

05

이차방정식

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	방정식 $ax=b$ 의 풀이	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 02	이차방정식의 풀이	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
발전유형 03	절댓값 기호를 포함한 방정식의 풀이	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 04	이차방정식의 활용	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 05	이차방정식의 판별식	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 06	이차식이 완전제곱식이 될 조건	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 07	이차방정식의 근과 계수의 관계	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 08	두 근의 조건이 주어진 이차방정식	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 09	두 수를 근으로 하는 이차방정식의 작성	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 10	이차방정식의 켈레근	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

필수유형 01 방정식 $ax=b$ 의 풀이

x 에 대한 방정식 $m(x-1)=m^2(x+1)$ 의 해가 다음과 같을 때, 상수 m 의 값 또는 m 의 조건을 구하여라.

- (1) 해가 없다.
- (2) 해가 무수히 많다.
- (3) 해가 오직 한 개이다.

품셈 POINT

- $ax=b$ 꼴로 정리한 후, 주어진 조건을 만족시키는 상수 m 의 값 또는 m 의 조건을 구하자!
- x 에 대한 방정식 $ax=b$ 에서
 - (i) $a=0, b \neq 0$ 이면 해가 없다.
 - (ii) $a=0, b=0$ 이면 해가 무수히 많다.
 - (iii) $a \neq 0$ 이면 해가 오직 한 개이다.

풀이 • ● 주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned} m(x-1) &= m^2(x+1) \text{에서} \\ mx - m &= m^2x + m^2, \quad m^2x - mx = -m^2 - m \\ (m^2 - m)x &= -(m^2 + m) \\ \therefore m(m-1)x &= -m(m+1) \quad ① \end{aligned}$$

- ① ① m 의 값 또는 m 의 조건을 구하므로 m 을 최대한 간단히 표현한다.
- ② $ax=b$ 에서 $a=0, b \neq 0$ 이면 해가 없다.

(1) ①이 $0 \times x = (0 \text{이 아닌 상수})$ ② 꼴이어야 하므로

- (i) $m(m-1)=0$ 에서 $m=0$ 또는 $m=1$
 - (ii) $-m(m+1) \neq 0$ 이어야 하므로 $m \neq 0, m \neq -1$
- (i), (ii)에서 $m=1$

(2) ①이 $0 \times x = 0$ ③ 꼴이어야 하므로

- (i) $m(m-1)=0$ 에서 $m=0$ 또는 $m=1$
 - (ii) $-m(m+1)=0$ 이어야 하므로 $m=0$ 또는 $m=-1$
- (i), (ii)에서 $m=0$

- ③ $ax=b$ 에서 $a=0, b=0$ 이면 해가 무수히 많다.

(3) ①에서 $m(m-1) \neq 0$ 이어야 하므로

$$m \neq 0, m \neq 1$$

$$\boxed{\text{답}} \quad (1) m=1 \quad (2) m=0 \quad (3) m \neq 0, m \neq 1$$

품셈 강의 NOTE

‘일차방정식 $ax=b$ ’에는 $a \neq 0$ 이라는 뜻이 포함되어 있다.
하지만 ‘방정식 $ax=b$ ’에는 $a \neq 0$ 이라는 뜻이 포함되어 있지 않다.
따라서 방정식 $ax=b$ 를 풀 때는 반드시 $a \neq 0$ 일 때와 $a=0$ 일 때로 나누어 풀어야 한다.

01-1 ● 기본

x 에 대한 다음 방정식을 풀어라.

- (1) $a(x+1)=x+2$
 (2) $m(x-2)=4x-1$

01-2 ● 기본

x 에 대한 방정식 $(a-1)x+b+2=2x+3$ 의 해가 다
음과 같을 때, 상수 a , b 의 값 또는 a , b 의 조건을 구하
여라.

- (1) 해가 없다.
 (2) 해가 무수히 많다.
 (3) 해가 오직 한 개이다.

01-3 ● 유사

x 에 대한 방정식 $a^2(x-2)=a(x+4)$ 의 해가 다음과
같을 때, 상수 a 의 값 또는 a 의 조건을 구하여라.

- (1) 해가 없다.
 (2) 해가 무수히 많다.
 (3) 해가 오직 한 개이다.

01-4 ● 변형

x 에 대한 방정식 $(a+2)^2x=9x+2(a-1)$ 의 설명으
로 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 골라라.

(단, a 는 상수이다.)

|보기|

- ㄱ. $a=1$ 일 때, 해가 없다.
 ㄴ. $a=-5$ 일 때, 해가 무수히 많다.
 ㄷ. $a \neq 1$, $a \neq -5$ 일 때, 오직 하나의 해가 존재
한다.

01-5 ● 변형

x 에 대한 다음 방정식을 풀어라. (단, p 는 상수이다.)

$$(p^2+4p+3)x=p+3$$

01-6 ● 변형

x 에 대한 방정식 $(m+1)(m+4)x=m+2-2x$ 의
해가 무수히 많을 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

필수유형 02 이차방정식의 풀이

다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $2x^2 - 15x = x - 30$

(2) $(x+2)^2 = 4x^2 - 5x - 2$

(3) $\frac{5x^2 - 4x}{3} - \frac{1}{2} = 2x - 3$

**풍샘
POINT**

이차방정식의 풀이 방법은 다음과 같은 순서로 풀면 돼!

(x 에 대한 이차식) = 0
꼴 만들기



좌변을
인수분해하기



인수분해가 안 되면
근의 공식 이용하기

풀이 ● (1) $2x^2 - 15x = x - 30$ 에서 우변의 항을 좌변으로 이항하면

$$2x^2 - 16x + 30 = 0, \quad x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\text{좌변을 인수분해하면 } (x-3)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 5$$

(2) $(x+2)^2 = 4x^2 - 5x - 2$ 에서

$$x^2 + 4x + 4 = 4x^2 - 5x - 2$$

$$-3x^2 + 9x + 6 = 0, \quad x^2 - 3x - 2 = 0 \text{ ①}$$

따라서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

① 좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용한다.

(3) $\frac{5x^2 - 4x}{3} - \frac{1}{2} = 2x - 3$ ②에서

$$10x^2 - 8x - 3 = 12x - 18$$

$$10x^2 - 20x + 15 = 0, \quad 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

따라서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \times 3}}{2} \text{ ③}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2}$$

② 양변에 분모인 3, 2의 최소공배수 6을 곱한다.

③ x 의 계수가 짝수이므로 짝수 근의 공식을 이용한다.

답 (1) $x = 3$ 또는 $x = 5$ (2) $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ (3) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2}$

**풍샘 강의
NOTE**

- 이차방정식의 해를 구할 때, 좌변을 인수분해하거나 인수분해가 되지 않으면 근의 공식을 이용한다.
- 특별한 언급이 없으면 이차방정식의 해는 복소수의 범위까지 구한다.

02-1 기본

이차방정식 $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 근이 $x = \frac{a \pm \sqrt{b}i}{2}$ 일 때,
정수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

02-2 유사

다음 이차방정식을 풀어라.

- (1) $3(2x^2 + 1) = -16x + 9$
 (2) $(x - 2)(4x + 1) = 13x + 10$
 (3) $\frac{3x^2 + 4}{5} - x = \frac{x^2 - x}{2}$

02-3 유사

다음 이차방정식을 풀어라.

$$3(2x + 1) - 2x = 4(1 - x^2)$$

02-4 변형

기출

이차방정식 $x^2 + kx + 2 = 0$ 의 한 근이 1이 되도록 상수 k 의 값을 정할 때, 이 방정식의 나머지 한 근을 α 라 하자. 이때 $k + \alpha$ 의 값을 구하여라.

02-5 변형

다음 이차방정식을 풀어라.

$$(\sqrt{2} - 1)x^2 + x + (2 - \sqrt{2}) = 0$$

02-6 실력

x 에 대한 이차방정식

$$kx^2 + (p + 1)x + (k - 2)q = 0$$

이 0이 아닌 실수 k 의 값에 관계없이 $x = 1$ 을 근으로 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 실수이다.)

**발전유형 03****절댓값 기호를 포함한 방정식의 풀이**

다음 방정식을 풀어라.

$$(1) x^2 + |x-2| - 4 = 0$$

$$(2) x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

**풍샘
POINT**

절댓값 기호가 있는 방정식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누고, 이차방정식을 풀면 돼.

구간을 나누면 양수, 음수를 판단할 수 있으므로 절댓값 기호를 없앨 수 있어.

풀이 • (1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값은 $x-2=0$ 에서

$$x=2$$

(i) $x < 2$ 일 때,

$$x^2 - (x-2) - 4 = 0, x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 2$ 이므로 $x = -1$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x^2 + x - 2 - 4 = 0, x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

① $x=2$ 를 기준으로 구간을 나눈다.

② $x < 2$, 즉 $x-2 < 0$ 이므로 $|x-2| = -(x-2)$

③ $x \geq 2$, 즉 $x-2 \geq 0$ 이므로 $|x-2| = x-2$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값은 $x=0$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + 5x + 6 = 0, (x+2)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -3$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 3$$

④ $x=0$ 을 기준으로 구간을 나눈다.

다른 풀이

$$x^2 = |x|^2 \text{이므로 } |x|^2 - 5|x| + 6 = 0$$

$$(|x|-2)(|x|-3) = 0, |x| = 2 \text{ 또는 } |x| = 3$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 3$$

$$\text{답} (1) x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \quad (2) x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 3$$

**풍샘 강의
NOTE**

절댓값이 포함된 이차방정식을 풀 때, 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 해를 구한다. 이때 구한 해가 해당 구간에 속하는지 반드시 확인해야 한다.

03-1 기본

다음 방정식을 풀어라.

(1) $|2x+1|=5$

(2) $|3x-2|=x+1$

03-2 유사

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^2-2|x-1|-1=0$

(2) $x^2-12|x|+32=0$

03-3 변형

다음 방정식을 풀어라.

$$|x^2+3x+1|=1$$

03-4 변형

방정식 $x^2+|2x-1|=3$ 의 해가 $x=-1+\sqrt{a}$ 또는 $x=1-\sqrt{b}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

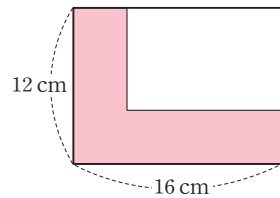
03-5 실력방정식 $|x^2-4|=x+2$ 의 모든 실근의 합을 구하여라.**03-6** 실력

다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^2+\sqrt{(x-1)^2}=|x+1|+3$$

필수유형 04 이차방정식의 활용

가로의 길이가 16 cm, 세로의 길이가 12 cm인 직사각형 모양의 종이에 오른쪽 그림과 같이 폭이 일정하게 색칠하였다. 색칠한 부분의 넓이가 96 cm^2 일 때, 색칠한 부분의 폭은 몇 cm인지 구하여라.



풍뎡 POINT

이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결해.

미지수 정하기



이차방정식 세우기



이차방정식 풀기



답 구하기

풀이 • STEP 1 미지수 x 정하기

색칠한 부분의 폭을 $x \text{ cm}$ 라고 하면 색칠하지 않은 부분의 직사각형의 가로의 길이는 $(16-x) \text{ cm}$, 세로의 길이는 $(12-x) \text{ cm}$ 이다. ①

STEP 2 x 에 대한 이차방정식 세우기

이때 전체 직사각형의 넓이는 $16 \times 12 = 192 (\text{cm}^2)$ 이고, 색칠한 부분의 넓이는 96 cm^2 이므로

$$192 - (16-x)(12-x) = 96$$

STEP 3 이차방정식 풀기

$$192 - (192 - 28x + x^2) = 96$$

$$x^2 - 28x + 96 = 0$$

$$(x-4)(x-24) = 0$$

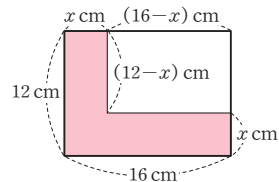
$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=24$$

STEP 4 답 구하기

그런데 $0 < x < 12$ ②이므로

$$x=4$$

따라서 색칠한 부분의 폭은 4 cm이다.



② x 는 변의 길이이므로 $x > 0$ 이고, 직사각형의 짧은 변, 즉 세로의 길이보다는 클 수 없으므로 $x < 12$ 이다.

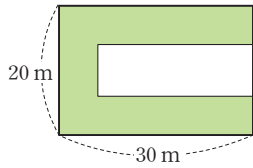
답 4 cm

풍뎡 강의 NOTE

문제의 뜻에 따라 이차방정식을 제대로 세워 풀었다고 해도 구한 해가 조건을 만족시키는지 반드시 확인해야 한다. 특히, 도형의 변의 길이는 항상 양수이어야 함을 기억하자.

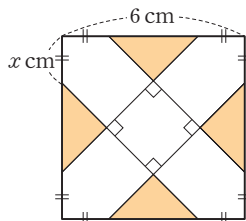
04-1 유사

가로, 세로의 길이가 각각 30 m, 20 m인 직사각형 모양의 땅에 오른쪽 그림과 같이 폭이 일정한 Γ 자 모양의 길을 만들었더니, 남은 땅의 넓이가 378 m^2 가 되었다. 이때 길의 폭은 몇 m인지 구하여라.



04-2 변형

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 6 cm인 정사각형 모양의 종이에서 색칠한 4개의 합동인 직각이등변삼각형을 잘라 내었더니 남은 부분의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 가 되었다. 이때 x 의 값을 구하여라.



04-3 변형

크기가 서로 다른 3개의 정사각형이 있다. 이 3개의 정사각형의 한 변의 길이는 각각 2 cm씩 차이가 나고, 세 정사각형의 넓이의 합은 200 cm^2 이다. 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

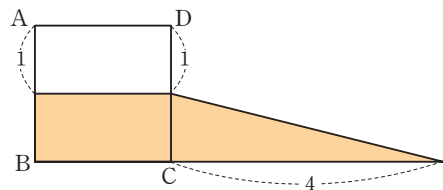
04-4 변형

한 변의 길이가 10 cm인 정사각형이 있다. 정사각형의 가로의 길이는 매초 2 cm씩 늘어나고, 세로의 길이는 매초 1 cm씩 줄어든다고 할 때, 직사각형의 넓이가 88 cm^2 가 되는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

04-5 변형

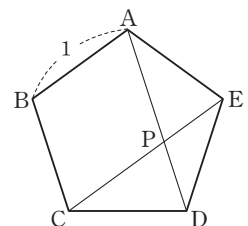
기출

다음 그림과 같이 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 DC의 길이를 각각 1만큼 줄이고 변 BC의 길이를 4만큼 늘려 만든 사다리꼴의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다. 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



04-6 실력

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE에서 두 대각선 AD와 EC의 교점을 P라고 하자. 이때 선분 AD의 길이를 구하여라.



x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(p-1)x + p^2 + p + 2 = 0$ 이 다음과 같은 근을 갖도록 하는 실수 p 의 값 또는 범위를 구하여라.

- (1) 서로 다른 두 실근
- (2) 중근
- (3) 서로 다른 두 허근
- (4) 실근

풍뎡
POINT

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라고 할 때

- ① $D > 0 \iff$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.] 실근을 가지려면 $D = b^2 - 4ac \geq 0$
 ② $D = 0 \iff$ 중근을 갖는다.
 ③ $D < 0 \iff$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

풀이 • 이차방정식 $x^2 + 2(p-1)x + p^2 + p + 2 = 0$ 의 ^① 판별식을 D 라고 하면 ① x 에 대한 이차방정식이므로 x 이외의 문자는 모두 상수이다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (p-1)^2 - (p^2 + p + 2) \\ &= -3p - 1 \end{aligned}$$

② $ax^2 + 2bx + c = 0$ 꼴이므로 판별식 $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ 를 이용한다.

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야 하므로

$$-3p - 1 > 0 \quad \therefore p < -\frac{1}{3}$$

(2) 중근을 가지려면 $\frac{D}{4} = 0$ 이어야 하므로

$$-3p - 1 = 0 \quad \therefore p = -\frac{1}{3}$$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $\frac{D}{4} < 0$ 이어야 하므로

$$-3p - 1 < 0 \quad \therefore p > -\frac{1}{3}$$

(4) 실근을 가지려면 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$-3p - 1 \geq 0 \quad \therefore p \leq -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{답}} \quad (1) p < -\frac{1}{3} \quad (2) p = -\frac{1}{3} \quad (3) p > -\frac{1}{3} \quad (4) p \leq -\frac{1}{3}$$

풍뎡 강의
NOTE

계수가 실수인 이차방정식은 두 실근(중근 포함) 또는 서로 다른 두 허근을 근으로 갖는다.

05-1 유사

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 이 다음과 같은 근을 갖도록 하는 실수 k 의 값 또는 범위를 구하여라.

- (1) 서로 다른 두 실근
- (2) 중근
- (3) 서로 다른 두 허근
- (4) 실근

05-2 변형

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - k(2x-1) + 6 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 양수 k 의 값과 중근 α 에 대하여 $k - \alpha$ 의 값을 구하여라.

05-3 변형

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x - (k+1) = 0$ 이 허근을 갖고, 이차방정식 $x^2 - (k+3)x + k+3 = 0$ 이 중근을 가질 때, 실수 k 의 값을 구하여라.

05-4 변형

x 에 대한 이차방정식

$$(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k-3 = 0$$

이 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

05-5 변형

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$ 이 중근을 갖는다. 실수 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하여라.

05-6 실력

기출

x 에 대한 이차방정식

$$4x^2 + 2(2k+m)x + k^2 - k + n = 0$$

이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $m+n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 실수이다.)

x 에 대한 이차식 $x^2 - (2a+1)x + 4a^2 - 5$ 가 완전제곱식이 될 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

풍뎡
POINT

이차식이 완전제곱식이 될 조건은 다음과 같은 순서로 구해야 해!

- ① (이차식) = 0인 이차방정식의 판별식을 구하자.
- ② 중근을 가질 조건인 (판별식) = 0이 되는 값을 구하자.

풀이

STEP 1 이차식이 완전제곱식이 되기 위한 조건 구하기

이차식 $x^2 - (2a+1)x + 4a^2 - 5$ 가 완전제곱식이 되려면

이차방정식 $x^2 - (2a+1)x + 4a^2 - 5 = 0$ 이 중근을 가져야 한다. ①

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = \{-(2a+1)\}^2 - 4(4a^2 - 5) = 0$$

STEP 2 조건에 맞는 a 의 값 구하기

$$4a^2 + 4a + 1 - 16a^2 + 20 = 0$$

$$12a^2 - 4a - 21 = 0, (6a+7)(2a-3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{7}{6} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

다른 풀이

STEP 1 이차식이 완전제곱식이 되기 위한 조건 구하기

이차식 $x^2 - (2a+1)x + 4a^2 - 5$ 가 완전제곱식이 되려면

$$\left\{ \frac{-(2a+1)}{2} \right\}^2 = 4a^2 - 5 \quad ②$$

STEP 2 조건에 맞는 a 의 값 구하기

$$\frac{4a^2 + 4a + 1}{4} = 4a^2 - 5$$

$$4a^2 + 4a + 1 = 16a^2 - 20$$

$$12a^2 - 4a - 21 = 0, (6a+7)(2a-3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{7}{6} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

- ① $a(x-a)^2 \leftarrow$ 완전제곱식
 \Leftrightarrow 이차방정식 $a(x-a)^2 = 0$
 이 중근 a 를 갖는다.

- ② 이차식 $x^2 + mx + n$ 이 완전제곱식이 되려면 $\left(\frac{m}{2}\right)^2 = n$ 이 되어야 한다.

답 $\frac{3}{2}$

풍뎡 강의
NOTE

이차식 $ax^2 + bx + c$ 가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.

06-1 유사

x 에 대한 이차식 $2x^2 + (3a+1)x + a^2 + a + 2$ 가 완전 제곱식이 될 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

06-2 유사

x 에 대한 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$ 가 완전제곱식이 될 때, 모든 실수 k 의 값의 합을 구하여라.

06-3 변형

x 에 대한 이차식 $x^2 - 2(k+a)x + (k+1)^2 + a^2 - b - 3$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 완전제곱식이 될 때, 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

06-4 변형

x 에 대한 이차식 $x^2 - 4x - a + b$ 가 완전제곱식이 될 때, 이차방정식 $x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하여라. (단, a, b 는 실수이다.)

06-5 실력

x 에 대한 이차식 $(x-a)(x-c) + (x-b)(2x-a-c)$ 가 완전제곱식이 될 때, 양수 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하여라.

06-6 실력

이차식 $x^2 + xy - ky^2 + 2x + 7y - 30$ 이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

필수유형 07 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $x^2+4x+2=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

- (1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $|\alpha-\beta|$
 (3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ (4) $\alpha^3+\beta^3$

**품셈
POINT**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

풀이 • 이차방정식 $x^2+4x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{1}=-4, \alpha\beta=\frac{2}{1}=2$$

$$(1) \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \textcircled{1} \\ =(-4)^2-2\times 2=12$$

① 주어진 식을 곱셈 공식을 이용하여 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 에 대한 식으로 변형해야 한다.

$$(2) (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ =(-4)^2-4\times 2=8 \\ \therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

다른 풀이

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{4^2-4\times 1\times 2}}{|1|} \textcircled{2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

$$(3) \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} \textcircled{3}=\frac{12}{2}=6$$

③ (1)에서 $\alpha^2+\beta^2=12$

$$(4) \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ =(-4)^3-3\times 2\times (-4)=-40$$

다른 풀이

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \\ =(-4)\times (12-2)=-40$$

답 (1) 12 (2) $2\sqrt{2}$ (3) 6 (4) -40

**품셈 강의
NOTE**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구하고, 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다. 이때 자주 이용되는 곱셈 공식의 변형은 다음과 같다.

- ① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
 ② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab, (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
 ③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b), a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

07-1 유사

이차방정식 $x^2+x-4=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $|\alpha-\beta|$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

(4) $\alpha^3+\beta^3$

07-2 변형

이차방정식 $2x^2+6x-3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $|\alpha^2-\beta^2|$ 의 값을 구하여라.

07-3 변형

이차방정식 $2x^2-4x-1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,

$$\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1} \text{의 값을 구하여라.}$$

07-4 변형

이차방정식 $x^2-3x+5=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\alpha^3+\beta^3-2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha+\beta$ 의 값을 구하여라.

07-5 변형

기출

이차방정식 $x^2+4x-3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,

$$\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4} \text{의 값을 구하여라.}$$

07-6 변형

기출

이차방정식 $x^2-3x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,

$$\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta \text{의 값을 구하여라.}$$

이차방정식 $x^2 - mx + 24 = 0$ 에 대하여 다음 조건에 맞는 실수 m 의 값을 모두 구하여라.

- (1) 두 근의 비가 2 : 3일 때
- (2) 두 근의 차이가 5일 때
- (3) 한 근이 다른 근의 6배일 때

**풍뎡
POINT**

- (1) 두 근의 비가 2 : 3일 때 → 두 근을 $2\alpha, 3\alpha$ 로 놓으면 돼.
- (2) 두 근의 차이가 5일 때 → 두 근을 $\alpha, \alpha + 5$ 로 놓으면 돼.
- (3) 한 근이 다른 근의 6배일 때 → 두 근을 $\alpha, 6\alpha$ 로 놓으면 돼.

풀이 • 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합) = m , (두 근의 곱) = 24

- (1) 두 근의 비가 2 : 3이므로 두 근을 각각 $2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면

$$2\alpha + 3\alpha = m \quad \therefore m = 5\alpha \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$2\alpha \times 3\alpha = 24, 6\alpha^2 = 24, \alpha^2 = 4 \quad \therefore \alpha = \pm 2 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $m = -10$ 또는 $m = 10$

- (2) 두 근의 차이가 5이므로 두 근을 각각 $\alpha, \alpha + 5$ 라고 하면^①

$$\alpha + (\alpha + 5) = m \quad \therefore m = 2\alpha + 5 \quad \cdots \cdots ㉢$$

$$\alpha(\alpha + 5) = 24, \alpha^2 + 5\alpha - 24 = 0$$

$$(\alpha + 8)(\alpha - 3) = 0 \quad \therefore \alpha = -8 \text{ 또는 } \alpha = 3 \quad \cdots \cdots ㉣$$

㉣을 ㉢에 대입하면 $m = -11$ 또는 $m = 11$

다른 풀이

두 근을 α, β 라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = 24$$

$$\text{두 근의 차이가 5이므로 } |\alpha - \beta| = 5$$

$$\text{이때 } |\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로}$$

$$5^2 = m^2 - 4 \times 24, m^2 = 121 \quad \therefore m = \pm 11$$

- (3) 한 근이 다른 근의 6배이므로 두 근을 각각 $\alpha, 6\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면

$$\alpha + 6\alpha = m \quad \therefore m = 7\alpha \quad \cdots \cdots ㉤$$

$$\alpha \times 6\alpha = 24, 6\alpha^2 = 24, \alpha^2 = 4 \quad \therefore \alpha = \pm 2 \quad \cdots \cdots ㉥$$

㉥을 ㉤에 대입하면 $m = -14$ 또는 $m = 14$

① 두 근의 차이가 k ($k > 0$)일 때는
두 근을
 $\alpha, \alpha + k$ 또는 $\alpha - k, \alpha$
로 놓을 수 있다.

답 (1) $-10, 10$ (2) $-11, 11$ (3) $-14, 14$

**풍뎡 강의
NOTE**

두 근의 조건이 주어진 경우에는 두 근을 α, β 로 놓지 말고 주어진 조건을 이용하여 한 문자 (α 또는 β)로 두 근을 나타낸다.

08-1 유사

이차방정식 $x^2 - 10x + m + 3 = 0$ 에 대하여 다음 조건에 맞는 실수 m 의 값을 구하여라.

- (1) 두 근의 비가 2 : 3일 때
- (2) 두 근의 차가 4일 때
- (3) 한 근이 다른 근의 4배일 때

08-2 변형

이차방정식 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$ 의 두 근의 비가 1 : 3일 때, 실수 k 의 값을 모두 구하여라.

08-3 유사

이차방정식 $x^2 + 2(k+2)x + k = 0$ 의 두 근의 차가 4일 때, 실수 k 의 값을 모두 구하여라.

08-4 변형

이차방정식 $x^2 + 3(m+1)x - 18 = 0$ 의 두 실근의 절댓값의 비가 1 : 2가 되도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하여라.

08-5 변형

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (m^2 + 2m - 8)x - 3m + 1 = 0$ 의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 실수 m 의 값을 구하여라.

08-6 실력

기출

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (1-3m)x + 2m^2 - 4m - 7 = 0$ 의 두 근의 차가 4가 되도록 하는 모든 실수 m 의 값의 곱을 구하여라.

필수유형 09 두 수를 근으로 하는 이차방정식의 작성

이차방정식 $x^2+6x+4=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

- (1) $\alpha+\beta, \alpha\beta$ (2) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (3) $\alpha+1, \beta+1$

풍뎡 POINT

두 수 α, β 를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 이다.

풀이 • 이차방정식 $x^2+6x+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-6, \alpha\beta=4$$

- (1) $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합과 곱을
각각 구하면

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-6+4=-2$$

$$(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=(-6)\times 4=-24$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+2x-24=0$ ^①이다.

① $x^2-2x-24=0$ 으로 쓰지 않도록 주의하자.

- (2) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 각각
구하면

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$ ^②이다.

② x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하는 것이므로 계수가 정수인 $4x^2+6x+1=0$ 으로 쓰지 않는다.

- (3) $\alpha+1, \beta+1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합과 곱을
각각 구하면

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-6+2=-4$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=4+(-6)+1=-1$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+4x-1=0$ 이다.

$$\boxed{\text{답}} \quad (1) x^2+2x-24=0 \quad (2) x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0 \quad (3) x^2+4x-1=0$$

풍뎡 강의 NOTE

주어진 두 근의 형태가 어떠하든지 두 근의 합과 두 근의 곱에 대한 식을 세우고 각각의 값을 구하면 이 두 값을 두 근으로 하는 이차방정식을 세울 수 있다.

09-1 ● 유사

이차방정식 $x^2+5x-3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

- (1) $\alpha+\beta, \alpha\beta$
 (2) $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$
 (3) $\alpha-1, \beta-1$

09-2 ● 변형

이차방정식 $x^2+x+2=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 4인 이차방정식을 구하여라.

09-3 ● 변형

이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ 를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+bx+c=0$ 이다. 상수 b, c 에 대하여 b^2+c^2 의 값을 구하여라.

09-4 ● 변형

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $a\alpha+b, a\beta+b$ 를 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

09-5 ● 변형

이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 두 근이 $\alpha, -1$ 이고, 이차방정식 $x^2+qx+p=0$ 의 두 근이 $\beta, -2$ 일 때, α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$ 이다. 이때 상수 a, b 에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하여라.

09-6 ● 실력

기출

이차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 곱은 7이다.
 (나) 이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $f(\alpha)+f(\beta)=3$ 이다.

$f(7)$ 의 값을 구하여라.

필수유형 10 이차방정식의 켈레근

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 한 근이 $1+\sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값
- (2) 한 근이 $3+2i$ 일 때, 실수 a, b 의 값

풍뎡
POINT

- (1) 계수가 유리수인 이차방정식의 근이 $p+q\sqrt{m}$ 이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ 이다.
(단, p, q 는 유리수, $q \neq 0$, \sqrt{m} 은 무리수이다.)
- (2) 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $p-qi$ 이다.
(단, p, q 는 실수, $q \neq 0$, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 • (1) STEP1 이차방정식의 다른 한 근 구하기

계수가 유리수이고, 주어진 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$ 이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$ ^①이다.

STEP2 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 의 값 구하기

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여^②

두 근의 합은

$$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$$

$$2=-a \quad \therefore a=-2$$

두 근의 곱은

$$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=b$$

$$1-3=b \quad \therefore b=-2$$

① $p+q\sqrt{3}$ 의 켈레근은 $p-q\sqrt{3}$ 이다.

② 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b$

(2) STEP1 이차방정식의 다른 한 근 구하기

계수가 실수이고, 주어진 이차방정식의 한 근이 $3+2i$ 이므로 다른 한 근은 $3-2i$ ^③이다.

STEP2 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 의 값 구하기

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은

$$(3+2i)+(3-2i)=-a$$

$$6=-a \quad \therefore a=-6$$

두 근의 곱은

$$(3+2i)(3-2i)=b$$
^④

$$9+4=b \quad \therefore b=13$$

③ $p+qi$ 의 켈레근은 $p-qi$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{④ } i^2 &= -1 \text{이므로} \\ 2i \times (-2i) &= -4i^2 \\ &= -4 \times (-1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 (1) $a=-2, b=-2$ (2) $a=-6, b=13$

풍뎡 강의
NOTE

이차방정식의 계수 조건이 주어지면 켈레근을 알 수 있다. 이때 이차방정식의 켈레근을 구하는 과정에서 계수의 조건이 유리수 또는 실수로 한정됨을 반드시 확인해야 한다.

10-1 ● 유사

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 한 근이 $3-\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값
- (2) 한 근이 $-1-3i$ 일 때, 실수 a, b 의 값

10-2 ● 변형

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 한 근이 $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ 일 때,

유리수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

10-3 ● 변형

이차방정식 $x^2+ax-b=0$ 의 한 근이 $\frac{1+i}{1-i}$ 일 때,

실수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

10-4 ● 변형

이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 한 근이 $-1+2i$ 일 때,

$\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$

이다. 이때 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

(단, m, n 은 실수이다.)

10-5 ● 실력

기출

다항식 $f(x)=x^2+px+q$ (p, q 는 실수)가 다음 두 조건을 만족시킨다.

- (가) 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 1이다.
 (나) 실수 a 에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 근은 $a+i$ 이다.

$p+2q$ 의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

10-6 ● 실력

복소수 a 는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 근이고,

$a+1$ 은 이차방정식 $x^2-bx+a=0$ 의 근이다. 이때 실수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하여라.

풍산차 유형 특강

가우스 기호를 포함한 방정식의 풀이

가우스 기호를 이해하면 가우스 기호를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있어.

먼저 가우스 기호가 무엇인지 알아보자.

실수 x 에 대하여 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$ 로 나타낼 때

기호 $[\]$ 를 가우스 기호라고 한다. 즉, 정수 n 에 대하여

$$n \leq x < n+1 \iff [x] = n$$

따라서 함수 $y=[x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 계단 모양으로 나타난다.

$[x]$ 는 실수 x 를 정수부분과 소수부분으로 나눌 때, x 의 정수부분, 즉 x 의 양의 소수부분을 버린 정수를 나타낸다.

예를 들어

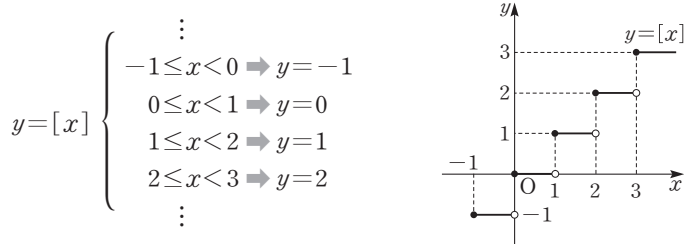
$$[1.2] = [1+0.2] = 1$$

$$[-1.2] = [-2+0.8] = -2$$

이때

$$[-1.2] = [-1-0.2] \neq -1$$

에 주의한다.



즉, 가우스 기호를 포함한 방정식은 정수의 구간에 따라 $[x]$ 의 값이 달라지므로 주어진 x 의 값의 범위를 정수의 구간으로 나누어 생각해야 한다.

예시 1 가우스 기호를 포함한 방정식(1)

$1 \leq x < 4$ 일 때, 방정식 $[x] + 4 = 3x$ 를 풀어라.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

풍산차 풀이 흐름

① $n \leq x < n+1$ (n 은 정수)일 때, $[x] = n$ 임을 이용하여 $[x]$ 의 값에 따라 경우를 나누어 풀기

② 방정식의 해 구하기

근을 구한 후, 구한 근이 주어진 범위에 포함되는지 반드시 확인해야 한다.

① (i) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로 $1 + 4 = 3x \quad \therefore x = \frac{5}{3}$

주어진 범위를 만족하므로 근이다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로 $2 + 4 = 3x \quad \therefore x = 2$

주어진 범위를 만족하므로 근이다.

(iii) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로 $3 + 4 = 3x \quad \therefore x = \frac{7}{3}$

그런데 주어진 범위를 만족하지 않으므로 근이 아니다.

② (i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{5}{3}$ 또는 $x = 2$

확인 1

정답과 풀이 92쪽

$-1 \leq x < 2$ 일 때, 방정식 $[x] + 1 = 2x$ 를 풀어라.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

예시 2 가우스 기호를 포함한 방정식(2)

방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 을 풀어라.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 에서 $([x] + 1)(2[x] + 1) = 0$

$\therefore [x] = -1$ 또는 $[x] = -\frac{1}{2}$

이때 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = -1$

② $\therefore -2 \leq x < -1$

확인 2

정답과 풀이 92쪽

다음 방정식을 풀어라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $3[x]^2 + 4[x] - 4 = 0$

(2) $[x]^2 - 12[x] + 32 = 0$

예시 3 가우스 기호를 포함한 방정식(3)

$0 \leq x < 3$ 일 때, 방정식 $x^2 - [x]^2 = x - [x]$ 를 풀어라.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $0 \leq x < 3$ 을 정수 단위로 구간을 나누면 $0 \leq x < 1$, $1 \leq x < 2$, $2 \leq x < 3$ 일 때이다.

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로 $x^2 - 0 = x - 0$

$x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 1$

그런데 x 는 $0 \leq x < 1$ 이므로 $x = 0$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로 $x^2 - 1 = x - 1$

$x^2 = x$, $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 1$

그런데 x 는 $1 \leq x < 2$ 이므로 $x = 1$

② (i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

확인 3

정답과 풀이 92쪽

다음 방정식을 풀어라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $x^2 + 4[x] - 5 = 0$ ($0 \leq x < 2$)

(2) $x^2 - [x]^2 = 2x - 2[x]$ ($0 \leq x < 3$)

풍산자 풀이 흐름

① $[x]$ 를 한 문자로 생각하고 방정식을 풀어 정수 $[x]$ 의 값을 구하기

② $[x] = n$ (단, n 은 정수)
 $\iff n \leq x < n + 1$ 임을 이용하여 x 의 값의 범위를 구하기

$[x] = n$ (n 은 정수)

이므로 $[x] = -\frac{1}{2}$ 를 만족하는 x 의 값은 없다.

풍산자 풀이 흐름

① $n \leq x < n + 1$ (n 은 정수)일 때, $[x] = n$ 임을 이용하여 $[x]$ 의 값에 따라 경우를 나누어 풀기

② 방정식의 해 구하기

실전 연습 문제

01

x 에 대한 방정식 $a^2x - (3x+1)a + 2x+2=0$ 의 해가 무수히 많을 때의 a 의 값을 m , 해가 없을 때의 a 의 값을 n 이라고 하자. $m+n$ 의 값을 구하여라.

(단, a 는 상수이다.)

02

이차방정식 $x^2 + ax = 3x - b$ 의 한 근이 10이고, 이차방정식 $x^2 + abx + 4 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 12 ⑤ 16

03

다음 이차방정식을 풀어라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$ix^2 + (2+i)x - i(1+i) = 0$$

04

이차방정식 $x^2 + |2x-1| - 4 = 0$ 의 두 근 α, β ($\alpha < \beta$)에 대하여 $\beta - \alpha$ 의 값은?

- ① $-4 - \sqrt{6}$ ② $-2\sqrt{6}$ ③ $-\sqrt{6}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

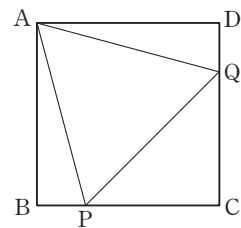
05 서술형

두 이차방정식 $x^2 + 4|x| - 5 = 0$ 과 $x^2 - mx + m = 0$ 이 공통근을 가질 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

06

기출

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 두 변 BC, CD 위에 각각 두 점 P, Q를 잡아 삼각형 APQ가 정삼각형이 되도록 하였다. 이때 선분 BP의 길이를 구하여라.



07

길이가 12 cm인 철사를 두 조각으로 잘라서 각각의 철사로 정삼각형을 만들었다. 두 정삼각형의 넓이의 합이 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm²일 때, 큰 정삼각형의 한 변의 길이는?

- ① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm
④ 6 cm ⑤ 7 cm

08

이차방정식 $x^2 + 4x + k - 3 = 0$ 이 허근을 갖도록 하는 가장 작은 자연수 k 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

09

기출

x 에 대한 이차방정식 $4x^2 - 4(k+1)x - 6 + k^2 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 모든 음의 정수 k 의 값의 합을 구하여라.

10 서술형

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 1 = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $x^2 + 4ax - 2b - 1 = 0$ 의 근을 판별하여라. (단, a, b 는 실수이다.)

11

x 에 대한 이차식 $a(1+x^2) + 2bx + c(1-x^2)$ 이 완전 제곱식이 될 때, 실수 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 모양인가?

- ① 정삼각형
② $b=c$ 인 이등변삼각형
③ $a=c$ 인 이등변삼각형
④ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
⑤ 빗변의 길이가 b 인 빗변인 직각삼각형

12

이차방정식 $(x-1)(x+2)=2$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값 중 옳지 않은 것은?

- ① $\alpha + \beta + 1 = 0$ ② $\alpha^2 + \beta^2 = 9$
③ $\alpha^3 + \beta^3 = 11$ ④ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4}$
⑤ $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{9}{4}$

13

이차방정식 $2x^2+6x-9=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $2(2\alpha^2+\beta^2)+6(2\alpha+\beta)-\alpha-\beta$ 의 값을 구하여라.

14

이차방정식 $x^2+(k+3)x+2k+7=0$ 의 두 근의 제곱의 합이 11일 때, 상수 k 에 대하여 k^2+2k 의 값은?

- ① -16 ② -8 ③ 1
 ④ 8 ⑤ 16

15

x 에 대한 이차방정식 $x^2-3px+4q-2=0$ 의 두 실근의 비가 1:2가 되도록 하는 두 실수 p, q 에 대하여 q 의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

- ① $q < -\frac{1}{2}$ ② $q < \frac{1}{2}$
 ③ $-\frac{1}{2} < q < \frac{1}{2}$ ④ $q > \frac{1}{2}$
 ⑤ $q > -\frac{1}{2}$

16 서술형

이차방정식 $x^2-4x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\alpha^2+\frac{1}{\beta}, \beta^2+\frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

17

이차방정식 $x^2-6x+2k=0$ 의 두 근의 비가 1:2이고, 이차식 x^2-kx-k 가 일차항의 계수가 1인 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 두 일차식의 합은?

(단, k 는 상수이다.)

- ① $-2x-4$ ② $2x-4$ ③ $x+2$
 ④ $-2x+4$ ⑤ $2x+4$

18

기출

x 에 대한 이차방정식 $x^2+(m+n)x-mn=0$ 의 한 근이 $4+\sqrt{2}i$ 일 때, m^2+n^2 의 값을 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 m, n 은 실수이다.)

01

기출

이차방정식 $x^2 - 2007x - 2008 = 0$ 의 근 중에서 큰 것을 a 라 하고, 이차방정식 $2008^2x^2 + 2007 \times 2009x - 1 = 0$ 의 근 중에서 작은 것을 b 라고 할 때, $a - b$ 의 값은?

- ① -2009 ② -2007 ③ 0
④ 2007 ⑤ 2009

02

x 에 대한 방정식 $|x^2 + 2x + 2k - 2| = k^2 + 5$ 의 모든 실근의 곱을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값은?
(단, k 는 실수이다.)

- ① -12 ② -7 ③ -6
④ -2 ⑤ -1

03

아이스크림 1개의 값이 1000원인 어느 아이스크림 전문점에서 하루 평균 1000개의 아이스크림을 판다고 한다. 어느 날부터 아이스크림의 값을 $x\%$ 만큼 올려서 팔았더니 판매량이 $2x\%$ 만큼 줄어 하루 평균 매출은 48% 만큼 감소하였다고 할 때, x 의 값을 구하여라.

04

기출

x 에 대한 이차방정식 $(a^2 - 9)x^2 = a + 30$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 10보다 작은 자연수 a 의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

05

이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같게 되고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근이 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이때 처음 이차방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

06

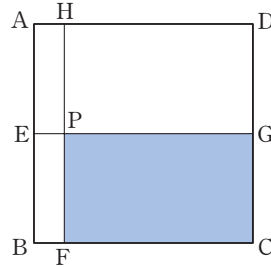
x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + 2m - 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 하는 모든 정수 m 의 값의 합은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

07

기출

한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P를 지나고 정사각형의 각 변에 평행한 두 직선이 정사각형의 네 변과 만나는 점을 각 E, F, G, H라고 하자.



직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이고 넓이가 46일 때, 두 선분 AE와 AH의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하여라.

(단, 이차방정식의 이차항의 계수는 1이다.)

08

기출

세 유리수 a, b, c 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + \sqrt{3}bx + c = 0$ 의 한 근이 $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ 이다. 다른 한 근을 β 라고 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

- ① -4 ② $-2\sqrt{3}$ ③ 0
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4