2-2-2.이차함수의 최대, 최소_천재(류희찬)

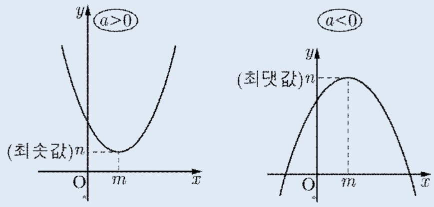
개념check

[이차함수의 최대, 최소]

- 모든 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 최댓값이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 최솟값이라 한다.
- $y=a(x-m)^2+n$의 최댓값과 최솟값

① $a>0$이면 $y=a(x-m)^2+n$은 $x=m$일 때 최솟값 n을 갖고 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $y=a(x-m)^2+n$은 $x=m$일 때 최댓값 n을 갖고 최솟값은 없다.



- 제한된 범위 $\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최댓값, 최솟값은 다음과 같다.

① $\alpha \le m \le \beta$이면 $f(\alpha)$, $f(m)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $m<\alpha$ 또는 $\beta<m$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.

기본문제

[문제]

1. 이차함수 $y=-x^2+6x+5$의 최댓값과 그때의 x의 값은?

① 4, $x=-3$　② 4, $x=3$
③ 14, $x=6$　④ 14, $x=-3$
⑤ 14, $x=3$

[예제]

2. $0 \le x \le 5$에서 이차함수 $y=-x^2+8x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 21　② 22
③ 23　④ 24
⑤ 25

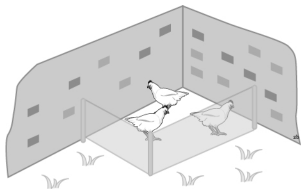
[문제]

3. $-1 \le x \le 3$에서 이차함수 $y=2x^2-8x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M-m$의 값은?

① 18　② 19
③ 20　④ 21
⑤ 22

[예제]

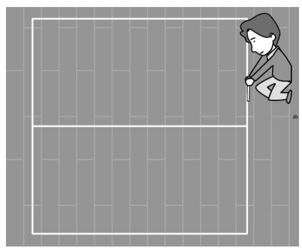
4. 다음 그림과 같이 수직을 이루는 두 벽면과 길이가 $8\,\mathrm{m}$인 철망을 이용하여 바닥이 직사각형 모양인 닭장을 만들려고 할 때, 바닥의 넓이의 최댓값은? (단, 철망의 높이는 무시한다.)



① 12　② 14
③ 16　④ 18
⑤ 20

[문제]

5. 종이테이프를 이용하여 다음 그림과 같이 두 개의 직사각형 모양으로 된 피구장을 만들려고 한다. 사용할 수 있는 종이테이프의 전체 길이가 $48\,\mathrm{m}$일 때, 만들 수 있는 피구장의 넓이의 최댓값은? (단, 종이테이프의 폭은 무시한다.)



① 84　② 88
③ 92　④ 96
⑤ 100

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[스스로 확인하기]

6. 다음 중 이차함수의 최댓값과 최솟값으로 옳지 않은 것은?

① $y=x^2-6x+5$, 최댓값 : 없음, 최솟값 : -4

② $y=-x^2+4x-3$, 최댓값 : 1, 최솟값 : 없음

③ $y=2x^2-8x-1$, 최댓값 : 없음, 최솟값 : -7

④ $y=-2x^2-4x+3$, 최댓값 : 5, 최솟값 : 없음

⑤ $y=3x^2+12x-2$, 최댓값 : 없음, 최솟값 : -14

[스스로 확인하기]

7. 다음 중 이차함수의 최댓값과 최솟값으로 옳지 않은 것은?

① $y=x^2-4x+3$, 최댓값 : 없음, 최솟값 : -1

② $y=-x^2+8x-1$, 최댓값 : 15, 최솟값 : 없음

③ $y=2x^2-8x+3$, 최댓값 : 없음, 최솟값 : -5

④ $y=-2x^2+8x+1$, 최댓값 : 15, 최솟값 : 없음

⑤ $y=3x^2+6x$, 최댓값 : 없음, 최솟값 : -3

[스스로 확인하기]

8. 다음 중 $-2 \le x \le 3$에서 이차함수의 최댓값과 최솟값으로 옳지 않은 것은?

① $y=x^2-4x+1$, 최댓값 : 13, 최솟값 : -3

② $y=-x^2+8x-4$, 최댓값 : 11, 최솟값 : -24

③ $y=2x^2-8x+5$, 최댓값 : 29, 최솟값 : -3

④ $y=-2x^2-4x+25$, 최댓값 : 27, 최솟값 : -5

⑤ $y=3x^2-6x$, 최댓값 : 9, 최솟값 : -3

[스스로 확인하기]

9. $-1 \le x \le 3$에서 이차함수 $y=2x^2-8x+k$의 최댓값이 7일 때, 최솟값은? (단, k는 상수)

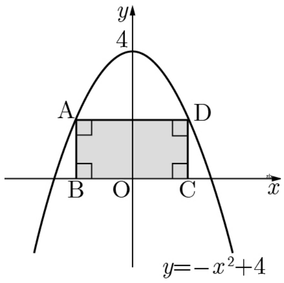
① -1　　② -6

③ -11　　④ -16

⑤ -21

[스스로 확인하기]

10. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A, D는 이차함수 $y=-x^2+4$의 그래프 위에 있고 꼭짓점 B, C는 x축 위에 있을 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, 점 A는 제2사분면 위의 점이다.)



① 12　　② 10

③ 8　　④ 6

⑤ 4

[스스로 확인하기]

11. 지면으로부터 12 m의 높이에서 지면과 수직 방향으로 공을 던졌을 때, t초 후 지면으로부터 공의 높이를 y m라 하면 y와 t 사이에 $y=-4t^2+16t+12$인 관계가 성립한다. $1 \le t \le 4$에서 지면으로부터 공의 높이의 최솟값은?

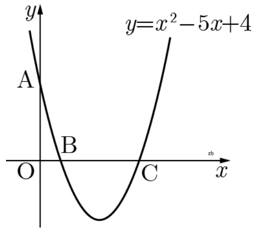
① 4　　② 6

③ 8　　④ 10

⑤ 12

[스스로 마무리하기]

12. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하고, x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 곡선 위를 따라 점 A에서 점 C까지 움직일 때, $a+b$의 최솟값은? (단, 점 C의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크다.)



① -1　　② 0

③ 1　　④ 2

⑤ 3

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

유사문제

13. $1 < x \leq 6$에서 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

14. $-1 \leq x \leq 4$일 때, 이차함수 $y = x^2 - 4x + 6$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 17　② 13　③ 9　④ 8　⑤ 6

15. $1 \leq x \leq 4$ 인 범위에서 이차함수 $y = -2x^2 + 8x - 6$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

16. $-1 \leq x \leq 6$에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + ax + b$가 다음 조건을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값은?

(가) 축의 방정식은 $x = 4$이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

① -18　② -16　③ -14　④ -12　⑤ -10

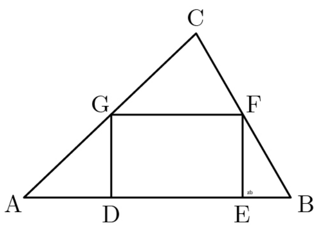
17. $0 \leq x \leq 2$에서 함수 $f(x) = 2x^2 - 4kx + k^2 + 2k - 2$의 최솟값이 1이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

18. $0 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2ax - 2a$ 의 최댓값이 3 일 때, 실수 a 의 값은? (단, $a \geq 0$ 이다.)

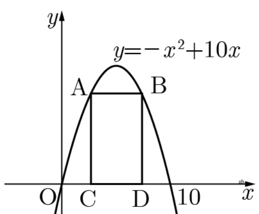
① 4　② $\frac{7}{2}$　③ 3　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 2

19. 다음 그림과 같이 밑변 AB 의 길이가 6 이고 높이가 4 인 예각삼각형 ABC 가 있다. 밑변 AB 위를 움직이는 두 점 D, E 와 변 BC 위에 움직이는 점 F, 변 CA 위를 움직이는 점 G 로 이루어진 직사각형 DEFG 의 넓이의 최댓값은?



① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6　④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

20. 아래 그림과 같이 곡선 $y = -x^2 + 10x$ 위의 두 점 A, B와 x축 위의 두 점 C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ACDB$의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, O는 원점이고 두 점 A, B는 제 1사분면 위의 점이다.)



① 48　② 50　③ 52　④ 54　⑤ 56

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] $y=-x^2+6x+5=-(x-3)^2+14$이므로

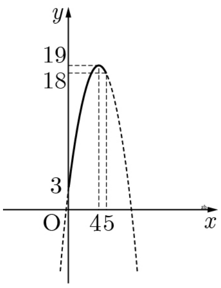
$y=-(x-3)^2+14$

따라서 $x=3$에서 최댓값 14를 가진다.

2) [정답] ②

[해설] $y=-x^2+8x+3=-(x-4)^2+19$이므로

$0 \le x \le 5$일 때 이차함수의 그래프는 다음 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 범위에 포함된다.



즉 $x=0$일 때, $y=3$

$x=4$일 때, $y=19$

$x=5$일 때, $y=18$

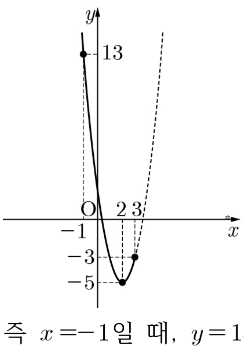
이므로 최댓값 $M=19$, 최솟값 $m=3$이고

$M+m=22$

3) [정답] ①

[해설] $y=2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5$이므로

$-1 \le x \le 3$일 때 이차함수의 그래프는 다음 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 범위에 포함된다.



즉 $x=-1$일 때, $y=13$

$x=2$일 때, $y=-5$

$x=3$일 때, $y=-3$

이므로 최댓값 $M=13$, 최솟값 $m=-5$이고

$M-m=18$

4) [정답] ③

[해설] 바닥의 가로의 길이를 x m, 넓이를 y m^{2}라 하자.

바닥의 가로의 길이가 x m이면 세로의 길이는 $(8-x)$ m이므로

$x>0$, $8-x>0$, 즉 $0<x<8$

직사각형 모양의 바닥의 넓이는 $x(8-x)$ m^{2}이므로

$y=x(8-x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$

$0<x<8$이므로 이차함수 $y=-(x-4)^2+16$는 $x=4$일 때 최댓값 16를 갖는다.

따라서 바닥의 넓이의 최댓값은 16 m^{2}이다.

5) [정답] ④

[해설] 피구장의 가로의 길이를 x m, 넓이를 y m^{2}라 하자.

바닥의 가로의 길이가 x m이면 세로의 길이는 $\left(24-\frac{3}{2}x\right)$ m이므로

$x>0$, $24-\frac{3}{2}x>0$, 즉 $0<x<16$

직사각형 모양의 피구장의 넓이는 $x\left(24-\frac{3}{2}x\right)$ m^{2}이므로

$y=x\left(24-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{3}{2}x^2+24x=-\frac{3}{2}(x-8)^2+96$

$0<x<16$이므로 이차함수 $y=-\frac{3}{2}(x-8)^2+96$은 $x=8$일 때 최댓값 96를 갖는다.

따라서 피구장의 넓이의 최댓값은 96 m^{2}이다.

6) [정답] ③

[해설] (i) $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$이므로

이차함수 $y=x^2-6x+5$는 $x=3$에서 최솟값 -4를 가진다.

(ii) $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$이므로

이차함수 $y=-x^2+4x-3$는 $x=2$에서 최댓값 1을 가진다.

(iii) $y=2x^2-8x-1=2(x-2)^2-9$이므로

이차함수 $y=2x^2-8x-1$은 $x=2$에서 최솟값 -9를 가진다.

(iv) $y=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$이므로

이차함수 $y=-2x^2-4x+3$은 $x=-1$에서 최댓값 5를 가진다.

(v) $y=3x^2+12x-2=3(x+2)^2-14$이므로

이차함수 $y=3x^2+12x-2$는 $x=-2$에서 최솟값 -14를 가진다.

7) [정답] ④

[해설] (i) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로

이차함수 $y=x^2-4x+3$는 $x=2$에서 최솟값 -1을 가진다.

(ii) $y=-x^2+8x-1=-(x-4)^2+15$이므로

이차함수 $y=-x^2+8x-1$은 $x=4$에서 최댓값 15를 가진다.

(iii) $y=2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5$이므로

이차함수 $y=2x^2-8x+3$은 $x=2$에서 최솟값

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

-5를 가진다.

(iv) $y=-2x^2+8x+1=-2(x-2)^2+9$이므로

이차함수 $y=-2x^2+8x+1$은 $x=2$에서 최댓값 9를 가진다.

(v) $y=3x^2+6x=3(x+1)^2-3$이므로

이차함수 $y=3x^2+6x$는 $x=-1$에서 최솟값 -3를 가진다.

8) [정답] ⑤

[해설] (i) $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

$-2\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=x^2-4x+1$은 $x=-2$에서 최댓값 13, $x=2$에서 최솟값 -3을 가진다.

(ii) $y=-x^2+8x-4=-(x-4)^2+12$

$-2\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=-x^2+8x-4$는 $x=3$에서 최댓값 11, $x=-2$에서 최솟값 -24를 가진다.

(iii) $y=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$

$-2\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=2x^2-8x+5$는 $x=-2$에서 최댓값 29, $x=2$에서 최솟값 -3을 가진다.

(iv) $y=-2x^2-4x+25=-2(x+1)^2+27$

$-2\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=-2x^2-4x+25$는 $x=-1$에서 최댓값 27, $x=3$에서 최솟값 -5를 가진다.

(v) $y=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$

$-2\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=3x^2-6x$는 $x=-2$에서 최댓값 24, $x=1$에서 최솟값 -3을 가진다.

9) [정답] ③

[해설] $y=2x^2-8x+k=2(x-2)^2+k-8$

$-1\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=2x^2-8x+k$는 $x=-1$에서 최댓값 $k+10$를 가지므로

$k+10=7$, 즉 $k=-3$

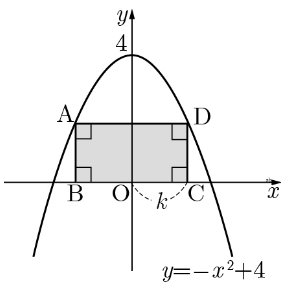
$y=2x^2-8x-3=2(x-2)^2-11$

$-1\le x\le 3$이므로 이차함수 $y=2x^2-8x-3$는 $x=2$에서 최솟값 -11을 가진다.

10) [정답] ②

[해설] 점 C의 좌표를 $(k,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=2k$, $\overline{\mathrm{CD}}=-k^2+4$ (단, $0<k<2$)



직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}})$

$=2\{2k+(-k^2+4)\}$

$=-2k^2+4k+8$

$=-2(k-1)^2+10$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.

11) [정답] ⑤

[해설] $y=-4t^2+16t+12=-4(t-2)^2+28$

$1\le t\le 4$이므로 이차함수 $y=-4t^2+16t+12$는 $t=4$에서 최솟값 12를 가진다.

12) [정답] ②

[해설] $\mathrm{A}(0,4)$이고 x축과 만나는 두 점이 B, C이므로

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$, 즉 $\mathrm{B}(1,0)$, $\mathrm{C}(4,0)$

한편 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-5a+4$, $0\le a\le 4$

따라서

$a+b=a+a^2-5a+4=a^2-4a+4=(a-2)^2$

이때 $0\le a\le 4$에서 $(a-2)^2$의 최솟값은 0이다.

13) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-2x=\dfrac{1}{3}(x-3)^2-3$라 하자.

$1<x\le 6$에서

$x=3$일 때 최소, $x=6$일 때 최대이다.

$M=f(6)=0$, $m=f(3)=-3$

$\therefore M-m=3$

14) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$라 하면

$-1\le x\le 4$에서

$x=2$일 때 최소, $x=-1$일 때 최대이다.

최댓값 $f(-1)=11$, 최솟값 $f(2)=2$이고

그 합은 13이다.

15) [정답] ③

[해설] $y=-2x^2+8x-6=-2(x-2)^2+2$이므로

$1\le x\le 4$에서 $x=2$일 때 최댓값 $M=2$이고

$x=4$일 때 최솟값 $m=-6$이다.

따라서 $M-m=8$이다.

16) [정답] ①

[해설] $f(x)=-x^2+ax+b$의 축의 방정식은

$x=\dfrac{a}{2}$이므로 $\dfrac{a}{2}=4$

$\therefore a=8$

$f(x)=-x^2+8x+b=-(x-4)^2+16+b$

$x=4$에서 최대이므로 $16+b=7$

$\therefore b=-9$

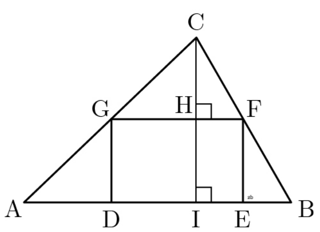
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

따라서 $-1 \le x \le 6$에서 $x=-1$일 때 최소이므로
최솟값 $f(-1)=-1-8-9=-18$

17) [정답] ②
[해설] $f(x)=2x^2-4kx+k^2+2k-2$
$=2(x-k)^2-k^2+2k-2$
$f(x)$의 대칭축은 $x=k$이다.
(i) $k>2$일 때
최솟값은 $x=2$일 때이므로
$f(2)=8-8k+k^2+2k-2=1$
$k^2-6k+5=0$
$k>2$이므로 $\therefore k=5$
(ii) $0 \le k \le 2$일 때
최솟값은 $x=k$일 때이므로
$f(k)=-k^2+2k-2=1$
$k^2-2k+3=0$
$\therefore$ 만족하는 실수 k는 없다.
(iii) $k<0$일 때
최솟값은 $x=0$일 때이므로
$f(0)=k^2+2k-2=1$
$k^2+2k-3=0$
$k<0$이므로 $\therefore k=-3$
따라서 만족하는 실수 k의 값의 합은 $5-3=2$이다.

18) [정답] ②
[해설] $f(x)=-x^2+2ax-2a=-(x-a)^2+a^2-2a$
(i) $0 \le a \le 2$인 경우
$0 \le x \le 2$에서 $x=a$일 때 최대이다.
최댓값 $f(a)=a^2-2a=3$
$a^2-2a-3=0$, $(a-3)(a+1)=0$
$a=3$ 또는 $a=-1$
성립하지 않는다.
(ii) $a>2$인 경우
$0 \le x \le 2$에서 $x=2$일 때 최대이다.
최댓값 $f(2)=-4+4a-2a=3$
$\therefore a=\frac{7}{2}$

19) [정답] ③
[해설] 점 C에서 선분 GF와 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고 $\overline{GF}=x$라고 하자.



$\triangle ABC$와 $\triangle GFC$는 닮음이므로
$\overline{AB}:\overline{GF}=\overline{CI}:\overline{CH}$이다.
$6:x=4:\overline{CH}$, $\overline{CH}=\frac{2}{3}x$
$\overline{GD}=\overline{CI}-\overline{CH}=4-\frac{2}{3}x$
$\square DEFG=x\left(4-\frac{2}{3}x\right)=-\frac{2}{3}(x-3)^2+6$
따라서 직사각형 $DEFG$의 넓이의 최댓값은 6이다.

20) [정답] ③
[해설] 점 A의 좌표를 $(a,\ -a^2+10a)$라 하자.
$\overline{CD}=10-2a$, $\overline{AC}=-a^2+10a$
$\square ACDB$의 둘레의 길이를 l이라 하면
$l=2(10-2a-a^2+10a)=-2(a-4)^2+52$
따라서 l의 최댓값은 52이다.