## 단원 ISSUE

이 단원에서는 **여러 가지 수열의 귀납적 정의에 대한 문제, 수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명 문제** 등이 자주 출제되며 증명의 순서를 잘 기억하여 처음부터 끝까지 직접 작성해 보는 연습이 필요합니다.

### 평가문제

[대단원 평가하기]

**1.** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $1$이고, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{2}{2n+1}\ (n=1,2,3,\ldots)$으로 정의될 때, $a_{10}=\dfrac{p}{q}$이다. 서로소인 자연수 $p$, $q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하면?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

[중단원 마무리하기]

**2.** 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=6$, $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$으로 정의될 때, $a_{10}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{14}$ ② $\dfrac{1}{7}$ ③ $\dfrac{3}{14}$ ④ $\dfrac{2}{7}$ ⑤ $\dfrac{5}{14}$

[대단원 평가하기]

**3.** 수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=a_n+f(n)$을 만족한다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=n^2+5n$을 만족하고, $a_6=55$일 때, $a_{10}$의 값을 구하면?

① 128 ② 129 ③ 130 ④ 131 ⑤ 132

[대단원 평가하기]

**4.** 민수는 올림피아드 경시대회에 출전하기 위해 수학공부 계획을 세웠다. 첫날은 $2$시간을 공부하고 다음날부터는 전날에 공부한 시간의 $\dfrac{3}{2}$배보다 $30$분을 적게 공부하였다고 한다. $7$일차에 민수가 공부한 시간을 구하면?

① $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4+1$ ② $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5+1$ ③ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^6+1$ ④ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^7+1$ ⑤ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^8+1$

[중단원 마무리하기]

**5.** 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$을 만족하고 $a_1=-3$, $a_2=2$일 때, $a_k=a_{k+1}$인 자연수 $k$의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[중단원 마무리하기]

**6.** 수열 $\{a_n\}$은 $\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+n$을 만족 하고 $a_1=4$일 때, $a_{10}$의 값을 구하면?

① $2^{39}$ ② $2^{41}$ ③ $2^{43}$ ④ $2^{45}$ ⑤ $2^{47}$

[중단원 마무리하기]

**7.** **농도가 $20\%$인 소금물 $200g$에 농도가 $10\%$ 인 소금물 $100g$을 넣었을 때의 소금물을 $a_1(\%)$이 라 하고, 이 소금물에 마찬가지로 $10\%$인 소금물 $100g$을 넣었을 때의 농도를 $a_2(\%)$라 하자. 농도가 $10\%$인 소금물 $100g$을 $n$번 넣었을 때, $a_n(\%)$의 소 금물이 만들어 진다고 할 때, $a_8$의 값을 구하면?**

① 10　② 11
③ 12　④ 13
⑤ 14

[중단원 마무리하기]

**8.** **수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여 $(a_{n+1}-a_n)^2=8a_{n+1}-8a_n-16$ 를 만족하고, $a_1=1$ 이다. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?**

① 150　② 170
③ 190　④ 210
⑤ 230

[중단원 마무리하기]

**9.** **다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 $3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}\cdots$ ① 이 성립함을 수학적 귀납법으로 나타낸 것이다. (가)와 (나)의 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3)+g(2)$의 값을 구하면?**

> (ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=3$, (우변)$=\dfrac{3^2-3}{2}=3$
> 따라서 $n=1$일 때 등식 ①을 만족한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 ①이 만족한다고 가정하면
> $3+3^2+\cdots+3^k=\dfrac{3^{k+1}-3}{2}$
> 양변에 (가)를 더하면
> $3+3^2+\cdots+3^k+$(가)$=$(나)
> 이므로 $n=k+1$일 때도 등식 ①이 만족한다.
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여
> $3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$이 성립한다.

① 112　② 114
③ 116　④ 118
⑤ 120

[대단원 평가하기]

**10.** **다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 $2^{2n}-1$이 $3$의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 위의 (가)의 값을 $a$, (나)의 식을 $g(m)$이라 할 때, $g(a)$의 값은?**

> (ⅰ) $n=1$일 때 $2^2-1=3$은 $3$의 배수이다.
> 따라서 $n=1$일 때 $2^{2n}-1$은 $3$의 배수이다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 $2^{2k}-1$이 $3$의 배수라 가정하면
> $2^{2k}-1=3m$ ($m$은 자연수)
> $n=k+1$일 때
> $2^{2(k+1)}-1=$(가)$\times 2^{2k}-1=3\times$(나)
> 이므로 $n=k+1$일 때도 $2^{2n}-1$은 $3$의 배수이다.
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여
> $2^{2n}-1$은 $3$의 배수이다.

① 11　② 17
③ 22　④ 27
⑤ 36

[대단원 평가하기]

**11.** **다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3+2n}{4\times 3^n}\cdots$ ㉠가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가)의 값을 $a$, (나)의 식을 $f(k)$라 할 때, $f(4a)$의 값을 구하면?**

> <증명>
> (ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$
> 따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3+2k}{4\times 3^k}$
> 이 식의 양변에 $\dfrac{k+1}{3^{k+1}}$을 더하면
> $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}=$(가)$-\dfrac{3+2k}{4\times 3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}$
> $=\dfrac{3}{4}-$(나)
> 따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여
> 주어진 등식이 성립한다.

① $\dfrac{11}{324}$　② $\dfrac{13}{324}$
③ $\dfrac{5}{108}$　④ $\dfrac{17}{324}$
⑤ $\dfrac{1}{18}$

[대단원 평가하기]

**12.** **다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 부등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}<2$ …① 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가)와 (나)의 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때, $\frac{g(3)}{f(3)}$의 값을 구하면?**

| |
|---|
| (ⅰ) $n=1$일 때<br>(좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=2$ 으로 ①이 성립한다.<br>(ⅱ) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면<br>$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}<\frac{2^{k+1}-k}{2^k}<2$<br>양변에 (가)를 더하면<br>$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}<\frac{2^{k+1}-k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$<br>$=$(나)$<2$ ($k$는 2이상인 자연수)<br>따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.<br>(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대해<br>부등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}<2$가 성립한다. |

① $\frac{11}{2}$　② $6$　③ $\frac{13}{2}$　④ $7$　⑤ $\frac{15}{2}$

[중단원 마무리하기]

**13.** **다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ …① 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가)와 (나)의 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때, $f(2)+g(2)$의 값을 구하면?**

| |
|---|
| (ⅰ) $n=1$일 때<br>(좌변)$=1$, (우변)$=1$<br>따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.<br>(ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면<br>$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$<br>양변에 (가)를 더하면<br>$1^3+2^3+\cdots+k^3+$(가)$=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+$(가)<br>$=\left(\frac{(나)}{2}\right)^2$<br>따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.<br>(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여<br>①이 성립한다. |

① 36　② 37　③ 38　④ 39　⑤ 40

[중단원 마무리하기]

**14.** **다음은 모든 자연수 $n$에 대해서 $n^2+3n$이 항상 2의 배수임을 증명한 것이다. (가)와 (나)의 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때, $f(3)+g(2)$의 값을 구하면?**

| |
|---|
| (ⅰ) $n=1$일 때<br>$n^2+3n=4$이므로 2의 배수임이 자명하다.<br>(ⅱ) $n=k$일 때 위 명제가 성립한다고 가정하면<br>$k^2+3k=2m$ ($m$은 정수)<br>$n=$(가)일 때,<br>$(k+1)^2+3(k+1)=k^2+3k+2k+4=2(m+$(나)$)$<br>따라서 $n=k+1$일 때도 위의 명제가 성립한다.<br>(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여<br>$n^2+3n$은 항상 2의 배수이다. |

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[중단원 마무리하기]

**15.** **다음은 2이상의 자연수 $n$에 대해서 $3\times6\times9\times\cdots\times3n>4^n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. 위 과정에서 (가)의 식을 $f(k)$라 하고, (나)의 값을 $a$, (다)의 값을 $b$라 할 때, $f(ab)$의 값을 구하면?**

| |
|---|
| <증명><br>$n=2$일 때, (좌변)$=3\times6=18$, (우변)$=4^2=16$<br>따라서 $n=2$일 때 부등식이 성립한다.<br>$n=k$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면<br>$3\times6\times9\times\cdots\times3k>4^k$<br>이므로 부등식의 양변에 (가)를 곱하면<br>$3\times6\times9\times\cdots\times3k\times$(가)$>4^k\times$(가)$>4^{k+1}$<br>($k$는 (나)이상 이므로 $3k+3>$(다))<br>따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.<br>그러므로 2이상의 자연수 $n$에 대하여 부등식이<br>성립한다. |

① 8　② 11　③ 12　④ 24　⑤ 27

## 실전문제

**16.** 수열 $1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \cdots$의 일반항을 $b_n$이라 하고 수열 $4,\ 44,\ 444,\ 4444,\ \cdots$의 일반항을 $c_n$이라고 할 때, $b_{2n}+c_n+1={a_n}^2$인 $a_n$을 구하면? (단, $a_n>0$)

① $\frac{10^n-2}{3}$ ② $\frac{10^n+2}{3}$
③ $\frac{10^n+3}{9}$ ④ $\frac{10^n+2}{9}$
⑤ $\frac{10^n+3}{3}$

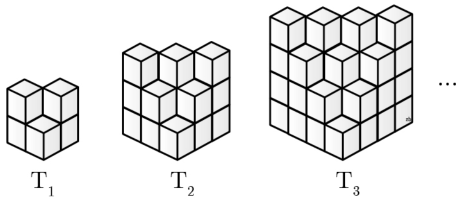
**17.** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 첫째항이 모두 $1$이고 $a_{n+1}=3a_n$, $b_{n+1}=(2n-1)b_n\ \ (n=1,2,3,\ \cdots)$을 만족시킨다. 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\begin{cases} a_n & (a_n<b_n) \\ b_n & (a_n\ge b_n)\end{cases}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30}2c_n$의 값은?

① $3^{30}-29$ ② $3^{30}-31$
③ $3^{30}-37$ ④ $3^{30}-39$
⑤ $3^{30}-41$

**18.** 농도가 $5\%$인 소금물 $400g$이 들어 있는 그릇에서 소금물 $100g$을 덜어내고 농도가 $2\%$인 소금물 $100g$를 넣고 잘 섞은 소금물의 농도를 $a_1\%$이라 하자. 농도가 $a_1\%$인 소금물 $400g$이 들어 있는 그릇에서 소금물 $100g$를 덜어내고 농도가 $2\%$인 소금물 $100g$를 넣고 잘 섞은 소금물의 농도를 $a_2\%$이라 하자. 이 과정을 $n$번 반복한 후 소금물의 농도를 $a_n\%$라고 하자. 이때 $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이에 $a_{n+1}=pa_n+q\ (n=1,2,3,\ \cdots)$의 관계식이 성립한다. $p+q$의 값은? (단, $p$, $q$는 상수이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$
③ $\frac{7}{4}$ ④ $2$
⑤ $\frac{9}{4}$

**19.** 그림과 같이 한 변의 길이가 $1$인 정육면체 모양의 블록 $5$개를 사용하여 입체도형 $T_1$을 만들고, $T_1$의 겉넓이를 $a_1$이라 하자. 입체도형 $T_1$에 $9$개의 블록을 더 쌓아서 입체도형 $T_2$를 만들고, $T_2$의 겉넓이를 $a_2$라 하자. 입체도형 $T_2$에 $16$개의 블록을 더 쌓아서 입체도형 $T_3$을 만들고, $T_3$의 겉넓이를 $a_3$이라 하자. 이와 같은 방법으로 $n$번째 얻은 입체도형 $T_n$에 $(n+2)^2$개의 블록을 더 쌓아서 도형 $T_{n+1}$을 만들고, $T_{n+1}$의 겉넓이를 $a_{n+1}$이라 하자. 예를 들어 $a_1=22$, $a_2=48$이다. 이때 $a_9$의 값은?




① $510$ ② $512$
③ $514$ ④ $516$
⑤ $518$

**20.** 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_{n+2}a_n={a_{n+1}}^2\ \ (n=1,2,3,\ \cdots)$일 때, $\log_2 a_4=\frac{5}{3}$이다. $a_{19}$의 값은?

① $16$ ② $4\sqrt[3]{2}$
③ $32$ ④ $6\sqrt[3]{2}$
⑤ $64$


I410-ECN-0199-2021-001-001401574

**21.** **다음은** $a_1=1$**인 수열** $\{a_n\}$**이 모든 자연수** $n$**에 대하여** $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$**를 만족시킬 때,** $2$ **이상의 자연수** $n$**에 대하여 일반항** $a_n$**은** $a_n=\frac{n}{2}$ $\cdots$ ⓐ**임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각** $f(k)$**,** $g(k)$**,** $h(k)$**라 할 때,** $f(5)\times g(4)\times h(3)$**의 값은?**

(ⅰ) $n=2$일 때

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$에서 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_1=1$

$a_n=\frac{n}{2}$에서 $a_2=\frac{2}{2}=1$이므로 ⓐ이 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k\geq 2)$일 때, ⓐ이 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{k}{2}$이므로

$a_{k+1}=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{k-1}a_{k-1}+\frac{1}{k}a_k \cdots$ ㉠

$a_k=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{\boxed{(가)}}a_{k-1} \quad \cdots$ ㉡

㉠-㉡을 하면

$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{k}a_k$에서 $a_{k+1}=\boxed{(나)}a_k$

$a_{k+1}=\boxed{(나)}\times\frac{k}{2}=\boxed{(다)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ⓐ이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $a_n=\frac{n}{2}$이다.

① 6　② 8
③ 10　④ 12
⑤ 14

## 정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설] 수열 $\{a_n\}$이 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{2}{2n+1}\ (n=1,2,3,...)$

으로 정의된다. 즉, $a_{n+1}=a_n\times\frac{2n-1}{2n+1}$이고

여기에 $n=1$부터 대입해 차례대로 나열해보면

$a_2=a_1\times\frac{1}{3}$

$a_3=a_2\times\frac{3}{5}$

$\vdots$

$a_{10}=a_9\times\frac{17}{19}$ 이므로

$a_{10}=a_1\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{17}{19}=\frac{1}{19}$

즉, $p+q=20$.

2) [정답] ③

[해설] $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$이고, $a_1=6$ 이므로

수열 $\frac{1}{a_n}$은 첫째항이 $\frac{1}{6}$이고 공차가 $\frac{1}{2}$인

등차수열이다. 따라서 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(n-1)$이다.

여기에 $n=10$을 대입하면 $\frac{1}{a_{10}}=\frac{1}{6}+\frac{9}{2}=\frac{28}{6}$

이므로 $a_{10}=\frac{3}{14}$이다.

3) [정답] ④

[해설] $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 이므로 $a_{n+1}-a_n=f(n)$에서

$a_{n+1}=a_1+\sum_{k=1}^{n}f(k)$이다.

$\sum_{k=1}^{n}f(k)=n^2+5n$ 이므로 $a_{n+1}=a_1+n^2+5n$

$a_6=55=50+a_1$ 이므로 $a_1=5$, 따라서

$a_{10}=5+81+45=131$

4) [정답] ③

[해설] $n$일차에 공부한 양을 $a_n$이라 하면

$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$을 만족한다. 양변에서 1을 빼면

$a_{n+1}-1=\frac{3}{2}(a_n-1)$ 이고 $b_n=a_n-1$으로 정의하

면 $a_1=2$이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고

공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다. 그러므로

$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$이고 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+1$이다.

따라서 $a_7=\left(\frac{3}{2}\right)^6+1$

5) [정답] ③

[해설] $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$이고 $a_1=-3$, $a_2=2$이므로 수열을 나열하면 $-3,2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,\cdots$ 이다.

여기에서 $a_6=2$에 대하여 $a_6=a_{6+1}=1$ 이므로

구하는 $k$의 값은 6이다.

6) [정답] ⑤

[해설] $\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+n$을 만족하므로

$a_{n+1}=2^n a_n$이다.

$n$을 1부터 순서대로 대입하면

$a_1=2^2$

$a_2=2a_1=2^3$

$a_3=2^2a_2=2^5$

$a_4=2^3a_3=2^8$

$\vdots$

$a_n=2^{2+(1+2+\cdots+n-1)}$

$n=10$을 대입하면

$a_{10}=2^{47}$

7) [정답] ③

[해설] 농도가 $20\%$인 소금물 $200g$의 소금의 양은 $40g$이고, 농도가 $10\%$인 소금물 $100g$의 소금의 양

은 $10g$이다. 즉 농도가 $10\%$인 소금물 $100g$을 $n$번

넣은 소금물의 양과 농도는

(소금물의 양): $(200+100n)g$

(소금의 양): $(40+10n)g$

(농도): $(\frac{40+10n}{2+n})\%$ 이다.

따라서 $a_8=\frac{40+80}{2+8}=12$

8) [정답] ③

[해설] $(a_{n+1}-a_n)^2=8a_{n+1}-8a_n-16$를 정리하면

$(a_{n+1}-a_n)^2-8(a_{n+1}-a_n)+16=0$ 에서

$(a_{n+1}-a_n-4)^2=0$이다. 따라서

모든 자연수 $n$에 대하여 $a_{n+1}-a_n=4$ 이므로

$\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)=4\times55-30=190$

9) [정답] ⑤

[해설] $3+3^2+\cdots+3^k=\frac{3^{k+1}-3}{2}$에서

양변에 $3^{k+1}$을 더하면


I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$3+3^2+\cdots+3^k+3^{k+1}$

$=\dfrac{3^{k+1}-3}{2}+3^{k+1}=\dfrac{3\times3^{k+1}-3}{2}=\dfrac{3^{k+2}-3}{2}$

$f(k)=3^{k+1}$, $g(k)=\dfrac{3^{k+2}-3}{2}$

$f(3)+g(2)=81+39=120$

10) [정답] ②

[해설] $2^{2(k+1)}-1=4\times2^{2k}-1$이고, $2^{2k}-1=3m$ 이므로 $2^{2k}=3m+1$을 위의 식에 대입하면 $12m+3=3(4m+1)$이다. 따라서 $a=4$, $g(m)=4m+1$ 이므로 $g(a)=g(4)=17$

11) [정답] ①

[해설] $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3+2k}{4\times3^k}$ 에서

등식의 양변에 $\dfrac{k+1}{3^{k+1}}$을 더하면

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3+2k}{4\times3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3+2(k+1)}{4\times3^{k+1}}$

$a=\dfrac{3}{4}$, $f(k)=\dfrac{3+2(k+1)}{4\times3^{k+1}}$을 만족한다.

$f(4a)=f(3)=\dfrac{11}{324}$

12) [정답] ⑤

[해설] $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}<\dfrac{2^{k+1}-k}{2^k}<2$에서

부등식의 양변에 $\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$을 더하면

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}<\dfrac{2^{k+1}-k}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}<\dfrac{2^{k+2}-k+1}{2^{k+1}}$

$k$가 2이상인 자연수이므로 $\dfrac{2^{k+2}-k+1}{2^{k+1}}<2$ 이다.

$f(k)=\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k)=\dfrac{2^{k+2}-k+1}{2^{k+1}}$

$\dfrac{g(3)}{f(3)}=\dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2}$

13) [정답] ④

[해설] $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$에서

등식의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3$

$=(k+1)^2\left\{\dfrac{k^2+4k+4}{4}\right\}=\left\{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

$f(k)=(k+1)^3$, $g(k)=(k+1)(k+2)$

$f(2)+g(2)=27+12=39$

14) [정답] ③

[해설] (ⅰ) $n=1$일 때

$n^2+3n=4$는 2의 배수임이 자명하다.

(ⅱ) $n=k$일 때

$n^2+3n$이 2의 배수라고 가정하면

$k^2+3k=2m$ ($m$은 정수) 이다.

$n=k+1$일 때,

$(k+1)^2+3(k+1)=(k^2+3k)+2k+4$

$k^2+3k=2m$을 위의 식에 대입하면

$2m+2k+4=2(m+k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 위의 명제가 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 $n^2+3n$은 항상 2의 배수이다.

위의 과정에서 $f(k)=k+1$, $g(k)=k+2$ 이므로 $f(3)+g(2)=8$

15) [정답] ⑤

[해설] (ⅰ) $n=2$일 때

(좌변)$=3\times6=18$, (우변)$=4^2=16$

따라서 $n=2$일 때 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면

$3\times6\times9\times\cdots\times3k>4^k$ 이다.

부등식의 양변에 $(3k+3)$을 곱하면

$3\times6\times9\times\cdots\times3k\times(3k+3)>4^k\times(3k+3)$

$k$는 2이상의 자연수이므로 $3k+3>4$, 따라서

$3\times6\times9\times\cdots\times3k\times(3k+3)>4^k\times(3k+3)>4^{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 2이상의 모든 자연수 $n$에 대하여 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 $a=2$, $b=4$, $f(k)=3k+3$ 이므로 $f(ab)=f(8)=27$

16) [정답] ②

[해설] $b_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$, $c_n=\dfrac{4}{9}(10^n-1)$이므로

$a_n^2=b_{2n}+c_n+1=\dfrac{1}{9}(100^n+4\times10^n+4)$

$=\left(\dfrac{10^n+2}{3}\right)^2$

$a_n>0$이므로

$a_n=\dfrac{10^n+2}{3}$

17) [정답] ⑤

[해설] $a_1=1, b_1=1\Rightarrow c_1=1$

$a_2=3, b_2=1\Rightarrow c_2=1$

$a_3=3^2, b_3=3\Rightarrow c_3=3$

$a_4=3^3, b_4=15\Rightarrow c_4=15$

$a_5=3^4, b_5=105 \Rightarrow c_5=3^4$

$a_6=3^5, b_6=945 \Rightarrow c_6=3^5$

$\vdots$

즉, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=3$, $c_4=15$이고,

$c_n=3^{n-1}$ ($n \ge 5$인 자연수)이다.

따라서 $2\sum_{n=1}^{30} c_n = 2\left(1+1+3+15+\sum_{n=5}^{30} 3^{n-1}\right)$

$=2\left\{20+\dfrac{3^4(3^{26}-1)}{3-1}\right\}=3^{30}-41$이다.

18) [정답] ①

[해설] 농도가 5%인 소금물 300g에 녹아있는 소금의 양은 $\dfrac{5}{100}\times 300=15\,(\mathrm{g})$이다.

여기에 농도가 2%인 소금물 100g을 넣어 섞으면 남아있는 소금의 양은 $15+\dfrac{2}{100}\times 100=17(\mathrm{g})$이 된다.

이 과정을 $n$번 반복한 후 소금물의 농도를 $a_n$% 라 할 때, $(n+1)$번 반복한 후의 소금물의 농도는

$a_{n+1}=\dfrac{(\frac{a_n}{100}\times 300)+2}{400}\times 100$이므로

$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore p=\dfrac{3}{4}$, $q=\dfrac{1}{2}$

따라서 $p+q=\dfrac{5}{4}$이다.

19) [정답] ①

[해설] $a_1$의 값은 위, 아래에서 보았을 때의 넓이와 네 방향으로 옆에서 보았을 때의 넓이의 합 이므로 $3\times 2+4\times 4=6+16=22$이다.

$\therefore a_1=22$

도형 $T_n$에서 도형 $T_{n+1}$을 만들 때

위, 아래에서 보았을 때

한 변의 길이가 1인 작은 정사각형의 개수가

$n+2$개씩 추가되고,

네 방향으로 옆에서 보았을 때 작은 정사각형의 개수가 $2n+3$개씩 추가된다.

따라서 도형 $T_n$에서 도형 $T_{n+1}$이 될 때,

늘어나는 겉넓이는

$2(n+2)+4(2n+3)=10n+16$이다.

$\therefore a_{n+1}=a_n+(10n+16)$

따라서 $a_9=22+\sum_{n=1}^{8}(10n+16)$

$=22+10\times\dfrac{8\times 9}{2}+16\times 8$이므로 $a_9=510$이다.

20) [정답] ③

[해설] 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$a_n=2r^{n-1}$이라 하면

$\log_2 a_4=\dfrac{5}{3}$

$2r^3=2^{\frac{5}{3}}$

$r^3=2^{\frac{2}{3}}$

따라서 $a_{19}=2r^{18}=2\times\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^6=2\times 2^4=32$

21) [정답] ③

[해설] (ⅱ) $n=k(k\ge 2)$일 때, ⓐ이 성립한다고 가정하면

$a_k=\dfrac{k}{2}$이므로

$a_{k+1}=a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{k-1}a_{k-1}+\dfrac{1}{k}a_k$

$\cdots$ ㉠

$a_k=a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{\boxed{k-1}}a_{k-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠-㉡을 하면

$a_{k+1}-a_k=\dfrac{1}{k}a_k$에서 $a_{k+1}=\boxed{\dfrac{k+1}{k}}a_k$

$a_{k+1}=\boxed{\dfrac{k+1}{k}}\times\dfrac{k}{2}=\boxed{\dfrac{k+1}{2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ⓐ이 성립한다.

(가) : $f(k)=k-1$

(나) : $g(k)=\dfrac{k+1}{k}$

(다) : $h(k)=\dfrac{k+1}{2}$

따라서 $f(5)\times g(4)\times h(3)=10$


I410-ECN-0199-2021-001-001401574