● 4회차

01 ②	02 ②	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ③	08 ④	09 ③	10 ②
11 ④	12 ④	13 ②	14 ⑤	15 ①
16 ④	17 ③			

[서술형 1] $\frac{56}{15}$

[서술형 2] 124

[서술형 3] 13

01 $C=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$이므로

$\frac{c}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin 45^\circ}$

$\therefore c=\frac{4}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$

02 코사인법칙에 의하여

$b^2=(\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot2\cdot\cos 45^\circ$

$=2+4-4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2$

$\therefore b=\sqrt{2}\ (\because b>0)$

03 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

위의 세 식을 $\sin A=2\sin B\cos C$에 대입하면

$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2=a^2+b^2-c^2$, $b^2=c^2$

$\therefore b=c\ (\because b>0, c>0)$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

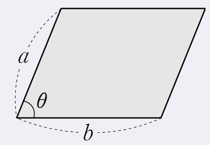
04 □ABCD$=8\cdot10\cdot\sin 120^\circ$

$=80\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$

Lecture 사각형의 넓이

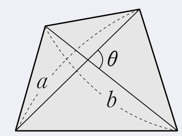
(1) 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 평행사변형의 넓이

⇨ $S=ab\sin\theta$



(2) 두 대각선의 길이가 a, b이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이

⇨ $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$



05 제2항이 3이므로 $a+d=3$ ······ ㉠

제8항이 15이므로 $a+7d=15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $d=2$

$\therefore a+3d=1+3\cdot2=7$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_n=a+3(n-1)$

$|a_3-13|=|a_5-13|$에서

$a_3-13=a_5-13$ 또는 $a_3-13=-(a_5-13)$

(i) $a_3-13=a_5-13$일 때

$a_3=a_5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3-13=-(a_5-13)$일 때

$(a+3\cdot2)-13=-(a+3\cdot4)+13$

$2a=8 \qquad \therefore a=4$

(i), (ii)에서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 4, 공차는 3이므로

$a_7=4+(7-1)\cdot3=22$

07 $a_n>0$에서 $-3n+62>0$

$3n<62 \qquad \therefore n<\frac{62}{3}=20.66\cdots$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지 양수이므로 S_n의 최댓값은

$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20(59+2)}{2}=610$

08 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=40$에서

$a+2d=8$ $\cdots\cdots$ ㉠

$S_7=\frac{7\{2a+(7-1)d\}}{2}=77$에서

$a+3d=11$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 $a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$이므로

$a_8=3\cdot8-1=23$

09 ㈏에서 $\frac{a_5}{a_4}=3$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 3이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

㈎에서 $a_2={a_1}^2$이므로 $3a=a^2$

$a(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 $a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$이므로

$a_3=3^3=27$

다른 풀이

㈏에서 $\frac{a_5}{a_4}=3$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 3이다.

㈎에서 $a_2={a_1}^2$이므로 양변을 a_1로 나누면

$\frac{a_2}{a_1}=a_1$

이때 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_5}{a_4}=3$이므로 $a_1=3$

따라서 $a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$이므로

$a_3=3^3=27$

10 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3\cdots a_7&=5\cdot5^2\cdot5^3\cdot\cdots\cdot5^7\\&=5^{1+2+3+\cdots+7}\\&=5^{\frac{7\cdot8}{2}}\\&=5^{28}\end{aligned}$$

따라서 $5^{28}=5^k$이므로 $k=28$

11 세 수 -3, x, 9가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\frac{-3+9}{2}=3$

또 세 수 1, x, y, 즉 1, 3, y가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$3^2=1\cdot y$ $\therefore y=9$

$\therefore xy=3\cdot9=27$

12 $a_1=S_1=2\cdot3-1=5$

$a_4=S_4-S_3=2\cdot3^4-1-(2\cdot3^3-1)=108$

$\therefore a_1+a_4=5+108=113$

13 여과 장치에 1번 통과했을 때, 걸러지는 유해성 무기 물질의 양은 $1000\cdot0.2=200$(g)

여과 장치에 2번 통과했을 때, 걸러지는 유해성 무기 물질의 양은 $(1000-200)\cdot0.2=160$(g)

여과 장치에 3번 통과했을 때, 걸러지는 유해성 무기 물질의 양은 $(800-160)\cdot0.2=128$(g)

$\vdots$

즉 걸러지는 유해성 무기 물질의 양은 첫째항이 200이고 공비가 0.8인 등비수열을 이루므로 여과 장치에 연속하여 6번 통과했을 때, 걸러지는 유해성 무기 물질의 양의 합은

$$\begin{aligned}\frac{200(1-0.8^6)}{1-0.8}&=\frac{200(1-0.262)}{0.2}\\&=\frac{200\cdot0.738}{0.2}\\&=738(\text{g})\end{aligned}$$

14 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}(2k-3)&=2\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}3\\&=2\cdot\frac{20\cdot21}{2}-3\cdot20\\&=360\end{aligned}$$

15 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2b_k+5)&=3\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}5\\&=3\cdot5-2\cdot8+5\cdot10\\&=49\end{aligned}$$

16 $\displaystyle\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{98}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=10-\sqrt{2}$$

17 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=13$에서 $1+2d=13$ $\quad\therefore d=6$

따라서 $a_n=1+(n-1)\cdot6=6n-5$이므로

$a_5=6\cdot5-5=25$

[서술형 1] $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\sin120^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=14\sqrt{3}$$

❶

$\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ADC}$에서

$14\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot x\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot8\cdot x\cdot\sin60^\circ$

$14\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{4}x+2\sqrt{3}x$, $\frac{15\sqrt{3}}{4}x=14\sqrt{3}$

$\therefore x=\frac{56}{15}$, 즉 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{56}{15}$

❷

채점 기준	배점
❶ $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 구할 수 있다.	3점
❷ $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 구할 수 있다.	4점

[서술형 2] 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=4$에서 $\frac{a(r^5-1)}{r-1}=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=24$에서

$\frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=24$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^5+1)=24$

$r^5+1=6$ $\quad\therefore r^5=5$

❷

따라서 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$$S_{15}=\frac{a(r^{15}-1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$$

$$=4(5^2+5+1)$$

$$=124$$

❸

채점 기준	배점
❶ 첫째항부터 제5항까지의 합이 4, 첫째항부터 제10항까지의 합이 24임을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ r^5의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 첫째항부터 제15항까지의 합을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] $a_{n+1}=a_n+2^n-1$에

$n=1$을 대입하면

$a_2=a_1+2-1=2+1=3$

❶

$n=2$를 대입하면

$a_3=a_2+2^2-1=3+3=6$

❷

$n=3$을 대입하면

$a_4=a_3+2^3-1=6+7=13$

❸

채점 기준	배점
❶ a_2의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ a_3의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ a_4의 값을 구할 수 있다.	2점