01 지수부등식의 풀이

(1) 지수부등식: 지수에 미지수가 있는 부등식
(2) 지수부등식의 풀이

① **밑을 같게 할 수 있는 경우**

: $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후

- $a>1$일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- $0<a<1$일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

주의 지수부등식에서 밑을 같게 한 후 지수를 비교할 때에는 부등호의 방향에 주의해야 한다.

② **a^x꼴이 반복되는 경우**

: $a^x = t(t>0)$로 치환 후 t에 대한 부등식을 푼다.

③ **밑에도 미지수가 있는 경우**

: 밑의 범위에 따라 부등호 방향이 바뀌므로 (i) $0<(\text{밑})<1$, (ii) $(\text{밑})=1$, (iii) $(\text{밑})>1$으로 범위를 나누어 푼다.

주의 지수부등식에서 $a^x = t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 풀 때, $a^x > 0$이므로 $t>0$임에 주의한다.

◪ 다음 부등식을 풀어라.

1. $4 \times 8^x < 32$

2. $3^{2x+1} < 3^x$

3. $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 25$

4. $2^x < 8$

5. $3^{x+2} \le 9\sqrt{3}$

6. $3^x > \frac{1}{9}$

7. $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-2} < 0.01$

8. $5^{7-2x} \ge \sqrt{5}^{\,3x}$

9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{-x+3}$

10. $3^{x-2} > 3^{-x+4}$

11. $2^x < 4^{x+1}$

12. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} \ge \frac{1}{3}$

13. $0.3^{x+1} < 0.027^{-x+2}$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

15. $9^{x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$

16. $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$

17. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}\geq\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}$

18. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2x}$

19. $64^{x}\geq(0.25)^{4-x^{2}}$

20. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}\leq 64$

21. $3^{2x}>729$

22. $4^{x}>2^{x+1}$

23. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}<\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}$

24. $1<3^{x}<3^{4}$

25. $\frac{1}{4}<2^{x}<8$

26. $\sqrt{2}<2^{3x}<64$

27. $3^{x+2}\leq 3^{x^{2}}\leq 27\times 9^{x}$

28. $\frac{1}{81}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<243$

29. $\frac{1}{8}<2^{x}<16$

30. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

31. $4^{x-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^{2}+1}<4\times 2^{2x}$

32. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x^{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}$

◪ 다음 부등식을 풀어라.

33. $7^{2x}-4\cdot7^{x}-21>0$

34. $4^{x}-5\cdot2^{x}+4<0$

35. $3^{2x}-10\cdot3^{x}+9\leq0$

36. $5^{2x}+5^{x+1}>50$

37. $9^{x}-10\cdot3^{x+1}+81\leq0$

38. $4^{x}-3\cdot2^{x+1}+8\leq0$

39. $2\times9^{x}+3^{x+1}-27>0$

40. $25^{x}-4\times5^{x}-5>0$

41. $4^{2x}-2\cdot4^{x}-8<0$

42. $9^{x}+3^{x+1}-18\geq0$

43. $7^{2x+1}-50\times7^{x}+7\leq0$

44. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-4\leq0$

45. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<-27$

46. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2$

◪ 다음 부등식을 풀어라. (단, $x>0$)

47. $x^{4x-2}\geq x^{3x+1}$

48. $x^{3x-4}>x^{2x}$

49. $x^{5x-1}>x^{x+2}$

50. $x^{x(x+1)} > x^{-3(x+1)}$

51. $x^{x-2} \geq x^{-2x+7}$

52. $x^{3x-1} < x^{x+3}$

53. $x^{x-1} \leq x^{5x-9}$

54. $x^{2x+5} \leq x^{3x+2}$

55. $x^{x^2-1} \leq x^{3x+9}$

56. $x^{x+1} > x^3$

57. $x^{x+2} > x^{3(2-x)}$

58. $x^{x+2} < x^{2x-1}$

◪ 다음 물음에 답하여라.

59. 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 32 < 0$을 만족시키는 정수 x의 최솟값을 구하여라.

60. 부등식 $3^{x^2-x} \leq 9^{5+x}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

61. 지수부등식 $16^x - 15 \times 4^x - 16 \leq 0$을 만족하는 모든 자연수 x의 값을 구하여라.

62. 지수부등식 $(0.5)^{-x} < 8 < 4^{2x-1}$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $4\alpha - \beta$의 값을 구하여라.

63. 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 64 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$를 만족시키는 모든 정수 x값들의 합을 구하여라.

64. x에 대한 부등식 $4^x + p \cdot 2^x + q < 0$의 해가 $1 < x < 4$일 때, 두 실수 p, q의 합을 구하여라.

02 지수부등식의 응용

$a^x=t(t>0)$로 치환한 후 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 이차부등식이 성립하는 조건을 확인한다.

참고 이차부등식이 성립하는 조건
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때 모든 실수 x에 대하여
① $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립 ⇨ $a>0$, $D<0$
② $ax^2+bx+c\ge 0$이 항상 성립 ⇨ $a>0$, $D\le 0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립 ⇨ $a<0$, $D<0$
④ $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립 ⇨ $a<0$, $D\le 0$

◪ 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

65. $4^{x+1}-2^{x+2}\ge k$

66. $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+2k>0$

67. $4^x-k\times 2^{x+2}+3\ge 0$

68. $4^x-k\cdot 2^{x+2}\ge -4$

69. $2^{2x}-2^{x+1}+k-1\ge 0$

70. $9^x-2\cdot 3^{x+1}+k-1>0$

71. $k\cdot 3^x\le 9^x-3^x+9$

◪ 다음 물음에 답하여라.

72. 모든 실수 x에 대하여 $4^x-2^{x+4}+k\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하여라.

73. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x+4\left(\frac{1}{3}\right)^x+k-1\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하여라.

74. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하여라.

75. 부등식 $4^x+2^{x+1}+1\ge k(2^x-1)$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 k의 값의 범위는 $\alpha\le k\le\beta$이다. 이 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

03 지수부등식의 실생활의 활용

주어진 문장 속에서 알맞은 지수부등식을 세워
지수부등식의 여러 가지 풀이에 맞게 답을 구한다.

76. 어떤 치료용 주사액은 혈관에 주입되면 몸에 흡수되기 시작하여 t시간 후에는 처음 주사한 양의 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^t$만큼 혈액 속에 남는다고 한다. 혈액 속에 남은 양이 처음 주사한 양의 $\frac{1}{64}$ 보다 적으면 약효가 없다고 판단할 때, 약효의 지속시간을 구하여라.

77. 어떤 치료용 주사액은 혈관에 주입되면 몸에 흡수되기 시작하여 t시간 후에는 처음 주사한 양의 $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^t$만큼 혈액 속에 남는다고 한다. 혈액 속에 남은 양이 처음 주사한 양의 $\frac{1}{625}$보다 적으면 약효가 없다고 판단할 때, 약효의 지속 시간을 구하여라. (단, 단위는 시간임)

78. 어느 자동차 회사의 영업 사원의 수 x명과 판매실적 y대 사이에는 $y=cx^{k^2+2k-1}$ (c는 상수)인 관계가 있다고 한다. 올해는 작년보다 영업 사원의 수를 50% 늘려 작년에 비해 2.25배의 판매 실적을 올렸다. 이 때 양수 k의 값을 구하여라.

79. n시간 후 A박테리아는 2^n마리씩, B박테리아는 8^n마리씩 증가한다. 두 배양기에 각각 A박테리아를 2마리, B박테리아를 1마리씩 넣고 시간이 경과한 후 열어보았더니 두 배양기의 박테리아의 수의 합이 72마리 이상이었다면 최소 몇 시간이 경과한 것인지 구하여라.

80. 공기가 어떤 공기 정화 필터 1개를 통과하면 오염 물질이 50%씩 줄어든다고 한다. 남아 있는 오염 물질의 양이 처음 오염 물질의 양의 $\frac{1}{128}$ 이하가 되도록 하려면 공기 정화 필터 n개를 통과시켜야 한다. 이때 n의 최솟값을 구하여라.

정답 및 해설

1) $x<1$

⇨ $4\times 8^{x}<32$에서 $2^{3x+2}<2^{5}$

밑이 1보다 크므로 $3x+2<5$ $\therefore\ x<1$

2) $x<-1$

⇨ $3^{2x+1}<3^{x}$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$2x+1<x$ $\therefore\ x<-1$

3) $x>-2$

⇨ $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}<25$에서 $5^{-x}<5^{2}$

밑이 1보다 크므로

$-x<2$ $\therefore\ x>-2$

4) $x<3$

⇨ $2^{x}<8$에서 $2^{x}<2^{3}$밑이 1보다 크므로 $x<3$

5) $x\le\frac{1}{2}$

⇨ $3^{x+2}\le 9\sqrt{3}$에서 $3^{x+2}\le 3^{\frac{5}{2}}$

밑이 1보다 크므로

$x+2\le\frac{5}{2}$ $\therefore\ x\le\frac{1}{2}$

6) $x>-2$

⇨ $3^{x}>\frac{1}{9}$에서 $3^{x}>3^{-2}$밑이 1보다 크므로

$x>-2$

7) $x>4$

⇨ $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-2}<0.01$에서 $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-2}<\left(\frac{1}{10}\right)^{2}$

밑이 1보다 작으므로

$x-2>2$ $\therefore\ x>4$

8) $x\le 2$

⇨ $5^{7-2x}\ge\sqrt{5}^{\,3x}$에서 $\sqrt{5}^{\,2(7-2x)}\ge\sqrt{5}^{\,3x}$

$\therefore\ \sqrt{5}^{\,14-4x}\ge\sqrt{5}^{\,3x}$

밑이 1보다 크므로

$14-4x\ge 3x$ $\therefore\ x\le 2$

9) $x\ge 4$

⇨ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}\le\left(\frac{1}{9}\right)^{-x+3}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{2(-x+3)}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+6}$

밑이 1보다 작으므로

$-x+2\ge-2x+6$ $\therefore\ x\ge 4$

10) $x>3$

⇨ $3^{x-2}>3^{-x+4}$에서 밑이 1보다 크므로

$x-2>-x+4$ $\therefore\ x>3$

11) $x>-2$

⇨ $2^{x}<4^{x+1}$에서

$2^{x}<2^{2(x+1)}$ $\therefore\ 2^{x}<2^{2x+2}$

밑이 1보다 크므로

$x<2x+2$ $\therefore\ x>-2$

12) $x\le 5$

⇨ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}\ge\frac{1}{3}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x-4\le 1$ $\therefore\ x\le 5$

13) $x>\frac{5}{4}$

⇨ $0.3^{x+1}<0.027^{-x+2}$에서 $0.027=0.3^{3}$이므로

$0.3^{x+1}<0.3^{-3x+6}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x+1>-3x+6$에서

$4x>5$ $\therefore\ x>\frac{5}{4}$

14) $x>4$

⇨ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$에서$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$

밑이 1보다 작으므로

$2x+1<3x-3$ $\therefore\ x>4$

15) $x>-3$

⇨ $9^{x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$ 에서 $3^{2x}>3^{x-3}$

밑이 1보다 크므로

$2x>x-3$ $\therefore\ x>-3$

16) $x>\frac{3}{2}$

⇨ $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$에서 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$2x>3$ $\therefore\ x>\frac{3}{2}$

17) $x\le 9$

⇨ $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}$ 에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x+5)}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+10}$

밑이 1보다 작으므로

$3x+1\le 2x+10$ $\therefore\ x\le 9$

18) $x>-\frac{2}{3}$

⇨ $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2x}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$2x+2>-x$ $\therefore\ x>-\frac{2}{3}$

19) $-1\le x\le 4$

⇨ $64^x\ge(0.25)^{4-x^2}$에서 $0.25=\frac{1}{4}=4^{-1}$이므로

$4^{3x}\ge 4^{x^2-4}$

밑이 1보다 크므로 $3x\ge x^2-4$에서

$x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\therefore\ -1\le x\le 4$

20) $x\ge -8$

⇨ $64=2^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x+2\ge -6$

$\therefore\ x\ge -8$

21) $x>3$

⇨ $729=3^6$에서 $3^{2x}>3^6$

밑이 1보다 크므로 $2x>6$ $\therefore\ x>3$

22) $x>1$

⇨ $4^x>2^{x+1}$에서 $2^{2x}>2^{x+1}$밑이 1보다 크므로

$2x>x+1$ $\therefore\ x>1$

23) $x>0$

⇨ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}<\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}$에서

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-(x-1)}<\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}$

$\therefore\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+1}<\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}$

밑이 1보다 크므로

$-x+1<2x+1$ $\therefore\ x>0$

24) $0<x<4$

⇨ $1<3^x<3^4$에서 $3^0<3^x<3^4$

밑이 1보다 크므로 $0<x<4$

25) $-2<x<3$

⇨ $\frac{1}{4}<2^x<8$에서 $2^{-2}<2^x<2^3$

밑이 1보다 크므로 $-2<x<3$

26) $\frac{1}{6}<x<2$

⇨ $\sqrt{2}<2^{3x}<64$에서 $2^{\frac{1}{2}}<2^{3x}<2^6$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{1}{2}<3x<6$ $\therefore\ \frac{1}{6}<x<2$

27) $x=-1$ 또는 $2\le x\le 3$

⇨ $3^{x+2}\le 3^{x^2}\le 27\times 9^x$에서

$3^{x+2}\le 3^{x^2}\le 3^{2x+3}$

밑이 1보다 크므로

$x+2\le x^2\le 2x+3$

(ⅰ) $x+2\le x^2$에서 $x^2-x-2\ge 0$

$(x+1)(x-2)\ge 0$

$\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 2$

(ⅱ) $x^2\le 2x+3$에서 $x^2-2x-3\le 0$

$(x+1)(x-3)\le 0$ $\therefore\ -1\le x\le 3$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-1$ 또는 $2\le x\le 3$

28) $-5<x<4$

⇨ $\frac{1}{81}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<243$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^4<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $-5<x<4$

29) $-3<x<4$

⇨ $\frac{1}{8}<2^x<16$에서 $2^{-3}<2^x<2^4$

밑이 1보다 크므로 $-3<x<4$

30) $\frac{7}{4}<x<\frac{9}{2}$

⇨ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $2x-1>\frac{5}{2}>x-2$

(ⅰ) $2x-1>\frac{5}{2}$에서 $2x>\frac{7}{2}$ $\therefore\ x>\frac{7}{4}$

(ⅱ) $\frac{5}{2}>x-2$에서 $x<\frac{9}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{7}{4}<x<\frac{9}{2}$

31) $-2<x<0$

⇨ $4^{x-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}<4\times 2^{2x}$에서

$2^{2x-1}<2^{-x^2-1}<2^{2x+2}$

밑이 1보다 크므로

$2x-1<-x^2-1<2x+2$

(ⅰ) $2x-1<-x^2-1$에서 $x^2+2x<0$

$x(x+2)<0$ $\therefore\ -2<x<0$

(ⅱ) $-x^2-1<2x+2$에서 $x^2+2x+3>0$

그런데 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로 이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $-2<x<0$

32) $-1<x<1$

⇨ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}$에서 밑 $\frac{1}{3}$이

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x+2>x^2>3x-2$

(ⅰ) $x+2>x^2$에서
$x^2-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$
$\therefore\ -1<x<2$
(ⅱ) $x^2>3x-2$에서
$x^2-3x+2>0$, $(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-1<x<1$

33) $x>1$
⇨ $7^{2x}-4\cdot7^x-21>0$, 즉 $(7^x)^2-4\cdot7^x-21>0$에서
$7^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-4t-21>0$, $(t+3)(t-7)>0$
이때, $t>0$에서 $t+3>0$이므로
$t-7>0$ $\therefore\ t>7$
즉, $7^x>7$이고, 밑이 1보다 크므로 $x>1$

34) $0<x<2$
⇨ $4^x-5\cdot2^x+4<0$, 즉 $(2^x)^2-5\cdot2^x+4<0$에서
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-5t+4<0$, $(t-1)(t-4)<0$
$\therefore\ 1<t<4$
즉, $2^0<2^x<2^2$이고, 밑이 1보다 크므로
$0<x<2$

35) $0\le x\le2$
⇨ $3^{2x}-10\cdot3^x+9<0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
주어진 부등식은
$t^2-10t+9\le0$, $(t-1)(t-9)\le0$
$\therefore\ 1\le t\le9$
즉 $1\le3^x\le9$이므로 $3^0\le3^x\le3^2$
밑이 1보다 크므로 $0\le x\le2$

36) $x>1$
⇨ $5^{2x}+5^{x+1}>50$, 즉 $(5^x)^2+5\cdot5^x>50$에서
$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+5t>50$
$t^2+5t-50>0$, $(t-5)(t+10)>0$
이때, $t>0$에서 $t+10>0$이므로
$t-5>0$ $\therefore\ t>5$
즉, $5^x>5$이고, 밑이 1보다 크므로 $x>1$

37) $1\le x\le3$
⇨ $9^x-10\cdot3^{x+1}+81\le0$,
즉 $(3^x)^2-10\cdot3\cdot3^x+81\le0$에서
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-30t+81\le0$, $(t-3)(t-27)\le0$
$\therefore\ 3\le t\le27$
즉, $3\le3^x\le3^3$이고, 밑이 1보다 크므로
$1\le x\le3$

38) $1\le x\le2$
⇨ $4^x-3\cdot2^{x+1}+8\le0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면
주어진 부등식은
$t^2-6t+8\le0$, $(t-2)(t-4)\le0$
$\therefore\ 2\le t\le4$
즉 $2\le2^x\le4$이므로 $2^1\le2^x\le2^2$
밑이 1보다 크므로 $1\le x\le2$

39) $x>1$
⇨ $2\times9^x+3^{x+1}-27>0$에서
$2\times(3^x)^2+3\times3^x-27>0$
$3^x=t\ (t>0)$로 치환하면 $2t^2+3t-27>0$
$(2t+9)(t-3)>0$
$\therefore\ t<-\frac{9}{2}$ 또는 $t>3$
그런데 $t>0$이므로 $t>3$
따라서 $3^x>3$이고 밑이 1보다 크므로 $x>1$

40) $x>1$
⇨ $5^{2x}-4\times5^x-5>0$에서
$(5^x)^2-4\times5^x-5>0$
$5^x=t\ (t>0)$로 치환하면
$t^2-4t-5>0$
$(t+1)(t-5)>0$ $\therefore\ t<-1$ 또는 $t>5$
그런데 $t>0$이므로 $t>5$
따라서 $5^x>5$이고 밑이 1보다 크므로 $x>1$

41) $x<1$
⇨ $4^{2x}-2\cdot4^x-8<0$, 즉 $(4^x)^2-2\cdot4^x-8<0$에서
$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-2t-8<0$, $(t+2)(t-4)<0$
이때, $t>0$에서 $t+2>0$이므로
$t-4<0$ $\therefore\ t<4$
즉, $4^x<4$이고, 밑이 1보다 크므로 $x<1$

42) $x\ge1$
⇨ $9^x+3^{x+1}-18\ge0$, 즉 $(3^x)^2+3\cdot3^x-18\ge0$에서
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2+3t-18\ge0$, $(t+6)(t-3)\ge0$
이때, $t>0$에서 $t+6>0$이므로
$t-3\ge0$ $\therefore\ t\ge3$
즉, $3^x\ge3$이고, 밑이 1보다 크므로 $x\ge1$

43) $-1\le x\le1$
⇨ $7^{2x+1}-50\times7^x+7\le0$에서
$7\times(7^x)^2-50\times7^x+7\le0$
$7^x=t\ (t>0)$로 치환하면 $7t^2-50t+7\le0$
$(7t-1)(t-7)\le0$ $\therefore\ \frac{1}{7}\le t\le7$
따라서 $7^{-1}\le7^x\le7^1$이고 밑이 1보다 크므로
$-1\le x\le1$

44) $x\ge-2$

⇨ $\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\le 0$,

즉 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\le 0$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-4\le 0,\ (t+1)(t-4)\le 0$

이때, $t>0$에서 $t+1>0$이므로

$t-4\le 0$ $\quad\therefore\ t\le 4$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고, 밑이 1보다 작으므로

$x\ge -2$

45) $-2<x<-1$

⇨ $\left(\frac{1}{9}\right)^x-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x<-27$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등시은

$t^2-12t+27<0,\ (t-3)(t-9)<0$

$\therefore\ 3<t<9$

즉 $3<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $-2<x<-1$

46) $-1\le x\le 0$

⇨ $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-3\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\le 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 치환하면 $t^2-3t+2\le 0$

$(t-1)(t-2)\le 0$ $\quad\therefore\ 1\le t\le 2$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^0\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작은 양수이므로 $-1\le x\le 0$

47) $0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

⇨ $x^{4x-2}\ge x^{3x+1}$에서

(ⅰ) $0<x<1$일 때,

$4x-2\le 3x+1$ $\quad\therefore\ x\le 3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ⅱ) $x=1$일 때,

$1^2\ge 1^4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ⅲ) $x>1$일 때,

$4x-2\ge 3x+1$ $\quad\therefore\ x\ge 3$

그런데 $x>1$이므로 $x\ge 3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x^{4x-2}\ge x^{3x+1}$의 해는

$0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

48) $0<x<1$ 또는 $x>4$

⇨ $x^{3x-4}>x^{2x}$에서 $x=1$일 때에는 부등식이 성립하지 않는다.

(ⅰ) $0<x<1$일 때, $3x-4<2x$ $\quad\therefore\ x<4$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ⅱ) $x>1$일 때, $3x-4>2x$ $\quad\therefore\ x>4$

그런데 $x>1$이므로 $x>4$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>4$

49) $0<x<\frac{3}{4}$ 또는 $x>1$

⇨ $x^{5x-1}>x^{x+2}$

(ⅰ) $x>1$, $5x-1>x+2$ $\quad\therefore\ x>1$

(ⅱ) $0<x<1$, $5x-1<x+2$ $\quad\therefore\ 0<x<\frac{3}{4}$

(ⅰ),(ⅱ)에서 $0<x<\frac{3}{4}$ 또는 $x>1$

50) $x>1$

⇨ $x^{x(x+1)}>x^{-3(x+1)}$에서

(ⅰ) $x>1$일 때,

$x(x+1)>-3(x+1)$에서 $x^2+4x+3>0$

$(x+3)(x+1)>0$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>-1$

그런데 $x>1$이므로 $x>1$

(ⅱ) $0<x<1$일 때,

$x(x+1)<-3(x+1)$에서 $x^2+4x+3<0$

$(x+3)(x+1)<0$

$\therefore\ -3<x<-1$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $x=1$일 때, $1^2=1^{-6}$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $x>1$

51) $0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

⇨ $x^{x-2}\ge x^{-2x+7}$에서

(ⅰ) $x>1$일 때,

$x-2\ge -2x+7$에서 $x\ge 3$

$\therefore\ x\ge 3$

(ⅱ) $0<x<1$일 때,

$x-2\le -2x+7$에서 $x\le 3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ⅲ) $x=1$일 때,

$1^{-1}=1^5=1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

$\therefore\ x=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

52) $1<x<2$

⇨ $x^{3x-1}<x^{x+3}$에서

(ⅰ) $x>1$일 때,

$3x-1<x+3$에서 $x<2$ $\quad\therefore\ 1<x<2$

(ⅱ) $0<x<1$일 때,

$3x-1>x+3$에서 $x>2$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $x=1$일 때, $1^2=1^4=1$이므로 주어진 부등식

은 성립하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $1<x<2$

53) $0<x\le 1$ 또는 $x\ge 2$
⇨ $x^{x-1}\le x^{5x-9}$에서
(ⅰ) $0<x<1$일 때,
$x-1\ge 5x-9$ $\quad\therefore\ x\le 2$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때,
$1^0\le 1^{-4}$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ⅲ) $x>1$일 때,
$x-1\le 5x-9$ $\quad\therefore\ x\ge 2$
그런데 $x>1$이므로 $x\ge 2$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x^{x-1}\le x^{5x-9}$의 해는
$0<x\le 1$ 또는 $x\ge 2$

54) $0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$
⇨ $x^{2x+5}\le x^{3x+2}$에서
(ⅰ) $0<x<1$일 때, $2x+5\ge 3x+2$ $\therefore\ x\le 3$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때,
$1^7\le 1^5$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ⅲ) $x>1$일 때 $2x+5\le 3x+2$ $\quad\therefore\ x\ge 3$
그런데 $x>1$이므로 $x\ge 3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x^{2x+5}\le 3^{3x+2}$의 해는
$0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

55) $1\le x\le 5$
⇨ $x^{x^2-1}\le x^{3x+9}$에서
(ⅰ) $x>1$일 때,
$x^2-1\le 3x+9$에서 $x^2-3x-10\le 0$
$(x+2)(x-5)\le 0$
$\therefore\ -2\le x\le 5$
그런데 $x>1$이므로 $1<x\le 5$
(ⅱ) $0<x<1$일 때,
$x^2-1\ge 3x+9$에서 $x^2-3x-10\ge 0$
$(x+2)(x-5)\ge 0$
$\therefore\ x\le -2$ 또는 $x\ge 5$
그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.
(ⅲ) $x=1$일 때,
$1^0=1^{12}=1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
$\therefore\ x=1$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $1\le x\le 5$

56) $0<x<1$ 또는 $x>2$
⇨ (ⅰ) $0<x<1$일 때,
$x+1<3$ $\quad\therefore\ x<2$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때,
$1^2>1^3$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
(ⅲ) $x>1$일 때,
$x+1>3$ $\quad\therefore\ x>2$
그런데 $x>1$이므로 $x>2$
따라서 $x^{x+1}>x^3$의 해는 $0<x<1$ 또는 $x>2$

57) $0<x<1$ 또는 $x>1$
⇨ $x^{x+2}>x^{3(2-x)}$에서
(ⅰ) $0<x<1$일 때, $x+2<3(2-x)$
$\therefore\ x<1$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때,
$1^3>1^3$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
(ⅲ) $x>1$일 때, $x+2>3(2-x)$ $\quad\therefore\ x>1$
그런데 $x>1$이므로 $x>1$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x^{x+2}>x^{3(2-x)}$의 해는
$0<x<1$ 또는 $x>1$

58) $0<x<1$ 또는 $x>3$
⇨ $x^{x+2}<x^{2x-1}$에서
(ⅰ) $0<x<1$일 때,
$x+2>2x-1$ $\quad\therefore\ x<3$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때,
$1^3<1^1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
(ⅲ) $x>1$일 때,
$x+2<2x-1$ $\quad\therefore\ x>3$
그런데 $x>1$이므로 $x>3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x^{x+2}<x^{2x-1}$의 해는
$0<x<1$ 또는 $x>3$

59) -1

60) 8개
⇨ $3^{x^2-x}\le 9^{5+x}$에서 $9^{5+x}=3^{2(5+x)}=3^{10+2x}$이므로
$3^{x^2-x}\le 3^{10+2x}$
밑이 1보다 크므로
$x^2-x\le 10+2x$, $x^2-3x-10\le 0$
$(x+2)(x-5)\le 0$ $\quad\therefore\ -2\le x\le 5$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 8개이다.

61) 1, 2
⇨ $16^x-15\times 4^x-16\le 0$에서
$(4^x)^2-15\times 4^x-16\le 0$
$4^x=t$ $(t>0)$로 치환하면
$(t+1)(t-16)\le 0$ $\quad\therefore\ -1\le t\le 16$
그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 16$
따라서 $0<4^x\le 4^2$이고 밑이 1보다 크므로 $x\le 2$
로 모든 자연수 x의 값은 1, 2이다.

62) 2
⇨ $(0.5)^{-x}<8<4^{2x-1}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x<2^3<2^{4x-2}$

따라서 $x<3$이고 $4x>5$이므로 $\frac{5}{4}<x<3$을 만족한다.
$\therefore\ 4\alpha-\beta=5-3=2$

63) -14

64) 14
⇨ 주어진 부등식의 해가 $1<x<4$이므로
$2<2^x<16$
$(2^x-2)(2^x-16)<0$
$4^x-18\times2^x+32<0$
따라서 $p=-18, q=32$이므로 $p+q=14$이다.

65) $k\le-1$
⇨ $4^{x+1}-2^{x+2}\ge k$, 즉 $4\cdot(2^x)^2-4\cdot2^x-k\ge0$에서
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$4t^2-4t-k\ge0 \quad \therefore\ 4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-k-1\ge0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로 $-k-1\ge0 \quad \therefore\ k\le-1$

66) $k>2$
⇨ $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+2k>0$,
즉 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2k>0$에서
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-4t+2k>0 \quad \therefore\ (t-2)^2+2k-4>0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로 $2k-4>0 \quad \therefore\ k>2$

67) $k\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

68) $k\le1$
⇨ $2^x=t$라 하고
$f(t)=t^2-4kt+4\ge0\ (t>0)$라 하면
$f(t)=(t-2k)^2-4k^2+4$이므로
(ⅰ) 축의 방정식 $t=2k<0$이면
$k<0$일 때, $f(t)\ge0$가 항상 성립한다.
(ⅱ) 축의 방정식 $t=2k\ge0$,
즉, $k\ge0$일 때, 판별식 $4k^2-4\le0$이므로
$-1\le k\le1$이다.
따라서 $f(t)\ge0$이기 위해 $0\le k\le1$이 성립한다.
그러므로 두 조건에 의해 $f(t)\ge0$이 성립하는 k의 범위는 $k\le1$이다.

69) $k\ge2$
⇨ $2^{2x}-2^{x+1}+k-1\ge0$, 즉 $(2^x)^2-2\cdot2^x+k-1\ge0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-2t+k-1\ge0 \quad \therefore\ (t-1)^2+k-2\ge0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로 $k-2\ge0 \quad \therefore\ k\ge2$

70) $k>10$
⇨ $9^x-2\cdot3^{x+1}+k-1>0$,
즉 $(3^x)^2-2\cdot3\cdot3^x+k-1>0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+k-1>0$
$\therefore\ (t-3)^2+k-10>0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로 $k-10>0 \quad \therefore\ k>10$

71) $k\le5$
⇨ $3^x=t(t>0)$로 치환하자.
$kt\le t^2-t+9$
$t^2-(1+k)t+9\ge0$
$f(t)=t^2-(1+k)t+9$라고 하자.
$f(t)$는 $\frac{1+k}{2}$를 축으로 갖는 이차함수이다.
(ⅰ) $\frac{1+k}{2}<0$, $k<-1$일 때, $f(t)$는 $t=0$일 때, 최솟값을 갖는다.
$f(0)=9\ge0$
따라서 $k<-1$일 때 주어진 부등식이 항상 성립한다.
(ⅱ) $\frac{1+k}{2}\ge0$, $k\ge-1$일 때,
$f(t)$는 $t=\frac{1+k}{2}$일 때 최솟값을 갖는다.
$f\left(\frac{1+k}{2}\right)=9-\frac{k^2+2k+1}{4}\ge0$
$36\ge k^2+2k+1$
$k^2+2k-35\le0$
$(k+7)(k-5)\le0$
$-7\le k\le5$
$\therefore\ -1\le k\le5$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $k\le5$

72) 64
⇨ $2^x=t(t>0)$라 하면 $t^2-16t+k\ge0$
$\therefore\ (t-8)^2+k-64\ge0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
$k-64\ge0 \quad \therefore\ k\ge64$
따라서 실수 k의 최솟값은 64이다.

73) 1

74) 2
⇨ $2^{\frac{x}{2}}=t(t>0)$라 하면 $2t^2-4t+a\ge0$
$2(t-1)^2-2+a\ge0$
$t>0$의 범위에서 a의 최솟값은 $t=1$일 때,
$-2+a\ge0$이므로 $a\ge2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

75) 8

⇨ $2^x = t$라 하면

$t^2+2t+1 \geq k(t-1)$

$t^2+(2-k)t+1+k \geq 0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 t에 대하여 성립하므로

$(2-k)^2-4(1+k) \leq 0$을 만족한다.

$k^2-8k \leq 0 \qquad \therefore\ 0 \leq k \leq 8$

$\therefore\ \alpha+\beta=0+8=8$

76) 18시간

⇨ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^t < \dfrac{1}{64}$

$2^{-\frac{t}{3}} < 2^{-6}$

$-\dfrac{t}{3} < -6$

$\therefore\ t>18$

77) 16시간

⇨ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^t < \dfrac{1}{625}$

$\left(\dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^t = 5^{-\frac{t}{4}} < \dfrac{1}{625} = 5^{-4}$

$-\dfrac{t}{4} < -4,\ t>16$

따라서 약의 지속시간은 16시간 이다.

78) $k=1$

⇨ 작년 사원수를 x라고 하자.

올해 사원수는 $1.5x$이다.

작년의 판매실적을 y라고 하자.

올해 판매실적은 $2.25y$이다.

$y=cx^{k^2+2k-1}$

$(2.25y)=c(1.5x)^{k^2+2k-1}$

두 식을 나누자.

$2.25=(1.5)^{k^2+2k-1}$

$\dfrac{9}{4}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k^2+2k-1}$

$k^2+2k-1=2,\ k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0 \qquad \therefore\ k=1$

79) 2시간

⇨ x시간 경과 후 A박테리아의 수 : 2×2^x마리

x시간 경과 후 B박테리아의 수 : 1×8^x마리

두 배양기의 박테리아의 수의 합이 72마리 이상이므로 $2\times 2^x + 8^x \geq 72$

이때, $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$2t+t^3 \geq 72$

$t^3+2t-72 \geq 0$

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{4} & 1 & 0 & 2 & -72 \\ & & \boxed{4} & \boxed{16} & \boxed{72} \\ \hline & 1 & \boxed{4} & \boxed{18} & \boxed{0} \end{array}$$

$(t-4)(t^2+4t+18) \geq 0$이고

$t^2+4t+18=(t+2)^2+14>0$이므로

$t-4 \geq 0 \qquad \therefore\ t \geq 4$

즉, $2^x \geq 4=2^2$이므로 $x \geq 2$

따라서 최소 2시간이 경과한 것이다.

80) 7

⇨ 처음 오염 물질의 양을 A라 하면

$A\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq A\times\dfrac{1}{128},\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \qquad \therefore\ n \geq 7$

따라서 n의 최솟값은 7이다.