01 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때

(1) $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

(단, $f'(g(x))\neq 0$) 또는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ (단, $\dfrac{dx}{dy}\neq 0$)

(2) $f(a)=b$, 즉 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$

(단, $f'(a)\neq 0$)

◪ 역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

1. $y=\sqrt[5]{x}$

2. $y=\sqrt[4]{x-2}$

3. $y=\sqrt[3]{x-1}$

4. $y=\sqrt[4]{(x-2)^3}$

5. $y=\sqrt[3]{2x+6}$

6. $y=\sqrt[4]{4x-1}$

7. $x=y^3$

8. $x=\dfrac{y}{y^2+2}$

9. $x=3y^2-y+2$

◪ 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 알맞은 값을 구하여라.

10. 함수 $f(x)=x^2+2x-8$ $(x\geq -1)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(16)$의 값

11. 함수 $f(x)=x^3+3x-1$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(3)$의 값

12. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+4x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

13. 함수 $f(x)=x^2+4x-8\ (x\geq -2)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(4)$의 값

14. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+5x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(-3)$의 값

15. 함수 $f(x)=\sqrt[3]{x-2}\ (x\neq 2)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'(3)$의 값

16. 함수 $f(x)=2x\sqrt{1+x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2\sqrt{2})$의 값

17. 함수 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값

18. 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값

19. 함수 $f(x)=\cos x\ (0<x<\pi)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$의 값

20. $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin 2x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값

21. 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값 (단, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$)

22. 함수 $f(x)=x+\sin x$의 역함수 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\right)$의 값

23. 함수 $f(x)=\tan 2x\left(-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(-1)$의 값

24. 함수 $f(x)=4^x-2^x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(6)$의 값

25. 함수 $f(x)=e^x+\ln x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(e)$의 값

26. 함수 $f(x)=(x-2)e^x$(단, $x>1$)의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(e^3)$의 값

◪ 다음 물음에 답하여라.

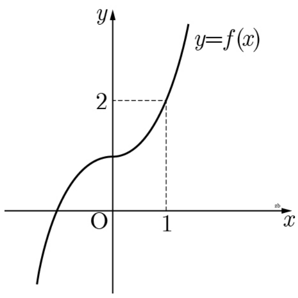
27. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계에 있고 $f(2)=3$, $f'(2)=5$일 때, $g'(3)$의 값을 구하여라.

28. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$의 값을 구하여라.

29. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(1)=3f(1)$이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(2)$의 값을 구하여라.



30. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$ $(x>0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^5,\ 5)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

31. 함수 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{x-1}}$ $(-1<x<1)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)-g'(0)$의 값을 구하여라.

32. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=\dfrac{1}{3}$을 만족하고 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 미분가능할 때, $g'(3)$의 값을 구하여라.

33. 함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\dfrac{1}{f'(1)}+\dfrac{1}{g'(1)}$의 값을 구하여라.

34. $f(x)=x\sqrt{1+x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(\sqrt{2})+g'(\sqrt{2})$의 값

35. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)-3}{x-1}=4$일 때, $f'(3)$의 값을 구하여라.

36. 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 4}\dfrac{f(x)-2}{x-4}=\dfrac{1}{3}$을 만족할 때, $g(2)+g'(2)$의 값을 구하여라.

37. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 3}\dfrac{g(x)+2}{x-3}=4$일 때, $f(-2)+f'(-2)$의 값을 구하여라.

38. 함수 $f(x)=x^3+3x-3$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}$의 값을 구하여라.

39. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{1-g(x)}{x-2}=-\frac{1}{4}$을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하여라.

40. 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 양수 a에 대하여 $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}$의 값을 구하여라.

02 이계도함수

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때,
$f'(x)$의 도함수 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$를
함수 $f(x)$의 이계도함수라 하고,
기호로 $f''(x)$, y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$로 나타낸다.

◪ 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

41. $y=x(x+1)^2$

42. $y=3x^4+5x^2+4$

43. $y=x^3-2x^2+5$

44. $y=x^3-2x^2+x+3$

45. $y=(2x+1)^3$

46. $y=\frac{1}{x^2+4}$

47. $y=\frac{1}{x^2+1}$

48. $y=x\sin x$

49. $y=\cos 2x$

50. $y=\sin^2 x$

51. $y=e^{4x-1}$

52. $y=e^{-x}\cos x$

53. $y=e^{x}\cos 2x$

54. $y=x^{3}e^{-x}$

55. $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

56. $y=\ln x$

57. $y=x\ln x$

58. $y=x^{2}\ln x$

59. $y=2\ln(\ln x)\ \ (x>1)$

◪ 다음 값을 구하여라.

60. 함수 $f(x)=\sqrt{3x+1}$에 대하여 $f''(1)$의 값

61. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$에 대하여 $f''(0)$의 값

62. 함수 $f(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)$에 대하여 $f''(0)$의 값

63. 함수 $f(x)=2e^{2x}$에 대하여 $f''(0)$의 값

64. 함수 $f(x)=\dfrac{\log_{2}x}{x}$에 대하여 $f''(1)$의 값

65. 함수 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{3}x+\cos\dfrac{\pi}{2}x$에 대하여 $f''(1)$의 값

66. 함수 $f(x)=\ln(\cos x)$에 대하여 $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값

67. 함수 $f(x)=\cos 2x-x^{2}$에 대하여 $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값

68. 함수 $f(x)=e^{x}\sin x$일 때, $f''(\pi)$의 값

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

69. 함수 $f(x)=e^{2x}$에 대하여 $f'(\ln 2)+f''(\ln 2)$의 값을 구하여라.

70. 함수 $f(x)=xe^{x}$에 대하여 $f(1)+f'(1)+f''(1)$의 값

71. 함수 $f(x)=xe^{2x}+x\ln x$에 대하여 $f'(1)-f''(1)$의 값을 구하여라.

72. 함수 $f(x)=\cos 3x$에 대하여 $f(0)+f'(\frac{\pi}{2})+f''(\pi)$의 값을 구하여라.

73. 함수 $f(x)=\sin x+\cos x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라.

74. $f(x)=x\sin 2x$일 때, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f''(0)$의 값을 구하여라.

75. 함수 $f(x)=\tan x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값

◪ 다음 물음에 답하여라.

76. 함수 $f(x)=xe^{ax+2}$에 대하여 $f''(0)=8e^{2}$이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

77. $y=e^{-x}\cos 2x$에 대하여 등식 $y''+ay'+5y=0$을 항상 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

78. 함수 $f(x)=e^{x^2+ax+1}$에 대하여 $f''(0)=18e$가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

79. $f(x)=ax^2\sin x$, $f'(\pi)-\pi f''(\pi)=9\pi^2$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

80. 함수 $f(x)=4\cos x-\sqrt{2}\cot x$에 대하여 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)}{4x-\pi}$의 값을 구하여라.

81. 함수 $f(x)=\sin(x^2+x)$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(2x)-1}{x}$의 값을 구하여라.

82. 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-1}{h}$의 값을 구하여라.

83. 함수 $f(x)=(ax+b)\cos x$가 $f'(0)=1$, $f''(0)=2$를 만족할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

84. 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$에 대하여, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

⇨ 주어진 식의 양변을 5제곱하면 $y^5=x$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=5y^4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$

⇨ $y=\sqrt[4]{x-2}$ 에서 $x=y^4+2$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=4y^3$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x-2})^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

⇨ 주어진 식의 양변을 세 제곱하면

$y^3=x-1$이므로 $x=y^3+1$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=3y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x-2}}$

⇨ 주어진 식의 양변을 4제곱하면

$y^4=(x-2)^3$이므로 $x=y^{\frac{4}{3}}+2$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=\frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{3}{4y^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{4\sqrt[3]{y}}$

$=\frac{3}{4\sqrt[12]{(x-2)^3}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x-2}}$

5) $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$

⇨ $y=\sqrt[3]{2x+6}$ 에서 $x=\frac{1}{2}y^3-3$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{3}{2}y^2}=\frac{2}{3(\sqrt[3]{2x+6})^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$

6) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}}$(단, $x\neq\frac{1}{4}$)

⇨ $y=\sqrt[4]{4x-1}$ 에서 $y^4=4x-1$이므로

$x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{4}$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=y^3$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^3}=\frac{1}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}}$ (단, $x\neq\frac{1}{4}$)

7) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

⇨ $x=y^3$의 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=3y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

8) $\frac{dy}{dx}=-\frac{(y^2+2)^2}{y^2-2}$

⇨ 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{(y^2+2)-y\cdot 2y}{(y^2+2)^2}=\frac{-y^2+2}{(y^2+2)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(y^2+2)^2}{y^2-2}$ (단, $y\neq\pm\sqrt{2}$)

9) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y-1}$(단, $y\neq\frac{1}{6}$)

⇨ 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=6y-1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y-1}$ (단, $y\neq\frac{1}{6}$)

10) $\frac{1}{10}$

⇨ $g(16)=a$라고 하면 $f(a)=16$

즉, $f(a)=a^2+2a-8=16$이므로

$a^2+2a-24=0$, $(a-4)(a+6)=0$

$\therefore a=4$ $(\because a\geq -1)$

따라서 $g(16)=4$이고, $f'(x)=2x+2$이므로

$\therefore g'(16)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{10}$

11) $\frac{1}{6}$

⇨ $g(3)=a$라고 하면 $f(a)=3$

즉, $f(a)=a^3+3a-1=3$이므로

$a^3+3a-4=0$, $(a-1)(a^2+a+4)=0$

$\therefore a=1$

따라서 $g(3)=1$이고, $f'(x)=3x^2+3$이므로

$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$

12) 1

⇨ $g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$a^3-3a^2+4a+1=3$

$(a-1)(a^2-2a+2)=0$ $\therefore a=1$

$f(x)$의 역함수 $g(x)$는

$x=y^3-3y^2+4y+1$이라 할 때,

$\dfrac{dx}{dy}=3y^2-6y+4$

따라서 $g'(x)=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2-6y+4}$, $g(3)=1$이므로

$g'(3)=\dfrac{1}{3-6+4}=1$

13) $\dfrac{1}{8}$

⇨ $g(4)=a$라고 하면 $f(a)=4$

즉, $f(a)=a^2+4a-8=4$이므로

$a^2+4a-12=0$, $(a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ $(\because a\geq -2)$

따라서 $g(4)=2$이고, $f'(x)=2x+4$이므로

$\therefore g'(4)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{8}$

14) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $g(-3)=a$라고 하면 $f(a)=-3$

$f(a)=a^3+3a^2+5a=-3$

$a^3+3a^2+5a+3=0$에서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$
이므로

$(a+1)(a^2+2a+3)=0$

이 때, $a^2+2a+3>0$이므로 $a=-1$

즉, $g(-3)=-1$이고 $f'(x)=3x^2+6x+5$이므로

$f'(g(-3))=f'(-1)=2$

$\therefore g'(-3)=\dfrac{1}{f'(g(-3))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{2}$

15) 27

⇨ $f'(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$이고, $f(29)=3$

$\therefore g'(3)=\dfrac{1}{f'(29)}=27$

16) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

⇨ $f(k)=2\sqrt{2}$라 하면 $2k\sqrt{1+k}=2\sqrt{2}$

$k^2(1+k)=2$, $(k-1)(k^2+2k+2)=0$ $\therefore k=1$

이때 $f'(x)=2\sqrt{1+x}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

$\therefore g'(2\sqrt{2})=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{2}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

17) 2

⇨ $g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

$f(k)=\dfrac{3k+1}{k+1}=2$

$3k+1=2k+2$ $\therefore k=1$

$f'(x)=\dfrac{3(x+1)-(3x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$이므로

$\therefore g'(2)=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

18) -3

⇨ $g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$f(k)=\dfrac{2k+1}{k-1}=3$, $2k+1=3k-3$ $\therefore k=4$

이때 $f'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$이므로

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(4)}=-3$

19) -2

⇨ $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 역함수의 미분법에 의해

$\therefore g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$f'(x)=-\sin x$이므로

$\therefore g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-2$

20) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⇨ $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=a$라고 하면 $f(a)=\dfrac{1}{2}$

즉, $f(a)=\sin 2a=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{12}$

따라서 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{12}$이고, $f'(x)=2\cos 2x$이므로

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\dfrac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

21) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $g(1)=a$라고 하면 $f(a)=1$

$f(a)=\tan a=1$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{4}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

즉, $g(1)=\dfrac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$f'(g(1))=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{2}$

22) $4-2\sqrt{3}$

⇨ $f(k)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}$ ⇒ $k+\sin k=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{6}$ $\quad\therefore k=\dfrac{\pi}{6}$

이때 $f'(x)=1+\cos x$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(k)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$$

23) $\dfrac{1}{4}$

⇨ $\tan 2x=-1$, $2x=-\dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ x=-\dfrac{\pi}{8}$

따라서 $f'(x)=2\sec^2 2x$이므로

$$g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{2\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{4}$$

24) $\dfrac{1}{15\ln 2}$

⇨ $6=4^x-2^x$를 만족하는 x는 $2^x>0$이고 $(2^x-3)(2^x+2)=0$이므로 $2^x=3$이고, $x=\log_2 3$이다.

또한 $f'(x)=4^x\ln 4-2^x\ln 2$이므로

$$g'(6)=\frac{1}{f'(g(6))}=\frac{1}{f'(\log_2 3)}=\frac{1}{9\ln 4-3\ln 2}=\frac{1}{15\ln 2}$$

25) $\dfrac{1}{e+1}$

⇨ $g(e)=a$라고 하면 $f(a)=e$

즉, $f(a)=e^a+\ln a=e$ $\therefore a=1$

따라서 $g(e)=1$이고, $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$이므로

$$g'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e^1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{e+1}$$

26) $\dfrac{1}{2e^3}$

⇨ $f'(x)=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$, $f(3)=e^3$

$$\therefore\ g'(e^3)=\frac{1}{f'(g(e^3))}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{2e^3}$$

27) $\dfrac{1}{5}$

⇨ $f(2)=3$이므로 $g(3)=2$이다.

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{5}$$

28) $\dfrac{1}{3}$

⇨ $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{g(x)-2\}=0$이므로 $g(1)-2=0$

$\therefore g(1)=2$

또한 $g(1)=2$이므로 $f(2)=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$$

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}$

따라서 $f'(2)=\dfrac{1}{g'(f(2))}=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{3}$

29) $\dfrac{1}{6}$

⇨ $f(1)=2$이므로 $g(2)=1$이다.

또 $f'(1)=3f(1)=3\cdot2=6$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$

30) $\dfrac{1}{2e^5}$

⇨ $f'(x)=e^x+(x-4)e^x=e^x(x-3)$이므로

곡선 $y=g(x)$의 점 $(e^5,\ 5)$에서 접선의 기울기는

$$g'(e^5)=\frac{1}{f'(g(e^5))}=\frac{1}{f'(5)}=\frac{1}{2e^5}$$

31) $\dfrac{4}{5}$

⇨ $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\{\ln(1+x)-\ln(1-x)\}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{-1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{5}$$

한편, $g(0)=a$라고 하면 $f(a)=0$이므로

$\ln\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}=0$, $\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}=1$ $\therefore a=0$

즉, $g(0)=0$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1}=1$$

따라서 구하는 값은 $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)-g'(0)=\dfrac{9}{5}-1=\dfrac{4}{5}$

32) 3

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 $x\to2$일 때, (분모)→0이고, 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다.
즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(2)=3$이므로
$g(3)=2$
한편 미분계수의 정의에 의하여
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3}$
$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(2)}=3$

33) 2
⇨ $f(k)=1$이라 하면 $\ln(e^k-1)=1$
$e^k-1=e$ $\quad\therefore k=\ln(e+1)$
이때 $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$이므로
$\frac{1}{f'(1)}+\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{f'(1)}+f'(\ln(e+1))$
$=\frac{e-1}{e}+\frac{e^{\ln(e+1)}}{e^{\ln(e+1)}-1}=\frac{e-1}{e}+\frac{e+1}{e}=2$

34) $1+\frac{2\sqrt{2}}{5}$
⇨ $x\sqrt{1+x}=\sqrt{2}$ $\therefore x=1$
$g'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'(1)}$
$f'(x)=\sqrt{1+x}+\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$
$\therefore g(\sqrt{2})+\frac{1}{f'(1)}=1+\frac{2\sqrt{2}}{5}$

35) $\frac{1}{4}$
⇨ 주어진 극한에서 $g(1)=3$, $g'(1)=4$
$\therefore f'(3)=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{4}$

36) 7
⇨ $f(4)=2$ 이고, 역함수 관계로 $g(2)=4$이다.
$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=\frac{1}{3}$
$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(4)}=3$
$\therefore\ g(2)+g'(2)=4+3=7$

37) $\frac{13}{4}$
⇨ 주어진 분수의 극한식이 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 마찬가지이다.
함수가 미분가능하므로 연속함수이고,
연속함수이므로 함숫값과 극한값이 같다.
즉, $\lim_{x\to3}g(x)=-2$ $\quad\therefore\ g(3)=-2$
주어진 극한식은 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=4$이다.
$f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계로 $f(-2)=3$이고,
$f'(-2)=\frac{1}{g'(3)}=\frac{1}{4}$
$\therefore\ f(-2)+f'(-2)=\frac{13}{4}$

38) $\frac{37}{6}$
⇨ 주어진 극한식을 정리하면 $f(1)=1$이므로 역함수 관계에 의해 $g(1)=1$이다.
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$
$f'(x)=3x^2+3$에서 $g'(1)=\frac{1}{f'(1)}$이므로
$f'(1)=6$, $g'(1)=\frac{1}{6}$이다.
따라서 주어진 극한 식의 값은
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$
$=6+\frac{1}{6}=\frac{37}{6}$

39) 4
⇨ 주어진 극한값에서 분모가 0에 수렴하면 분자도 0에 수렴하므로 $g(2)=1$
$\lim_{x\to2}-\frac{g(x)-1}{x-2}=-\frac{1}{4}$
$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\frac{1}{4}$ $\qquad\therefore\ g'(2)=\frac{1}{4}$
$\therefore\ f'(1)=\frac{1}{g'(2)}=4$

40) 2
⇨ $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ $g(a)=b$라고 하자.
$f(b)=a$, $\ln(e^b+1)=a$, $e^b+1=e^a$
$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{1}{f'(a)}+f'(b)=\frac{e^a+1}{e^a}+\frac{e^b}{e^b+1}$
$=\frac{e^a+1}{e^a}+\frac{e^a-1}{e^a}=\frac{2e^a}{e^a}=2$

41) $y''=6x+4$
⇨ $y'=1\cdot(x+1)^2+x\cdot2(x+1)$
$=(x^2+2x+1)+(2x^2+2x)$
$=3x^2+4x+1$
$y''=6x+4$

42) $y''=36x^2+10$
⇨ 함수 $y=3x^4+5x^2+4$의 도함수는 $y'=12x^3+10x$이고 이계도함수는 $y''=36x^2+10$이다.

43) $y''=6x-4$
⇨ $y'=3x^2-4x$이므로 $y''=6x-4$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

44) $y''=6x-4$

⇨ $y'=3x^2-4x+1$이므로 $y''=6x-4$

45) $y''=24(2x+1)$

⇨ $y'=3(2x+1)^2(2x+1)'$ 이므로
$=3(2x+1)^2\times 2=6(2x+1)^2$
$y''=6\times 2(2x+1)(2x+1)'$
$=12(2x+1)\times 2=24(2x+1)$

46) $y''=\dfrac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$

⇨ $y'=\dfrac{-(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$

$y''=\dfrac{(-2x)'(x^2+4)^2-(-2x)\{(x^2+4)^2\}'}{(x^2+4)^4}$

$=\dfrac{-2(x^2+4)^2+2x\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}$

$=\dfrac{(x^2+4)\{-2(x^2+4)+8x^2\}}{(x^2+4)^4}=\dfrac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$

47) $y''=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

⇨ $y'=-\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$y''=\dfrac{(-2x)'(x^2+1)^2-(-2x)\times 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{-2(x^2+1)^2+4x(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

48) $y''=2\cos x-x\sin x$

⇨ $y'=1\times\sin x+x\cos x=\sin x+x\cos x$이므로
$y''=\cos x+\{1\times\cos x+x\times(-\sin x)\}$
$=2\cos x-x\sin x$

49) $y''=-4\cos 2x$

⇨ $y'=-\sin 2x\times(2x)'=-2\sin 2x$이므로
$y''=-2\cos 2x\times(2x)'=-4\cos 2x$

50) $y''=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$

⇨ $y'=(\sin^2 x)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x$
$y''=(2\sin x)'\cdot\cos x+2\sin x\cdot(\cos x)'$
$=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$

51) $y''=16e^{4x-1}$

⇨ $y'=e^{4x-1}(4x-1)'=4e^{4x-1}$이므로
$y''=4e^{4x-1}(4x-1)'=16e^{4x-1}$

52) $y''=2e^{-x}\sin x$

⇨ $y'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$
$y''=e^{-x}(\cos x+\sin x)-e^{-x}(-\sin x+\cos x)$
$=2e^{-x}\sin x$

53) $y''=-e^x(3\cos 2x+4\sin 2x)$

⇨ $y'=(e^x)'\cos 2x+e^x(\cos 2x)'$
$=e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$
이므로
$y''=(e^x)'(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(\cos 2x-2\sin 2x)'$
$=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(-2\sin 2x-4\cos 2x)$
$=-e^x(3\cos 2x+4\sin 2x)$

54) $y''=(x^3-6x^2+6x)e^{-x}$

⇨ $y'=3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}\times(-x)'=(3x^2-x^3)e^{-x}$이므로
$y''=(3x^2-x^3)'e^{-x}+(3x^2-x^3)e^{-x}\times(-x)'$
$=\{(6x-3x^2)-(3x^2-x^3)\}e^{-x}$
$=(x^3-6x^2+6x)e^{-x}$

55) $y''=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

⇨ $y'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$y''=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

56) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

⇨ $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

57) $y''=\dfrac{1}{x}$

⇨ $y'=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$이므로 $y''=\dfrac{1}{x}$

58) $y''=2\ln x+3$

⇨ $y'=(x^2\ln x)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'$
$=2x\ln x+x$
$y''=(2x\ln x+x)'=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+(x)'$
$=2\ln x+2+1=2\ln x+3$

59) $y''=-\dfrac{2(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$

⇨ $y'=2\times\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}=\dfrac{2}{x\ln x}$이므로

$y''=\dfrac{-2(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}=-\dfrac{2(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$

60) $-\dfrac{9}{32}$

⇨ $y'=(\sqrt{3x+1})'=\dfrac{1}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(3x+1)'$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$y''=\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)'$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(3x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(3x+1)'$

$=-\frac{9}{4}\cdot(3x+1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(3x+1)\sqrt{3x+1}}$

$=-\frac{9}{4(3x+1)\sqrt{3x+1}}$

$y''_{x=1}=-\frac{9}{4(3\cdot1+1)\sqrt{3\cdot1+1}}=-\frac{9}{32}$

61) 1

⇨ $f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}\times(-x)'}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로

$f''(x)=\frac{e^x-e^{-x}\times(-x)'}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\therefore f''(0)=\frac{e^0+e^0}{2}=1$

62) 2

⇨ $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

이므로

$y''=2(e^x)'\cos x+2e^x(\cos x)'$

$=2e^x\cos x-2e^x\sin x$

$=2e^x(\cos x-\sin x)$

$\therefore f''(0)=2$

63) 8

⇨ $f'(x)=4e^{2x}$, $f''(x)=8e^{2x}$ $\quad\therefore\ f''(0)=8$

64) $-\frac{3}{\ln 2}$

⇨ $y'=\left(\frac{\log_2 x}{x}\right)'=\frac{1}{x\ln 2}\cdot\frac{1}{x}+\log_2 x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln 2}-\log_2 x\right)$

$y''=(-2)\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{\ln 2}-\log_2 x\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x\ln 2}\right)$

$=\frac{1}{x^3}\left(2\log_2 x-\frac{3}{\ln 2}\right)$

$y''_{x=1}=\frac{1}{1^3}\left(2\log_2 1-\frac{3}{\ln 2}\right)=-\frac{3}{\ln 2}$

65) $-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$

⇨ $y'=\left(\sin\frac{\pi}{3}x+\cos\frac{\pi}{2}x\right)'$

$=\cos\frac{\pi}{3}x\cdot\left(\frac{\pi}{3}x\right)'-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\left(\frac{\pi}{2}x\right)'$

$=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

$y''=\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right)'$

$=-\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x$

$y''_{x=1}=-\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}$

$=-\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi^2}{4}\cdot 0=-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$

66) -4

⇨ $y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$ 이므로

$y''=-\sec^2 x$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-4$

67) -4

⇨ $f'(x)=-2\sin 2x-2x$, $f''(x)=-4\cos 2x-2$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2-2=-4$

68) $-2e^{\pi}$

⇨ $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$\therefore\ f''(\pi)=2e^{\pi}\times(-1)=-2e^{\pi}$

69) 24

⇨ $f'(x)=(e^{2x})'=2e^{2x}$ 이므로

$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}=2e^{\ln 4}=2\cdot 4^{\ln e}=8$

$f''(x)=(2e^{2x})'=2(e^{2x})'=4e^{2x}$ 이므로

$f''(\ln 2)=4e^{2\ln 2}=4e^{\ln 4}=4\cdot 4^{\ln e}=16$

$\therefore f'(\ln 2)+f''(\ln 2)=8+16=24$

70) $6e$

⇨ $f'(x)=(1+x)e^x$, $f''(x)=(x+2)e^x$ 이므로

$f(1)+f'(1)+f''(1)=e+2e+3e=6e$ 이다.

71) $-5e^2$

⇨ $f'(x)=(xe^{2x}+x\ln x)'$

$=1\cdot e^{2x}+x\cdot 2e^{2x}+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$=e^{2x}(1+2x)+\ln x+1$

이므로

$f'(1)=e^{2\cdot1}(1+2\cdot1)+\ln 1+1=3e^2+1$

$f''(x)=2e^{2x}(1+2x)+e^{2x}\cdot 2+\frac{1}{x}=2e^{2x}(2+2x)+\frac{1}{x}$

이므로

$f''(1)=2e^{2\cdot1}(2+2\cdot1)+\frac{1}{1}=8e^2+1$

$\therefore f'(1)-f''(1)=(3e^2+1)-(8e^2+1)=-5e^2$

72) 13

⇨ $f'(x)=-3\sin 3x$, $f''(x)=-9\cos 3x$

$\therefore\ f(0)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f''(\pi)=1+3+9=13$

73) $\frac{1}{2}$

⇨ $f'(x)=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$f''(x)=(\cos x-\sin x)'=-\sin x-\cos x$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$=-\frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{4}=\frac{1}{2}$

74) 5

⇨ $f'(x)=\sin 2x+2x\cos 2x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$

$f''(x)=2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x=4\cos 2x-4x\sin 2x$

$\therefore f''(0)=4\cos 0=4$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f''(0)=1+4=5$

75) $4+8\sqrt{3}$

76) 4

⇨ $f'(x)=e^{ax+2}+axe^{ax+2}=(1+ax)e^{ax+2}$

$f''(x)=ae^{ax+2}+a(1+ax)e^{ax+2}=(2a+a^2x)e^{ax+2}$

이때 $f''(0)=2ae^2=8e^2$이어야 하므로

$2a=8 \quad \therefore a=4$

77) 2

⇨ $y'=-e^{-x}\cos 2x-2e^{-x}\sin 2x$

$=-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)$

$y''=e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)-e^{-x}(-2\sin 2x+4\cos 2x)$

$=e^{-x}(4\sin 2x-3\cos 2x)$

$y''+ay'+5y=0$ 에 y', y'' 식을 대입하면

$e^{-x}(4\sin 2x-3\cos 2x)$

$+a\{-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)\}+5e^{-x}\cos 2x=0$

$2(2-a)e^{-x}\sin 2x+(2-a)e^{-x}\cos 2x=0$

$(2-a)e^{-x}(2\sin 2x+\cos 2x)=0$

$\therefore a=2$

78) 4

⇨ $f'(x)=(2x+a)e^{x^2+ax+1}$

$f''(x)=2e^{x^2+ax+1}+(2x+a)^2e^{x^2+ax+1}$

$\therefore f''(0)=2e+a^2e=18e$

따라서 만족하는 양수 $a=4$이다.

79) 3

⇨ $f'(x)=2ax\sin x+ax^2\cos x$이므로 $f'(\pi)=-a\pi^2$

$f''(x)=2a\sin x+2ax\cos x+2ax\cos x-ax^2\sin x$

$\therefore f''(\pi)=-4a\pi$

따라서 $-a\pi^2-\pi\cdot(-4a\pi)=9\pi^2$이므로 $a=3$

80) $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

⇨ $f'(x)=-4\sin x+\sqrt{2}\csc^2 x$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)}{4x-\pi}=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=-4\cos x-2\sqrt{2}\csc^2 x\cot x$

$\therefore \frac{1}{4}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

81) 4

⇨ $f'(x)=(2x+1)\cdot\cos(x^2+x)$, $f'(0)=1$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(2x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(2x)-f'(0)}{x-0}=2f''(0)$

이때 $f''(x)=2\cos(x^2+x)-(2x+1)^2\sin(x^2+x)$,

$f''(0)=2$이므로 주어진 극한의 값은 $2f''(0)=4$

이다.

82) -2

⇨ $f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x) \quad \therefore f'(0)=1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=f''(0)$

$f''(x)=-e^{-x}(-\sin x+\cos x)+e^{-x}(-\cos x-\sin x)$

$=-2e^{-x}\cos x$

$\therefore f''(0)=-2$

83) -1

⇨ $f(x)=(ax+b)\cos x$

$f'(x)=a\cos x+(ax+b)(-\sin x)$

$f'(0)=1$이므로 $a=1$

$f''(x)=-a\sin x+\{-a\sin x-(ax+b)\cos x\}$

$f''(0)=2$이므로 $-b=2 \quad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=-1$

84) 1

⇨ $f'(x)=(ax+1)e^{ax+b}$

$f'(0)=e^b=1$이므로 $b=0$

$f''(x)=ae^{ax+b}(ax+2)$에서 $f''(0)=2$이므로

$2a=2 \quad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1$