4회차

01 ④	02 ⑤	03 ④	04 ③	05 ③
06 ③	07 ③	08 ⑤	09 ③	10 ⑤
11 ①	12 ⑤	13 ②	14 ④	15 ⑤
16 ③	17 ③			

[서술형 1] -6
[서술형 2] 1
[서술형 3] -16

01 $\lim_{x\to2-} f(x)=5$, $\lim_{x\to2+} f(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to2-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)=5+3=8$

02 $\lim_{x\to0}(x^2+1)+\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=1+2=3$

03 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+4x}-(x-1)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x^2+4x}-(x-1)\}\{\sqrt{x^2+4x}+(x-1)\}}{\sqrt{x^2+4x}+(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-1}{\sqrt{x^2+4x}+x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{6}{2}=3$$

오답 피하기

분모의 최고차항인 x로 분자와 분모를 나눌 때, 근호 안은 x^2으로 나누어야 한다.

04 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x-6}=2$이므로

$a=2$

$\therefore f(x)=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-6}$

$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}$이고

$\lim_{x\to2}(x^2+x-6)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(2x^2+bx+c)=8+2b+c=0$

$\therefore c=-2b-8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-6}$에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+bx-2b-8}{x^2+x-6}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+4+b)}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2x+4+b}{x+3}$$
$$=\frac{8+b}{5}$$

이므로 $\frac{8+b}{5}=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore b=-7$

$b=-7$을 ㉠에 대입하면

$c=14-8=6$

$\therefore a+b+c=2+(-7)+6=1$

05 $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}+a}{x-3}=b$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+a)=2+a=0$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}+a}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

이므로 $b=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

06 $3f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to3} h(x)=2$, $g(x)=-\frac{1}{2}h(x)+\frac{3}{2}f(x)$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-2\left\{-\frac{1}{2}h(x)+\frac{3}{2}f(x)\right\}}{f(x)-\left\{-\frac{1}{2}h(x)+\frac{3}{2}f(x)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{h(x)}{-\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}h(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{h(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=0$$

07 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

08 ① 함수 $y=f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

② 함수 $y=f(x)$는 $x=5$에서 불연속이다.

③ 함수 $y=f(x)$는 $x=5$에서 불연속이므로 구간 $[0, 6]$에서 불연속이다.

④ $\lim_{x\to5-}f(x)=6$

⑤ $\lim_{x\to5-}f(x)=6$, $\lim_{x\to5+}f(x)=2$

즉 $\lim_{x\to5-}f(x)\neq\lim_{x\to5+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to5}f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

09 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$

즉 $\lim_{x\to-2-}(ax+1)=\lim_{x\to-2+}(x^2+2x-b)$

$=f(-2)$

이므로 $-2a+1=4-4-b$

$\therefore 2a-b=1$ …… ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to2-}(x^2+2x-b)=\lim_{x\to2+}(ax+1)=f(2)$

이므로 $4+4-b=2a+1$

$\therefore 2a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

Lecture 함수의 연속과 미정계수

두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 연속함수일 때, 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\geq a) \\ h(x) & (x<a)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=f(a)$

10 $x\neq-1$, $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx-3}{x^2-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+bx-3}{x^2-1}=f(-1)$

이때 $\lim_{x\to-1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x^3+ax^2+bx-3)=-1+a-b-3=0$

$\therefore a-b=4$ …… ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+bx-3}{x^2-1}=f(1)$

이때 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+bx-3)=1+a+b-3=0$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

즉 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+3)$$
$$=4$$

11 $f(x)=x^2-3x+k$라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(2, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여 $f(2)f(4)<0$이어야 하므로
$(k-2)(k+4)<0 \qquad \therefore -4<k<2$
따라서 정수 k의 값은 $-3, -2, -1, 0, 1$이므로 그 합은 $-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$

12 $f(x)=2x^2+1$이라 하면 $f'(x)=4x$
이때 $x=5$에서의 순간변화율은 $f'(5)$이므로
$f'(5)=4\cdot5=20$

13 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)$$
$$=2f'(2)$$
$$=2\cdot3=6$$

14 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$$
$$\lim_{x\to1-}(x^3+ax)=\lim_{x\to1+}(bx^2-x+1)=f(1)$$
$1+a=b-1+1 \qquad \therefore b=a+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$
또 $f'(1)$이 존재하므로
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
이때
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-b}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-(a+1)}{x-1} \quad (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x+a+1)$$
$$=a+3$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{bx^2-x+1-b}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(bx+b-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(bx+b-1)$$
$$=2b-1$$
$$=2(a+1)-1 \ (\because ㉠)$$
$$=2a+1$$
이므로 $a+3=2a+1 \qquad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2+1=3$
$\therefore a+b=2+3=5$

15 $f'(x)=3x^2-2$이므로
$$\lim_{h\to0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)$$
$$=12-2=10$$

16 $f(x)=(3x-1)(4x^2+4x+1)$이므로
$f'(x)=3(4x^2+4x+1)+(3x-1)(8x+4)$
$\therefore f'(1)=3(4+4+1)+(3-1)(8+4)$
$=27+24=51$

17 (나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$이므로
$\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x)g(x)-3\}=f(2)g(2)-3=0$
$\therefore f(2)g(2)=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 ㈏의 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-3}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}\{f(2)g(2)\}'$$

즉 $\frac{1}{4}\{f(2)g(2)\}'=1$이므로 $\{f(2)g(2)\}'=4$

이때 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로

$$\{f(2)g(2)\}'=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$$
$$=3f'(2)-5\ (\because\ ㈎)$$

따라서 $3f'(2)-5=4$이므로 $3f'(2)=9$

$\therefore f'(2)=3$

[서술형 1] ㈎에서 함수 $f(x)$는 x^3의 계수가 1이고 x^2의 계수가 -2인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

❶

㈏에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=3$

이고 $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^3-2x^2+ax+b)=2a+b=0$

$\therefore b=-2a$ …… ㉠

㉠을 ㈏의 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+ax-2a}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+a)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+a}{x+1}$$
$$=\frac{a+4}{3}$$

즉 $\frac{a+4}{3}=3$이므로 $a+4=9$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=-2\cdot5=-10$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5x-10$이므로

❷

$f(1)=1-2+5-10=-6$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$를 미지수를 사용하여 나타낼 수 있다.	2점
❷ 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	4점
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] $f(2)=6$에서 $4a+2b+c=6$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=2$에서 $b=2$ …… ㉡

$f'(1)=4$에서 $2a+b=4$ …… ㉢

❶

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$, $c=-2$

❷

$\therefore a+b+c=1+2+(-2)=1$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(2)=6$, $f'(0)=2$, $f'(1)=4$를 이용하여 a, b, c에 대한 식을 구할 수 있다.	3점
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] $f(x)=x^3-5x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-10x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-10=-7$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(-5)=-7(x-1)$

$\therefore y=-7x+2$

❶

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 다시 만나는 점의 x좌표는 $x^3-5x^2-1=-7x+2$에서

$x^3-5x^2+7x-3=0$, $(x-1)^2(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\neq1)$

따라서 주어진 곡선과 접선이 만나는 점의 좌표는 $(3, -19)$이므로 $a=3$, $b=-19$

❷

$\therefore a+b=3+(-19)=-16$

❸

채점 기준	배점
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점