개념check

[곡선과 x축 사이의 넓이]

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

[두 곡선 사이의 넓이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

기본문제

[예제]

1. 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[문제]

2. 곡선 $y=x^2+2x+1$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{22}{3}$ ② 8 ③ $\frac{26}{3}$ ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ 10

[예제]

3. 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[문제]

4. 곡선 $y=x^2-4x-5$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 32 ② 33 ③ 34 ④ 35 ⑤ 36

[예제]

5. 곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[문제]

6. 곡선 $y=-x^2+4$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[예제]

7. 두 곡선 $y=x^2-4x+1$, $y=-x^2+8x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 56 ② 64 ③ 72 ④ 80 ⑤ 88

[문제]

8. 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x+2$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

평가문제

[스스로 확인하기]

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?

(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
$S=$ $\boxed{(ㄱ)}$
(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
$S=$ $\boxed{(ㄴ)}$

① (ㄱ) : $\int_a^b f(x)dx$, (ㄴ) : $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

② (ㄱ) : $\int_a^b |f(x)|dx$, (ㄴ) : $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

③ (ㄱ) : $\int_a^b f(x)dx$, (ㄴ) : $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

④ (ㄱ) : $\int_a^b |f(x)|dx$, (ㄴ) : $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

⑤ (ㄱ) : $\int_a^b f(x)dx$, (ㄴ) : $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

[스스로 확인하기]

10. 곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[스스로 확인하기]

11. 곡선 $y=x^2+x$과 직선 $y=5x-3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[스스로 확인하기]

12. 곡선 $y=x^2-kx$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{4}{3}$일 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[스스로 확인하기]

13. 곡선 $y=x^2+1$과 y축, 그리고 이 곡선 위의 한 점 $(1, 2)$에서 그은 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[스스로 확인하기]

14. 지면에서 공을 던지자 공이 이차함수의 궤적으로 날아가 땅에 떨어졌다. 공이 최고로 높은 지점에 도달한 순간 지면으로부터의 높이가 $3m$, 땅에 떨어진 지점이 던진 지점으로부터 $6m$일 때, 지면과 이차함수의 궤적으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[스스로 마무리하기]

15. 곡선 $y=-x^3+6x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 108 ② 110 ③ 112 ④ 114 ⑤ 116

[스스로 마무리하기]

16. 곡선 $y=3x^2-12x+9$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=3x^2-12x+9$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하자.
$A:B=m:n$일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[스스로 마무리하기]

17. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$을 만족하고 일대일대응인 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
$f(1)=2$, $f(5)=7$일 때, $\int_1^5 f(x)dx+\int_2^7 g(x)dx$의 값은?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

[스스로 마무리하기]

18. 곡선 $y=x^2$와 직선 $y=2x+k$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{32}{3}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

유사문제

19. 곡선 $y=3x^2-6x$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

20. 곡선 $y=x^2-2x+6$과 직선 $y=2x+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

21. 곡선 $y=x^2$과 이 곡선 위의 점 $(1,1)$에서의 접선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

22. 두 곡선 $y=x^3-x^2+2$, $y=x^2+2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1
② $\frac{4}{3}$
③ $\frac{5}{3}$
④ 2
⑤ $\frac{7}{3}$

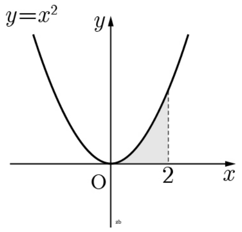
23. 곡선 $y=x(x-1)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ 1
⑤ 2

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] 곡선 $y=x^2$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2 \ge 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 (x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

2) [정답] ③

[해설] $y=x^2+2x+1=(x+1)^2$은 모든 실수 x에 대해 항상 0보다 크거나 같으므로

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2+2x+1>0$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 (x^2+2x+1)dx$$

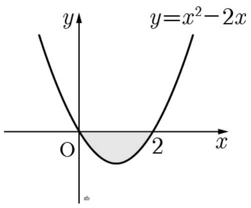
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^2=\frac{8}{3}+4+2=\frac{26}{3}$$

3) [정답] ②

[해설] 곡선 $y=x^2-2x$에서 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

즉 $x=0$ 또는 $x=2$



닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-2x \le 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |x^2-2x|dx=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx$$

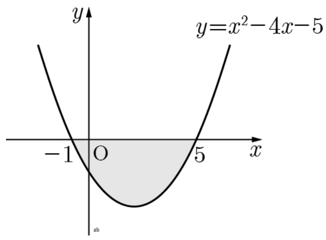
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

4) [정답] ⑤

[해설] 곡선 $y=x^2-4x-5$에서 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x-5=0$에서 $(x-5)(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=5$



닫힌구간 $[-1,\ 5]$에서 $x^2-4x-5 \le 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^5 |x^2-4x-5|dx=\int_{-1}^5 (-x^2+4x+5)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^5$$

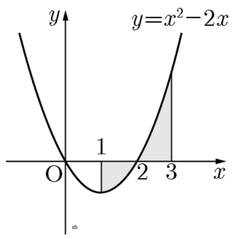
$$=\left(-\frac{125}{3}+75\right)-\left(\frac{1}{3}-3\right)=36$$

5) [정답] ②

[해설] 곡선 $y=x^2-2x$에서 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

즉 $x=2$ 또는 $x=0$



닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $x^2-2x \le 0$

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $x^2-2x \ge 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 |x^2-2x|dx$$

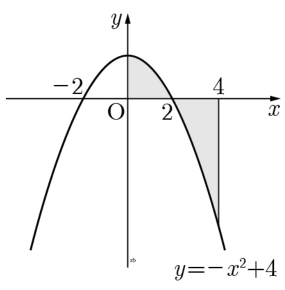
$$=\int_1^2 (-x^2+2x)\,dx+\int_2^3 (x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=2$$

6) [정답] ①

[해설] 곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-2$



닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $-x^2+4 \ge 0$

닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 $-x^2+4 \le 0$

따라서 구하는 넓이는

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$$\int_0^4 |-x^2+4|dx$$

$$=\int_0^2(-x^2+4)\,dx+\int_2^4(x^2-4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^4=16$$

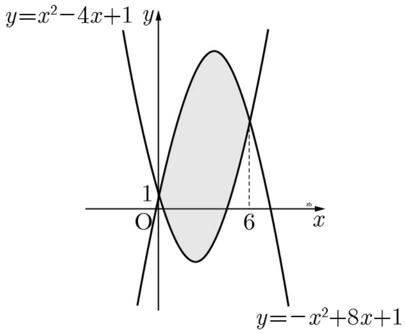
7) [정답] ③

[해설] 두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+1=-x^2+8x+1$에서

$2x^2-12x=0,\ 2x(x-6)=0$

즉 $x=0$ 또는 $x=6$



닫힌구간 $[0,\ 6]$에서

$-x^2+8x+1 \geq x^2-4x+1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^6\{(-x^2+8x+1)-(x^2-4x+1)\}dx$$

$$=\int_0^6(-2x^2+12x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^6=-144+216=72$$

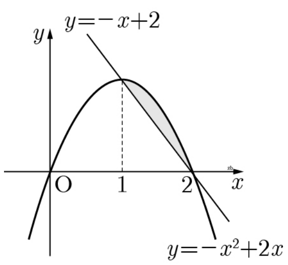
8) [정답] ①

[해설] 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x=-x+2$에서

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

즉 $x=1$ 또는 $x=2$



닫힌구간 $[1,\ 2]$에서

$-x^2+2x \geq -x+2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\{(-x^2+2x)-(-x+2)\}dx$$

$$=\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=\frac{1}{6}$$

9) [정답] ②

[해설] (1) 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)|dx$$

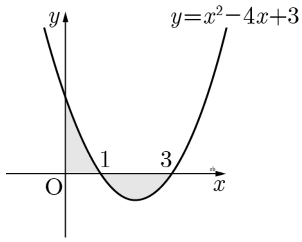
(2) 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

10) [정답] ④

[해설] 곡선 $y=x^2-4x+3$에서 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서 $(x-3)(x-1)=0$

즉, $x=1$ 또는 $x=3$



닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x^2-4x+3 \geq 0$

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $x^2-4x+3 \leq 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3|x^2-4x+3|dx$$

$$=\int_0^1(x^2-4x+3)\,dx+\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

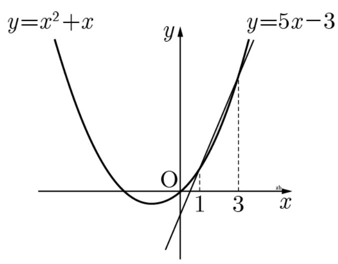
11) [정답] ④

[해설] 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$x^2+x=5x-3$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

즉, $x=1$ 또는 $x=3$



닫힌구간 $[1,\ 3]$에서

$x^2+x \leq 5x-3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\{(5x-3)-(x^2+x)\}dx$$

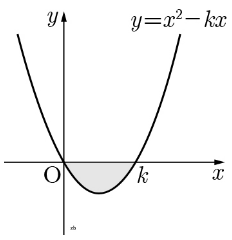
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$= \int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}$

12) [정답] ②

[해설] 곡선 $y=x^2-kx$에서 x축의 교점의 x좌표는 $x=0$ 또는 $x=k$



닫힌구간 $[0,\ k]$에서 $x^2-kx \le 0$

따라서 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로

$\int_0^k (-x^2+kx)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k = \frac{k^3}{6}$

$\frac{k^3}{6} = \frac{4}{3}$

$k^3=8$

따라서 양수 $k=2$

13) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^2+1$라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표가 $(1,2)$이므로 접선의 방정식은

$y=2x$

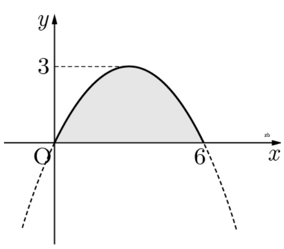
이 직선이 원점을 지나므로 구하는 넓이는

$\int_0^1 \{(x^2+1)-(2x)\}dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

14) [정답] ②

[해설]



공을 던진 지점을 $(0,0)$이라 하면 공이 떨어진 지점을 $(6,0)$, 최고 높이의 지점을 $(3,3)$이라 할 수 있다. 이 세 점을 이용하여 이차함수의 식을 구하면

$y=-\frac{1}{3}x(x-6)$

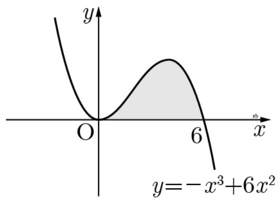
따라서 구하는 넓이는

$\int_0^6 \left(-\frac{1}{3}x^2+2x\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{9}x^3+x^2\right]_0^6 = -24+36=12$

15) [정답] ①

[해설] 곡선 $y=-x^2(x-6)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x=0$ 또는 $x=6$



닫힌구간 $[0,\ 6]$에서

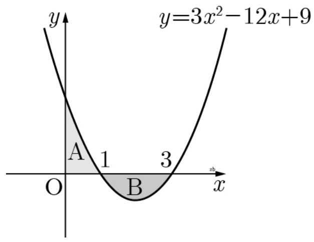
$-x^2(x-6) \ge 0$

이므로 구하는 넓이는

$\int_0^6 (-x^3+6x^2)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4}+2x^3\right]_0^6 = 108$

16) [정답] ②

[해설] 곡선 $y=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로 곡선 $y=3x^2-12x+9$와 x축과의 교점의 x좌표는 $x=1$ 또는 $x=3$



$A=\int_0^1 (3x^2-12x+9)dx$

$= [x^3-6x^2+9x]_0^1 = 4$

$B=\int_1^3 (-3x^2+12x-9)dx$

$= [-x^3+6x^2-9x]_1^3 = 4$

$\therefore A:B=m:n=1:1$

$m+n=2$

17) [정답] ③

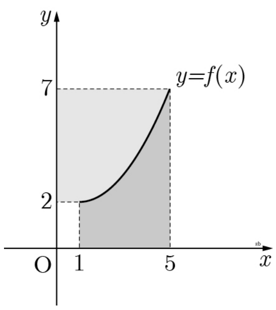
[해설] 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$\int_1^5 f(x)dx$는 $y=f(x)$와 $x=1,\ x=5,\ x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이다.

$\int_2^7 g(x)dx$는 $y=f(x)$와 $y=2,\ y=7,\ y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이다.

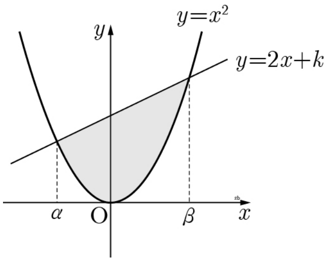
이를 대략적으로 나타내면 그림과 같다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125



따라서 구하고자 하는 값은
$35-2=33$

18) [정답] ②
[해설] 곡선과 직선만으로 둘러싸인 도형이 존재하므로 $y=x^2$과 $y=2x+k$는 서로 다른 두 점에서 만난다.
$x^2=2x+k$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면
$x^2-2x-k=0$에서
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-k,\ \beta-\alpha=\sqrt{4+4k}$

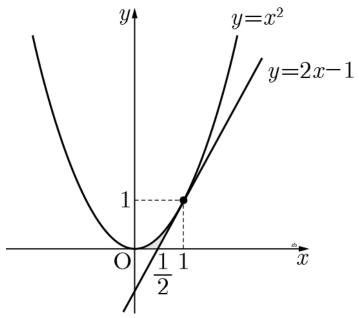


닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $x^2\leq 2x+k$이므로
$\frac{32}{3}=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+2x+k)dx$
$\frac{32}{3}=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+kx\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\frac{32}{3}=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)$
$32=-(\beta-\alpha)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-6-3k)$
$8=(\sqrt{1+k})^3$
$\therefore k=3$

19) [정답] ⑤
[해설] 곡선 $y=3x^2-6x=3x(x-2)$와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\int_1^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^4(3x^2-6x)dx$
$=[-x^3+3x^2]_1^2+[x^3-3x^2]_2^4$
$=(-8+12+1-3)+(64-48-8+12)$
$=2+20=22$

20) [정답] ①
[해설] 곡선 $y=x^2-2x+6$과 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는
$x^2-2x+6=2x+3$
$x^2-4x+3=0,\ (x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 구하려는 부분의 넓이는
$\int_1^3|x^2-4x+3|dx=-\int_1^3(x^2-4x+3)dx$
$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3=-(9-18+9)+\left(\frac{1}{3}-2+3\right)$
$=\frac{4}{3}$

21) [정답] ①
[해설] $y=x^2$에서 $y'=2x$
즉 점 $(1,1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$
직선 $y=2x-1$의 그래프의 x절편은
$2x-1=0,\ 2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$



따라서 구하는 넓이는
$\int_0^1 x^2dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1$
$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

22) [정답] ②
[해설] $x^3-x^2+2=x^2+2$에서
$x^3-2x^2=0,\ x^2(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$
$\int_0^2\{(x^2+2)-(x^3-x^2+2)\}dx=\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$
$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=-4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}$

23) [정답] ③
[해설] 구하려는 부분의 넓이는
$\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx+\int_1^2 -x(x-1)(x-2)dx$
$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$
$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$
$=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)+(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125