● 4회차

01 ③	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 ⑤
06 ⑤	07 ①	08 ④	09 ④	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ④	17 ②			

[서술형 1] 5

[서술형 2] $-\frac{1}{2}$

[서술형 3] 192

01 $\frac{x^2+x}{x-1} \div \frac{x+1}{2x^2-2x} = \frac{x(x+1)}{x-1} \div \frac{x+1}{2x(x-1)}$

$= \frac{x(x+1)}{x-1} \times \frac{2x(x-1)}{x+1}$

$= 2x^2$

02 $f(2) = \frac{2\cdot 2+1}{2-1} = 5$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\frac{2k+1}{k-1}=3$, $2k+1=3k-3$

$\therefore k=4$, 즉 $f^{-1}(3)=4$

$\therefore f(2)+f^{-1}(3)=5+4=9$

03 $y=\frac{ax+5}{x+3}=\frac{a(x+3)-3a+5}{x+3}=\frac{-3a+5}{x+3}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=a$

즉 $a=1$, $k=-3$이므로

$a+k=1+(-3)=-2$

04 $y=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+3$

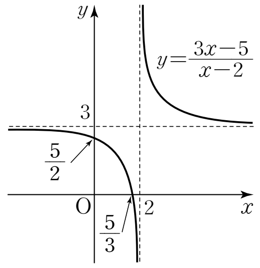
① 정의역은 $\{x \mid x\neq 2$인 실수$\}$이다.

② $x=0$을 $y=\frac{3x-5}{x-2}$에 대입하면

$y=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$

즉 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$이다.

③ 함수 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.



④ 그래프는 점 $(2, 3)$에 대하여 대칭이다.

⑤ 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

05 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\frac{k}{0+1}+1 \qquad \therefore k=-1$

따라서 구하는 함수의 식은

$y=\frac{-1}{x+1}+1=\frac{-1+(x+1)}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

이므로 $a=1$, $b=0$, $c=1$

$\therefore a+b+c=1+0+1=2$

Lecture 유리함수의 식 구하기

점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이고 점 (a, b)를 지나는 유리함수의 식은 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$로 놓은 후 $x=a$, $y=b$를 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

06 $-2x+10\geq 0$에서 $-2x\geq -10$

$\therefore x\leq 5$

즉 주어진 함수의 정의역은

$\{x \mid x\leq 5\} \qquad \therefore a=5$

또 $\sqrt{-2x+10}\geq 0$에서 $\sqrt{-2x+10}+b\geq b$이므로

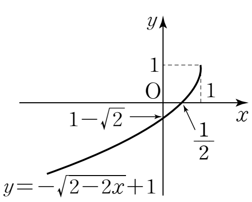
주어진 함수의 치역은

$\{y \mid y\geq b\} \qquad \therefore b=3$

$\therefore ab=5\cdot 3=15$

07 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{2(x+2)}+k$
이 함수의 그래프가 점 $(6, 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{2(6+2)}+k$, $3=4+k$
$\therefore k=-1$

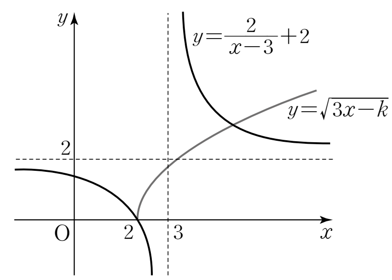
08 ㄱ. $2-2x \geq 0$에서 $-2x \geq -2$
$\therefore x \leq 1$
즉 정의역은 $\{x \mid x \leq 1\}$이다.
ㄴ. $-\sqrt{2-2x} \leq 0$에서 $-\sqrt{2-2x}+1 \leq 1$이므로 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$
ㄷ. $y=-\sqrt{2-2x}+1=-\sqrt{-2(x-1)}+1$이므로 함수 $y=-\sqrt{2-2x}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
즉 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



ㄹ. $y=-\sqrt{4-2x}=-\sqrt{-2(x-2)}$이므로 주어진 함수의 그래프는 평행이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프와 겹쳐지게 할 수 있다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

09 $y=-\sqrt{4-x}+5=-\sqrt{-(x-4)}+5$이므로 함수 $y=-\sqrt{4-x}+5$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
즉 $-5 \leq x \leq 0$에서 $x=-5$일 때 최솟값 2를 갖고, $x=0$일 때 최댓값 3을 갖는다.
따라서 $M=3$, $m=2$이므로
$M+m=3+2=5$

10 함수 $y=\frac{2}{x-3}+2$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
$y=\sqrt{3x-k}=\sqrt{3\left(x-\frac{k}{3}\right)}$이므로 함수 $y=\sqrt{3x-k}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{3}$만큼 평행이동한 것이다.
이때 두 함수의 그래프가 제1사분면에서 한 개의 교점을 가지려면 다음 그림에서 함수 $y=\sqrt{3x-k}$의 그래프가 점 $(2, 0)$의 오른쪽 부분에서 시작해야 한다.



즉 $\frac{k}{3}>2$이어야 하므로 $k>6$
따라서 자연수 k의 최솟값은 7이다.

11 모든 경우의 수는
$12 \cdot 12=144$
두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 (홀수)$\times$(홀수)이므로 그 경우의 수는
$6 \cdot 6=36$
따라서 구하는 경우의 수는
$144-36=108$

다른 풀이

두 눈의 수의 곱이 짝수인 경우는
(짝수)$\times$(짝수), (짝수)$\times$(홀수), (홀수)$\times$(짝수)
(i) (짝수)$\times$(짝수)인 경우의 수
$6 \cdot 6=36$
(ii) (짝수)$\times$(홀수)인 경우의 수
$6 \cdot 6=36$
(iii) (홀수)$\times$(짝수)인 경우의 수
$6 \cdot 6=36$
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$36+36+36=108$

12 3500보다 큰 자연수는 35□□, 36□□, 4□□□, 5□□□, 6□□□ 꼴이다.

35□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
36□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
6□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$12+12+60+60+60=204$

13 a□□□□ 꼴의 개수는 $4!=24$
b□□□□ 꼴의 개수는 $4!=24$
c□□□□ 꼴의 개수는 $4!=24$
da□□□ 꼴의 개수는 $3!=6$
db□□□ 꼴의 개수는 $3!=6$
즉 a□□□□ 꼴부터 db□□□ 꼴까지의 총 개수는
$24+24+24+6+6=84$
이므로 86번째에 오는 문자열은 dcabe, dcaeb, ⋯ 에서 dcaeb이다.

14 B 국가 선수 2명을 한 사람으로 생각하여 A 국가 선수 1명과 함께 2명을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
B 국가 선수 2명이 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
오른쪽 그림과 같이 A 국가 선수와 이웃한 B 국가 선수 사이와 양 끝의 3개의 자리에 C 국가 선수 2명을 세우는 경우의 수는
○Ⓐ○Ⓑ○
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\cdot2\cdot6=24$

15 A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
E에 칠할 수 있는 색은 C, D에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$

16 짝수 2, 4, 6이 적힌 공 3개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
홀수 1, 3, 5, 7이 적힌 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot6=18$

17 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지이고, $f(1)$, $f(3)$의 값은 공역의 원소 4개 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는
$4\cdot{}_4C_2=24$

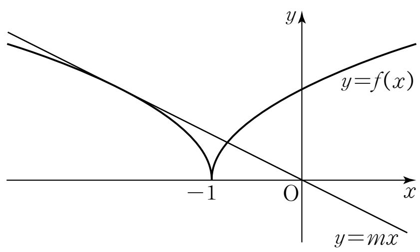
[서술형 1] $y=\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-5}{x+1}=-\dfrac{5}{x+1}+2$
이므로 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\dfrac{5}{(x+1)+1}+2+2$
$\therefore y=-\dfrac{5}{x+2}+4$
이 함수의 그래프가 점 $(3, k)$를 지나므로
$k=-\dfrac{5}{3+2}+4=3$
❶
또 함수 $y=-\dfrac{5}{x+2}+4$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=4$이므로
$a=-2$, $b=4$
❷

$\therefore k+a+b=3+(-2)+4=5$

❸

채점 기준	배점
❶ k의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $k+a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (x\ge -1)\\ \sqrt{-(x+1)} & (x<-1)\end{cases}$이고 직선 $y=mx$는 기울기가 m이고 원점을 지나는 직선이다. 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 직선 $y=mx\ (m<0)$가 함수 $y=\sqrt{-x-1}$의 그래프에 접하는 경우이다.



❶

$\sqrt{-x-1}=mx$의 양변을 제곱하면

$-x-1=m^2x^2 \qquad \therefore m^2x^2+x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot m^2\cdot 1=0$

$-4m^2=-1 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}\ (\because m<0)$

❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 그래프를 그릴 수 있다.	4점
❷ m의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] A, B 두 사람의 좌석 번호를 순서쌍 (A, B)로 나타내면 A, B 두 사람이 서로 옆자리에 앉는 경우는

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2),$

$(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$

의 8가지

❶

나머지 4명이 남아 있는 4자리에 앉는 경우의 수는 4명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$4!=24$

❷

따라서 구하는 경우의 수는

$8\cdot 24=192$

❸

채점 기준	배점
❶ A, B 두 사람이 서로 옆자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❷ A, B 두 사람을 제외한 나머지 4명이 남아 있는 4자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 6명이 함께 영화를 관람할 때, A, B 두 사람이 서로 옆자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점