01 복잡한 수열의 수렴, 발산 판정

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수렴과 발산
① (분자의 차수)=(분모의 차수)
⇨ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.
② (분자의 차수)<(분모의 차수) ⇨ 극한값은 0이다.
③ (분자의 차수)>(분모의 차수) ⇨ 발산한다.
(2) $\infty-\infty$ 꼴의 수렴과 발산
① 다항식일 경우, 최고차항으로 묶는다.
② 무리식을 포함한 경우, 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◪ 다음 극한을 조사하여라.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{2n+4}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n-3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-4n-2n^3}{1+3n}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2-4}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5}{2n+3}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n+3n^3}{1-2n^3}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{n+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n+1}+\sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{n-1}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-2n^2)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}$

14. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$

15. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{9n^2+1}-n}$

16. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-n)$

17. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n^2)$

18. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+2n})$

02 미정계수의 결정

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴인 분수식의 극한값이 0이 아닌 실수이면

⇨ 분모, 분자의 차수가 같다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴인 무리식의 극한값이 0이 아닌 실수이면

⇨ 무리식을 유리화한다.

◪ 다음을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

19. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{5n-2}=4$

20. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n+2}=2$

21. $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{an^2+4n+3}=3$

22. $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+3}{an^2-7n+5}=2$

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+1}{n^2+4n}=3$

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+3}{(n-1)^2}=2$

◪ 다음을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

25. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)=2$

26. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=4$

27. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=9$

28. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=3$

◪ 다음 물음에 답하여라.

29. $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-1}{an^3+bn^2+10n}=2$가 성립할 때, a^2+b^2의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

30. $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-an+1}-n)=b$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

31. $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2n+3}-n-a)=b$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이고, $b\neq 0$)

03 일반항을 포함한 식의 극한값

① 수렴하는 수열에 대한 극한값이 주어진 문제는 극한값의 기본 성질을 이용한다.
② 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값이 주어진 문제는 먼저 극한값의 기본 성질을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

◪ 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=8$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

32. $\lim_{n\to\infty}a_n$

33. $\lim_{n\to\infty}b_n$

34. $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)$

35. $\lim_{n\to\infty}(a_n+4b_n)$

◪ 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

36. $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$

37. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2$

◪ 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 구하여라.

38. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{2a_n+1}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

39. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-1}{2a_n-1}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

40. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{2a_n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

41. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

42. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+4}{a_n-1}=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

43. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n+4}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

44. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{a_n-3}=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

45. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-1}{a_n+1}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

46. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{3a_n+2}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

47. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6}{3a_n+1}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

48. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{3a_n-2}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

49. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+5}{6-2a_n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값

50. $\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n$의 값

51. $\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n$의 값

52. $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}na_n$의 값

53. $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=8$일 때, $\lim_{n\to\infty}na_n$의 값

54. $\lim_{n\to\infty}(2n+5)a_n=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}na_n$의 값

55. $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=12$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3a_n}{2n+1}$의 값

56. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+2}$의 값

57. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n-4}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값

58. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+7}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n^3}$의 값

59. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}+2n}=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n^2+3n}$의 값

60. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}}$의 값

04 수열의 극한값의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

◪ 다음을 구하여라.

61. $\frac{n-1}{n} \le a_n \le \frac{n+1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

62. $\frac{3n-1}{n} < a_n < \frac{3n+4}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

63. $\frac{n}{4n+5} < a_n < \frac{n+6}{4n+3}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

64. $\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n^2+3n+1}{n^2}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

65. $\frac{4n-1}{n} < a_n < \frac{4n^2+3n+1}{n^2}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

66. $\frac{5n-2}{n+1} < a_n < \frac{5n+1}{n-2}$일 때, $\lim_{n\to\infty} (a_n+1)$의 값

67. $\frac{10n-2}{n+2} < a_n < \frac{10n+1}{n+1}$일 때, $\lim_{n\to\infty} (a_n+4)$의 값

68. $2n-1 < na_n < 2n+4$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

69. $3n+1 < (n+2)a_n < 3n+3$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

70. $5n^2-2n < n^2a_n < 5n^2+2$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

71. $4n^2+2 < a_n < 4n^2+3$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{4n^2+1}$의 값

72. $3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{4a_n}{n^2+2n}$의 값

73. $3n^2-2n+1 < n^2a_n < 3n^2+2n+3$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값

74. $6n-1 < a_n < 6n+1$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+2}$의 값

05 수렴 판정 문제

(1) 극한값이 존재하는 경우에만 극한값이 기본 성질을 이용할 수 있다.
(2) ∞는 실수가 아니지만 극한값을 계산할 때 다음과 같이 생각하면 편리하다. (단, a는 상수)
① $a+\infty=\infty$, $a-\infty=-\infty$
② $a>0$ 이면 $a\times\infty=\infty$, $a\times(-\infty)=-\infty$
$a<0$ 이면 $a\times\infty=-\infty$, $a\times(-\infty)=\infty$
③ $\frac{a}{\infty}=\frac{a}{-\infty}=0$

◪ 다음 명제의 참, 거짓을 ( ) 안에 써넣어라.

75. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-1$이다. ( )

76. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$이다. ( )

77. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이다. ( )

78. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$이다. (단, α와 β는 상수) ( )

79. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다. ( )

80. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다. ( )

81. $\lim_{n\to\infty}|a_n|$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n$도 수렴한다. ( )

82. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$이다. ( )

83. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$도 수렴한다. ( )

84. $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$이 모두 발산하면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$도 발산한다. ( )

85. $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$이 같은 값으로 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$이다. ( )

86. $a_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n$도 수렴한다. ( )

87. **모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 $\{c_n\}$은 수렴한다. (　　　)**

정답 및 해설

1) $\frac{1}{2}$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$

2) ∞

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2+\frac{4}{n}}=\frac{\infty}{2}=\infty$

3) ∞

⇨ $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 (분자의 차수)>(분모의 차수)이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n-3}=\infty$

4) $-\infty$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{1-4n-2n^3}{1+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-4-2n^2}{\frac{1}{n}+3}=\frac{-\infty}{3}$

$=-\infty$

5) 0

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$

6) ∞

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\infty$

7) $-\frac{3}{2}$

⇨ $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 (분자의 차수)=(분모의 차수)이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n+3n^3}{1-2n^3}=-\frac{3}{2}$

8) 0

⇨ $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 (분자의 차수)<(분모의 차수)이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{n+1}=0$

9) $\frac{5}{3}$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n+1}+\sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{3+2}{2+1}=\frac{5}{3}$

10) ∞

⇨ $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}\right)=\infty$

11) ∞

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$

12) ∞

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{3}$

$=\frac{\infty}{3}=\infty$

13) 3

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1}=3$

14) 1

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}-1}$

$=\frac{2}{3-1}=1$

15) 2

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{9n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}-1}=\frac{4}{3-1}$

$=2$

16) $-\infty$

⇨ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-n)(\sqrt{n+1}+n)}{\sqrt{n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n^2}{\sqrt{n+1}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-n}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

17) $-\infty$

⇨ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n^2)$

$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-1\right)$

$=-\infty$

18) -2

⇨ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+2n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-(n^2+2n)}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\frac{-4}{2}=-2$

19) $a=0$, $b=20$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{5n-2}$의 극한값이 유한 확정값이므로 $a=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}=\frac{b}{5}=4$이므로 $b=20$

20) $a=0$, $b=6$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n+2}$이 극한값을 가지려면 $a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{b}{3}=2$이므로 $b=6$

$\therefore a=0$, $b=6$

21) $a=0$, $b=12$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{an^2+4n+3}$이 0이 아닌 극한값을 가지려면 $a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n}}=\frac{b}{4}=3$이므로 $b=12$

$\therefore a=0$, $b=12$

22) $a=0$, $b=-14$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+2}{an^2-7n+5}$의 극한값이 유한 확정값이므로 $a=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+3}{-7n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{3}{n}}{-7+\frac{5}{n}}=\frac{b}{-7}=2$이므로

$b=-14$

23) $a=0$, $b=3$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+1}{n^2+4n}$의 극한값이 유한 확정값이므로 분모, 분자의 차수가 같다. $\therefore a=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2+1}{n^2+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}=\frac{b}{1}=3$ $\therefore b=3$

24) $a=0$, $b=2$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+3}{(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+3}{n^2-2n+1}\cdots$ ㉠

㉠이 극한값을 가지려면 $a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2+3}{n^2-2n+1}=\frac{b}{1}=2$이므로 $b=2$

$\therefore a=0$, $b=2$

25) 4

⇨ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an)-n^2}{\sqrt{n^2+an}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}=2$

$\therefore a=4$

26) 16

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(n+1-n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$

$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{1})}{2}=\sqrt{a}$

$\sqrt{a}=4$ 이므로 $a=16$

27) 9

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a-n)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}\right)}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{2a}{2}=a=9$

28) 6

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a-n)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(n+2-n)(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}$

$=\frac{a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

29) 16

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-1}{an^3+bn^2+10n}$의 값이 0이 아니므로 $a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-1}{bn^2+10n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{b+\frac{10}{n}}=\frac{8}{b}=2$

이므로 $b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=0+4^2=16$

30) $\frac{1}{2}$

⇨ $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-an+1}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-an+1)-n^2\}}{\sqrt{n^2-an+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-an^2+n}{\sqrt{n^2-an+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-an+1}{\sqrt{1-\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=b$이므로 $a=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=b$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}$

31) 2

⇨ $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2n+3}-n-a)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2+2n+3)-(n+a)^2\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2+2n+3)-(n^2+2an+a^2)\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{2(1-a)n+3-a^2\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1-a)n+3-a^2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{a}{n}}=b$

이므로 $1-a=0$에서 $a=1$이고, 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{3-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}=1=b$

$\therefore a+b=1+1=2$

32) 5

⇨ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$

$=2\alpha=10$

$\therefore \alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=5$

33) 3

⇨ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$

$=2\beta=6$

$\therefore \beta=\lim_{n\to\infty}b_n=3$

34) 1

⇨ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=2\alpha-3\beta$

$=2\times5-3\times3=1$

35) 17

⇨ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+4b_n)=\alpha+4\beta$

$=5+4\times3=17$

36) 5

⇨ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$,

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, α와 β는 상수)라 하면
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=3$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta=2$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=\alpha^2+\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=3^2-2\times2=5$

37) 1

⇨ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$,
$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, α와 β는 상수)라 하면
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=3$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta=2$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2=(\alpha-\beta)^2$
$=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta$
$=5-2\times2=1$

38) 0

⇨ $\dfrac{a_n+1}{2a_n+1}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$

a_n을 b_n으로 나타내면 $a_n+1=b_n(2a_n+1)$에서

$(2b_n-1)a_n=1-b_n$, $a_n=\dfrac{1-b_n}{2b_n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-b_n}{2b_n-1}=\dfrac{1-\lim_{n\to\infty}b_n}{2\lim_{n\to\infty}b_n-1}$

$=\dfrac{1-1}{2\times1-1}=0$

39) 0

⇨ $\dfrac{a_n-1}{2a_n-1}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$

a_n을 b_n으로 나타내면 $a_n-1=b_n(2a_n-1)$에서

$(2b_n-1)a_n=b_n-1$ $\therefore a_n=\dfrac{b_n-1}{2b_n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n-1}{2b_n-1}$
$=\dfrac{\lim_{n\to\infty}b_n-1}{2\lim_{n\to\infty}b_n-1}$
$=\dfrac{1-1}{2\times1-1}=0$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-1}{2a_n-1}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n-1}{2\lim_{n\to\infty}a_n-1}=\dfrac{\alpha-1}{2\alpha-1}=1$

$\alpha-1=2\alpha-1$

$\therefore \alpha=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

40) $\dfrac{2}{5}$

⇨ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (단, α는 상수)로 놓으면 $\dfrac{\alpha+5}{2\alpha+1}=3$

$6\alpha+3=\alpha+5$, $5\alpha=2$

$\therefore \alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{5}$

41) -2

⇨ $\dfrac{2a_n+1}{a_n+1}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$

a_n을 b_n으로 나타내면 $2a_n+1=b_n(a_n+1)$에서

$a_n=\dfrac{1-b_n}{b_n-2}$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-b_n}{b_n-2}=\dfrac{1-3}{3-2}=-2$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\dfrac{2\alpha+1}{\alpha+1}=3$

$2\alpha+1=3\alpha+3$ $\therefore \alpha=-2$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-2$

42) 4

⇨ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\dfrac{2\alpha+4}{\alpha-1}=4$

$2\alpha+4=4\alpha-4$, $2\alpha=8$ $\therefore \alpha=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=4$

43) -11

⇨ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\dfrac{2\alpha+1}{\alpha+4}=3$

$2\alpha+1=3\alpha+12$ $\therefore \alpha=-11$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-11$

44) $\dfrac{4}{3}$

⇨ $\dfrac{2a_n-1}{a_n-3}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$

a_n을 b_n으로 나타내면 $2a_n-1=b_n(a_n-3)$에서

$(b_n-2)a_n=3b_n-1$ $\therefore a_n=\dfrac{3b_n-1}{b_n-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3b_n-1}{b_n-2}=\dfrac{3\lim_{n\to\infty}b_n-1}{\lim_{n\to\infty}b_n-2}$
$=\dfrac{-3-1}{-1-2}=\dfrac{4}{3}$

45) 3

⇨ $\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

a_n을 b_n으로 나타내면 $3a_n-1=b_n(a_n+1)$에서

$(3-b_n)a_n=b_n+1$ $\therefore a_n=\dfrac{b_n+1}{3-b_n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n+1}{3-b_n}=\dfrac{2+1}{3-2}=3$

46) $-\frac{5}{7}$

⇨ $\frac{2a_n+1}{3a_n+2}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$

a_n을 b_n으로 나타내면 $2a_n+1=b_n(3a_n+2)$에서

$(3b_n-2)a_n=1-2b_n \quad \therefore a_n=\frac{1-2b_n}{3b_n-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2b_n}{3b_n-2}=\frac{1-2\lim_{n\to\infty}b_n}{3\lim_{n\to\infty}b_n-2}$

$=\frac{1-2\times3}{3\times3-2}=-\frac{5}{7}$

47) 1

⇨ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\frac{2\alpha+6}{3\alpha+1}=2$

$2\alpha+6=6\alpha+2,\ 4\alpha=4 \quad \therefore \alpha=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

48) $\frac{3}{4}$

⇨ $\frac{2a_n-1}{3a_n-2}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

a_n을 b_n으로 나타내면 $2a_n-1=b_n(3a_n-2)$에서

$a_n=\frac{2b_n-1}{3b_n-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-1}{3b_n-2}=\frac{2\lim_{n\to\infty}b_n-1}{3\lim_{n\to\infty}b_n-2}=\frac{2\times2-1}{3\times2-2}=\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\frac{2\alpha-1}{3\alpha-2}=2$

$2\alpha-1=6\alpha-4 \quad \therefore \alpha=\frac{3}{4} \quad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$

49) 1

⇨ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\frac{3\alpha+5}{6-2\alpha}=2$

$3\alpha+5=12-4\alpha \quad \therefore \alpha=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

50) $\frac{2}{3}$

⇨ $(3n-1)a_n=b_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=2,\ a_n=\frac{b_n}{3n-1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\times\frac{b_n}{3n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}\times b_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\times\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$

51) 1

⇨ $(3n+1)a_n=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$

$a_n=\frac{b_n}{3n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(n-1)\times\frac{b_n}{3n+1}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n+1}\times\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{1}{3}\times3=1$

52) 3

⇨ $\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}(2n+1)a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n$

$=\frac{1}{2}\times6=3$

53) 4

⇨ $(2n+1)a_n=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=8$

$a_n=\frac{b_n}{2n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{b_n}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\times8=4$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{2n+1}\times(2n+1)a_n\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n$

$=\frac{1}{2}\times8=4$

54) $\frac{1}{2}$

⇨ $(2n+5)a_n=b_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=1,\ a_n=\frac{b_n}{2n+5}$이므로

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{b_n}{2n+5}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5}\times\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{1}{2}\times1$

$=\dfrac{1}{2}$

55) 6

⇨ $(n^2+1)a_n=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=12$, $a_n=\dfrac{b_n}{n^2+1}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3a_n}{2n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n+1}\times\frac{b_n}{n^2+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n+1)(n^2+1)}\times b_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{1}{2}\times12\\&=6\end{aligned}$$

56) $\dfrac{1}{6}$

⇨ $\dfrac{a_n}{n}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$, $a_n=nb_n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

57) 3

⇨ $\dfrac{a_n}{3n-4}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $a_n=(3n-4)b_n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-4)b_n}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=3\times1=3\end{aligned}$$

58) 3

⇨ $\dfrac{a_n}{n^2+7}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$, $a_n=(n^2+7)b_n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+7)b_n}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=1\times3=3\end{aligned}$$

59) 8

⇨ $\dfrac{a_n}{\sqrt{n}+2n}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4$, $a_n=(\sqrt{n}+2n)b_n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n^2+3n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\sqrt{n}+2n)b_n}{n^2+3n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+2\right)}{1+\frac{3}{n}}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=2\times4=8\end{aligned}$$

60) 1

⇨ $\sqrt{n}\,a_n=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$, $a_n=\dfrac{b_n}{\sqrt{n}}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}}\times\frac{b_n}{\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+\sqrt{4n^2+n}}\times b_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{1}{1+2}\times3=1\end{aligned}$$

61) 1

⇨ $\dfrac{n-1}{n}\le a_n\le\dfrac{n+1}{n}$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

62) 3

⇨ $\dfrac{3n-1}{n}<a_n<\dfrac{3n+4}{n}$ 에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n}=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{n}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

63) $\dfrac{1}{4}$

⇨ $\dfrac{n}{4n+5}<a_n<\dfrac{n+6}{4n+3}$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4+\frac{5}{n}}=\dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+6}{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{6}{n}}{4+\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{4}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{4}$

64) 2

⇨ $\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$ 에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

65) 4

⇨ $\frac{4n-1}{n}<a_n<\frac{4n^2+3n+1}{n^2}$ 에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n}=4$, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+1}{n^2}=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

66) 6

⇨ $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n-2}=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=5$ $\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+1)=5+1=6$

67) 14

⇨ $\frac{10n-2}{n+2}<a_n<\frac{10n+1}{n+1}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n-2}{n+2}=10$, $\lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{n+1}=10$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=10$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+4)=10+4=14$

68) 2

⇨ 부등식의 각 변을 n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

69) 3

⇨ 부등식의 각 변을 $n+2$로 나누면

$\frac{3n+1}{n+2}<a_n<\frac{3n+3}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n+2}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

70) 5

⇨ 부등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{5n^2-2n}{n^2}<a_n<\frac{5n^2+2n}{n^2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n}{n^2}=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=5$

71) 1

⇨ $4n^2+2<a_n<4n^2+3$에서 각 변을 $4n^2+1$로 나누면

$\frac{4n^2+2}{4n^2+1}<\frac{a_n}{4n^2+1}<\frac{4n^2+3}{4n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{4n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{4n^2+1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n^2+1}=1$

72) 12

⇨ $3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$의 각 변에 $\frac{4}{n^2+2n}$를 곱하면 $\frac{4(3n^2+2n)}{n^2+2n}<\frac{4a_n}{n^2+2n}<\frac{4(3n^2+3n)}{n^2+2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4(3n^2+3n)}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(3n^2+2n)}{n^2+2n}=12$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{n^2+2n}=12$

73) 3

⇨ 부등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{3n^2-2n+1}{n^2}<a_n<\frac{3n^2+2n+3}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=3$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

74) 6

⇨ 부등식의 각 변을 $n+2$으로 나누면

$\frac{6n-1}{n+2}<a_n<\frac{6n+1}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n-1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n+2}=6$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=6$

75) 거짓

⇨ (반례) $a_n=n$, $b_n=-2n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$거짓

76) 거짓

⇨ (반례) $a_n=\frac{1}{n+1}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ $\therefore$거짓

77) 참

⇨ $c_n=a_n-b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$, $b_n=a_n-c_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$
$=\alpha-0=\alpha$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\therefore$ 참

78) 거짓

⇨ (반례) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이지만

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n+1} = \infty$(발산) $\therefore$거짓

79) 거짓

⇨ (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$일 때,

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times n = 1$이다. $\therefore$거짓

80) 참

⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 3$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{a_n} = 0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ $\therefore$참

81) 거짓

⇨ (반례) 수열 $\{a_n\}$이 $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$일 때, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$이지만 수열 $\{a_n\}$은 진동(발산)한다. $\therefore$거짓

82) 거짓

⇨ (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$이지만

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$으로 발산한다. $\therefore$거짓

83) 거짓

⇨ (반례) $a_n = n+1$, $b_n = -n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(n+1-n) = 1$로 수렴하지만

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty}\{n+1-(-n)\} \\ &= \lim_{n\to\infty}(2n+1) \\ &= \infty\end{aligned}$$

로 발산한다. $\therefore$거짓

84) 거짓

⇨ (반례) $a_n = b_n = (-1)^n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$이 모두 발산하지만

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$로 수렴한다. $\therefore$거짓

85) 거짓

⇨ (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$이 모두 0에 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$로 발산한다.

$\therefore$거짓

86) 거짓

⇨ (반례) $a_n = (-1)^n$, $b_n = 2$라 하면

$a_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$로 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty} a_n$은 진동(발산)한다.

87) 거짓

⇨ (반례) $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n + \frac{1}{n}$, $c_n = n$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고

$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$이지만

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$(발산) $\therefore$거짓