Ⅱ 평면벡터

탐구 학습

정답과 해설 312쪽

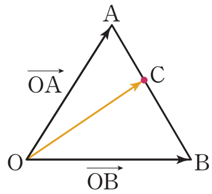
지도서 138쪽 / 교과서 80쪽 문제 3

한 직선 위에 있는 서로 다른 세 점

서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OC}=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$$

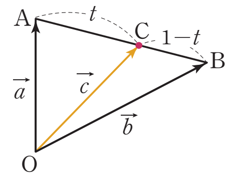
를 만족시키는 실수 t가 존재하면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



이때 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

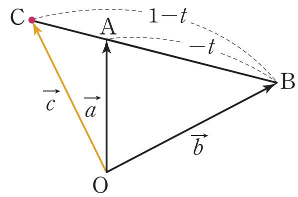
(1) $0<t<1$이면 $\vec{c}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$, 즉 $\vec{c}=\dfrac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{(1-t)+t}$

➔ 점 C는 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이다.



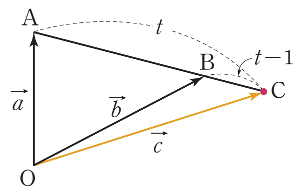
(2) $t<0$이면 $\vec{c}=(1-t)\vec{a}-(-t)\vec{b}$, 즉 $\vec{c}=\dfrac{(1-t)\vec{a}-(-t)\vec{b}}{(1-t)-(-t)}$

➔ 점 C는 선분 AB를 $(-t):(1-t)$로 외분하는 점이다.



(3) $t>1$이면 $\vec{c}=-(t-1)\vec{a}+t\vec{b}$, 즉 $\vec{c}=\dfrac{-(t-1)\vec{a}+t\vec{b}}{-(t-1)+t}$

➔ 점 C는 선분 AB를 $t:(t-1)$로 외분하는 점이다.



1 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$$

를 만족시키는 실수 t가 존재하면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 보이시오.

2 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(1, 2), B(−2, 3)에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\ (\text{단, } 0\le t\le 1)$$

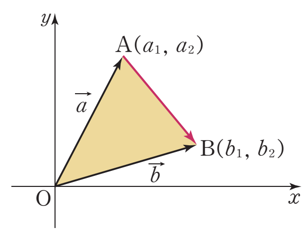
를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구하시오.

탐구 학습

벡터의 내적과 삼각형의 넓이

벡터의 내적과 성분을 이용하여 삼각형의 넓이를 구해 보자.

(1) 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라고 하면 삼각형 OAB의 넓이 S는



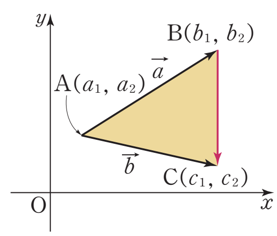
➔ $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

(2) 세 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$, $\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라고 하면

$\vec{a}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$, $\vec{b}=(c_1-a_1,\ c_2-a_2)$

이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는



➔ $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}|(b_1-a_1)(c_2-a_2)-(b_2-a_2)(c_1-a_1)|$

$=\frac{1}{2}|a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2-a_1c_2-c_1b_2-b_1a_2|$

참고 다음과 같은 방법으로 식을 기억할 수 있다.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}|a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2-a_1c_2-c_1b_2-b_1a_2|$$

3 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

4 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 6)$, $\mathrm{B}(10,\ 10)$, $\mathrm{C}(14,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

활동지 함께 생각하는 탐구

____학년 ____반 ____번 이름 __________

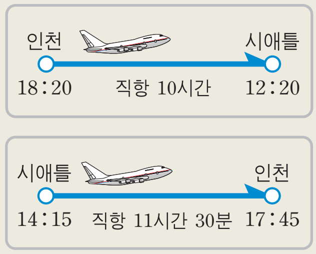
정답과 해설 312쪽

벡터의 덧셈과 뺄셈

지도서 133쪽 교과서 75쪽

탐구 목표 벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 비행기 운항 시간이 다른 까닭을 설명해 보자.

오른쪽 항공권과 같이 ‘인천-시애틀’ 항로의 비행기 운항 시간은 갈 때와 올 때가 서로 다르다. 그 까닭은 ‘인천-시애틀’ 항로에 제트 기류가 형성되어 있기 때문이다. 즉, 제트 기류가 비행기를 뒤에서 밀어주거나, 앞에서 방해하는 역할을 하기 때문에 운항 시간에 차이가 생긴다.



1 다음에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣어 보자.

> 비행기의 속도를 $\vec{a}$, 제트 기류의 속도를 $\vec{v}$라고 하면, 제트 기류가 비행기를 뒤에서 밀어주는 역할을 할 때 비행기의 속도는 $\boxed{\text{(가)}}$이고, 제트 기류가 비행기를 앞에서 방해하는 역할을 할 때 비행기의 속도는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

2 일상생활에서 두 벡터의 합 또는 차로 표현할 수 있는 것을 찾아보자.

활동지 함께 생각하는 탐구

____학년 ____반 ____번 이름 ________

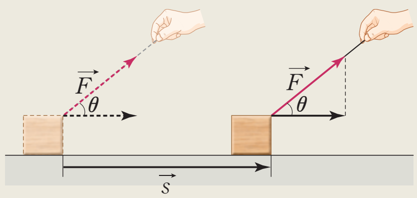
벡터의 내적

지도서 161쪽 교과서 103쪽

탐구 목표 벡터의 내적을 이용하여 물체에 작용한 힘이 한 일을 구해 보자.

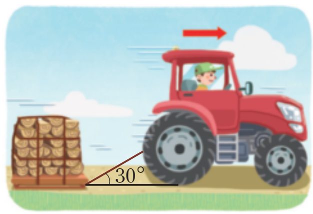
힘을 가해 물체를 움직일 때의 힘을 $\vec{F}$, 물체의 이동 방향과 이동 거리를 나타내는 벡터를 $\vec{s}$라고 하자. 이때 $\vec{F}$가 한 일을 W라고 하면 $W=\vec{F}\cdot\vec{s}$이다.

예를 들어, 이동 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 방향으로 힘 $\vec{F}$가 작용하여 오른쪽 그림과 같이 $|\vec{s}|$만큼 물체를 움직일 때, 물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기는 $|\vec{F}|\cos\theta$이므로 힘 $\vec{F}$가 한 일은 $\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$이다.

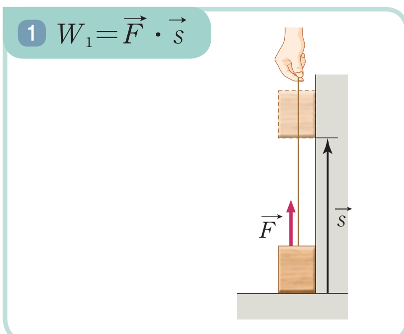


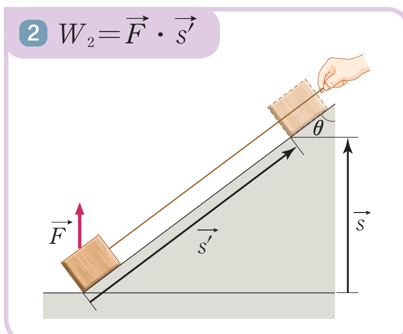
1 트랙터로 화물을 평평한 땅의 수평 방향으로 10 m만큼 끌었다. 지면과 30°의 각을 유지하면서 $2400\sqrt{3}$ N의 힘으로 일정하게 작용하는 힘 $\vec{F}$가 한 일을 구해 보자.

(단, 일의 단위는 N·m이다.)



2 다음 두 그림은 물체를 들어 올릴 때 지면과 수직 방향으로 작용한 힘 $\vec{F}$가 한 일 W_1, W_2를 각각 나타낸 것이다. ①에서 $\vec{F}$는 $\vec{s}$와 평행하고 ②에서 $\vec{F}$와 $\vec{s'}$이 이루는 각의 크기가 θ일 때, $W_1=W_2$임을 설명해 보자.





형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 ________

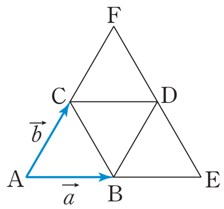
정답과 해설 312~314쪽

1-1. 벡터의 뜻

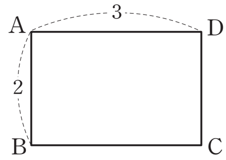
지도서 122쪽 교과서 64쪽

1 오른쪽 그림은 서로 합동인 네 개의 정삼각형을 한 변이 겹치도록 붙여 놓은 것이다. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

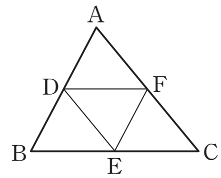
(1) $\overrightarrow{DC}$ (2) $\overrightarrow{CF}$



2 오른쪽 그림의 직사각형에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$일 때, $\overrightarrow{BD}$의 크기를 구하시오.

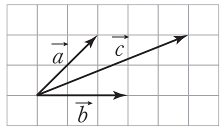


3 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. 점 A, B, C, D, E, F를 시점과 종점으로 하는 벡터 중 $\overrightarrow{AF}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터를 모두 구하시오.



4 오른쪽 그림과 같이 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 세 개의 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 있다. 다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}$ (2) $-\vec{b}$ (3) $\vec{c}$



형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 ________

1-2. 벡터의 덧셈과 뺄셈

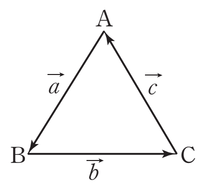
지도서 127쪽 교과서 69쪽

1 다음을 간단히 하시오.

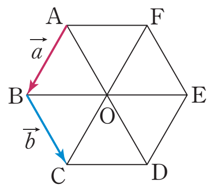
(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$

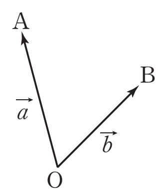
2 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$라고 할 때, $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$의 크기를 구하시오.



3 오른쪽 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{BO}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



4 오른쪽 그림의 세 점 O, A, B에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. 점 A를 점 B에 대하여 대칭이동한 점을 C라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{OC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

1-3. 벡터의 실수배

지도서 132쪽 교과서 74쪽

1 다음을 간단히 하시오.

(1) $4(3\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}-3\vec{b})$

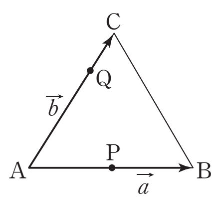
(2) $2(\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c})-3(2\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c})$

2 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) $\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{x}=5\vec{a}-3\vec{b}$

(2) $4\vec{b}-\vec{x}=2(2\vec{x}-10\vec{a}-3\vec{b})$

3 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$이고, 선분 AB의 중점을 P, 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라고 할 때, $\overrightarrow{PQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



4 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$$\vec{p}=9\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{q}=2\vec{a}+4\vec{b},\ \vec{r}=-8\vec{a}+2\vec{b}$$

이다. 이때 두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{q}+\vec{r}$가 서로 평행함을 보이시오.

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

2-1. 위치벡터와 평면벡터의 성분

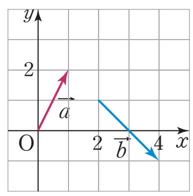
지도서 145쪽 교과서 87쪽

1 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 다음 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점

2 오른쪽 그림과 같은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.



(1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내시오.

(2) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 성분으로 나타내시오.

3 다음에서 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.

(1) $A(-1,\ 4)$, $B(2,\ 1)$ (2) $A(2,\ -3)$, $B(4,\ 0)$

4 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ -2)$에 대하여 $\vec{c}=(5,\ 4)$를 $k\vec{a}+l\vec{b}$ 꼴로 나타내시오.

(단, k, l은 실수)

형성 평가

_____학년 _____반 _____번 이름 ____________

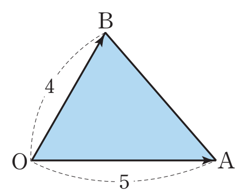
2-2. 평면벡터의 내적

지도서 153쪽 교과서 95쪽

1 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{6}$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　　　(2) $|\vec{a}+\vec{b}|$

2 오른쪽 그림과 같은 삼각형 OAB에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=5$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$일 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.



3 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ -6)$, $\vec{b}=(2x,\ 1-x)$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

(1) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$　　　　(2) $\vec{a}\perp(2\vec{a}-\vec{b})$

4 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ -2)$에 대하여 $f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(t\vec{a}-\vec{b})$일 때, $f(t)$의 최솟값을 구하시오.

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

2-3. 직선과 원의 방정식

지도서 160쪽 교과서 102쪽

1 다음 점 A를 지나고, 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\vec{n}=(2,\ 1)$

(2) $\mathrm{A}(5,\ 7)$, $\vec{n}=(4,\ -3)$

2 다음 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구하시오.

$$\frac{x-2}{3}=y+1,\ \frac{x+5}{2}=1-y$$

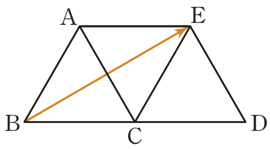
3 두 점 $\mathrm{A}(2,\ -4)$, $\mathrm{B}(-2,\ 6)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.

4 점 $\mathrm{A}(1,\ 8)$에서 직선 $1-x=\dfrac{y+2}{2}$에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 점 H의 좌표를 구하시오.

중단원 수준별 문제

기본

01 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 3개를 이어 붙여 만든 도형이다. 이 도형에서 벡터 $\overrightarrow{BE}$의 크기는?

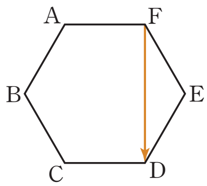


① $\sqrt{7}$　② $2\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ $\sqrt{10}$　⑤ $\sqrt{11}$

02 오른쪽 그림의 정육각형에서

$$\overrightarrow{FD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}$$

일 때, $m+n$의 값은?
(단, m, n은 실수)



① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

03 평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$
② $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}$
③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$
④ $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$
⑤ $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

04 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+3\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=k\vec{a}-5\vec{b}$일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값은? (단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고, 서로 평행하지 않다.)

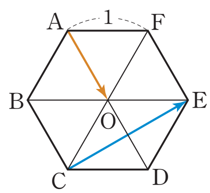
① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

05 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 다음 조건을 만족시킨다. $\vec{a}\,/\!/\,\vec{c}$일 때, $2|\vec{c}|$의 값은?

(가) $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $|\vec{a}|=4$
(나) $3\vec{a}-(\vec{b}+2\vec{c})=2(\vec{b}+2\vec{c})$

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형에서 $|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CE}|$의 값은?

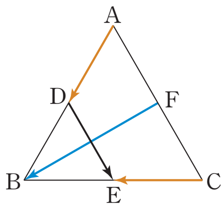


① 1　② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

정답과 해설 315쪽

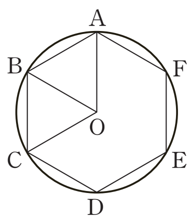
표준

07 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FB}$일 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08 오른쪽 그림과 같이 중심이 O인 원에 내접하는 정육각형에서
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}|$
$=2\sqrt{3}$
일 때, 이 원의 넓이는?

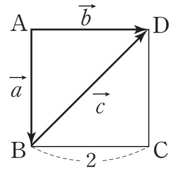


① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

09 세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$, $\vec{c}=(-4,\ y)$에 대하여 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$가 성립할 때, 두 실수 x, y의 곱은?

① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ⑤ 48

10 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{c}$라고 할 때, $|-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$의 값은?

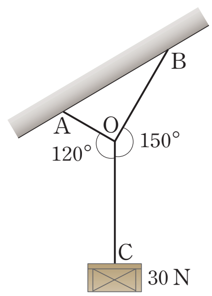


① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

11 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=5\vec{a}+k\vec{b}$일 때, $4\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 실수 k의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

12 오른쪽 그림과 같이 비스듬한 천장에 30 N의 물건을 끈으로 매달아 놓았다. $\angle AOC=120^\circ$, $\angle BOC=150^\circ$일 때, 끈 OB에 작용하는 힘의 크기는? (단, N은 힘의 크기를 나타내는 단위이다.)



① 10 N ② 15 N ③ $10\sqrt{3}$ N
④ 20 N ⑤ $15\sqrt{3}$ N

Ⅱ
평면벡터

정답과 해설 316쪽

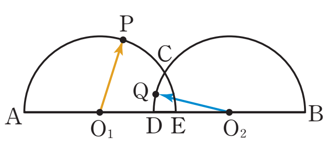
심화

13 영벡터가 아닌 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\overrightarrow{OP}=2\vec{a}+5\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=m\vec{a}-4\vec{b}$, $\overrightarrow{OR}=7\vec{a}+6\vec{b}$일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$가 평행하도록 하는 실수 m의 값은? (단, O는 원점이다.)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

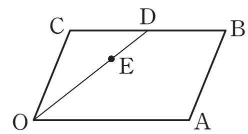
14 다음 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE}=\overline{DB}=4$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=2$인 두 점을 O_1, O_2라고 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}|$의 최솟값이 1일 때, 선분 O_1O_2의 길이는?

(단, $2<\overline{O_1O_2}<4$이다.)



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

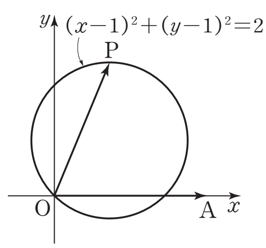
15 오른쪽 그림의 평행사변형 OABC에서 변 BC의 중점을 D라 하고, 선분 OD 위의 한 점을 E라고 하자. 세 점 A, E, C가 한 직선 위에 있을 때, $\frac{\overline{OE}}{\overline{DE}}$의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

16 다음 그림과 같이 좌표평면에서 점 A(3, 0)과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OA}|$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

(단, O는 원점이다.)



① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

중단원 수준별 문제

정답과 해설 317쪽

기본

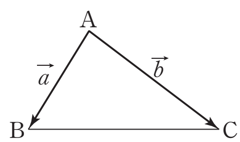
01 세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ -3)$에 대하여 $3(2\vec{a}-\vec{b})+2(3\vec{a}-2\vec{c})=(m,\ n)$일 때, $m+n$의 값은?

① 75 ② 76 ③ 77 ④ 78 ⑤ 79

02 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(3,\ 5)$에 대하여 $|t\vec{a}-\vec{b}|$의 최솟값이 m일 때, m^2의 값은? (단, t는 실수)

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

03 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 외분하는 점을 Q라고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

04 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(2,\ -x)$, $\mathrm{B}(x,\ 3)$, $\mathrm{C}(-1,\ 2x)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 값이 최소일 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

05 삼각형 ABC에서 $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$일 때, 실수 k의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

06 두 직선 $\frac{2x-3}{2}=1-y$, $\frac{x+1}{-2}=y+6$이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

중단원 수준별 문제

표준

07 영벡터가 아닌 서로 평행한 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4,\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-6$$

을 만족시킨다. $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

08 좌표평면에서 점 A(2, 5)와 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 할 때, $|\vec{p}-\vec{a}|=4$를 만족시키는 점 P와 직선 $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+5}{3}$ 사이의 최단 거리는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

09 넓이가 60이고 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$를 만족시키는 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라고 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

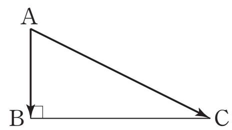
ㄱ. 점 D는 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

ㄴ. $\overline{AP}:\overline{PD}=5:1$

ㄷ. 삼각형 APC의 넓이는 20이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $\angle ABC=90°$인 직각삼각형 ABC에서

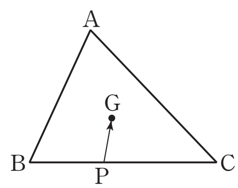


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}$$

라고 할 때, $|\vec{a}+\vec{b}|^2$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

11 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점을 P라고 하자.

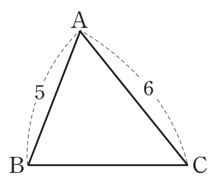


$$\overrightarrow{PG}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$$

를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

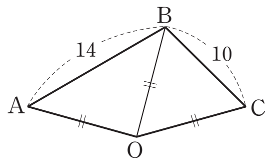
12 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$이고, 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값은? (단, $\angle BAC$는 예각이다.)



① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

심화

13 오른쪽 그림과 같이 평면 위의 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이고, $\overline{AB}=14$, $\overline{BC}=10$이다. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값은?

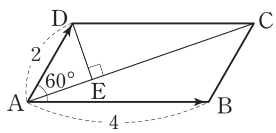


① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

14 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$, $|\overrightarrow{PQ}|=3$을 만족시킨다. 점 Q가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

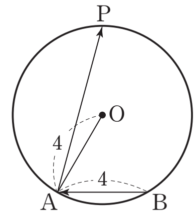
① 3π ② $\sqrt{10}\pi$ ③ 6π ④ $2\sqrt{10}\pi$ ⑤ 9π

15 오른쪽 그림과 같이 $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{AD}|=2$이고 $\angle DAB=60°$인 평행사변형이 있다. 점 D에서 대각선 AC에 내린 수선의 발을 E라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 하자. $\overrightarrow{AE}=p\vec{a}+q\vec{b}$를 만족시키는 상수 p, q에 대하여 $7(p+q)$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16 오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원 위를 움직이는 점을 P라 하고, 이 원 위의 두 점 A, B 사이의 거리가 4라고 한다. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 C, 최소가 되도록 하는 점 P를 D라고 할 때, $\overline{AC}\times\overline{AD}$의 값은?

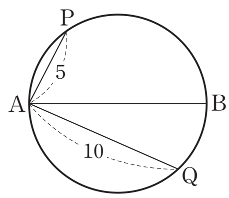


① 4 ② $4\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{2}$ ④ 16 ⑤ $16\sqrt{3}$

17 좌표평면 위의 세 점 A(2, 1), B(−3, 0), C(−2, −4)에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

18 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 $\overline{AP}=5$, $\overline{AQ}=10$이 되는 점 P, Q를 각각 잡는다. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}$의 값은?



① 100 ② 125 ③ 150 ④ 175 ⑤ 200

중단원 서술형 문제

◎ 다음은 각 문항에 대한 풀이 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (1~4)

1 $3\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-6\vec{b}$, $2\vec{x}-3\vec{y}=8\vec{a}-4\vec{b}$일 때, $\vec{x}+2\vec{y}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오. [8점]

$3\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-6\vec{b}$ ……①

$2\vec{x}-3\vec{y}=8\vec{a}-4\vec{b}$ ……②

①×3+②를 하면

$\vec{x}=\vec{a}-\boxed{\text{(가)}}$ ……③

③을 ①에 대입하면

$\vec{y}=-3(\vec{a}-\boxed{\text{(가)}})+\vec{a}-6\vec{b}=\boxed{\text{(나)}}$

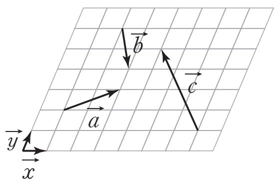
따라서

$\vec{x}+2\vec{y}=(\vec{a}-\boxed{\text{(가)}})+2(\boxed{\text{(나)}})$

$=\boxed{\text{(다)}}$

2 오른쪽 그림은 일정한 간격의 평행선으로 이루어진 도형이다. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ 꼴로 나타내시오.

(단, p, q는 상수이다.) [8점]



$\vec{a}=2\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{b}=\vec{x}-2\vec{y}$이므로

$\vec{c}=p(2\vec{x}+\vec{y})+q(\vec{x}-2\vec{y})$

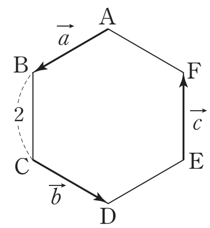
$=(2p+q)\vec{x}+(\boxed{\text{(가)}})\vec{y}$

이때 $\vec{c}=\boxed{\text{(나)}}\vec{x}+\boxed{\text{(다)}}\vec{y}$이므로

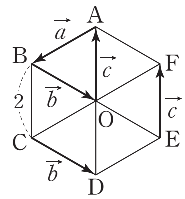
$p=\boxed{\text{(라)}}$, $q=-\frac{11}{5}$이다.

따라서 $\vec{c}=\boxed{\text{(라)}}\vec{a}-\frac{11}{5}\vec{b}$

3 오른쪽 그림과 같은 정육각형의 한 변의 길이가 2이고 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{EF}=\vec{c}$일 때, $|\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}|$의 값을 구하시오. [6점]



세 대각선 AD, BE, CF에 의하여 나누어진 6개의 삼각형은 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\boxed{\text{(가)}}$이므로

$\vec{a}+\vec{b}=\boxed{\text{(나)}}$이다.

따라서 $|\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}|=|\boxed{\text{(다)}}|=6$

4 서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\overrightarrow{OA}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=m\vec{a}+3\vec{b}$일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 실수 m의 값을 구하시오. [8점]

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-2\vec{a}+\boxed{\text{(가)}}\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(\boxed{\text{(나)}})\vec{a}+2\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (단, $k\neq0$)인 실수 k가 존재한다.

즉,

$(\boxed{\text{(나)}})\vec{a}+2\vec{b}=k(-2\vec{a}+\boxed{\text{(가)}}\vec{b})$

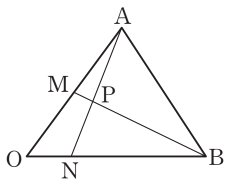
따라서 $\boxed{\text{(나)}}=-2k$, $2=k\times\boxed{\text{(가)}}$이므로

$k=\boxed{\text{(다)}}$, $m=\boxed{\text{(라)}}$

정답과 해설 320쪽

◎ 다음은 단계형 서술형 문제이다. 단계에 따라 정답과 풀이 과정을 쓰시오. (5~6)

5 오른쪽 그림의 삼각형 OAB에서 변 OA의 중점을 M, 변 OB의 사등분점 중에서 점 O와 가까운 점을 N, 두 선분 AN, BM의 교점을 P라고 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n의 값을 각각 구하시오.



[단계 1] 세 점 A, P, N이 일직선 위에 있음을 이용하여 $\overrightarrow{OP}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오. [2점]

[단계 2] 세 점 B, P, M이 일직선 위에 있음을 이용하여 $\overrightarrow{OP}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오. [2점]

[단계 3] $\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n의 값을 각각 구하시오. [2점]

6 원 $x^2+y^2=16$ 위의 한 점 P와 두 점 A$(-3, 0)$, B$(-5, 0)$에 대하여 $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}|$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

[단계 1] $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}|$를 간단히 하시오. [1점]

[단계 2] [단계 1]에서 구한 벡터가 의미하는 것을 말하시오. [3점]

[단계 3] 점 P의 좌표가 최댓값과 최솟값이 되는 좌표를 찾고, 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

◎ 다음은 수준별 선택형 서술형 문제이다. 수준 1, 수준 2, 수준 3 중 한 문제를 선택하여 정답과 풀이 과정을 쓰시오.

7-수준 1

$\frac{1}{2}(\vec{a}-7\vec{b})=3\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$를 만족시키는 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행함을 보이시오.

[6점]

7-수준 2

서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\overrightarrow{OP}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=-3\vec{a}+2\vec{b}$,

$\overrightarrow{OR}=-5\vec{a}+m\vec{b}$, $\overrightarrow{OS}=(m+2)\vec{a}+\vec{b}$

일 때, $\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,\overrightarrow{RS}$가 되도록 하는 실수 m의 값을 구하시오. [8점]

7-수준 3

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$

를 만족시킨다. 삼각형 ADP의 넓이가 3일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하시오. [10점]

Ⅱ 평면벡터

◉ 다음은 각 문항에 대한 풀이 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (1~2)

1 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\vec{a} \,/\!/\, \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$
> (나) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$
> (다) $(\vec{a}+\vec{c}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) = -12$

$(\vec{a}+\vec{c}) \cdot (\vec{b}+\vec{c})$의 값을 구하시오. [10점]

> $\vec{a} \,/\!/\, \vec{c}$에서 $\vec{a} = k\vec{c}$(단, $k \neq 0$)인 실수 k가 존재하므로
> $\vec{a} \cdot \vec{c} = k|\vec{c}|^2 = 8$ ······①
> $(\vec{a}+\vec{c}) \cdot (\vec{a}-\vec{c})$
> $= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2$
> $= (k^2-1)|\vec{c}|^2 = -12$ ······②
> ①, ②를 변끼리 나누어 정리하면
> ($\boxed{(가)}$)$\times(k+2)=0$
> ②에서 $k^2-1<0$, 즉 $-1<k<1$이므로
> $k=\boxed{(나)}$, $|\vec{c}|^2=\boxed{(다)}$
> 또, $\vec{b} \perp \vec{c}$이므로 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$이고
> $(\vec{a}+\vec{c}) \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = (k+1)\vec{c} \cdot (\vec{b}+\vec{c})$
> $= (k+1)|\vec{c}|^2$
> $= \boxed{(라)}$

2 점 $(-2, 6)$을 지나고 직선 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{5-y}{3}$에 평행한 직선을 l, 점 $(-1, 2)$를 지나고 두 점 $(0, 3)$, $(3, 0)$을 지나는 직선에 수직인 직선을 m이라고 하자. 이때 두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구하시오. [8점]

> $\vec{u} = \boxed{(가)}$은 직선 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{5-y}{3}$의 방향벡터이므로 점 $(-2, 6)$을 지나고 방향벡터가
> $\vec{u} = \boxed{(가)}$인 직선 l의 방정식은
> $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{6-y}{3}$ ······①
> 또, $\vec{n} = \boxed{(나)}$은 두 점 $(0, 3)$, $(3, 0)$을 지나는 직선의 방향벡터이므로 이는 직선 m의 법선벡터이다.
> 따라서 점 $(-1, 2)$를 지나고 법선벡터가
> $\vec{n} = \boxed{(나)}$인 직선 m의 방정식은
> $x-y+3=0$ ······②
> ①, ②을 연립하여 풀면 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\boxed{(다)}$이다.

정답과 해설 321쪽

다음은 단계형 서술형 문제이다. 단계에 따라 정답과 풀이 과정을 쓰시오. (3~4)

3 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하자. 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 선분 AP를 $3:2$로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 삼각형 BCQ의 무게중심의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

[단계 1] 점 P의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오. [2점]

[단계 2] 점 Q의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오. [2점]

[단계 3] 삼각형 BCQ의 무게중심을 G라고 할 때, 점 G의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오. [2점]

4 직선 $\dfrac{x-3}{2}=1-y$ 위의 두 점 A, B와 점 C$(-2,\ 1)$에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값을 구하시오.

[단계 1] 벡터의 내적을 이용하여 점 C$(-2,\ 1)$에서 직선 $\dfrac{x-3}{2}=1-y$에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구하시오. [2점]

[단계 2] 삼각형 ABC의 한 변의 길이를 구하시오. [3점]

[단계 3] $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값을 구하시오. [5점]

다음은 수준별 선택형 서술형 문제이다. 수준 1, 수준 2, 수준 3 중 한 문제를 선택하여 정답과 풀이 과정을 쓰시오.

5- 수준 1

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$이고, 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $k\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직일 때, 실수 k의 값을 모두 구하시오. [6점]

5- 수준 2

서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $2|\vec{a}|=|\vec{b}|$이고 $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$는 서로 수직이다. 이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하시오. [8점]

5- 수준 3

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$,

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$

일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하시오. [10점]

대단원 평가 문제

01 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

02 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$이고, 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

① $-\frac{3}{10}$　② $-\frac{3}{5}$　③ $-\frac{9}{10}$　④ $-\frac{6}{5}$　⑤ $-\frac{3}{2}$

03 서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

04 두 벡터 $\vec{a}=(4t-2,\ -1)$, $\vec{b}=\left(2,\ 1+\frac{3}{t}\right)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$의 최솟값을 구하시오.

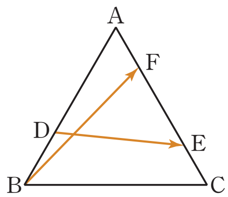
(단, $t>0$)

05 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(8, 6)에 대하여 점 P가 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$을 만족시킨다. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라고 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$　③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$　④ $3\sqrt{10}$　⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

정답과 해설 322쪽

06 오른쪽 그림의 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3 : 1과 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 E, F라고 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값은?



① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

07 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$을 만족시킬 때, $|x\vec{a}+y\vec{b}|=2$가 되도록 하는 두 실수 x, y에 대하여 점 (x, y)가 나타내는 곡선을 C라고 하자. 점 A(1, 1)과 곡선 C 위의 점 P(x, y)에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 할 때, M^2+m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

08 좌표평면 위의 두 점 A(0, -5), B(3, 1)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P(x, y)가 오직 하나만 존재할 때, r의 값은? (단, O는 원점이다.)

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=r$	(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (단, t는 실수)

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② 1 ③ $\sqrt{5}$
④ 5 ⑤ $5\sqrt{5}$

09 좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=5\sqrt{2}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 두 점 A(5, -5), B(a, b)에서의 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. $a>b$인 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

대단원 기출 모의고사

정답률 80 % 이상

[2018년 9월 가형 1번 / 정답률 93 %]

01 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[2015년 9월 B형 6번 / 정답률 90 %]

02 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

[2017년 10월 가형 10번 / 정답률 89 %]

03 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{PF'}}|$의 최댓값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[2016년 7월 가형 9번 / 정답률 88 %]

04 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가

$$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ |2\vec{a}+\vec{b}|=4$$

를 만족시킬 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{3}{16}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{5}{16}$ ⑤ $\dfrac{3}{8}$

[2018년 10월 가형 11번 / 정답률 86 %]

05 평면 위에 길이가 1인 선분 AB와 점 C가 있다. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=4$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 값은? [3점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

[2017년 6월 가형 11번 / 정답률 86 %]

06 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$가 있다. 벡터 $\vec{v}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행할 때, $|\vec{v}|^2$의 최솟값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

정답과 해설 324쪽

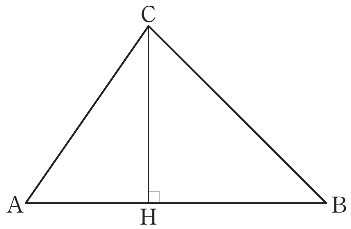
[2016년 6월 가형 1번 / 정답률 86 %]

07 벡터 $\vec{a}=(3,\ -1)$에 대하여 벡터 $5\vec{a}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -10　　② -5　　③ 0
④ 5　　⑤ 10

[2016년 7월 가형 19번 / 정답률 85 %]

08 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$의 값은? [4점]

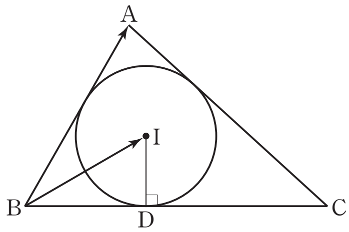


> (가) 점 H가 선분 AB를 $2:3$으로 내분한다.
> (나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$
> (다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36　　② 37　　③ 38
④ 39　　⑤ 40

[2016년 10월 가형 25번 / 정답률 84 %]

09 그림과 같이 $\overline{AB}=15$인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 I라 하고, 점 I에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{BD}=8$일 때, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$의 값을 구하시오. [3점]



[2016년 6월 가형 12번 / 정답률 81 %]

10 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3},\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}$$

이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{10}$　　② $\frac{\sqrt{7}}{10}$　　③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$
④ $\frac{3}{10}$　　⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

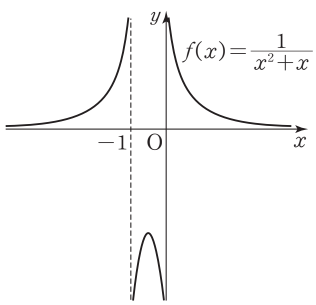
정답과 해설 326쪽

[2016년 6월 가형 23번 / 정답률 83 %]

11 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ k)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. [3점]

[2016년 7월 가형 13번 / 정답률 82 %]

12 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$의 그래프는 그림과 같다.



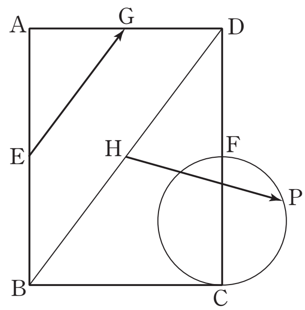
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$을 지나는 직선의 방향벡터 중 크기가 $\sqrt{10}$인 벡터를 $\vec{u}=(a,\ b)$라 하자. $|a-b|$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

정답률 79～60 %

[2016년 10월 가형 18번 / 정답률 78 %]

13 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 직사각형 ABCD에 대하여 네 선분 AB, CD, DA, BD의 중점을 각각 E, F, G, H라 하자. 선분 CF를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$의 최댓값은? [4점]



① 8 ② $2+2\sqrt{10}$ ③ $2+2\sqrt{11}$
④ $2+4\sqrt{3}$ ⑤ $2+2\sqrt{13}$

정답률 60 % 미만

[2017년 6월 가형 29번 / 정답률 14 %]

14 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오. [4점]

Ⅱ 평면벡터

탐구 학습

p. 240~241

1 $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$에서
$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, 즉 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$
이때 두 점 A, C가 서로 다른 점이므로 $t\neq0$이다.
따라서 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재하므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$는 서로 평행하다.
또, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$는 점 A가 시점인 벡터이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

2 $0\leq t\leq1$이므로

$$\overrightarrow{OP}=\frac{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}}{(1-t)+t}$$

즉, 점 P는 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이고, 그 길이는
$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

3 $S=\frac{1}{2}|2\times1-4\times4|=7$

답 7

4 $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 10 & 14 & 2 \\ 6 & 10 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}|(20+20+84)-(4+140+60)|=40$

답 40

활동지 함께 생각하는 탐구

p. 242~243

1 평면벡터

1 (가) $\vec{a}+\vec{v}$ (나) $\vec{a}-\vec{v}$

2 예시 두 벡터의 합: 강물이 흐르는 방향으로 가는 배
두 벡터의 차: 강물이 흐르는 반대 방향으로 가는 배

2 평면벡터의 성분과 내적

1 $\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta=2400\sqrt{3}\times10\times\cos30^\circ$

$=2400\sqrt{3}\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=36000\ (\mathrm{N\cdot m})$

2 ① 수직 방향으로 작용하는 힘 $\vec{F}$와 $\vec{s}$가 이루는 각의 크기는 0°이므로 힘 $\vec{F}$가 한 일 W_1은
$W_1=\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos0^\circ=|\vec{F}||\vec{s}|$
② 수직 방향으로 작용하는 힘 $\vec{F}$와 $\vec{s'}$이 이루는 각의 크기는 θ이므로 힘 $\vec{F}$가 한 일 W_2는
$W_2=\vec{F}\cdot\vec{s'}=|\vec{F}||\vec{s'}|\cos\theta$
이때 $|\vec{s'}|\cos\theta=|\vec{s}|$이므로
$W_2=|\vec{F}||\vec{s}|$
①, ②에서 $W_1=W_2$

형성 평가

p. 244~249

1-1. 벡터의 뜻

1 (1) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$ (2) $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$

2 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

3 점 F는 변 AC의 중점이므로 $\overline{AF}=\overline{FC}$
$\therefore\ \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$
한편, 점 D, E는 각각 선분 AB, BC의 중점이므로
$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{AF}$, $\overline{DE}\ /\!/\ \overline{AF}$
$\therefore\ \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$
따라서 $\overrightarrow{AF}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{DE}$이므로 $\overrightarrow{AF}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{ED}$이다.

4 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$
(2) $|-\vec{b}|=|\vec{b}|=3$
(3) $|\vec{c}|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

1-2. 벡터의 덧셈과 뺄셈

1 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$
(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

2 $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$

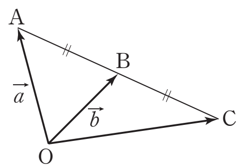
$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})$

$=2\overrightarrow{AB}$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|=2|\overrightarrow{AB}|=\mathbf{2}$

3 $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

4 두 점 A, C가 점 B에 대하여 대칭이므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$



$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\vec{b}+(\vec{b}-\vec{a})$

$=\boldsymbol{-\vec{a}+2\vec{b}}$

1-3. 벡터의 실수배

1 (1) $4(3\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}-3\vec{b})=12\vec{a}-8\vec{b}-\vec{a}+3\vec{b}$

$=(12-1)\vec{a}+(-8+3)\vec{b}$

$=\boldsymbol{11\vec{a}-5\vec{b}}$

(2) $2(\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c})-3(2\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c})$

$=2\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{c}-6\vec{a}+12\vec{b}-6\vec{c}$

$=(2-6)\vec{a}+(-4+12)\vec{b}+(6-6)\vec{c}$

$=\boldsymbol{-4\vec{a}+8\vec{b}}$

2 (1) $\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{x}=5\vec{a}-3\vec{b}$에서

$2\vec{x}=5\vec{a}-3\vec{b}-(\vec{a}+3\vec{b})$

$=5\vec{a}-\vec{a}+(-3\vec{b}-3\vec{b})$

$=4\vec{a}-6\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\boldsymbol{2\vec{a}-3\vec{b}}$

(2) $4\vec{b}-\vec{x}=2(2\vec{x}-10\vec{a}-3\vec{b})$에서

$4\vec{b}-\vec{x}=4\vec{x}-20\vec{a}-6\vec{b}$

$4\vec{x}+\vec{x}=4\vec{b}+20\vec{a}+6\vec{b}$

$5\vec{x}=20\vec{a}+10\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\boldsymbol{4\vec{a}+2\vec{b}}$

3 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}}$

4 $\vec{p}-\vec{q}=(9\vec{a}-3\vec{b})-(2\vec{a}+4\vec{b})$

$=7\vec{a}-7\vec{b}=7(\vec{a}-\vec{b})$

$\vec{q}+\vec{r}=(2\vec{a}+4\vec{b})+(-8\vec{a}+2\vec{b})$

$=-6\vec{a}+6\vec{b}=-6(\vec{a}-\vec{b})$

이때 $\vec{p}-\vec{q}=-\frac{6}{7}(\vec{q}+\vec{r})$이므로 $\vec{p}-\vec{q}$와 $\vec{q}+\vec{r}$는 서로 평행하다.

2-1. 위치벡터와 평면벡터의 성분

1 (1) 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점의 위치벡터는

$\frac{4\vec{b}+3\vec{a}}{4+3}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$

(2) 선분 AB를 $4:3$으로 외분하는 점의 위치벡터는

$\frac{4\vec{b}-3\vec{a}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{b}$

2 (1) 주어진 그림에서 원점 O와 점 $(1,\ 2)$에 대하여

$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}}$

또, 벡터 $\vec{b}$의 시점이 원점이 되도록 평행이동하면 원점 O와 점 $(2,\ -2)$에 대하여

$\boldsymbol{\vec{b}=2\vec{e_1}-2\vec{e_2}}$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 성분으로 나타내면

$\boldsymbol{\vec{a}=(1,\ 2),\ \vec{b}=(2,\ -2)}$

3 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2,\ 1)-(-1,\ 4)=\mathbf{(3,\ -3)}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(4,\ 0)-(2,\ -3)=\mathbf{(2,\ 3)}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2}=\mathbf{\sqrt{13}}$

4 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$(단, k, l은 실수)라고 하면

$(5,\ 4)=k(-1,\ 2)+l(2,\ -2)$

$=(-k+2l,\ 2k-2l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-k+2l=5,\ 2k-2l=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=9,\ l=7$

$\therefore \boldsymbol{\vec{c}=9\vec{a}+7\vec{b}}$

②-2. 평면벡터의 내적

1 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10-2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

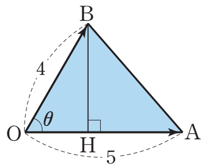
$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{2}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(\sqrt{6})^2+4\times2=14$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{14}}$

2 점 B에서 $\overline{\mathrm{OA}}$에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{BOA}=\theta$라고 할 때,



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$

$=5|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=10$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2$

또, $|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times5\times2\sqrt{3}=\mathbf{5\sqrt{3}}$

[다른 풀이]

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\times|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\times4^2-10^2}=5\sqrt{3}$

3 (1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하므로 $\vec{b}=k\vec{a}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

즉, $(2x,\ 1-x)=k(3,\ -6)$에서

$2x=3k,\ 1-x=-6k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$1+3x=0 \qquad \therefore\ x=\mathbf{-\frac{1}{3}}$

(2) $\vec{a}=(3,\ -6)$, $2\vec{a}-\vec{b}=(6-2x,\ x-13)$에서

$\vec{a}$와 $(2\vec{a}-\vec{b})$가 수직이므로

$\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$, 즉

$(3,\ -6)\cdot(6-2x,\ x-13)=-12x+96=0$

$\therefore\ x=\mathbf{8}$

4 $|\vec{a}|^2=2^2+(-1)^2=5$, $|\vec{b}|^2=1^2+(-2)^2=5$에서

$f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(t\vec{a}-\vec{b})$

$=t^2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$=5t^2-5$

따라서 $t=0$일 때 $f(t)$의 최솟값은 $\mathbf{-5}$이다.

②-3. 직선과 원의 방정식

1 (1) 구하는 직선의 방정식은

$2(x+1)+y-3=0$, 즉 $\mathbf{2x+y-1=0}$

(2) 구하는 직선의 방정식은

$4(x-5)-3(y-7)=0$, 즉 $\mathbf{4x-3y+1=0}$

2 두 벡터 $\vec{u_1}=(3,\ 1)$, $\vec{u_2}=(2,\ -1)$은 각각 주어진 두 직선의 방향벡터이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|3\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\boldsymbol{\theta=45°}$

3 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x,\ y)-(2,\ -4)=(x-2,\ y+4)$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y)-(-2,\ 6)=(x+2,\ y-6)$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$에서

$(x-2,\ y+4)\cdot(x+2,\ y-6)=0$

$x^2+(y-1)^2=29$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{29}$인 원이므로 그 넓이는 $\mathbf{29\pi}$이다.

4 점 H의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)-(1,\ 8)=(a-1,\ b-8)$

$\vec{u}=(-1,\ 2)$는 주어진 직선의 방향벡터이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$에서 $(a-1,\ b-8)\cdot(-1,\ 2)=0$

$-a+1+2b-16=0,\ a-2b=15$ ……①

또, 점 $\mathrm{H}(a,\ b)$는 직선 위의 점이므로

$1-a=\frac{b+2}{2},\ 2a+b=0$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-6$

따라서 점 H의 좌표는 $\mathbf{(3,\ -6)}$이다.

중단원 수준별 문제

1 벡터의 연산 p. 250~252

01 ③	02 ②	03 ⑤	04 ④	05 ②
06 ④	07 ①	08 ④	09 ①	10 ②
11 ②	12 ⑤	13 ③	14 ③	15 ③
16 ④				

01 $\overline{AC}$의 중점을 H라고 하면 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BH}$이다.
$\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $|\overrightarrow{BE}|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

02 $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{AB}$이므로
$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
$\therefore\ m+n=2+1=3$

03 ① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ (○)
② $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ (○)
③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (○)
⑤ $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CA}$ (×)

04 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}$
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(k\vec{a}-5\vec{b})-(3\vec{a}-\vec{b})$
$=(k-3)\vec{a}-4\vec{b}$
이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
$\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{AB}$인 0이 아닌 실수 t가 존재한다.
즉, $(k-3)\vec{a}-4\vec{b}=t(2\vec{a}-4\vec{b})$에서
$k-3=2t,\ -4=-4t$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$t=1,\ k=5$

05 조건 ㈎에서 $\vec{b}=2\vec{a}$
조건 ㈏에서 $\vec{b}=2\vec{a}$를 대입하면
$3\vec{a}-(2\vec{a}+2\vec{c})=2(2\vec{a}+2\vec{c})$
이므로 $6\vec{c}=-3\vec{a}$
$\therefore\ 2|\vec{c}|=|\vec{a}|=4$

06 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BE}$
$\therefore\ |\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{BE}|=2$

07 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FB}$
$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}$
이때 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FD}$이므로
$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}$
즉, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$
$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{AF}|=1$

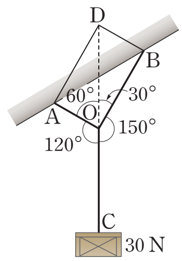
08 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$이므로
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}$
$=-(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BO})$
$=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})$
$=-\overrightarrow{AE}$
이때 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$이므로
$|-\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$
정육각형의 한 변의 길이를 a라고 하면
$|\overrightarrow{AB}|=a,\ |\overrightarrow{BE}|=2a,$
$|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3},\ \angle BAE=90^\circ$
이므로 $\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2$에서
$4a^2=a^2+12,\ 3a^2=12 \qquad \therefore\ a=2$
따라서 원 O는 반지름의 길이가 2인 원이므로 주어진 원의 넓이는 4π이다.

09 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$에서 $2\vec{a}-2\vec{b}=\vec{c}$
$2(2,\ 3)-2(x,\ -1)=(-4,\ y)$이므로
$4-2x=-4,\ y=8$
따라서 $x=4,\ y=8$이므로 $xy=32$

10 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$
$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}$
$\therefore\ |-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|2\overrightarrow{BD}|^2=4|\overrightarrow{BD}|^2$
$=4(2^2+2^2)=32$

11 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(5\vec{a}+k\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$
$=4\vec{a}+(k+2)\vec{b}$
$4\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$이므로
$4\vec{a}+4\vec{b}=4\vec{a}+(k+2)\vec{b}$
따라서 $4=k+2$이므로 $k=2$

12 오른쪽 그림과 같이 직사각형 AOBD를 그리면



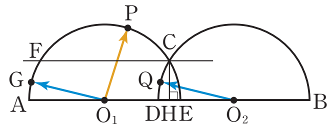
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ $\cdots\cdots$①
이때 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$이므로
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ $\cdots\cdots$②
①, ②에서 $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$
$\therefore\ |\overrightarrow{OD}|=|-\overrightarrow{OC}|=30\ (\mathrm{N})$
그런데 $\angle DOB=30^\circ$이므로

Ⅲ
평면벡터

$$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OD}|\cos 30^\circ$$
$$=30\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}\ (\mathrm{N})$$

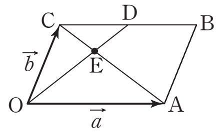
13 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(m\vec{a}+4\vec{b})-(2\vec{a}+5\vec{b})$
$=(m-2)\vec{a}-\vec{b}$
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(7\vec{a}+6\vec{b})-(2\vec{a}+5\vec{b})$
$=5\vec{a}+\vec{b}$
두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$가 서로 평행하려면
$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$인 0이 아닌 실수 k가 존재해야 하므로
$(m-2)\vec{a}-\vec{b}=k(5\vec{a}+\vec{b})$
$m-2=5k$, $-1=k$
$\therefore\ m=-3$

14 점 C를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AC와 만나는 점을 F라고 하면 $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 있다.



$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$이고 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1G$의 크기가 최대일 때이다.
이때 점 G가 점 A와 일치하고 점 P와 점 C가 일치한다.
따라서 $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}|\ge|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|=1$
두 벡터 $\overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{O_1C}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
$|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|=1$에서
$|\overrightarrow{O_1C}|^2+2\overrightarrow{O_1C}\cdot\overrightarrow{O_1A}+|\overrightarrow{O_1A}|^2=1$
$4+2|\overrightarrow{O_1C}||\overrightarrow{O_1A}|\cos\theta+4=1$
$8+2\times2\times2\times\cos\theta=1$
$\therefore\ \cos\theta=-\frac{7}{8}$
점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면
$\overline{O_1H}=\overline{O_1C}\cos(180^\circ-\theta)=-2\cos\theta=\frac{7}{4}$
이고 $\overline{O_1H}=\overline{HO_2}$이므로
$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1H}+\overline{HO_2}=2\times\frac{7}{4}=\frac{7}{2}$

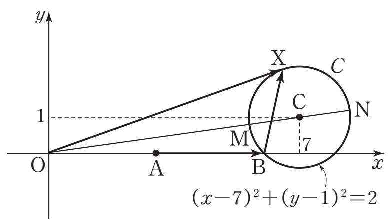
15 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$라고 하면
$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}$
세 점 O, E, D가 한 직선 위에



있으므로
$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OD}=k\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)$
$=\frac{k}{2}\vec{a}+k\vec{c}$ (단, $k\neq0$인 실수) ······①
또, 세 점 A, E, C가 한 직선 위에 있으므로
$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}$ ($t\neq0$인 실수)
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$이므로
$\overrightarrow{OE}-\vec{a}=t(\vec{c}-\vec{a})$
$\therefore\ \overrightarrow{OE}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$ ······②
①, ②에서 $\frac{k}{2}=1-t$, $k=t$이므로
$\frac{k}{2}=1-k$, $\frac{3}{2}k=1$ $\quad\therefore\ k=\frac{2}{3}$
따라서 $\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$이므로
$|\overrightarrow{OE}|:|\overrightarrow{OD}|=2:3$, 즉 $|\overrightarrow{OE}|:|\overrightarrow{DE}|=2:1$
$\therefore\ \frac{\overline{OE}}{\overline{DE}}=2$

[다른 풀이]
$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{CD}$에서 $|\overrightarrow{OA}|:|\overrightarrow{CD}|=2:1$
$\triangle ECD\backsim\triangle EAO$이므로 $|\overrightarrow{DE}|:|\overrightarrow{OE}|=1:2$
$\therefore\ \frac{\overline{OE}}{\overline{DE}}=\frac{|2\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{DE}|}=2$

16 점 B의 좌표를 $(6,\ 0)$이라고 하면 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BX}$인 점 X는 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 원
C: $(x-7)+(y-1)^2=2$ 위의 점이다.
원 C의 중심을 C라고 하면 점 C의 좌표는 $(7,\ 1)$이다.



$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}$
$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{OX}$
이므로 직선 OC가 원 C와 만나는 두 점을 점 O에 가까운 점부터 차례로 M, N이라고 하자.
점 X가 점 N에 있을 때 $|\overrightarrow{OX}|$의 값이 최대이고 최댓값은

$\overline{OC}+\overline{CN}=\sqrt{7^2+1^2}+\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

또, 점 X가 점 M에 있을 때 $|\overrightarrow{OX}|$의 값이 최소이고 최솟값은

$\overline{OC}-\overline{CM}=\sqrt{7^2+1^2}-\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$6\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=48$

2 평면벡터의 성분과 내적 p. 253~255

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 ②	05 ④
06 ②	07 ②	08 ③	09 ④	10 ③
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ④	15 ④
16 ⑤	17 ④	18 ②		

01 $3(2\vec{a}-\vec{b})+2(3\vec{a}-2\vec{c})=12\vec{a}-3\vec{b}-4\vec{c}$이므로

$12\vec{a}-3\vec{b}-4\vec{c}$
$=12(2,\ 3)-3(3,\ -4)-4(-1,\ -3)$
$=(19,\ 60)$
$\therefore\ m+n=19+60=79$

02 $\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(3,\ 5)$에서

$t\vec{a}-\vec{b}=t(1,\ -1)-(3,\ 5)=(t-3,\ -t-5)$
$|t\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(t-3)^2+(-t-5)^2}$
$=\sqrt{2t^2+4t+34}$
$=\sqrt{2(t+1)^2+32}$

따라서 $|t\vec{a}-\vec{b}|$의 최솟값은 $\sqrt{32}$이므로

$m^2=32$

03 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}$$

점 Q는 선분 BC를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\vec{b}-\vec{a}}{2-1}=2\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}\right)+(2\vec{b}-\vec{a})=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{8}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{8}{3}$이므로 $m+n=2$

04 $\overrightarrow{OA}=(2,\ -x)$, $\overrightarrow{OB}=(x,\ 3)$, $\overrightarrow{OC}=(-1,\ 2x)$에서

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(x,\ 3)-(2,\ -x)=(x-2,\ 3+x)$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$
$=(-1,\ 2x)-(2,\ -x)=(-3,\ 3x)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(x-2,\ 3+x)\cdot(-3,\ 3x)$
$=-3x+6+9x+3x^2$
$=3(x^2+2x+1)+3$
$=3(x+1)^2+3$

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값은 $x=-1$일 때 최소이다.

05 $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$에서

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}$$

이므로 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이다.

즉, $|\overrightarrow{BP}| : |\overrightarrow{PC}|=2 : 1$이므로

$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ $\quad\therefore\ k=\frac{2}{3}$

06 두 벡터 $\vec{u}=(1,\ -1)$, $\vec{v}=(-2,\ 1)$은 각각 주어진 두 직선의 방향벡터이므로

$$\cos\theta=\frac{|-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

07 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로 $\vec{a}=k\vec{b}$인 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=k|\vec{b}|^2=4$ ······①
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$
$=(k^2-1)|\vec{b}|^2=-6$ ······②

①, ②에서 $\frac{4}{k}=-\frac{6}{k^2-1}$

$2k^2+3k-2=0$, $(k+2)(2k-1)=0$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

①, ②에서 $0<k<1$이므로 $k=\frac{1}{2}$

따라서 $|\vec{b}|^2=\frac{4}{k}=4\times 2=8$이므로

$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=3\times 4+8=20$

08 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 $|\vec{p}-\vec{a}|=4$에서

$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=4$,

$(x-2)^2+(y-5)^2=16$

점 P는 중심의 좌표가 $(2,\ 5)$이고, 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이다.

직선 $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+5}{3}$를 변형하면 $3x+4y+14=0$

따라서 원 $(x-2)^2+(y-5)^2=16$ 위의 점 P와 직선 $3x+4y+14=0$ 사이의 최단 거리는 원의 중심인 점 $(2,\ 5)$과 직선 $3x+4y+14=0$ 사이의 거리에서 반지름의 길이 4를 뺀 것과 같다.

$\therefore \dfrac{|6+20+14|}{\sqrt{3^2+4^2}}-4=8-4=4$

09 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$에서 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}}{5}\times 5$

이때 $\overline{BC}$를 $3:2$로 내분하는 점을 R라고 하면

$\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{PR}$

즉, 세 점 A, P, R는 한 직선 위의 점이므로 두 점 D, R는 일치하고, 점 P는 $\overline{AD}$를 $5:1$로 내분하는 점이다.

ㄱ. 점 D는 $\overline{BC}$를 $3:2$로 내분하는 점이다. (거짓)

ㄴ. 점 P는 $\overline{AD}$를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{AP}:\overline{PD}=5:1$ (참)

ㄷ. $\triangle APC=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{6}\times\triangle ABC=\dfrac{1}{3}\times 60=20$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}$이므로

$\vec{a}+\vec{b}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$

$=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

이때 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|^2$

$=|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

$=|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta+|\overrightarrow{AB}|^2$

$=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times 1\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+1^2=8$

11 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}$

$=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\left(\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{4}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{15}\vec{c}$

한편, $\overrightarrow{PG}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

$=m(\vec{b}-\vec{a})+n(\vec{c}-\vec{a})$

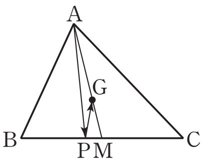
$=(-m-n)\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$

이므로 $-m-n=\dfrac{1}{3}$

$\therefore m+n=-\dfrac{1}{3}$

[다른 풀이]

변 BC의 중점을 M이라고 하면



$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

점 P는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{5}$

$\therefore \overrightarrow{PG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AP}$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\dfrac{1}{5}(2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB})$

$=-\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{15}\overrightarrow{AC}$

따라서 $m=-\dfrac{4}{15}$, $n=-\dfrac{1}{15}$이므로

$m+n=-\dfrac{1}{3}$

12 $\angle BAC=\theta$라고 하면 $\triangle ABC$의 넓이가 9이므로

$\dfrac{1}{2}\times 5\times 6\times\sin\theta=9 \qquad \therefore \sin\theta=\dfrac{3}{5}$

이때 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$=5\times 6\times\dfrac{4}{5}=24$

13 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$라고 하자.

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$이므로 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=14$의 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2=196$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(2r^2-196)=r^2-98$$

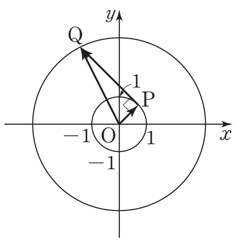
또, $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|$이므로 $|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|=10$의 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=100$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}==\frac{1}{2}(2r^2-100)=r^2-50$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=(r^2-50)-(r^2-98)=48\end{aligned}$$

14 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$에서 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{PQ}$



오른쪽 그림에서 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여

$|\overrightarrow{OP}|=1$, $|\overrightarrow{PQ}|=3$이고 $\angle OPQ=90^\circ$이므로

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

즉, 점 Q는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원을 나타낸다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}\pi$$

15 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})$ (단, $k\neq0$)

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DE}$에서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=0$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\\&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\{k\vec{a}+(k-1)\vec{b}\}\\&=k|\vec{a}|^2+(2k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(k-1)|\vec{b}|^2\\&=0\end{aligned}$$

한편, $|\vec{a}|^2=16$, $|\vec{b}|^2=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times2\times\cos60^\circ=4$이므로

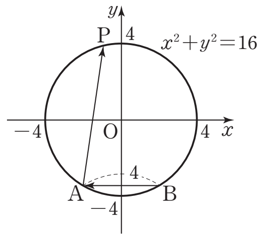
$$16k+4(2k-1)+4(k-1)=0$$

$$\therefore\ k=\frac{2}{7}$$

따라서 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$이므로

$$7(p+q)=7\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)=4$$

16 오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면



A$(-2,\ -2\sqrt{3})$,

B$(2,\ -2\sqrt{3})$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(-4,\ 0)$$

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,\ y+2\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}&=(-4,\ 0)\cdot(x+2,\ y+2\sqrt{3})\\&=-4x-8\end{aligned}$$

이때 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로 $-4\le x\le4$이고, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}$의 값은 $x=-4$일 때 최대, $x=4$일 때 최소이므로

C$(-4,\ 0)$, D$(4,\ 0)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\overline{AC}\times\overline{AD}\\&=\sqrt{(-4+2)^2+(2\sqrt{3})^2}\times\sqrt{(4+2)^2+(2\sqrt{3})^2}\\&=4\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\end{aligned}$$

17 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(2,\ 1)-(x,\ y)\\&=(2-x,\ 1-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB}&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(-3,\ 0)-(x,\ y)\\&=(-3-x,\ -y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC}&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(-2,\ -4)-(x,\ y)\\&=(-2-x,\ -4-y)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-3-3x,\ -3-3y)$$

이때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$이므로

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|\\&=\sqrt{(-3-3x)^2+(-3-3y)^2}=6\end{aligned}$$

$$(-3-3x)^2+(-3-3y)^2=36$$

$$\therefore\ (x+1)^2+(y+1)^2=4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로, 그 넓이는 4π이다.

[다른 풀이]

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심을 G라고 하면

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$

이때 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표는 $(-1,\ -1)$이고, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3|\overrightarrow{PG}|=6$에서 $|\overrightarrow{PG}|=2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

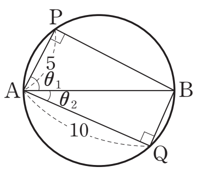
$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=(-1-x,\ -1-y)$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=\sqrt{(-1-x)^2+(-1-y)^2}=2$

$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 4π이다.

18 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로



$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}=90^\circ$

$\triangle\mathrm{PAB}$에서 $\angle\mathrm{BAP}=\theta_1$이라고 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta_1=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta_1=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

마찬가지로 $\triangle\mathrm{QAB}$에서 $\angle\mathrm{BAQ}=\theta_2$라고 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta_2=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta_2=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$

$=5^2+10^2=125$

중단원 서술형 문제

1 벡터의 연산 p. 256~257

1 (가) $2\vec{b}$　(나) $-2\vec{a}$　(다) $-3\vec{a}-2\vec{b}$

2 (가) $p-2q$　(나) -3　(다) 4　(라) $-\dfrac{2}{5}$

3 (가) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$　(나) $-\vec{c}$　(다) $-3\vec{c}$

4 (가) -2　(나) $m-3$　(다) -1　(라) 3

5 [단계 1]

세 점 A, P, N이 일직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ (단, $k\neq0$)인 실수 k가 존재한다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\&=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=(1-k)\vec{a}+\frac{k}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

[단계 2]

세 점 B, P, M이 일직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ (단, $t\neq0$)인 실수 t가 존재한다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BM}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(1-t)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{a}\end{aligned}$$

[단계 3]

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-k)\vec{a}+\dfrac{k}{4}\vec{b}=\dfrac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$1-k=\dfrac{t}{2}$, $\dfrac{k}{4}=1-t$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=\dfrac{4}{7}$, $t=\dfrac{6}{7}$

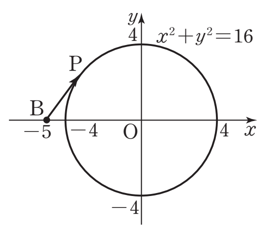
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}$이므로 $m=\dfrac{3}{7}$, $n=\dfrac{1}{7}$

6 [단계 1]

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$

[단계 2]

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$는 점 $\mathrm{B}(-5,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=16$ 위의 한 점 P까지의 거리를 의미한다.



[단계 3]

이 값은 점 P의 좌표가 $(-4,\ 0)$일 때 최솟값 1을 갖고, $(4,\ 0)$일 때 최댓값 9를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 10이다.

7 수준 1

㉮ $\dfrac{1}{2}(\vec{a}-7\vec{b})=3\left(\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)$에서

$\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{7}{2}\vec{b}=3\vec{b}-\dfrac{3}{2}\vec{a}$, $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{a}=3\vec{b}+\dfrac{7}{2}\vec{b}$

즉, $2\vec{a}=\dfrac{13}{2}\vec{b}$에서 $\vec{a}=\dfrac{13}{4}\vec{b}$이다.

㉯ 이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$(단, $k\neq0$)인 실수 k가 존재하면 $\vec{a}\parallel\vec{b}$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서

로 평행하다.

채점 기준	배점
㉮ 주어진 식을 간단히 나타내기	4점
㉯ 두 벡터가 평행할 때의 조건을 이용하여 평행함을 보이기	2점

수준 2

㉮ $\overrightarrow{PQ} /\!/ \overrightarrow{RS}$이므로 $\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{PQ}$(단, $k\neq0$)인 실수 k가 존재한다.

㉯ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-3\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$
$=-5\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=\{(m+2)\vec{a}+\vec{b}\}-(-5\vec{a}+m\vec{b})$
$=(m+7)\vec{a}+(1-m)\vec{b}$
$(m+7)\vec{a}+(1-m)\vec{b}=-5k\vec{a}+k\vec{b}$

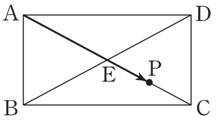
㉰ 이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$m+7=-5k$, $1-m=k$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$k=-2$, $m=3$

채점 기준	배점
㉮ $\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{PQ}$ (k는 0이 아닌 실수)임을 알기	2점
㉯ $\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{PQ}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대한 식으로 정리하기	3점
㉰ m의 값 구하기	3점

수준 3

㉮ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$
이므로 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

㉯ 이때 $\overline{BD}$의 중점을 E라고 하면



$\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})=\overrightarrow{PE}$
이므로 $\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{PC}$에서 점 P는 $\overline{EC}$의 중점이다.

㉰ 즉, $\overline{AP}=\frac{3}{4}\overline{AC}$이므로
$\triangle ADC : \triangle ADP=4:3$
$\triangle ADC=\frac{4}{3}\times3=4$
따라서 직사각형 ABCD의 넓이는
$4\times2=8$

채점 기준	배점
㉮ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$를 간단히 나타내기	2점
㉯ 점 P가 $\overline{EC}$의 중점임을 알기	3점
㉰ 직사각형 ABCD의 넓이 구하기	5점

2 평면벡터의 성분과 내적 p. 258~259

1 (가) $2k-1$　(나) $\frac{1}{2}$　(다) 16　(라) 24

2 (가) $(2,\ -3)$　(나) $(3,\ -3)$　(다) $(0,\ 3)$

3 [단계 1]
$\overline{BC}$를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라고 하면
$\vec{p}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$
[단계 2]
$\overline{AP}$를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 위치벡터를 $\vec{q}$라고 하면
$\vec{q}=\frac{3\vec{p}-2\vec{a}}{3-2}=3\left(\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)-2\vec{a}$
$=-2\vec{a}+\frac{9}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$
[단계 3]
$\triangle BCQ$의 무게중심을 G의 위치벡터를 $\vec{g}$라고 하면
$\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{q}}{3}$
$=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\left(-2\vec{a}+\frac{9}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$
$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{13}{12}\vec{b}+\frac{7}{12}\vec{c}$

4 [단계 1]
$\frac{x-3}{2}=1-y=t$ (t는 실수)로 놓으면
$x=2t+3$, $y=1-t$
점 H는 주어진 직선 위의 점이므로
$H(2t+3,\ 1-t)$, 즉 $\overrightarrow{OH}=(2t+3,\ 1-t)$
이때
$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=(2t+3,\ 1-t)-(-2,\ 1)$
$=(2t+5,\ -t)$
주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1)$이고
$\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$이므로
$(2t+5,\ -t)\cdot(2,\ -1)=0$에서
$4t+10+t=0$, $t=-2$
따라서 수선의 발 H의 좌표는 $(-1,\ 3)$이다.
[단계 2]
$\overline{CH}$는 정삼각형 ABC의 높이이고, $\overrightarrow{CH}=(1,\ 2)$이므로

$\overline{CH}=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

이때 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라고 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{5}$에서 $a=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

[단계 3]

정삼각형 ABC에서 $\angle ABC=60°$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 $60°$이다.

한편, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\frac{2\sqrt{15}}{3}$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 60°=\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$$

5 수준 1

㉮ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$에서

$5^2=2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$ $\quad\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=6$

㉯ 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $k\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=0$

$k|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2\vec{b}\cdot\vec{a}+k|\vec{b}|^2=0$

$6k^2+13k+6=0$, $(2k+3)(3k+2)=0$

㉰ $\therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=-\frac{2}{3}$

채점 기준	배점
㉮ $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값 구하기	2점
㉯ k에 관한 이차방정식 구하기	2점
㉰ k의 값 구하기	2점

수준 2

㉮ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$2\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}+2\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=2|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=0$$

위 식에 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$를 대입하면

$2|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{a}|^2=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2|\vec{a}|^2$

㉯ 이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로 $90°\le\theta\le180°$

따라서

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-\theta)=-2|\vec{a}|^2\cos(180°-\theta)=-2|\vec{a}|^2$$

양변을 $|\vec{a}|^2$으로 나누면

$\cos(180°-\theta)=1$

㉰ $\therefore \theta=180°$

채점 기준	배점
㉮ $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값 구하기	3점
㉯ $\cos(180°-\theta)$의 값 구하기	3점
㉰ θ의 크기 구하기	2점

수준 3

㉮ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 각각 제곱하면

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$ ……①

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ ……②

①−②를 하면 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=4$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 $0°\le\theta\le90°$

㉯ ①+②를 하면 $2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=6$에서

$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=3$ ……③

한편, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$이므로

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=1$ ……④

③, ④를 연립하여 풀면

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$

㉰ 이때

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \theta=45°$

채점 기준	배점
㉮ $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값 구하기	4점
㉯ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$의 값 각각 구하기	4점
㉰ θ의 크기 구하기	2점

대단원 평가 문제

p. 260~261

01 ②	02 ②	03 ②	04 24	05 ③
06 ③	07 12	08 ③	09 8	

01 $\vec{a}+2\vec{b}=(2, 4)+2(1, 3)=(4, 10)$

따라서 모든 성분의 합은 14이다.

02 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(6\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

$6-5\vec{a}\cdot\vec{b}-9=0$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{5}$

03 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2-t(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$

$2^2-2t=0 \qquad \therefore\ t=2$

04 $\vec{a}+\vec{b}=\left(4t,\ \dfrac{3}{t}\right)$에서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=16t^2+\dfrac{9}{t^2}$

이때 $t^2>0$이므로 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$16t^2+\dfrac{9}{t^2}\geq 2\sqrt{16t^2\times\dfrac{9}{t^2}}=24$

$\left(\text{단, 등호는 } 16t^2=\dfrac{9}{t^2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$의 최솟값은 24이다.

05 $\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$이므로 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$에서

$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10} \qquad \therefore\ |\overrightarrow{PM}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

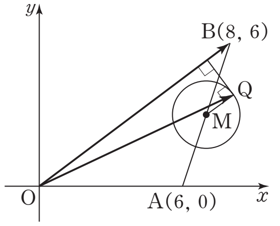
따라서 점 P는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다.

이 원을 C라고 하면

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{MP}$

한편, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되려면 직선 OB에 수직인 직선이 원 C와 접하는 점 중 선분 OP의 길이가 가장 클 때의 점이다.



이때 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$\overrightarrow{MQ}\ /\!/\ \overrightarrow{OB}$

따라서 $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기와 같다.

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$

에서

$(6,\ 0)\cdot(8,\ 6)=\sqrt{6^2+0^2}\sqrt{8^2+6^2}\cos\theta$

$48=6\times10\times\cos\theta \qquad \therefore\ \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{MQ}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta$

$=6\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{4}{5}$

$=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

06 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=3\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$이므로

$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2$

$=\left|\left(\dfrac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right)\right|^2$

$=\left|\vec{b}-\dfrac{5}{3}\vec{a}\right|^2$

$=|\vec{b}|^2-\dfrac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{25}{9}|\vec{a}|^2$

$=3^2-\dfrac{10}{3}\times\dfrac{9}{2}+\dfrac{25}{9}\times3^2=9-15+25=19$

07 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$|x\vec{a}+y\vec{b}|=2$에서

$|x\vec{a}+y\vec{b}|^2=x^2|\vec{a}|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2|\vec{b}|^2$

$=2x^2+y^2=4$

따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 곡선

$C:\ 2x^2+y^2-4=0$ ……①

위의 점이다.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,\ 1)\cdot(x,\ y)=x+y$에서
$x+y=k$ (k는 실수)라고 하면 점 $P(x,\ y)$는 직선 $x+y=k$, 즉 $y=-x+k$ 위의 점이다.
$y=-x+k$를 ①에 대입하여 정리하면

$3x^2-2kx+k^2-4=0$ ……②

점 $P(x,\ y)$가 존재하려면 x에 대한 이차방정식 ②의 판별식이 $D\geq0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-3(k^2-4)=-2k^2+12\geq0$$

$$k^2-6\leq0,\ -\sqrt{6}\leq k\leq\sqrt{6}$$

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=k$의 최댓값은 $\sqrt{6}$, 최솟값은 $-\sqrt{6}$이므로

$$M^2+m^2=(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{6})^2=12$$

08 조건 ㈎에서 $|\overrightarrow{OP}|^2=x^2+y^2=r^2$이므로 점 $P(x,\ y)$는 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이다.
조건 ㈏에서 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있으므로 점 P는 직선 AB 위의 점이다.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,\ 1)-(0,\ -5)=(3,\ 6)$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{3}=\frac{y+5}{6},\ \text{즉 } 2x-y-5=0$$

이때 조건을 만족시키는 점 $P(x,\ y)$가 오직 하나만 존재하므로 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 AB는 접한다.
따라서 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y-5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$$r=\frac{|2\times0-0-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

09 점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라고 하면 $|\overrightarrow{OP}|=5\sqrt{2}$에서
$|\overrightarrow{OP}|^2=x^2+y^2=50$이므로 점 $P(x,\ y)$는 원 $x^2+y^2=50$ 위의 점이다.
또, 두 점 $A(5,\ -5)$, $B(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=50$ 위의 점이므로

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=5\sqrt{2}$$

$a^2+b^2=50$ ……①

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(5,\ -5)\cdot(a,\ b)=5a-5b$$

원 위의 점 $A(5,\ -5)$에서의 접선과 $\overrightarrow{OA}=(5,\ -5)$는 서로 수직이고, 원 위의 점 $B(a,\ b)$에서의 접선과 $\overrightarrow{OB}=(a,\ b)$는 서로 수직이다.
따라서 원 위의 두 점 $A(5,\ -5)$, $B(a,\ b)$에서의 두 접선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{3}{5}$$

에서

$$\frac{|5a-5b|}{5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}=\frac{3}{5},\ |a-b|=6$$

그런데 $a>b$이므로 $a-b=6$
$b=a-6$을 ①에 대입하여 정리하면

$$a^2-6a-7=0,\ (a-7)(a+1)=0$$

이때 $a>0$이므로 $a=7$

$$\therefore\ a+b=7+1=8$$

대단원 기출 모의고사

p. 262~264

01 ⑤	02 ⑤	03 ②	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 ⑤	08 ①	09 120	10 ⑤
11 8	12 ②	13 ②	14 7	

01 $2\vec{a}-\vec{b}=2(4,\ 1)-(3,\ -2)=(5,\ 4)$
따라서 모든 성분의 합은

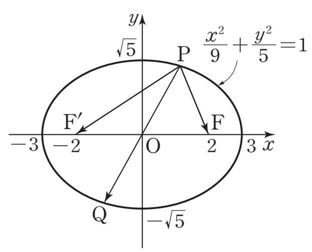
$5+4=9$

02 $\overrightarrow{OA}=(4,\ 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\\&=(2,\ 0)-(0,\ 2)=(2,\ -2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}&=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)\\&=4\times2+2\times(-2)\\&=4\end{aligned}$$

03 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에서 장축의 길이는 $2\times3=6$이다.



$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=\overrightarrow{PQ}$라고 할 때, 두 점 P, Q는 타원 위의 점이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같다.
따라서 $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|$의 최댓값은
$2\times3=6$

04 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$
$=4\times1^2+4\times1\times3\cos\theta+3^2$
$=13+12\cos\theta$
$4^2=13+12\cos\theta$이므로 $12\cos\theta=3$
$\therefore \cos\theta=\frac{1}{4}$

05 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$이다.
선분 BC의 중점을 M이라고 하면
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AM}|=4$이므로
$|\overrightarrow{AM}|=2$
따라서 직각삼각형 ABM에서
$\overline{BM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
이므로
$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{BM}|=2\overline{BM}=2\sqrt{3}$

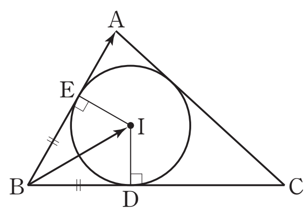
[다른 풀이]
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$에서
$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2=0$
이고 $\overline{AB}=1$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$
$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2$
$=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=4^2-4=12$
$\therefore |\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$

06 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행하므로
$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)
$\vec{v}=k\vec{a}-\vec{b}=k(3,\ 1)-(4,\ -2)=(3k-4,\ k+2)$
$|\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$
$=10k^2-20k+20$
$=10(k-1)^2+10\geq10$
따라서 $|\vec{v}|^2$의 최솟값은 10이다.

07 $5\vec{a}=(15,\ -5)$이므로 모든 성분의 합은
$15+(-5)=10$

08 조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AB}|=5k$ $(k>0)$라고 하면
$|\overrightarrow{AH}|=2k$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle CAH)$
$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AC}|}$
$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|$
$=5k\times2k=10k^2$
조건 (나)에서 $10k^2=40$이므로 $k=2$ ($\because k>0$)
$\therefore |\overrightarrow{AB}|=5k=10$
조건 (다)에서 △ABC의 넓이가 30이므로
$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CH}|=30$
에서
$5|\overrightarrow{CH}|=30$ $\quad\therefore |\overrightarrow{CH}|=6$
$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CH}|\cos(\angle ACH)$
$=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CH}|\frac{|\overrightarrow{CH}|}{|\overrightarrow{CA}|}$
$=|\overrightarrow{CH}|^2=36$

09 점 I에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라고 하면
△IBE와 △IBD가 합동이므로
$\overline{BE}=\overline{BD}=8$



$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\cos(\angle EBI)$
$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\frac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BI}|}$
$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|$
$=15\times8=120$

10 벡터 $\overrightarrow{u_1}=(4,\ 3)$은 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}$의 방향벡터이고,
벡터 $\overrightarrow{u_2}=(-1,\ 3)$은 직선 $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}$의 방향벡터이다.
$\therefore \cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|4\times(-1)+3\times3|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$
$=\frac{5}{5\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

11 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,\ 1)\cdot(-2,\ k)=-8+k=0$

$\therefore\ k=8$

12 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$이므로 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\ -4\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=\left(-\dfrac{1}{2},\ -4\right)-\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}(1,\ 3)$

$\vec{u}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 평행하므로

$\vec{u}=k(1,\ 3)$ (단, k는 0이 아닌 실수)

이때 $|\vec{u}|=\sqrt{10}$에서 $10k^2=10,\ k^2=1$

즉, $k=\pm1$이므로

$a=1,\ b=3$ 또는 $a=-1,\ b=-3$

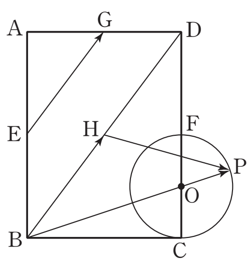
$\therefore\ |a-b|=2$

13 두 점 E, H는 각각 선분 AB, BD의 중점이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최댓값과 같다.

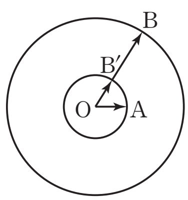
즉, 원 밖의 한 점 B와 원 위의 점 P 사이의 거리의 최댓값이다.



따라서 원의 중심을 O라고 하면 원의 반지름의 길이는 2이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최댓값은

$\overline{\mathrm{BO}}+2=\sqrt{6^2+2^2}+2=2\sqrt{10}+2$

14 오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 선분 OB가 만나는 점을 B′이라 하고,



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$

라고 하면 조건 (가)에서

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

이므로

$(3\vec{b})\cdot\vec{p}=3\vec{a}\cdot\vec{p}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}$ ……①

조건 (나)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$이므로

$|\vec{a}-\vec{p}|^2+|3\vec{b}-\vec{p}|^2=20$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$

$1-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$

$2|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}-6\vec{b}\cdot\vec{p}=10$

$\therefore\ |\vec{p}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{p}+5\ (\because\ ①)$ ……②

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(3\vec{b}-\vec{p})$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{p}$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2\ (\because\ ①)$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\vec{a}\cdot\vec{p}+5\ (\because\ ②)$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}+5$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되는 경우는 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 180°일 때이므로 최솟값은

$3\{-1\times1\times\cos(180^\circ-180^\circ)\}+5=-3+5=2$

$\therefore\ m=2$

한편, ①에서 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$, 두 벡터 $\vec{b},\ \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta'(0^\circ\le\theta'\le180^\circ)$이라고 하면

$|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta',\ \cos\theta=\cos\theta'$

$\therefore\ \theta=\theta'$

두 벡터 $\vec{a},\ \vec{p}$가 이루는 각의 크기가 90°일 때 $\vec{a}\cdot\vec{p}$의 값이 최소이므로 ②에서

$|\vec{p}|^2=4\times1\times|\vec{p}|\times\cos90^\circ+5=5$

따라서 $|\vec{p}|=\sqrt{5}$이므로 $k=\sqrt{5}$

$\therefore\ m+k^2=2+(\sqrt{5})^2=7$