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=\dfrac{1}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\dfrac{81}{16}$

12) $-\dfrac{9}{4}$

⇨ $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{-\frac{4}{9}}=-\dfrac{9}{4}$

13) $\pm\dfrac{5\sqrt{17}}{27}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}-1=-\dfrac{8}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+\dfrac{8}{9}=\dfrac{17}{9}$

$\sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}\times\left(1-\dfrac{4}{9}\right)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right)\times\dfrac{5}{9}=\pm\dfrac{5\sqrt{17}}{27}$

14) $\dfrac{13}{27}$

⇨ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{13}{27}$

15) $-\dfrac{3}{4}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$이므로 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+1\right)$

$=\dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+1\right)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\dfrac{3}{4}$

16) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$일 때,

$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)이므로

$\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}=\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{2}$

17) $\dfrac{3}{7}$

⇨ $\sin\theta=\dfrac{3}{7}$이므로

$\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\dfrac{3}{7}$

18) 4

⇨ $\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4$

19) $\dfrac{2}{5}$

⇨ $\tan\theta=3$일 때,

$\sin\theta=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (복호동순)이므로

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$

20) 9

⇨ $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이므로

$1+\tan^2\theta=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$

$=3^2=9$

21) 3

⇨ $\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$에서 $\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$이므로

$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3$

22) $\dfrac{12}{25}$

⇨ $\tan\theta=\frac{4}{3}$ 일 때,

$\sin\theta=\pm\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\pm\frac{3}{5}$ (복호동순)이므로

$\sin\theta\cos\theta=\left(\pm\frac{4}{5}\right)\left(\pm\frac{3}{5}\right)=\frac{12}{25}$

23) $\frac{18}{7}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{16}{9}$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{18}{7}$

24) $\frac{25}{12}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{49}{25}$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{25}{12}$

25) $\frac{7}{16}$

⇨ $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{7}{16}$

26) $\frac{36}{25}$

⇨ $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{9}{4}$

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{8}$

$\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$=\frac{\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{5}{8}\right)}{\frac{25}{64}}=\frac{36}{25}$

27) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$

양변을 제곱하자.

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

28) 4

⇨ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$

29) $\frac{17}{9}$

⇨ $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{9}=\frac{17}{9}$

30) 0

⇨ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

31) $-\sqrt{2}$

⇨ $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\cos\theta\sin\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 이므로 $\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{2}$

32) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

33) $2\sqrt{2}$

⇨ $\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{-\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

34) -2

⇨ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

35) $2\sqrt{2}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

36) $-\frac{5}{12}$

37) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

⇨ $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

이때, θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$ 에서 $\cos\theta-\sin\theta>0$

$\therefore\ \cos\theta-\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

38) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

⇨ $(\cos\theta-\sin\theta)^2=1-2\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$

따라서 $\cos\theta-\sin\theta>0$

$\therefore\ \cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

39) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

⇨ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$, $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

θ가 제2사분면 각이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$ $\qquad\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore\ \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\frac{\sqrt{7}}{4}$

40) $\frac{1}{4}$

41) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

⇨ $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

이때, θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ $\qquad\therefore\ \cos\theta-\sin\theta<0$

$\therefore\ \cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

42) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

43) $\frac{2}{\sin\theta}$

⇨ $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\sin\theta\left(\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right)=\frac{2}{\sin\theta}$

44) $-\cos\theta$

⇨ $\tan\theta\times\cos\theta-\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sin\theta-\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sin\theta-(\sin\theta+\cos\theta)=-\cos\theta$

45) $\frac{2}{\cos\theta}$

⇨ $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}$

46) $-\frac{1}{\cos\theta}$

⇨ $\tan\theta-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\sin\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=-\frac{1}{\cos\theta}$

47) $\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

⇨ $\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\tan\theta\times\dfrac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\tan\theta}{\sin^2\theta}=2\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

48) $\dfrac{1}{\cos\theta}$

⇨ $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta}$

49) 2

⇨ $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$\quad+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

50) 2

⇨ $1+\tan^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

주어진 값을 정리하자.

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2$

$=1+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$=1+2\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)^2$

$=1+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=1+1=2$

51) 1

⇨ $\left(\sin\theta-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2-\left(\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^2+\left(\cos\theta-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$

$=\left(\sin^2\theta-2+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)-\left(\tan^2\theta-2+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$\quad+\left(\cos^2\theta-2+\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)$

$=\sin^2\theta-2+\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\tan^2\theta+2-\dfrac{1}{\tan^2\theta}+\cos^2\theta-2+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=-1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\tan^2\theta-\dfrac{1}{\tan^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=-1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=-1+\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=-1+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=-1+1+1=1$

52) 2

⇨ $\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)$

$=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta+1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

53) $\sin\theta$

⇨ $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

$\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta}=|\sin\theta|$

$=\sin\theta\ (\because\ \sin\theta>0)$

54) $\cos\theta$

⇨ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$ 이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}}=\dfrac{1}{\left|\dfrac{1}{\cos\theta}\right|}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos\theta}}=\cos\theta$

55) $-\cos\theta$

⇨ $\sqrt{1-\cos^2\theta\tan^2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos^2\theta\cdot\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=-\cos\theta\ (\because\ \cos\theta<0)$

56) $\sin\theta+\cos\theta$

⇨ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$ 이므로

$\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta+\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta$

57) $\sin\theta-\cos\theta$

⇨ $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

$\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta-\cos\theta\ (\because\ \sin\theta>0,\ \cos\theta<0)$

58) 1

⇨ 양변을 제곱하면

$1+2\sin x\cos x=1$ $\quad\therefore\ \sin x\cos x=0$

$\sin x=-1$, $\cos x=0$ 또는 $\sin x=0$, $\cos x=-1$ 이므로

$\sin^{2016}x+\cos^{2016}x=1$

59) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\log_4(\sin^4\theta\cos^4\theta)=\log_4\dfrac{1}{16^2}$

$\sin^4\theta\cos^4\theta=\dfrac{1}{16^2}$, $\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\times\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

60) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $x^2-\sqrt{2}x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱한 후 ㉡을 대입하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=2$

$1+2k=2$ $\quad\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

61) $-\dfrac{5}{6}$

⇨ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{3}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

$\dfrac{k}{3}=-\dfrac{5}{18}$ $\quad\therefore\ k=-\dfrac{5}{6}$

62) $-\dfrac{1}{4}$

⇨ $x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱한 후 ㉡을 대입하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$1+2k=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ k=-\dfrac{1}{4}$

63) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

⇨ $x^2+kx+\dfrac{1}{4}=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱한 후 ㉡을 대입하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=k^2$

$1+2\cdot\dfrac{1}{4}=k^2$ $\quad\therefore\ k=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $(\because\ k>0)$

64) $2\sqrt{2}$

⇨ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{k^2}{16}$

$1+2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{k^2}{16}$

$k^2=8$ $\quad\therefore\ k=2\sqrt{2}$ $(\because\ k>0)$

65) $4\sqrt{10}$

66) $\sqrt{15}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{k}{3}$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{k^2}{9}$

$1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{k^2}{9}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{k^2}{9}$

$k^2=15$

$\therefore\ k=\sqrt{15}$

67) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

⇨ $x^2+kx+\dfrac{1}{3}=0$이 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱한 후 ㉡을 대입하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=k^2$

$1+2\cdot\dfrac{1}{3}=k^2$ $\quad\therefore\ k=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ $(\because\ k>0)$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

68) 0

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=0$ $\therefore |\sin\theta-\cos\theta|=0$

69) 2

⇨ $x^2-2\sqrt{2}x+k=0$의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$ 이므로

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$ ...... ㉠

$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=k$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $\sin\theta\cos\theta$를 곱하면

$\sin\theta+\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$

㉡에서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{k}$ 이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{k}$

이 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{k^2}$

$\therefore\ 1+\frac{2}{k}=\frac{8}{k^2}$

양변에 k^2을 곱하면

$k^2+2k-8=0$, $(k+4)(k-2)=0$

$\therefore\ k=2\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{에서 } k>0\right)$

70) $-\frac{5}{2}$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\cdots$ ①

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{5}$ $\cdots$ ②

①식의 양변을 제곱하고 ②식을 대입하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$1+2\times\left(\frac{a}{5}\right)=\frac{1}{5}$, $\frac{2a}{5}=-\frac{4}{5}$ $\therefore\ a=-2$

따라서 주어진 이차방정식은

$5x^2+\sqrt{5}x-2=0$, $(\sqrt{5}x+2)(\sqrt{5}x-1)=0$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 두 근은

$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \tan\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+\tan\theta=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

71) $2-\sqrt{2}$

⇨ 근과 계수의 관계에 의해 $\sin\theta+\cos\theta=2a-1$, $\sin\theta\cos\theta=1-2a$이다.

$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하면 $(2a-1)^2-2(1-2a)=1$이고, 여기서 $2a-1=\sqrt{2}-1$임을 알 수 있다.

따라서 구하는 값을 정리하면 다음과 같다.

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=(2a-1)^3+3(2a-1)^2=(\sqrt{2}-1)^3+3(\sqrt{2}-1)^2$

$=2-\sqrt{2}$

72) $3x^2+8x+3=0$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\cdots$㉠, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$ $\cdots$㉡

㉠을 제곱하여 ㉡을 대입하면

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2^2}$, $1+k=\frac{1}{4}$ $\therefore\ k=-\frac{3}{4}$

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{2}{k}=-\frac{8}{3}$,

$\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}=1$이므로 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$를 두 근으로 하고 최고차항 계수를 3으로 하는 이차방정식은

$3x^2+8x+3=0$