07

여러 가지 방정식

유형의 이해에 따라 ▢ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	인수정리를 이용한 삼·사차방정식의 풀이	▢	▢
필수유형 02	치환을 이용한 사차방정식의 풀이	▢	▢
필수유형 03	특수한 형태의 사차방정식의 풀이	▢	▢
필수유형 04	근이 주어진 삼·사차방정식	▢	▢
필수유형 05	삼차방정식의 근의 조건	▢	▢
필수유형 06	삼차방정식의 근과 계수의 관계	▢	▢
필수유형 07	세 수를 근으로 하는 삼차방정식	▢	▢
필수유형 08	삼차방정식과 사차방정식의 켤레근	▢	▢
필수유형 09	방정식 $x^3=1$의 허근의 성질	▢	▢
발전유형 10	삼·사차방정식의 활용	▢	▢

필수유형 01 인수정리를 이용한 삼·사차방정식의 풀이

다음 방정식을 풀어라.

(1) $2x^3+3x^2-8x+3=0$

(2) $2x^4-3x^3-12x^2+7x+6=0$

풍쌤 POINT

인수분해 공식을 이용하여 주어진 삼·사차방정식의 좌변을 인수분해할 수 없는 경우에는 인수정리를 이용하여 해결해!

방정식 $f(x)=0$에서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해

풀이

(1) **STEP1** $f(x)=2x^3+3x^2-8x+3$으로 놓고 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값 구하여 $f(x)$를 인수분해하기

$f(x)=2x^3+3x^2-8x+3$으로 놓으면 $f(1)=0$ ❶ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(2x^2+5x-3)=(x-1)(x+3)(2x-1)$

STEP2 주어진 방정식의 근 구하기

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x+3)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

❶ $f(1)=2+3-8+3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & 3 & -8 & 3 \\
 & & 2 & 5 & -3 \\
\hline
 & 2 & 5 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

(2) **STEP1** $f(x)=2x^4-3x^3-12x^2+7x+6$으로 놓고 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값 구하여 $f(x)$를 인수분해하기

$f(x)=2x^4-3x^3-12x^2+7x+6$으로 놓으면

$f(1)=0,\ f(-2)=0$ ❷ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x+2)(2x^2-5x-3)$

$\quad=(x-1)(x+2)(2x+1)(x-3)$

STEP2 주어진 방정식의 근 구하기

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(2x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

❷ $f(1)=2-3-12+7+6=0$

$f(-2)=32+24-48-14+6$
$=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 2 & -3 & -12 & 7 & 6 \\
 & & 2 & -1 & -13 & -6 \\
\hline
-2 & 2 & -1 & -13 & -6 & \boxed{0} \\
 & & -4 & 10 & 6 & \\
\hline
 & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ (2) $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

풍쌤 강의 NOTE

다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 나타낸다.

01-1 유사

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-x^2-4x+4=0$

(2) $x^3-6x^2+3x+10=0$

(3) $6x^3-17x^2+11x-2=0$

01-2 유사

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4-10x^2+9=0$

(2) $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0$

(3) $4x^4-16x^3+15x^2+4x-4=0$

01-3 변형

사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$의 모든 실근의 곱을 구하여라.

01-4 변형 기출

사차방정식 $x^4-6x^3+15x^2-22x+12=0$의 모든 실근의 합을 구하여라.

01-5 변형

삼차방정식 $x^3-x^2+2=0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하여라.

01-6 실력

사차방정식 $x^4-4x+3=0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하여라.

필수유형 02 치환을 이용한 사차방정식의 풀이

다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x^2-6x)(x^2-6x+1)-56=0$

(2) $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=60$

풍쌤 POINT

(1) 공통부분이 있는 방정식은 공통부분을 치환하여 차수가 낮은 방정식으로 변형해!

(2) 공통부분이 보이지 않는 방정식은 공통부분이 나오도록 변형하여 전개해!

풀이

(1) **STEP 1** $x^2-6x=X$로 치환한 후 X에 대한 방정식 풀기

$x^2-6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X+1)-56=0$❶, $X^2+X-56=0$

$(X+8)(X-7)=0$ $\quad\therefore X=-8$ 또는 $X=7$

STEP 2 주어진 방정식 풀기

(i) $X=-8$일 때, $x^2-6x=-8$에서 $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

(ii) $X=7$일 때, $x^2-6x=7$에서 $x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

(i), (ii)에 의하여 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=7$

(2) **STEP 1** 공통부분이 나오도록 주어진 방정식 변형하기

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=60$에서

$\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\}=60$❷

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)=60$

STEP 2 $x^2+x=X$로 치환한 후 X에 대한 방정식 풀기

$x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-2)(X-6)=60$, $X^2-8X-48=0$

$(X+4)(X-12)=0$ $\quad\therefore X=-4$ 또는 $X=12$

STEP 3 주어진 방정식 풀기

(i) $X=-4$일 때, $x^2+x=-4$에서

$x^2+x+4=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $X=12$일 때, $x^2+x=12$에서 $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에 의하여 $x=-4$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

❶ x에 대한 사차방정식을 X에 대한 이차방정식으로 변형한다.

❷ 두 일차식의 상수항의 합이 같게 짝을 짓는다.

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=7$ (2) $x=-4$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

풍쌤 강의 NOTE

$(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)=k$ (k는 상수) 꼴은 두 일차식의 상수항의 합 또는 곱이 서로 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 치환한다.

02-1 유사

다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x^2-3x)(x^2-3x+3)+2=0$

(2) $(x^2+2x)(x^2+2x-10)-75=0$

02-2 유사

다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$

(2) $x(x+2)(x+4)(x+6)=33$

02-3 변형

사차방정식 $(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$의 모든 실근의 곱을 구하여라.

02-4 변형

사차방정식 $(x^2+2x+4)(x^2-3x+4)+4x^2=0$의 모든 근의 합을 구하여라.

02-5 변형

사차방정식

$$(x+1)(x-2)(x-3)(x+6)-28x^2=0$$

의 모든 근의 합을 구하여라.

02-6 실력 기출

사차방정식 $(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라고 할 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

필수유형 03 특수한 형태의 사차방정식의 풀이

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4-12x^2+16=0$

(2) $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$

풍쌤 POINT

(1) $x^4+ax^2+b=0$ 꼴에서 좌변이 인수분해되지 않을 때는 A^2-B^2 꼴로 변형해야 해!

(2) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴은 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용할 수 있도록 변형해야 해!

풀이

(1) STEP 1 주어진 방정식을 $A^2-B^2=0$[1] 꼴로 변형하기

$x^4-12x^2+16=0$에서 $(x^4-8x^2+16)-4x^2=0$

$(x^2-4)^2-(2x)^2=0$

STEP 2 주어진 방정식 풀기

$(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)=0$

$x^2+2x-4=0$ 또는 $x^2-2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$

(2) STEP 1 양변을 x^2으로 나누어 정리하기

$x\neq0$이므로 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면[2]

$x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\ x^2+\frac{1}{x^2}-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0$[3]

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$

STEP 2 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환한 후 X에 대한 방정식 풀기

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X+9=0,\ (X-3)^2=0 \qquad \therefore X=3$(중근)

STEP 3 주어진 방정식 풀기

즉, $x+\frac{1}{x}=3$에서 $x^2-3x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

[1] $A^2-B^2=0$
⇨ $(A+B)(A-B)=0$

[2] $x=0$일 때 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다. 따라서 양변을 x^2으로 나눌 수 있다.

[3] 분수 형태의 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

답 (1) $x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$ (2) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

풍쌤 강의 NOTE

(1) $x^4+ax^2+b=0$ 꼴은 $x^2=X$로 치환하고, 좌변이 인수분해가 되면 인수분해하고 인수분해가 되지 않으면 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한다.

(2) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴은 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 방정식을 푼다.

03-1 유사

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4+x^2-72=0$

(2) $x^4+4=0$

(3) $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$

03-2 변형

사차방정식 $x^4+2x^2-8=0$의 모든 실근의 곱을 구하여라.

03-3 변형

사차방정식 $x^4-14x^2+25=0$의 네 실근 중 가장 큰 근을 α, 가장 작은 근을 β라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하여라.

03-4 변형

사차방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 모든 실근의 합을 구하여라.

03-5 변형

사차방정식 $x^4+8x^3+18x^2+8x+1=0$의 한 실근을 α라고 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구하여라.

03-6 실력

사차방정식 $x^4+6x^3-5x^2+6x+1=0$의 한 실근을 α라고 할 때, $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2$의 값을 구하여라.

필수유형 04 근이 주어진 삼·사차방정식

삼차방정식 $x^3-kx^2-(k+5)x+2k=0$의 한 근이 -3일 때, 나머지 두 근의 곱을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

풍쌤 POINT 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$임을 이용하여 미정계수를 구한 후, 인수정리와 조립제법을 이용하여 방정식의 좌변을 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해할 수 있어!

풀이

STEP 1 주어진 방정식에 $x=-3$을 대입하여 k의 값 구하기

$x^3-kx^2-(k+5)x+2k=0$의 한 근이 -3이므로 $x=-3$을 대입하면

$-27-9k+3k+15+2k=0$

$-4k=12 \qquad \therefore k=-3$

STEP 2 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기

즉, 주어진 방정식은 $x^3+3x^2-2x-6=0$

$f(x)=x^3+3x^2-2x-6$으로 놓으면

$f(-3)=0$[1]

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ & & -3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+3)(x^2-2)$

따라서 주어진 방정식은 $(x+3)(x^2-2)=0$

STEP 3 나머지 두 근의 곱 구하기

이때 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-2=0$의 근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계[2]에 의하여 두 근의 곱은 -2이다.

❶ 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 -3 이므로 $f(-3)=0$이다.

❷ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

답 -2

풍쌤 강의 NOTE 삼차방정식에서 한 근이 주어졌을 때, 나머지 두 근의 곱은 나머지 두 근을 구해서 그 곱의 값을 알 수도 있지만 이차방정식의 두 근의 곱을 구하는 것이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 편리하다.

04-1 유사

삼차방정식 $x^3-kx^2+(k+2)x-9=0$의 한 근이 3일 때, 나머지 두 근의 합을 구하여라.

(단, k는 상수이다.)

04-2 유사

기출

x에 대한 삼차방정식 $ax^3+x^2+x-3=0$의 한 근이 1일 때, 나머지 두 근의 곱을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

04-3 유사

삼차방정식 $x^3-(a+4)x^2+(4a+1)x-2a=0$의 한 근이 2이고 나머지 두 근이 α, β일 때, $a+\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

04-4 변형

사차방정식 $2x^4+ax^3+bx^2-x+a=0$의 두 근이 1, -2일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

04-5 변형

사차방정식 $x^4+ax^3+3x^2+x+b=0$의 두 근이 -1, 2일 때, 나머지 두 근의 합을 구하여라.

(단, a, b는 상수이다.)

04-6 실력

기출

x에 대한 삼차방정식 $x^3-x^2+kx-k=0$이 허근 $3i$와 실근 α를 가질 때, $k+\alpha$의 값을 구하여라.

(단, k는 실수이다.)

필수유형 05 삼차방정식의 근의 조건

삼차방정식 $x^3-(3k+1)x+3k=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

풍쌤 POINT

인수정리를 이용하여 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ 꼴로 변형한 후 이차방정식의 판별식을 이용해!

풀이

STEP 1 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기

$f(x)=x^3-(3k+1)x+3k$로 놓으면

$f(1)=1-(3k+1)+3k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -(3k+1) & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x-3k)=0$

STEP 2 중근을 갖는 경우를 나누어 생각하기

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우 ❶

$1+1-3k=0 \qquad \therefore k=\dfrac{2}{3}$

(ii) 이차방정식 $x^2+x-3k=0$이 중근을 갖는 경우 ❷

이차방정식 $x^2+x-3k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times(-3k)=0$

$1+12k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{12}$

❶ $x=1$(중근) 또는 $x=\alpha$, 즉 $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$인 경우이다.

❷ $x=1$ 또는 $x=\beta$(중근), 즉 $f(x)=(x-1)(x-\beta)^2$인 경우이다.

STEP 3 모든 실수 k의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$\dfrac{2}{3}+\left(-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{7}{12}$

답 $\dfrac{7}{12}$

풍쌤 강의 NOTE

삼차방정식 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지이다.

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 $x=\alpha$를 근으로 갖는다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.

05-1 유사

삼차방정식 $x^3+(2k-1)x+2k=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

05-2 변형

삼차방정식 $x^3-3x^2+(a+2)x-a=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

05-3 변형

삼차방정식 $x^3-2x^2+(a-3)x+a=0$의 근이 모두 실수일 때, 정수 a의 최댓값을 구하여라.

05-4 변형 기출

삼차방정식 $x^3+(8-a)x^2+(a^2-8a)x-a^3=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

05-5 변형

삼차방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

05-6 실력

삼차방정식 $x^3-5x^2+2(k-3)x+2k=0$의 실근이 오직 하나뿐일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

필수유형 06 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $x^3-x^2+5x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

(2) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

풍쌤 POINT

'삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, ~'라고 주어지면 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 가장 먼저 떠올려야 해!

풀이

STEP 1 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 구하기

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=3$

STEP 2 주어진 식의 값 구하기

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{5}{3}$

(2) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=1+1+5+3=10$

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ ❶

$=1^2-2\times5=-9$

❶ $(\alpha+\beta+\gamma)^2$
$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

답 (1) $\frac{5}{3}$ (2) 10 (3) -9

풍쌤 강의 NOTE

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq0)$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

이를 이용하여 다음의 식의 값을 변형하여 구할 수 있다.

① $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

② $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

③ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

④ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

06-1 기본

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$의 값을 구하여라.

06-2 유사

삼차방정식 $6x^3+2x^2-3x-4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

(2) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

06-3 변형

삼차방정식 $x^3-6x^2+11x-6=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $\alpha+\beta+\gamma=-6$　　ㄴ. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11$

ㄷ. $\alpha\beta\gamma=6$　　ㄹ. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14$

ㅁ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=32$

06-4 변형

기출

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$의 값을 구하여라.

06-5 변형

삼차방정식 $12x^3-19x^2+ax-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha:\beta:\gamma=3:4:12$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

06-6 실력

삼차방정식 $x^3-2x^2+kx+6=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때,

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-8$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

필수유형 07 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

세 수를 근으로 하는 삼차방정식을 구하려면 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 구해야 해!

풀이

STEP 1 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 구하기

삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

STEP 2 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$, $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$의 값 구하기

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이므로

$(\text{세 근의 합})=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}$

$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3$

$(\text{세 근의 곱})=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-1}=-1$

STEP 3 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식 구하기

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(-2)x^2-3x-(-1)=0$ ❶, 즉 $x^3+2x^2-3x+1=0$

❶ 이차항의 계수
⇨ $-$(세 근의 합),
상수항
⇨ $-$(세 근의 곱)
임에 주의한다.

답 $x^3+2x^2-3x+1=0$

풍쌤 강의 NOTE

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

세 수 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$$

즉, $x^3-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}x^2+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$

07-1 유사

삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 고 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

07-2 유사

삼차방정식 $x^3+4x^2+7x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 고 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

07-3 변형

삼차방정식 $x^3-3x^2-2x-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 고 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

07-4 변형

삼차방정식 $x^3-4x^2+2x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라 고 할 때, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다.
세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

07-5 변형

삼차방정식 $x^3+2x^2+6x+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 고 할 때, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

07-6 실력

x^3의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여

$$P(1)=P(3)=P(5)=1$$

이 성립할 때, 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱을 구하여라.

필수유형 08 삼차방정식과 사차방정식의 켤레근

다음 물음에 답하여라.

(1) 삼차방정식 $x^3-2x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$일 때, p, q의 값을 각각 구하여라.
(단, p, q는 유리수이다.)

(2) 삼차방정식 $x^3+px^2+qx+6=0$의 한 근이 $1+i$일 때, p, q의 값을 각각 구하여라.
(단, p, q는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

풍쌤 POINT

삼차방정식에서 무리수 또는 허수인 한 근과 계수의 조건이 주어져 있으면 삼차방정식의 켤레근의 성질을 떠올려야 해!

풀이

(1) STEP 1 켤레근의 성질 이용하기

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

STEP 2 p, q의 값 구하기

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계❶에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha=2$ $\therefore \alpha=-2$❷

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\alpha+(2-\sqrt{3})\alpha=p$에서

$1+4\alpha=p$ $\therefore p=-7$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\alpha=-q$에서

$\alpha=-q$ $\therefore q=2$

❶ $x^3-2x^2+px+q=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면
$\alpha+\beta+\gamma=2$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$
$\alpha\beta\gamma=-q$

(2) STEP 1 켤레근의 성질 이용하기

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1+i$이면 $1-i$도 근이다.

STEP 2 p, q의 값 구하기

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-p$ $\therefore p=-\alpha-2$

$(1+i)(1-i)+(1+i)\alpha+(1-i)\alpha=q$ $\therefore q=2\alpha+2$

$(1+i)(1-i)\alpha=-6$에서 $2\alpha=-6$ $\therefore \alpha=-3$❷

$\therefore p=-(-3)-2=1$, $q=2\times(-3)+2=-4$

❷ 삼차방정식의 두 근이 서로 켤레근이면 나머지 한 근은
(1)의 경우 유리수
(2)의 경우 실수
이다.

답 (1) $p=-7$, $q=2$ (2) $p=1$, $q=-4$

풍쌤 강의 NOTE

(1) 계수가 유리수인 방정식의 한 근이 $a+b\sqrt{m}$이면 $a-b\sqrt{m}$도 근이다.
(단, a, b는 유리수, $b\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) 계수가 실수인 방정식의 한 근이 $a+bi$이면 $a-bi$도 근이다. (단, a, b는 실수, $b\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

08-1 유사

삼차방정식 $x^3-4x^2+mx+n=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하여라.

08-2 유사

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-10=0$의 한 근이 $2+i$일 때, 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$)

08-3 변형

사차방정식 $x^4+ax^3+29x^2-22x+b=0$의 네 실근 중 두 근이 $2+\sqrt{3}$, $3+\sqrt{5}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

08-4 변형

삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

08-5 변형

사차방정식 $x^4-4x^3+ax^2+bx+2=0$의 한 허근이 $\frac{2}{1-i}$이고 실근이 중근일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

08-6 실력 기출

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(k-1)x^2-k=0$의 한 허근을 z라고 할 때, $z+\overline{z}=-2$이다. 실수 k의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

필수유형 09 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}$

(2) $\omega^{100}+\omega^{98}+1$

(3) $(1+\omega)(1+\overline{\omega})$

풍쌤 POINT

$x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 ω에 대한 여러 가지 식을 얻은 후 이를 이용할 수 있도록 구하고자 하는 식을 변형해야 해!

풀이

STEP 1 방정식 $x^3=1$의 여러 가지 허근의 성질 구하기

$x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 허근이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이고, 이차방정식의 계수가 모두 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$ ❶

STEP 2 ω에 대한 관계식을 이용하여 주어진 식의 값 구하기

(1) $\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}=(\omega^3)^3\times\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^3\times\omega}=\omega+\dfrac{1}{\omega}$

$=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}$ ❷ $=-1$

(2) $\omega^{100}+\omega^{98}+1=(\omega^3)^{33}\times\omega+(\omega^3)^{32}\times\omega^2+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

(3) $(1+\omega)(1+\overline{\omega})=1+\omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}$

$=1+(-1)+1=1$

답 (1) -1 (2) 0 (3) 1

❶ 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 알 수 있다.

❷ $\omega^2+\omega+1=0$이므로 $\omega^2+1=-\omega$

풍쌤 강의 NOTE

- 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면
  $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0,\ \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$
- 방정식 $x^3=-1$은 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 한 허근을 ω'라고 하면
  $\omega'^3=-1,\ \omega'^2-\omega'+1=0,\ \omega'+\overline{\omega'}=1,\ \omega'\overline{\omega'}=1$

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이고, $\overline{\omega'}$는 ω'의 켤레복소수이다.)

09-1 유사

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\overline{\omega}^2+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}$

(2) $\omega^{2005}+\omega^{2003}+1$

(3) $(1-\omega)(1-\overline{\omega})$

09-2 변형

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{2021}$$

의 값을 구하여라.

09-3 변형

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$\dfrac{\omega^5}{\omega+1}+\dfrac{1+\omega^2}{\omega^4}+\dfrac{\omega^3}{\omega^2+\omega}$의 값을 구하여라.

09-4 변형 기출

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\cdots+\omega^{28}$을 간단히 하여라.

09-5 변형

방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$$1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5=a\omega+b$$

이다. 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

09-6 실력

방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근을 ω라 하고

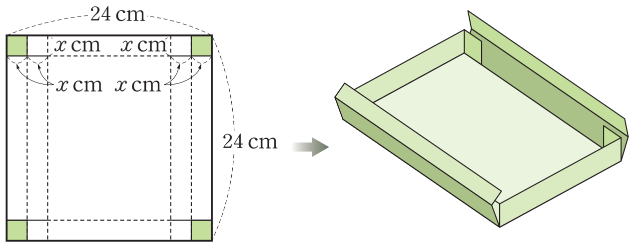
$$z=\frac{1+\omega^{100}}{1-\omega^{125}}$$

이라고 할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

발전유형 10 삼·사차방정식의 활용

한 변의 길이가 24 cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 내고, 부피가 640 cm^3인 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 이때 자연수 x의 값을 구하여라.



풍쌤 POINT

삼·사차방정식의 활용 문제는 다음 순서로 풀면 돼.

문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓기 → 주어진 조건을 이용하여 방정식 세우기 → 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인하기

풀이

STEP 1 주어진 조건을 x에 대한 방정식으로 나타내기

상자의 가로의 길이는 $(24-4x)$ cm, 세로의 길이는 $(24-2x)$ cm, 높이는 x cm이므로 상자의 부피는

$x(24-4x)(24-2x)=640$

STEP 2 x에 대한 방정식 풀기

$8x(6-x)(12-x)=640$

$x^3-18x^2+72x-80=0$

$(x-2)(x^2-16x+40)=0$ ❶

$\therefore x=2$ 또는 $x=8\pm2\sqrt{6}$

STEP 3 주어진 조건을 만족시키는 x의 값 구하기

그런데 x는 $0<x<6$인 자연수이어야 하므로 ❷

$x=2$

❶ $f(x)=x^3-18x^2+72x-80$으로 놓으면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-2)(x^2-16x+40)$

❷ 상자의 가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로

$24-4x>0$, $24-2x>0$, $x>0$

$\therefore 0<x<6$

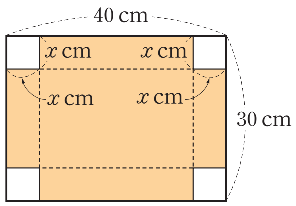
답 2

풍쌤 강의 NOTE

삼·사차방정식의 활용 문제는 구하는 값을 미지수로 놓고 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세워야 한다. 이때 방정식을 풀어 구한 x의 값 중에서 문제의 뜻에 맞는 것만 택해야 한다.

10-1 유사

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이가 각각 40 cm, 30 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 내어 점선을 따라 접었더니 부피가 3000 cm^3인 뚜껑 없는 상자가 되었다. 이때 자연수 x의 값을 구하여라.



10-2 변형

정육면체의 밑면의 가로의 길이를 1 cm 줄이고 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$배가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 할 때, 자연수 x의 값을 구하여라.

10-3 변형

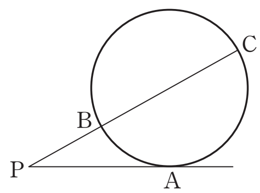
어떤 정육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이를 각각 1 cm, 2 cm 늘이고 높이를 $\frac{1}{2}$배가 되도록 줄여서 직육면체를 만들었더니 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{3}{2}$배가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

10-4 변형

반지름의 길이가 각각 1 cm씩 차이 나는 3개의 구가 있다. 이 세 구의 부피를 합한 것과 부피가 같은 구를 새로 하나 만들 때, 새로 만든 구의 반지름의 길이는 처음 3개의 구 중 가장 큰 구의 반지름의 길이보다 1 cm만큼 더 길다. 이때 새로 만든 구의 반지름의 길이를 구하여라.

10-5 실력

다음 그림과 같이 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 점 P를 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 B, C라고 하자. $\overline{PB}=x^2-2x+6$, $\overline{BC}=4x$, $\overline{PA}=\sqrt{21}x$가 되도록 하는 모든 x의 값의 곱을 구하여라.



실전 연습 문제

01

삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+6=0$의 해가 $x=a$ 또는 $x=b\pm ci$일 때, 실수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

02

기출

삼차방정식 $2x^3+x^2+2x+3=0$의 한 허근을 α라고 할 때, $4\alpha^2-2\alpha+7$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

03

기출

사차방정식 $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$의 모든 실근의 곱을 구하여라.

04

사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 네 근을 α, β, γ, δ라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값은?

① -8 ② -6 ③ 0
④ 6 ⑤ 8

05

사차방정식 $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$의 모든 실근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

06

기출

x에 대한 사차방정식 $x^4-x^3+ax^2+x+6=0$의 한 근이 -2일 때, 네 실근 중 가장 큰 것을 b라고 하자. $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -7 ② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

07 서술형

삼차방정식 $x^3-7x^2+(k+6)x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

08 기출

삼차방정식 $(x-3)(x-1)(x+2)+1=x$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

09

삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$의 값은?

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

10

삼차방정식 $x^3+ax^2+2bx+24=0$의 한 근이 -3이고 다른 두 근의 제곱의 합이 20일 때, 음수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 15 ② 25 ③ 35
④ 45 ⑤ 55

11

삼차방정식 $x^3+3x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, α^2, β^2, γ^2을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

12 서술형

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하는 삼차방정식은 $x^3-6x^2+7x-3=0$이다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

13 서술형

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-7=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}i$일 때, 나머지 두 근 중 실근을 α라고 하자. 이때 $a+b+\alpha$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

14

세 실수 a, b, c에 대하여 x에 대한 삼차식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$는 $x-8$을 인수로 갖는다.
> (나) 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $4i$이다.

이때 삼차방정식 $f(4x)=0$의 세 근의 합은?

(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

15

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^{60}+1}$의 값은?

① 50 ② 45 ③ 40
④ 35 ⑤ 30

16

$\omega=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$일 때, $\omega^{2020}+\dfrac{1}{\omega^{2020}}$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

17

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

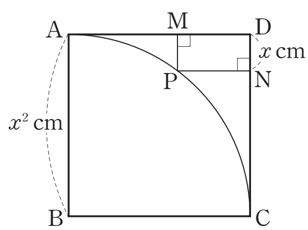
|보기|

ㄱ. $\omega+\overline{\omega}+1=0$ ㄴ. $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=1$

ㄷ. $\omega^{2021}+\dfrac{1}{\omega^{2021}}=-1$ ㄹ. $\overline{\omega}=\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$

ㅁ. $1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}+\omega^{12}=-1$

18



오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 x^2 cm인 정사각형 ABCD가 있다. 점 B를 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 부채꼴의 호 AC 위에 한 점 P가 있을 때, 점 P에서 선분 AD, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하자. $\overline{MD}:\overline{ND}=2:1$이고 $\overline{ND}=x$ cm일 때, x의 값을 구하여라.

정답과 풀이 150쪽

상위권 도약 문제

01

기출

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

> (가) z는 방정식 $x^3-3x^2+9x+13=0$의 근이다.
>
> (나) $\dfrac{z-\overline{z}}{i}$는 음의 실수이다.

① -3 ② -1 ③ 1

④ 3 ⑤ 5

02

삼차방정식 $x^3-(4+a)x^2+5ax-a^2=0$이 1과 두 개의 양의 정수인 근을 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

03

기출

세 실수 a, b, c에 대하여 한 근이 $1+\sqrt{3}i$인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$과 이차방정식 $x^2+ax+2=0$이 공통인 근 m을 가질 때, m의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 2 ② 1 ③ 0

④ -1 ⑤ -2

04

자연수 a, b, c가 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$을 만족시킨다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근을 α라고 할 때, $\alpha^{1000}+\alpha^{1001}$의 값을 구하여라.

05

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n)=\dfrac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}$으로 정의한다. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(21)$의 값을 구하여라.

06

기출

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

|보기|

ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$

ㄴ. $\dfrac{1}{\omega}+\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}}+\left(\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$

ㄷ. $(-\omega-1)^n=\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는 50이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ