



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시  
1) 제작연월일 : 2020-03-10  
2) 제작자 : 교육지대(주)  
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

## 개념check

## [등차수열과 등비수열의 귀납적 정의]

## • 수열의 귀납적 정의

수열  $\{a_n\}$ 을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열  $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의라 한다.

## • 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때

## (1) 등차수열을 나타내는 관계식

$$\textcircled{1} a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow \text{공차가 } d \text{인 등차수열}$$

$$\textcircled{2} 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

$$\textcircled{3} a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

## (2) 등비수열을 나타내는 관계식

$$\textcircled{1} a_{n+1} = ra_n \Rightarrow \text{공비가 } r \text{인 등비수열}$$

$$\textcircled{2} a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

$$\textcircled{3} a_{n+1} \div a_n = a_{n+2} \div a_{n+1}$$

## 기본문제

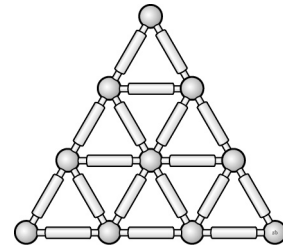
## [문제]

1. 수열  $\{a_n\}$ 이  $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_{n+1} = a_n - 8 \end{cases}$ 과 같이 귀납적으로 정의될 때, 제10항은? (단,  $n=1, 2, 3, \dots$ )

- ① 28                                      ② 36  
③ 44                                      ④ 52  
⑤ 60

## [예제]

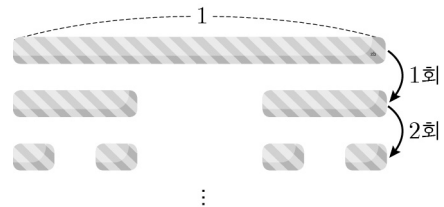
2. 다음과 같이 길이가 같은 막대 모양의 자석 블록을 이용하여 정삼각형 모양을 계속 만들어 나간다. 이렇게 만들어진 가장 큰 정삼각형 모양의 한 변에 놓인 자석 블록의 개수가  $n$ 일 때, 전체 자석 블록의 개수를  $a_n$ 개이라 하자. 이때,  $a_6$ 의 값은? (단, 동그란 자석 블록은 생각하지 않는다.)



- ① 61                                      ② 63  
③ 65                                      ④ 67  
⑤ 69

## [문제]

3. 다음과 같이 길이가 1인 사탕을 삼등분 하여 가운데 부분을 잘라 내고, 다시 남아 있는 2개의 사탕도 같은 방법으로 삼등분 하여 가운데 부분을 잘라 낸다. 이와 같은 시행을  $n$ 회 반복한 후 남은 사탕의 길이의 합을  $a_n$ 이라 하자. 이때,  $a_6$ 의 값은?



- ①  $\left(\frac{1}{3}\right)^5$                                       ②  $\left(\frac{1}{3}\right)^6$   
③  $\left(\frac{2}{3}\right)^5$                                       ④  $\left(\frac{2}{3}\right)^6$   
⑤  $\left(\frac{2}{3}\right)^7$

## 평가문제

[스스로 확인하기]

4. 다음은 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의에 대한 설명이다. 다음 빈 칸에 들어갈 것으로 알맞은 것을 모두 고르시오.

(1) 첫째항이  $a$ , 공차가  $d$  인 등차수열  $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는  $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + \boxed{\text{가}} \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$

(2) 첫째항이  $a$ , 공비가  $r(r \neq 0)$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는  $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \boxed{\text{나}} \times a_n \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$

- ① 가)  $-d$                       ② 가)  $d$   
 ③ 가)  $(n-1)d$                 ④ 나)  $r$   
 ⑤ 나)  $r^{n-1}$

[스스로 확인하기]

5. 수열  $\{a_n\}$ 이  $\begin{cases} a_1 = 256 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \end{cases}$  과 같이 귀납적으로 정의될 때, 제10항은?

- ①  $\frac{1}{8}$                                 ②  $\frac{1}{4}$   
 ③  $\frac{1}{2}$                                 ④ 1  
 ⑤ 2

[스스로 확인하기]

6. 수열  $\{a_n\}$ 이  $\begin{cases} a_1 = 3, a_2 = 5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$  과 같이 귀납적으로 정의될 때,  $a_{25}$ 의 값은?

- ① -5                                ② -3  
 ③ 0                                 ④ 3  
 ⑤ 5

[스스로 확인하기]

7. 수열  $\{a_n\}$ 이  $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{3n-2}a_n \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$

과 같이 귀납적으로 정의될 때,  $a_9$ 의 값은?

- ① 123                                ② 125  
 ③ 127                                ④ 129  
 ⑤ 131

[스스로 확인하기]

8. 수열  $\{a_n\}$ 이  $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + 2^n - 3n \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$  과 같이 귀납적으로 정의되고  $a_8 = 50$ 일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하시오.

- ① -110                                ② -115  
 ③ -120                                ④ -125  
 ⑤ -130

[스스로 확인하기]

9.  $10^5$  L의 물이 있는 연못이 있다. 매년 수질관리를 위해 연못 물의  $\frac{1}{5}$ 만큼 빼내고, 남아있는 물의 양의  $\frac{1}{5}$ 만큼 새로 채워넣는다고 한다.  $n$ 년 후의 연못의 물의 양을  $a_n$  L이라 할 때,  $a_5$ 의 값은?

- ①  $8^5$                                 ②  $\left(\frac{42}{5}\right)^5$   
 ③  $\left(\frac{44}{5}\right)^5$                             ④  $\left(\frac{46}{5}\right)^5$   
 ⑤  $\left(\frac{48}{5}\right)^5$

[스스로 마무리하기]

10. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} + 3n$ 을 만족시킬 때,  $a_7 - a_4$ 의 값은?

- ① 101                                ② 102  
 ③ 103                                ④ 104  
 ⑤ 105

[스스로 마무리하기]

11. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 2$ 이고

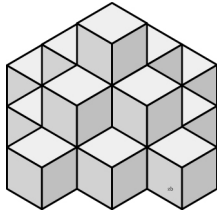
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (n \text{이 홀수}) \\ 3a_n & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

일 때,  $a_9$ 의 값은?

- ① 516                      ② 519  
 ③ 522                      ④ 525  
 ⑤ 528

[스스로 마무리하기]

12. 다음 그림과 같은 모양으로 3층 탑을 쌓으려면 크기가 같은 19개의 정육면체가 필요하다 이와 같은 방법으로 9층 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 개수는?



- ① 481개                      ② 483개  
 ③ 485개                      ④ 487개  
 ⑤ 489개

[스스로 마무리하기]

13. 모든 항이 양수인 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면

$$4S_n = a_n^2 + 2a_n - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

가 성립한다.  $a_6$ 의 값을 구하시오.

- ① 13                      ② 16  
 ③ 19                      ④ 21  
 ⑤ 24

유사문제

14.  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 제 15항을 구하면?

- ① 25                      ② 30  
 ③ 35                      ④ 40  
 ⑤ 45

15. 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 2$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$ 을 만족시킨다.  $a_6$ 의 값은?

- ① 5                      ② 8  
 ③ 9                      ④ 10  
 ⑤ 15

16. 어느 배양액에 미생물을 배양하면 1시간마다 2마리는 죽고 나머지는 각각 3마리로 분열한다. 이 배양액에 미생물 6마리를 넣고 1시간 간격으로 관찰할 때, 4시간 후의 미생물의 수는?

- ① 84마리                      ② 136마리  
 ③ 162마리                      ④ 204마리  
 ⑤ 246마리

17. 다음과 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_5$ 의 값은?

$$a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- ① 10                      ② 20  
 ③ 30                      ④ 40  
 ⑤ 50

18. 어떤 통에 60L의 물이 들어 있다. 도영이는 이번

주부터 매주 말에 이 통의 물의  $\frac{1}{3}$ 을 퍼내고 10L의 물을 새로이 넣으려고 한다.  $n$ 번째 주말에 수족관에 남는 물의 양을  $a_n L$ 라고 할 때,  $a_1$ 의 값,  $a_n$ 과  $a_{n+1}$  사이의 관계식을 순서대로 구한 것은?

- ①  $a_1 = 60, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 10$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  
 ②  $a_1 = 50, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 10$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  
 ③  $a_1 = 60, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 10$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  
 ④  $a_1 = 50, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 10$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  
 ⑤  $a_1 = \frac{55}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 60$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

19. 어떤 모임에 참석한 사람들 모두가 서로 악수를 한다고 한다. 모인 사람이  $n(n \geq 2)$ 명인 경우에 이루어지는 악수의 총 횟수를  $a_n$ 회라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ①  $a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + n$     ②  $a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n$   
 ③  $a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n$     ④  $a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + n$   
 ⑤  $a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n$

20.  $a_1 = 3, a_4 = 24, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

- ① 2450                                  ② 2603  
 ③ 2843                                  ④ 3069  
 ⑤ 3286



## 정답 및 해설

## 1) [정답] ①

[해설]  $a_{n+1} = a_n - 8$ 은 공차가  $-8$ 인 등비수열을 나타낸다.

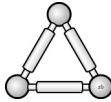
첫째항은  $100$ 이므로

$$a_{10} = 100 + (10-1) \times (-8) = 28$$

## 2) [정답] ②

[해설]  $n=1$ 일 때, 에서  $a_1 = 3$

가장 큰 정삼각형 모양의 한 변에 놓인 자석 블록의 개수가  $n$ 일 때,

그 아래로 을  $(n+1)$ 개 놓으면 가장 큰 정삼각형 모양의 한 변에 놓인 자석 블록의 개수가  $n+1$ 이 되므로

$$a_{n+1} = a_n + 3(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_2 = a_1 + 3 \times 2 = 9$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 3 = 18$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times 4 = 30$$

$$a_5 = a_4 + 3 \times 5 = 45$$

$$\therefore a_6 = a_5 + 3 \times 6 = 63$$

## 3) [정답] ④

[해설]  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )이므로

수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이  $\frac{2}{3}$ , 공비가  $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ 이므로 } a_6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

## 4) [정답] ②, ④

[해설] (1) 첫째항이  $a$ , 공차가  $d$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + \boxed{d} \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 첫째항이  $a$ , 공비가  $r(r \neq 0)$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \boxed{r} \times a_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

## 5) [정답] ③

[해설]  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ 은 공비가  $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

첫째항은  $256$ 이므로

$$a_{10} = 256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2}$$

## 6) [정답] ④

$$\text{[해설]} \begin{cases} a_1 = 3, a_2 = 5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$a_{n+2} = -a_n$ 에 의해서  $a_1, a_3, a_5, \dots$ 는  $3, -3$ 이 반복된다.

따라서  $a_{25} = 3$ 이다.

## 7) [정답] ②

$$\text{[해설]} a_2 = \frac{4}{1} \times a_1$$

$$a_3 = \frac{7}{4} \times a_2 = \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} \times a_1$$

$$a_4 = \frac{10}{7} \times a_3 = \frac{10}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} \times a_1$$

$\vdots$

$$a_9 = \frac{25}{22} \times \frac{22}{19} \times \dots \times \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} \times a_1$$

$$= 25 \times a_1 = 125$$

## 8) [정답] ③

$$\text{[해설]} a_2 = a + 2^1 - 3 \cdot 1$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 - 3 \cdot 2 = a + 2^1 + 2^2 - 3 \cdot (1+2)$$

$$a_4 = a_3 + 2^3 - 3 \cdot 3 = a + 2^1 + 2^2 + 2^3 - 3 \cdot (1+2+3)$$

$\vdots$

$$a_n = a + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})$$

$$- 3 \cdot (1+2+\dots+n-1)$$

$$= a + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_8 = a + 2^8 - 2 - 3 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = a + 170$$

$$a + 170 = 50 \text{ 이므로 } a = -120$$

## 9) [정답] ⑤

[해설]  $(n+1)$ 년 후에 이 연못에서 빼내는 물의 양은  $\frac{1}{5}a_n$ , 새로 채워 넣는 물의 양은

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right)a_n \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}a_n \text{ 이므로}$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{5}a_n + \frac{4}{25}a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{24}{25}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

즉 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이  $10^5 \left(\frac{24}{25}\right)$ 이고 공비가

$\frac{24}{25}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_5 = 10^5 \times \left(\frac{24}{25}\right)^5 = \left(\frac{48}{5}\right)^5$$

## 10) [정답] ①

$$\text{[해설]} a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} + 3n$$

$$a_7 - a_4 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + (a_5 - a_4)$$

$$= (2^5 + 18) + (2^4 + 15) + (2^3 + 12)$$

$$= 50 + 31 + 20 = 101$$

11) [정답] ③

[해설] 양의 정수  $k$ 에 대하여

$$a_{2k+1} = 3a_{2k} = 3(a_{2k-1} + 3) \text{ 이므로}$$

$$a_3 = 3(a_1 + 3) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$a_5 = 3(a_3 + 3) = 3 \cdot 18 = 54$$

$$a_7 = 3(a_5 + 3) = 3 \cdot 57 = 171$$

$$a_9 = 3(a_7 + 3) = 3 \cdot 174 = 522$$

12) [정답] ⑤

[해설] 각 층의 정육면체의 개수를 위에서부터 차례로

$a_1, a_2, a_3, \dots$ 라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 4$$

$$a_3 = a_2 + 4 \cdot 2 = a_1 + 4 + 4 \cdot 2$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot (n-1)$$

$$= 1 + 4\{1 + 2 + \dots + (n-1)\}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= 2n^2 - 2n + 1$$

따라서 9층의 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 개수는

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^9 (2k^2 - 2k + 1)$$

$$= 2 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 9$$

$$= 570 - 90 + 9 = 489 \text{ (개)}$$

13) [정답] ①

[해설]  $4S_n = a_n^2 + 2a_n - 3 \dots \textcircled{A}$

에서  $n$  대신  $n+1$ 을 대입하면

$$4S_{n+1} = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} - 3 \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$4a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n$$

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - 2(a_{n+1} + a_n) = 0$$

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$$

그런데  $a_n > 0, a_{n+1} > 0$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n - 2 = 0 \text{에서}$$

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

한편  $\textcircled{A}$ 에  $n=1$ 을 대입하면  $S_1 = a_1$ 이므로

$$4a_1 = a_1^2 + 2a_1 - 3$$

$$a_1^2 - 2a_1 - 3 = 0$$

$$(a_1 + 1)(a_1 - 3) = 0$$

그런데  $a_1 > 0$ 이므로  $a_1 = 3$

즉  $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ 이므로

수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.

따라서  $a_n = 2n + 1$ 이므로  $a_6 = 13$

14) [정답] ②

[해설]  $a_2 = \frac{2}{1} \cdot a_1$

$$a_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot a_1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{15} &= \frac{15}{14} \cdot \frac{14}{13} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot a_1 \\ &= 15a_1 = 15 \cdot 2 = 30 \end{aligned}$$

15) [정답] ④

[해설]  $a_2 = a_1 - 1 = 1$

$$a_3 = a_2 + 2 = 3$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 6$$

$$a_5 = a_4 - 1 = 5$$

$$\therefore a_6 = a_5 + 5 = 10$$

16) [정답] ⑤

[해설]  $n$ 시간 후의 미생물의 수를  $a_n$ 이라 하자.

$$a_1 = 3(6-2) = 12$$

$$a_2 = 3(a_1 - 2) = 30$$

$$a_3 = 3(a_2 - 2) = 84$$

$$\therefore a_4 = 3(a_3 - 2) = 246$$

17) [정답] ④

[해설]  $a_{n+1} - a_n = 4n$ 에  $n=1, 2, 3, 4$ 를 대입하여

좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 더하면

$$a_5 - a_1 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4$$

$$\therefore a_5 = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 40$$

18) [정답] ④

[해설]  $a_1 = 60 \times \frac{2}{3} + 10 = 50$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 10$$

19) [정답] ①

[해설] 2명이 악수하는 횟수는 1가지이므로  $a_2 = 1$

$n$ 명이 악수하는 총 횟수를  $a_n$ 이라 하면

한 명이 추가되어  $(n+1)$ 명이 악수하는 횟수는

새로운 한 명이  $n$ 명과 악수하는 횟수만큼 늘어난다.

$$\therefore a_{n+1} = a_n + n$$

20) [정답] ④

[해설] 수열  $\{a_n\}$ 은 등비수열로 공비를  $r$ 이라 하자.

$$a_4 = 3r^3 = 24 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3069$$