



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시
 1) 제작연월일 : 2019-02-13
 2) 제작자 : 교육지대(주)
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 삼각함수를 포함한 식의 최대, 최소

① 각을 통일한다.

: 삼각함수의 각이 $2\pi \pm x$, $\pi \pm x$, $\frac{\pi}{2} \pm x$ 등과 같이 여러 가지로 표현되어 있으면 각을 x 로 통일한다.

② 한 종류의 삼각함수로 통일한다

③ 삼각함수를 t 로 치환한다.

이때 t 의 값의 범위에 주의한다.

④ t 에 대한 함수의 그래프를 그려서 최댓값과 최솟값을 구한다.

■ 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

1. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x + 1$

2. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \sin x - 1$

3. $y = \cos(\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1$

4. $y = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

5. $y = 2 \cos x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

6. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \sin x + 1$

7. $y = \cos(\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3$

8. $y = 2 \sin x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

9. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin x + 1$

10. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \cos x + 1$

11. $y = 2 \tan(\pi - x) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + 2$

(단, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)

12. $y = -\cos\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) + 2 \sin(\pi - x) + 3$

■ 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

13. $y = |3 \sin x| - 2$

14. $y = 4 |\sin x| + 1$

15. $y = \frac{3}{2} |\sin x - 2|$

16. $y = 3 |\cos x| - 2$

17. $y = |-2 \cos x + 1| + 2$

18. $y = -\left| -\sin x + \frac{1}{2} \right| + 1$

19. $y = -|\cos x - 2| + 2$

20. $y = -2 |\cos x| + 3$

21. $y = 2 |\cos x - 2|$

22. $y = |\sin x - 2| + 1$

23. $y = 2 |\sin x - 1|$

24. $y = |2 \sin x + 4| - 3$

25. $y = \left| \cos x + \frac{1}{2} \right| - 1$

26. $y = |\cos x - 1| + 1$

27. $y = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin x + 2}$

28. $y = \frac{-\sin x + 2}{\sin x + 3}$

■ 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

29. $y = -\cos^2 x + 4 \sin x - 2$

30. $y = \sin^2 x - 4 \cos x + 1$

31. $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 2$

32. $y = -4 \sin^2 x + 4 \cos x + 3$

33. $y = -\cos^2 x + \sin x + 3$

34. $y = -2 \sin^2 x + \cos x + 1$

35. $y = \sin^2 x - \cos x$

36. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$

37. $y = -\sin^2 x + \cos x + \frac{5}{4}$

38. $y = 2 \cos^2 x + 4 \sin x + 1$

39. $y = \sin^2 x + 2 \cos x - 1$

40. $y = 4 \cos^2 x + 4 \sin x - 5$ (단, $0 \leq x \leq \pi$)

41. $y = \tan^2 x - \tan x - 2$ (단, $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

42. $y = -\tan^2 x + 6 \tan x - 5$ (단, $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

43. $y = -\tan^2 x + 4 \tan x + 2$ (단, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$)

55. 함수 $y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 4\cos(\pi - x) + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

56. $0 \leq x < 2\pi$ 이고,
함수 $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos^2 x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

57. $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 일 때, 함수 $y = 2\tan x - 2 + \tan^2 x$ 의 최솟값을 구하여라.

58. 함수 $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x + 2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

59. 함수 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^2 x - \cos x - \frac{5}{4}$ 에 대하여 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값을 구하여라.

60. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 에서 함수 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin x - 1$ 에 대하여 $g(x) = \tan \frac{\pi}{4} x$ 일 때, 함수 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

61. 함수 $f(x) = -\sin^2 x + 2a \cos x + 1$ 의 최솟값이 -4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

62. 함수 $y = 2a \sin^2 x + 2a \cos x + b$ 의 최댓값이 8, 최솟값이 -1 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하여라. (단 $a > 0$)



정답 및 해설

1) 최댓값 : 3, 최솟값 -1

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \text{ 이므로 } y=2\cos x+1$$

이때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq 2\cos x+1 \leq 3$$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

2) 최댓값 : 0, 최솟값 : -2

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \text{ 이므로 } y=-\sin x-1$$

이때, $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq -\sin x-1 \leq 0$$

따라서 최댓값은 0, 최솟값은 -2이다.

3) 최댓값 : 1, 최솟값 : -3

$$\Rightarrow \cos(\pi+x)=-\cos x, \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \text{ 이므로}$$

$$y=-2\cos x-1$$

이때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-3 \leq -2\cos x-1 \leq 1$$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -3

4) 최댓값 : 0, 최솟값 : -4

$$\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$

 $\sin x=t$ 로 치환하면

$$y=\sin x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2=t+t-2=2t-2$$

이때, $-1 \leq t \leq 1$ 이므로 $t=1$ 일 때, 최댓값은 0, $t=-1$ 일 때, 최솟값은 -4이다.

5) 최댓값 : 4, 최솟값 : -2

$$\Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$

 $\cos x=t$ 로 치환하면

$$y=2\cos x-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$$

$$=2t+t+1=3t+1$$

이때, $-1 \leq t \leq 1$ 이므로 $t=1$ 일 때 최댓값은 4, $t=-1$ 일 때, 최솟값은 -2이다.

6) 최댓값 : 4, 최솟값 : -2

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \text{ 이므로 } y=3\sin x+1$$

이때, $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq 3\sin x+1 \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -2이다.

7) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1

$$\Rightarrow \cos(\pi+x)=-\cos x, \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \text{ 이므로}$$

$$y=-2\cos x+3$$

이때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$1 \leq -2\cos x+3 \leq 5$$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 1

8) 최댓값 : 0, 최솟값 : -2

$$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \text{ 이므로}$$

$$y=2\sin x-\sin x-1=\sin x-1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } -2 \leq \sin x-1 \leq 0$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이다.

9) 최댓값 : 4, 최솟값 : -2

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \text{ 이므로 } y=-3\sin x+1$$

이때, $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq -3\sin x+1 \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -2이다.

10) 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \text{ 이므로 } y=-\cos x+1$$

이때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$0 \leq -\cos x+1 \leq 2$$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

11) 최댓값 : 5, 최솟값 : -1

$$\Rightarrow \tan(\pi-x)=-\tan x, \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x} \text{ 이므로}$$

$$y=2\tan(\pi-x)+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+2$$

$$=-2\tan x-\tan x+2=-3\tan x+2$$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 -1

12) 최댓값 : 6, 최솟값 : 0

$$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin x,$$

 $\sin(\pi-x)=\sin x$ 이므로

$$y=-\cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)+2\sin(\pi-x)+3$$

$$=\sin x+2\sin x+3=3\sin x+3$$

따라서 최댓값 6, 최솟값 0

13) 최댓값 : 1, 최솟값 : -2

$$\Rightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \text{ 에서 } 0 \leq |3\sin x| \leq 3 \text{ 이므로}$$

$$-2 \leq |3\sin x|-2 \leq 1$$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -2이다.

14) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1

$$\Rightarrow y=4|\sin x|+1 \text{ 에서}$$

$$0 \leq |\sin x| \leq 1 \text{ 이므로 } 1 \leq 4|\sin x|+1 \leq 5$$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

15) 최댓값 : $\frac{9}{2}$, 최솟값 : $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \text{에서 } -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \text{이므로} \\ 1 \leq |\sin x - 2| \leq 3 \\ \therefore \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} |\sin x - 2| \leq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{9}{2}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

16) 최댓값 : 1, 최솟값 : -2

$$\begin{aligned} \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \text{에서 } 0 \leq |\cos x| \leq 1 \text{이므로} \\ -2 \leq 3|\cos x| - 2 \leq 1 \\ \text{따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -2이다.} \end{aligned}$$

17) 최댓값 : 5, 최솟값 : 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = |-2 \cos x + 1| + 2 \text{에서} \\ -1 \leq -2 \cos x + 1 \leq 3, 0 \leq |-2 \cos x + 1| \leq 3 \text{이므로} \\ 2 \leq |-2 \cos x + 1| + 2 \leq 5 \\ \text{따라서 최댓값은 5, 최솟값은 2이다.} \end{aligned}$$

18) 최댓값 : 1, 최솟값 : $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = -\left| -\sin x + \frac{1}{2} \right| + 1 \text{에서} \\ -\frac{1}{2} \leq -\sin x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq \left| -\sin x + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \text{이므로} \\ -\frac{1}{2} \leq -\left| -\sin x + \frac{1}{2} \right| + 1 \leq 1 \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

19) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

20) 최댓값 : 3, 최솟값 : 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = -2|\cos x| + 3 \text{에서} \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1, -2 \leq -2|\cos x| \leq 0 \text{이므로} \\ 1 \leq -2|\cos x| + 3 \leq 3 \\ \text{따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1이다.} \end{aligned}$$

21) 최댓값 : 6, 최솟값 : 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = 2|\cos x - 2| \text{에서} \\ -3 \leq \cos x - 2 \leq -1, 1 \leq |\cos x - 2| \leq 3 \text{이므로} \\ 2 \leq 2|\cos x - 2| \leq 6 \\ \text{따라서 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.} \end{aligned}$$

22) 최댓값 : 4, 최솟값 : 2

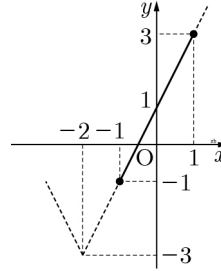
$$\begin{aligned} \Rightarrow y = |\sin x - 2| + 1 \text{에서} \\ -3 \leq \sin x - 2 \leq -1, 1 \leq |\sin x - 2| \leq 3 \text{이므로} \\ 2 \leq |\sin x - 2| + 1 \leq 4 \\ \text{따라서 최댓값은 4, 최솟값은 2이다.} \end{aligned}$$

23) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = 2|\sin x - 1| \text{에서} \\ -2 \leq \sin x - 1 \leq 0, 0 \leq |\sin x - 1| \leq 2 \text{이므로} \\ 0 \leq 2|\sin x - 1| \leq 4 \\ \text{따라서 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.} \end{aligned}$$

24) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = |2 \sin x + 4| - 3 \text{에서 } \sin x = t \text{로 치환하면} \\ y = |2t + 4| - 3 \\ t \geq -2 \text{일 때, } y = 2t + 1 \\ t < -2 \text{일 때, } y = -2t - 7 \\ \text{이때, } -1 \leq t \leq 1 \text{이므로 다음에서} \\ t = 1 \text{일 때, 최댓값은 3,} \\ t = -1 \text{일 때, 최솟값은 -1이다.} \end{aligned}$$

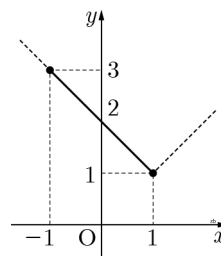


25) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값 : -1

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos x = t \text{라 하면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이므로} \\ y = \left| t + \frac{1}{2} \right| - 1 \text{에서 최댓값은 } t = 1 \text{일 때, } \frac{1}{2} \\ \text{최솟값은 } t = -\frac{1}{2} \text{일 때, } -1 \text{이다.} \end{aligned}$$

26) 최댓값 : 3, 최솟값 : 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = |\cos x - 1| + 1 \text{에서 } \cos x = t \text{로 치환하면} \\ y = |t - 1| + 1 \\ t \geq 1 \text{일 때, } y = t \\ t < 1 \text{일 때, } y = -t + 2 \\ \text{이때, } -1 \leq t \leq 1 \text{이므로 다음에서} \\ t = -1 \text{일 때 최댓값은 3,} \\ t = 1 \text{일 때, 최솟값은 1이다.} \end{aligned}$$



27) 최댓값: 2, 최솟값 $-\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \text{이므로} \\ y = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin x + 2} = \frac{-2\sin x}{\sin x + 2} \\ \sin x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고,} \\ y = -\frac{2t}{t+2} = \frac{-2(t+2)+4}{t+2} = \frac{4}{t+2} - 2 \\ \text{따라서 } t = -1 \text{일 때, 최댓값은 2} \end{aligned}$$

$$t=1\text{일 때, 최솟값은 } -\frac{2}{3}$$

$$28) \text{ 최댓값 : } \frac{3}{2}, \text{ 최솟값 : } \frac{1}{4}$$

⇒ $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = \frac{-t+2}{t+3} = \frac{-(t+3)+5}{t+3} = \frac{5}{t+3} - 1$$

$$t=-1\text{일 때 최댓값을 가지므로 최댓값은 } \frac{3}{2}$$

$$t=1\text{일 때, 최솟값을 가지므로 최솟값은 } \frac{1}{4}$$

$$29) \text{ 최댓값 : } 2, \text{ 최솟값 : } -6$$

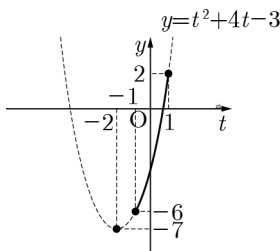
⇒ $y = -\cos^2 x + 4 \sin x - 2$ 에서 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로 $y = \sin^2 x + 4 \sin x - 3$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 + 4t - 3 = (t+2)^2 - 7$$

다음 그림과 같이

최댓값은 $t=1$ 일 때 2, 최솟값은 $t=-1$ 일 때 -6이다.



$$30) \text{ 최댓값 : } 5, \text{ 최솟값 : } -3$$

⇒ $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)라고 하자.

$$y = 1 - t^2 - 4t + 1 = -t^2 - 4t + 2 = -(t+2)^2 + 6$$

$t=-1$ 일 때 최댓값 5

$t=1$ 일 때, 최솟값 -3

$$31) \text{ 최댓값 : } 1, \text{ 최솟값 : } -3$$

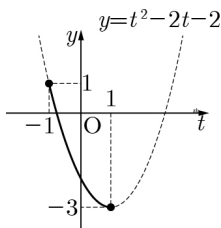
⇒ $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 2$ 에서

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$$

다음 그림과 같이 최댓값은 $t=-1$ 일 때, 1

최솟값은 $t=1$ 일 때, -3이다.



$$32) \text{ 최댓값 : } 7, \text{ 최솟값 : } -2$$

⇒ $f(x) = -4(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x + 3$

$\cos x = t$ 라 하면 $f(t) = (2t+1)^2 - 2$ 이므로

최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=-2$

$$33) \text{ 최댓값 : } 4, \text{ 최솟값 : } \frac{7}{4}$$

⇒ $y = -\cos^2 x + \sin x + 3$ 에서

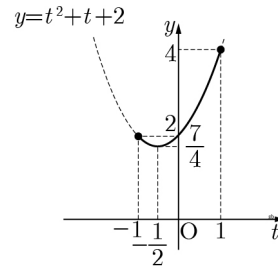
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

$$y = \sin^2 x + \sin x + 2$$

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 $\frac{7}{4}$ 이다.



$$34) \text{ 최댓값 : } 2, \text{ 최솟값 : } -\frac{9}{8}$$

⇒ $y = -2 \sin^2 x + \cos x + 1$ 에서

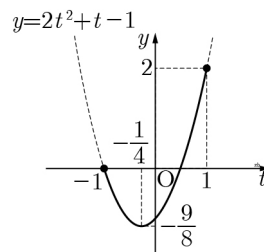
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로

$$y = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = 2t^2 + t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{9}{8}$



$$35) \text{ 최댓값 : } \frac{5}{4}, \text{ 최솟값 : } -1$$

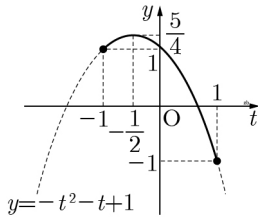
⇒ $y = \sin^2 x - \cos x$ 에서 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로

$$y = -\cos^2 x - \cos x + 1$$

$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

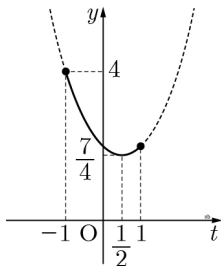
$$y = -t^2 - t + 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

따라서 최댓값은 $\frac{5}{4}$, 최솟값은 -1



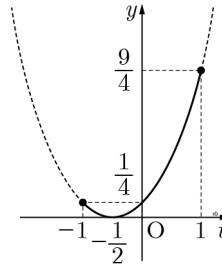
36) 최댓값 : 4, 최솟값 : $\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \text{ 이고,} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \text{ 이므로} \\ y &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \\ &= -\sin x - \cos^2 x + 3 \\ &= -\sin x - (1 - \sin^2 x) + 3 \\ &= \sin^2 x - \sin x + 2 \\ \sin x &= t \text{로 치환하면} \\ y &= t^2 - t + 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \\ \text{이때, } -1 \leq t \leq 1 \text{ 이므로 다음에서} \\ t &= -1 \text{ 일 때, 최댓값은 } 4, \\ t &= \frac{1}{2} \text{ 일 때, 최솟값은 } \frac{7}{4} \text{ 이다.} \end{aligned}$$



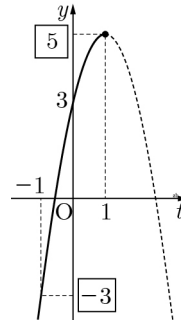
37) 최댓값 : $\frac{9}{4}$, 최솟값 : 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \text{ 이므로} \\ y &= -\sin^2 x + \cos x + \frac{5}{4} \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \frac{5}{4} \\ &= \cos^2 x + \cos x + \frac{1}{4} \\ \cos x &= t \text{로 치환하면} \\ y &= t^2 + t + \frac{1}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{이때, } -1 \leq t \leq 1 \text{ 이므로 다음에서} \\ t &= 1 \text{ 일 때, 최댓값은 } \frac{9}{4}, \\ t &= -\frac{1}{2} \text{ 일 때, 최솟값은 } 0 \text{ 이다.} \end{aligned}$$



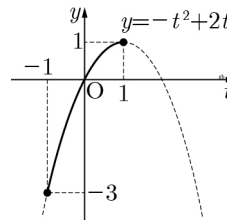
38) 최댓값 : 5, 최솟값 : -3

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \text{ 이므로} \\ y &= 2\cos^2 x + 4\sin x + 1 \\ &= 2(1 - \sin^2 x) + 4\sin x + 1 \\ &= -2\sin^2 x + 4\sin x + 3 \\ \sin x &= t \text{로 치환하면} \\ y &= -2t^2 + 4t + 3 = -2(t - 1)^2 + 5 \\ \text{이때, } -1 \leq t \leq 1 \text{ 이므로 다음에서} \\ t &= 1 \text{ 일 때, 최댓값은 } 5, \\ t &= -1 \text{ 일 때, 최솟값은 } -3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$



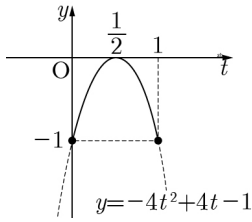
39) 최댓값 : 1, 최솟값 : -3

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \sin^2 x + 2\cos x - 1 \text{ 에서 } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ 이} \\ \text{므로 } y &= -\cos^2 x + 2\cos x \\ \cos x &= t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{ 이고} \\ y &= -t^2 + 2t = -(t - 1)^2 + 1 \\ \text{다음 그림과 같이 최댓값은 } t &= 1 \text{ 일 때 } 1, \\ \text{최솟값은 } t &= -1 \text{ 일 때 } -3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$



40) 최댓값 : 0, 최솟값 : -1

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= 4\cos^2 x + 4\sin x - 5 \text{ 에서 } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ 이} \\ \text{므로 } y &= -4\sin^2 x + 4\sin x - 1 \\ \sin x &= t \text{로 놓으면 } 0 \leq t \leq 1 \text{ 이고,} \\ y &= -4t^2 + 4t - 1 = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{다음 그림과 같이 최댓값은 } 0, \text{ 최솟값은 } -1 \text{ 이므로 } M &= 0, m = -1 \end{aligned}$$

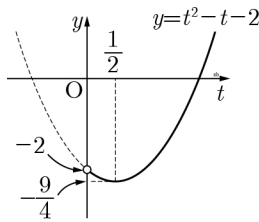


41) 최댓값 : 없다, 최솟값 : $-\frac{9}{4}$

$\Rightarrow y = \tan^2 x - \tan x - 2$ 에서
 $\tan x = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고

$$y = t^2 - t - 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

따라서 최댓값은 없고, 최솟값은 $-\frac{9}{4}$

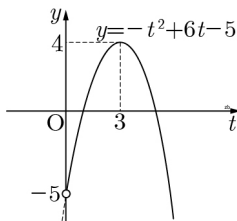


42) 최댓값 : 4, 최솟값 : 없다.

$\Rightarrow y = -\tan^2 x + 6 \tan x - 5$ 에서
 $\tan x = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고

$$y = -t^2 + 6t - 5 = -(t-3)^2 + 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 없다.

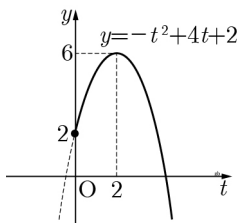


43) 최댓값 : 6, 최솟값 : 없다.

$\Rightarrow y = -\tan^2 x + 4 \tan x + 2$ 에서
 $\tan x = t$ 로 놓으면 $t \geq 0$ 이고

$$y = -t^2 + 4t + 2 = -(t-2)^2 + 6$$

다음 그림과 같이 최댓값은 $t=2$ 일 때 6,
 최솟값은 없다.



44) $\frac{25}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x$ 에서

$$\begin{aligned} y &= \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3\cos^2 x + 2\sin(\pi + x) \\ &= \sin^2 x - 3\cos^2 x - 2\sin x \\ &= \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x \\ &= 4\sin^2 x - 2\sin x - 3 \\ &= 4\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 라 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이므로

$$t = -1 \text{ 일 때 최댓값 } M = 4 \times \frac{25}{16} - \frac{13}{4} = 3$$

$$t = \frac{1}{4} \text{ 일 때 최솟값 } m = -\frac{13}{4}$$

$$\text{따라서 } M - m = 3 + \frac{13}{4} = \frac{25}{4}$$

45) 3

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos(\pi - x) = -\cos x$ 에서

$$\begin{aligned} y &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 5\sin^2 x - 4\cos(\pi - x) \\ &= 4\sin^2 x + 4\cos x + 1 \\ &= 4(1 - \cos^2 x) + 4\cos x + 1 \\ &= -4\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 라 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이므로

$$t = \frac{1}{2} \text{ 일 때 최댓값 } M = 6$$

$$t = -1 \text{ 일 때, 최솟값 } m = -3$$

$$\text{따라서 } M + m = 6 - 3 = 3$$

46) $-\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= -6\cos^2 x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k \\ &= 6(\sin^2 x - 1) - 6\sin x + k \\ &= 6\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} + k \end{aligned}$$

이므로 최댓값은 $\sin x = -1$ 일 때,

$$6 \times \frac{9}{4} - \frac{15}{2} + k = 11 \text{ 이므로 } k = 5$$

따라서 최솟값은 $\sin x = \frac{1}{2}$ 일 때, $-\frac{15}{2} + 5 = -\frac{5}{2}$
 이다.

47) 0

$\Rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x$ 에서

$$\begin{aligned} y &= \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 2\cos(\pi - x) \\ &= \sin^2 x - 2\cos x \\ &= 1 - \cos^2 x - 2\cos x \\ &= -(\cos x + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 라 하면 $-1 \leq t \leq 1$ 이므로

$$t = -1 \text{ 일 때, 최댓값은 } 2$$

$t=1$ 일 때, 최솟값은 -2 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 $2+(-2)=0$ 이다.

48) 2

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x, \sin(\pi-x)=\sin x \text{에서}$$

$$y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-4\sin(\pi-x)+1$$

$$=2\cos^2 x-4\sin x+1$$

$$=2-2\sin^2 x-4\sin x+1$$

$$=-2(\sin x+1)^2+5$$

$\sin x=t$ 라 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이므로

$t=-1$ 일 때, 최댓값 5, $t=1$ 일 때, 최솟값 -3
이므로 최댓값과 최솟값의 합은 2이다.

49) -1

$$\Rightarrow y=4\sin^2 x+4\cos x-1$$

$$=4(1-\cos^2 x)+4\cos x-1$$

$$=-4\cos^2 x+4\cos x+3$$

$$=-4\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+4$$

$\cos x=t$ 라 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이므로

$t=\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $M=4$,

$t=-1$ 일 때 최솟값 $m=-4 \times \frac{9}{4}+4=-5$

따라서 $M+m=4-5=-1$

50) -4

$$\Rightarrow y=-\sin^2 \theta+2\cos \theta-3$$

$$=\cos^2 \theta+2\cos \theta-4=(\cos \theta+1)^2-5$$

따라서 최솟값은 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos \theta=0$ 일

때, -4 이다.

51) 3

$$\Rightarrow f(x)=\sin^2 x+2\sin x+3=(\sin x+1)^2+2$$

즉 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $f(x)$ 의 최
솟값은 $\sin x=0$ 일 때인 3이다.

52) $k=2$, 최솟값 : -3

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+4\cos x+k-1=-2\cos^2 x+4\cos x+k+1 \text{이}$$

므로 $-2(\cos x-1)^2+k+3$ 으로 정리할 수 있다.

따라서 $\cos x=1$ 일 때 최댓값 $k+3$ 을 가진다.

$k+3=5$ 에서 $k=2$ 이다.

최솟값은 $\cos x=-1$ 일 때 $-2 \times 4+5=-3$ 이다.

53) 19

$$\Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x \text{임을 이용하면 주어진 식은}$$

$-\sin^2 x-\sin x+4$ 로 바꿀 수 있다.

이는 $-\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$ 로 쓸 수 있으므로,

최댓값은 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{17}{4}$, 최솟값은
 $\sin x=1$ 일 때 2이다.

따라서 $M=\frac{17}{4}$, $m=2$ 이므로 $4M+m=19$ 이
다.

54) -14

$$\Rightarrow f(x)=-4(1-\cos^2 x)+4\cos x+3$$

$\cos x=t$ 라 하면 $f(t)=(2t+1)^2-2$ 므로

최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=-2$

$\therefore M \cdot m=-14$

55) 6

$$56) \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sin^2 x+3\cos^2 x-2\cos x+1$$

$$=1+2\cos^2 x-2\cos x+1$$

$$=2\cos^2 x-2\cos x+2$$

$$=2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

따라서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $m=\frac{3}{2}$

$\cos x=-1$ 일 때, 최댓값 $M=6$

$\therefore M+m=6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

57) -3

$$\Rightarrow y=\tan^2 x+2\tan x-2=(\tan x+1)^2-3$$

$\tan \theta=-1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다.

58) 2

59) 0

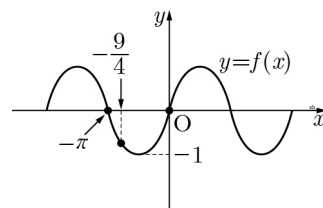
$$\Rightarrow g(x)=1-\cos^2 x-\cos x-\frac{5}{4}$$

$$=-\cos^2 x-\cos x-\frac{1}{4}$$

$$=-\left(\cos \theta+\frac{1}{2}\right)^2$$

이때 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 이므로 $-\frac{9}{4} \leq g(x) \leq 0$

$y=\sin t$ ($-\frac{9}{4} \leq t \leq 0$)의 최댓값은 0이다.



60) 최댓값 1, 최솟값 0

$$\Rightarrow f(x)=2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=-2\sin^2 x-\sin x+1$$

$\sin x=t$ 라고 하자.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 이므로 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$f(t) = -2t^2 - t + 1 = -2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

따라서 $f(t)$ 는 최솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 최댓값 $f(0) = 1$ 을 가진다.

$$\text{즉, } 0 \leq f(x) \leq 1$$

$$y = g(f(x)) \text{의 최댓값은 } \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

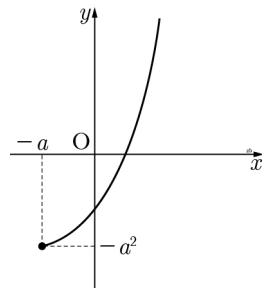
$$\text{최솟값은 } \tan 0 = 0 \text{이다.}$$

$$61) \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= -(1 - \cos^2 x) + 2a \cos x + 1 \\ &= \cos^2 x + 2a \cos x = (\cos x + a)^2 - a^2 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 라고 하자.

$$f(t) = (t+a)^2 - a^2 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$



$a \geq 1$ 일 때, $-a \leq -1$ 이므로

$t = -1$ 일 때, 최솟값을 가진다.

$$f(-1) = (-1+a)^2 - a^2 = 1 - 2a = -4$$

$$2a = 5 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

$0 < a < 1$ 일 때, $0 > -a > -1$

따라서 $t = -a$ 에서 최솟값 $-a^2$ 을 가진다.

$$-a^2 = -4, \quad a^2 = 4 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

이때 $0 < a < 1$ 이므로 만족하는 a 는 없다.

따라서 양수 a 는 $\frac{5}{2}$ 이다.

$$62) 6$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= 2a \sin^2 x + 2a \cos x + b \\ &= 2a(1 - \cos^2 x) + 2a \cos x + b \\ &= -2a \cos^2 x + 2a \cos x + 2a + b \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = -2at^2 + 2at + 2a + b$$

$$= -2a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}a + b$$

$$a > 0 \text{이므로 } t = \frac{1}{2} \text{일 때, 최댓값은 } \frac{5}{2}a + b$$

$$t = -1 \text{일 때, 최솟값은 } -2a + b$$

$$\frac{5}{2}a + b = 8, \quad -2a + b = -1 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$a = 2, \quad b = 3 \text{이므로 } ab = 6$$