● 3회차

01 ④	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ④	07 ②	08 ⑤	09 ③	10 ④
11 ②	12 ③	13 ①	14 ⑤	15 ④
16 ③	17 ①			

[서술형 1] (1) 15 (2) 38

[서술형 2] (1) 참 (2) 거짓

[서술형 3] (1) $a=3, b=-5$ (2) 7

01 ① $\{10, 20, 30, \cdots\}$

② $12=2^2\cdot3$이므로 $\{2, 3\}$

③ $\{3, 4, 5, \cdots\}$

④ 5에 가까운 수는 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

⑤ $\{2, 3, 5, 7\}$

따라서 집합이 아닌 것은 ④이다.

02 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{4, 7, 8\}$

① 2는 집합 A의 원소이므로 $2\in A$

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

③ $A-B=\{1, 2\}$

④ $A\cap B=\{4, 8\}$

⑤ $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고

$A\cup B=\{1, 2, 4, 7, 8\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{3, 5, 6, 9, 10\}$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=5$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

03 $n(A)=6$이므로 원소 3을 반드시 포함하고 원소 4를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-1-1}=2^4=16$

Lecture 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 원소 중 특정한 k개를 원소로 갖는 (또는 갖지 않는) 부분집합의 개수

$\Rightarrow 2^{n-k}$ (단, $k\le n$)

(2) 집합 A의 원소 중 특정한 k개는 원소로 갖고 l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수

$\Rightarrow 2^{n-k-l}$ (단, $k+l\le n$)

04 $A-\{(A-B)\cup(B^C-A)\}$

$=A-\{(A\cap B^C)\cup(B^C\cap A^C)\}$

$=A-\{(A\cup A^C)\cap B^C\}$

$=A-(U\cap B^C)$

$=A-B^C$

$=A\cap(B^C)^C$

$=A\cap B$

이므로 $A\cap B=\varnothing$

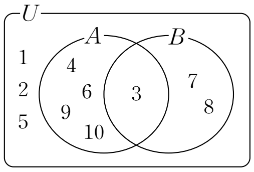
따라서 $A^C\cap B=B-A=B$이므로 옳은 것은 ⑤이다.

Lecture 분배법칙

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

05 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 7, 8\}$

따라서 B의 모든 원소의 합은

$3+7+8=18$

06 ㄱ. 9는 합성수이므로 거짓인 명제이다.

ㄴ. $(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$

이므로 참인 명제이다.

ㄷ. △ABC가 정삼각형이면 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}=\overline{\text{CA}}$

즉 △ABC는 이등변삼각형이므로 참인 명제이다.

ㄹ. $x=2$이면 $x(x-2)=0$이므로 참인 명제이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ, ㄹ로 그 개수는 3이다.

07 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 30\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $Q=\{8, 16, 24\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합

$P\cap Q^C=P-Q=\{4, 12, 20, 28\}$

의 원소이므로 그 개수는 4이다.

08 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

09 ① 역: △ABC가 직각삼각형이면 ∠A=90°이다. (거짓)
(반례) ∠A=30°, ∠B=90°, ∠C=60°이면
△ABC는 직각삼각형이지만 ∠A≠90°이다.
② 역: 직사각형은 정사각형이다. (거짓)
(반례) $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 직사각형 ABCD는 정사각형이 아니다.
③ 역: x가 9의 배수이면 x는 3의 배수이다. (참)
④ 역: $x>1$이면 $x>3$이다. (거짓)
(반례) $x=2$이면 $x>1$이지만 $x>3$이 아니다.
⑤ 역: $x\neq 0$이면 $x^2\neq x$이다. (거짓)
(반례) $x=1$이면 $x\neq 0$이지만 $x^2=x$이다.
따라서 그 역이 참인 명제는 ③이다.

오답 피하기

③ $x=9k$ (k는 자연수)라 하면 $x=3\cdot 3k$이므로 x는 3의 배수이다.

10 ㄱ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x>-3\}$, $Q=\{x\,|\,x>5\}$
이므로 $P\not\subset Q$, $Q\subset P$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. 조건 p에서 양변을 제곱하면
$x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$
$xy=|xy| \qquad \therefore xy\geq 0$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. 조건 p에서 $(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$
조건 q에서 $x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2\}$, $Q=\{0, 2\}$
이므로 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 $\left(x+\dfrac{5}{y}\right)\left(\dfrac{5}{x}+y\right)=5+xy+\dfrac{25}{xy}+5$
$\qquad =10+xy+\dfrac{25}{xy}$
이때 $xy>0$, $\dfrac{25}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$10+xy+\dfrac{25}{xy}\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\dfrac{25}{xy}}$
$\qquad =10+2\cdot 5=20$
$\left(\text{단, 등호는 } xy=\dfrac{25}{xy}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $\left(x+\dfrac{5}{y}\right)\left(\dfrac{5}{x}+y\right)$의 최솟값은 20이다.

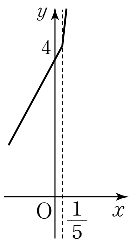
Lecture 산술평균과 기하평균의 관계
$a>0$, $b>0$일 때
$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
참고 $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$를 산술평균, $\sqrt{ab}$를 기하평균이라 한다.

12 함수 f의 정의역은 $\{a, b, c\}$, 공역은 $\{1, 2, 3\}$이다.
또 정의역 X의 각 원소에 대한 함숫값은
$f(a)=2$, $f(b)=3$, $f(c)=2$
이므로 치역은 $\{2, 3\}$이다.

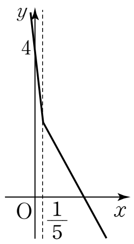
13 함수 f는 일대일대응이고 $f(2)-f(3)=3$이므로
$f(2)=4$, $f(3)=1$
이때 $f(1)=3$이므로 $f(4)=2$
$\therefore f(3)+f(f(2))=1+f(4)$
$\qquad =1+2$
$\qquad =3$

14 (i) $x\geq\dfrac{1}{5}$일 때
$f(x)=(5x-1)+ax+3$
$\quad =(a+5)x+2$
(ii) $x<\dfrac{1}{5}$일 때
$f(x)=-(5x-1)+ax+3$
$\quad =(a-5)x+4$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉 $x\geq\frac{1}{5}$일 때와 $x<\frac{1}{5}$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$(a+5)(a-5)>0$ $\therefore a<-5$ 또는 $a>5$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

Lecture 역함수가 존재할 조건

함수 f의 역함수가 존재한다.

$\Longleftrightarrow$ 함수 f가 일대일대응이다.

15 $g(-3)=-3+5=2$이므로

$(f\circ g)(-3)=f(g(-3))=f(2)$

$=2^2-10\cdot2+30$

$=14$

16 $f^1(0)=f(0)=1$

$f^2(0)=f(f^1(0))=f(1)=2$

$f^3(0)=f(f^2(0))=f(2)=0$

$f^4(0)=f(f^3(0))=f(0)=1$

$\vdots$

즉 $f^n(0)$의 값은 1, 2, 0이 이 순서대로 반복된다.

이때 $20=3\cdot6+2$이므로

$f^{20}(0)=f^2(0)=2$

또

$f^1(2)=f(2)=0$

$f^2(2)=f(f^1(2))=f(0)=1$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(1)=2$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=0$

$\vdots$

즉 $f^n(2)$의 값은 0, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $25=3\cdot8+1$이므로

$f^{25}(2)=f^1(2)=0$

$\therefore f^{20}(0)+f^{25}(2)=2+0=2$

17 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)$

$=-2(x+1)+3$

$=-2x+1$

$y=-2x+1$이라 하면 $x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

즉 $(g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$((g\circ f)^{-1}\circ h)(x)=(g\circ f)^{-1}(h(x))$

$=-\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}$

$((g\circ f)^{-1}\circ h)(x)=f(x)$이므로

$-\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}=x+1$

$\therefore h(x)=-2x-1$

$\therefore h(1)=-2\cdot1-1=-3$

다른 풀이

$(g\circ f)^{-1}\circ h=f$에서 $h=g\circ f\circ f$

$\therefore h(1)=(g\circ f\circ f)(1)=g(f(f(1)))$

$=g(f(2))=g(3)$

$=-2\cdot3+3=-3$

[서술형 1] $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$,

$C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(1) $A-C=\{3, 5, 7\}$이므로 $A-C$의 모든 원소의 합은

$3+5+7=15$

❶

(2) $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{4, 6, 8, 9\}$

$B-A=\{1, 10\}$

$\therefore (A\cup B)^C\cup(B-A)$

$=\{4, 6, 8, 9\}\cup\{1, 10\}$

$=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

따라서 $(A\cup B)^C\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은
$1+4+6+8+9+10=38$

❷

채점 기준	배점
❶ $A-C$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	3점
❷ $(A\cup B)^C\cup(B-A)$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	4점

[서술형 2] (1) 역: $x^2+y^2=0$이면 $xy=0$이다. (참)

❶

(2) 대우: $x^2+y^2\neq 0$이면 $xy\neq 0$이다. (거짓)
(반례) $x=1$, $y=0$이면 $x^2+y^2\neq 0$이지만 $xy=0$이다.

❷

채점 기준	배점
❶ 명제의 역을 구하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있다.	3점
❷ 명제의 대우를 구하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있다.	3점

[서술형 3] (1) $(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$
즉 $a^2x+ab+b=9x-20$이므로
$a^2=9$, $ab+b=-20$
$a^2=9$에서 $a=3$ ($\because a>0$)
$a=3$을 $ab+b=-20$에 대입하면
$3b+b=-20$ $\therefore b=-5$

❶

(2) $f(x)=3x-5$
이때 $f^{-1}(16)=k$라 하면 $f(k)=16$이므로
$3k-5=16$ $\therefore k=7$
$\therefore f^{-1}(16)=7$

채점 기준	배점
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
❷ $f^{-1}(16)$의 값을 구할 수 있다.	3점