01 합성함수의 미분

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때
합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수

⇨ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$

겉미분
$f(g(x)) \Rightarrow f'(g(x))g'(x)$
속미분

참고 함수 $f(x)$가 미분가능할 때
(1) $y=f(ax+b)$ (a, b는 상수) ⇨ $y'=af'(ax+b)$
(2) $y=\{f(x)\}^n$ (n은 정수) ⇨ $y'=n\{f(x)\}^{n-1}$

◪ 다음 함수를 미분하여라.

1. $y=\sqrt{2x^2+1}$

2. $y=x\sqrt{1+x^2}$

3. $y=\sqrt{x^2+3x}$

4. $y=(x+1)^2(x^2-2)$

5. $y=\dfrac{1}{(3-2x)^3}$

6. $y=(5x^3+2)^2$

7. $y=(2x^2+3x+1)^2$

8. $y=(5x+1)^2-3(5x+1)+4$

9. $y=\dfrac{1}{(x^3+2x)^2}$

10. $y=\dfrac{3}{x^4+5}$

11. $y=(x^2+4x-1)^3$

12. $y=(2x-1)^3(3x+1)^2$

13. $y=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

14. $y=\dfrac{1}{(3x+2)^2}$

15. $y=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

16. $y=(x+3)^3$

17. $y=\cos^2 x$

18. $y=\sin^3 x$

19. $y=\cos(x^2+x)$

20. $y=\tan(\sin x)$

21. $y=\sin(2x+1)$

22. $y=\sin(\tan x)$

23. $y=\sqrt{1+\tan x}$

24. $y=\tan x^3$

25. $y=\sin(2x+3)$

26. $y=\tan(3x-4)$

27. $y=\sin^2 x^3$

28. $y=\tan^4(e^x+2x)$

29. $y=\cos^3(3x+1)$

◪ **다음 값을 구하여라.**

30. **함수** $f(x)=(3x-2)^{10}$**에 대하여** $f'(1)$**의 값**

31. **함수** $f(x)=(x+\sqrt{x^4+3})^3$**에 대하여** $f'(1)$**의 값**

32. **함수** $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$ **에 대하여** $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$**의 값**

33. 함수 $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}$에 대하여 $f'(1)$의 값

34. 함수 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos x-2x$에 대하여 $f'(\pi)$의 값

35. 함수 $f(x)=\sin 2x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값

36. 함수 $f(x)=\tan^2 x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값

37. 함수 $f(x)=\sin^2\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $f'\left(\frac{2}{3}\right)$의 값

38. 함수 $f(x)=\sec^2 x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값

39. 함수 $f(x)=\sin 4x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값

02 $y=x^r$ (r는 실수)의 도함수

r이 실수일 때, $y=x^r$의 도함수 $y'=rx^{r-1}$

◪ 다음 함수를 미분하여라.

40. $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$

41. $y=2\sqrt{x}$

42. $y=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

43. $y=x^{-\frac{3}{2}}$

44. $y=2\sqrt{x^3}$

45. $y=x\sqrt{6x}$

46. $y=3x^{\sqrt{3}}\,(x>0)$

47. $y=x^e\,(x>0)$

03 합성함수 미분법을 이용한 지수함수의 도함수

(1) $y=e^{f(x)} \Rightarrow y'=e^{f(x)}f'(x)$

(2) $y=a^{f(x)} \Rightarrow y'=a^{f(x)}f'(x)\ln a$

◪ 다음 함수를 미분하여라.

48. $y=e^{3x+1}$

49. $y=e^{3x+5}$

50. $y=e^{x^2+2x}$

51. $y=2^{5x-3}$

52. $y=3^{\sin x}$

53. $y=e^{3^x}$

54. $y=2^{x^2-x}$

55. $y=4^{2x-1}$

56. $y=2^{\sin x}$

◪ 다음 값을 구하여라.

57. 함수 $f(x)=2^{\tan x}+\cos x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값

58. 함수 $f(x)=5^{\sin x}$에 대하여 $f'(\pi)$의 값

59. 함수 $f(x)=5e^{3x-3}$에 대하여 $f'(1)$의 값

60. 함수 $f(x)=2e^{\sin x}\ (x>0)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값

61. 함수 $f(x)=e^{\cos x+1}$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값

62. 함수 $f(x)=xe^{x^2}$에 대하여 $f'(\sqrt{2})$의 값

63. 함수 $f(x)=3^{2x}+x+1$에 대하여 $f'(0)$의 값

64. 함수 $f(x)=-3e^{3x+1}$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값

04 합성함수 미분법을 이용한 로그함수의 도함수

(1) $y=\ln|f(x)|$ ⇨ $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(2) $y=\log_a|f(x)|$ ⇨ $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

◪ 다음 함수를 미분하여라.

65. $y=\ln|3x+6|$

66. $y=\ln|x^2|$

67. $y=\ln|x^3+5x-4|$

68. $y=\log_2|x^3-1|$

69. $y=\ln|x^2-3|$

70. $y=\log_3|5x+2|$

71. $y=\ln|\cos x|$

72. $y=\log_2|e^x-1|$

73. $y=\ln|\sin 2x|$

74. $y=\ln|4x+1|$

75. $y=\ln(x^2+5x+10)$

76. $y=\log_3(e^x+2)$

77. $y=\log_5(x-1)^2$

◪ 로그함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

78. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)^3}{(x-5)^4}$

79. $f(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x-4}}{x+5}$

80. $f(x)=x^{\sin x}$ $(x>0)$

81. $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x+3}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 값을 구하여라.

82. 함수 $f(x)=\ln(3x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값

83. 함수 $f(x)=\ln|\tan x|$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값

84. 함수 $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|$에 대하여 $f'(\pi)$의 값

85. 함수 $f(x)=\ln(x^4+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값

86. 함수 $f(x)=\ln(x^2+4x+5)$에 대하여 $f'(-1)$의 값

87. 함수 $f(x)=\ln\frac{x^2+1}{5x^4+7}$에 대하여 $f'(1)$의 값

88. 함수 $f(x)=\log_2|\tan x|$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값

89. 함수 $f(x)=x^{\ln x}\ (x>0)$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{e}\right)$의 값

90. 함수 $f(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^3$에 대하여 $f'(1)$의 값

91. 함수 $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x})$에 대하여 $f'(0)$의 값

◪ 다음 물음에 답하여라.

92. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(3)=-1$, $f'(3)=2$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$에 대하여 $g'(3)$의 값을 구하여라.

93. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1$, $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+2}{x-3}=-2$를 만족하고 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하여라.

94. 미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$는 $h'(1)=4$를 만족시킬 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

95. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)=3x-1$에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)=x^2+5x-3$일 때, $f'(5)$의 값을 구하여라.

96. 미분가능한 함수 $f(x)$가 0이 아닌 실수 x에 대하여 $f(3x-2)=e^x+x^2+\ln|x|$를 만족할 때, $f'(4)$의 값을 구하여라.

97. 함수 $f(x)=x^2+x+2$와 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하자. $g'(4)=3$일 때, $h'(1)$의 값을 구하여라.

98. 구간 $6<x<10$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(x)=\log_5(x^2-5x)$를 만족시킬 때, $f'(7)$의 값을 구하여라.

99. 이차함수 $f(x)=ax^2+1$과 일차함수 $g(x)=3x+1$에 대하여 함수 $y=f(g(x))$의 도함수가 $y'=3x+1$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

100. 함수 $f(x)=\ln x$의 합성함수 $y=f(f(x))$의 $x=e^2$에서의 미분계수를 구하여라. (단, $x>e$)

정답 및 해설

1) $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

⇨ $y = \sqrt{2x^2+1} = (2x^2+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y' = \dfrac{1}{2}(2x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(2x^2+1)'$

$= \dfrac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 4x$

$= \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

2) $y' = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

⇨ $y' = (x)'\sqrt{1+x^2} + x(\sqrt{1+x^2})'$

$= \sqrt{1+x^2} + x \times \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x$

$= \sqrt{1+x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $y' = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

⇨ $y = (x^2+3x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y' = \dfrac{1}{2}(x^2+3x)^{-\frac{1}{2}} \times (x^2+3x)' = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

4) $y' = 2(x+1)(2x^2+x-2)$

⇨ $y' = \{(x+1)^2\}'(x^2-2) + (x+1)^2(x^2-2)'$

$= 2(x+1)(x^2-2) + (x+1)^2 \times 2x$

$= 2(x+1)\{(x^2-2) + x(x+1)\}$

$= 2(x+1)(2x^2+x-2)$

5) $y' = \dfrac{6}{(3-2x)^4}$

⇨ $y = \dfrac{1}{(3-2x)^3} = (3-2x)^{-3}$이므로

$y' = -3(3-2x)^{-4}(3-2x)' = -3(3-2x)^{-4} \times (-2)$

$= \dfrac{6}{(3-2x)^4}$

6) $y' = 30x^2(5x^3+2)$

⇨ $u = 5x^3+2$로 놓으면 $y = u^2$에서

$\dfrac{du}{dx} = 15x^2$, $\dfrac{dy}{du} = 2u$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dy} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u \cdot 15x^2$

$= 2(5x^3+2) \cdot 15x^2 = 30x^2(5x^3+2)$

7) $y' = 2(x+1)(2x+1)(4x+3)$

⇨ $u = 2x^2+3x+1$로 놓으면 $y = u^2$에서

$\dfrac{du}{dx} = 4x+3$, $\dfrac{dy}{du} = 2u$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u \cdot (4x+3)$

$= 2(2x^2+3x+1)(4x+3)$

$= 2(x+1)(2x+1)(4x+3)$

8) $y' = 50x-5$

⇨ $u = 5x+1$로 놓으면 $y = u^2-3u+4$에서

$\dfrac{du}{dx} = 5$, $\dfrac{dy}{du} = 2u-3$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (2u-3) \cdot 5$

$= 10u-15 = 10(5x+1)-15$

$= 50x+10-15 = 50x-5$

9) $y' = -\dfrac{2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^3}$

⇨ $y = (x^3+2x)^{-2}$이므로

$y' = -2(x^3+2x)^{-3} \times (x^3+2x)'$

$= -2(x^3+2x)^{-3} \times (3x^2+2) = -\dfrac{2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^3}$

10) $y' = \dfrac{-12x^3}{(x^4+5)^2}$

⇨ $u = x^4+5$로 놓으면 $y = \dfrac{3}{u}$에서

$\dfrac{du}{dx} = 4x^3$, $\dfrac{dy}{du} = -\dfrac{3}{u^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \left(-\dfrac{3}{u^2}\right) \cdot 4x^3$

$= \left(-\dfrac{3}{(x^4+5)^2}\right) \cdot 4x^3 = \dfrac{-12x^3}{(x^4+5)^2}$

11) $y' = 6(x+2)(x^2+4x-1)^2$

⇨ $y' = 3(x^2+4x-1)^2(x^2+4x-1)'$

$= 3(x^2+4x-1)^2(2x+4)$

$= 6(x+2)(x^2+4x-1)^2$

12) $y' = 30x(2x-1)^2(3x+1)$

⇨ $y' = \{(2x-1)^3\}'(3x+1)^2 + (2x-1)^3\{(3x+1)^2\}'$

$= 3(2x-1)^2 \times 2 \times (3x+1)^2 + (2x-1)^3 \times 2(3x+1) \times 3$

$= 6(2x-1)^2(3x+1)\{(3x+1)+(2x-1)\}$

$= 30x(2x-1)^2(3x+1)$

13) $y' = 2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

⇨ $y' = 2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)' = 2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

14) $y' = -\dfrac{6}{(3x+2)^3}$

⇨ $u = 3x+2$로 놓으면 $y = \dfrac{1}{u^2}$에서

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\frac{du}{dx}=3$, $\frac{dy}{du}=-\frac{2}{u^3}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(-\frac{2}{u^3}\right)\cdot 3$

$=\left(-\frac{2}{(3x+2)^3}\right)\cdot 3=-\frac{6}{(3x+2)^3}$

15) $y'=2x+2+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$

⇨ $u=x-\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=u^2+2u$에서

$\frac{du}{dx}=1+\frac{1}{x^2}$, $\frac{dy}{du}=2u+2$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(2u+2)\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left\{2\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\right\}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=2x+2+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$

16) $y'=3(x+3)^2$

⇨ $y'=3(x+3)^2(x+3)'=3(x+3)^2\times 1$
$=3(x+3)^2$

17) $y'=-2\sin x\cos x$

⇨ $y=\cos^2 x=\cos x\times\cos x$ 이므로
$y'=(\cos x)'\cos x+\cos x(\cos x)'$
$=-\sin x\times\cos x+\cos x\times(-\sin x)$
$=-2\sin x\cos x$

18) $y'=3\sin^2 x\cos x$

⇨ $y'=3\sin^2 x\times(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$

19) $y'=-(2x+1)\sin(x^2+x)$

⇨ $y'=-\sin(x^2+x)\times(x^2+x)'$
$=-(2x+1)\sin(x^2+x)$

20) $y'=\sec^2(\sin x)\cos x$

⇨ $y'=\sec^2(\sin x)\times(\sin x)'=\sec^2(\sin x)\cos x$

21) $y'=2\cos(2x+1)$

⇨ $y'=\cos(2x+1)(2x+1)'=2\cos(2x+1)$

22) $y'=\sec^2 x\cos(\tan x)$

⇨ $y'=\cos(\tan x)\times(\tan x)'=\sec^2 x\cos(\tan x)$

23) $y'=\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}$

⇨ $y=(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$y'=\frac{1}{2}(1+\tan x)^{\frac{1}{2}-1}\times(1+\tan x)'$

$=\frac{1}{2}(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}\times\sec^2 x=\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}$

24) $y'=3x^2\sec^2 x^3$

⇨ $y'=\sec^2 x^3\times(x^3)'=3x^2\sec^2 x^3$

25) $y'=2\cos(2x+3)$

⇨ $u=2x+3$으로 놓으면 $y=\sin u$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot 2=2\cos(2x+3)$

26) $y'=3\sec^2(3x-4)$

⇨ $u=3x-4$로 놓으면 $y=\tan u$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\sec^2 u\cdot 3=3\sec^2(3x-4)$

27) $y'=6x^2\sin x^3\cos x^3$

⇨ $y'=\{(\sin x^3)^2\}'=2\sin x^3\times\cos x^3\times(x^3)'$
$=6x^2\sin x^3\cos x^3$

28) $y'=4(e^x+2)\tan^3(e^x+2x)\sec^2(e^x+2x)$

⇨ $y'=[\{\tan(e^x+2x)\}^4]'$
$=4\tan^3(e^x+2x)\times\sec^2(e^x+2x)\times(e^x+2)$
$=4(e^x+2)\tan^3(e^x+2x)\sec^2(e^x+2x)$

29) $y'=-9\cos^2(3x+1)\sin(3x+1)$

⇨ $y'=[\{\cos(3x+1)\}^3]'$
$=3\cos^2(3x+1)\times\{-\sin(3x+1)\}\times 3$
$=-9\cos^2(3x+1)\sin(3x+1)$

30) 30

⇨ $f'(x)=10(3x-2)^9\cdot 3$ $\quad\therefore f'(1)=30$

31) 54

⇨ $f'(x)=3(x+\sqrt{x^4+3})^2(x+\sqrt{x^4+3})'$

$=3(x+\sqrt{x^4+3})^2\left(1+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\right)$

$\therefore f'(1)=3(1+2)^2\times(1+1)=54$

32) $\sqrt{3}$

⇨ $f'(x)=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}$ $\quad\therefore f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$

33) $\frac{1}{6}$

34) 0

35) 1

36) $8\sqrt{3}$

⇨ $f(x)=\tan^2 x$를 미분하면

$f'(x)=2\tan x(\tan x)'=2\tan x\cdot\sec^2 x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\tan\frac{\pi}{3}\sec^2\frac{\pi}{3}=2\cdot\sqrt{3}\cdot(2^2)=8\sqrt{3}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

37) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

⇨ $f'(x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \times \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \times \pi$

$\therefore f'\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \times \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \times \pi$

$= 2\pi \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

38) $8\sqrt{3}$

⇨ $f'(x) = 2\sec x(\sec x \tan x) = 2\sec^2 x \tan x$

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sqrt{3}$

39) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $f'(x) = 4\cos 4x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin 4x\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

40) $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

⇨ $y = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

41) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

⇨ $y' = 2(x^{\frac{1}{2}})' = 2 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

42) $y' = -\frac{5}{2x^3\sqrt{x}}$

⇨ $y = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = x^{-\frac{5}{2}}$이므로 $y' = -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{5}{2x^3\sqrt{x}}$

43) $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

⇨ $y' = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

44) $y' = 3\sqrt{x}$

⇨ $y' = (2\sqrt{x^3})' = \left(2x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$

45) $y' = \frac{3\sqrt{6}x}{2}$

⇨ $y' = (x\sqrt{6x})' = \left(\sqrt{6}x^{\frac{3}{2}}\right)' = \sqrt{6} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$

$= \frac{3\sqrt{6x}}{2}$

46) $y' = 3\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

47) $y' = ex^{e-1}$

48) $y' = 3e^{3x+1}$

⇨ $y' = e^{3x+1}(3x+1)' = 3e^{3x+1}$

49) $y' = 3e^{3x+5}$

⇨ $u = 3x+5$로 놓으면 $y = e^u$에서

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (e^u)' \cdot (3x+5)' = e^u \cdot 3 = 3e^{3x+5}$

50) $y' = 2(x+1)e^{x^2+2x}$

⇨ $y' = e^{x^2+2x} \times (x^2+2x)' = 2(x+1)e^{x^2+2x}$

51) $y' = 5 \times 2^{5x-3}\ln 2$

⇨ $y' = 2^{5x-3} \times \ln 2 \times (5x-3)' = 5 \times 2^{5x-3}\ln 2$

52) $y' = 3^{\sin x}\ln 3\cos x$

⇨ $y' = 3^{\sin x} \times \ln 3 \times (\sin x)' = 3^{\sin x}\ln 3\cos x$

53) $y' = e^{3^x} \times 3^x\ln 3$

⇨ $y' = e^{3^x} \times (3^x)' = e^{3^x} \times 3^x\ln 3$

54) $y' = (2x-1)2^{x^2-x}\ln 2$

⇨ $y' = 2^{x^2-x} \times \ln 2 \times (x^2-x)'$

$= (2x-1)2^{x^2-x}\ln 2$

55) $y' = 2^{4x}\ln 2$

⇨ $y' = (4^{2x} \cdot 4^{-1})' = \frac{1}{4} \cdot 4^{2x}\ln 4 \cdot 2 = 2^{4x}\ln 2$

56) $y' = 2^{\sin x}\ln 2\cos x$

⇨ $u = \sin x$로 놓으면 $y = 2^u$에서

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2^u)' \cdot (\sin x)'$

$= 2^u\ln 2 \cdot \cos x = 2^{\sin x}\ln 2\cos x$

57) $4\ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨$(a^x)' = a^x\ln a$이므로 $f(x) = 2^{\tan x} + \cos x$를 미분하면

$f'(x) = 2^{\tan x}\ln 2\sec^2 x - \sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\tan\frac{\pi}{4}}\ln 2\sec^2\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}$

$= 2^1 \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 4\ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

58) $-\ln 5$

⇨ $f'(x)=5^{\sin x}\ln 5\times(\sin x)'=5^{\sin x}\ln 5\times\cos x$이므로
구하는 극한값은 $f'(\pi)=-\ln 5$

59) 15

60) $\sqrt{3e}$

61) $-e$

⇨ $f'(x)=e^{\cos x+1}\times(\cos x+1)'=-e^{\cos x+1}\sin x$이므로
$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e\sin\frac{\pi}{2}=-e$

62) $5e^2$

⇨ $f'(x)=(x)'e^{x^2}+x(e^{x^2})'$
$=e^{x^2}+x\times 2xe^{x^2}=(1+2x^2)e^{x^2}$
따라서 구하는 극한값은 $f'(\sqrt{2})=5e^2$

63) $2\ln 3+1$

⇨ $f'(x)=3^{2x}\ln 3\times(2x)'+1=3^{2x}\times 2\ln 3+1$ 이므로
$f'(0)=2\ln 3+1$

64) $-9e^2$

⇨ $f'(x)=-3e^{3x+1}\times(3x+1)'=-9e^{3x+1}$이므로
$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-9e^2$

65) $y'=\frac{1}{x+2}$

⇨ $u=3x+6$으로 놓으면 $y=\ln|u|$에서
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\ln|u|)'\cdot(3x+6)'$
$=\frac{1}{u}\cdot 3=\frac{3}{3x+6}=\frac{1}{x+2}$

66) $y'=\frac{2}{x}$

⇨ $y'=(\ln|x^2|)'=\frac{(x^2)'}{x^2}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

67) $y'=\frac{3x^2+5}{x^3+5x-4}$

⇨ $y'=\frac{(x^3+5x-4)'}{x^3+5x-4}=\frac{3x^2+5}{x^3+5x-4}$

68) $y'=\frac{3x^2}{(x^3-1)\ln 2}$

⇨ $y'=\frac{(x^3-1)'}{x^3-1}\cdot\frac{1}{\ln 2}=\frac{3x^2}{(x^3-1)\ln 2}$

69) $y'=\frac{2x}{x^2-3}$

⇨ $y'=\frac{(x^2-3)'}{x^2-3}=\frac{2x}{x^2-3}$

70) $y'=\frac{5}{(5x+2)\ln 3}$

⇨ $y'=\frac{(5x+2)'}{(5x+2)\ln 3}=\frac{5}{(5x+2)\ln 3}$

71) $y'=-\tan x$

⇨ $y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

72) $y'=\frac{e^x}{(e^x-1)\ln 2}$

⇨ $y'=\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1)\ln 2}=\frac{e^x}{(e^x-1)\ln 2}$

73) $y'=2\cot 2x$

⇨ $y'=\frac{(\sin 2x)'}{\sin 2x}=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=2\cot 2x$

74) $y'=\frac{4}{4x+1}$

⇨ $y'=\frac{(4x+1)'}{4x+1}=\frac{4}{4x+1}$

75) $y'=\frac{2x+5}{x^2+5x+10}$

⇨ $y'=\frac{(x^2+5x+10)'}{x^2+5x+10}=\frac{2x+5}{x^2+5x+10}$

76) $y'=\frac{e^x}{(e^x+2)\ln 3}$

⇨ $y'=\frac{(e^x+2)'}{(e^x+2)\ln 3}=\frac{e^x}{(e^x+2)\ln 3}$

77) $y'=\frac{2}{(x-1)\ln 5}$

⇨ $y'=\frac{\{(x-1)^2\}'}{(x-1)^2\ln 5}=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2\ln 5}=\frac{2}{(x-1)\ln 5}$

78) $\frac{(x+2)^2(-25x+13)}{(x-5)^5}$

⇨ 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면
$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)^3}{(x-5)^4}\right|$
$=\ln|x-1|+3\ln|x+2|-4\ln|x-5|$
이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-5}$
$=\frac{(x+2)(x-5)+3(x-1)(x-5)-4(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-5)}$
$=\frac{-25x+13}{(x-1)(x+2)(x-5)}$
$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{-25x+13}{(x-1)(x+2)(x-5)}$
$=\frac{(x-1)(x+2)^3}{(x-5)^4}\cdot\frac{(-25x+13)}{(x-1)(x+2)(x-5)}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$$=\frac{(x+2)^2(-25x+13)}{(x-5)^5}$$

79) $f'(x)=\dfrac{x^2+16x-53}{2(x+5)^2\sqrt{x-4}}$

⇨ 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-1)\sqrt{x-4}}{x+5}\right|$$

$$=\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-4|-\ln|x+5|$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x-4)}-\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{x^2+16x-53}{2(x-4)(x-1)(x+5)}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{x^2+16x-53}{2(x-4)(x-1)(x+5)}$$

$$=\frac{(x-1)\sqrt{x-4}}{x+5}\cdot\frac{x^2+16x-53}{2(x-4)(x-1)(x+5)}$$

$$=\frac{x^2+16x-53}{2(x+5)^2\sqrt{x-4}}$$

80) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

⇨ 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln|x^{\sin x}|=\sin x\ln x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

따라서

$$f'(x)=f(x)\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

81) $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(x^2+5x+1)}{(x+3)^2}$

⇨ 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)(x-2)^2}{x+3}\right|$$

$$=\ln|x+1|+2\ln|x-2|-\ln|x+3|$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}$$

$$=\frac{(x-2)(x+3)+2(x+1)(x+3)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{2x^2+10x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2x^2+10x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-2)^2}{x+3}\cdot\frac{2x^2+10x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{2(x-2)(x^2+5x+1)}{(x+3)^2}$$

82) $\dfrac{3}{5}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{3}{3x+2}$ $\quad\therefore f'(1)=\dfrac{3}{5}$

83) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

84) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{\left(\cos\frac{x}{3}\right)'}{\cos\frac{x}{3}}=\dfrac{-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}=-\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{3}$이므로

구하는 극한값은

$f'(\pi)=-\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

85) 1

⇨ $f'(x)=\dfrac{(x^4+3)'}{x^4+3}=\dfrac{4x^3}{x^4+3}$이므로 구하는

극한값은 $f'(1)=\dfrac{4}{4}=1$

86) 1

⇨ $f'(x)=\dfrac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$이므로

$f'(-1)=\dfrac{-2+4}{1-4+5}=1$

87) $-\dfrac{2}{3}$

⇨ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(5x^4+7)$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}-\frac{(5x^4+7)'}{5x^4+7}$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{20x^3}{5x^4+7}$$

이므로 $f'(1)=1-\dfrac{20}{12}=-\dfrac{2}{3}$

88) $\dfrac{2}{\ln 2}$

⇨ $f'(x)=\dfrac{(\tan x)'}{\tan x\times\ln 2}=\dfrac{\sec^2 x}{\tan x\times\ln 2}$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{\ln 2}$

89) $-2e^2$

⇨ 주어진 함수식의 양변에 자연로그를 취하여

x에 대해 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2\ln x}{x}$

$f'(x)=f(x)\frac{2\ln x}{x}$

$\therefore\ f'\left(\frac{1}{e}\right)=e\times(-2e)=-2e^2$

90) 0

91) 3

⇨ $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x})$이므로

$f'(x)=\frac{(e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x})'}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x}}$

$=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+4e^{4x}+5e^{5x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x}}$

$\therefore f'(0)=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$

92) $-\sqrt{2}$

⇨ $g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$

$\therefore g'(3)=\frac{f(3)f'(3)}{\sqrt{1+\{f(3)\}^2}}=\frac{(-1)\times2}{\sqrt{1+(-1)^2}}=-\sqrt{2}$

93) -2

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$ $\therefore f(1)=3$

미분계수의 정의에 의해

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

마찬가지로 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+2}{x-3}=-2$에서

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to3}\{g(x)+2\}=0$ $\therefore g(3)=-2$

미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)+2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=-2$

합성함수의 미분법을 이용하여

$h(x)=g(f(x))$를 미분하면

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$\therefore h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(3)f'(1)$
$=-2\times1=-2$

94) 16

⇨ $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'\left(\frac{1}{2}\right)g'(1)=4$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=16\ \left(\because g'(x)=\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2},g'(1)=\frac{1}{4}\right)$

95) 3

⇨ $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=2x+5=f'(g(x))\times3$

$g(x)=5$인 $x=2$이므로

$(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)=2\times2+5=f'(g(2))\times3=3f'(5)$

$\therefore\ f'(5)=3$

96) $\frac{e^2}{3}+\frac{3}{2}$

⇨ $f(3x-2)=e^x+x^2+\ln|x|$를 미분하면

$\{f(3x-2)\}'=(e^x+x^2+\ln|x|)'$

$f'(3x-2)\cdot3=e^x+2x+\frac{1}{x}$

$f'(3x-2)=\frac{e^x}{3}+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3x}$

위의 도함수 $f'(3x-2)$에 대하여 $f'(4)$의 값은 $x=2$일 때이다.

즉, $f'(4)=f'(3\cdot2-2)=\frac{e^2}{3}+\frac{2}{3}\cdot2+\frac{1}{3\cdot2}$

$=\frac{e^2}{3}+\frac{3}{2}$

97) 9

⇨ $f'(x)=2x+1,\ f'(1)=3,\ f(1)=4$

따라서 $g'(4)=3$ 이므로 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(4)\times3=3\times3=9$

98) $\frac{9}{14\ln5}$

⇨ $u=x^2-5x$로 놓으면 $y=\log_5 u$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\log_5 u)'\cdot(x^2-5x)'$

$=\left(\frac{1}{u\ln5}\right)\cdot(2x-5)=\frac{2x-5}{(x^2-5x)\ln5}$

$\therefore f'(7)=\frac{2\cdot7-5}{(7^2-5\cdot7)\ln5}=\frac{9}{14\ln5}$

99) $\frac{1}{6}$

⇨ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 미분하면

$f'(x)=2ax,\ g'(x)=3$

이때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구하면

$y'=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$=2a(3x+1)\cdot3=6a(3x+1)$이고,

문제에서 $y'=3x+1$이라 하였으므로

$6a=1$ $\therefore a=\frac{1}{6}$

100) $\frac{1}{2e^2}$

⇨ $y=f(f(x))$를 미분하면 $y'=f'(f(x))\cdot f'(x)$

또한 $f(x)=\ln x$의 도함수는 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$y'=f'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x}$

따라서 $x=e^2$에서의 미분계수는 $\dfrac{1}{e^2\ln e^2}=\dfrac{1}{2e^2}$이다.