09

등차수열

예제 01

등차수열의 항 구하기

다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 5, 제10항이 68인 등차수열의 제15항을 구하여라.

(2) 제7항이 70, 제10항이 61인 등차수열에서 처음으로 음수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

접근 방법

첫째항을 a, 공차를 d라 하고 주어진 항을 a, d에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 값을 이용하여 a, d의 값을 각각 구한 다음 일반항을 구합니다.

Bible 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$$a_n=a+(n-1)d$$

상세 풀이

(1) 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=5+(n-1)d$

$a_{10}=68$에서

$$5+9d=68,\ 9d=63 \qquad \therefore d=7$$

따라서 $a_n=5+(n-1)\times 7=7n-2$이므로

$$a_{15}=7\times 15-2=103$$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_7=70$에서 $a+6d=70$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_{10}=61$에서 $a+9d=61$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=88$, $d=-3$

$$\therefore a_n=88+(n-1)\times(-3)=-3n+91$$

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$-3n+91<0$에서 $-3n<-91$ $\qquad \therefore n>\dfrac{91}{3}=30.33\cdots$

따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 31이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제31항입니다.

정답 ➡ (1) 103 (2) 제31항

보충 설명

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

(i) $a<0$, $d>0$일 때, 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구합니다.

(ii) $a>0$, $d<0$일 때, 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구합니다.

풀이집 p.172

숫자 바꾸기

01-1 **다음 물음에 답하여라.**

(1) 제2항이 8, 제10항이 24인 등차수열의 제20항을 구하여라.

(2) 첫째항이 -2005, 공차가 4인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

표현 바꾸기

◆다른 풀이

01-2 **등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.**

(1) $a_2=5$, $a_{10}=-11$일 때, $a_n=-31$을 만족시키는 n의 값을 구하여라.

(2) $a_3=11$, $a_6 : a_{10}=5 : 8$일 때, a_{20}의 값을 구하여라.

(3) $a_1+a_7+a_{13}=12$, $a_5+a_{10}+a_{15}=21$일 때, a_7+a_{10}의 값을 구하여라.

(4) $a_5+a_7=12$일 때, $a_3+a_6+a_9$의 값을 구하여라.

09

개념 넓히기 ★★☆

01-3 **공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{23}=23$일 때, $|a_n|$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하여라.**

정답 **01-1** (1) 44 (2) 제503항 **01-2** (1) 20 (2) 62 (3) 11 (4) 18
01-3 17

예제 02

등차수열을 이루는 세 수

등차수열을 이루는 세 수가 있다. 세 수의 합이 12이고 곱이 28일 때, 이 세 수의 제곱의 합을 구하여라.

접근 방법

등차수열을 이루는 세 수를 a, $a+d$, $a+2d$라고 해도 되지만 $a-d$, a, $a+d$라고 하면 세 수의 합이 $3a$가 되어 계산이 편리합니다.

> **Bible** 등차수열을 이루는 세 수
> ➡ $a-d$, a, $a+d$ 또는 a, $a+d$, $a+2d$

상세 풀이

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라고 하면
세 수의 합이 12이므로

$$(a-d)+a+(a+d)=12$$

$$3a=12 \qquad \therefore a=4$$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$$(a-d)\times a\times(a+d)=28 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $(4-d)\times 4\times(4+d)=28$

$$16-d^2=7,\ d^2=9$$

$$\therefore d=\pm 3$$ ← $d=3$이면 세 수는 1, 4, 7이고, $d=-3$이면 세 수는 7, 4, 1입니다.

따라서 세 수는 1, 4, 7이므로 구하는 제곱의 합은

$$1^2+4^2+7^2=1+16+49=66$$

정답 ➡ 66

보충 설명

등차수열을 이루는 세 수의 합에 대한 조건이 주어진 문제에서는 세 수를

$$a-d,\ a,\ a+d$$

라고 하는 것이 편리한 것처럼 등차수열을 이루는 네 수의 합에 대한 조건이 주어진 문제에서는 네 수를 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$라고 하는 것보다는

$$a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$$

라고 하는 것이 계산이 편리합니다.

마찬가지로 등차수열을 이루는 다섯 개의 수의 합에 대한 조건이 주어진 문제에서는 다섯 개의 수를 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$라고 하는 것보다는

$$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$$

라고 하는 것이 계산이 편리합니다.

풀이집 p.173

숫자 바꾸기

02-1 등차수열을 이루는 세 수가 있다. 세 수의 합이 15이고 곱이 105일 때, 이 세 수의 제곱의 합을 구하여라.

표현 바꾸기

02-2 삼차방정식 $x^3-15x^2+kx-75=0$의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65
④ 67 ⑤ 69

09

개념 넓히기 ★★☆

02-3 등차수열을 이루는 네 수가 있다. 네 수의 합이 28이고 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은 나머지 두 수의 곱보다 32만큼 작을 때, 이 네 수 중 가장 큰 수를 구하여라.

정답 **02-1** 83 **02-2** ③ **02-3** 13

예제 03

조화수열

두 수 $\frac{1}{15}$과 $\frac{1}{3}$ 사이에 세 개의 수 a, b, c를 넣어서 만든 수열 $\frac{1}{15}$, a, b, c, $\frac{1}{3}$이 이 순서대로 조화수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

접근 방법

조화수열을 이루는 5개의 수의 역수로 이루어진 수열은 등차수열을 이루므로 등차수열의 첫째항이 15, 제5항이 3임을 이용합니다.

Bible 수열 $\{a_n\}$이 조화수열 $\Longleftrightarrow$ 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열

상세 풀이

$\frac{1}{15}$, a, b, c, $\frac{1}{3}$이 이 순서대로 조화수열을 이루므로 각 항의 역수로 이루어진 수열

$$15,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ 3$$

은 이 순서대로 등차수열을 이룹니다.

이 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 15, 제5항이 3이므로

$$15+4d=3,\ 4d=-12 \qquad \therefore d=-3$$

즉, 수열 15, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, 3은 첫째항이 15, 공차가 -3인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a}=12,\ \frac{1}{b}=9,\ \frac{1}{c}=6$$

따라서 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=\frac{1}{6}$이므로

$$a+b+c=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{13}{36}$$

정답 ➡ $\frac{13}{36}$

보충 설명

위의 문제를 등차중항을 이용하여 풀 수도 있습니다.

주어진 수열의 역수로 이루어진 수열이 등차수열이므로 등차수열 15, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, 3에서

$\frac{1}{b}$은 15와 3의 등차중항이므로 $\frac{1}{b}=\frac{15+3}{2}=9 \qquad \therefore b=\frac{1}{9}$

$\frac{1}{a}$은 15와 9의 등차중항이므로 $\frac{1}{a}=\frac{15+9}{2}=12 \qquad \therefore a=\frac{1}{12}$

$\frac{1}{c}$은 9와 3의 등차중항이므로 $\frac{1}{c}=\frac{9+3}{2}=6 \qquad \therefore c=\frac{1}{6}$

풀이집 p.173

숫자 바꾸기

03-1 두 수 $\frac{1}{17}$과 $\frac{1}{5}$ 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어서 만든 수열 $\frac{1}{17}$, x, y, z, $\frac{1}{5}$이 이 순서대로 조화수열을 이룰 때, x, y, z의 값을 각각 구하여라.

표현 바꾸기

03-2 두 수 a, b의 등차중항이 10이고 조화중항이 5일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

03-3 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=3$, $a_2=2$이고 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이 성립할 때, a_{11}의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

09

정답 **03-1** $x=\frac{1}{14}$, $y=\frac{1}{11}$, $z=\frac{1}{8}$ **03-2** 300
03-3 ④

등차수열의 합

예제 04

제3항이 7, 제6항이 13인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하여라.

접근 방법

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 $a_n=a+(n-1)d$이므로 $a_3=7$, $a_6=13$임을 이용하여 첫째항과 공차를 구한 후, 등차수열의 합을 구합니다.

Bible

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) 첫째항 a와 제n항 l이 주어질 때, $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항 a와 공차 d가 주어질 때, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

상세 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$$a_3=a+2d=7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_6=a+5d=13 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡$-$㉠을 하면

$$3d=6 \qquad \therefore d=2$$

$d=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 2이므로 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2\times3+(20-1)\times2\}}{2}=440$$

정답 ➡ 440

보충 설명

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

이므로 $A=\dfrac{d}{2}$, $B=a-\dfrac{d}{2}$로 놓으면

$$S_n=An^2+Bn$$

꼴로 나타낼 수 있습니다.

이때, $d\neq0$이면 $A\neq0$이므로 공차가 0이 아닌 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 상수항이 없는 n에 대한 이차식으로 나타낼 수 있음을 알 수 있습니다.

풀이집 p.174

숫자 바꾸기

04-1 제4항이 14, 제7항이 23인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하여라.

표현 바꾸기

04-2 첫째항이 50, 제n항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 420일 때, a_{30}의 값은?

① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

09

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

04-3 다음 물음에 답하여라.

(1) 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 총합을 구하여라.

(2) 100보다 크고 200보다 작은 자연수 중에서 8로 나누어떨어지는 수의 총합을 구하여라.

정답 **04-1** 670 **04-2** ④ **04-3** (1) 1717 (2) 1776

예제 05

등차수열의 합과 일반항 사이의 관계

다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-3n$일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+n+1$일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

접근 방법

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어졌을 때 일반항 a_n을 찾는 문제이므로

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$$

임을 이용합니다. 이때, $a_1=S_1$이 $a_n\ (n\geq 2)$에 $n=1$을 대입한 값과 같으면 $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 구한 일반항 a_n은 $n=1$일 때부터 성립합니다.

Bible 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$$

상세 풀이

(1) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}=4n-5 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times 1^2-3\times 1=-1$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 $\leftarrow 4\times 1-5=-1$

$$a_n=4n-5$$

(2) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+1-\{(n-1)^2+(n-1)+1\}=2n \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+1+1=3$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로 $\leftarrow 2\times 1=2\neq 3$

$$a_1=3,\ a_n=2n\ (n\geq 2)$$

정답 ➡ (1) $a_n=4n-5$ (2) $a_1=3$, $a_n=2n\ (n\geq 2)$

보충 설명

위의 문제를 풀 때에는 S_n-S_{n-1}을 이용하여 찾은 일반항 a_n이 $n=1$인 경우에도 성립하는지를 반드시 확인해야 합니다. 다음 단원인 **10 등비수열**, **11 합의 기호 $\sum$와 여러 가지 수열**에서도 자주 이용되는 것이므로 확실하게 정리해 둡시다.

또한 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=an^2+bn+c$ (a, b, c는 상수)일 때

(i) $c=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룹니다.

(ii) $c\neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룹니다.

풀이집 p.175

숫자 바꾸기

05-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3n^2+2n$일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-n-1$일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

표현 바꾸기

05-2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$의 값은?

① 4040 ② 5050 ③ 6060
④ 7070 ⑤ 8080

09

개념 넓히기 ★★☆

05-3 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각

$$n^2+kn,\ 2n^2-3n$$

인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제10항이 같을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

정답 **05-1** (1) $a_n=6n-1$ (2) $a_1=0$, $a_n=4n-3$ $(n\geq 2)$
05-2 ② **05-3** 16

예제 06

등차수열의 합의 최대, 최소

첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최댓값을 구하여라.

접근 방법

주어진 등차수열에서 (첫째항)>0, (공차)<0이므로 S_n의 최댓값은 첫째항부터 양수인 항까지의 합을 구합니다.

Bible 등차수열 $\{a_n\}$의 합의 최대, 최소 ➡ (1) $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 $n=k$일 때 최대
(2) $a_k<0$, $a_{k+1}>0$이면 $n=k$일 때 최소

상세 풀이

첫째항이 50, 공차가 -4이므로 주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=50+(n-1)\times(-4)=-4n+54$$

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$$-4n+54<0,\ -4n<-54 \qquad \therefore n>\frac{54}{4}=13.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제13항까지가 양수이고 제14항부터는 음수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최대가 됩니다.
따라서 구하는 최댓값은

$$S_{13}=\frac{13\{2\times50+(13-1)\times(-4)\}}{2}=338$$

다른 풀이

첫째항이 50, 공차가 -4이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$$
$$=-2n^2+52n=-2(n-13)^2+338$$

따라서 $n=13$일 때 S_n은 최댓값 338을 가집니다.

정답 ➡ 338

보충 설명

등차수열의 합의 최대, 최소는 다음과 같이 구할 수 있습니다.
(1) 첫째항이 양수, 공차가 음수인 등차수열에서 합의 최댓값은 첫째항부터 양수인 항까지의 합을 구합니다.
(2) 첫째항이 음수, 공차가 양수인 등차수열에서 합의 최솟값은 첫째항부터 음수인 항까지의 합을 구합니다.
또한 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 n에 대한 이차식으로 나타낸 후, 완전제곱식 꼴로 고쳐 S_n의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수도 있습니다.

풀이집 p.175

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

06-1 첫째항이 -11, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최솟값을 구하여라.

표현 바꾸기

06-2 제7항이 2, 제10항이 -7인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최댓값은?

① 71　② 73　③ 75
④ 77　⑤ 79

개념 넓히기 ★★☆

06-3 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=2n^2-39n$$

일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$의 값을 구하여라.

정답 **06-1** -36　**06-2** ④　**06-3** 400

예제 07

부분의 합이 주어진 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10}=10$, $S_{20}=50$이다. S_{30}의 값을 구하여라.

접근 방법

등차수열에서 차례대로 같은 개수만큼 묶어서 합을 구하면 그 합이 이루는 수열도 등차수열임을 이용합니다. 예를 들어, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 차례대로 2개씩 묶은 수열

$$a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ \cdots$$

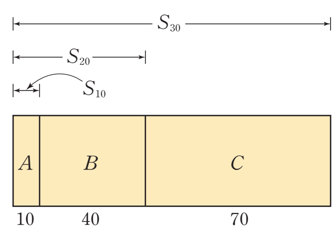
a_1+a_1+d / $=2a_1+d$, a_1+2d+a_1+3d / $=2a_1+5d$, a_1+4d+a_1+5d / $=2a_1+9d$ ← 공차가 $4d$인 등차수열

은 공차가 $4d$인 등차수열이 됩니다.

Bible 등차수열 $\{a_n\}$에서 차례대로 같은 개수만큼 합하여 만든 수열도 등차수열이다.

상세 풀이

등차수열 $\{a_n\}$에서 차례대로 10개씩 묶어 그 합을 구하면 이 합은 등차수열을 이룹니다. 즉,



$$A=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$$
$$B=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$$
$$C=a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}$$

이라고 하면 A, B, C는 이 순서대로 등차수열을 이룹니다.

이때, $S_{10}=10$, $S_{20}=50$이므로

$$A=S_{10}=10,\ B=S_{20}-S_{10}=50-10=40$$

따라서 $B-A=40-10=30$에서 $C=B+30=40+30=70$이므로

$$S_{30}=A+B+C=10+40+70=120$$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_{10}=10$에서 $\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=10 \qquad \therefore 2a+9d=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$S_{20}=50$에서 $\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=50 \qquad \therefore 2a+19d=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{7}{20}$, $d=\dfrac{3}{10}$

$$\therefore S_{30}=\frac{30\left\{2\times\left(-\frac{7}{20}\right)+(30-1)\times\frac{3}{10}\right\}}{2}=120$$

정답 ➡ 120

풀이집 p.176

숫자 바꾸기

◆ 다른 풀이

07-1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_5=140$, $S_{10}=480$이다. S_{15}의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

◆ 다른 풀이

07-2 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제5항까지의 합이 70, 제6항부터 제15항까지의 합이 290일 때, 제11항부터 제25항까지의 합은?

① 600 ② 620 ③ 640
④ 660 ⑤ 680

09

개념 넓히기 ★★☆

07-3 첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 자연수 k에 대하여 $S_{3k}=9S_k$가 성립한다. S_{5k}는 S_k의 몇 배인지 구하여라.

정답 **07-1** 1020 **07-2** ④ **07-3** 25배

예제 08

두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열

다음과 같이 1과 5 사이에 각각 10개, 20개의 수를 넣어서 만든 두 수열

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10},\ 5$$
$$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 5$$

가 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{b_{20}-b_{11}}{a_{10}-a_1}$의 값을 구하여라.

접근 방법

두 수 1, 5 사이에 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 넣어서 등차수열을 만들었으므로 두 수 a_k, b_k는 각각의 수열의 $k+1$번째 항임을 이용합니다.

Bible 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$ ➡ $a_{n+1}-a_n=d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

상세 풀이

등차수열 $1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10},\ 5$의 공차를 p라고 하면 첫째항이 1, 제12항이 5이므로

$$1+(12-1)p=5,\ 11p=4 \qquad \therefore p=\frac{4}{11}$$

이때, a_{10}, a_1은 각각 이 등차수열의 제11항, 제2항이므로

$$a_{10}-a_1=(1+10p)-(1+p)=9p=9\times\frac{4}{11}=\frac{36}{11}$$

또한 등차수열 $1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 5$의 공차를 q라고 하면 첫째항이 1, 제22항이 5이므로

$$1+(22-1)q=5,\ 21q=4 \qquad \therefore q=\frac{4}{21}$$

이때, b_{20}, b_{11}은 각각 이 등차수열의 제21항, 제12항이므로

$$b_{20}-b_{11}=(1+20q)-(1+11q)=9q=9\times\frac{4}{21}=\frac{12}{7}$$

$$\therefore \frac{b_{20}-b_{11}}{a_{10}-a_1}=\frac{\frac{12}{7}}{\frac{36}{11}}=\frac{11}{21}$$

정답 ➡ $\dfrac{11}{21}$

보충 설명

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항 사이의 차가 d로 항상 일정하므로 다음이 성립합니다.

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=d$$
$$a_3-a_1=a_4-a_2=a_5-a_3=\cdots=2d$$
$$a_4-a_1=a_5-a_2=a_6-a_3=\cdots=3d$$
$$\vdots$$

풀이집 p.178

숫자 바꾸기

08-1 다음과 같이 1과 10 사이에 각각 15개, 30개의 수를 넣어서 만든 두 수열

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{15},\ 10$$

$$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{30},\ 10$$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{b_{30}-b_{16}}{a_{15}-a_1}$의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

08-2 -5와 20 사이에 n개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$을 넣어서 등차수열

$$-5,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 20$$

을 만들었다. 이 수열의 모든 항의 합이 120일 때, n의 값을 구하여라.

09

개념 넓히기 ★★☆

08-3 4와 20 사이에 m개, 20과 52 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열

$$4,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m,\ 20,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ 52$$

를 만들었을 때, m, n 사이의 관계식은?

① $n=2m-1$　② $n=2m+1$　③ $n=2m+3$
④ $n=3m$　⑤ $n=3m+1$

정답 08-1 $\frac{16}{31}$　08-2 14　08-3 ②