11 평면좌표

유형의 이해에 따라 ▢ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.		1st	2nd
필수유형 01	두 점 사이의 거리		
필수유형 02	같은 거리에 있는 점		
필수유형 03	선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값		
필수유형 04	두 점 사이의 거리의 활용(1) - 삼각형의 모양		
필수유형 05	두 점 사이의 거리의 활용(2) - 도형의 성질 확인하기		
필수유형 06	선분의 내분점과 외분점		
필수유형 07	선분의 내분점과 외분점의 활용		
필수유형 08	삼각형의 무게중심		
필수유형 09	사각형에서 중점의 활용		
발전유형 10	각의 이등분선의 성질		

필수유형 01 두 점 사이의 거리

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$ 사이의 거리가 5일 때, a의 값을 모두 구하여라.

(2) 네 점 $\mathrm{A}(2,\ -a)$, $\mathrm{B}(2a,\ 4)$, $\mathrm{C}(0,\ 0)$, $\mathrm{D}(3,\ -1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

(3) 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ a)$, $\mathrm{B}(a,\ 6)$에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값을 구하여라.

풍쌤 POINT

두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a에 대한 방정식을 세워 봐!

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

풀이

(1) $\overline{\mathrm{AB}}=5$이므로

$\sqrt{(2-a)^2+(1-5)^2}=5$, $\sqrt{a^2-4a+20}=5$

양변을 제곱하면 $a^2-4a+20=25$ ❶

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=5$

❶ $\overline{\mathrm{AB}}^2=25$

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=4\overline{\mathrm{CD}}^2$ ❷

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(2a-2)^2+(4+a)^2=5a^2+20$,

$\overline{\mathrm{CD}}^2=3^2+(-1)^2=10$

이므로

$5a^2+20=4\times10$, $5a^2=20$, $a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

❷ 두 점 사이의 거리 공식에는 근호가 있으므로 양변을 제곱하여 정리한다.

(3) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a+2)^2+(6-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-8a+40}$

$=\sqrt{2(a-2)^2+32}$ ❸

따라서 선분 AB의 길이는 $a=2$일 때 최솟값 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$를 갖는다.

❸ $2(a-2)^2+32$에서 $2(a-2)^2\geq0$이므로 $a=2$일 때 최솟값은 32이다.

답 (1) $-1,\ 5$ (2) 2 (3) $4\sqrt{2}$

풍쌤 강의 NOTE

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

이때 제곱근에 문자가 포함되어 있을 때는 제곱을 하여 전개하는 것이 편리하다.

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

01-1 유사 기출

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(2, 1)$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

01-2 유사

세 점 $\mathrm{A}(-k+4, 1)$, $\mathrm{B}(-3, k)$, $\mathrm{C}(1, 5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, k의 값을 구하여라.

01-3 유사

네 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(5, -a)$, $\mathrm{C}(-2, 1)$, $\mathrm{D}(2, 3)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 음수 a의 값을 구하여라.

01-4 유사

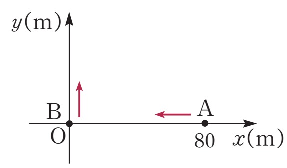
두 점 $\mathrm{A}(a, 2)$, $\mathrm{B}(4, a)$에 대하여 선분 AB의 길이가 최소가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하여라.

01-5 변형

두 점 $\mathrm{A}(4, -a)$, $\mathrm{B}(2, a)$ 사이의 거리가 10 이하가 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

01-6 실력

오른쪽 그림과 같이 O 지점에서 수직으로 만나는 두 직선 도로에서 사람 A는 O 지점으로부터 동쪽으로 80 m 떨어진 지점에서 출발해 서쪽으로 초속 4 m의 속력으로 움직이고, 사람 B는 O 지점에서 출발하여 북쪽으로 초속 2 m의 속력으로 움직인다. 두 사람 A, B가 동시에 출발할 때, 두 사람 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.



필수유형 02 같은 거리에 있는 점

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $A(2, 3)$, $B(0, -1)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

(2) 두 점 $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

(3) 두 점 $A(-2, 1)$, $B(-1, 8)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=x+2$ 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

풍쌤 POINT

구하는 점 P의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낸 후, $\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$임을 이용하여 점 P의 좌표를 구해.

풀이

(1) STEP1 점 P의 x좌표 구하기

점 P의 좌표를 $(a, 0)$❶이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로 $(a-2)^2+(-3)^2=a^2+1^2$

$a^2-4a+13=a^2+1$, $-4a=-12$ $\quad\therefore a=3$

STEP2 점 P의 좌표 구하기

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 0)$이다.

❶ 점 P가 x축 위에 있으므로 y좌표가 0이다.

(2) STEP1 점 P의 y좌표 구하기

점 P의 좌표를 $(0, a)$라고❷ 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로 $2^2+a^2=(-6)^2+(a-4)^2$

$a^2+4=a^2-8a+52$, $8a=48$ $\quad\therefore a=6$

STEP2 점 P의 좌표 구하기

따라서 점 P의 좌표는 $(0, 6)$이다.

❷ 점 P가 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다.

(3) STEP1 점 P의 x좌표 구하기

점 P의 좌표를 $(a, a+2)$라고 하면❸

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(a+1)^2=(a+1)^2+(a-6)^2$

$2a^2+6a+5=2a^2-10a+37$

$16a=32$ $\quad\therefore a=2$

STEP2 점 P의 좌표 구하기

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 4)$이다.

❸ 점 P가 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 $x=a$를 대입하면 $y=a+2$이다.

답 (1) $P(3, 0)$ (2) $P(0, 6)$ (3) $P(2, 4)$

풍쌤 강의 NOTE

좌표평면 위의 점 P의 좌표를 구할 때 위치에 따라 다음과 같이 놓는다.

① 점 P가 x축 위의 점일 때, $P(a, 0)$

② 점 P가 y축 위의 점일 때, $P(0, a)$

③ 점 P가 직선 $y=mx+n$ 위의 점일 때, $P(a, ma+n)$

02-1 유사

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

02-2 유사

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=2x-3$ 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

02-3 유사

좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$이 있다. 직선 $y=x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

02-4 변형

두 점 $(2,\ 1)$, $(-1,\ 4)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

02-5 변형

세 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하여라.

02-6 실력

학교는 집에서 동쪽으로 4 km, 남쪽으로 2 km만큼 떨어진 위치에 있고, 도서관은 동쪽으로 3 km, 북쪽으로 1 km만큼 떨어진 위치에 있다. 집, 학교, 도서관에서 같은 거리에 있는 지점에 공원을 만든다고 할 때, 집에서 공원까지의 거리를 구하여라.

필수유형 03 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$, $\mathrm{B}(-2,\ 3)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값을 구하여라.

(2) 두 점 $\mathrm{A}(6,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 6)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

풍쌤 POINT

두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값은

❶ 점 P의 좌표를 미지수를 이용하여 나타내고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세운다.

❷ 완전제곱식의 꼴을 이용하여 최솟값을 구한다.

풀이

(1) **STEP 1** 점 P의 좌표를 정하고, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 식으로 나타내기

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$❶이라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=(a-4)^2+(-1)^2+(a+2)^2+(-3)^2$

$=2a^2-4a+30$

$=2(a-1)^2+28$

STEP 2 최솟값 구하기

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 28❷을 갖는다.

❶ 점 P는 x축 위의 점이므로 y좌표가 0이다.

❷ $(a-1)^2\ge0$이므로 $2(a-1)^2+28\ge28$

(2) **STEP 1** 점 P의 좌표를 정하고, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 식으로 나타내기

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$❸라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=(a-6)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2$

$=2a^2-20a+2b^2-16b+92$

$=2(a-5)^2+2(b-4)^2+10$

STEP 2 조건을 만족시키는 점 P의 좌표 구하기

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=5$, $b=4$일 때 최솟값 10❹을 가지므로, 구하는 점 P의 좌표는 $(5,\ 4)$이다.

❸ 좌표평면 위의 임의의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 놓는다.

❹ $(a-5)^2\ge0$, $(b-4)^2\ge0$이므로 $2(a-5)^2+2(b-4)^2+10\ge10$

답 (1) 28 (2) $\mathrm{P}(5,\ 4)$

풍쌤 강의 NOTE

- x에 대한 이차식 $m(x-a)^2+k$는 $x=a$에서 최솟값 k를 갖는다. (단, $m>0$)
- x, y에 대한 이차식 $m(x-a)^2+n(y-b)^2+k$는 $x=a$, $y=b$에서 최솟값 k를 갖는다. (단, $m>0$, $n>0$)

03-1 유사

두 점 $A(1, 5)$, $B(9, 3)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하여라.

03-2 유사

두 점 $A(2, 3)$, $B(-2, -9)$와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

03-3 변형

두 점 $A(-2, 2)$, $B(2, 1)$과 직선 $y=2x-1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하여라.

03-4 변형 기출

좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 내부에 점 P가 있다. 이때 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

03-5 변형

세 점 $A(-3, 1)$, $B(2, -2)$, $C(1, 4)$와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이 최솟값을 가질 때, 선분 AP의 길이를 구하여라.

03-6 실력

두 점 $A(-4, 1)$, $B(k, 5)$와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값이 26이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하여라.

필수유형 04 두 점 사이의 거리의 활용 (1) – 삼각형의 모양

다음 물음에 답하여라.

(1) 세 점 $A(-2, -2)$, $B(2, 0)$, $C(4, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

(2) 세 점 $A(0, -2)$, $B(-\sqrt{3}, 1)$, $C(a, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a, b의 값을 각각 구하여라. (단, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.)

풍쌤 POINT

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 모양을 결정할 때

❶ 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이를 구한다.

❷ 세 변의 길이 사이의 관계를 파악한다.

풀이

(1) STEP1 삼각형의 세 변의 길이 구하기

$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-2-4)^2+(-2-4)^2}=6\sqrt{2}$

STEP2 삼각형의 모양 결정하기❶

따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

(2) STEP1 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$❷

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-\sqrt{3})^2+(1+2)^2=(a+\sqrt{3})^2+(b-1)^2$

$\therefore a^2+2\sqrt{3}a+b^2-2b-8=0$ ⋯⋯ ㉠

또, $\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(-\sqrt{3})^2+(1+2)^2=a^2+(b+2)^2$

$\therefore a^2+b^2+4b-8=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $2\sqrt{3}a-6b=0$ $\quad\therefore a=\sqrt{3}b$

STEP2 a, b의 값 구하기

$a=\sqrt{3}b$를 ㉠에 대입하면 $3b^2+6b+b^2-2b-8=0$

$4b^2+4b-8=0$, $b^2+b-2=0$

$(b+2)(b-1)=0$ $\quad\therefore b=-2$ 또는 $b=1$

그런데 점 C가 제1사분면 위의 점이므로❸

$a=\sqrt{3}$, $b=1$

답 (1) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 (2) $a=\sqrt{3}$, $b=1$

❶ 삼각형의 모양을 결정할 때, 세 변의 길이 사이의 관계를 파악한다. 특히 직각삼각형이 되는지 파악해야 하는 경우도 있다.

❷ $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{BC}=\overline{CA}$ 또는 $\overline{AB}=\overline{CA}$, $\overline{BC}=\overline{CA}$로 풀 수 있다.

❸ $b>0$이므로 $b=1$ $\quad\therefore a=\sqrt{3}$

풍쌤 강의 NOTE

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때

① $a=b=c$이면 정삼각형

② $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$이면 이등변삼각형

③ $a^2+b^2=c^2$을 만족시킬 때는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

04-1 유사

세 점 $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-\sqrt{3}, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

04-2 유사

세 점 $A(-2, -3)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

04-3 유사

세 점 $A(-6, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-2, 10)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

04-4 변형

세 점 $A(0, 2)$, $B(6, 0)$, $C(2, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형일 때, a의 값을 구하여라.

(단, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.)

04-5 변형

세 점 $A(0, 3)$, $B(4, 1)$, $C(3, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 정수 a의 값을 구하여라.

04-6 실력

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x+8$이 만나는 두 점을 A, B라고 하자. 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP가 $\overline{AP}=\overline{BP}$인 이등변삼각형일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

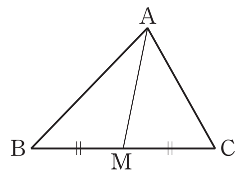
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

필수유형 05 두 점 사이의 거리의 활용 (2) – 도형의 성질 확인하기

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$

이 성립함을 보여라.



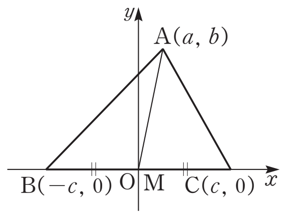
풍쌤 POINT

도형을 좌표평면 위로 옮기면 도형의 성질을 쉽게 확인할 수 있어.
주어진 점이 원점 또는 좌표축 위의 점이 되도록 좌표축을 정하면 계산이 간단해지니까 좌표축의 위치를 잘 정해야 해.

풀이

STEP 1 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내기

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.❶



❶ 점 A, B, C, M의 좌표를 등식에 대입했을 때, 계산이 간단해지도록 좌표축을 정한다.

STEP 2 점의 좌표를 대입하여 관계식이 성립함을 보이기

이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 A(a, b), B$(-c, 0)$, C$(c, 0)$이라고 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(-c-a)^2+(-b)^2+(c-a)^2+(-b)^2$$

$$=2(a^2+b^2+c^2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$❷

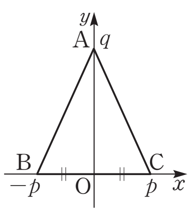
이 성립한다.

❷ 이를 파푸스 정리 또는 삼각형의 중선 정리라고 한다.

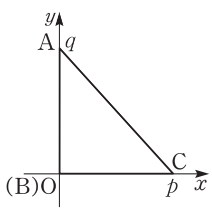
답 풀이 참조

풍쌤 강의 NOTE

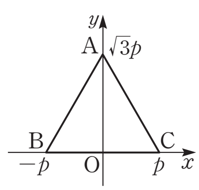
도형을 좌표평면 위로 옮길 때 가장 많이 이용되는 점을 원점, 가장 많이 이용되는 직선을 x축 또는 y축으로 정한다. 특히, 이등변삼각형, 직각삼각형, 정삼각형이 주어진 경우에는 다음 그림과 같이 좌표평면을 정하면 편리하다.



이등변삼각형



직각삼각형



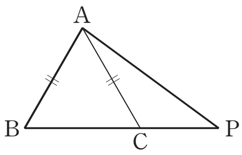
정삼각형

05-1 유사

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 변 BC의 연장선 위의 점 P에 대하여

$$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=\overline{BP}\times\overline{CP}$$

가 성립함을 보여라.

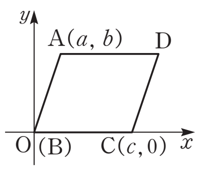


05-2 변형

다음은 평행사변형 ABCD에서

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\boxed{\text{(가)}}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$$

이 성립함을 보이는 과정이다.

> 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.
>
> 
>
>
> 이때 두 점 A, C의 좌표를 각각 $A(a,\ b)$, $C(c,\ 0)$이라고 하면 점 $D(\boxed{\text{(나)}},\ b)$이므로
>
> $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\boxed{\text{(다)}}$
>
> $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\boxed{\text{(라)}}$
>
> $\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\boxed{\text{(가)}}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$

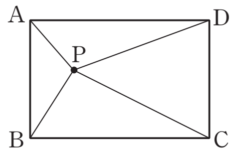
위의 과정에서 (가)~(라)에 알맞은 것을 구하여라.

05-3 변형

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 내부에 점 P가 있을 때,

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$$

이 성립함을 보여라.

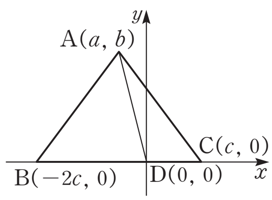


05-4 변형

다음은 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=2\overline{CD}$일 때,

$$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\boxed{\text{(가)}}(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$$

이 성립함을 보이는 과정이다.

> 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, $\overline{BD}=2\overline{CD}$인 점 D가 원점 O가 되도록 좌표평면을 잡는다.
>
> 
>
>
> 이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 $A(a,\ b)$, $B(\boxed{\text{(나)}},\ 0)$, $C(c,\ 0)$이라고 하면
>
> $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\boxed{\text{(다)}}$
>
> $\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\boxed{\text{(라)}}$
>
> $\therefore\ \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\boxed{\text{(가)}}(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$

위의 과정에서 (가)~(라)에 알맞은 것을 구하여라.

필수유형 06 선분의 내분점과 외분점

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하여라.

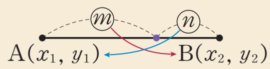
(2) 두 점 $A(2,\ a)$, $B(0,\ 8)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P가 x축 위에 있을 때, a의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 하면

➡ $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$, 엇갈리게 곱하여 더하거나 뺀다.

$Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)



풀이

(1) STEP 1 두 점 P, Q의 좌표 구하기

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times4+1\times(-2)}{2+1},\ \dfrac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)$❶ $\therefore P(2,\ 3)$

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times4-1\times(-2)}{2-1},\ \dfrac{2\times4-1\times1}{2-1}\right)$ $\therefore Q(10,\ 7)$

STEP 2 선분 PQ의 중점의 좌표 구하기

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+10}{2},\ \dfrac{3+7}{2}\right)$❷ $\therefore (6,\ 5)$

(2) STEP 1 점 P의 좌표 구하기

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times0+2\times2}{1+2},\ \dfrac{1\times8+2\times a}{1+2}\right)$ $\therefore P\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8+2a}{3}\right)$

STEP 2 a의 값 구하기

점 $P\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8+2a}{3}\right)$가 x축 위에 있으므로❸

$\dfrac{8+2a}{3}=0$ $\therefore a=-4$

답 (1) $(6,\ 5)$ (2) -4

❶ 좌표평면에서 내분점, 외분점의 x좌표, y좌표는 서로 영향을 주지 않기 때문에 각각에 대하여 식을 만든다.

❷ 중점은 선분을 $1:1$로 내분하는 점이다.

❸ 점 P가 x축 위에 있으려면 y좌표가 0이어야 한다.

풍쌤 강의 NOTE

- 선분을 $m:n$으로 외분할 때
  $m:(-n)$으로 내분하는 것으로 생각하여 내분점 공식을 적용해도 된다.
- 외분점은 $m>n$, $m<n$에 따라 위치가 달라진다.

06-1 유사

두 점 $\mathrm{A}(3, 6)$, $\mathrm{B}(-2, 1)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하여라.

06-2 유사

기출

두 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(-9, 0)$에 대하여 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, a의 값을 구하여라.

06-3 변형

두 점 $\mathrm{A}(a, 1)$, $\mathrm{B}(-3, 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(-7, b)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

06-4 변형

두 점 $\mathrm{A}(-2, 3)$, $\mathrm{B}(4, -2)$에 대하여 선분 AB를 삼등분하는 점 중에서 점 A에 가까운 점을 P라고 할 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

06-5 변형

두 점 $\mathrm{A}(-4, 2)$, $\mathrm{B}(8, 6)$에 대하여 선분 AB를 사등분하는 점 중에서 점 B에 가까운 점을 $\mathrm{P}(a, b)$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

06-6 실력

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-6, 2)$, $\mathrm{B}(2, 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 할 때, 선분 PQ의 중점은 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점이다. 이때 $m-n$의 값을 구하여라.

(단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

필수유형 07 선분의 내분점과 외분점의 활용

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $A(2, 3)$, $B(-1, 6)$을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C가 $\overline{AB}=3\overline{BC}$를 만족시킬 때, 점 C의 좌표를 구하여라.

(2) 두 점 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$에 대하여 선분 AB를 $k:5$로 외분하는 점이 직선 $y=-2x-2$ 위에 있을 때, 실수 k의 값을 구하여라. (단, $k\neq5$)

풍쌤 POINT

선분의 길이 사이의 비가 주어지면 주어진 조건을 그림으로 나타내어 선분의 길이의 비와 점의 위치를 파악하도록 해.

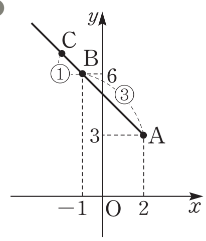
풀이

(1) **STEP 1** $\overline{AB}=3\overline{BC}$를 이용하여 점 C의 위치 파악하기

$\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

따라서 점 C가 선분 AB의 연장선 위의 점일 때, 점 C는 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점[1]이다.

[1]



STEP 2 점 C의 좌표 구하기

따라서 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{4\times(-1)-1\times2}{4-1}, \dfrac{4\times6-1\times3}{4-1}\right)$ $\quad\therefore C(-2, 7)$

다른 풀이

$\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$에서 점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라고 하면

$\dfrac{3\times a+1\times2}{3+1}=-1$, $\dfrac{3\times b+1\times3}{3+1}=6$

에서 $a=-2$, $b=7$ $\quad\therefore C(-2, 7)$

(2) **STEP 1** 외분하는 점의 좌표 구하기

선분 AB를 $k:5$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times1-5\times(-2)}{k-5}, \dfrac{k\times1-5\times4}{k-5}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{k+10}{k-5}, \dfrac{k-20}{k-5}\right)$

STEP 2 k의 값 구하기

이 점이 직선 $y=-2x-2$ 위에 있으므로

$\dfrac{k-20}{k-5}=-2\times\dfrac{k+10}{k-5}-2$

$k-20=-2k-20-2k+10$, $5k=10$ $\quad\therefore k=2$

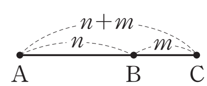
답 (1) $C(-2, 7)$ (2) 2

풍쌤 강의 NOTE

$m\overline{AB}=n\overline{BC}$ $(m>0, n>0)$이면 $\overline{AB}:\overline{BC}=n:m$

(1) 점 B는 선분 AC를 $n:m$으로 내분하는 점

(2) 점 C는 선분 AB를 $(m+n):m$으로 외분하는 점



07-1 유사

두 점 $A(-3, 2)$, $B(3, 5)$를 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C가 $2\overline{AB}=3\overline{BC}$를 만족시킬 때, 점 C의 좌표를 구하여라.

07-2 유사

두 점 $A(-4, 2)$, $B(5, -1)$에 대하여 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때, 실수 k의 값을 구하여라.

07-3 변형

좌표평면 위의 두 점 $A(-5, -2)$, $B(1, 4)$를 이은 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제2사분면 위에 있을 때, 실수 t의 값의 범위를 구하여라.

07-4 변형

두 점 $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$와 선분 AB의 연장선 위의 점 P에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배가 된다. 점 P의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

07-5 변형

두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 2)$를 지나는 직선 AB 위에 있고 $\overline{AB}=2\overline{BC}$를 만족시키는 점 C의 좌표를 모두 구하여라.

07-6 실력

두 점 $A(-4, 1)$, $B(6, 6)$에 대하여 $\triangle OAP:\triangle OBP=2:3$인 점 P는 2개가 생긴다. 두 점을 P_1, P_2라고 할 때, 선분 P_1P_2의 길이를 구하여라.

(단, O는 원점이다.)

필수유형 08 삼각형의 무게중심

다음 물음에 답하여라.

(1) 세 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2b, 1)$, $\mathrm{C}(2, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 1)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 세 점 $\mathrm{A}(3, 4)$, $\mathrm{B}(x_1, y_1)$, $\mathrm{C}(x_2, y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(7, 8)$일 때, 변 BC의 중점의 좌표를 구하여라.

풍쌤 POINT

세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

➡ $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

풀이

(1) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 1)$이므로

$\dfrac{a-2b+2}{3}=3$, $\dfrac{b+1+5}{3}=1$ ❶

$a-2b+2=9$, $b+6=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a+b=-3+1=-2$

(2) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(7, 8)$이므로

$\dfrac{3+x_1+x_2}{3}=7$, $\dfrac{4+y_1+y_2}{3}=8$

$3+x_1+x_2=21$, $4+y_1+y_2=24$

$\therefore x_1+x_2=18$, $y_1+y_2=20$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이므로 $(9, 10)$

이다.

다른 풀이

$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 $\mathrm{M}(a, b)$라고 하면 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심은

$\overline{\mathrm{AM}}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times a+1\times 3}{2+1}, \dfrac{2\times b+1\times 4}{2+1}\right)$ $\quad\therefore \left(\dfrac{2a+3}{3}, \dfrac{2b+4}{3}\right)$

이 점이 점 $(7, 8)$과 일치하므로

$\dfrac{2a+3}{3}=7$, $\dfrac{2b+4}{3}=8$ $\quad\therefore a=9$, $b=10$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는 $(9, 10)$이다.

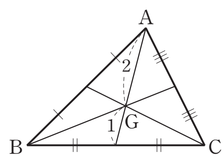
답 (1) -2 (2) $(9, 10)$

❶ 삼각형의 무게중심의 좌표는 세 꼭짓점의 좌표의 평균이다.

풍쌤 강의 NOTE

삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고 이 점을 삼각형의 무게중심이라고 한다. 이때 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 내분한다.

(삼각형에서 한 꼭짓점과 대변의 중점을 이은 선분을 중선이라고 하며, 삼각형에는 세 개의 중선이 있다.)



08-1 유사

세 점 $A(a, -a)$, $B(b, 3)$, $C(-2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-3, 2)$일 때, $a-b$의 값을 구하여라.

08-2 유사

세 점 $A(4, 5)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$일 때, 변 BC의 중점의 좌표를 구하여라.

08-3 유사 기출

좌표평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 점 A의 좌표가 $(1, 1)$, 변 BC의 중점의 좌표가 $(7, 4)$이다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

08-4 변형 기출

점 $A(1, 6)$을 한 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$라 고 하자. $x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=4$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하여라.

08-5 변형

삼각형 ABC에서 $A(2, 6)$이고 변 AB의 중점의 좌표가 $(-2, 4)$, 변 AC의 중점의 좌표가 $(3, 2)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하여라.

08-6 실력

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 세 변 AB, BC, CA를 $2 : 1$로 내분하는 점의 좌표가 각각 $P(7, 2)$, $Q(8, 7)$, $R(3, 6)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하여라.

필수유형 09 사각형에서 중점의 활용

다음 물음에 답하여라.

(1) 세 점 A$(0, 4)$, B$(-3, 1)$, D$(5, 7)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표를 구하여라.

(2) 네 점 A$(-1, 0)$, B$(a, 1)$, C$(b, 4)$, D$(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

풍쌤 POINT

사각형의 성질을 이용하여 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있어.

(1) 평행사변형: 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

(2) 마름모: 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

평행사변형과 마름모는 모두 두 대각선의 중점이 일치해.

풀이

(1) 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 4)$

점 C의 좌표를 (a, b)라고 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$

이때 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이 일치❶하므로

$1=\frac{a}{2}, 4=\frac{4+b}{2}$ $\quad\therefore a=2, b=4$

따라서 점 C의 좌표는 $(2, 4)$이다.

❶ 평행사변형은 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이 일치한다.

(2) STEP1 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DA}}$임을 이용하여 a의 값 구하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DA}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{DA}}^2$이므로

$(a+1)^2+1^2=(-1)^2+(-3)^2$

$a^2+2a+2=10,\ a^2+2a-8=0,\ (a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

STEP2 대각선의 성질을 이용하여 b의 값 구하기

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 2)$

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+b}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{-1+b}{2}, 2\right)$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치❷하므로

$\frac{-1+b}{2}=1$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

❷ 마름모는 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다.

답 (1) C$(2, 4)$ (2) 5

풍쌤 강의 NOTE

- 평행사변형과 직사각형은 두 쌍의 대변의 길이가 같고 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
- 마름모와 정사각형은 네 변의 길이가 같고 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

09-1 유사

세 점 $A(-2, 3)$, $B(2, -1)$, $C(0, 5)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, 점 D의 좌표를 구하여라.

09-2 유사

네 점 $A(a, 1)$, $B(2, 1)$, $C(6, 4)$, $D(b, 4)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

09-3 변형

네 점 $A(-3, 1)$, $B(3, a)$, $C(6, 4)$, $D(0, b)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 정사각형일 때, ab의 값을 구하여라.

09-4 변형

마름모 ABCD에 대하여 $A(1, 3)$, $C(5, 1)$이고 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$라고 할 때, $x_1+x_2+y_1+y_2$의 값을 구하여라.

09-5 변형

평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점 A, B의 좌표가 각각 $(-3, -1)$, $(2, -2)$이고, 두 대각선 AC, BD의 교점의 좌표가 $(1, 1)$일 때, 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 각각 구하여라.

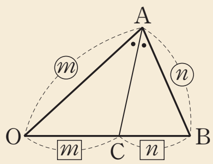
09-6 실력 기출

직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=18$, $\overline{AD}=12$이고 두 대각선의 교점은 M이다. 삼각형 ABD의 무게중심을 G, 삼각형 CDM의 무게중심을 H라고 할 때, 두 점 G와 H 사이의 거리를 구하여라.

발전유형 10 각의 이등분선의 성질

두 점 $\mathrm{A}(8, 6)$, $\mathrm{B}(8, 0)$에 대하여 삼각형 OAB에서 ∠A의 이등분선이 변 OB와 만나는 점 C의 좌표를 구하여라. (단, O는 원점이다.)

풍쌤 POINT



$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{BC}} = m : n$이 성립해!
즉, 점 C는 $\overline{\mathrm{OB}}$를 $m : n$으로 내분하는 점이야!

풀이

STEP 1 $\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}}$의 비 구하기

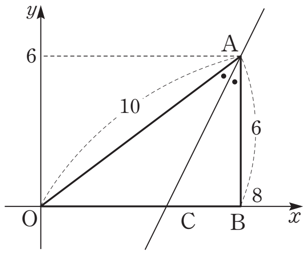
$\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(8-8)^2+6^2} = 6$이므로

$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}} = 5 : 3$

STEP 2 점 C가 선분 OB를 내분하는 비율 구하기

오른쪽 그림과 같이 삼각형 AOB에서 ∠A의 이등분선이 변 OB와 만나는 점 C에 대하여

$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 5 : 3$ ❶



❶ 삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}}$가 성립한다.

STEP 3 점 C의 좌표 구하기

따라서 점 C는 $\overline{\mathrm{OB}}$를 $5 : 3$으로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

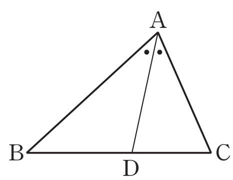
$$\left(\frac{5\times8+3\times0}{5+3}, \frac{5\times0+3\times0}{5+3}\right)$$

$\therefore \mathrm{C}(5, 0)$

답 $\mathrm{C}(5, 0)$

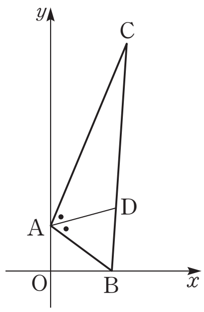
풍쌤 강의 NOTE

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때,
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}}$
➡ 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}$로 내분하는 점이다.



10-1 유사

오른쪽 그림과 같이 세 점 A$(0, 3)$, B$(4, 0)$, C$(5, 15)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표를 구하여라.



10-2 유사

세 점 A$(0, 3)$, B$(1, 0)$, C$(2, 9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D(a, b)라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

10-3 유사

세 점 A$(-3, 0)$, B$(-3, -4)$, C$(1, -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D(a, b)라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

10-4 변형

세 점 A$(0, 12)$, B$(-9, 0)$, C$(16, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 점 P라 하고, 두 점 B, P를 지나는 직선이 변 AC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 AD와 선분 CD의 길이의 비를 가장 간단한 정수의 비로 나타내어라.

10-5 변형

세 점 A$(-2, -1)$, B$(-7, -13)$, C$(6, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 넓이의 비를 가장 간단한 정수의 비로 나타내어라.

10-6 실력

좌표평면 위의 두 점 P$(-3, 4)$, Q$(12, 5)$에 대하여 $\angle$POQ의 이등분선과 선분 PQ의 교점의 x좌표를 $\frac{b}{a}$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, O는 원점이고, a와 b는 서로소인 자연수이다.)

실전 연습 문제

01

두 점 $A(a, -1)$, $B(3, a)$에 대하여 선분 AB의 길이가 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

02

서로 다른 세 점 $A(a, -2)$, $B(b, 6)$, $C(a, b)$에 대하여 삼각형 ABC의 외심의 좌표가 $(4, 4)$일 때, b의 값은?

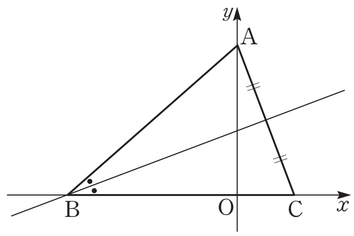
① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

03 서술형

세 점 $A(0, 3k)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이 최솟값을 가질 때, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$의 값을 구하여라. (단, $k>0$이고 O는 원점이다.)

04 기출

다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(0, a)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지날 때, 양수 a의 값은?



① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

05

두 점 $A(-1, 2)$, $B(3, 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취의 방정식을 구하여라.

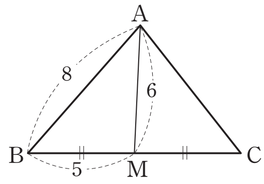
06

세 점 $A(0, 3)$, $B(3, 1)$, $C(5, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형
③ $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형
④ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형
⑤ 둔각삼각형

07

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AM}}=6$, $\overline{\mathrm{BM}}=5$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하여라.



08

점 A의 좌표가 $(2, 3)$이고 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(5, 0)$일 때, 점 B의 좌표는?

① $(3, 3)$ ② $(3, 5)$ ③ $(4, 1)$
④ $(4, 2)$ ⑤ $(4, 3)$

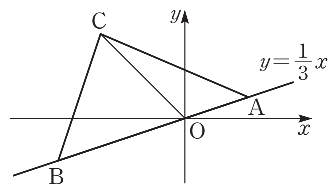
09

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(4, 2)$에 대하여 선분 AB를 $t:(1+t)$로 외분하는 점이 제2사분면 위에 있을 때, 실수 t의 값의 범위는? (단, $t>0$)

① $\frac{1}{4}<t<\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$
③ $\frac{1}{3}<t<1$ ④ $\frac{2}{5}<t<\frac{4}{5}$
⑤ $\frac{2}{5}<t<1$

10 서술형 기출

직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(3, 1)$, $\mathrm{B}(a, b)$가 있다.
제2사분면 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비가 $2:1$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$이고, O는 원점이다.)



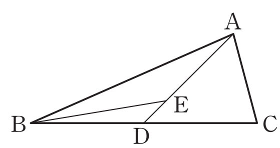
11 기출

삼각형 ABC의 변 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 P라 하고, 선분 AP를 $3:1$로 외분하는 점을 Q라고 할 때, $\frac{(\text{삼각형 ABC의 넓이})}{(\text{삼각형 CPQ의 넓이})}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

12 서술형

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 $1:1$로 내분하는 점이고, 점 E는 $\triangle\mathrm{ABC}=8\triangle\mathrm{BDE}$를 만족시킨다.
$\mathrm{A}(8, 6)$, $\mathrm{B}(-2, -4)$, $\mathrm{C}(10, 0)$일 때, 점 E의 좌표를 구하여라.



13

$\triangle$ABC에 대하여 $\overline{AB}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 위치는?

① 삼각형 ABC의 내심
② 삼각형 ABC의 무게중심
③ 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점
④ $\angle$B의 이등분선을 $2:1$로 내분하는 점
⑤ 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선을 $2:1$로 내분하는 점

14

세 점 $A(1, 7)$, $B(-5, -2)$, $C(4, -8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는?

① $(-2, -1)$ ② $(-2, 1)$ ③ $(0, -2)$
④ $(0, -1)$ ⑤ $(2, -1)$

15

평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점 A, B의 좌표는 각각 $(-1, 4)$, $(5, 8)$이다. 삼각형 ABD의 무게중심의 좌표가 $(2, 4)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표는?

① $(8, 4)$ ② $(8, 3)$ ③ $(7, 3)$
④ $(7, 4)$ ⑤ $(6, 5)$

16 서술형

네 점 $A(0, a)$, $B(5, b)$, $C(12, c)$, $D(7, 9)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모이고, $a-1=b+c$일 때, $a+b$의 최솟값을 구하여라.

17

세 점 $A(3, -2)$, $B(-5, 4)$, $C(11, 13)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 넓이의 비는 $p:q$이다. 이때 $q-p$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

18 서술형

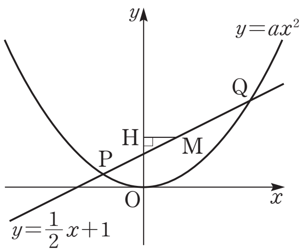
세 점 $A(a, b)$, $B(-5, 0)$, $C(5, 0)$에 대하여 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$이고, 점 A는 직선 $y=7x-5$ 위에 있다. $\angle$OAC의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 $D(c, 0)$이라고 할 때, 세 실수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

상위권 도약 문제

01

기출

다음 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2\ (a>0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점 M에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 선분 MH의 길이가 1일 때, 선분 PQ의 길이는?



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

02

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2, 5)$, $\mathrm{B}(6, 0)$에 대하여 선분 AB를 $m : n\ (m>n>0)$으로 외분하는 점을 Q라고 하자. 삼각형 OAQ의 넓이가 40일 때, $\frac{n}{m}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

03

기출

삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1 : 3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $2 : 3$으로 외분하는 점을 E, 선분 AB를 $1 : 2$로 외분하는 점을 F라고 할 때, 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 k배이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.

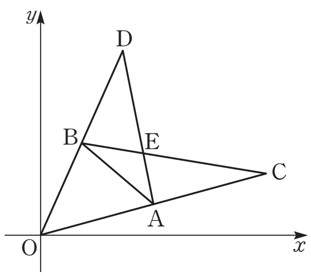
04

평행사변형 ABCD의 꼭짓점 A의 좌표는 $(2, 1)$이고 변 AB의 중점의 좌표가 $(5, 3)$, 변 BC의 중점의 좌표가 $(9, 10)$일 때, 꼭짓점 B, C, D의 모든 좌표의 값의 합을 구하여라.

05

기출

다음 그림과 같이 좌표평면에 원점 O를 한 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점을 C, 선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라고 할 때, 두 선분 AD와 BC의 교점을 $\mathrm{E}(p, q)$라고 하자. 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5, 4)$일 때, $p+q$의 값은?



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

06

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 D, $\overline{\mathrm{AD}}$의 중점을 E, $\overline{\mathrm{BE}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 F라고 하자. $\overline{\mathrm{CF}}$를 $a:b$로 외분하는 점이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $c:d$로 내분하는 점과 같다고 할 때, $ab+cd$의 값은?

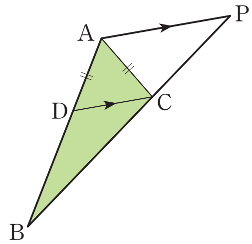
(단, a와 b, c와 d는 각각 서로소인 자연수이다.)

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

07

기출

세 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(0, 3)$, $\mathrm{B}(-5, -9)$, $\mathrm{C}(4, 0)$인 삼각형 ABC가 있다. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 점 D를 선분 AB 위에 잡는다. 점 A를 지나면서 선분 DC와 평행인 직선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 P라고 하자. 이때 점 P의 좌표는?



① $\left(\frac{61}{8}, \frac{29}{8}\right)$ ② $\left(\frac{65}{8}, \frac{33}{8}\right)$
③ $\left(\frac{69}{8}, \frac{37}{8}\right)$ ④ $\left(\frac{73}{8}, \frac{41}{8}\right)$
⑤ $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$