06

이차방정식과 이차함수

01 이차함수의 그래프 179
02 이차함수와 이차방정식 188
예제
03 이차함수의 최대, 최소 198
예제
기본 다지기 208
실력 다지기 210

예제 01

이차함수의 식 구하기

다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이고, y절편이 3이다.

(2) 그래프가 세 점 $(-2,\ 7)$, $(1,\ -2)$, $(2,\ 3)$을 지난다.

(3) 그래프의 x절편이 -1과 3이고, y절편이 -3이다.

접근 방법

주어진 조건을 이용하여 이차함수의 계수를 구해야 합니다. 이차함수의 계수를 문자로 놓고 푸는데 조건에 따라 함수식을 다음 Bible 과 같이 놓습니다.

Bible 이차함수의 식 세우기 (단, $a\neq0$)

(1) 꼭짓점 $(p,\ q)$가 주어졌을 때 ⇨ $y=a(x-p)^2+q$

(2) 세 점이 주어졌을 때 ⇨ $y=ax^2+bx+c$

(3) x축과의 두 교점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이 주어졌을 때 ⇨ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

상세 풀이

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-1$이라고 하면

이 이차함수의 그래프의 y절편이 3, 즉 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$$3=a-1 \qquad \therefore a=4$$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=4(x-1)^2-1=4x^2-8x+3$

(2) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라고 하면 이 이차함수의 그래프가 세 점 $(-2,\ 7)$, $(1,\ -2)$, $(2,\ 3)$을 지나므로

$$7=4a-2b+c,\ -2=a+b+c,\ 3=4a+2b+c$$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$, $c=-3$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=2x^2-x-3$

(3) 그래프의 x절편이 -1과 3이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)(x-3)$이라고 하면

이 이차함수의 그래프의 y절편이 -3, 즉 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$$-3=-3a \qquad \therefore a=1$$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

정답 ➡ (1) $y=4x^2-8x+3$ (2) $y=2x^2-x-3$ (3) $y=x^2-2x-3$

보충 설명

위의 경우 외에 자주 나오는 유형은 다음과 같습니다.

(1) 축의 방정식 $x=p$가 주어졌을 때 ⇨ $y=a(x-p)^2+k$ (단, $a\neq0$)

(2) $x=m$에서 x축과 접할 때 ⇨ $y=a(x-m)^2$ (단, $a\neq0$)

풀이집 p.71

숫자 바꾸기

01-1 다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이고, y절편이 1이다.

(2) 그래프가 세 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(-1,\ 2)$를 지난다.

(3) 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고, 두 점 $(-3,\ 0)$, $(1,\ 8)$을 지난다.

표현 바꾸기

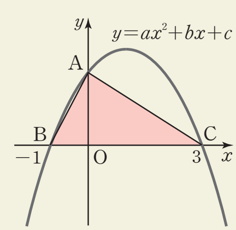
01-2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나고, 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -1)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

06

개념 넓히기 ★☆☆

01-3 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 y축과의 교점이 A이고, x축과의 교점이 각각 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.



정답 **01-1** (1) $y=-2x^2-4x+1$ (2) $y=-x^2-x+2$ (3) $y=x^2+4x+3$
01-2 ③ **01-3** $\frac{8}{3}$

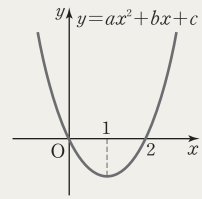
예제 02

이차함수의 계수의 부호

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 식의 부호를 정하여라.

(1) a (2) b (3) c

(4) $a+b+c$ (5) $4a+2b+c$ (6) $a-b+c$



접근 방법

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

(1) a의 부호 : 아래로 볼록한 포물선이면 $a>0$, 위로 볼록한 포물선이면 $a<0$입니다.

(2) b의 부호 : 축의 방정식이 $x=p$일 때

① $p<0$ ⇨ a, b는 서로 같은 부호 ② $p=0$ ⇨ $b=0$ ③ $p>0$ ⇨ a, b는 서로 다른 부호

(3) c의 부호 : 그래프의 y절편의 부호와 같습니다.

> **Bible** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서
> (1) a ⇨ ∨, ∧의 모양 (2) b ⇨ 축의 위치 (3) c ⇨ y절편의 부호

상세 풀이

(1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

(2) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}>0$

그런데 $a>0$이므로 $b<0$

(3) y절편이 0이므로 $c=0$

(4) $x=1$일 때, $y<0$이므로 $a+b+c<0$

(5) $x=2$일 때, $y=0$이므로 $4a+2b+c=0$

(6) $x=-1$일 때, $y>0$이므로 $a-b+c>0$

정답 ➡ (1) $a>0$ (2) $b<0$ (3) $c=0$ (4) $a+b+c<0$ (5) $4a+2b+c=0$ (6) $a-b+c>0$

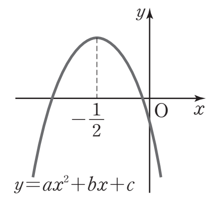
보충 설명

주어진 그래프의 모양을 보고 $a>0$, $b<0$, $c=0$임을 알 수 있지만 이것으로부터 세 식 $a+b+c$, $4a+2b+c$, $a-b+c$의 부호는 알 수 없습니다. (4)~(6)과 같은 식의 부호는 그 식이 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 x에 어떤 값을 대입한 것과 같아지는 지를 파악하고, 그래프에서 그 함숫값의 부호를 조사합니다.

풀이집 p.71

숫자 바꾸기

02-1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 식의 부호를 정하여라.

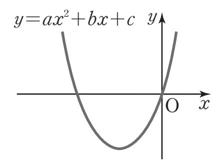


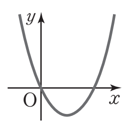
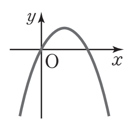
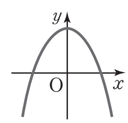
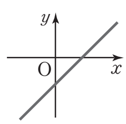
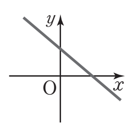
(1) a (2) b (3) c

(4) $a+b+c$ (5) $a-2b+4c$

표현 바꾸기

02-2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=cx^2-bx+a$의 그래프의 개형은?

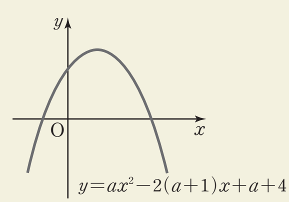


① 
② 
③ 
④ 
⑤ 

개념 넓히기 ★★☆

◆ 보충 설명

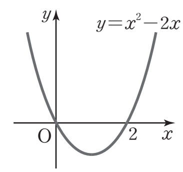
02-3 이차함수 $y=ax^2-2(a+1)x+a+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하여라.



정답 **02-1** (1) $a<0$ (2) $b<0$ (3) $c<0$ (4) $a+b+c<0$ (5) $a-2b+4c>0$
02-2 ⑤ **02-3** $-4<a<-1$

02 이차함수와 이차방정식

1 이차함수와 이차방정식의 관계



오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-2x$의 그래프는 x축과 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표는 0, 2입니다. 그런데 이차방정식 $x^2-2x=0$의 근을 구해 보면

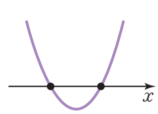
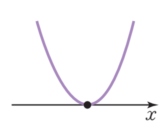
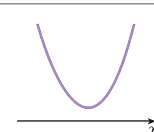
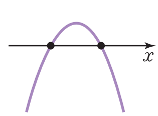
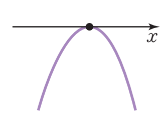
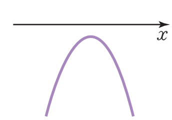
$$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 이차함수 $y=x^2-2x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-2x=0$의 실근과 같습니다.

이와 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같습니다. 즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같습니다.

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계를 알 수 있습니다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D의 부호와 실근의 개수, 이에 따른 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계를 정리하면 다음 표와 같습니다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 실근	2개 (서로 다른 두 실근)	1개 (중근)	0개 (서로 다른 두 허근)
$a>0$일 때, $y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$a<0$일 때, $y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점	서로 다른 두 점에서 만난다.	접한다. (한 점에서 만난다.)	만나지 않는다.

Example (1) 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9>0$$

이므로 이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만납니다.

(2) 이차방정식 $4x^2-4x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot1=0$$

이므로 이차함수 $y=4x^2-4x+1$의 그래프는 x축과 접합니다. (한 점에서 만납니다.)

(3) 이차방정식 $-2x^2+x-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$$D=1^2-4\cdot(-2)\cdot(-1)=-7<0$$

이므로 이차함수 $y=-2x^2+x-1$의 그래프는 x축과 만나지 않습니다.

Bible Point 이차함수와 이차방정식의 관계

1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.

3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	접한다. (한 점에서 만난다.)	만나지 않는다.

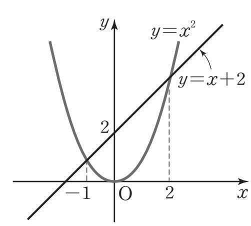
06

2 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 일반화하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계에 대하여 알아봅시다.

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+2$는 두 점에서 만나고, 이 두 점에서 두 함수의 함숫값이 서로 같습니다.

따라서 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2=x+2$, 즉 $x^2-x-2=0$의 실근과 같습니다.



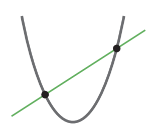
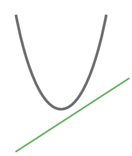
이와 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

의 실근과 같습니다. 즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이차방정식 ㉠의 실근의 개수와 같습니다.

따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 부호에 따라 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계를 알 수 있습니다.

이차방정식 ㉠의 판별식 D의 부호와 실근의 개수, 이에 따른 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계를 정리하면 다음 표와 같습니다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차방정식 ㉠의 실근	2개 (서로 다른 두 실근)	1개 (중근)	0개 (서로 다른 두 허근)
$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계			
	서로 다른 두 점에서 만난다.	접한다. (한 점에서 만난다.)	만나지 않는다.

특히, 판별식 $D=0$이면 이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나므로 직선은 이차함수의 그래프에 접한다고 하며, 이 직선을 이차함수의 그래프의 접선, 그 교점을 접점이라고 합니다.

Example

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2=2x+k$, 즉

$$x^2-2x-k=0$$

의 실근의 개수와 같습니다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-k)=1+k$$

이므로 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$는

(i) $\frac{D}{4}=1+k>0$, 즉 $k>-1$일 때, 서로 다른 두 점에서 만납니다.

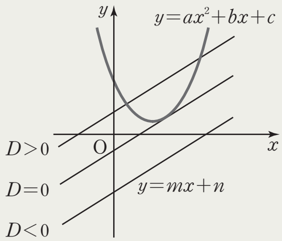
(ii) $\frac{D}{4}=1+k=0$, 즉 $k=-1$일 때, 접합니다. (한 점에서 만납니다.)

(iii) $\frac{D}{4}=1+k<0$, 즉 $k<-1$일 때, 만나지 않습니다.

Bible Point 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	접한다. (한 점에서 만난다.)	만나지 않는다.



개념 콕콕

1 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x+2$ (2) $y=-x^2+4x-4$ (3) $y=2x^2-3x-5$

2 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프와 다음 직선의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=-x+2$ (2) $y=2x-3$ (3) $y=x-3$

3 이차함수 $y=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

풀이 **1** (1) 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot2=-1<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 **0**이다.

(2) 이차방정식 $-x^2+4x-4=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=2^2-(-1)\cdot(-4)=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 **1**이다.

(3) 이차방정식 $2x^2-3x-5=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)=49>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 **2**이다.

2 (1) 이차방정식 $x^2-2x+1=-x+2$, 즉 $x^2-x-1=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=-x+2$는 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

(2) 이차방정식 $x^2-2x+1=2x-3$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=2x-3$은 **접한다. (한 점에서 만난다.)**

(3) 이차방정식 $x^2-2x+1=x-3$, 즉 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=x-3$은 **만나지 않는다.**

3 이차방정식 $x^2+1=mx$, 즉 $x^2-mx+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot1=m^2-4=0$, $(m+2)(m-2)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{m=-2}$ **또는** $\boldsymbol{m=2}$

06

예제 03

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=x^2-4x+2k$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

접근 방법

이차함수 $y=x^2-4x+2k$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+2k=0$의 실근임을 이용합니다.

Bible 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

상세 풀이

이차방정식 $x^2-4x+2k=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 2k=4-2k$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$4-2k>0 \qquad \therefore k<2$$

(2) 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$$4-2k=0 \qquad \therefore k=2$$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$$4-2k<0 \qquad \therefore k>2$$

정답 ➡ (1) $k<2$ (2) $k=2$ (3) $k>2$

보충 설명

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 다음과 같이 결정됩니다.

(1) $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ ➡ 접한다.(한 점에서 만난다.)

(3) $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

풀이집 p.72

숫자 바꾸기

03-1 이차함수 $y=-x^2+2(k-1)x-k^2$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

표현 바꾸기

03-2 이차함수 $y=x^2-4x+a$의 그래프가 점 $(1, b)$를 지나고 x축에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★☆☆

03-3 이차함수 $y=x^2-ax+9$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

06

정답 **03-1** (1) $k<\frac{1}{2}$ (2) $k=\frac{1}{2}$ (3) $k>\frac{1}{2}$ **03-2** 4
03-3 10

예제 04

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

접근 방법

이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-x-1=x+k$의 실근임을 이용합니다.

Bible 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 실근과 같다.

상세 풀이

이차방정식 $x^2-x-1=x+k$, 즉 $x^2-2x-k-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-k-1)=k+2$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$k+2>0 \qquad \therefore k>-2$$

(2) 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$$k+2=0 \qquad \therefore k=-2$$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$$k+2<0 \qquad \therefore k<-2$$

정답 ➡ (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

보충 설명

방정식의 실근의 개수와 함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있습니다.

(1) x에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같습니다.

(2) x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같습니다.

한편, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수를 구할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$를 $f(x)-g(x)=0$으로 변형하여 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 조사할 수도 있습니다.

풀이집 p.73

숫자 바꾸기

04-1 이차함수 $y=x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=2(x+1)+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

표현 바꾸기

04-2 이차함수 $y=-2x^2+ax+1$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 접할 때, 양수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

개념 넓히기 ★☆☆ ◆보충 설명

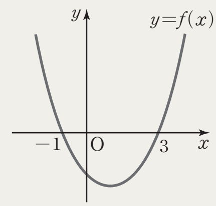
04-3 이차함수 $y=x^2+ax$의 그래프와 직선 $y=bx+(b-2)^2$이 접할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

정답 **04-1** (1) $k>-6$ (2) $k=-6$ (3) $k<-6$ **04-2** ③
04-3 4

예제 05

이차함수의 그래프와 이차방정식의 해

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x+1)=0$의 모든 실근의 합을 구하여라.



접근 방법

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나고 아래로 볼록하므로 이차함수를

$$f(x)=a(x+1)(x-3)\ \ (a>0)$$

이라고 할 수 있습니다.

Bible 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

상세 풀이

주어진 조건을 만족시키는 이차함수를

$$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$$

이라고 하면 방정식 $f(x+1)=0$에서

$$a(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 방정식 $f(x+1)=0$의 모든 실근의 합은

$$-2+2=0$$

정답 ➡ 0

보충 설명

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 3이므로 -1, 3은 방정식 $f(x)=0$의 두 근입니다. 따라서 $f(-1)=0$, $f(3)=0$이므로 $f(x+1)=0$이려면

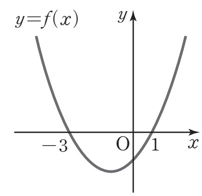
$$x+1=-1 \text{ 또는 } x+1=3$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

풀이집 p.73

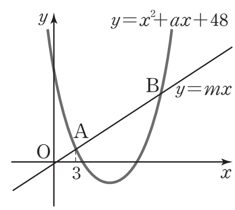
숫자 바꾸기

05-1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x-2)=0$의 모든 실근의 합을 구하여라.



표현 바꾸기

05-2 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax+48$의 그래프와 직선 $y=mx$가 두 점 A, B에서 만난다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B의 x좌표를 구하여라.



개념 넓히기 ★★☆

05-3 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 직선 $y=2x+3$과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 중 한 점의 x좌표가 $2+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

정답 **05-1** 2 **05-2** 16 **05-3** 29

예제 06

이차함수의 최대, 최소

다음 물음에 답하여라. (단, a, b는 상수이다.)

(1) 이차함수 $y=2x^2+4x+a$가 $x=b$에서 최솟값 5를 가질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 이차함수 $y=-3x^2+12ax+5$가 $x=4$에서 최댓값 b를 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

접근 방법

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 함수식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 구할 수 있습니다.

Bible 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

(1) $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 가지고, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 가지고, 최솟값은 없다.

상세 풀이

(1) 이차함수 $y=2x^2+4x+a$가 $x=b$에서 최솟값 5를 가지므로

$$y=2x^2+4x+a=2(x-b)^2+5$$
$$=2(x^2-2bx+b^2)+5$$
$$=2x^2-4bx+2b^2+5$$

따라서 $-4b=4$, $2b^2+5=a$이므로

$$b=-1,\ a=7$$
$$\therefore\ a+b=7+(-1)=6$$

(2) 이차함수 $y=-3x^2+12ax+5$가 $x=4$에서 최댓값 b를 가지므로

$$y=-3x^2+12ax+5=-3(x-4)^2+b$$
$$=-3(x^2-8x+16)+b$$
$$=-3x^2+24x-48+b$$

따라서 $12a=24$, $-48+b=5$이므로

$$a=2,\ b=53$$
$$\therefore\ a-b=2-53=-51$$

정답 ➡ (1) 6 (2) -51

보충 설명

(1)에서 $y=2x^2+4x+a=2(x+1)^2-2+a$로 변형하면 주어진 이차함수는 $x=-1$에서 최솟값 $-2+a$를 가지므로 이를 이용하여 두 상수 a, b의 값을 구할 수도 있습니다.

풀이집 p.74

숫자 바꾸기

06-1 다음 물음에 답하여라. (단, a, b는 상수이다.)

(1) 이차함수 $y=2x^2-3x+a$가 $x=b$에서 최솟값 $\frac{7}{8}$을 가질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 이차함수 $y=-3x^2-2ax+1$이 $x=-1$에서 최댓값 b를 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

06-2 이차함수 $y=2x^2-8x+k$의 최솟값이 -6일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★☆☆

06-3 이차함수 $f(x)=-2x^2+4ax+8a+3$의 최댓값을 $g(a)$라고 할 때, $g(a)$의 최솟값을 구하여라.

정답 **06-1** (1) $\frac{11}{4}$ (2) -1 **06-2** 2 **06-3** -5

예제 07

제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소

다음과 같이 주어진 범위에서 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(1) $1\le x\le 4$　　　　(2) $-1\le x\le 1$

접근 방법

주어진 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프의 축은 직선 $x=2$입니다. 이때, (1)의 범위는 축 $x=2$를 포함하므로 꼭짓점에서 최솟값을 가지고 축에서 멀리 떨어진 $x=4$에서 최댓값을 가집니다. 한편, (2)의 범위는 축 $x=2$를 포함하지 않으므로 주어진 범위의 양 끝값에서의 함숫값으로 최댓값과 최솟값을 구할 수 있습니다.

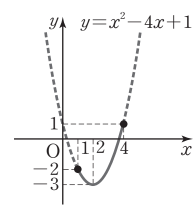
Bible　축이 주어진 범위 안에 포함되는지를 확인한다.

상세 풀이

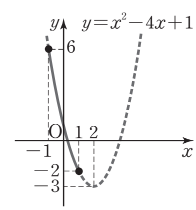
$f(x)=x^2-4x+1$이라고 하면

$$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

(1) $1\le x\le 4$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.
따라서 $x=2$일 때 최솟값은 -3이고, $x=4$일 때 최댓값은 1입니다.



(2) $-1\le x\le 1$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.
따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 6이고, $x=1$일 때 최솟값은 -2입니다.



정답 ⇒ (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : -3　(2) 최댓값 : 6, 최솟값 : -2

보충 설명

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

(1) $\alpha\le p\le\beta$일 때 : $f(\alpha)$, $f(\beta)$, q 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값입니다.

(2) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때 : $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값입니다.

풀이집 p.74

숫자 바꾸기

07-1 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(1) $y=2x^2+4x-1$ $(-2\le x\le 1)$ (2) $y=-x^2+x$ $(1\le x\le 3)$

표현 바꾸기

07-2 $-1\le x\le 3$에서 이차함수 $f(x)=-2x^2+8x+a$의 최댓값이 5일 때, $f(x)$의 최솟값은?

① -15 ② -14 ③ -13
④ -12 ⑤ -11

06

개념 넓히기 ★☆☆

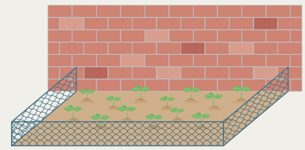
07-3 $1\le x\le a$에서 이차함수 $y=x^2-4x+k$의 최댓값이 10, 최솟값은 1일 때, 상수 a, k에 대하여 $a+k$의 값을 구하여라. (단, $a>2$)

정답 **07-1** (1) 최댓값 : 5, 최솟값 : -3 (2) 최댓값 : 0, 최솟값 : -6
07-2 ③ **07-3** 10

예제 08

이차함수의 최대, 최소의 활용

오른쪽 그림과 같이 상추를 심기 위하여 담장 옆에 길이가 20 m인 철망으로 직사각형 모양의 텃밭을 만들려고 한다. 텃밭의 최대 넓이를 구하여라. (단, 철망의 두께는 생각하지 않는다.)



접근 방법

이차함수의 최대, 최소의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 풉니다.

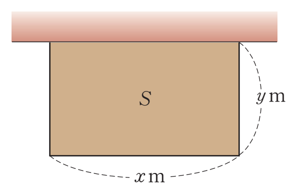
❶ 두 변수 x, y를 정합니다.

❷ x, y 사이의 관계식을 구하고 x의 값의 범위를 구합니다.

❸ 구하고자 하는 것을 한 문자로 나타내고 ❷의 x의 값의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구합니다.

Bible 구하는 것을 두 미지수 x, y로 나타낸다.

상세 풀이



텃밭의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면

$$x+2y=20$$

$$\therefore y=10-\frac{1}{2}x$$

가로와 세로의 길이는 각각 양수이므로

$$x>0,\ 10-\frac{1}{2}x>0 \qquad \therefore 0<x<20$$

텃밭의 넓이를 S m^{2}라고 하면

$$S=xy=x\left(10-\frac{1}{2}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+10x=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$$

따라서 S는 $x=10$일 때, 최댓값 50을 가지므로 텃밭의 최대 넓이는 50 m^{2}입니다.

정답 ➡ 50 m^2

보충 설명

직사각형 모양의 텃밭의 3면에 철망으로 경계를 표시한 것임에 주의합니다. 즉, 4면에 철망으로 경계를 표시한 것으로 착각하여 세로의 길이를

$$\frac{20-2x}{2}=10-x\text{(m)}$$

라고 하지 않도록 주의합니다.

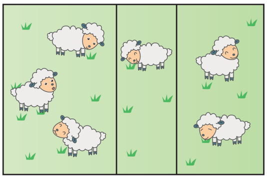
풀이집 p.75

숫자 바꾸기

08-1

오른쪽 그림과 같이 길이가 400 m인 철망을 사용하여 세 개의 직사각형 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 가축우리 전체 넓이의 최댓값을 구하여라.

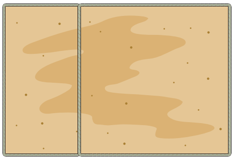
(단, 철망의 두께는 생각하지 않는다.)



표현 바꾸기

08-2

오른쪽 그림과 같이 운동장에 길이가 180 m인 끈을 모두 사용하여 직사각형 모양의 두 개의 영역으로 나누어 구분하였다. 큰 영역은 정사각형 모양으로 만들고, 두 개의 영역의 넓이의 합이 최대가 되도록 할 때, 정사각형 영역의 한 변의 길이는 몇 m로 해야 하는지 구하여라. (단, 끈의 두께는 생각하지 않는다.)



개념 넓히기 ★★☆

08-3

원가가 1개당 1만 원인 제품을 1개당 정가 3만 원에 판매하면 하루에 60개를 팔 수 있다. 정가를 1개당 천 원씩 올릴 때마다 하루 판매량은 2개씩 감소하고, 천 원씩 내릴 때마다 하루 판매량은 2개씩 증가한다고 할 때, 하루에 최대의 이익을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는지 구하여라.

정답 **08-1** 5000 m^2 **08-2** 30 m **08-3** 35000원