1회차

01 ③	02 ⑤	03 ⑤	04 ②	05 ②
06 ①	07 ④	08 ③	09 ④	10 ④
11 ③	12 ⑤	13 ①	14 ④	15 ③
16 ②	17 ①			

[서술형 1] 7
[서술형 2] 105
[서술형 3] $\frac{5}{11}$

01 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\frac{2}{\sin B}$이므로

$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sin B}$, $4=\frac{2}{\sin B}$ $\quad\therefore \sin B=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<45^\circ$이므로 $B=30^\circ$

02 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 30^\circ}=2\cdot 3=6$이므로

$a=6\sin 30^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=3$

03 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

위의 식을 $b\cos C=c\cos B$에 대입하면

$b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2+b^2-c^2=c^2+a^2-b^2$

$b^2-c^2=0$

$(b+c)(b-c)=0$

$\therefore b=c$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

Lecture 삼각형의 모양

삼각형 ABC에서

(1) $a=b=c$

⇨ △ABC는 정삼각형이다.

(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

⇨ △ABC는 이등변삼각형이다.

(3) $a^2+b^2=c^2$

⇨ △ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

04 $A+B+C=\pi$이므로 $A=\pi-(B+C)$

$\therefore \sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}=\sin(B+C)=\frac{1}{3}$

따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{1}{3}=5$

05 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d=4+2d$, $a_5=a_1+4d=4+4d$이므로

$a_5-a_3=4+4d-(4+2d)=2d$

즉 $2d=6$이므로 $d=3$

$\therefore a_7=a_1+6d=4+6\cdot 3=22$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=4$에서 $a+2d=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_5=-2$에서 $a+4d=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=-3$

$\therefore a_n=10+(n-1)\cdot(-3)=-3n+13$

$-3n+13<0$에서 $-3n<-13$

$\therefore n>\frac{13}{3}=4.333\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제5항부터 음수이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$

$=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$

$=\frac{4(a_1+a_4)}{2}-\frac{6(a_5+a_{10})}{2}$

$=\frac{4(10+1)}{2}-\frac{6\{-2+(-17)\}}{2}$

$=22-(-57)$

$=79$

07 $a_1=S_1=3\cdot 1^2+1=4$

$n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_3=S_3-S_2=3\cdot 3^2+1-(3\cdot 2^2+1)$

$=28-13=15$

$a_5=S_5-S_4=3\cdot 5^2+1-(3\cdot 4^2+1)$

$=76-49=27$

$\therefore a_1+a_3+a_5=4+15+27=46$

08 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$$

$$\therefore\ a_5=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$$

09 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항은 2이고

공비는 $\dfrac{-1}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{-1}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\cdots=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$a_n=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

10 세 수 a, 0, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$0=\frac{a+b}{2}\qquad\therefore\ b=-a\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

세 수 $2b$, a, -7이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2=2b\cdot(-7)\qquad\therefore\ a^2=-14b\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=14a$

$a^2-14a=0$, $a(a-14)=0$

$\therefore\ a=14\ (\because\ a\neq0)$

11 주어진 등비수열의 첫째항을 a라 하면

$$S_5=\frac{a(2^5-1)}{2-1}=527$$

$31a=527\qquad\therefore\ a=17$

따라서 등비수열의 첫째항은 17이다.

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(3a_k-2b_k+1)=3\sum_{k=1}^{5}a_k-2\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=3\cdot5-2\cdot7+1\cdot5$

$=6$

Lecture Σ의 성질

상수 p, q, r에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k+r)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k+rn$$

13 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{5\cdot6\cdot11}{6}=55$

14 수열 $\dfrac{1}{1\cdot3}$, $\dfrac{1}{3\cdot5}$, $\dfrac{1}{5\cdot7}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{49\cdot51}$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{49\cdot51}$$

$$=\sum_{k=1}^{25}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{51}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{51}$$

$$=\frac{25}{51}$$

오답 피하기

항이 연쇄적으로 소거될 때, 뒤에서 남는 항은 앞에서 남는 항과 서로 대칭이 되는 위치에 있다.

15 $a_{n+1}=a_n+5$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다. 이때 첫째항이 3이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot5=5n-2$

$\therefore\ a_{10}=5\cdot10-2=48$

16 $a_{n+1}=2a_n+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\cdot2+1=5$

$a_3=2a_2+1=2\cdot5+1=11$

$a_4=2a_3+1=2\cdot11+1=23$

$\therefore\ a_5=2a_4+1=2\cdot23+1=47$

17 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}\quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\\&\qquad+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}\\&=\frac{k}{k+1}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}\\&=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\&=\boxed{(나)\ \frac{k+1}{k+2}}\end{aligned}$$

즉 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (나) $\frac{k+1}{k+2}$

따라서 $f(k)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $g(k)=\frac{k+1}{k+2}$이므로

$f(1)g(1)=\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

[서술형 1] 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a^2&=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos120^\circ\\&=25+9-30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=34+15\\&=49\end{aligned}$$

❶

$\therefore a=7$ ($\because a>0$)

❷

채점 기준	배점
❶ 코사인법칙을 이용하여 a^2의 값을 구할 수 있다.	4점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq0)$라 하면

$S_4=5$에서 $\frac{a(r^4-1)}{r-1}=5\quad\cdots\cdots ㉠$

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=25$에서

$\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=25\quad\cdots\cdots ㉡$

❶

㉡에 ㉠을 대입하면 $5(r^4+1)=25$

$r^4+1=5\qquad\therefore r^4=4$

❷

$$\begin{aligned}\therefore S_{12}&=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}\\&=\frac{a(r^4-1)\{(r^4)^2+r^4+1\}}{r-1}\\&=5(4^2+4+1)=105\end{aligned}$$

❸

채점 기준	배점
❶ $S_4=5$, $S_8=25$를 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ r^4의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ S_{12}의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] $S_n=\frac{n\{2\cdot4+(n-1)\cdot4\}}{2}=2n(n+1)$이므로

$$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{S_k}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{11}\end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ $\frac{1}{S_n}$을 구할 수 있다.	3점
❷ $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{S_k}$의 값을 구할 수 있다.	4점