◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-03-10
2) 제작자 : 교육지대㈜
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[수학적 귀납법]

• 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

기본문제

[예제]

1. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 빈 칸에 들어갈 것으로 가장 적절한 것은?

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$

따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$n=k+1$일 때

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(가)}$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\boxed{(가)}$

$=\dfrac{k+1}{6}\{\boxed{(나)}\}$

$=\dfrac{(\boxed{(다)})(\boxed{(라)})(\boxed{(마)})}{6}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

위 과정에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

① (가) $\dfrac{k(k+1)(2k+3)}{6}$
② (나) $2k^2+8k+6$
③ (다) k
④ (라) $k+2$
⑤ (마) $2k+1$

[문제]

2. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 것을 순서대로 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 했을 때, $f(3)g(2)h(1)$의 값은?

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$

$n=k+1$일 때

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{\boxed{(가)}}$

$=\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{\boxed{(가)}}$

$=\dfrac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\dfrac{1}{\boxed{(가)}}$

$=\dfrac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{\boxed{(나)}^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\boxed{(다)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

① 34
② 37
③ 40
④ 43
⑤ 46

Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331

[예제]

3. **다음은 $h>0$일 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $(1+h)^n>1+nh$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 빈 칸에 들어갈 것으로 적절한 것을 모두 고르시오.**

(ⅰ) $n=2$일 때
(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=\boxed{(가)}$
이때 $h^2>0$이므로, $n=2$일 때 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k\,(k\geq 2)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k>1+kh$
$n=k+1$일 때
$(1+h)^{k+1}=(1+h)(1+h)^k>(1+h)\boxed{(나)}$
$=1+(k+1)h+kh^2>\boxed{(다)}$
따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.

① (가) $1+2n$
② (가) $1+2h$
③ (나) $1+nh$
④ (나) $1+kh$
⑤ (다) $1+kh^2$

[문제]

4. **$n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 과정이다. (가), (나)에 들어갈 식을 각각 a, $f(k)$라 했을 때, $f(a)$의 값은?**

(ⅰ) $n=2$일 때
(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
(우변)$=\boxed{(가)}$
이때 $\frac{3}{2}>\boxed{(가)}$이므로, $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k\,(k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$
$n=k+1$일 때
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$
$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$
이때 $k\geq 2$이므로
$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$
$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$
$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$에서 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$
즉, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\boxed{(나)}$
따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.

① $\frac{15}{7}$
② $\frac{5}{7}$
③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{7}{5}$
⑤ $\frac{1}{3}$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[중단원 마무리하기]

5. **다음은 모든 자연수 n에 대하여**
$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$ **…㉠이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $x+y+f(1)+g(1)$을 구한 것은?**

(ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=\boxed{x}$, (우변)$=\boxed{y}$
따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=\boxed{f(k)}$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$
$n=k+1$일 때
$2+4+6+\cdots+2k+(2k+2)$
$=\boxed{g(k)}+2(k+1)$
$=(k+1)(k+2)$
따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

[중단원 마무리하기]

6. **다음은 모든 자연수 n에 대하여**
$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$**이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 것으로 옳은 것을 모두 고르시오.**

(ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=\frac{1}{1\times3}$, (우변)$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$
따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
$n=k+1$일 때
$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots$
$+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{\boxed{(가)}}$
$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{\boxed{(가)}}$
$=\frac{1}{2k+1}\times\left\{\frac{\boxed{(나)}}{2k+3}\right\}=\frac{\boxed{(다)}}{2k+3}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

① (가) $(2k+1)(2k+2)$ ② (가) $(2k+1)(2k+3)$
③ (나) $(k+1)(k+2)$ ④ (다) $2k+1$
⑤ (다) $k+1$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co,.Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[중단원 마무리하기]

7. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{(n+3)!}{8}>2^n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $m+f(1)$을 구한 것은?**

> (ⅰ) $n=1$일 때
> (좌변)$=\frac{4!}{8}=3$, (우변)$=\boxed{m}$
> 따라서 $n=1$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{(k+3)!}{8}>2^k$
> $n=k+1$일 때
> $\frac{(k+4)!}{8}=(\boxed{f(k)})\times\frac{(k+3)!}{8}$
> $>(\boxed{f(k)})\times 2^k=k\times 2^k+2^{k+2}>2^{k+1}$
> 따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[중단원 마무리하기]

8. **다음 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정으로 옳지 <u>않은</u> 말을 한 사람은?**

> 모든 자연수 n에 대하여 5^n-1은 4의 배수이다.

① 수연: $n=1$일 때 $5-1=4$이니까 4의 배수가 맞아.
② 주영: $n=k$일 때 5^k-1이 4의 배수라고 가정해보자.
③ 수민: 그럼 4의 배수이니까 $5^k-1=4m-1$(m은 자연수)라 할 수 있어. $5^{k+1}-1=5\times5^k-1$에 대입해보자.
④ 승연: $5^{k+1}-1=5(4m+1)-1=4(5m+1)$이니까 4의 배수라고 할 수 있어.
⑤ 주원: 그럼 $n=k+1$일 때 성립하니까 주어진 명제는 모든 자연수 n에 대하여 성립한다고 할 수 있겠네.

[대단원 평가하기]

9. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{2n}-1$이 3의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 빈 칸에 들어갈 것으로 알맞은 것을 <u>모두</u> 고른 것은?**

> (ⅰ) $n=1$일 때 $2^2-1=3$은 3의 배수이다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 $2^{2k}-1$이 3의 배수라 가정하면
> $2^{2k}-1=3m$ (m은 자연수)이므로 $2^{2k}=3m+1$
> $n=k+1$일 때
> $2^{2(k+1)}-1=\boxed{(가)}\times2^{2k}-1$
> $=\boxed{(나)}(4m+1)$이므로
> $n=k+1$일 때도 $2^{\boxed{(다)}}-1$은 3의 배수이다.
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{2k}-1$은 3의 배수이다.

① (가) 3 ② (가) 4
③ (나) 3 ④ (나) 4
⑤ (다) k

[대단원 평가하기]

10. **다음은 a, b가 양수일 때, 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $(a+b)^n>a^n+b^n\cdots$㉠이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 올바르게 나열한 것은?**

> (ⅰ) $n=2$일 때
> (좌변)$=(a+b)^2$, (우변)$=a^2+b^2$
> 이때 a, b가 양수이므로
> $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab\boxed{(가)}0$
> 따라서 $n=2$일 때 ㉠이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k\ (k\geq2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
> $(a+b)^k>a^k+b^k$
> $n=k+1$일 때
> $(a+b)^k\boxed{(나)}>(a^k+b^k)\boxed{(나)}$
> 이때 a, b가 양수이므로
> $(a^k+b^k)(a+b)-(a^{k+1}+b^{k+1})=ab^k+ba^k>0$
> 즉, $(a+b)^{k+1}>\boxed{(다)}$
> 따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 a, b가 양수일 때, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

① (가) $>$, (나) $(a+b)$, (다) a^k+b^k
② (가) $>$, (나) (a^k+b^k), (다) $a^{k+1}+b^{k+1}$
③ (가) $>$, (나) $(a+b)$, (다) $a^{k+1}+b^{k+1}$
④ (가) $<$, (나) (a^k+b^k), (다) a^k+b^k
⑤ (가) $<$, (나) $(a+b)$, (다) $a^{k+1}+b^{k+1}$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[대단원 평가하기]

11. **다음은 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n-1$으로 정의된 수열의 일반항 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 들어갈 것을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(2)+g(2)$의 값은?**

(ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=a_1=\frac{1}{2}$, (우변)$=2\left(\frac{1}{3}\right)^0-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ 따라서 $n=1$일 때 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다. (ⅱ) $n=k$일 때 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다고 가정하면 $a_k=2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{3}{2}$ $n=k+1$일 때 $a_{k+1}=\frac{1}{3}\{\boxed{(가)}\}-1$ $=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{3}{2}$ $=\boxed{(나)}$ 따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다. (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다.

① $-\frac{25}{9}$ ② $-\frac{23}{9}$
③ $-\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{19}{9}$
⑤ $-\frac{17}{9}$

유사문제

12. **$n\ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $3^n>3n+7\cdots$㉠이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=27$, (우변)$=16$ 따라서 $n=3$일 때 ㉠이 성립한다. (ⅱ) $n=k$ $(k\ge 3)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면 $3^k>3k+7\cdots\cdots$ ㉡ ㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$을 곱하면 $3^{k+1}>9k+21$ 이 때, $9k+21-\boxed{(나)}=6k+11>0$ $9k+21>\boxed{(나)}$ 즉, $3^{k+1}>3(\boxed{(다)})+7$이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다. (ⅰ), (ⅱ)에서 ㉠은 $n\ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	3	$3k-4$	k
②	3	$3k+10$	k
③	3	$3k+10$	$k+1$
④	3^k	$3k-4$	$k+1$
⑤	3^k	$3k+10$	k

13. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$이 8로 나누어떨어짐을 증명한 것이다. 이 과정에서 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 a, b라고 할 때, ab의 값을 구하면?**

(ⅰ) $n=1$일 때, $3^2-1=8$이므로 8로 나누어떨어진다. (ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $3^{2k}-1=8m$(m은 정수)$\cdots$㉠ ㉠의 양변에 $\boxed{(가)}$을(를) 곱하고 $\boxed{(나)}$을(를) 더하면 $3^{2(k+1)}-1=8(9m+1)$이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. (ⅰ),(ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8로 나누어떨어진다.

① 80 ② 72
③ 36 ④ 18
⑤ 8

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co,.Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$
따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$n=k+1$일 때
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\boxed{(k+1)^2}$$
$$=\frac{k+1}{6}\{\boxed{k(2k+1)+6(k+1)}\}$$
$$=\frac{(\boxed{k+1})(\boxed{k+2})(\boxed{2k+3})}{6}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
위 과정에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2) [정답] ③
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.
따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$
$n=k+1$일 때
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$$
$$+\frac{1}{\boxed{(k+1)(k+2)}}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{\boxed{(k+1)(k+2)}}$$
$$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{\boxed{(k+1)(k+2)}}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{\boxed{(k+1)}^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\boxed{\frac{k+1}{k+2}}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.
$f(k)=(k+1)(k+2)$, $g(k)=k+1$, $h(k)=\dfrac{k+1}{k+2}$
따라서 $f(3)g(2)h(1)=20\times3\times\dfrac{2}{3}=40$

3) [정답] ②, ④
[해설] (ⅰ) $n=2$일 때
(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=\boxed{1+2h}$
이때 $h^2>0$이므로, $n=2$일 때 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k(k\geq2)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면 $(1+h)^k>1+kh$
$n=k+1$일 때
$(1+h)^{k+1}=(1+h)(1+h)^k>(1+h)\boxed{(1+kh)}$
$=1+(k+1)h+kh^2>\boxed{1+(k+1)h}$
따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.

4) [정답] ④
[해설] (ⅰ) $n=2$일 때
(좌변)$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$
(우변)$=\boxed{\dfrac{2\times2}{2+1}}=\boxed{\dfrac{4}{3}}$
이때 $\dfrac{3}{2}>\boxed{\dfrac{4}{3}}$이므로, $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k(k\geq2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$
$n=k+1$일 때
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$
$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$
이때 $k\geq2$이므로 $\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2(k+1)}{k+2}$
$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}>0$에서 $\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$
즉, $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\boxed{\dfrac{2(k+1)}{k+2}}$
따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.
$f(a)=f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{7}{5}$

5) [정답] ③
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=\boxed{2}$, (우변)$=\boxed{1\times2=2}$
따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

(ⅱ) $n=\boxed{k}$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$
$n=k+1$일 때
$2+4+6+\cdots+2k+(2k+2)$
$=\boxed{k(k+1)}+2(k+1)$
$=(k+1)(k+2)$
따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.
즉, $x=2$, $y=2$, $f(k)=k$, $g(k)=k(k+1)$
$2+2+1+2=7$

6) [정답] ②, ⑤
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=\frac{1}{1\times3}$, (우변)$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$
따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$
$n=k+1$일 때
$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots$$
$$+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{\boxed{(2k+1)(2k+3)}}$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{\boxed{(2k+1)(2k+3)}}$$
$$=\frac{1}{2k+1}\times\left\{\frac{\boxed{(2k+1)(k+1)}}{2k+3}\right\}=\frac{\boxed{k+1}}{2k+3}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

7) [정답] ②
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=\frac{4!}{8}=3$, (우변)$=\boxed{2}$
따라서 $n=1$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{(k+3)!}{8}>2^k$$
$n=k+1$일 때
$$\frac{(k+4)!}{8}=(\boxed{k+4})\times\frac{(k+3)!}{8}$$
$$>(\boxed{k+4})\times2^k=k\times2^k+2^{k+2}>2^{k+1}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$m=2$, $f(k)=k+4$이므로 $m+f(1)=2+5=7$

8) [정답] ③
[해설] 5^k-1가 4의 배수라고 가정하였으므로 자연수 m에 대하여 $5^k-1=4m$라 할 수 있다.

9) [정답] ②, ③
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때 $2^2-1=3$은 3의 배수이다.
(ⅱ) $n=k$일 때 $2^{2k}-1$이 3의 배수라 가정하면
$2^{2k}-1=3m$ (m은 자연수)이므로 $2^{2k}=3m+1$
$n=k+1$일 때
$2^{2(k+1)}-1=\boxed{4}\times2^{2k}-1$
$=\boxed{3}(4m+1)$이므로
$n=k+1$일 때도 $2^{\boxed{n}}-1$은 3의 배수이다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{2k}-1$은 3의 배수이다.

10) [정답] ③
[해설] (ⅰ) $n=2$일 때
(좌변)$=(a+b)^2$, (우변)$=a^2+b^2$
이때 a, b가 양수이므로
$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab\boxed{>}0$
따라서 $n=2$일 때 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $n=k\ (k\geq2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$(a+b)^k>a^k+b^k$
$n=k+1$일 때
$(a+b)^k\boxed{(a+b)}>(a^k+b^k)\boxed{(a+b)}$
이때 a, b가 양수이므로
$(a^k+b^k)(a+b)-(a^{k+1}+b^{k+1})$
$=ab^k+ba^k>0$
즉, $(a+b)^{k+1}>\boxed{a^{k+1}+b^{k+1}}$
따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 a, b가 양수일 때, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

11) [정답] ④
[해설] (ⅰ) $n=1$일 때
(좌변)$=a_1=\frac{1}{2}$, (우변)$=2\left(\frac{1}{3}\right)^0-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$
따라서 $n=1$일 때 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다고 가정하면
$$a_k=2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{3}{2}$$
$n=k+1$일 때
$$a_{k+1}=\frac{1}{3}\left\{\boxed{2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{3}{2}}\right\}-1$$

Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{3}{2}$

$=\boxed{2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}-\frac{3}{2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}$이 성립한다.

$f(k)=2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{3}{2}$, $g(k)=2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}-\frac{3}{2}$으로

$f(2)+g(2)=2\times\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\times\frac{1}{9}-\frac{3}{2}$

$=-\frac{19}{9}$

12) [정답] ③

[해설] (ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=27$, (우변)$=16$

따라서 $n=3$일 때 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 3)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$3^k>3k+7$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{3}$을 곱하면

$3^{k+1}>9k+21$

이 때, $9k+21-\boxed{3k+10}=6k+11>0$

$9k+21>\boxed{3k+10}$

즉, $3^{k+1}>3(\boxed{k+1})+7$이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 ㉠은 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

13) [정답] ②

[해설] (ⅰ) $n=1$일 때,

$3^2-1=8$이므로 8로 나누어떨어진다.

(ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$3^{2k}-1=8m$ (m은 정수) … ㉠

㉠의 양변에 $\boxed{9}$을(를) 곱하고

$\boxed{8}$을(를) 더하면

$3^{2(k+1)}-1=8(9m+1)$이므로

$n=k+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8로 나누어떨어진다.

$\therefore ab=9\cdot 8=72$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125