1-1-2.지수의 확장과 지수법칙 미래엔(황선욱)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1-1.지수

- 1) 제작연월일 : 2020-03-10
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[지수의 확장]

- 0 또는 음의 정수인 지수의 정의 $a \neq 0$ 이고 n이 양의 정수일 때
- ① $a^0 = 1$ ② $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- 유리수인 지수의 정의 a>0이고, m, $n(n\geq 2)$ 이 정수일 때

[지수법칙]

- •지수가 정수일 때의 지수법칙 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이고 m, n이 정수일 때
- ① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$
- •지수가 유리수일 때의 지수법칙 a>0, b>0이고 p, q가 유리수일 때
- ① $a^p a^q = a^{p+q}$ ② $a^p \div a^q = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$ $(ab)^p = a^p b^p$
- •지수가 실수일 때의 지수법칙 a>0, b>0이고 x, y가 실수일 때
- $(a^x)^y = a^{xy}$ $(ab)^x = a^x b^x$

기본문제

- 1. 전해 내려오는 이야기에 따르면 고대 그리스에서 는 전염병을 퇴치하기 위하여, 아폴론 신전에 있는 정육면체 모양의 제단을 처음 제단의 부피의 4배인 정육면체 모양으로 새로 만들어야 했다고 한다. 처 음 제단의 부피가 4 m^3 라 할 때, 새로 만들어야 하 는 제단의 한 모서리의 길이를 구한 것은?
 - ① $\sqrt[3]{2}$ m
- ② $\sqrt[3]{4}$ m
- ③ 2 m
- (4) $2\sqrt[3]{2}$ m
- (5) $\sqrt[3]{4}$ m

[문제]

- **2.** 다음 중 옳지 않은 것은?
 - ① $3^6 \times 3^{-4} = 9$
- $2^6 \div (2^{-1})^{-3} = 8$
- (3) $(2^{-3}4^2)^{-2} = 4$ (4) $(2)^5 \times (6^22^{-3}) = 144$

[문제]

- **3.** 다음 중 간단히 한 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?
 - ① $25^{-2.5} = 5^{-\frac{1}{5}}$
- $(-216)^{\frac{2}{3}} = 36$
- $(3) 256^{0.75} = 64$
- \bigcirc 1.21^{1.5} = 1.1³
- (5) $32^{1.2} = 2^6$

[문제]

4. $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이고 r, s가 유리수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

①
$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$(3) - (ab)^r = -a^r b^r$$

$$(4) a^r \div a^s = a^{r-s}$$

(5)
$$a^r b^s = -(ab)^{r+s}$$

[문제]

5. 다음 식을 간단히 한 것으로 옳지 않은 것은?

①
$$5^{-\frac{1}{2}} \times 5^{0.5} = 1$$
 ② $3^{\frac{8}{3}} \div 3^{\frac{5}{3}} = 3$

②
$$3^{\frac{8}{3}} \div 3^{\frac{5}{3}} = 3$$

$$4) 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

[예제]

6. 다음 식을 간단히 한 것으로 옳은 것은?

(1)
$$\sqrt[3]{2^5\sqrt{3^2}} \div \sqrt[3]{2^2 \times 3} = 6$$

[문제]

7. 다음 식을 간단히 한 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

①
$$\sqrt[4]{2 \times 3^3} \times \sqrt[12]{2^7 \times 3^5} \div \sqrt[3]{\sqrt{2^5 \times 3}} = 3$$

$$(3) \left(5^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right) \left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right) = 3$$

$$(4) \left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right) \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right) = 5$$

$$(5) (4+5)^3 (4-5)^3 = -3^6$$

8. 다음 식을 간단히 한 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\textcircled{1} \left(3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} 2^{-\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} \qquad \textcircled{2} \ 2^{\sqrt{5}+1} \div 2^{\sqrt{5}-1} = 4$$

$$2^{\sqrt{5}+1} \div 2^{\sqrt{5}-1} = 4$$

$$(5) \ 3^{\sqrt{3}} \times 3^{2-\sqrt{3}} = 9$$

평가문제

[중단원 마무리하기]

9. 다음 값을 계산한 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\bigcirc 9^{\frac{1}{4}} \times 27^{-\frac{1}{6}} = 1$$

$$(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{27}} = 512$$

$$4 \left(3^{\sqrt{\frac{7}{9}}} \times 9^{\frac{\sqrt{28}}{3}}\right)^{\frac{3}{\sqrt{7}}} = 243$$

(5)
$$\left(5^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 9^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = 15$$

[중단원 마무리하기]

10. 다음 식을 간단히 한 것으로 옳지 않은 것은?

(1)
$$5\sqrt[3]{5} + \sqrt{\sqrt[3]{25}} = 6\sqrt[3]{5}$$

②
$$\sqrt[6]{4} - \sqrt[6]{256} \times \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{250} = 0$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{-48}} \times \sqrt{\sqrt[3]{144}} = -4\sqrt[3]{3}$$

(5)
$$\sqrt{\sqrt[3]{25}} \times \sqrt[3]{5^2} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$$

[중단원 마무리하기]

11. $\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n의 값을 모두 더한 값은?

①
$$-1$$

$$3 - 3$$

$$\bigcirc$$
 4

$$(5) -5$$

12.
$$x > 0$$
에 대하여 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$ 일 때, $x^2 + x^{-2}$ 의 값을 구한 것은?

[중단원 마무리하기]

13. 실수
$$x$$
에 대하여 $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$ 일 때,

$$a^{2x} + a^{-2x}$$
의 값을 구한 것은? (단, $a > 0$, $a \ne 1$)

①
$$\frac{7}{3}$$

$$4 \frac{10}{3}$$

[중단원 마무리하기]

- **14.** 두 실수 a, b에 대하여 $2^{\frac{1}{a}} = 50^{\frac{1}{b}} = \sqrt[4]{10}$ 이 성립할 때, a+b의 값을 구한 것은?
 - 1) 8

- 2 10
- 3 12
- 4 14
- ⑤ 16

[중단원 마무리하기]

15.
$$a = \frac{\sqrt[4]{5}}{5} \circ | \mathbf{J},$$

$$\frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} + \frac{8}{1+a^2} = \frac{p}{q}$$
라 할

때, p+q의 값은?

- ① 511
- 2 516
- 3 521
- ④ 526
- ⑤ 531

- [중단원 마무리하기]
- **16.** 세 양수 a, b, c에 대하여 $4^a = 27^b = k^c$,
 - 3ab = 3bc + 2ac일 때, 양수 k의 값은?
 - ① $\sqrt{6}$
- ② 9
- ③ 16
- ④ 25
- (5) 36

- [대단원 평가하기]
- **17.** $5^x = 2$ 이고, $\frac{125^x + 125^{-x}}{5^x + 5^{-x}} = \frac{p}{q}$ 일 때, p + q의 값
 - 은?
 - 9

- 2 11
- ③ 13
- **4** 15
- ⑤ 17

- [대단원 평가하기]
- **18.** 두 양수 a, b에 대하여 $ab = \sqrt[4]{3}$, $a = 27^{\frac{1}{x}}$,

$$b=9^{\frac{1}{y}}$$
일 때, $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$ 의 값을 구한 것은? (단, $xy \neq 0$)

- ① 1
- $2 \frac{1}{2}$
- $3\frac{1}{4}$
- $4) \frac{3}{4}$

[대단원 평가하기]

- **19.** $x=5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, $\frac{5x^3-15x}{313}$ 의 값은?
 - ① $\frac{1}{5}$
- $3\frac{1}{25}$
- $4 \frac{2}{25}$

- [대다의 평가하기
- **20.** $4^x = 3^{2y} = \left(\frac{1}{6}\right)^z$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}$ 의 값을 구한 것은? (단, $xyz \neq 0$)
 - (1) 2
- 30
- **4**) 1

⑤ 2

4

정답 및 해설

1) [정답] ④

- [해설] 처음 제단의 부피가 4 m^3 이고, 처음 제단 부피의 4 m^3 이고, 처음 제단 부피의 4 m^3 이고, 처음 제단 부피가 4 m^3 이고, 처음 제단 4 m^3
 - 이때 제단의 한 모서리의 길이를 xm라고 두면, $x^3=16$ 이고, 모서리의 길이는 실수이므로 $x=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$

제단의 한 모서리의 길이는 $2\sqrt[3]{2}$ m이다.

2) [정답] ③

[해설] ①
$$3^6 \times 3^{-4} = 3^2 = 9$$

②
$$2^6 \div (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8$$

$$(2^{-3}4^2)^{-2} = (2)^{-2} = (\frac{1}{4})^{-2}$$

$$(2)^5 \times (6^2 2^{-3}) = 2^5 \times \left(\frac{2^2 3^2}{2^3}\right) = 2^4 3^2 = 144$$

3) [정답] ①

[해설] ①
$$25^{-2.5} = 25^{-\frac{5}{2}} = 5^{-5}$$

$$(2) (-216)^{\frac{2}{3}} = (-6)^2 = 36$$

$$3 256^{0.75} = 2^6 = 64$$

$$4.21^{1.5} = (1.1)^{2 \times 1.5} = 1.1^3$$

(5)
$$32^{1.2} = (2^5)^{1.2} = 2^6$$

4) [정답] ⑤

[해설] ① $(a^r)^s = a^{rs}$

$$(2)$$
 $(ab)^r = a^r b^r$

$$(3)$$
 $-(ab)^r = -a^rb^r$

$$\bigcirc -a^{r+s}b^{r+s} = -(ab)^{r+s}$$

5) [저다] ⓒ

[해설] ①
$$5^{-\frac{1}{2}} \times 5^{0.5} = 5^0 = 1$$

$$(27^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9$$

$$\bigcirc 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4$$

6) [정답] ④

[해설] ①
$$\sqrt[3]{2^5\sqrt{3^2}} \div \sqrt[3]{2^2\times 3} = 2$$

$$(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}) (2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}) = -1$$

7) [정답] ②

[해설] ①
$$\sqrt[4]{2\times3^3} \times \sqrt[12]{2^7\times3^5} \div \sqrt[3]{\sqrt{2^5\times3}}$$

$$=2^{\frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{6}} \times 3^{\frac{3}{4} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6}} = 3$$

$$\bigcirc \left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\!\!\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)\!\!\left(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) \left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right) = 3 - 2 = 1$$

$$(2) \left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right) \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right) = 2 + 3 = 5$$

$$(5) (4+5)^3(4-5)^3 = (-9)^3 = -3^6$$

8) [정답] ①

[해설] ①
$$\left(3^{\frac{2}{\sqrt{2}}}2^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^22^{-2} = \frac{9}{4}$$

②
$$2^{\sqrt{5}+1} \div 2^{\sqrt{5}-1} = 2^2 = 4$$

$$(3) \left\{ \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{8}} \right\}^{\sqrt{32}} = \sqrt{2^{16}} = 2^8 = 256$$

(5)
$$3^{\sqrt{3}} \times 3^{2-\sqrt{3}} = 3^2 = 9$$

9) [정답] ⑤

[해설] ①
$$3^{\frac{12}{7}} \div 3^{-\frac{2}{7}} = 3^{\frac{12}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right)} = 9$$

②
$$9^{\frac{1}{4}} \times 27^{-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{27}} = 2^9 = 512$$

$$= \left(3^{\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{4\sqrt{7}}{3}}\right)^{\frac{3}{\sqrt{7}}} = 3^5 = 243$$

$$(5) (5^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 9^{\frac{1}{2\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}} = (5^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

10) [정답] ③

[해설] ①
$$5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} = 6\sqrt[3]{5}$$

②
$$\sqrt[6]{4} - \sqrt[6]{256} \times \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{250}$$

= $\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} \times 3 + 5\sqrt[3]{2} = 0$

③
$$\sqrt[3]{-48} \times \sqrt{\sqrt[3]{144}} = (-2\sqrt[3]{6}) \times \sqrt[6]{144}$$

= $(-2\sqrt[3]{6}) \times \sqrt[3]{12} = -4\sqrt[3]{9}$

$$=5-4=1$$

11) [정답] ③

[해설]
$$\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{6}{2n+1}} = 3^{-\frac{6}{2n+1}}$$
가 자연수가 되기 위해서는 $-\frac{6}{2n+1}$ 이 자연수이어야 한다.

(iii)
$$-(2n+1) = 2,6$$
일 경우 만족하는 n 은 없다.
따라서 $(-1)+(-2) = -3$ 이다.

12) [정답] ③

[해설]
$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$$
이므로
$$x + x^{-1} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

$$x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2 = 23^2 - 2 = 527$$

13) [정답] ④

[해설]
$$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=2$$
이므로, $a^x+a^{-x}=2a^x-2a^{-x}$ 이다.
따라서 $a^x=3a^{-x}$, $a^{2x}=3$ 이므로
$$a^{2x}+a^{-2x}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

14) [정답] ①

[해설]
$$2^{\frac{1}{a}} = 50^{\frac{1}{b}} = \sqrt[4]{10}$$
이 정립하므로
$$2 = (\sqrt[4]{10})^a = 10^{\frac{a}{4}}, \ 50 = (\sqrt[4]{10})^b = 10^{\frac{b}{4}}$$
 따라서 $2 \times 50 = 10^2 = 100 = 10^{\frac{a}{4} + \frac{b}{4}}$ 이므로 $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 2$ 즉, $a + b = 8$

15) [정답] ⑤

[하]
$$\frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} + \frac{8}{1+a^2}$$

$$= \frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} + \frac{8}{1+a^2}$$

$$= \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1+a} + \frac{8}{1+a^2}$$

$$= \frac{8}{1-a^2} + \frac{8}{1+a^2} = \frac{16}{1-a^4}$$

$$= \frac{16}{1-\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{5}\right)^4} = \frac{16}{\frac{124}{125}} = \frac{500}{31}$$

$$500 + 31 = 531$$

16) [정답] ⑤

[해설]
$$4^a = 27^b = k^c$$
이므로 $2^{2a} = 3^{3b} = k^c$

$$2=k^{\frac{c}{2a}}$$
, $3=k^{\frac{c}{3b}}$ 이므로
$$2\times 3=k^{\frac{c}{2a}+\frac{c}{3b}}=k^{\frac{3bc+2ac}{6ab}}$$
 이때 $3ab=3bc+2ac$ 이므로 $6=k^{\frac{3ab}{6ab}}=k^{\frac{1}{2}}$ 따라서 $k=36$

17) [정답] ⑤

[해설]
$$\frac{125^{x} + 125^{-x}}{5^{x} + 5^{-x}} = \frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^{x} + 5^{-x}} = 5^{2x} - 1 + 5^{-2x} \underline{\circ} \mathbf{Z}$$
$$5^{2x} - 1 + 5^{-2x} = 4 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

18) [정답] ③

[해설]
$$ab = 27^{\frac{1}{x}} \times 9^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{3}{x}} \times 3^{\frac{2}{y}} = 3^{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}$$
 $3^{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$ $\therefore \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4}$

19) [정답] ②

[해설]
$$x=5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}$$
의 양변을 세제곱하면,
$$x^3=\left(5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}\right)^3$$
$$=5^2+3\times5^{\frac{2}{3}}\times5^{-\frac{2}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}\right)+\frac{1}{5^2}$$
$$=3\times\left(5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}\right)+\frac{626}{25}$$
$$x=5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}$$
이므로 $x^3=\frac{626}{25}+3x$
$$x^3-3x=\frac{626}{25}$$
따라서 $\frac{5x^3-15x}{313}=\frac{2}{5}$

20) [정답] ③

[해설]
$$4^x = 3^{2y} = \left(\frac{1}{6}\right)^z = k$$
라고 하면
$$2^{2x} = k$$
이므로 $2 = k^{\frac{1}{2x}}$
$$3^{2y} = k$$
이므로 $3 = k^{\frac{1}{2y}}$
$$6^{-z} = k$$
이므로 $6 = k^{-\frac{1}{z}}$ 이때 $k^{\frac{1}{2x}} \times k^{\frac{1}{2y}} \div k^{-\frac{1}{z}} = k^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z}} = 1$ 이므로
$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = 0,$$
$$2 \times \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 0$$