01 역함수의 성질

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (단, I는 항등함수)

(3) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

◪ **두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=x+1$에 대하여 다음 식을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.**

1. $(f\circ g^{-1})(a)=5$

2. $(g\circ f^{-1})(a)=2$

3. $(g\circ f^{-1})(a)=-1$

4. $(f\circ g^{-1})(a)=1$

◪ **두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음을 만족하는 함수 $h(x)$를 구하여라.**

5. $f(x)=4x+1$, $g(x)=2x-3$

$(f\circ h^{-1}\circ g^{-1})(x)=x$

6. $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=x+2$

$((h\circ g)\circ f)(x)=2x+1$

7. $f(x)=2x$, $g(x)=x+1$

$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ h)(x)=f(x)$

◪ **두 함수 $f(x)=ax-2$, $g(x)=\frac{1}{2}x+b$에 대하여 $(f\circ g)(x)=x+6$일 때, 다음을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)**

8. $a+b$의 값

9. $f^{-1}(g(0))$의 값

10. $g^{-1}(f(1))$의 값

◪ **두 함수 $f(x)=x+a$, $g(x)=-bx+4$에 대하여 $(f\circ g)(x)=-x+1$일 때, 다음을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)**

11. $a+b$의 값

12. $g^{-1}(f(3))$의 값

13. $f^{-1}(g(1))$의 값

◪ 두 함수 $f(x)=x-1,\ g(x)=2x-3$에 대하여 다음 식을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

14. $(g \circ f^{-1})(a)=3$

15. $(f \circ g^{-1})(a)=-3$

16. $(g \circ f^{-1})(a)=5$

◪ 두 함수 $f(x)=3x+1,\ g(x)=-x+2$에 대하여 다음 식을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라. (단, $f^{-1},\ g^{-1}$는 각각 $f,\ g$의 역함수이다.)

17. $(f \circ g^{-1})(a)=4$

18. $(f \circ g^{-1})(a)=1$

19. $(g \circ f^{-1})(a)=-2$

◪ 두 함수 $f(x)=2x-3,\ (g \circ f)(x)=x$에 대하여 다음의 값을 구하여라.

20. $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1)$

21. $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(1)$

22. $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(3)$

23. $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3)$

◪ 일대일 대응인 두 함수 $f,\ g$에 대하여 $f(x)=2x-1,\ (g \circ f)(x)=x$일 때, 다음을 구하여라.

24. $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$의 값

25. $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(2)$의 값

26. $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(-1)$의 값

27. $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(-1)$의 값

28. $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(1)$의 값

◪ 다음 두 함수에 대하여 주어진 합성함수의 함숫값을 구하여라. (단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g의 역함수이다.)

29. $f(x)=2x-1$, $g(x)=-x+3$일 때, $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(1)$의 값

30. $f(x)=2x+1$, $g(x)=x-3$일 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$의 값

31. $f(x)=x^2+1 \ (x \geq 0)$, $g(x)=x+3$일 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$의 값

32. $f(x)=x^2+1 \ (x \geq 0)$, $g(x)=2x-3$일 때, $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(3)$의 값

◪ 두 함수 f, g에 대하여 다음을 구하여라. (단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g의 역함수이다.)

33. $f(x)=2x+3$, $g(x)=-x+1$일 때, $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(1)$의 값

34. $f(x)=2x-3$, $(g \circ f)(x)=x$일 때, $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$의 값

◪ 다음 물음에 답하여라.

35. 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2+1(x \geq 0)$에 대하여 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(1)$의 값을 구하여라.

36. 세 함수
$$f(x)=2x+1,\ g(x)=3x-2,\ h(2x-1)=4x-3$$
에 대하여 $(f \circ g)^{-1}(3)+h(3)$의 값을 구하여라.

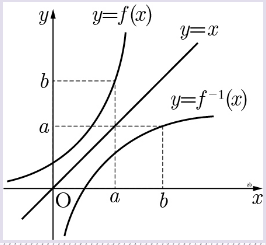
37. 두 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=x^2 \ (x>0)$에 대하여 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(a)=3$을 만족시키는 양수 a의 값을 구하여라.

38. 두 함수 $f(x)=-2x$, $g(x)=x+2$에 대하여 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

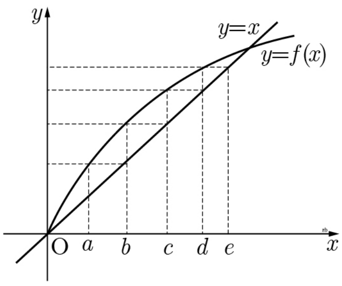
39. 일대일 대응인 두 함수 f, g에 대하여 $g(x)=3x-2$, $(g \circ f)(x)=x$일 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

02 역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



◪ 다음은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. 다음을 구하여라.



40. $(f \circ f)(a)$의 값

41. $f^{-1}(b)$의 값

42. $(f^{-1} \circ f^{-1})(d)$의 값

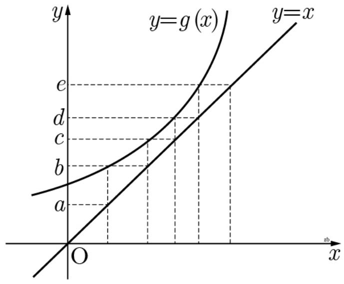
43. $(f \circ f)^{-1}(e)$의 값

44. $(f^{-1} \circ f^{-1})(c)$의 값

45. $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(d)$의 값

46. $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(e)$의 값

◪ 다음 그림은 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. 이때, 다음을 구하여라.



47. $(g \circ g)(a)$의 값

48. $(f \circ g \circ f)(c)$의 값

49. $(f \circ f \circ g)(d)$의 값

50. $(f \circ f)(c)$의 값

51. $(g \circ f \circ f)(e)$의 값

◪ 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

52. $f(x)=\frac{1}{3}x-3$

53. $f(x)=2x+1$

54. $f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

55. $f(x)=-2x+6$

◪ 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 P를 지나고 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 Q를 지날 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

56. $\mathrm{P}(1,\ 2)$, $\mathrm{Q}(-4,\ -1)$

57. $\mathrm{P}(-2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(3,\ 4)$

58. $\mathrm{P}(-1,\ 4)$, $\mathrm{Q}(-2,\ 2)$

◪ 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 P, Q를 지날 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

59. $\mathrm{P}(1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(3,\ 1)$

60. $\mathrm{P}(-2,\ 3)$, $\mathrm{Q}(4,\ -1)$

61. $\mathrm{P}\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 1)$

62. $\mathrm{P}(-2,\ 2)$, $\mathrm{Q}(2,\ 4)$

◪ 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

63. $f(x)=\frac{1}{2}x+3$

64. $f(x)=3x-5$

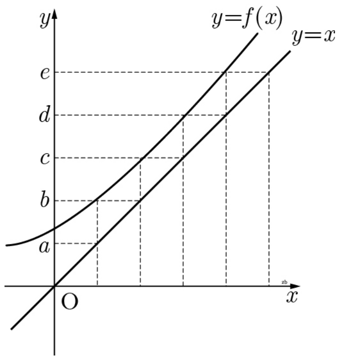
65. $f(x)=-2x+1$

66. $f(x)=x^2-4x\ \ (x\geq 2)$

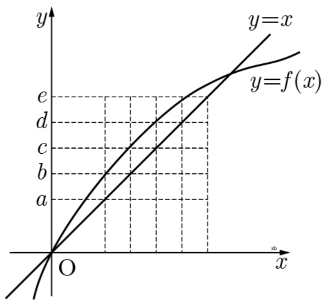
67. $f(x)=x^2+2x-12\ (x\geq -1)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

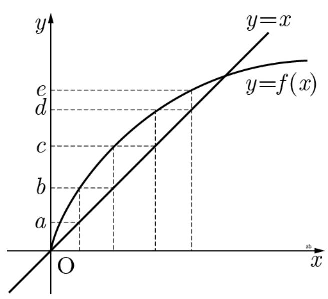
68. 함수 $y=f(x)$와 그래프와 직선 $y=x$가 다음과 같을 때, $(f\circ f)^{-1}(d)$를 구하여라.



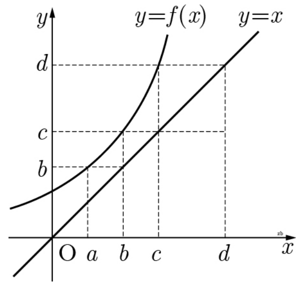
69. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 다음과 같을 때, $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)$를 구하여라.



70. 함수 g가 함수 f의 역함수이고, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프가 다음과 같을 때, $(g\circ g)(c)$를 구하여라.



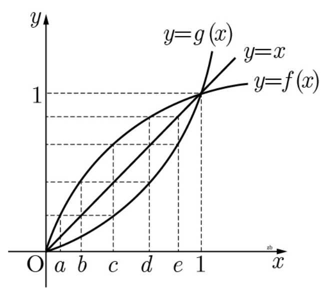
71. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 다음과 같을 때, $f(f(a))$와 $(f\circ f)^{-1}(d)$를 각각 구하여라.



72. 함수 $f(x)=x^2-2x+2\ (x\geq 1)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하여라.

73. 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(-2,\ -4)$를 지나고, $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $\mathrm{Q}(5,\ 1)$을 지날 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

74. 다음은 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. $(f^{-1}\circ g)(d)$의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) 2

⇨ $g^{-1}(a)=k$라고 하면 $g(k)=a$

$k+1=a \quad \therefore k=a-1$

$(f \circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=f(a-1)$

$=3(a-1)+2=3a-1$

$3a-1=5$에서 $a=2$

2) 5

⇨ $f^{-1}(a)=k$라고 하면 $f(k)=a$

$3k+2=a,\ 3k=a-2$

$\therefore k=\dfrac{a-2}{3}$

$(g \circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g\left(\dfrac{a-2}{3}\right)$

$=\dfrac{a-2}{3}+1=\dfrac{a+1}{3}$

$\dfrac{a+1}{3}=2$에서 $a=5$

3) -4

⇨ $f^{-1}(a)=k$라고 하면 $f(k)=a$

$3k+2=a,\ 3k=a-2$

$\therefore k=\dfrac{a-2}{3}$

$(g \circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g\left(\dfrac{a-2}{3}\right)$

$=\dfrac{a-2}{3}+1=\dfrac{a+1}{3}$

$\dfrac{a+1}{3}=-1$에서 $a=-4$

4) $\dfrac{2}{3}$

⇨ $g^{-1}(a)=k$라고 하면 $g(k)=a$

$k+1=a \quad \therefore k=a-1$

$(f \circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=f(a-1)$

$=3(a-1)+2=3a-1$

$3a-1=1$에서 $a=\dfrac{2}{3}$

5) $h(x)=2x+2$

⇨ $(f \circ h^{-1} \circ g^{-1})(x)=x$에서

$(g \circ h)^{-1}(x)=f^{-1}(x)$

$(g \circ h)(x)=f(x),\ g(h(x))=4x+1$

$2h(x)-3=4x+1,\ 2h(x)=4x+4$

$\therefore h(x)=2x+2$

6) $h(x)=2x+5$

⇨ $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)=x+2$에서

$(g \circ f)^{-1}(x)=x+2$이므로 $(g \circ f)(x+2)=x$

x 대신 $x-2$를 대입하자.

$\therefore (g \circ f)(x)=x-2$

$((h \circ g) \circ f)(x)=2x+1$에서

$(h \circ (g \circ f))(x)=2x+1$

$h(x-2)=2x+1$

x 대신 $x+2$를 대입하자.

$\therefore h(x)=2(x+2)+1=2x+5$

7) $h(x)=4x+1$

⇨ $f^{-1} \circ g^{-1} \circ h=f$이므로 $g^{-1} \circ h=f \circ f$

$\therefore h=g \circ f \circ f$

$\therefore h(x)=g(f(f(x))=g(f(2x))=g(2 \cdot 2x)$

$=g(4x)=4x+1$

8) 6

⇨ $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{2}x+b\right)$

$=a\left(\dfrac{1}{2}x+b\right)-2=\dfrac{a}{2}x+ab-2$

$\dfrac{a}{2}x+ab-2=x+6$이므로

$\dfrac{a}{2}=1,\ ab-2=6 \quad \therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

9) 3

⇨ $f^{-1}(g(0))=f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 0+4\right)=f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4)=k$라고 하면 $f(k)=4$

$2k-2=4 \quad \therefore k=3$

$\therefore f^{-1}(g(0))=3$

10) -8

⇨ $f(x)=2x-2,\ g(x)=\dfrac{1}{2}x+4$에서

$g^{-1}(f(1))=g^{-1}(2\cdot 1-2)=g^{-1}(0)$

$g^{-1}(0)=k$라고 하면 $g(k)=0$

$\dfrac{1}{2}k+4=0 \quad \therefore k=-8$

$\therefore g^{-1}(f(1))=-8$

11) -2

⇨ $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-bx+4)$

$=(-bx+4)+a=-bx+4+a$

$-bx+4+a=-x+1$이므로

$-b=-1,\ 4+a=1 \quad \therefore a=-3,\ b=1$

$\therefore a+b=-2$

12) 4

⇨ $f(x)=x-3,\ g(x)=-x+4$에서

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(3-3)=g^{-1}(0)$

$g^{-1}(0)=k$라고 하면 $g(k)=0$

$-k+4=0 \quad \therefore k=4$

$\therefore g^{-1}(f(3))=4$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

13) 6
⇨ $f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-1+4)=f^{-1}(3)$
$f^{-1}(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$
$k-3=3 \quad \therefore k=6$
$\therefore f^{-1}(g(1))=6$

14) 2
⇨ $f^{-1}(a)=k$로 놓으면 $f(k)=a$이므로
$k-1=a$에서 $k=a+1$
$(g \circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g(a+1)$
$=2(a+1)-3=2a-1$
따라서 $2a-1=3$이므로 $a=2$

15) -7
⇨ $g^{-1}(a)=k$로 놓으면 $g(k)=a$이므로
$2k-3=a$에서 $k=\frac{a+3}{2}$
$(f \circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=f\left(\frac{a+3}{2}\right)$
$=\frac{a+3}{2}-1=\frac{a+1}{2}$
따라서 $\frac{a+1}{2}=-3$이므로 $a+1=-6$
$\therefore a=-7$

16) 3
⇨ $f^{-1}(a)=k$로 놓으면 $f(k)=a$이므로
$k-1=a$에서 $k=a+1$
$(g \circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g(a+1)$
$=2(a+1)-3=2a-1$
따라서 $2a-1=5$이므로 $a=3$

17) 1
⇨ $g^{-1}(a)=k$로 놓으면 $g(k)=a$이므로
$-k+2=a$에서 $k=-a+2$
$(f \circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=f(-a+2)$
$=3(-a+2)+1=-3a+7$
따라서 $-3a+7=4$이므로 $a=1$

18) 2
⇨ $g^{-1}(a)=k$로 놓으면 $g(k)=a$이므로
$-k+2=a$에서 $k=-a+2$
$(f \circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=f(-a+2)$
$=3(-a+2)+1=-3a+7$
따라서 $-3a+7=1$이므로 $a=2$

19) 13
⇨ $f^{-1}(a)=k$로 놓으면 $f(k)=a$이므로
$3k+1=a$에서 $k=\frac{a-1}{3}$
$(g \circ g^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g\left(\frac{a-1}{3}\right)$
$=-\frac{a-1}{3}+2=\frac{-a+7}{3}$
따라서 $\frac{-a+7}{3}=-2$이므로 $-a+7=-6$
$\therefore a=13$

20) -1
⇨ $(g \circ f)(x)=x$에서 g는 f의 역함수이므로
$(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1)=(g \circ g^{-1} \circ f)(1)$
$=(g \circ g^{-1})(f(1))=f(1)=-1$

21) 2
⇨ $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(1)=(g \circ g \circ g^{-1})(1)=g(1)$
$g(1)=f^{-1}(1)=k$라고 하면 $f(k)=1$
$2k-3=1 \quad \therefore k=2$

22) 3
⇨ $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(3)=(g \circ g \circ g^{-1})(3)=g(3)$
$g(3)=f^{-1}(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$
$2k-3=3 \quad \therefore k=3$

23) 3
⇨ $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3)=(g \circ g^{-1} \circ f)(3)=f(3)=3$

24) 3
⇨ $(g \circ f)(x)=x$에서 g는 f의 역함수,
즉 $g=f^{-1}$이므로
$(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)=(g \circ g^{-1} \circ f)(2)=f(2)=3$

25) $\frac{3}{2}$
⇨ $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(2)=(g \circ g \circ g^{-1})(2)=g(2)$
$g(2)=k$, 즉 $f^{-1}(2)=k$로 놓으면
$f(k)=2,\ 2k-1=2 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$
따라서 구하는 함숫값은 $\frac{3}{2}$

26) 0
⇨ $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(-1)=(g \circ g \circ g^{-1})(-1)=g(-1)$
$g(-1)=k$, 즉 $f^{-1}(-1)=k$로 놓으면
$f(k)=-1,\ 2k-1=-1 \quad \therefore k=0$
따라서 구하는 함숫값은 0

27) -3
⇨ $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(-1)=(g \circ g^{-1} \circ f)(-1)$
$=f(-1)=-3$

28) 1
⇨ $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(1)=(g^{-1} \circ g \circ g)(1)=g(1)$
$g(1)=k$, 즉 $f^{-1}(1)=k$로 놓으면
$f(k)=1,\ 2k-1=1 \quad \therefore k=1$
따라서 구하는 함숫값은 1

29) 3
⇨ $(f \circ (f \circ g)^{-1} f)(1)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(1)$

$=(f \circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

$g^{-1}(1)=k$로 놓으면

$g(k)=1$에서 $-k+3=1$ $\therefore k=2$

따라서 구하는 함숫값은 $f(2)=3$

30) 6

⇨ $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1)$

$=(g^{-1} \circ f)(1)=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$로 놓으면

$g(k)=3$에서 $k-3=3$ $\therefore k=6$

따라서 구하는 함숫값은 6

31) 2

⇨ $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$

$=(g^{-1} \circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$로 놓으면

$g(k)=5$에서 $k+3=5$ $\therefore k=2$

따라서 구하는 함숫값은 2

32) 10

⇨ $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(3)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(3)$

$=(f \circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=k$로 놓으면

$g(k)=3$에서 $2k-3=3$ $\therefore k=3$

따라서 구하는 함숫값은 $f(3)=10$

33) 3

⇨ $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(1)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(1)$

$=(f \circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

$g^{-1}(1)=k$로 놓으면

$g(k)=1$이므로 $-k+1=1$ $\therefore k=0$

따라서 구하는 함숫값은

$f(g^{-1}(1))=f(0)=3$

34) 1

⇨ $(g \circ f)(x)=x$에서 g는 f의 역함수,

즉 $g^{-1}=f$이므로

$(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)=(f^{-1} \circ f \circ f)(2)=f(2)=1$

35) 1

⇨ $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(1)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(1)$

$=(f \circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

$g^{-1}(1)=k$라고 하면 $g(k)=1,\ k^2+1=1$ $\therefore k=0$

$\therefore$ (구하는 값)$=f(g^{-1}(1))=f(0)=2 \cdot 0+1=1$

36) 6

⇨ $(f \circ g)^{-1}(3)=k$라고 하면 $(f \circ g)(k)=3$

$f(g(k))=3,\ 2g(k)+1=3$

$g(k)=1,\ 3k-2=1$

$\therefore k=(f \circ g)^{-1}(3)=1$

$h(2x-1)=4x-3$에서 $2x-1=3$이면 $x=2$

$\therefore h(3)=4 \cdot 2-3=5$

$\therefore (f \circ g)^{-1}(3)+h(3)=1+5=6$

37) 25

⇨ $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(a)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(a)$

$=(f \circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))$

$g^{-1}(a)=k\ (k>0)$로 놓으면

$g(k)=a$이므로 $k^2=a$ $\therefore k=\sqrt{a}\ (\because k>0)$

즉, $f(\sqrt{a})=3$이므로

$\sqrt{a}-2=3,\ \sqrt{a}=5$ $\therefore a=25$

38) 3

⇨ $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$

$=(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=k$라고 하면 $g(k)=\frac{1}{2},\ k+2=\frac{1}{2}$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$

$\therefore$(구하는 값)$=f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)=3$

39) $\frac{1}{3}$

⇨ $(g \circ f)(x)=x$이므로 g는 f의 역함수이고,

또 f도 g의 역함수이다.

($\because g=f^{-1}$에서 $g^{-1}=(f^{-1})^{-1}=f$)

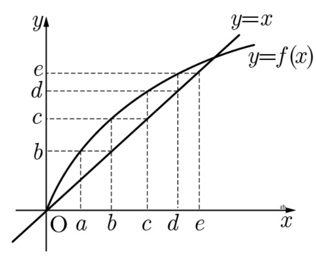
$f(-1)=g^{-1}(-1)=k$로 놓으면 $g(k)=-1$이므로

$3k-2=-1$ $\therefore k=\frac{1}{3}$

즉, $f(-1)=\frac{1}{3}$

40) c

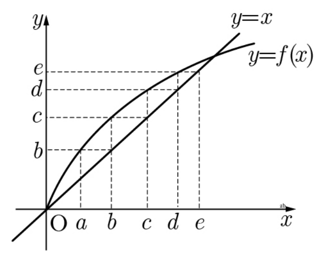
⇨



$(f \circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

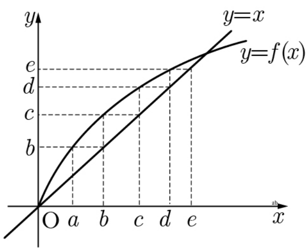
41) a

⇨



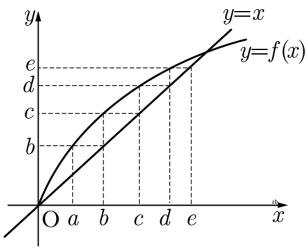
$f(a)=b$이므로 $f^{-1}(b)=a$

42) b

⇨ 

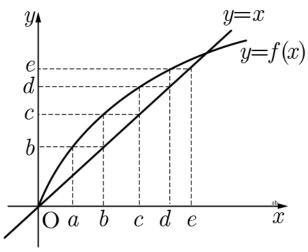
$(f^{-1} \circ f^{-1})(d) = f^{-1}(f^{-1}(d))$
$= f^{-1}(c)$ ($\because$ $f(c) = d$에서 $f^{-1}(d) = c$)
$= b$

43) c

⇨ 

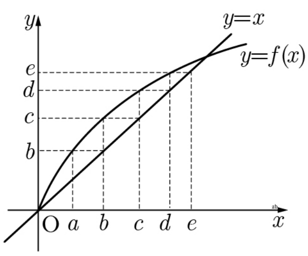
$(f \circ f)^{-1}(e) = (f^{-1} \circ f^{-1})(e)$
$= f^{-1}(f^{-1}(e))$
$= f^{-1}(d)$ ($\because f(d) = e$에서 $f^{-1}(e) = d$)
$= c$

44) a

⇨ 

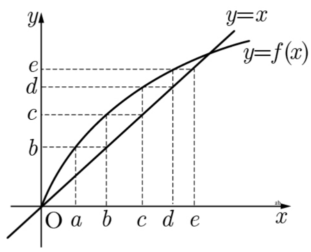
$(f^{-1} \circ f^{-1})(c) = f^{-1}(f^{-1}(c))$
$= f^{-1}(b)$ ($\because$ $f(b) = c$에서 $f^{-1}(c) = b$)
$= a$

45) a

⇨ 

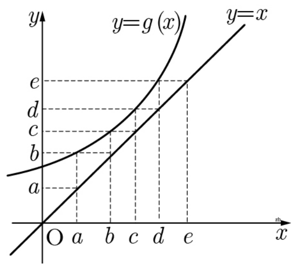
$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(d) = f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$
$= f^{-1}(f^{-1}(c)) = f^{-1}(b) = a$

46) b

⇨ 

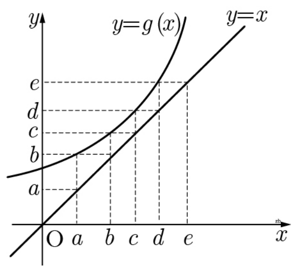
$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(e) = f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(e)))$
$= f^{-1}(f^{-1}(d)) = f^{-1}(c) = b$

47) c

⇨ 

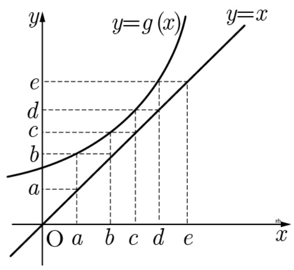
$(g \circ g)(a) = g(g(a)) = g(b) = c$

48) b

⇨ 

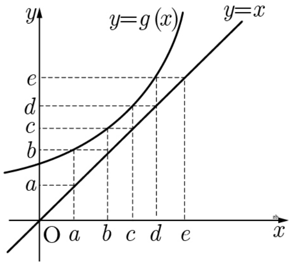
$(f \circ g \circ f)(c) = (g^{-1} \circ g \circ g^{-1})(c)$
$= g^{-1}(c)$ ($\because$ $g^{-1} \circ g = \mathrm{I}$, 즉 항등함수)
$= b$

49) c

⇨ 

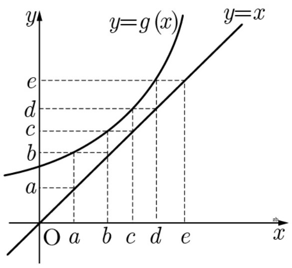
$(f \circ f \circ g)(d) = (g^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(d)$
$= g^{-1}(d) = c$ ($\because$ $g(c) = d$에서 $g^{-1}(d) = c$)

50) a

⇨ 

$(f\circ f)(c)=(g^{-1}\circ g^{-1})(c)=g^{-1}(g^{-1}(c))$
$=g^{-1}(b)$ ($\because$ $g(b)=c$에서 $g^{-1}(c)=b$)
$=a$ ($\because$ $g(a)=b$에서 $g^{-1}(b)=a$)

51) d

⇨ 

$(g\circ f\circ f)(e)=(g\circ g^{-1}\circ g^{-1})(e)$
$=g^{-1}(e)=d$ ($\because$ $g(d)=e$에서 $g^{-1}(e)=d$)

52) $\left(-\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)$
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의
교점과 같으므로
$\dfrac{1}{3}x-3=x$에서 $\dfrac{2}{3}x=-3$ $\quad\therefore\ x=-\dfrac{9}{2}$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)$이다.

53) $(-1,\ -1)$
⇨ $2x+1=x$에서 $x=-1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이다.

54) $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$
⇨ $-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=x$에서 $\dfrac{3}{2}x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ x=-\dfrac{1}{3}$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$이다.

55) $(2,\ 2)$
⇨ $-2x+6=x$에서 $3x=6$ $\quad\therefore\ x=2$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

56) $a=3,\ b=-1$
⇨ 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가
점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$를 지나므로 $a+b=2$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가
점 $\mathrm{Q}(-4,\ -1)$을 지나므로
함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는
점 $(-1,\ -4)$를 지난다.
$-a+b=-4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3,\ b=-1$

57) $a=\dfrac{1}{2},\ b=1$
⇨ 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가
점 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$을 지나므로 $-2a+b=0$ …… ㉠
함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가
점 $\mathrm{Q}(3,\ 4)$를 지나므로
함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 점 $(4,\ 3)$을 지난다.
$4a+b=3$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{2},\ b=1$

58) $a=-2,\ b=2$
⇨ 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가
점 $\mathrm{P}(-1,\ 4)$를 지나므로 $-a+b=4$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가
점 $\mathrm{Q}(-2,\ 2)$를 지나므로
함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는
점 $(2,\ -2)$를 지난다. $2a+b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=2$

59) $a=1,\ b=2$
⇨ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가
두 점 $\mathrm{P}(1,\ -1),\ \mathrm{Q}(3,\ 1)$을 지나므로
$f^{-1}(1)=-1,\ f^{-1}(3)=1$
즉, $f(-1)=1,\ f(1)=3$이므로
$-a+b=1,\ a+b=3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

60) $a=-\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{5}{2}$
⇨ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가
두 점 $\mathrm{P}(-2,\ 3),\ \mathrm{Q}(4,\ -1)$을 지나므로
$f^{-1}(-2)=3,\ f^{-1}(4)=-1$
즉, $f(3)=-2,\ f(-1)=4$이므로
$3a+b=-2,\ -a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{5}{2}$

61) $a=-2,\ b=1$
⇨ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가
두 점 $\mathrm{P}\left(2,\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}=(-1,\ 1)$을 지나므로
$f^{-1}(2)=-\dfrac{1}{2},\ f^{-1}(-1)=1$
즉, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2,\ f(1)=-1$이므로
$-\dfrac{1}{2}a+b=2,\ a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

62) $a=2$, $b=-6$

⇨ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가
두 점 $\mathrm{P}(-2,\ 2)$, $\mathrm{Q}(2,\ 4)$를 지나므로
$f^{-1}(-2)=2$, $f^{-1}(2)=4$
즉, $f(2)=-2$, $f(4)=2$이므로
$2a+b=-2$, $4a+b=2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-6$

63) $(6,\ 6)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\frac{1}{2}x+3=x$에서 $x=6$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(6,\ 6)$이다.

64) $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$3x-5=x$에서 $x=\frac{5}{2}$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

65) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$-2x+1=x$에서 $x=\frac{1}{3}$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

66) $(5,\ 5)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$x^2-4x=x$에서 $x^2-5x=0$
$x(x-5)=0$ $\quad\therefore x=5\ (\because x\ge 2)$
따라서 교점이 좌표는 $(5,\ 5)$

67) $(3,\ 3)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$x^2+2x-12=x$에서 $x^2+x-12=0$
$(x+4)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=3\ (\because x\ge -1)$
따라서 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$

68) b

⇨ $f^{-1}(d)=c$이므로
$(f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1})(d)=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$=f^{-1}(c)=b$

69) a

⇨ $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$
$=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)=a$

70) a

⇨ $g=f^{-1}$이므로
$(g\circ g)(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$
$=f^{-1}(b)=a$

71) c, b

⇨ $f(f(a))=f(b)=c$
$(f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1})(d)=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$=f^{-1}(c)=b$
$\therefore f(f(a))=c$, $(f\circ f)^{-1}(d)=b$

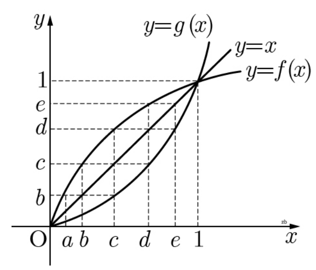
72) $\sqrt{2}$

⇨ 함수 $f(x)=x^2-2x+2$의 그래프와
그 역함수의 그래프와의 교점은
$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프의
교점과 같으므로 $f(x)=x$에서
$x^2-2x+2=x$, $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 두 교점은 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$
또는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

73) $a=3$, $b=2$

⇨ 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(-2,\ -4)$를
지나므로 $-2a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
함수 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $\mathrm{Q}(5,\ 1)$을
지나므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는
점 $(1,\ 5)$를 지난다.
$\therefore a+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

74) b

⇨


두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가
직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$의
역함수는 $g(x)$이다.
즉, $f^{-1}=g$이므로

$(f^{-1} \circ g)(d) = (g \circ g)(d) = g(g(d)) = g(c) = b$