

교과서 변형문제 기본

1-1-3.인수분해 신사고(고성은)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

- 1) 제작연월일: 2020-03-05
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[인수분해]

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱의 꼴로 나타내는 것

- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$, $a^3 3a^2b + 3ab^2 b^3 = (a-b)^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 ab + b^2)$ $a^3 b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 ab + b^2)$
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$
- $a^3 + b^3 + c^3 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

[치환을 이용한 인수분해]

- (1) 공통부분이 있는 경우 치환하여 인수분해 한다.
- (2) 공통부분이 드러나지 않는 복잡한 식의 경우에는 식을 변형하여 공통부분을 찾아 낸다

[고차식의 인수분해]

문자가 한 개이면서 삼차 이상인 다항식 f(x)를 인수분해 할 때는 인수정리와 조립제법을 이용한다.

- ① $f(\alpha) = 0$ 을 만족하는 상수 α 를 찾는다.
- ② 조립제법을 이용하여 .f(x)를 $x-\alpha$ 로 나누었을 때의 몫 Q(x)를 구하여 $f(x) = (x - \alpha)Q(x)$ 꼴로 나타낸다.
- Q(x)가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해공식을 이용하거나 ●, ❷의 과정을 반복한다.

기본문제

[예제]

1. 다음 중 옳은 것은?

- ① $x^2 + 5xy + 4y^2 = (x y)(x 4y)$
- ② $x^3 + 64y^3 = (x+4y)(x^2 4xy + 16y^2)$
- (3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a b + c)^2$
- (4) $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = (a-b)^3$
- (5) $3x^2y + 3xy^2 + x + y = (3xy 1)(x + y)$

[문제]

2. 인수분해 옳지 않은 것은?

①
$$x^3 - y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

②
$$x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$3)$$
 $4x^4 - y^2 = (2x^2 + y)(2x^2 - y)$

$$4 \cdot x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$$

$$x^4 - 10x^2 + 16 = (x^2 - 2)(x^2 - 8)$$

[예제]

3. (x+y+1)(x+y+5)+4를 인수분해했을 때, 옳은 식은?

- ① $(x+y+1)^2$
- $(2) (x+y+2)^2$
- $(3) (x+y+3)^2$
- $(4) (x+y+4)^2$
- $(x+y+5)^2$

[문제]

4. 최고차항 계수가 10 f(x)에 대해서 다음 식 $(x^2-x)(x^2-x+4)+4=[f(x)]^2$ 성립할 때, f(1)의 값은?

① 1

2 2

③ 3

4

⑤ 5

[예제]

5. 다항식 $x^4 - 6x^2 + 8$ 을 인수분해하면?

- ① $(x^2+4)(x^2-2)$
- ② $(x+2)(x-2)(x^2-2)$
- $(3) (x^4-4)(x^2-2)$
- (4) $(x+2)(x-2)(x^2+2)$
- (5) $(x^2+4)(x^2+2)$

[문제]

6. 다항식 x^4-1 의 인수가 아닌 것은?

- ① x-1
- ② x+1
- $3x^2+1$
- (4) $x^3 + x^2 + x + 1$
- (5) $x^2 + x + 1$

[예제]

7. 다항식 $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ 를 인수분해하면?

- ① $(x^2-1)(x^2+3x-1)$
- $(x^2+1)(x^2+3x-1)$
- $(x+2)(x-1)(x^2+3x-1)$
- $(x+1)(x-2)(x^2+3x-1)$
- (5) $(x+1)(x-1)(x^2+3x-1)$

[문제]

8. 다항식 $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 33x - 10$ 을 인수분해하면?

- ① (x+1)(3x-2)(x+5) ② (x+1)(3x+2)(x-5)
- (3x+1)(x-2)(x+5) (3x+1)(x+2)(x-5)
- (5) (x+1)(x+2)(3x-5)

평가문제

[중단원 마무리]

9. 다음 중 옳지 않은 것은?

①
$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

- ② $x^4 + 7x^2 + 12 = (x^2 + 3)(x^2 + 4)$
- (a+b+4)(a+b+2)-3=(a+b+1)(a+b+5)
- (4) $x^2 + (2k+4)x + k(k+4) = (x+k)(x+k+4)$
- (5) $x^6 1 = (x+1)(x^2 x + 1)(x^3 + 1)$

[중단원 마무리]

10. 다항식 $(x-1)^2+4(x-1)+3$ 을 인수분해하면?

- ① (x-1)(x-3)
- ② x(x-2)
- (3)(x+1)(x+2)
- 4 x(x+2)
- (5) (x+1)(x+3)

[중단원 마무리]

11. (x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+a가 완전제곱식이 되게 하는 a의 값은?

- ① 24
- 25
- ③ 26
- (4) 27
- ⑤ 28

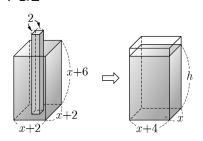
[중단원 마무리]

12. 다항식 $2x^2+y^2-3xy+3x-y-2$ 를 인수분해하면?

- ① (2x-y+2)(x-y-1) ② (2x-y+1)(x-y-2)
- (3)(2x-y-2)(x-y+1) (4)(2x-y-1)(x-y+2)
- (5) (2x+y-1)(x+y+2)

[중단원 마무리]

13. 다음 [그림 1]과 같이 물이 가득 담긴 직육면체 모양의 그릇에 직육면체 모양의 막대를 밑면과 맞닿 게 수직으로 넣었다. 이때 남아 있는 물을 [그림 2] 와 같은 직육면체 모양의 그릇에 옮겨 담았을 때, 수면의 높이가 x에 관한 식 f(x)이라고 할 때, f(2)의 값은?



1 2

2 4

3 6

- **(4)** 8
- (5) 10

[대단원 마무리]

14. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

①
$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

②
$$a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a - 2b)^3$$

$$3 x^3 - 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$(3) x^2 - 12x + 35 = (x-7)(x-5)$$

(5)
$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

[대단원 마무리]

- **15.** 다항식 (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+a가 x에 대한 이차식의 완전제곱의 꼴로 인수분해 되도록 하는 상수 a의 값은?
 - ① 1

- ② 2
- ③ 3
- (4) 4
- **(5)** 5

- [대단원 마무리]
- **16.** 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가

$$a^3 - b^3 = a^2b - ab^2 + ac^2 - bc^2$$

을 만족시킬 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가? (단, $a \neq b$)

- ① a = c인 이등변삼각형
- ② b = c인 이등변삼각형
- ③ 정삼각형
- ④ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
- (5) 빗변의 길이가 (c) 직각삼각형

유사문제

17. $x^4 + 2x^2 + 9$ 를 인수분해한 식은?

①
$$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

$$(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$$

$$(3)(x+1)(x-3)(x^2+3x-2)$$

$$(x-1)(x+3)(x^2+3x-2)$$

$$(5)$$
 $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

18. 다음 중 다항식을 바르게 인수분해한 것은?

①
$$x^2 + 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

$$3x^4-10x^2-8=(3x^2-2)(x-2)(x+2)$$

$$4 12x^2 - 7xy - 12y^2 = (3x - 4y)(4x + 3y)$$

(5)
$$4x^2 - 25 = (4x - 5)(x + 5)$$

- **19.** 다항식 x^3-4x^2+ax-5 를 인수분해하면 $(x-1)(x^2+bx+5)$ 일 때, a+b의 값은? (단, a,b는 상수이다.)
 - 1 1

2 2

- ③ 3
- **(4)** 4
- ⑤ 5
- **20.** 다항식 $(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$ 이 (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)로 인수분해될 때, a+b+c+d의 값은? (단, a,b,c,d는 상수)
 - 8

② 5

33

- $\bigcirc 4 2$
- (5) 6
- **21.** $98^3 + 6 \times 98^2 + 12 \times 98 + 89$ 값은?
 - 100
- ② 1000
- ③ 10000
- ④ 100000
- (5) 1000000
- **22.** $\frac{2018^3-8}{2018\times2020+4} + \frac{2018^3+8}{2018\times2016+4}$ 의 값은?
 - ① 1009
- 2020
- 3 2022
- **4** 3027
- ⑤ 4036

4

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] ①
$$x^2 + 5xy + 4y^2 = (x+y)(x+4y)$$

$$3 a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$$

$$\textcircled{4}$$
 $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = (a+b)^3$

$$(5) 3x^2y + 3xy^2 + x + y = (3xy + 1)(x + y)$$

2) [정답] ①

[해설] ①
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

3) [정답] ③

[해설]
$$(x+y+1)(x+y+5)+4$$
에서 $x+y=t$ 라 하면
$$(t+1)(t+5)+4=t^2+6t+9=(t+3)^2$$

$$= (x+y+3)^2$$

4) [정답] ②

[해설]
$$(x^2-x)(x^2-x+4)+4$$
에서 $x^2-x=t$ 라 하면
$$t(t+4)+4=(t+2)^2=(x^2-x+2)^2$$
 그러므로 $f(x)=x^2-x+2$ 따라서 $f(1)=2$

5) [정답] ②

[해설]
$$x^4-6x^2+8$$
에서 $x^2=t$ 라 하면
$$t^2-6t+8=(t-4)(t-2)$$
$$=(x^2-4)(x^2-2)=(x+2)(x-2)(x^2-2)$$

6) [정답] ⑤

[해설]
$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

= $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
= $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

7) [정답] ⑤

[해설]
$$P(x)$$
의 상수항이 1이므로 $P(a) = 0$ 인 정수 a 는 ± 1 중의 하나이다.

이 값 중에서
$$x=1$$
을 $P(x)$ 에 대입하면

$$P(1) = 1 + 3 - 2 - 3 + 1 = 0$$
이므로 $x - 1$ 은 $P(x)$ 의 인수이고,

x = -1을 P(x)에 대입하면

$$P(-1) = 1 - 3 - 2 + 3 + 1 = 0$$
이므로 $x + 1$ 은 $P(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해 하면

$$x^4 + 3x^2 - 2x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x-1)(x^2 + 3x - 1)$$

8) [정답] ④

[해설]
$$P(x)$$
의 상수항이 -10 이므로 $P(a)=0$ 인 정수 a 는 $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ 중의 하나이다.

이 값 중에서
$$x = -2$$
을 $P(x)$ 에 대입하면

$$P(-2) = -24 - 32 + 66 - 10 = 0$$
이므로

$$x+2$$
은 $P(x)$ 의 인수이고,

$$x=5$$
을 $P(x)$ 에 대입하면

$$P(5) = 375 - 200 - 165 - 10 = 0$$
이므로

$$x-5$$
은 $P(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해 하면

$$3x^3 - 8x^2 - 33x - 10 = (3x+1)(x+2)(x-5)$$

9) [정답] ⑤

[해설] ⑤
$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

= $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$

10) [정답] ④

[해설]
$$(x-1)^2+4(x-1)+3$$
에서 $x-1=t$ 라 하면
$$t^2+4t+3=(t+1)(t+3)$$
$$(x-1+1)(x-1+3)=x(x+2)$$

11) [정답] ②

[해설]
$$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4) + a$$

 $= (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + a$
 $= (x^2+x-2)(x^2+x-12) + a$
 $x^2+x=t$ 라 하면
 $(t-2)(t-12) + a$
 $= t^2 - 14t + 24 + a = (t-7)^2 + a - 25$
따라서 $a = 25$

12) [정답] ④

[해설] 다항식
$$2x^2+y^2-3xy+3x-y-2$$
를 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
$$2x^2+(-3y+3)x+y^2-y-2$$
이고
$$2x^2+(-3y+3)x+y^2-y-2$$
$$=2x^2+(-3y+3)x+(y-2)(y+1)$$
$$=\{2x-(y+1)\}\{x-(y-2)\}$$
$$=(2x-y-1)(x-y+2)$$

13) [정답] ④

[해설]
$$(x+2)^2(x+6) - 2^2 \times (x+6)$$

= $(x^2+4x)(x+6) = x(x+4)(x+6)$
따라서 높이는 $f(x) = x+6$ 이므로 $f(2) = 8$

14) [정답] ③

[해설] ③
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$$

15) [정답] ④

[해설]
$$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+a$$

= $(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)+a$
= $(x^2+x-2)(x^2+x-6)+a$
 $x^2+x=t$ 라 하면
 $(t-2)(t-6)+a=t^2-8t+12+a=(t-4)^2+a-4$
따라서 $a=4$

16) [정답] ⑤

[해설]
$$a^3 - b^3 = a^2b - ab^2 + ac^2 - bc^2$$
 $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = ab(a-b) + c^2(a-b)$ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (ab + c^2)(a-b)$ $a \neq b$ 이므로 $a^2 + ab + b^2 = ab + c^2$ $a^2 + b^2 = c^2$ 피타고라스 정리에 따라 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

17) [정답] ①

[해설]
$$x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2 - 4x^2$$

= $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$

18) [정답] ④

[해설] ①
$$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$$

②
$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

③
$$3x^4 - 10x^2 - 8 = (x^2 - 4)(3x^2 + 2)$$

= $(x - 2)(x + 2)(3x^2 + 2)$

(5)
$$4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x-5)(2x+5)$$

19) [정답] ⑤

[해설]
$$x^3-4x^2+ax-5=(x-1)(x^2+bx+5)$$
 $x=1$ 을 대입하면 $1-4+a-5=0$ ∴ $a=8$ 조립제법을 이용하면

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 5 = (x - 1)(x^2 - 3x + 5)$$
 $\therefore b = -3$
 $\therefore a + b = 5$

20) [정답] ①

[해설]
$$(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15=t^2-2t-15$$

= $(t-5)(t+3)=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)$
= $(x-5)(x+1)(x-1)(x-3)$
 $\therefore a+b+c+d=5-1+1+3=8$

21) [정답] ⑤

(준식) =
$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$$

= $(98+2)^3 = 1000000$

22) [정답] ⑤

[해설] 2018 = x라 하면

(준시)
$$= \frac{x^3 - 8}{x(x+2) + 4} + \frac{x^3 + 8}{x(x-2) + 4}$$
$$= \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} + \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4}$$
$$= x - 2 + x + 2 = 2x = 4036$$

