01 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

(1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 의 교점을 지나는 원의 방정식

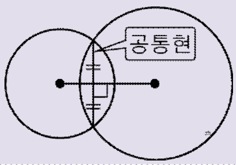
⇨ $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

(단, $k\neq-1$인 실수)

(2) 두 원의 공통현의 방정식

두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식(공통현의 방정식)은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$



◪ **다음 두 원의 교점과 주어진 점을 지나는 원의 방정식을 구하여라.**

1. $x^2+y^2=9$, $(x-1)^2+(y+2)^2=9$, **점** $(0,\ 1)$

2. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-6x-8y-8=0$, **점** $(-1, 0)$

3. $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, **점** $(1,\ 1)$

4. $x^2+y^2=25$, $(x-1)^2+(y-2)^2=11$, **점** $(1, 3)$

5. $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x-6y+8=0$,
점 $(0,\ 1)$

6. $x^2+y^2-8x+2y-5=0$, $x^2+y^2+2x-4y+2=0$
점 $(1,\ 3)$

7. $x^2+y^2-4x+6y=12$, $x^2+y^2+4x-8y=28$,
점 $(0,\ 5)$

8. $(x-2)^2+(y-2)^2=16$, $(x+2)^2+(y+2)^2=32$
점 $(0,\ 0)$

9. $x^2+y^2-6x+2=0$, $x^2+y^2-2x-8y+4=0$
점 $(1,\ 0)$

10. $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x-6y+8=0$,
점 $(0,\ 1)$

11. $x^2+y^2+2x-4y+1=0$, $x^2+y^2+2y-8=0$
점 $(2,\ 2)$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

12. $x^2+y^2-2x+y-3=0, x^2+y^2+x+2y-1=0$
점 $(0,\ 0)$

◪ 다음을 만족하는 직선의 방정식을 구하여라.

13. 두 원 $x^2+y^2=1, x^2+y^2-2x-2y=0$의 교점을 지나는 직선

14. 두 원 $x^2+y^2+6x+2y=0, x^2+y^2-2x+3y=0$의 교점을 지나는 직선

15. 두 원 $x^2+y^2+2x-1=0, x^2+y^2-2x+4y=0$의 교점을 지나는 직선

16. 두 원 $x^2+y^2+4x-3=0$,
$x^2+y^2-2x+10y+10=0$의 교점을 지나는 직선

17. 두 원 $x^2+y^2+2x-8y=0,\ x^2+y^2-4=0$의 교점을 지나는 직선에 수직이고, 점 $(1,-2)$를 지나는 직선

18. 두 원 $x^2+y^2+x=0, x^2+y^2-2x+y=0$의 교점을 지나는 직선에 수직이고, 점 $(2,3)$을 지나는 직선

◪ 다음 두 원의 공통현의 길이를 구하여라.

19. $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-4x+2y+4=0$

20. $x^2+y^2+2x+2y-22=0,$
$x^2+y^2-2x-2y-6=0$

21. $x^2+y^2=9, x^2+y^2+4x+3y+1=0$

22. $(x-2)^2+(y-4)^2-16=0,$
$(x-4)^2+(y-2)^2-16=0$

23. $x^2+y^2=20, x^2-6x+y^2-8y=0$

24. $x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2+2x-4=0$

25. $x^2+y^2=4, (x-2)^2+(y-1)^2=4$

◪ 두 원 O, O′이 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하여라.

26. O : $x^2+y^2=1$, O′ : $x^2+y^2-2x-2y=0$

27. O : $x^2+y^2=10$, O′ : $x^2+y^2-8x-6y+10=0$

28. O : $x^2+y^2=9$, O′ : $x^2+y^2-6x-8y+16=0$

29. O : $x^2+y^2=5$, O′ : $x^2+y^2-5x+12y-18=0$

30. O : $x^2+y^2=2$, O′ : $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

31. O : $x^2+y^2=4$, O′ : $x^2+y^2-4x+3y+1=0$

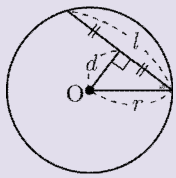
32. O : $(x+1)^2+(y-1)^2=4$, O′ : $(x-1)^2+y^2=1$

33. O : $x^2+y^2-4x+2y-20=0$,
O′ : $x^2+y^2+2x-4y+4=0$

02 현의 길이

반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라고 하면

➔ $l=2\sqrt{r^2-d^2}$



참고 원의 중심에서 현에 내린 수선의 발은 그 현을 수직이등분한다.

◪ 다음 원과 직선이 만나서 생기는 현의 길이를 구하여라.

34. $x^2+y^2=4, y=2x+2$

35. $x^2+y^2=4$, $3x+4y=5$

36. $x^2+y^2=25, y=2x-5$

37. $(x-1)^2+y^2=4, x-2y+2=0$

38. $x^2+(y-2)^2=12$, $2x+y+3=0$

39. $(x-1)^2+(y-2)^2=9, y=x-2$

40. $(x-1)^2+(y+3)^2=25, x+3y-2=0$

◪ **다음 원과 직선이 만나서 생기는 현의 길이가 d일 때, 양수 k의 값을 구하여라.**

41. $x^2+y^2=4, y=x+k, d=2\sqrt{2}$

42. $x^2+y^2=9$, $x-2y+k=0$, $d=4$

43. $x^2+y^2=9$, $y=x+k$, $d=4\sqrt{2}$

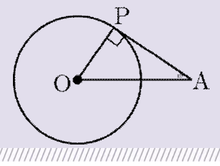
44. $x^2+(y+1)^2=25, y=kx+4, d=6$

45. $(x-1)^2+(y+2)^2=8, y=kx-5, d=2\sqrt{6}$

03 접선의 길이

원 밖의 한 점 A에서 원 O에 그은 접선의 접점을 P라 하면 직각삼각형 OAP에서

➔ $\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$



◪ **다음 원 밖의 한 점 A에서 원에 그은 접선의 접점을 P라 할 때, $\overline{AP}$의 길이를 구하여라.**

46. $A(3,1)$, $x^2+y^2=4$

47. $A(-3,0), (x-1)^2+y^2=12$

48. $A(-2,0)$, $(x-2)^2+(y-1)^2=8$

49. $A(3,6)$, $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

50. $A(5,4), (x-1)^2+(y-1)^2=9$

51. $A(3,1), (x+2)^2+(y-2)^2=1$

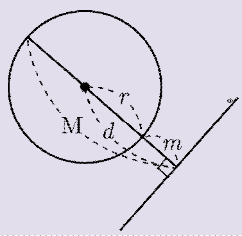
52. $A(7,3), (x-1)^2+(y-1)^2=15$

53. $A(-2,3)$, $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

54. $A(2,0), x^2+y^2+4x+2y+1=0$

04 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대·최소

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 할 때,
원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면
➔ $M=d+r$, $m=d-r$



◪ **다음 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하여라.**

55. $x^2+y^2+2x-6y+2=0$, $x-y-1=0$

56. $x^2+y^2+2x-6y+9=0, 3x-4y+9=0$

57. $x^2+y^2-2x-2y+1=0, x+y-4=0$

58. $x^2+y^2-2x-2y+1=0, 3x-4y-12=0$

59. $x^2+y^2-2x+4y-3=0$, $y=x+4$

60. $x^2+y^2-2x+4y-11=0$, $3x-4y+14=0$

61. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$, $3x-y+5=0$

62. $x^2+y^2-4x-2y+4=0, 2x+y+5=0$

63. $x^2+y^2-4x+6y+9=0$, $x-2y-3=0$

64. $x^2+y^2-10x+8y+5=0, x-y+3=0$

◪ **다음 두 원이 외접할 때, 양수 a의 값을 구하여라.**

65. $x^2+y^2+2x-2y+a=0$, $x^2+y^2-4x+6y-3=0$

66. $(x-1)^2+(y+3)^2=4$, $x^2+y^2+2ax+2y+1=0$

67. $x^2+y^2=a^2, x^2+y^2-2x-2y+1=0$

◪ 다음 두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 a의 값의 범위를 구하여라.

68. $x^2+y^2=a^2, (x-2)^2+y^2=1$

69. $x^2+y^2=1, (x-3)^2+y^2=a^2$

70. $x^2+y^2=4, x^2+(y-4)^2=a^2$

71. $x^2+(y-2)^2=4, (x-a)^2+y^2=1$

◪ 다음 두 원이 서로 다른 원의 외부에 있을 때, 양수 a의 값의 범위를 구하여라.

72. $(x+3)^2+(y-2)^2=1,\ (x-1)^2+(y+1)^2=a^2$

73. $x^2+y^2=9, (x-1)^2+(y-3)^2=a^2$

74. $x^2+(y-6)^2=4, (x-6)^2+y^2=a^2$

◪ 다음 두 원이 내접할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

75. $(x-a)^2+y^2=2, x^2+(y-a)^2=32$

76. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$,
$x^2+y^2-8x+6y+25-a^2=0$

77. $x^2+y^2+2x-2y-a=0,\ x^2+y^2-4x+6y-3=0$

정답 및 해설

1) $x^2+y^2-\frac{16}{9}x+\frac{32}{9}y-\frac{41}{9}=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-9+k\{(x-1)^2+(y+2)^2-9\}=0$(단 , $k\neq-1$)⋯㉠
이 원이 점 $(0,1)$을 지나므로
$1-9+k(1+9-9)=0 \quad \therefore k=8$
$k=8$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-9+8\{(x-1)^2+(y+2)^2-9\}=0$
$9x^2+9y^2-16x+32y-41=0$
$\therefore x^2+y^2-\frac{16}{9}x+\frac{32}{9}y-\frac{41}{9}=0$

2) $x^2+y^2-9x-12y-10=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-6x-8y-8)=0$ ⋯⋯㉠
이 원이 점 $(-1,0)$을 지나므로
$1-4+k(1+6-8)=0 \quad \therefore k=-3$
$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$-2x^2-2y^2+18x+24y+20=0$
$\therefore x^2+y^2-9x-12y-10=0$

3) $x^2+y^2-x-y=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-1+k\{(x-1)^2+(y-1)^2-1\}=0$
(단, $k\neq-1$)⋯㉠
이 원이 점 $(1,1)$을 지나므로
$1+1-1+k\cdot(-1)=0$
$1-k=0 \quad \therefore k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-1+(x-1)^2+(y-1)^2-1=0$
$2x^2+2y^2-2x-2y=0$
$\therefore x^2+y^2-x-y=0$

4) $x^2+y^2-6x-12y+32=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-25+k\{(x-1)^2+(y-2)^2-11\}=0$ ⋯⋯㉠
이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$1+9-25+k(1-11)=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$
$k=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$-x^2-y^2+6x+12y-32=0$
$\therefore x^2+y^2-6x-12y+32=0$

5) $x^2+y^2-x+3y-4=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2x+k(x^2+y^2-4x-6y+8)=0$ ⋯㉠
이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1+k(1-6+8)=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{3}$
$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x+3y-4=0$

6) $x^2+y^2+22x-16y+16=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2-8x+2y-5+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0(k\neq-1)$
이라 하면 이 원이 점 $(1,3)$을 지나므로
$3+2k=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-8x+2y-5-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2x-4y+2)=0$
$\therefore x^2+y^2+22x-16y+16=0$

7) $x^2+y^2-y-20=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+6y-12+k(x^2+y^2+4x-8y-28)=0$
⋯⋯㉠
이 원이 점 $(0,5)$를 지나므로
$25+30-12+k(25-40-28)=0 \quad \therefore k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2x^2+2y^2-2y-40=0$
$\therefore x^2+y^2-y-20=0$

8) $x^2+y^2-8x-8y=0$

⇨
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-2)^2-16+k\{(x+2)^2+(y+2)^2-32\}=0$
(단, $k\neq-1$)⋯㉠
이 원이 점 $(0,0)$을 지나므로
$4+4-16+k(4+4-32)=0$
$-8-24k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{3}$
$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면
$(x-2)^2+(y-2)^2-16-\frac{1}{3}\{(x+2)^2+(y+2)^2-32\}=0$
$2x^2+2y^2-16x-16y=0$
$\therefore x^2+y^2-8x-8y=0$

9) $x^2+y^2-4x-4y+3=0$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x+2+k(x^2+y^2-2x-8y+4)=0$
(단, $k\neq-1$)⋯㉠
이 원이 점 $(1,0)$을 지나므로
$1-6+2+k(1-2+4)=0$
$-3+3k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-6x+2+x^2+y^2-2x-8y+4=0$
$2x^2+2y^2-8x-8y+6=0$
$x^2+y^2-4x-4y+3=0$

10) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$
⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2x+k(x^2+y^2-4x-6y+8)=0$
(단, $k\neq-1$)…㉠
이 원이 점 $(0,1)$을 지나므로
$1+k(1-6+8)=0$
$3k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{3}$
$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-2x-\frac{1}{3}(x^2+y^2-4x-6y+8)=0$
$2x^2+2y^2-2x+6y-8=0$
$x^2+y^2-x+3y-4=0$
$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

11) $x^2+y^2-8x+26y-44=0$
⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y+1+k(x^2+y^2+2y-8)=0$……㉠
이 원이 점 $(2,2)$를 지나므로 대입하여 정리하면
$5+4k=0 \quad \therefore k=-\frac{5}{4}$
$k=-\frac{5}{4}$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2+2x-4y+1-\frac{5}{4}(x^2+y^2+2y-8)=0$
$-x^2-y^2+8x-26y+44=0$
$\therefore x^2+y^2-8x+26y-44=0$

12) $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{8}$
⇨ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2x+y-3+k(x^2+y^2+x+2y-1)=0$
(단, $k\neq-1$)…㉠
이 원이 점 $(0,0)$을 지나므로
$-3-k=0 \quad \therefore k=-3$
$k=-3$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-2x+y-3-3(x^2+y^2+x+2y-1)=0$
$-2x^2-2y^2-5x-5y=0$
$x^2+y^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}y=0 \quad \therefore \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{8}$

13) $2x+2y-1=0$
⇨ $x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y)=0$
$\therefore 2x+2y-1=0$

14) $8x-y=0$
⇨ $x^2+y^2+6x+2y-(x^2+y^2-2x+3y)=0$
$\therefore 8x-y=0$

15) $4x-4y-1=0$
⇨ $x^2+y^2+2x-1-(x^2+y^2-2x+4y)=0$
$\therefore 4x-4y-1=0$

16) $6x-10y-13=0$
⇨ 구하는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+4x-3-(x^2+y^2-2x+10y+10)=0$
$\therefore 6x-10y-13=0$

17) $y=-4x+2$
⇨ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+2x-8y-(x^2+y^2-4)=0$
$2x-8y+4=0 \quad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -4이므로
기울기가 -4이고 점 $(1,-2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-(-2)=-4(x-1) \quad \therefore y=-4x+2$

18) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$
⇨ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+x-(x^2+y^2-2x+y)=0$
$3x-y=0 \quad \therefore y=3x$
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로
기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(2,3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-3=-\frac{1}{3}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

19) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
⇨ $x^2+y^2-4=0$의 중심을 O라 하고,
$x^2+y^2-4x+2y+4=0$의 중심을 O′이라 하면,
두 원의 공통현의 양 끝점을 각각 A, B라 하고,
두 원의 공통현과 $\overline{\mathrm{OO'}}$의 교점을 C라 하면,
두 원의 공통현의 방정식은 $4x-2y-8=0$에서
$2x-y-4=0$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$이다.
$\overline{\mathrm{OA}}=2$이고, $\overline{\mathrm{OC}}\perp\overline{\mathrm{OA}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이고
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$이다.

20) $2\sqrt{6}$
⇨ 두 원
$x^2+y^2+2x+2y-22=0$, $x^2+y^2-2x-2y-6=0$
의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라고 하자.

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x+2y-22-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$

$4x+4y-16=0 \quad \therefore x+y-4=0 \ \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2+2x+2y-22=0$,

즉 $(x+1)^2+(y+1)^2=24$의 중심 $\mathrm{O}(-1,-1)$에서 공통현 ㉠까지의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|-1-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

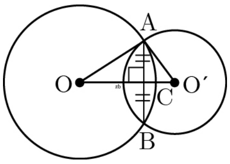
직각삼각형 OAC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{OC}}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{24-18}=\sqrt{6}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{6}$

21) $2\sqrt{5}$

⇨ 다음 그림과 같이



두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2+4x+3y+1=0$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라고 하자. 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2+4x+3y+1)=0$

$\therefore 4x+3y+10=0 \ \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $\mathrm{O}(0,0)$에서 공통현 ㉠까지의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OC}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$

22) $2\sqrt{14}$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$4x-4y=0 \qquad \therefore x-y=0$

원 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 중심 $\mathrm{C}(2,4)$에서 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이때, 두 원의 두 교점을 A, B라 하면 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}=4$이므로 삼각형 CAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{14}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{14}$

23) 8

⇨ 두 원 $x^2+y^2=20$, $x^2-6x+y^2-8y=0$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라고 하자.

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-20-(x^2-6x+y^2-8y)=0$

$6x+8y-20=0 \quad \therefore 3x+4y-10=0 \ \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=20$의 중심 $\mathrm{O}(0,0)$에서 공통현 ㉠까지의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OC}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

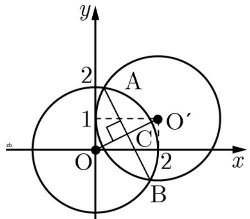
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=2\cdot4=8$

24) $\sqrt{2}$

25) $\sqrt{11}$

⇨

두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-2)^2+(y-1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라고 하자.



두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-4-\{(x-2)^2+(y-1)^2-4\}=0$

$x^2+y^2-4-x^2+4x-4-y^2+2y-1+4=0$

$\therefore 4x+2y-5=0 \ \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $\mathrm{O}(0,0)$에서 공통현 ㉠까지의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

26) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

⇨ 두 원의 공통현 AB의 방정식은

$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y)=0$

$\therefore 2x+2y-1=0$

원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,0)$과 공통현 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|-1|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$

이때, 원 $x^2+y^2=1$의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)^2}=2\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

27) $2\sqrt{6}$

⇨ 두 원의 공통현 AB의 방정식은

$x^2+y^2-10-(x^2+y^2-8x-6y+10)=0$

$8x+6y-20=0$ $\therefore 4x+3y-10=0$

원 O의 중심 $(0,0)$과 공통현 AB 사이의 거리는

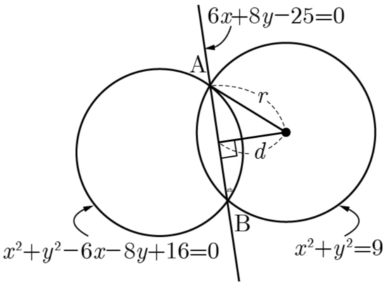
$\dfrac{|-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

원 O의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=2\sqrt{6}$

28) $\sqrt{11}$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $6x+8y-25=0$ 이고 원O와 직선 사이의 거리를 구하면 $\dfrac{|25|}{\sqrt{36+64}}=\dfrac{5}{2}$이다.



그림에서 $r=3$이므로

$\dfrac{\overline{AB}}{2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$, $\overline{AB}=\sqrt{11}$ 이다.

29) 4

⇨ $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ (x-\dfrac{5}{2})^2+(y+6)^2=\dfrac{241}{4} \end{cases}$을 연립하여 풀면

$5x-12y+13=0$이 직선 AB가 된다.

$5x-12y+13=0$과 $(0,0)$ 사이의 거리가

$d=\dfrac{|13|}{\sqrt{25+144}}=1$이고 $(0,0)$과 점 A 사이의 거리는 반지름 $\sqrt{5}$이므로 $\dfrac{1}{2}\overline{AB}=2$이다.

$\therefore \overline{AB}=4$

30) $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

⇨ 두 원의 공통현 AB의 방정식은

$x^2+y^2-2-\{(x-1)^2+(y+2)^2-5\}=0$

$2x-4y-2=0$ $\therefore x-2y-1=0$

원 O의 중심 $(0,0)$과 공통현 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

이때, 원 O의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

31) $2\sqrt{3}$

⇨ 두 원의 공통현 AB의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x+3y+1)=0$

$\therefore 4x-3y-5=0$

원 O의 중심 $(0,0)$과 공통현 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$

이때, 원 O의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$

32) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

33) $\sqrt{2}$

⇨ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$-6x+6y-24=0$ $\therefore x-y+4=0$

원 $x^2+y^2-4x+2y-20=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=25$의 중심 $C(2,\ -1)$에서 직선 $x-y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|2+1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

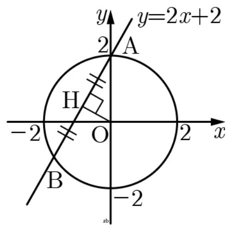
이때, 두 원의 두 교점을 A, B라 하면 $\overline{CA}=\overline{CB}=5$이므로 삼각형 CAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{2}$

34) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 $2x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=2$이므로

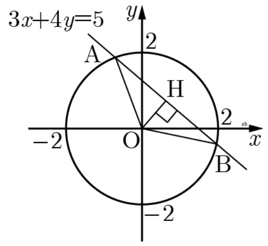
$\overline{AH}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

35) $2\sqrt{3}$

⇨ 다음 그림과 같이

I410-ECN-0199-2017-001-000057208



주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 l, 즉 $3x+4y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OH}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

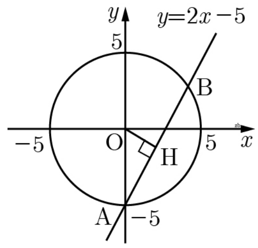
직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=2$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}$

36) $4\sqrt{5}$

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 $2x-y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



원의 중심 $(0,0)$과 직선 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

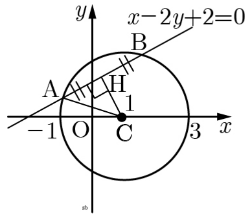
직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{5}$

37) $\dfrac{2\sqrt{55}}{5}$

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $C(1,0)$에서 직선 $x-2y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|1-0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

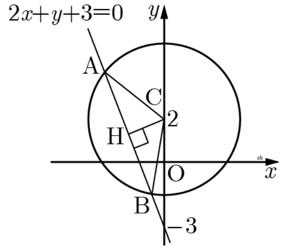
직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=2$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{11}{5}}=\dfrac{\sqrt{55}}{5}$

따라서 구하는 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=\dfrac{2\sqrt{55}}{5}$

38) $2\sqrt{7}$

⇨ 다음 그림과 같이



주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고,
원의 중심 $C(0,2)$에서 직선 $2x+y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

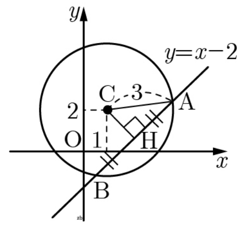
직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt{7}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{7}$

39) $3\sqrt{2}$

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $C(1,2)$에서 직선 $x-y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|1-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

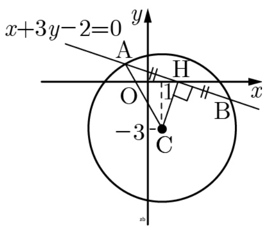
직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=3$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=3\sqrt{2}$

40) $2\sqrt{15}$

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $C(1,-3)$에서 직선 $x+3y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|1-9-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

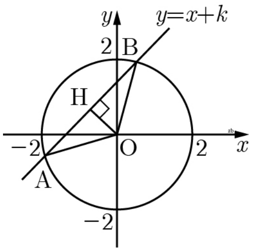
직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$

따라서 구하는 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{15}$

41) 2

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{d}{2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=2$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$ ……㉠

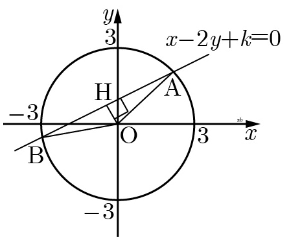
원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $|k|=2$ $\therefore k=2(\because k>0)$

42) 5

⇨ 다음 그림과 같이



주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OA}=3$, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

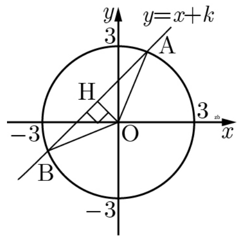
즉, 원점과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$, $|k|=5$

$k>0$ 이므로 $k=5$

43) $\sqrt{2}$

⇨ 다음 그림과 같이



주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OA}=3$, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$

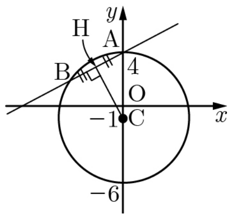
즉, 원점과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{2}$

44) $\frac{3}{4}$

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $C(0,-1)$에서 직선 $y=kx+4$, 즉 $kx-y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{d}{2}=3$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=5$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$ ……㉠

점 $C(0,-1)$과 직선 $kx-y+4=0$사이의 거리는

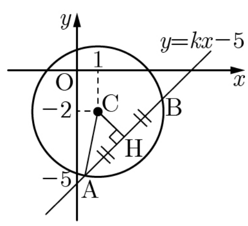
$\overline{CH}=\frac{|0+1+4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}=4$, $16(k^2+1)=25$

$k^2=\frac{9}{16}$ $\therefore k=\frac{3}{4}(\because k>0)$

45) 1

⇨ 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $C(1,-2)$에서 직선 $y=kx-5$, 즉 $kx-y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{d}{2}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=2\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$ ……㉠

점 $C(1,-2)$과 직선 $kx-y-5=0$사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|k+2-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$

$2(k^2+1)=(k-3)^2, k^2+6k-7=0$

$(k-1)(k+7)=0 \quad \therefore k=1(\because k>0)$

46) $\sqrt{6}$

⇨ 원의 중심을 C라고 하면 $C(0,0)$

$\overline{CA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

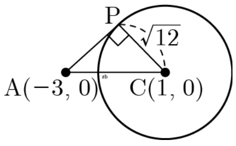
$\overline{CP}$는 원의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{CP}=2$

삼각형 CAP는 $\overline{CA}$가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$

47) 2

⇨ 다음 그림에서



$\overline{CA}=\sqrt{(-3-1)^2+(0-0)^2}=4$

직각삼각형 CAP에서 $\overline{CP}=\sqrt{12}$ 이므로

$\overline{AP}=\sqrt{4^2-(\sqrt{12})^2}=2$

48) 3

⇨ 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=8$의 중심을 C라 하면 $C(2,1)$

$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{CP}$는 원의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{CP}=2\sqrt{2}$

삼각형 CAP는 $\overline{CA}$가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{2})^2}=3$

49) $\sqrt{11}$

⇨ 원의 중심을 C라고 하면 $C(1,2)$이므로

$\overline{CA}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$

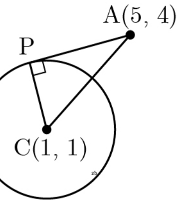
$\overline{CP}=3$

삼각형 CAP는 $\overline{CA}$가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$

50) 4

⇨ 다음 그림에서



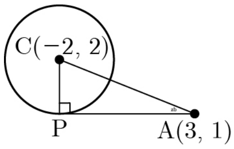
$\overline{CA}=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$

직각삼각형 CAP에서 $\overline{CP}=3$이므로

$\overline{PA}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

51) 5

⇨ 다음 그림에서



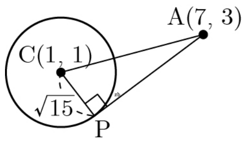
$\overline{CA}=\sqrt{(3+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$

직각삼각형 CAP에서 $\overline{CP}=1$이므로

$\overline{PA}=\sqrt{(\sqrt{26})^2-1^2}=5$

52) 5

⇨ 다음 그림에서



$\overline{CA}=\sqrt{(7-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{40}$

직각삼각형 CAP에서 $\overline{CP}=\sqrt{15}$ 이므로

$\overline{AP}=\sqrt{(\sqrt{40})^2-(\sqrt{15})^2}=5$

53) 5

⇨ $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

원의 중심을 C라고 하면 $C(1,-2)$

$\overline{CA}=\sqrt{(1+2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$

$\overline{CP}$는 원의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{CP}=3$

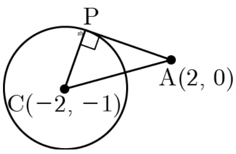
삼각형 CAP는 $\overline{CA}$가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5$

54) $\sqrt{13}$

⇨ $x^2+y^2+4x+2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

다음 그림에서

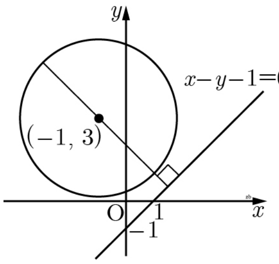


$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{17}$

직각삼각형 CAP에서 $\overline{CP}=2$이므로

$\overline{PA}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-2^2}=\sqrt{13}$

55) 최댓값: $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$, 최솟값: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ 

$x^2+y^2+2x-6y+2=0$에서 $(x+1)^2+(y-3)^2=8$

원의 중심 $(-1,3)$에서 직선 $x-y-1=0$에 이르는 거리는

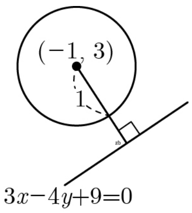
$\dfrac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

(최솟값)$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

56) 최댓값: $\dfrac{11}{5}$, 최솟값: $\dfrac{1}{5}$

⇨ 

$x^2+y^2+2x-6y+9=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=1$

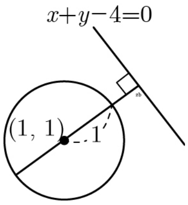
원의 중심 $(-1,3)$과 직선 $3x-4y+9=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3-12+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{6}{5}$

이때, 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $\dfrac{6}{5}+1=\dfrac{11}{5}$,

최솟값은 $\dfrac{6}{5}-1=\dfrac{1}{5}$

57) 최댓값: $\sqrt{2}+1$, 최솟값: $\sqrt{2}-1$

⇨ 

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

원의 중심 $(1,1)$과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이때, 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $\sqrt{2}+1$, 최솟값은 $\sqrt{2}-1$

58) 최댓값: $\dfrac{18}{5}$, 최솟값: $\dfrac{8}{5}$

⇨ $x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서

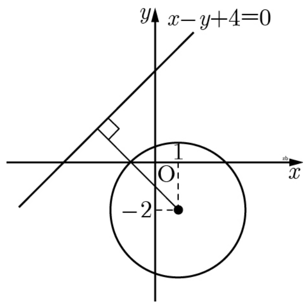
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

원의 중심 $(1,1)$과 직선 $3x-4y-12=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3-4-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{13}{5}$

이때, 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $\dfrac{13}{5}+1=\dfrac{18}{5}$, 최솟값은 $\dfrac{13}{5}-1=\dfrac{8}{5}$

59) 최댓값: $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$, 최솟값: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

⇨ 

$x^2+y^2-2x+4y-3=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$

원의 중심 $(1,-2)$에서 직선 $y=x+4$, $x-y+4=0$에 이르는 거리는

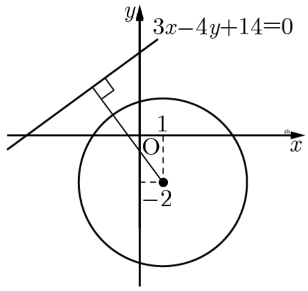
$\dfrac{|1+2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$

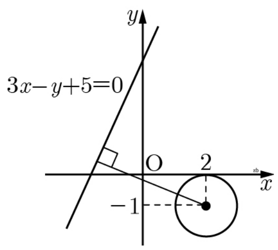
(최솟값)$=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

60) 최댓값: 9, 최솟값: 1

⇨ 

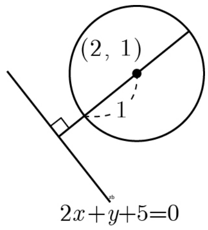
$x^2+y^2-2x+4y-11=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$
원의 중심 $(1, -2)$에서 직선 $3x-4y+14=0$에 이르는 거리는
$\dfrac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{25}{5}=5$
원의 반지름의 길이는 4이므로 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은
(최댓값)$=5+4=9$
(최솟값)$=5-4=1$

61) 최댓값: $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}+1$, 최솟값: $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}-1$

⇨ 

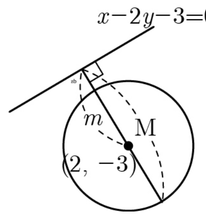
$x^2+y^2-4x+2y+4=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
원의 중심 $(2,-1)$에서 직선 $3x-y+5=0$에 이르는 거리는
$\dfrac{|6+1+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$
이고 원의 반지름의 길이는 1이므로 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은
(최댓값)$=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}+1$
(최솟값)$=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}-1$

62) 최댓값: $2\sqrt{5}+1$, 최솟값: $2\sqrt{5}-1$
⇨ $x^2+y^2-4x-2y+4=0$에서



$(x-2)^2+(y-1)^2=1$
원의 중심 $(2,1)$과 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|4+1+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$
이때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의
최댓값은 $2\sqrt{5}+1$, 최솟값은 $2\sqrt{5}-1$

63) 최댓값: $\sqrt{5}+2$, 최솟값: $\sqrt{5}-2$

⇨ 

$x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=4$
원의 중심 $(2, -3)$과 직선 $x-2y-3=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2+6-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
이때, 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $\sqrt{5}+2$, 최솟값은 $\sqrt{5}-2$이다.

64) 최댓값: $6\sqrt{2}+6$, 최솟값: $6\sqrt{2}-6$
⇨ $x^2+y^2-10x+8y+5=0$에서
$(x-5)^2+(y+4)^2=36$
원의 중심 $(5, -4)$와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|5+4+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$
이때, 원의 반지름의 길이가 6이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $6\sqrt{2}+6$, 최솟값은 $6\sqrt{2}-6$

65) 1
⇨ $x^2+y^2+2x-2y+a=0$에서
$(x+1)^2+(y-1)^2=2-a$
$x^2+y^2-4x+6y-3=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$
두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1,1), (2,-3)$이므로 중심거리는
$\sqrt{(2+1)^2+(-3-1)^2}=5$
두 원의 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{2-a}$, 4이므로 두 원이 외접하려면
$5=\sqrt{2-a}+4$
정리한 후 제곱하여 a의 값을 구하면 $a=1$

66) $\dfrac{1}{2}$
⇨ $x^2+y^2+2ax+2y+1=0$에서
$(x+a)^2+(y+1)^2=a^2$
주어진 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(1, -3), (-a, -1)$이므로 중심거리는
$\sqrt{(-a-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{a^2+2a+5}$
두 원의 반지름의 길이는 각각 $2, a$이므로
두 원이 외접하려면
$\sqrt{a^2+2a+5}=2+a$
양변을 제곱하면 $a^2+2a+5=a^2+4a+4$

$2a=1\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

67) $\sqrt{2}-1$

⇨ $x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(0,0),(1,1)$이므로 중심 거리는

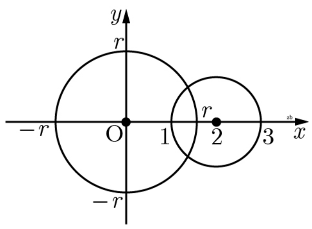
$\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

두 원의 반지름의 길이는 각각 $a,1$이므로

두 원이 외접하려면

$\sqrt{2}=a+1\quad \therefore a=\sqrt{2}-1$

68) $1<a<3$

⇨ 

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,0),(2,0)$이므로 두 원의 중심거리는 2이다.

두 원의 반지름의 길이가 각각 $a,1$이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

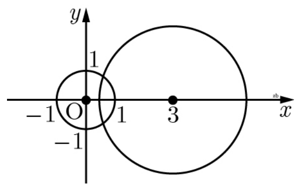
$a-1<2<a+1$

$a-1<2$에서 $a<3$, $2<a+1$에서 $a>1$

$\therefore 1<a<3$

69) $2<a<4$

⇨ 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같아야 하므로



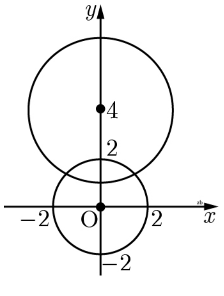
$a-1<3<a+1$

$a-1<3$에서 $a<4$, $3<a+1$에서 $a>2$

$\therefore 2<a<4$

70) $2<a<6$

⇨ 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같아야 하므로

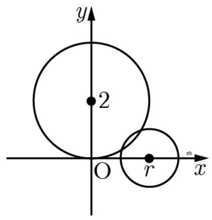


$a-2<4<a+2$

$a-2<4$에서 $a<6$, $4<a+2$에서 $a>2$

$\therefore 2<a<6$

71) $0<a<\sqrt{5}$

⇨ 

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,2),(a,0)$이고 반지름의 길이가 각각 $2,1$이다.

두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$1<\sqrt{a^2+4}<3$

$1<a^2+4<9$, $0<a^2<5$

$\therefore 0<a<\sqrt{5}\,(\because a>0)$

72) $0<a<4$

⇨ 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-3,2),(1,-1)$이므로

두 원의 중심거리는

$\sqrt{(1+3)^2+(-1-2)^2}=5$

또, 두 원의 반지름의 길이가 각각 $1,a$이므로

두 원이 서로 다른 원의 외부에 있으려면

$a+1<5\quad \therefore 0<a<4\,(\because a>0)$

73) $0<a<\sqrt{10}-3$

⇨ 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,0),(1,3)$이므로

두 원의 중심거리는 $\sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

또, 두 원의 반지름의 길이가 각각 $3,a$이므로

두 원이 서로 다른 원의 외부에 있으려면

$3+a<\sqrt{10}\quad \therefore 0<a<\sqrt{10}-3\,(\because a>0)$

74) $0<a<6\sqrt{2}-2$

⇨ 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,6),(6,0)$이므로

두 원의 중심거리는 $\sqrt{(6-0)^2+(0-6)^2}=6\sqrt{2}$

또, 두 원의 반지름의 길이가 각각 $2,a$이므로

두 원이 서로 다른 원의 외부에 있으려면

$2+a<6\sqrt{2}\quad \therefore 0<a<6\sqrt{2}-2\,(\because a>0)$

75) 3

⇨ 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(a,0),(0,a)$이므로 중심거리는 $\sqrt{(-a)^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$

두 원의 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$이므로

원 $(x-a)^2+y^2=2$가 원 $x^2+(y-a)^2=32$에 내접해야 한다.

즉, $\sqrt{2a^2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}$이어야 하므로

정리한 후 제곱하여 a의 값을 구하면 $a=3\,(\because a>0)$

76) 6

⇨ $x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$x^2+y^2-8x+6y+25-a^2=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=a^2$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(1,1),(4,-3)$이므로 중심거리는

$\sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2}=5$

두 원의 반지름의 길이는 각각 $1, a$이므로 두 원이 내접하려면

$5=|1-a|$, $1-a=\pm 5$

$\therefore a=6(\because a>0)$

77) 79

⇨ $x^2+y^2+2x-2y-a=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=a+2$

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-1,1),(2,-3)$이므로 중심거리는 $\sqrt{(2+1)^2+(-3-1)^2}=5$

두 원의 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{a+2}\,, 4$이므로

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$이

원 $(x+1)^2+(y-1)^2=a+2$에 내접해야 한다.

즉, $5=\sqrt{a+2}-4$이므로

$\sqrt{a+2}=9$, $a+2=81$ $\therefore a=79$