● 4회차

01 ⑤	02 ①	03 ③	04 ④	05 ①
06 ②	07 ⑤	08 ⑤	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ④	13 ②	14 ③	15 ②
16 ③	17 ⑤			

[서술형 1] 72
[서술형 2] 5
[서술형 3] (1) $h(x)=-2x+1$ (2) -9

01 ① $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$
② $\{0\}$은 집합 A의 부분집합이므로 $\{0\}\subset A$
③ $\{0\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{0\}\in A$
④ $\{\varnothing, \{0\}\}$은 집합 A의 부분집합이므로
$\{\varnothing, \{0\}\}\subset A$
⑤ 집합 A의 원소의 개수는 3이므로 $n(A)=3$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

02 $A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A\subset X\subset B$, 즉
$\{1, 2, 3, 6\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$을 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{6-4}=2^2=4$

03 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로
$A^C-B=\{1, 3, 5, 7, 9\}-\{3, 6, 9\}$
$=\{1, 5, 7\}$

04 $A\cap B=\{3\}$에서 $3\in B$이므로 $a=3$
즉 $A=\{3, 5, 6\}$, $B=\{2, 3\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 5, 6\}$
따라서 $A\cup B$의 모든 원소의 합은
$2+3+5+6=16$

05 ① $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$
② $A\subset B$이므로 $A\cap B=A$
③ $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$
④ $B^C\subset A^C$이므로 $A^C\cap B^C=B^C$
⑤ $A\subset B$이므로 $A\cap B^C=A-B=\varnothing$
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

Lecture $A\subset B$와 같은 표현
(1) $A\cap B=A$ (2) $A\cup B=B$
(3) $A-B=\varnothing$ (4) $B^C\subset A^C$

06 $n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=35-7=28$
$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=16+19-28=7$

07 ① $xy\neq0$이면 $x\neq0$, $y\neq0$이므로 참인 명제이다.
② 참인 명제
③ 참인 명제
④ $x=0$이면 $x^2\le0$이므로 참인 명제이다.
⑤ (반례) $x=-\frac{1}{2}$이면 $x^2+x=-\frac{1}{4}<0$이므로 거짓인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

08 p는 q이기 위한 필요조건이므로 명제 $q\longrightarrow p$가 참이다. 또 p는 r이기 위한 충분조건이므로 명제 $p\longrightarrow r$가 참이다.
이때 두 명제 $q\longrightarrow p$, $p\longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $q\longrightarrow r$도 참이고, 그 대우 $\sim r\longrightarrow\sim q$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

09 (가) p: $(x-2)(x+3)=0$, q: $x=-3$으로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-3, 2\}$, $Q=\{-3\}$이므로
$P\not\subset Q$, $Q\subset P$
즉 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 $(x-2)(x+3)=0$은 $x=-3$이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.

(나) p: $x=-1$, q: $x^3+1=0$으로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-1\}$, $Q=\{-1\}$이므로 $P=Q$

즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 $x=-1$은 $x^3+1=0$이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$ 조건이다.

오답 피하기

실수 x에 대하여 $x^3+1=0$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

$x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

이때 $x^2-x+1=0$을 만족시키는 실수는 존재하지 않으므로 $x=-1$

10 $\sqrt{7}$이 $\boxed{\text{(가) 유리수}}$라고 가정하면

$$\sqrt{7}=\frac{n}{m}\ (m,\ n\text{은 } \boxed{\text{(나) 서로소}} \text{ 인 자연수})$$

으로 나타낼 수 있다.

즉 $n=\sqrt{7}m$이고 양변을 제곱하면

$$n^2=7m^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 n^2이 $\boxed{\text{(다) 7의 배수}}$이므로 n도 $\boxed{\text{(다) 7의 배수}}$이다.

$n=7k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$$49k^2=7m^2 \qquad \therefore m^2=7k^2$$

따라서 m^2이 $\boxed{\text{(다) 7의 배수}}$이므로 m도 $\boxed{\text{(다) 7의 배수}}$이다. 즉 m, n이 모두 $\boxed{\text{(다) 7의 배수}}$이므로 m, n이 $\boxed{\text{(나) 서로소}}$라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{7}$은 무리수이다.

∴ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 7의 배수

11 $f(2)=3$, $f(5)=7$이므로

$f(2)+f(5)=3+7=10$

12 $f(-1)=g(-1)$에서 $0=-1+b$ $\qquad \therefore b=1$

즉 $g(x)=x+1$이므로 $f(a)=g(a)$에서

$a^2-1=a+1$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a\neq -1)$

$\therefore a+b=2+1=3$

오답 피하기

집합을 원소나열법으로 나타낼 때는 원소를 중복하여 쓰지 않는다. 즉 $X=\{-1, a\}$에서 $a\neq -1$이다.

13 $f(-1)=4$이고 함수 f가 상수함수이므로

$f(a)=f(b)=f(-1)=4$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$a^2-4a+6=4$, $b^2-4b+6=4$

$\therefore a^2-4a+2=0$, $b^2-4b+2=0$

즉 a, b는 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=2$

14 $f(2x-1)=3x-5$에서 $2x-1=t$라 하면

$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$이므로

$f(t)=3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)-5=\frac{3}{2}t-\frac{7}{2}$

$\therefore f(5)=\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{7}{2}=4$

다른 풀이

$f(2x-1)=3x-5$에서 $2x-1=5$가 되는 x의 값은 3이므로 $x=3$을 $f(2x-1)=3x-5$에 대입하면

$f(5)=3\cdot 3-5=4$

15 함수 $f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$이 일대일대응이므로 $f(1)=1$이어야 한다.

즉 $a+3=1$이므로 $a=-2$

$\therefore f(x)=x^2+2x-2\ (x\geq 1)$

이때 $f^{-1}(33)=b$에서 $f(b)=33$이므로

$b^2+2b-2=33$, $b^2+2b-35=0$

$(b-5)(b+7)=0 \qquad \therefore b=5\ (\because b\geq 1)$

$\therefore a+b=-2+5=3$

16 $y=ax+3$이라 하면 $x=\frac{1}{a}y-\frac{3}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}$

즉 $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{a}=b$이므로 $a=3$, $b=-1$

$\therefore ab=3\cdot(-1)=-3$

17 $f(2)=7$에서 $2a+b=7$ …… ㉠

$f^{-1}(1)=-1$에서 $f(-1)=1$이므로

$-a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore ab=2\cdot 3=6$

[서술형 1] 학생 전체의 집합을 U, 연극을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영화를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=43$, $n(B)=75$,

$n(A^C\cap B^C)=5$

❶

$$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$$
$$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$$
$$=100-5=95$$
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=43+75-95=23$$

❷

따라서 연극과 영화 중 하나만 좋아하는 학생의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$이므로 구하는 학생 수는

$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$
$$=95-23=72$$

❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 연극 또는 영화를 좋아하는 학생 수와 연극과 영화를 모두 좋아하는 학생 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 연극과 영화 중 하나만 좋아하는 학생 수를 구할 수 있다.	3점

Lecture 유한집합의 원소의 개수

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

(2) $n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

(3) $n(A^C)=n(U)-n(A)$

(4) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=n(A\cup B)-n(B)$

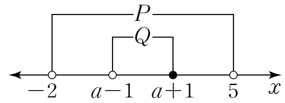
[서술형 2] 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid -2<x<5\}$, $Q=\{x\mid a-1<x\leq a+1\}$

이때 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

❶

오른쪽 그림에서



$a-1\geq -2$, $a+1<5$

이어야 하므로

$-1\leq a<4$

❷

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0+1+2+3=5$

❸

채점 기준	배점
❶ 두 조건 p, q의 진리집합의 포함 관계를 알 수 있다.	3점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] (1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-1$

이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$3h(x)-1=-6x+2$, $3h(x)=-6x+3$

$\therefore h(x)=-2x+1$

❶

(2) $h(5)=-2\cdot 5+1=-9$

❷

채점 기준	배점
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	5점
❷ $h(5)$의 값을 구할 수 있다.	2점