01 함수 $y=x^n$의 부정적분

n이 실수일 때, 함수 $y=x^n$의 부정적분은 다음과 같다. (단, C는 적분상수)

(1) $n\neq -1$일 때 $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

◪ 다음 부정적분을 구하여라.

1. $\int x^{-4}dx$

2. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

3. $\int x\sqrt{x}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

5. $\int \frac{1}{x^2}dx$

6. $\int \frac{5}{x}dx$

7. $\int \frac{1}{x^3}dx$

8. $\int \frac{x^2+1}{x}dx$

9. $\int \frac{5x+3}{x}dx$

10. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

11. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx$

12. $\int \frac{x^3+x^2+2}{x^3}dx$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

13. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2}dx$

14. $\int \frac{x^3-4x^2+3}{x^2}dx$

15. $\int (x\sqrt{x}+\sqrt{x})dx$

16. $\int \frac{x^3-2x^2+1}{x^2}dx$

17. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-2)^3}{x}dx$

18. $\int \left(3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

19. $\int \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

20. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2 dx+\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

21. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx-\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

22. **함수** $f(x)=\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$**에 대하여** $f(3)-f(1)$**의 값**

23. $f(x)=\int \frac{x^3+3x-1}{x^2}dx$**에서** $f(1)=\frac{1}{2}$**일 때,** $f(-1)$**의 값**

24. **함수** $f(x)=\int x\sqrt{x}\,dx$**,** $f(0)=0$**일 때,** $f(1)$**의 값**

25. **함수** $f(x)$**가** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$**,** $f(1)=0$**을 만족시킬 때,** $f(8)$**의 값**

26. 함수 $f(x)=\int \frac{2x^2-x-1}{x}dx$에 대하여 $f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값

27. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\sqrt{x}-\frac{2}{x}$이고, $f(1)=-\frac{4}{3}$일 때, $f(9)$의 값

28. 점 $(1,\ 4)$를 지나는 곡선 $y=f(x)\ (x>0)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{x}(x+3)$일 때, $f(5)$의 값을 구하여라.

29. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\begin{cases} 6\sqrt{x} & (x>1) \\ x+1 & (x<1) \end{cases}$$

이다. $f(4)=20$일 때, $f(-6)$의 값을 구하여라.

30. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases} 3\sqrt{x} & (x>1) \\ 2x & (x<1) \end{cases}$이다. $f(4)=-5$일 때, $f(-5)$의 값

31. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases} x\sqrt{x} & (x>1) \\ 3x^2 & (x<1) \end{cases}$, $f(-2)=-8$일 때, $f(4)$의 값

02 삼각함수의 부정적분

삼각함수의 부정적분은 다음과 같다. (단, C는 적분상수)

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

(2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

(4) $\int \csc^2 x dx=-\cot x+C$

(5) $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$

(6) $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

◪ 다음 부정적분을 구하여라.

32. $\int (4\cos x-3\sin x)dx$

33. $\int (\sin x+3\cos x)dx$

34. $\int (2-\tan x)\cos x dx$

35. $\int \frac{\sin^3 x-1}{\sin^2 x}dx$

36. $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

37. $\int \tan^2 x dx$

38. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

39. $\int \frac{1}{1-\sin^2 x}dx$

40. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

41. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

42. $\int (\cos x+\sec x)\sec x dx$

43. $\int \csc x(\csc x+\cot x)dx$

44. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

45. $\int (\sin x+\sec^2 x)dx$

46. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$

47. $\int \cot^2 x dx$

48. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

49. $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$

50. $\int \frac{\sin^2 x+2}{\sin^2 x}dx$

51. $\int \frac{1}{1-\cos^2 x}dx$

52. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x} dx$

53. $\int \frac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

54. $\int \frac{1}{\cot x \cos x} dx$

55. $\int \cot x \csc x \sec x dx$

56. $\int (\sec x + \tan x) \sec x \, dx$

57. $\int (1-\cos x)^2 dx + \int (2+\sin x)^2 dx$

58. $\int (\tan x + 1) \cos x \, dx$

59. $\int (\cos x + 1)^2 dx - \int (\cos x - 2)^2 dx$

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

60. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\sin x$일 때, $f(\pi)-f(0)$의 값

61. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $\cot^2 x$이고 이 곡선이 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지날 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하여라.

62. 함수 $f(x)=\int \frac{2\cos^2 x}{1+\sin x} dx$에 대하여 $f(0)=\frac{\pi}{3}$일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라.

63. 함수 $f(x)=\int (\sin^2 x + \sin 3x \cos x) dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(\pi)$의 값

64. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = \sin 4x \cos 2x$, $f(0) = \frac{2}{3}$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값

65. 함수 $f(x)=\int \cos^2 x dx$에 대하여 $f(0)=0$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값

66. 함수 $f(x)=\int \sin^2 x dx$에 대하여 $f(0)=0$일 때, $f(\pi)$의 값

67. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2\sin x-\cos x$이고 $f(0)=0$일 때, $f(\pi)$의 값

68. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=a\sec^2 x$이고 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-3\sqrt{3}}{3x-\pi}=4$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값

정답 및 해설

1) $-\dfrac{1}{3x^3}+C$

⇨ $\displaystyle\int x^{-4}dx=\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+C=-\frac{1}{3}x^{-3}+C$

$=-\dfrac{1}{3x^3}+C$

2) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

⇨ $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}+C$

$=\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

3) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

⇨ $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

4) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$

⇨ $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}+C$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$

5) $-\dfrac{1}{x}+C$

⇨ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C$

6) $5\ln|x|+C$

⇨ $\displaystyle\int \frac{5}{x}dx=\int 5x^{-1}dx=5\ln|x|+C$

7) $-\dfrac{1}{2x^2}+C$

⇨ $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx$

$\displaystyle=\int \frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$

$=-\dfrac{1}{2x^2}+C$

8) $\dfrac{1}{2}x^2+\ln|x|+C$

⇨ $\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$이므로

$\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}dx=\int x\,dx+\int \frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=\int x\,dx+\int x^{-1}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+\ln|x|+C$

9) $5x+3\ln|x|+C$

⇨ $\dfrac{5x+3}{x}=5+\dfrac{3}{x}$이므로

$\displaystyle\int \frac{5x+3}{x}dx=\int 5\,dx+\int \frac{3}{x}dx$

$\displaystyle=\int 5\,dx+\int 3x^{-1}dx$

$=5x+3\ln|x|+C$

10) $\dfrac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+C$

⇨ $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1}+C$

$=\dfrac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C=\dfrac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+C$

11) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

⇨ $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx=\int \left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

12) $x+\ln|x|-\dfrac{1}{x^2}+C$

⇨ $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{x^3}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)dx$

$\displaystyle=\int\left(1+\frac{1}{x}+2x^{-3}\right)dx$

$=x+\ln|x|-x^{-2}+C$

$=x+\ln|x|-\dfrac{1}{x^2}+C$

13) $\dfrac{1}{3}x^3+x-\dfrac{1}{x}+C$

⇨ $\displaystyle\int (x^2+1+x^{-2})dx=\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{x}+C$

14) $\dfrac{1}{2}x^2-4x-\dfrac{3}{x}+C$

⇨ $\dfrac{x^3-4x^2+3}{x^2}=x-4+\dfrac{3}{x^2}$이므로

$\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+3}{x^2}dx=\int x\,dx-\int 4\,dx+\int \frac{3}{x^2}dx$

$\displaystyle=\int x\,dx-\int 4\,dx+\int 3x^{-2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-4x-\dfrac{3}{x}+C$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

15) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

⇨ $\int(x\sqrt{x}+\sqrt{x})dx=\int x\sqrt{x}\,dx+\int\sqrt{x}\,dx$

$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

16) $\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{x}+C$

⇨ $\int\frac{x^3-2x^2+1}{x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{x}+C$

17) $x-9\sqrt[3]{x^2}+36\sqrt[3]{x}-8\ln|x|+C$

⇨ $\int\frac{(\sqrt[3]{x}-2)^3}{x}dx$

$=\int\frac{x-6\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt[3]{x}-8}{x}dx$

$=\int\left(1-6x^{-\frac{1}{3}}+12x^{-\frac{2}{3}}-\frac{8}{x}\right)dx$

$=x-9\sqrt[3]{x^2}+36\sqrt[3]{x}-8\ln|x|+C$

18) $2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

⇨ $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=3\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\times 2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

19) $x+\frac{1}{3x^3}+C$

⇨ $\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=1-\frac{1}{x^4}=1-x^{-4}$

$\therefore\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int(1-x^{-4})dx=x+\frac{1}{3}x^{-3}+C=x+\frac{1}{3x^3}+C$

20) $x^2-\frac{2}{x}+C$

⇨ $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2dx+\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2dx$

$=\int\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(2x+\frac{2}{x^2}\right)dx=x^2-\frac{2}{x}+C$

21) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

⇨ $\int\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$

$=\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}-1}dx=\int\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}dx$

$=\int(x+\sqrt{x}+1)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

22) $\frac{40}{3}$

⇨ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$이므로

$\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int x^2dx+\int 2dx+\int\frac{1}{x^2}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$

따라서 구하는 값은

$f(3)-f(1)$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3-\frac{1}{3}+C\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3+2\cdot 1-\frac{1}{1}+C\right)$

$=\frac{40}{3}$

23) $-\frac{3}{2}$

⇨ $f(x)=\int\left(x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

$f(1)=\frac{1}{2}+1+C=\frac{1}{2}$이므로 $C=-1$

$\therefore f(-1)=\frac{1}{2}+3\ln|-1|-1-1=-\frac{3}{2}$

24) $\frac{2}{5}$

⇨ $f(x)=\int x\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$이므로 $f(1)=\frac{2}{5}$이다.

25) $\frac{9}{2}$

⇨ $f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

$f(1)=\frac{3}{2}+C=0\quad\therefore C=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ f(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}$

$\therefore\ f(8)=\frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}}-1\right)=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

26) $2-\ln 2$

27) $16-4\ln 3$

28) $20\sqrt{5}+\frac{8}{5}$

⇨ 함수 $f(x)$의 도함수는 점 $(x,\ f(x))$의 접선의 기울기이다.

즉, $f'(x)=\sqrt{x}(x+3)$이고,

$\sqrt{x}(x+3)=x\sqrt{x}+3\sqrt{x}$이므로

$f(x)=\int\sqrt{x}(x+3)dx=\int x\sqrt{x}\,dx+\int 3\sqrt{x}\,dx$

$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int 3x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+C$

이때, 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 대입하면

$f(1)=\frac{2}{5}+2+C=4\quad\therefore C=\frac{8}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+\frac{8}{5}$

따라서 구하는 값은

$f(5)=\frac{2}{5}\cdot(5^2)\cdot\sqrt{5}+2\cdot5\cdot\sqrt{5}+\frac{8}{5}=20\sqrt{5}+\frac{8}{5}$

29) $\frac{5}{2}$

⇨ $f'(x)=\begin{cases}6\sqrt{x} & (x>1)\\ x+1 & (x<1)\end{cases}$에서

$\int 6\sqrt{x}\,dx=6\int x^{\frac{1}{2}}dx=6\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1=4x\sqrt{x}+C_1$

$\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C_2$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$\therefore f(x)=\begin{cases}4x\sqrt{x}+C_1 & (x>1)\\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때, $f(4)=20$이므로

$f(4)=4\cdot4\sqrt{4}+C_1=32+C_1=20\quad\therefore C_1=-12$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다. 따라서

$\lim\limits_{x\to1-}\left(\frac{1}{2}x^2+x+C_2\right)=\lim\limits_{x\to1+}(4x\sqrt{x}-12)$,

$\frac{3}{2}+C_2=-8\quad\therefore C_2=-\frac{19}{2}$

$\therefore f(x)=\begin{cases}4x\sqrt{x}-12 & (x>1)\\ \frac{1}{2}x^2+x-\frac{19}{2} & (x<1)\end{cases}$

따라서 구하는 $f(-6)$의 값은

$f(-6)=\frac{1}{2}(-6)^2+(-6)-\frac{19}{2}=\frac{5}{2}$

30) 5

⇨ $f(x)=\begin{cases}2x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (x>1)\\ x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(4)=16+C_1=-5\qquad\therefore C_1=-21$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\qquad\therefore C_2=-20$

$\therefore\ f(-5)=5^2-20=5$

31) $\frac{67}{5}$

⇨ 도함수를 부정적분 하면

$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C_1 & (x>1)\\ x^3+C_2 & (x<1)\end{cases}$ 이고

$f(-2)=-8\qquad\therefore C_2=0$

그리고 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

$\frac{2}{5}+C_1=1\qquad\therefore C_1=\frac{3}{5}$

$\therefore\ f(4)=\frac{2}{5}\cdot4^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}=\frac{67}{5}$

32) $4\sin x+3\cos x+C$

⇨ $\int(4\cos x-3\sin x)dx=4\sin x+3\cos x+C$

33) $-\cos x+3\sin x+C$

⇨ $\int(\sin x+3\cos x)dx=\int\sin x dx+3\int\cos x dx$

$=-\cos x+3\sin x+C$

34) $2\sin x+\cos x+C$

⇨ $\int(2-\tan x)\cos x dx$

$=\int(2\cos x-\tan x\cos x)dx$

$=2\int\cos x dx-\int\sin x dx$

$=2\sin x+\cos x+C$

35) $-\cos x+\cot x+C$

⇨ $\int\frac{\sin^3x-1}{\sin^2x}dx=\int(\sin x-\csc^2x)dx$

$=-\cos x+\cot x+C$

36) $\tan x+x+C$

⇨ $\frac{1+\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}+1=\sec^2x+1$ 이므로

$\int\frac{1+\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int(\sec^2x+1)dx$

$=\int\sec^2x dx+\int 1dx$

$=\tan x+x+C$

37) $\tan x-x+C$

⇨ $1+\tan^2x=\sec^2x$이므로 $\tan^2x=\sec^2x-1$

$\therefore \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$
$= \tan x - x + C$

38) $x + \cos x + C$

⇨ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx$$
$$= \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x} dx$$
$$= \int (1-\sin x) dx$$
$$= \int 1 dx + \int (-\sin x) dx$$
$$= x + \cos x + C$$

39) $\tan x + C$

⇨ $\frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$이므로

$$\int \frac{1}{1-\sin^2 x} dx = \int \sec^2 x dx$$
$$= \tan x + C$$

40) $-\csc x + C$

⇨ $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} dx$
$$= \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

41) $\tan x + C$

⇨ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

42) $x + \tan x + C$

⇨ $(\cos x + \sec x)\sec x = 1 + \sec^2 x$ 이므로

$$\int (\cos x + \sec x)\sec x dx = \int (1 + \sec^2 x) dx$$
$$= x + \tan x + C$$

43) $-\cot x - \csc x + C$

⇨ $\int \csc x(\csc x + \cot x) dx$
$$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) dx$$
$$= -\cot x - \csc x + C$$

44) $\tan x - \cot x + C$

⇨ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이므로

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$
$$= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$$
$$= \tan x - \cot x + C$$

45) $-\cos x + \tan x + C$

⇨ $\int (\sin x + \sec^2 x) dx = -\cos x + \tan x + C$

46) $x - \cos x + C$

[해설] $\int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} dx = \int (1+\sin x) dx = x - \cos x + C$

47) $-\cot x - x + C$

⇨ $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$

48) $x + \sin x + C$

⇨ $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} dx$
$$= \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} dx$$
$$= \int (1+\cos x) dx = x + \sin x + C$$

49) $\tan x + \sin x + C$

⇨ $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x} dx = \int (\sec^2 x + \cos x) dx$
$$= \tan x + \sin x + C$$

50) $x - 2\cot x + C$

⇨ 주어진 적분식을 정리하면

$\int (1 + 2\csc^2 x) dx = x - 2\cot x + C$가 된다.

51) $-\cot x + C$

⇨ $\int \frac{1}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$
$$= \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

52) $\tan x + x + C$

⇨ $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$
$$= \int (\sec^2 x + 1) dx$$
$$= \tan x + x + C$$

53) $-\cot x - \cos x + C$

⇨ $\int \frac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \sin x \right) dx$
$$= \int (\csc^2 x + \sin x) dx$$
$$= -\cot x - \cos x + C$$

54) $\sec x + C$

⇨ $\int \frac{1}{\cot x \cos x} dx = \int \frac{1}{\cot x} \times \frac{1}{\cos x} dx$
$$= \int \tan x \sec x dx = \sec x + C$$

55) $-\cot x + C$

⇨ $\int \cot x \csc x \sec x dx$
$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{\cos x} dx$$

$=\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$=\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

56) $\tan x+\sec x+C$

⇨ $\int (\sec x+\tan x)\sec x\, dx$

$=\int (\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\tan x+\sec x+C$

57) $6x-2\sin x-4\cos x+C$

⇨ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$\int (1-\cos x)^2 dx+\int (2+\sin x)^2 dx$

$=\int (1-2\cos x+\cos^2 x)dx+\int (4+4\sin x+\sin^2 x)dx$

$=\int (5-2\cos x+4\sin x+\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

$=\int 6dx-\int 2\cos x dx+\int 4\sin x dx$

$=6x-2\sin x-4\cos x+C$

58) $-\cos x+\sin x+C$

⇨ $\int (\tan x+1)\cos x dx=\int (\sin x+\cos x)dx$

$=-\cos x+\sin x+C$

59) $6\sin x-3x+C$

⇨ $\int (\cos x+1)^2 dx-\int (\cos x-2)^2 dx$

$=\int (\cos^2 x+2\cos x+1)dx-\int (\cos^2 x-4\cos x+4)dx$

$=\int 6\cos x dx-\int 3dx$

$=6\sin x-3x+C$

60) 2

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx=\int \sin x dx=-\cos x+C$

따라서 구하는 값은

$f(\pi)-f(0)=(-\cos\pi+C)-(-\cos 0+C)$

$=2$

61) $-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$

⇨ $f'(x)=\cot^2 x$ 이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \cot^2 x dx$

이때, $1+\cot^2 x=\csc^2 x$ 에서 $\cot^2 x=\csc^2 x-1$ 이므로

$f(x)=\int \cot^2 x dx$

$=\int (\csc^2 x-1)dx$

$=-\cot x-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+C$

$=-1-\frac{\pi}{4}+C=-1 \quad \therefore C=\frac{\pi}{4}$

따라서 구하는 값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$

$=-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$

62) $\pi-1$

⇨ $f(x)=\int \frac{2\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int \frac{2(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}dx$

$=\int \frac{2(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}dx$

$=\int 2(1-\sin x)dx$

$=2x+2\cos x+C$

$f(0)=\frac{\pi}{3}$이므로 $f(0)=2+C=\frac{\pi}{3} \quad \therefore C=-2+\frac{\pi}{3}$

따라서 $f(x)=2x+2\cos x-2+\frac{\pi}{3}$ 이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{3}-2+\frac{\pi}{3}$

$=\frac{2}{3}\pi+2\times\frac{1}{2}-2+\frac{\pi}{3}=\pi-1$

63) $\frac{\pi}{2}+1$

⇨ (주어진 적분)

$=\int \left\{\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)\right\}dx$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

$f(0)=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+C=1$이므로 $C=\frac{11}{8}$

$\therefore f(\pi)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{11}{8}=\frac{\pi}{2}+1$

64) $\frac{4}{3}$

⇨ $f(x)=\frac{1}{2}\int (\sin 6x+\sin 2x)dx$

$=-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

$f(0)=-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+C=\frac{2}{3}$이므로 $C=1$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+1=\frac{4}{3}$

65) $\frac{\pi}{4}$

⇨ $f(x)=\int \cos^2 x dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

이때 $f(0)=C=0$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi=\frac{\pi}{4}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

66) $\frac{\pi}{2}$

⇨ $f(x)=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

$f(0)=C=0$이므로 $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$

67) 4

⇨ $f'(x)=2\sin x-\cos x$을 부정적분하면

$f(x)=-2\cos x-\sin x+C$, $f(0)=0$이므로 $C=2$

$\therefore f(\pi)=4$

68) 3

⇨ 분모가 0에 수렴하므로 분자도 0에 수렴한다.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}=4$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=12$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4a=12$, $a=3$

$f'(x)=3\sec^2 x$

$f(x)=3\tan x+C$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}+C=3\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ C=0$

$f(x)=3\tan x$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$