



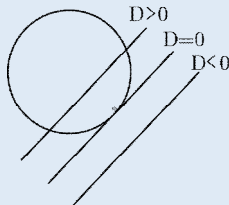
◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-03-05
2) 제작자 : 교육지대(주)
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초
제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호
되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무
단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법
외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[원과 직선의 위치 관계]

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 과 직선 $y = mx + n$ 의 위치 관계는
이차방정식 $x^2 + (mx + n)^2 = r^2$
즉, $(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$ 의 판별식 D 의 부호에 따라
• $D > 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
• $D = 0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다)
• $D < 0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



[기울기가 주어진 원의 접선의 방정식]

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고, 기울기가 m 인 접선의 방정식은
 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

[원 위의 한 점에서의 접선의 방정식]

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은
 $x_1x + y_1y = r^2$

기본문제

[예제]

1. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선 $y = -2x + k$ 를 서로 다른
두 점에서 만나게 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-1 < k < 1$ ② $-3 < k < 3$
③ $-5 < k < 5$ ④ $-3 \leq k \leq 3$
⑤ $-5 \leq k \leq 5$

[문제]

2. 원 $x^2 + y^2 = 3$ 과 직선 $y = \sqrt{2}x + k$ 를 서로 다른
두 점에서 만나게 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ ② $-3 < k < 3$
③ $-2\sqrt{3} < k < 2\sqrt{3}$ ④ $-3 \leq k \leq 3$
⑤ $-2\sqrt{3} \leq k \leq 2\sqrt{3}$

[예제]

3. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 직선 $y = x + k$ 를 서로 다른 두
점에서 만나게 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ ② $-2 < k < 2$
③ $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$ ④ $-2 \leq k \leq 2$
⑤ $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$

[문제]

4. 원 $x^2 + y^2 = 3$ 과 직선 $y = kx + 3$ 을 접하게 하는
양의 실수 k 의 값은?

- ① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{5}$
③ 2 ④ $\sqrt{3}$
⑤ $\sqrt{2}$

[문제]

5. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 에 접하고 기울기가 -2 인 제1사분
면을 지나는 접선의 방정식은?

- ① $2\sqrt{10}$ ② 6
③ $4\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{7}$
⑤ $2\sqrt{6}$

[문제]

6. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(-4, 2)$ 에서의 접선의
방정식은?

- ① $y = -2x - 6$ ② $y = -2x - 3$
③ $y = 2x + 5$ ④ $y = 2x + 10$
⑤ $y = x + 6$

[예제]

7. 점 $(0, 5)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식은? (단, 접선의 기울기는 양수)

- ① $y = 3x + 5$ ② $y = x + 5$
 ③ $y = 2x + 5$ ④ $y = \frac{1}{2}x + 5$
 ⑤ $y = \frac{3}{2}x + 5$

[문제]

8. 점 $(4, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 10$ 에 그은 접선의 방정식은? (단, 접선의 기울기는 음수)

- ① $y = -x + 2$ ② $y = -3x + 10$
 ③ $y = -3x + 5$ ④ $y = -5x + 18$
 ⑤ $y = -5x + 9$

평가문제

[스스로 확인하기]

9. (가)~(마)에 들어갈 내용으로 옳지 않은 것은?

- (1) 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 직선의 방정식 $y = mx + n$ 을 대입하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

판별식의 값의 부호	원과 직선의 위치 관계
$D \begin{bmatrix} \text{가} \end{bmatrix} 0$	서로 다른 두 점에서 만난다.
$D \begin{bmatrix} \text{나} \end{bmatrix} 0$	한 점에서 만난다. (접한다.)
$D \begin{bmatrix} \text{다} \end{bmatrix} 0$	만나지 않는다.

- (2) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은 $y = \begin{bmatrix} \text{라} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{이} \end{bmatrix}$ 이다.
 (3) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $\begin{bmatrix} \text{마} \end{bmatrix} = r^2$ 이다.

- ① $>$ ② $=$
 ③ $<$ ④ $mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 ⑤ $x_1x - y_1y$

[스스로 확인하기]

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 직선 $y = -2x + k$ 를 서로 다른 두 점에서 만나게 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$ ② $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$
 ③ $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$
 ⑤ $-2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$

[스스로 확인하기]

11. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $4x + 3y + a = 0$ 이 접할 때, 양수 a 의 값은?

- ① 6 ② 9
 ③ 12 ④ 15
 ⑤ 18

[스스로 확인하기]

12. 직선 $y = 3x - 4$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 직선의 방정식을 $y = mx + k$ 라고 할 때, k 값이 될 수 있는 모든 수의 제곱의 합은? (단, m, k 는 상수)

- ① 150 ② 180
 ③ 210 ④ 240
 ⑤ 270

[스스로 확인하기]

13. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 두 점 $(1, 1), (1, -1)$ 에서의 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$
 ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$
 ⑤ 5

[스스로 확인하기]

14. 어떤 등대의 불빛은 등대에서 3 km 떨어진 지점까지 원을 그리며 바다를 비춘다. 등대에서 동쪽으로 5 km 떨어진 A지점에 있는 배가 등대에서 서쪽으로 7 km, 양의 실수인 a 에 대하여 북쪽으로 a km 떨어진 B지점을 향해 직선으로 이동하고 있을 때, 등대에서 이 배를 볼 수 있게 하는 a 의 값의 범위는? (단, 등대의 높이는 무시하고, 등대의 불빛이 비추는 곳까지만 볼 수 있다.)

- ① $0 < a \leq 5$ ② $0 < a \leq 6$
 ③ $0 < a \leq 7$ ④ $0 < a \leq 8$
 ⑤ $0 < a \leq 9$

[스스로 마무리하기]

15. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 와 직선 $y = -2x + m$ 이 서로 만나지 않게 하는 자연수 m 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2
 ③ 3 ④ 4
 ⑤ 5

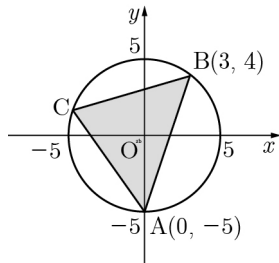
[스스로 마무리하기]

16. 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 직선 $y = -x + k$ 가 두 점 A, B에서 만날 때, 삼각형 OAB가 정삼각형이 되게 하는 양수 k 의 값은? (단, O는 원점이다.)

- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$
 ③ $3\sqrt{6}$ ④ $4\sqrt{6}$
 ⑤ $5\sqrt{6}$

[스스로 마무리하기]

17. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 두 점 $A(0, -5)$, $B(3, 4)$ 과 원 위의 움직이는 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은?



- ① $\frac{11}{2} + \frac{11\sqrt{10}}{2}$ ② $6 + 6\sqrt{10}$
 ③ $\frac{13}{2} + \frac{13\sqrt{10}}{2}$ ④ $7 + 7\sqrt{10}$
 ⑤ $\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{10}}{2}$

유사문제

18. 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점 $(2, -2\sqrt{3})$ 에서의 접선은?

- ① $x + 2y = 10$ ② $x + \sqrt{2}y = 3$
 ③ $x - 3y = -10$ ④ $x + \sqrt{3}y = 4$
 ⑤ $x - \sqrt{3}y = 8$

19. 점 $(0, 4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라고 할 때, $m_1 m_2$ 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{5}{2}$
 ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$
 ⑤ -1

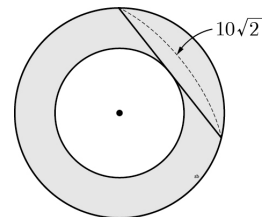
20. 점 $(-2, 0)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ 에 그은 두 접선의 기울기의 합은?

- ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{4}$
 ③ 0 ④ $-\frac{5}{4}$
 ⑤ $-\frac{9}{4}$

21. 직선 $y = mx + 4$ 와 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 이 서로 만나지 않을 때, 정수 m 의 최솟값은?

- ① -2 ② -1
 ③ 0 ④ 1
 ⑤ 2

22. 중심이 같고 반지름의 길이가 서로 다른 두 원이 있다. 작은 원에 접하는 큰 원의 현의 길이가 $10\sqrt{2}$ 일 때, 두 원의 넓이의 차는?



- ① 10π ② 20π
 ③ 30π ④ 40π
 ⑤ 50π



정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $y = -2x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x + k)^2 = 5$$

$$\text{즉 } 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 5 \times (k^2 - 5) = -k^2 + 25 > 0$$

$$k^2 - 25 < 0, \text{ 즉 } (k+5)(k-5) < 0$$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-5 < k < 5$$

2) [정답] ②

[해설] $y = \sqrt{2}x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 3$ 에 대입하면

$$x^2 + (\sqrt{2}x + k)^2 = 3$$

$$\text{즉 } 3x^2 + 2\sqrt{2}kx + k^2 - 3 = 0$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}k)^2 - 3 \times (k^2 - 3) = -k^2 + 9 > 0$$

$$k^2 - 9 < 0, \text{ 즉 } (k+3)(k-3) < 0$$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-3 < k < 3$$

3) [정답] ③

[해설] $y = x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 + (x + k)^2 = 4$$

$$\text{즉 } 2x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2 \times (k^2 - 4) = -k^2 + 8 > 0$$

$$k^2 - 8 < 0, \text{ 즉 } (k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2}) < 0$$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$$

4) [정답] ⑤

[해설] $y = kx + 3$ 을 $x^2 + y^2 = 3$ 에 대입하면

$$x^2 + (kx + 3)^2 = 3$$

$$\text{즉 } (k^2 + 1)x^2 + 6kx + 6 = 0$$

원과 직선이 접해야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 - (k^2 + 1) \times 6 = 3k^2 - 6 = 0$$

$$k^2 - 2 = 0, \text{ 즉 } (k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) = 0$$

따라서 구하는 실수 k 의 값은

$$k > 0 \text{이므로 } k = \sqrt{2}$$

5) [정답] ①

[해설] 기울기가 -2 인 접선의 방정식을 상수 k 에 대

하여 나타내면 $y = -2x + k$ 이고 제1사분면을 지나므로 $k > 0$

$y = -2x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 8$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x + k)^2 = 8$$

$$\text{즉 } 5x^2 - 4kx + k^2 - 8 = 0$$

원과 직선이 접해야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5 \times (k^2 - 8) = -k^2 + 40 = 0$$

$$k^2 - 40 = 0, \text{ 즉 } (k + 2\sqrt{10})(k - 2\sqrt{10}) = 0$$

따라서 구하는 실수 k 의 값은

$$k > 0 \text{이므로 } k = 2\sqrt{10}$$

6) [정답] ④

[해설] 원 위의 점 $(-4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-4x + 2y = 20, \text{ 즉 } y = 2x + 10$$

7) [정답] ③

[해설] 접점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선 $\textcircled{1}$ 은 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5y_1 = 5, \text{ 즉 } y_1 = 1$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$y_1 = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x_1^2 + 1^2 = 5, \text{ 즉 } x_1 = \pm 2$$

구하는 접선의 방정식은

$$2x + y = 5 \text{ 또는 } -2x + y = 5$$

따라서 접선의 기울기는 양수이므로

$$y = 2x + 5$$

8) [정답] ②

[해설] 접점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선 $\textcircled{1}$ 은 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$$4x_1 - 2y_1 = 10, \text{ 즉 } y_1 = 2x_1 - 5$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$y_1 = 2x_1 - 5$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x_1^2 + (2x_1 - 5)^2 = 10, \quad x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1 - 3) = 0, \text{ 즉 } x_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 3$$

(i) $y_1 = 2x_1 - 5$ 에 $x_1 = 1$ 을 대입하면

$$y_1 = -3$$

구하는 접선의 방정식은

$$x - 3y = 10, \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$$

(ii) $y_1 = 2x_1 - 5$ 에 $x_1 = 3$ 을 대입하면

$$y_1 = 1$$

구하는 접선의 방정식은
 $3x + y = 10$, $y = -3x + 10$
 따라서 접선의 기울기는 음수이므로
 $y = -3x + 10$

9) [정답] ⑤

[해설] (i) 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 직선의 방정식 $y = mx + n$ 을 대입하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

판별식의 값의 부호	원과 직선의 위치 관계
$D > 0$	서로 다른 두 점에서 만난다.
$D = 0$	한 점에서 만난다. (접한다.)
$D < 0$	만나지 않는다.

(ii) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 이다.

(iii) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = r^2$ 이다.

10) [정답] ②

[해설] $y = -2x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면
 $x^2 + (-2x + k)^2 = 4$
 즉 $5x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$
 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 5 \times (k^2 - 4) = -k^2 + 20 > 0$
 $k^2 - 20 < 0$, 즉 $(k + 2\sqrt{5})(k - 2\sqrt{5}) < 0$
 따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는
 $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

11) [정답] ④

[해설] 접점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 9$
 한편 $4x + 3y + a = 0$ 은 원의 접선이므로 0이 아닌 실수 k 에 대하여 $\frac{4}{k}x + \frac{3}{k}y = 9$ 가 되는 k 가 존재한다.

이때 $x_1 = \frac{4}{k}$, $y_1 = \frac{3}{k}$ 이고 x_1, y_1 는 원 위의 점

이므로 $\left(\frac{4}{k}\right)^2 + \left(\frac{3}{k}\right)^2 = \frac{4^2 + 3^2}{k^2} = \frac{25}{k^2} = 9$

$k^2 - \frac{25}{9} = 0$, 즉 $\left(k + \frac{5}{3}\right)\left(k - \frac{5}{3}\right) = 0$

$k = -\frac{5}{3}$ 또는 $k = \frac{5}{3}$

(i) $k = -\frac{5}{3}$ 일 때, $-\frac{12}{5}x - \frac{9}{5}y = 9$

즉 $4x + 3y + 15 = 0$

(ii) $k = \frac{5}{3}$ 일 때, $\frac{12}{5}x + \frac{9}{5}y = 9$

즉 $4x + 3y - 15 = 0$

$a > 0$ 이므로 $a = 15$

12) [정답] ②

[해설] 접선의 기울기는 $y = 3x - 4$ 와 평행하므로 3

즉 $m = 3$ 이므로 접선의 방정식은 $y = 3x + k$

$y = 3x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 9$ 에 대입하면

$x^2 + (3x + k)^2 = 9$

즉 $10x^2 + 6kx + k^2 - 9 = 0$

원과 직선이 접해야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (3k)^2 - 10 \times (k^2 - 9) = -k^2 + 90 = 0$

$k^2 - 90 = 0$, 즉 $(k + 3\sqrt{10})(k - 3\sqrt{10}) = 0$

따라서 실수 k 의 값은 $3\sqrt{10}$ 또는 $-3\sqrt{10}$

$(3\sqrt{10})^2 + (-3\sqrt{10})^2 = 180$

13) [정답] ③

[해설] 점 $(1, 1)$ 에서의 접선은

$x + y = 2$, 즉 $y = -x + 2$

점 $(1, -1)$ 에서의 접선은

$x - y = 2$, 즉 $y = x - 2$

$y = -x + 2$ 의 y 절편은 $(0, 2)$

$y = x - 2$ 의 y 절편은 $(0, -2)$

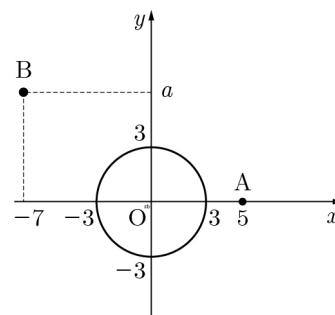
$y = -x + 2$, $y = x - 2$ 의 교점은 $(2, 0)$

따라서 세 점 $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ 로 둘러싸인

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (2+2) \times 2 = 4$

14) [정답] ⑤

[해설] 등대를 원점으로 하는 좌표평면 위에 주어진 조건을 나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서 원의 방정식은

$x^2 + y^2 = 9$

두 점 $A(5, 0)$, $B(-7, a)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y - 0 = \frac{a - 0}{-7 - 5}(x - 5)$,

즉, $ax + 12y - 5a = 0$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $ax + 12y - 5a = 0$ 사이의 거리는 $a > 0$ 이므로

$$\frac{|-5a|}{\sqrt{a^2+12^2}} = \frac{5a}{\sqrt{a^2+144}}$$

등대에서 배를 볼 수 있으려면 $\frac{5a}{\sqrt{a^2+144}} \leq 3$

$$25a^2 \leq 9(a^2+144), \text{ 즉 } a^2 \leq 9^2, -9 \leq a \leq 9$$

따라서 $0 < a \leq 9$

15) [정답] ②

[해설] $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 와 $y = -2x + m$, 즉

$2x + y - m = 0$ 이 서로 만나지 않으려면

원의 중심 $(-2, 1)$ 과 직선사이의 거리

$$\frac{|2 \times (-2) + 1 \times 1 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$
이 반지름인 2보다 커야

한다.

$$\frac{|2 \times (-2) + 1 \times 1 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|m+3|}{\sqrt{5}} > 2$$

$$|m+3| > 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$m > -3 + 2\sqrt{5} \text{ 또는 } m < -3 - 2\sqrt{5}$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 2

16) [정답] ②

[해설] 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 반지름의 길이가 4이므로

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

이때 원의 중심과 직선 $y = -x + k$ 사이의 거리는 정삼각형 OAB의 높이와 같으므로

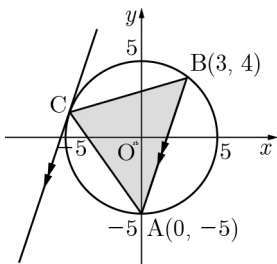
$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3} \text{ 에서}$$

$$|k| = 2\sqrt{6}, k = \pm 2\sqrt{6}$$

따라서 양수 k 의 값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

17) [정답] ⑤

[해설] 다음 그림과 같이 점 C에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때 삼각형 ABC의 넓이가 최대이다.



$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{4 - (-5)}{3 - 0} = 3$$

이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm 5\sqrt{3^2 + 1},$$

$$\text{즉, } y = 3x \pm 5\sqrt{10}$$

위의 그림에서 점 C를 지나는 접선의 방정식은

$$y = 3x + 5\sqrt{10} \text{ 이고}$$

점 A(0, -5)와 접선 $3x - y + 5\sqrt{10} = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5 + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5 + 5\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + \{4-(-5)\}^2} = 3\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{10}}{2}$$

18) [정답] ⑤

[해설] 원 위의 점 $(2, -2\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은 $2x - 2\sqrt{3}y = 16$

$$\therefore x - \sqrt{3}y = 8$$

19) [정답] ①

[해설] 점 (0, 4)에서 원에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y - 4 = mx$ 이다.

원의 중심 (0, 0)과 접선 $mx - y + 4 = 0$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2, \sqrt{m^2 + 1} = 2$$

$$m = \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore m_1 m_2 = -3$$

20) [정답] ④

[해설] $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$$

점 $(-2, 0)$ 에서 원에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y = m(x+2)$

즉, $mx - y + 2m = 0$ 이다.

원의 중심 (3, -2)와 접선사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|3m + 2 + 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

$|5m + 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$16m^2 + 20m - 5 = 0$$

두 접선의 기울기의 합은 $-\frac{20}{16} = -\frac{5}{4}$ 이다.

21) [정답] ②

[해설] 점 (1, 0)에서 $mx - y + 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$m^2 + 1 < m^2 + 8m + 16$$

$$m > -\frac{15}{8} \text{ 이므로 정수 } m \text{의 최솟값은 } -1$$

22) [정답] ⑤

[해설] 큰 원의 반지름을 R , 작은 원의 반지름을 r 이라고 하면 $R^2 = r^2 + 50$ 이다.

따라서 두 원의 넓이의 차는 $(R^2 - r^2)\pi = 50\pi$

