



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시  
 1) 제작연월일: 2019-03-08  
 2) 제작자: 교육지대㈜  
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

## 01 / 연속함수의 성질

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이면 다음 함수도  $x=a$ 에서 연속이다.

- ①  $cf(x)$  (단,  $c$ 는 상수)
- ②  $f(x)+g(x)$ ,  $f(x)-g(x)$
- ③  $f(x)g(x)$
- ④  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (단,  $g(a) \neq 0$ )

1. 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 실수 전체의 집합에서 항상 연속인 함수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 골라라.

&lt;보기&gt;

- |                |                        |
|----------------|------------------------|
| ㉠. $f(x)+g(x)$ | ㉡. $f(x)-g(x)$         |
| ㉢. $f(x)g(x)$  | ㉣. $\frac{f(x)}{g(x)}$ |

2. 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속일 때, <보기>의 함수 중  $x=a$ 에서 항상 연속인 것만을 있는 대로 골라라.

&lt;보기&gt;

- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| ㉠. $\{g(x)\}^2$             | ㉡. $\frac{1}{3}f(x)-2g(x)$ |
| ㉢. $\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}$ |                            |

- 두 함수  $f(x)=2x$ ,  $g(x)=x^2+2x-8$ 에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

3.  $f(x)-g(x)$

4.  $f(x)g(x)$

5.  $\frac{g(x)}{f(x)}$

6.  $\frac{f(x)}{g(x)}$

- 함수  $f(x)=x^2+x-2$ ,  $g(x)=2x-1$ 에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

7.  $f(x)+g(x)$

8.  $f(x)g(x)$

9.  $\frac{f(x)}{g(x)}$

10.  $\frac{g(x)}{f(x)}$

- 함수  $f(x)=x^2-2x+1$ ,  $g(x)=4x+3$ 에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

11.  $f(x)-2g(x)$

12.  $f(x)\{g(x)\}^2$

13.  $\frac{f(x)}{g(x)}$

14.  $\frac{g(x)}{f(x)}$

■ 다음 함수  $f(x)$ 에 대하여 구간  $[-1, 1]$ 에서의 연속성을 조사 하여라.

15.  $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$

16.  $f(x) = x|x|$

17.  $f(x) = |x| + |x-1|$

19.  $f(x) = x+2 \quad [-1, 3]$

20.  $f(x) = x^2+3 \quad [1, 3]$

21.  $f(x) = x^2+5 \quad [-1, 4]$

22.  $f(x) = -x^2+1 \quad [-2, 3]$

23.  $f(x) = x^2-4x \quad [0, 3]$

24.  $y = x^2-2x+3 \quad [0, 4]$

25.  $y = x^2-2x+4 \quad [2, 4]$

26.  $y = x^2-4x+5 \quad [-1, 3]$

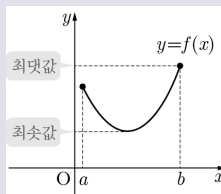
27.  $f(x) = -x^2+4x-1 \quad [-1, 3]$

28.  $f(x) = -x^2+4x+2 \quad [-1, 3]$

29.  $f(x) = \frac{3}{x+1} \quad [2, 5]$

## 02 / 최대·최소 정리

함수  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.



**주의** 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이 아닌 함수도 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가질 수 있다. 따라서 최대·최소 정리의 역은 성립하지 않는다.

■ 주어진 구간에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

18.  $f(x) = x-1 \quad [0, 1]$

30.  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  [2, 4]

31.  $f(x) = \frac{3}{x-1}$  [2, 4]

32.  $f(x) = \frac{4}{x-2}$  [-2, 1]

33.  $f(x) = \frac{1}{-x+2}$  [3, 5]

34.  $f(x) = -\frac{1}{x+1} + 2$  [1, 3]

35.  $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$  [-2, 2]

36.  $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$  [-1, 2]

37.  $f(x) = \sqrt{x+1}$  [0, 8]

38.  $f(x) = \sqrt{x+2}$  [-1, 2]

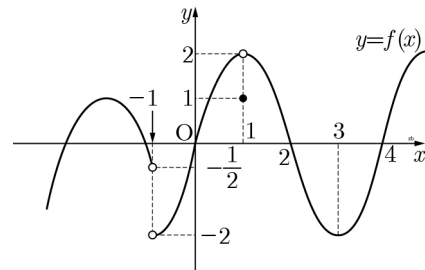
39.  $f(x) = \sqrt{12-4x}$  [-2, 2]

40.  $f(x) = 3 - \sqrt{x-1}$  [2, 5]

41.  $f(x) = |x-1|$  [-1, 2]

42.  $f(x) = \log_{10} x + 5$  [1, 10]

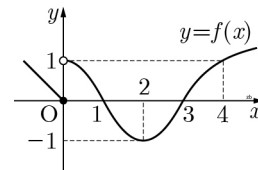
43. 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, <보기>에서 함수  $f(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 골라라.



<보기>

- ㄱ.  $x=1$ 에서 연속이다.
- ㄴ. 구간  $[0, 2]$ 에서 최댓값이 존재한다.
- ㄷ. 구간  $[2, 4]$ 에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

■ 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 주어진 구간에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값, 최솟값이 있으면 구하여라.



44. [0, 1]

45. [2, 4]

■ 주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값, 최솟값이 있으면 구하여라.

46.  $f(x) = x^2 - 2x + 2$   $[0, 3]$

47.  $f(x) = x^2 - 2x + 2$   $(0, 3)$

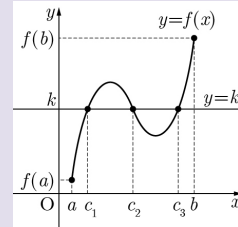
48.  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$   $[-1, 3]$

49.  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$   $[-2, 2]$

50.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$   $[-2, 0]$

### 03 사잇값의 정리

함수  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 일 때,  $f(a)$ 와  $f(b)$  사이의 임의의 값  $k$ 에 대하여  $f(c) = k$ 인  $c$ 가 열린 구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.



(참고)  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 이면  $f(a)$ 와  $f(b)$  사이의 임의의 값  $k$ 에 대하여  $x$ 축에 평행한 직선  $y=k$ 와 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 적어도 한 점에서 만난다. 즉  $f(c)=k$ 인  $c$ 가 열린 구간  $(a, b)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

51. 다음은 함수  $f(x) = x^2$ 에 대하여  $f(c) = \sqrt{3}$ 을 만족시키는  $c$ 가 열린구간  $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재함을 증명하는 과정이다. 다음 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 구하여라.

<증명>

함수  $f(x) = x^2$ 은 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 (가) 이므로 닫힌구간  $[1, 2]$ 에서 (가) 이다.

또  $f(1) \neq f(2)$ 이고  $f(1) < \sqrt{3} < f(2)$ , 즉  $1 < \sqrt{3} < 4$  이므로 (나) 에 의하여  $f(c) = \sqrt{3}$ 을 만족시키는  $c$ 가 열린구간  $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

■ 다음 방정식은 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

52.  $x^2 + 2x - 2 = 0$   $(-1, 2)$

53.  $x^3 - 3x - 1 = 0$   $(0, 2)$

54.  $x^3 + 3x - 2 = 0$   $(-1, 1)$

55.  $x^3 + 3x - 9 = 0$  (1, 3)

56.  $x^4 + x - 1 = 0$  (0, 1)

57. 방정식  $x^3 + 3x - 3 = 0$ 이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음에서 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>		
㉠. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	㉡. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	㉢. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
㉣. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	㉤. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$	

58. 방정식  $x^3 + 2x - 10 = 0$ 이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>		
㉠. $(-2, -1)$	㉡. $(-1, 0)$	㉢. $(0, 1)$
㉣. $(1, 2)$	㉤. $(2, 3)$	

59. 방정식  $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ 이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음에서 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>		
㉠. $(-1, 0)$	㉡. $(0, 1)$	㉢. $(1, 2)$
㉣. $(2, 3)$	㉤. $(3, 4)$	

60. 방정식  $\sqrt{x+1} - 2x + 3 = 0$ 이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>		
㉠. $(0, 1)$	㉡. $(1, 2)$	㉢. $(2, 3)$
㉣. $(3, 4)$	㉤. $(4, 5)$	

■ 다음 물음에 답하여라.

61. 연속함수  $f(x)$ 에서  $f(-2) = -1$ ,  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = -4$ 일 때,  $-2 \leq x \leq 3$ 에서 방정식  $f(x) = 0$ 은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

62. 연속함수  $f(x)$ 에서  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = -3$ ,  $f(2) = 5$ ,  $f(3) = -4$ ,  $f(4) = -2$ 일 때,  $0 \leq x \leq 4$ 에서 방정식  $f(x) - 2x = 0$ 은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

63. 연속함수  $f(x)$ 에서  $f(-1) = 3$ ,  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 0$ 일 때,  $-1 \leq x \leq 2$ 에서 방정식  $f(x) - 2x = 0$ 은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

64. 연속함수  $f(x)$ 에서  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 2$ 일 때,  $0 \leq x \leq 2$ 에서 방정식  $f(x-1) = f(x)$ 은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

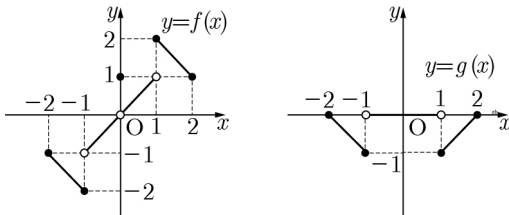
65. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(-3) = -5$ ,  $f(-1) = 2$ ,  $f(0) = 5$ ,  $f(2) = -1$ ,  $f(4) = 6$ 이고  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이다. 방정식  $f(x) = 0$ 은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

66. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가  $f(-1) = a+1$ ,  $f(2) = a-3$ 을 만족시킨다. 방정식  $f(x) - x^2 = 0$ 이 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 때 이 실근이 열린구간  $(-1, 2)$ 에 존재하도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위를 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

67.  $a < b < c$ 인 세 실수  $a, b, c$ 에 대하여 이차방정식  $(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0$ 이 열린 구간  $(a, b)$ 와  $(b, c)$ 에서 각각 하나의 실근을 가짐을 보여라.

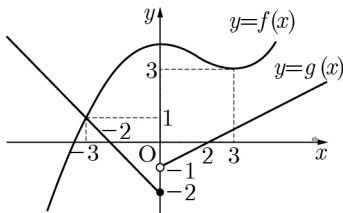
68.  $-2 \leq x \leq 2$ 에서 정의된 두 함수  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.



<보기>

- ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = -1$   
 ㄴ. 함수  $g(f(x))$ 는  $x=0$ 에서 연속이 아니다.  
 ㄷ. 방정식  $g(f(x)) = -\frac{1}{2}$ 의 실근이 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다.

69. 삼차함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 함수  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & (x > 0) \\ -x - 2 & (x \leq 0) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 골라라.



<보기>

- ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -2$   
 ㄴ. 함수  $g(f(x))$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.  
 ㄷ. 방정식  $g(f(x)) = 0$ 은 닫힌구간  $[-3, 3]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

70. 희철이와 수현이가 1000 m 달리기를 하였다. 1분 후의 희철이의 속력은 20 km/시, 수현이의 속력은 15 km/시이었고 3분 후의 희철이의 속력은 시속 17 km/시, 수현이의 속력은 19 km/시이었다. 희철이와 수현이의 속력이 시간에 대한 연속함수라 할 때, 달리기를 시작한 후 1분과 3분 사이에 두 사람의 속력이 같아졌을 때가 있는지 구하여라.



## 정답 및 해설

1)  $\neg$ ,  $\perp$ ,  $\subset$ 

$\Rightarrow$  리. 함수  $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는  $g(x)=0$ 일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

이상에서 항상 연속인 함수는  $\neg$ ,  $\perp$ ,  $\subset$ 이다.

2)  $\neg$ ,  $\perp$ 

$\Rightarrow$  두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$= g(a) \cdot g(a) = \{g(a)\}^2$$

따라서 주어진 함수는  $x=a$ 에서 연속이다.

$$\perp. \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{1}{3}f(x) - 2g(x) \right\} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$= \frac{1}{3}f(a) - 2g(a)$$

따라서 주어진 함수는  $x=a$ 에서 연속이다.

$\subset. f(a) = -g(a)$ 이면  $x=a$ 에서  $\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}$ 가 정의되지 않으므로  $x=a$ 에서 불연속이다.

이상에서  $x=a$ 에서 연속인 함수는  $\neg$ ,  $\perp$ 이다.

3)  $(-\infty, \infty)$ 

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = 2x - (x^2 + 2x - 8) = -x^2 + 8$$

따라서  $f(x) - g(x)$ 는 다항함수이므로 연속인 구간은  $(-\infty, \infty)$

4)  $(-\infty, \infty)$ 

$$\Rightarrow f(x)g(x) = 2x(x^2 + 2x - 8) = 2x^3 + 4x^2 - 16x$$

따라서  $f(x)g(x)$ 는 다항함수이므로 연속인 구간은  $(-\infty, \infty)$

5)  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 2x - 8}{2x}$$

따라서  $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는  $2x \neq 0$ , 즉  $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

6)  $(-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, \infty)$ 

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{2x}{(x+4)(x-2)}$$

따라서  $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는  $(x+4)(x-2) \neq 0$ , 즉  $x \neq -4$ 이고  $x \neq 2$ 인 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은  $(-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, \infty)$

7)  $(-\infty, \infty)$ 

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수  $x$ 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은  $(-\infty, \infty)$ 이다.

8)  $(-\infty, \infty)$ 

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수  $x$ 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은  $(-\infty, \infty)$ 이다.

9)  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ 

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 분수함수이므로  $2x-1 \neq 0$ , 즉  $x \neq \frac{1}{2}$ 일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ 이다.

10)  $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$ 

$\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}$ 는 분수함수이므로  $x^2 + x - 2 \neq 0$ , 즉  $x \neq -2$ ,  $x \neq 1$ 일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은

$(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$ 이다.

11)  $(-\infty, \infty)$ 

$\Rightarrow f(x) - 2g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수  $x$ 에서 연속이다.

12)  $(-\infty, \infty)$ 

$\Rightarrow f(x)\{g(x)\}^2$ 는 다항함수이므로 모든 실수  $x$ 에서 연속이다.

13)  $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}, \infty)$ 

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 분수함수이므로  $4x+3 \neq 0$ , 즉  $x \neq -\frac{3}{4}$ 일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}, \infty)$ 이다.

14)  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 

$\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}$ 는 분수함수이므로  $x^2 - 2x + 1 \neq 0$ , 즉  $x \neq 1$ 일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 이다.

15) 불연속

$\Rightarrow g(x) = x^2$ ,  $h(x) = |x|$ 로 놓으면 두 함수  $g(x)$ ,  $h(x)$ 는 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 연속이지만 함수  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ 는  $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 구간  $[-1, 1]$ 에서 불연속이다.

16) 연속

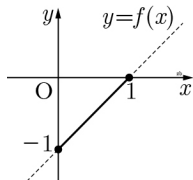
$\Rightarrow g(x) = x$ ,  $h(x) = |x|$ 로 놓으면 두 함수  $g(x)$ ,  $h(x)$ 는 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 함수  $f(x) = g(x)h(x)$ 도 이 구간에서 연속이다.

## 17) 연속

⇒  $g(x) = |x|$ ,  $h(x) = |x-1|$ 로 놓으면 두 함수  $g(x)$ ,  $h(x)$ 는 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 함수  $f(x) = g(x) + h(x)$ 도 이 구간에서 연속이다.

## 18) 최댓값: 0, 최솟값: -1

⇒ 함수  $f(x) = x-1$ 은 구간  $[0, 1]$ 에서 연속이고 구간  $[0, 1]$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최댓값 0,  $x=0$ 에서 최솟값 -1을 갖는다.

## 19) 최댓값: 5, 최솟값: 1

⇒ 함수  $f(x) = x+2$ 은 구간  $[-1, 3]$ 에서 연속이다. 따라서  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 최댓값 5,  $x=-1$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

## 20) 최댓값: 12, 최솟값: 4

⇒  $f(x) = x^2+3$ 은 구간  $[1, 3]$ 에서 연속이고  $x=3$ 일 때 최댓값 12,  $x=1$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.

## 21) 최댓값: 21, 최솟값: 5

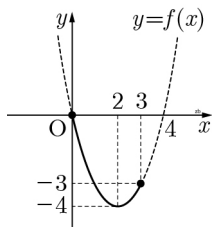
⇒  $f(x) = x^2+5$ 는 구간  $[-1, 4]$ 에서 연속이고  $x=4$ 일 때 최댓값 21,  $x=0$ 일 때 최솟값 5를 갖는다.

## 22) 최댓값: 1, 최솟값: -8

⇒  $f(x) = -x^2+1$ 는 구간  $[-2, 3]$ 에서 연속이고  $x=0$ 일 때 최댓값 1,  $x=3$ 일 때 최솟값 -8을 갖는다.

## 23) 최댓값: 0, 최솟값: -4

⇒ 함수  $f(x) = x^2-4x$ 는 구간  $[0, 3]$ 에서 연속이고 구간  $[0, 3]$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 최댓값 0,  $x=2$ 에서 최솟값 -4를 갖는다.

## 24) 최댓값: 11, 최솟값: 2

⇒  $y = x^2-2x+3 = (x-1)^2+2$   
 $x=0$ 일 때,  $y=1+2=3$

$x=1$ 일 때,  $y=2$

$x=4$ 일 때,  $y=9+2=11$

## 25) 최댓값: 12, 최솟값: 4

⇒  $y = x^2-2x+4 = (x-1)^2+3$

$x=2$ 일 때,  $y=4-4+4=4$

$x=4$ 일 때,  $y=16-8+4=12$

## 26) 최댓값: 10, 최솟값: 1

⇒  $y = x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$

$x=-1$ 일 때,  $y=9+1=10$

$x=2$ 일 때,  $y=1$

$x=3$ 일 때,  $y=2$

## 27) 최댓값: 3, 최솟값: -6

⇒  $f(x) = -x^2+4x-1 = -(x-2)^2+3$ 은 구간  $[-1, 3]$ 에서 연속이고,  $x=2$ 일 때 최댓값 3,  $x=-1$ 일 때 최솟값 -6을 갖는다.

## 28) 최댓값: 6, 최솟값: -3

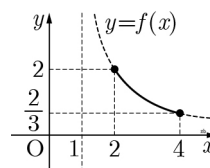
⇒  $f(x) = -x^2+4x+2 = -(x-2)^2+6$ 은 구간  $[-1, 3]$ 에서 연속이고  $x=2$ 일 때 최댓값 6,  $x=-1$ 일 때 최솟값 -3을 갖는다.

29) 최댓값: 1, 최솟값:  $\frac{1}{2}$ 

⇒  $f(x) = \frac{3}{x+1}$ 은 구간  $[2, 5]$ 에서 연속이고  $x=2$ 일 때 최댓값 1,  $x=5$ 일 때 최솟값  $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

30) 최댓값: 2, 최솟값:  $\frac{2}{3}$ 

⇒ 함수  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 는 구간  $[2, 4]$ 에서 연속이고 구간  $[2, 4]$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 최댓값 2,  $x=4$ 에서 최솟값  $\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

## 31) 최댓값: 3, 최솟값: 1

⇒  $f(x) = \frac{3}{x-1}$ 은 구간  $[2, 4]$ 에서 연속이고  $x=2$ 일 때 최댓값 3,  $x=4$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

## 32) 최댓값: -1, 최솟값: -4

⇒  $f(x) = \frac{4}{x-2}$ 은 구간  $[-2, 1]$ 에서 연속이고  $x=-2$ 일 때 최댓값 -1,  $x=1$ 일 때, 최솟값 -4를 갖는다.



33) 최댓값:  $-\frac{1}{3}$ , 최솟값:  $-1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x+2}$ 은 구간  $[3, 5]$ 에서 연속이고  $x=5$ 일 때 최댓값  $-\frac{1}{3}$ ,  $x=3$ 일 때 최솟값  $-1$ 을 갖는다.

34) 최댓값:  $\frac{7}{4}$ , 최솟값:  $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(x)$ 는 증가함수이므로  
최솟값은  $f(1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ ,  
최댓값은  $f(3) = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

35) 최댓값:  $1$ , 최솟값:  $-3$

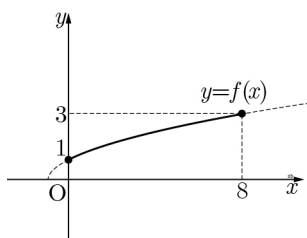
$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x+3} = 2 + \frac{-5}{x+3}$ 이므로  $f(x)$ 는 증가함수  
따라서 최댓값은  $f(2) = \frac{5}{5} = 1$ 이고, 최솟값은  
 $f(-2) = \frac{-3}{1} = -3$

36) 최댓값:  $\frac{3}{2}$ , 최솟값:  $\frac{3}{5}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ 에 대하여  
 $f(-1) = \frac{3}{2}$ ,  $f(2) = \frac{3}{5}$   
따라서 최댓값은  $\frac{3}{2}$ 이고, 최솟값은  $\frac{3}{5}$ 이다.

37) 최댓값:  $3$ , 최솟값:  $1$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1}$ 은 닫힌 구간  $[0, 8]$ 에서 연속이므로  
최댓값과 최솟값을 모두 가진다.  
구간  $[0, 8]$ 에서  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$f(x)$ 는  $x=8$ 일 때, 최댓값  $3$ ,  $x=0$ 일 때, 최솟값  $1$ 을 가진다.

38) 최댓값:  $2$ , 최솟값:  $1$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x+2}$ 는 닫힌 구간  $[-1, 2]$ 에서 연속이므로  
최댓값과 최솟값을 모두 가진다.  
함수  $f(x)$ 는  $x \geq -2$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 연속  
이므로  $x=2$ 일 때, 최댓값  $2$ ,  $x=-1$ 일 때, 최솟값  
 $1$ 을 갖는다.

39) 최댓값:  $2\sqrt{5}$ , 최솟값:  $2$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{12-4x} = \sqrt{-4(x-3)}$ 은  $x=-2$ 일 때  
최댓값  $2\sqrt{5}$ ,  $x=2$ 일 때 최솟값  $2$ 를 갖는다.

40) 최댓값:  $2$ , 최솟값:  $1$

$\Rightarrow$  함수  $f(x) = 3 - \sqrt{x-1}$ 은 구간  $[2, 5]$ 에서 연속이다.  
따라서  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 최댓값  $2$ ,  $x=5$ 에서 최솟  
값  $1$ 을 갖는다.

41) 최댓값:  $2$ , 최솟값:  $0$

$\Rightarrow f(x) = |x-1|$ 은 닫힌 구간  $[-1, 2]$ 에서 연속이  
므로 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.  
 $x=-1$ 일 때,  $f(-1) = 2$   
 $x=1$ 일 때,  $f(1) = 0$   
 $x=2$ 일 때,  $f(2) = 1$   
따라서  $f(x)$ 는 최댓값  $2$ , 최솟값  $0$ 을 갖는다.

42) 최댓값:  $6$ , 최솟값:  $5$

$\Rightarrow f(x) = \log_{10} x + 5$ 는 구간  $[1, 10]$ 에서 연속이고  
 $x=10$ 일 때 최댓값  $6$ ,  $x=1$ 일 때 최솟값  $5$ 를  
갖는다.

43)  $\subset$

$\Rightarrow \neg. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, f(1) = 1$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 불연속이다.

$\perp$ . 구간  $[0, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은 존재하지  
않는다.

$\subset$ . 구간  $[2, 4]$ 에서 함수  $f(x)$ 가 연속이므로 이 구간  
에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

이상에서 옳은 것은  $\subset$ 뿐이다.

44) 최댓값: 없다, 최솟값:  $0$

45) 최댓값:  $1$ , 최솟값:  $-1$

46) 최댓값:  $5$ , 최솟값:  $1$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 1$ 이므로  $x=3$ 일 때 최댓값  $5$ ,  
 $x=1$ 일 때 최솟값  $1$ 을 갖는다.

47) 최댓값: 없다, 최솟값:  $1$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 은  $x=1$ 일 때 최  
솟값  $1$ 을 갖고, 최댓값은 없다.

48) 최댓값:  $5$ , 최솟값:  $-4$

$\Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 5$ 이므로  
 $f(-1) = -4$ ,  $f(2) = 5$ ,  $f(3) = 4$   
따라서 최댓값  $5$ , 최솟값  $-4$ 를 갖는다.

49) 최댓값:  $7$ , 최솟값:  $-2$

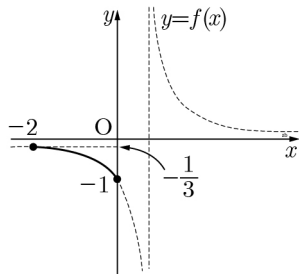
$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)^2 - 2$   
 $f(-2) = f(2) = 7$ ,  $f(-1) = f(1) = -2$   
따라서 최댓값  $7$ , 최솟값  $-2$ 를 갖는다.

50) 최댓값:  $-\frac{1}{3}$ , 최솟값:  $-1$

$\Rightarrow$  함수  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  은 닫힌구간  $[-2, 0]$ 에서 연속이

므로 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.

구간  $[-2, 0]$ 에서  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$f(x)$ 는  $x=-2$ 일 때 최댓값  $-\frac{1}{3}$ ,  $x=0$ 일 때 최솟값  $-1$ 을 가진다.

51) (가) 연속, (나) 사잇값의 정리

$\Rightarrow$  함수  $f(x) = x^2$ 은 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이므로 닫힌구간  $[1, 2]$ 에서도 연속이다.

또  $f(1) = 1, f(2) = 4$ 에서  $f(1) \neq f(2)$ 이고,

$1 < \sqrt{3} < 4$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여  $f(c) = \sqrt{3}$ 을 만족시키는  $c$ 가 열린구간  $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

52)  $f(x) = x^2 + 2x - 2$ 라고 하면 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 연속이고  $f(-1) = -3 < 0$ ,  $f(2) = 6 > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여  $f(c) = 0$ 인  $c$ 가 구간  $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식  $x^2 + 2x - 2 = 0$ 은 구간  $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

53)  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 이라 하면  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[0, 2]$ 에서 연속이고  $f(0)f(2) < 0$ 이므로  $f(c) = 0$ 인  $c$ 가 열린 구간  $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

54)  $f(x) = x^3 + 3x - 2$ 라고 하면 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 연속이고,  $f(-1) = -6 < 0$ ,  $f(1) = 2 > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여  $f(c) = 0$ 인  $c$ 가 열린구간  $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식  $x^3 + 3x - 2 = 0$ 은 열린구간  $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

55)  $f(x) = x^3 + 3x - 9$ 라 하면 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[1, 3]$ 에서 연속이고  $f(1) = -5 < 0$ ,  $f(3) = 27 > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여  $f(c) = 0$ 인  $c$ 가 구간  $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식  $x^3 + 3x - 9 = 0$ 은 구간  $(1, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

56)  $f(x) = x^4 + x - 1$ 이라고 하면 함수  $f(x)$ 는 닫힌구

간  $[0, 1]$ 에서 연속이고  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 1 > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여  $f(c) = 0$ 인  $c$ 가 구간  $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식  $x^4 + x - 1 = 0$ 은 구간  $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

57)  $\Leftarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x - 3$ 이라고 하면 함수  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에서 연속이고  $f(-1) = -7 < 0$ ,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{37}{8} < 0, \quad f(0) = -3 < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{8} < 0, \quad f(1) = 1 > 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8} > 0$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $f(x) = 0$ 은 구간  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 실근을 가진다.

58)  $\Leftarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x - 10$ 이라고 하면  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에 대하여 연속이고

$$f(-2) = -22 < 0, \quad f(-1) = -13 < 0, \quad f(0) = -10 < 0, \\ f(1) = -7 < 0, \quad f(2) = 2 > 0, \quad f(3) = 23 > 0$$

$$\therefore f(1)f(2) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $f(x) = 0$ 은 구간  $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는다.

59)  $\Leftarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ 라 하면 함수  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에서 연속이고

$$f(-1) = -3 < 0, \quad f(0) = -2 < 0, \quad f(1) = 1 > 0, \\ f(2) = 12 > 0, \quad f(3) = 37 > 0, \quad f(4) = 82 > 0$$

$$\therefore f(0)f(1) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $f(x) = 0$ 은 구간  $(0, 1)$ 에서 실근을 가진다.

60)  $\Leftarrow$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} - 2x + 3$ 이라고 하면  $f(x)$ 는  $x \geq -1$ 인 실수  $x$ 에 대하여 연속이고

$$f(0) = 4 > 0, \quad f(1) = \sqrt{2} + 1 > 0, \quad f(2) = \sqrt{3} - 1 > 0, \\ f(3) = -1 < 0, \quad f(4) = \sqrt{5} - 5 < 0,$$

$$f(5) = \sqrt{6} - 7 < 0$$

$$\therefore f(2)f(3) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $f(x) = 0$ 은 구간  $(2, 3)$ 에서 실근을 갖는다.

61) 3개

$$\Rightarrow f(-2) = -1 < 0, \quad f(-1) = 1 > 0 \text{이므로}$$

$-2 < x < -1$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또한,  $f(1) = 0$ 이므로  $x = 1$ 은 하나의 실근이다.

그리고  $f(2) = 2 > 0$ ,  $f(3) = -4 < 0$ 이므로  $2 < x < 3$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식  $f(x)=0$ 은  $-2 \leq x \leq 3$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

62) 2개

$$\Rightarrow f(0)-2 \cdot 0=-1 < 0$$

$$f(1)-2 \cdot 1=-3-2=-5 < 0$$

$$f(2)-2 \cdot 2=5-4=1 > 0$$

$$f(3)-2 \cdot 3=-4-6=-10 < 0$$

$$f(4)-2 \cdot 4=-2-8=-10 < 0$$

따라서 방정식  $f(x)-2x=0$ 은  $0 \leq x \leq 4$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

63) 1개

$$\Rightarrow f(-1)-2 \cdot (-1)=3+2=5 > 0$$

$$f(0)-2 \cdot 0=-1 < 0$$

$$f(1)-2 \cdot 1=1-2=-1 < 0$$

$$f(2)-2 \cdot 2=0-4=-4 < 0$$

따라서 방정식  $f(x)-2x=0$ 은  $-1 \leq x \leq 2$ 에서 적어도 1개의 실근을 갖는다.

64) 2개

$$\Rightarrow \text{방정식 } f(x-1)=f(x) \text{에서 } f(x-1)-f(x)=0$$

$$f(-1)-f(0)=1-1=0$$

$$f(0)-f(1)=1-0=1 > 0$$

$$f(1)-f(2)=0-2=-2 < 0$$

따라서 방정식  $f(x-1)=f(x)$ 는  $0 \leq x \leq 2$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

65) 5개

$$\Rightarrow \text{방정식 } f(x)=0 \text{의 실근은}$$

구간  $(-\infty, -3)$ 에서 적어도 한 개,

구간  $(-3, -1)$ 에서 적어도 한 개,

구간  $(0, 2)$ 에서 적어도 한 개,

구간  $(2, 4)$ 에서 적어도 한 개,

구간  $(4, \infty)$ 에서 적어도 한 개 갖는다.

따라서 방정식  $f(x)=0$ 은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

66)  $0 < a < 7$

$\Rightarrow g(x)=f(x)-x^2$ 이라 하면 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=x^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수  $g(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 방정식  $g(x)=0$ 이 열린구간  $(-1, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 가지려면

$$g(-1)g(2) < 0 \text{이어야 한다.}$$

$$g(-1)=f(-1)-(-1)^2=a+1-1=a$$

$$g(2)=f(2)-2^2=a-3-4=a-7$$

$$\text{이므로 } g(-1)g(2)=a(a-7) < 0 \text{에서 } 0 < a < 7$$

67)  $f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$ 라 하면 함수  $f(x)$ 는 구간  $[a, b]$ ,  $[b, c]$ 에서 연속이다.

$$(i) f(a)=(a-b)(a-c), f(b)=(b-c)(b-a) \text{이고}$$

$$f(a) > 0, f(b) < 0 \text{이므로 방정식 } f(x)=0 \text{은 구}$$

간  $(a, b)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$(ii) f(b)=(b-c)(b-a), f(c)=(c-a)(c-b) \text{이고}$$

$f(b) < 0, f(c) > 0$ 이므로 방정식  $f(x)=0$ 은 구간  $(b, c)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때,  $f(x)=0$ 은 이차방정식이고 (i), (ii)에 의하여 구간  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ 에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

68) L, C

$$\Rightarrow \neg. \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -2+} g(t) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = 0 \text{ (거짓)}$$

$$L. \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 0$$

$$g(f(0)) = g(1) = -1$$

따라서  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$ 이므로 함수  $g(f(x))$ 는

$x=0$ 에서 연속이 아니다. (참)

C. 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 닫힌구간  $[1, 2]$ 에서 연속이고  $1 \leq f(x) \leq 2$ 이므로 함수  $g(f(x))$ 도 닫힌구간  $[1, 2]$ 에서 연속이다.

이때,  $h(x)=g(f(x))+\frac{1}{2}$ 이라고 하면  $h(1)h(2) < 0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식

$$h(x)=g(f(x))+\frac{1}{2}=0, \text{ 즉 } g(f(x))=-\frac{1}{2} \text{의 실}$$

근이 열린구간  $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 L, C이다.

69) L, C

$$\Rightarrow \neg. \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -1 \text{ (거짓)}$$

$$L. f(0)=a(a > 3) \text{라고 하면 } g(f(0))=g(a)$$

이때, 함수  $g(x)$ 는  $x > 3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = g(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0))$$

따라서 함수  $g(f(x))$ 는  $x=0$ 에서 연속이다. (참)

C.  $h(x)=g(f(x))$ 라 하면 함수  $h(x)$ 는 닫힌구간  $[-3, 3]$ 에서 연속이다.

$$h(-3)=g(f(-3))=g(1) < 0,$$

$$h(3)=g(f(3))=g(3) > 0 \text{에서 } h(-3)h(3) < 0 \text{이}$$

므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $h(x)=0$ 은 열린구간  $(-3, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식  $g(f(x))=0$ 은 닫힌구간  $[-3, 3]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 L, C이다.

70) 희철이와 수현이가 달리기를 시작하여  $x$ 분 후의

속력을 각각  $f(x)$ ,  $g(x)$ 라 하면 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 연속이므로 함수  $f(x)-g(x)$ 도 연속이고,  
 $f(1)-g(1)=20-15=5>0$ ,  
 $f(3)-g(3)=17-19=-2<0$   
 이므로 사잇값의 정리에 의하여 1과 3 사이에  $f(c)-g(c)=0$ 인  $c$ 가 적어도 하나 존재한다.  
 따라서 두 사람의 속력이 같아지는 시각이 1분과 3분 사이에 존재한다.