06

삼각함수

사분면의 일반각

예제 01

θ가 제1사분면의 각일 때, $\frac{\theta}{2}$는 어느 사분면의 각인지 구하여라.

접근 방법

θ가 제1사분면의 각이므로 $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ<\alpha^\circ<90^\circ$)라 할 수 있고, $\frac{\theta}{2}$가 어느 사분면의 각인지 생각할 수 있습니다.

Bible

동경 OP가 나타내는 한 각의 크기가 α°일 때,
동경 OP가 나타내는 일반각의 크기는
$360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (단, n은 정수)

상세 풀이

θ가 제1사분면의 각이므로

$$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ \ (n\text{은 정수}, \ 0^\circ<\alpha^\circ<90^\circ)$$

$$\therefore \frac{\theta}{2}=180^\circ\times n+\frac{\alpha^\circ}{2} \left(0^\circ<\frac{\alpha^\circ}{2}<45^\circ\right)$$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$$\frac{\theta}{2}=180^\circ\times 2k+\frac{\alpha^\circ}{2}=360^\circ\times k+\frac{\alpha^\circ}{2}$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각입니다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$$\frac{\theta}{2}=180^\circ\times(2k+1)+\frac{\alpha^\circ}{2}=360^\circ\times k+\left(180^\circ+\frac{\alpha^\circ}{2}\right)$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각입니다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각입니다.

정답 ➡ 제1사분면 또는 제3사분면의 각

보충 설명

(1) θ가 제1사분면의 각이면 $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (단, n은 정수, $0^\circ<\alpha^\circ<90^\circ$)
(2) θ가 제2사분면의 각이면 $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (단, n은 정수, $90^\circ<\alpha^\circ<180^\circ$)
(3) θ가 제3사분면의 각이면 $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (단, n은 정수, $180^\circ<\alpha^\circ<270^\circ$)
(4) θ가 제4사분면의 각이면 $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (단, n은 정수, $270^\circ<\alpha^\circ<360^\circ$)
참고로 θ가 어느 사분면의 각도 아닐 때, 즉 좌표축 위의 각이면 $\theta=90^\circ\times n$ (단, n은 정수)입니다.

풀이집 p.115

숫자 바꾸기

01-1 θ가 제2사분면의 각일 때, 다음 각이 어느 사분면의 각인지 구하여라.

(1) $\dfrac{\theta}{2}$　　(2) $\dfrac{\theta}{3}$

표현 바꾸기　　◆ 보충 설명

01-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치할 때, θ의 값을 구하여라. (단, $90^\circ<\theta<180^\circ$)

(2) 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭일 때, θ의 값을 구하여라. (단, $90^\circ<\theta<180^\circ$)

06

개념 넓히기 ★★☆

01-3 두 각 α, β에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라. (단, n은 정수이다.)

보기

ㄱ. 두 각 α, β를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=2n\pi$이다.

ㄴ. 두 각 α, β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=2n\pi$이다.

ㄷ. 두 각 α, β를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면 $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$이다.

정답 **01-1** (1) 제1사분면 또는 제3사분면의 각
(2) 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각
01-2 (1) 120° (2) 144°　**01-3** ㄱ, ㄷ

예제 02

부채꼴의 호의 길이와 넓이

다음 물음에 답하여라.

(1) 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, 호의 길이가 2π cm인 부채꼴의 반지름의 길이와 넓이를 각각 구하여라.

(2) 호의 길이가 2π cm, 넓이가 4π cm^2인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 각각 구하여라.

접근 방법

부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기가 주어지면 공식을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있습니다.

Bible 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이 l과 넓이 S는 다음과 같다.

$$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$

상세 풀이

(1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 부채꼴의 호의 길이가 2π cm이므로

$$2\pi=r\times\frac{\pi}{3} \qquad \therefore r=6(\text{cm})$$

또한 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times6\times2\pi=6\pi(\text{cm}^2)$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 중심각의 크기를 θ라고 하면 부채꼴의 호의 길이가 2π cm이므로

$$2\pi=r\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또한 부채꼴의 넓이가 4π cm^2이므로

$$4\pi=\frac{1}{2}r\times2\pi=r\pi \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $r=4(\text{cm})$, $\theta=\frac{\pi}{2}$입니다.

정답 ➡ (1) 반지름의 길이 : 6 cm, 넓이 : 6π cm^2

(2) 반지름의 길이 : 4 cm, 중심각의 크기 : $\frac{\pi}{2}$

보충 설명

Bible 의 부채꼴의 호의 길이와 넓이 공식에서 부채꼴의 중심각의 크기 θ는 호도법으로 나타낸 각입니다. 따라서 중심각의 크기가 육십분법으로 주어지면 호도법으로 고쳐야 공식을 이용하여 풀 수 있음에 유의합니다.

풀이집 p.116

숫자 바꾸기

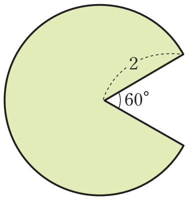
02-1 **다음 물음에 답하여라.**

(1) 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$, 호의 길이가 π cm인 부채꼴의 반지름의 길이와 넓이를 각각 구하여라.

(2) 호의 길이가 3π cm, 넓이가 3π cm^{2}인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 각각 구하여라.

표현 바꾸기

02-2 **오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이를 각각 구하여라.**



개념 넓히기 ★★☆

02-3 **부채꼴의 넓이가 S일 때, 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값과 그때의 중심각의 크기를 모두 구하여라.**

정답

02-1 (1) 반지름의 길이 : $\frac{3}{2}$ cm, 넓이 : $\frac{3}{4}\pi$ cm^2

(2) 반지름의 길이 : 2 cm, 중심각의 크기 : $\frac{3}{2}\pi$

02-2 둘레의 길이 : $\frac{10}{3}\pi+4$, 넓이 : $\frac{10}{3}\pi$

02-3 둘레의 길이의 최솟값 : $4\sqrt{S}$, 중심각의 크기 : 2

예제 03

삼각함수의 값

각 θ의 크기가 다음과 같을 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 각각 구하여라.

(1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{2}{3}\pi$ (3) $\dfrac{4}{3}\pi$ (4) $\dfrac{5}{3}\pi$

접근 방법

각을 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 원의 교점을 이용하여 삼각함수를 정의하므로 삼각함수의 값을 쉽게 구할 수 있습니다. $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때의 동경과 원의 교점을 먼저 구한 후, $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{4}{3}\pi$, $\dfrac{5}{3}\pi$인 경우는 대칭을 이용하여 구합니다.

Bible 크기가 θ인 각을 나타내는 동경 OP와 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

상세 풀이

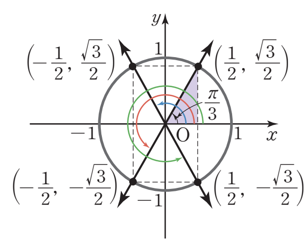
주어진 각을 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 찾아 삼각함수의 값을 구하면

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(2) $\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$

(3) $\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$

(4) $\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$



정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

(1) 다음과 같이 특수한 각에 대한 삼각함수의 값을 쉽게 구할 수 있습니다.

$$\sin\frac{a}{6}\pi=\pm\frac{1}{2},\ \cos\frac{a}{6}\pi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\frac{a}{6}\pi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\text{단, 정수 } a\text{와 6은 서로소})$$

$$\sin\frac{b}{4}\pi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{b}{4}\pi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\frac{b}{4}\pi=\pm 1\ (\text{단, 정수 } b\text{와 4는 서로소})$$

$$\sin\frac{c}{3}\pi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{c}{3}\pi=\pm\frac{1}{2},\ \tan\frac{c}{3}\pi=\pm\sqrt{3}\ (\text{단, 정수 } c\text{와 3은 서로소})$$

단, 부호는 주어진 각을 나타내는 동경이 놓인 사분면에 따라 + 또는 −로 정합니다.

(2) 위의 예제에서 단위원이 아니라 원점을 중심으로 하는 어떤 원을 잡아도 삼각함수의 값은 같습니다.

풀이집 p.117

숫자 바꾸기

03-1 각 θ의 크기가 다음과 같을 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 각각 구하여라.

(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{5}{6}\pi$　(3) $\frac{7}{6}\pi$　(4) $\frac{11}{6}\pi$

표현 바꾸기

03-2 좌표평면에서 원점 O와 점 P$(-4,\ 3)$을 지나는 동경이 나타내는 각을 θ라고 할 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\cos\theta$　(2) $\cos^2\theta+\sin\theta$　(3) $\sin\theta\tan\theta$

06

개념 넓히기 ★★☆

03-3 θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=m$일 때, $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값을 각각 m에 대한 식으로 나타내어라.

정답

03-1 (1) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2}$, $\cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{7}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\sin\frac{11}{6}\pi=-\frac{1}{2}$, $\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{11}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

03-2 (1) $-\frac{4}{5}$ (2) $\frac{31}{25}$ (3) $-\frac{9}{20}$

03-3 $\sin\theta=-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

예제 04

삼각함수의 값의 부호

다음 조건을 만족시키는 각 θ는 어느 사분면의 각인지 구하여라.

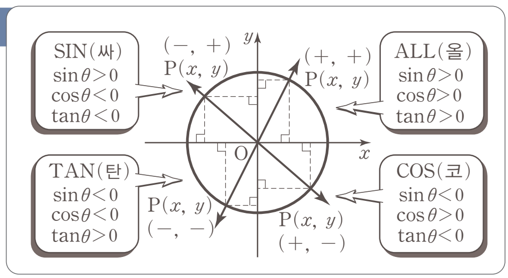
(1) $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$　　(2) $\sin\theta\cos\theta<0,\ \sin\theta\tan\theta>0$

접근 방법

삼각함수의 정의에 의하여 삼각함수의 부호는 각을 나타내는 동경이 놓여 있는 사분면에 따라 결정됩니다. 이를 이용하여 주어진 조건에서 θ가 어느 사분면의 각인지 구합니다.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
제1사분면	$+$	$+$	$+$
제2사분면	$+$	$-$	$-$
제3사분면	$-$	$-$	$+$
제4사분면	$-$	$+$	$-$

Bible



상세 풀이

(1) $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각입니다.
$\tan\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각입니다.
따라서 θ는 제3사분면의 각입니다.

(2) $\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\begin{cases}\sin\theta>0\\ \cos\theta<0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\sin\theta<0\\ \cos\theta>0\end{cases}$ 이므로
θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각입니다.
또한 $\sin\theta\tan\theta>0$에서 $\begin{cases}\sin\theta>0\\ \tan\theta>0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\sin\theta<0\\ \tan\theta<0\end{cases}$ 이므로
θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각입니다.
따라서 θ는 제4사분면의 각입니다.

정답 ➡ (1) 제3사분면의 각 (2) 제4사분면의 각

보충 설명

각 조건을 만족시키는 θ가 각각 어느 사분면의 각인지 조사한 후, 모든 조건을 동시에 만족시키는 사분면을 찾습니다.

풀이집 p.118

숫자 바꾸기

04-1 다음 조건을 만족시키는 각 θ는 어느 사분면의 각인지 구하여라.

(1) $\sin\theta>0,\ \tan\theta<0$　　(2) $\sin\theta\cos\theta>0,\ \cos\theta\tan\theta<0$

표현 바꾸기

04-2 θ가 제2사분면의 각일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $\sin\theta\cos\theta<0$　　ㄴ. $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$　　ㄷ. $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$

06

개념 넓히기 ★★☆

04-3 등식 $\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$를 만족시키는 각 θ에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라. (단, $\sin\theta\neq0$, $\cos\theta\neq0$)

보기

ㄱ. $\sin\theta+\cos\theta<0$　　ㄴ. $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$　　ㄷ. $\tan\theta\sin\theta<0$

정답 **04-1** (1) 제2사분면의 각 (2) 제3사분면의 각
04-2 ㄱ, ㄴ　　**04-3** ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 05

삼각함수 사이의 관계(1)

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta-\cos\theta$ (3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

접근 방법

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$에서 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있습니다. (2), (3)은 곱셈 공식의 변형을 이용하여 구합니다.

Bible $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

상세 풀이

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

$$=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 또는 } \sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\frac{7}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$$

정답 ➡ (1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 또는 $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\frac{11}{16}$

보충 설명

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$이고, (1)에서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$이므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{8}=0$의 해입니다. 따라서 이차방정식의 근의 공식에 의하여 $t=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$이 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값이 됨을 알 수 있습니다.

풀이집 p.118

숫자 바꾸기

05-1 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$ (3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

05-2 θ가 제1사분면의 각이고, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\theta+\cos\theta$ (2) $\sin\theta-\cos\theta$ (3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

06

개념 넓히기 ★★☆

05-3 $\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{2}$일 때, $\sin^3\theta-\cos^3\theta$의 값을 구하여라.

정답

05-1 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (3) $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

05-2 (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 4 **05-3** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

예제 06

삼각함수 사이의 관계(2)

다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\sin^4\theta-\cos^4\theta=1-2\cos^2\theta$　　　(2) $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

접근 방법

등식의 한 변을 인수분해 또는 통분을 이용하여 변형한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 즉 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ 또는 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$임을 이용하여 등식이 성립함을 보입니다.

Bible $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta,\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

상세 풀이

(1)
$$\begin{aligned}\sin^4\theta-\cos^4\theta&=(\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\\&=\sin^2\theta-\cos^2\theta\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)\\&=(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta\\&=1-2\cos^2\theta\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}&=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}\\&=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}\\&=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)\\&=\frac{2}{\cos\theta}\end{aligned}$$

정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

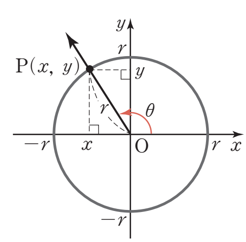
오른쪽 그림에서 삼각함수의 정의에 의하여 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{x^2}{r^2}=1$임을 알 수 있습니다.

이때, $r=1$이면 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점 P의 좌표가 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 다시 확인할 수 있습니다.

또한 삼각함수의 정의에 의하여 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$이므로

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\dfrac{y}{x}=\tan\theta$임을 알 수 있습니다.



풀이집 p.119

숫자 바꾸기

06-1 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\sin^2\theta\tan^2\theta$

(2) $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

표현 바꾸기

06-2 $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2-\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\tan\theta\sin\theta}{\tan\theta-\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

개념 넓히기 ★★☆

06-3 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

ㄴ. $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=2(1+\tan^2\theta)$

ㄷ. $\tan^2\theta+\cos^2\theta(1-\tan^4\theta)=1$

정답 **06-1** p.540 참조 **06-2** ④ **06-3** ㄴ, ㄷ

예제 07

각 $n\pi\pm\theta$의 삼각함수

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos(\pi-\theta)+\sin(\pi+\theta)$ (2) $\tan(-\theta)+\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}$

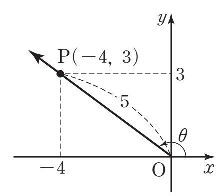
접근 방법

$\tan\theta$의 값이 주어져 있고, θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있습니다. 또한 $n\pi\pm\theta$ (n은 정수) 꼴의 각의 삼각함수를 간단히 할 때에는 Bible 의 성질을 이용합니다. 이때, θ를 제1사분면의 각으로 취급하여 기억하면 쉽습니다.

Bible $\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$, $\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta$, $\tan(\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta$ (복부호동순)

상세 풀이

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$이므로 점 P의 좌표를 $(-4, 3)$이라 하고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같습니다.



$$\sin\theta=\frac{3}{5},\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$$

(1) $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이므로

$$\cos(\pi-\theta)+\sin(\pi+\theta)=-\cos\theta+(-\sin\theta)$$
$$=-\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

(2) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$이므로

$$\tan(-\theta)+\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}=-\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$
$$=-\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{7}{12}$$

정답 ➡ (1) $\frac{1}{5}$ (2) $-\frac{7}{12}$

보충 설명

삼각함수의 값을 정할 때, 주어진 각이 위치하는 사분면을 직접 찾아 $\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\pi+\theta)$, $\tan(-\theta)$, $\tan(\pi+\theta)$의 값을 구할 수도 있지만 다음과 같이 쉽게 구할 수 있습니다.

$\square=2\pi\pm\theta,\ -\theta,\ \pi\pm\theta$일 때, $\sin(\square)$ ➡ $\pm\sin\theta$, $\cos(\square)$ ➡ $\pm\cos\theta$, $\tan(\square)$ ➡ $\pm\tan\theta$

이때, $\square$에서의 θ를 제1사분면의 각으로 취급하여 $\square$가 제 몇 사분면의 각인지에 따라 부호를 결정합니다.

예를 들어, $\cos(\pi-\theta)$에서 θ를 제1사분면의 각으로 취급하면 $\pi-\theta$가 제2사분면의 각이고 $\cos(\pi-\theta)$는 음수이므로 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$로 간단히 할 수 있고, $\tan(-\theta)$에서 θ를 제1사분면의 각으로 취급하면 $-\theta$가 제4사분면의 각이고 $\tan(-\theta)$는 음수이므로 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$로 간단히 할 수 있습니다.

풀이집 p.121

숫자 바꾸기

07-1 θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos(\pi+\theta)+\sin(2\pi-\theta)$

(2) $\tan(\pi-\theta)+\dfrac{1}{\tan(3\pi+\theta)}$

표현 바꾸기

07-2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\cos(\pi-\theta)\sin(-\theta)+\cos(-\theta)\sin(\pi+\theta)$

(2) $\sin(3\pi-\theta)\sin(-\theta)+\cos(2\pi-\theta)\cos(\pi+\theta)$

개념 넓히기 ★★★

07-3 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{2}{12}\pi+\cos\dfrac{3}{12}\pi+\cdots+\cos\dfrac{11}{12}\pi$

(2) $\sin 0+\sin\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{2}{12}\pi+\cdots+\sin\dfrac{23}{12}\pi$

정답 **07-1** (1) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{3}{2}$ **07-2** (1) 0 (2) -1 **07-3** (1) 0 (2) 0

예제 08

각 $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$의 삼각함수

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ (2) $\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

접근 방법

$\tan\theta$의 값이 주어져 있고, θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있습니다. 또한 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ (n은 홀수) 꼴의 각의 삼각함수를 간단히 할 때에는 Bible 의 성질을 이용합니다.
이때, θ를 제1사분면의 각으로 취급하여 기억하면 쉽습니다.

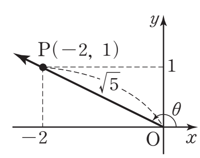
Bible

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\frac{1}{\tan\theta}$ (복부호동순)

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\theta\right)=-\cos\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\theta\right)=\pm\sin\theta$, $\tan\left(\frac{3}{2}\pi\pm\theta\right)=\mp\frac{1}{\tan\theta}$ (복부호동순)

상세 풀이

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$이므로 점 P의 좌표를 $(-2, 1)$이라 하고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같습니다.



$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(2) $\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=-2-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

정답 ➡ (1) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $-\frac{3}{2}$

보충 설명

$\square=\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$일 때, $\sin(\square)$ ➡ $\pm\cos\theta$, $\cos(\square)$ ➡ $\pm\sin\theta$, $\tan(\square)$ ➡ $\pm\frac{1}{\tan\theta}$
이때, □에서의 θ를 제1사분면의 각으로 취급하여 □가 어느 사분면의 각인지에 따라 부호를 결정합니다.

풀이집 p.122

숫자 바꾸기

08-1 θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

(2) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

표현 바꾸기

08-2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

(2) $\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

06

개념 넓히기 ★★★

08-3 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{2}{8}\pi+\cos^2\frac{3}{8}\pi+\cdots+\cos^2\frac{7}{8}\pi$

(2) $\sin^2\frac{\pi}{16}+\sin^2\frac{2}{16}\pi+\sin^2\frac{3}{16}\pi+\cdots+\sin^2\frac{15}{16}\pi$

정답

08-1 (1) $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **08-2** (1) $\frac{1}{\cos\theta}$ (2) $-\frac{2}{\cos\theta}$

08-3 (1) 3 (2) 8