01 삼각방정식의 풀이

1. 삼각방정식
: 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 방정식

2. 삼각방정식의 풀이
① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ (또는 $\cos x=k$ 또는 $\tan x=k$) 꼴로 고친다.
② 함수 $y=\sin x$(또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$를 그린다.
③ 주어진 범위에서 삼각함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 찾아 방정식의 해를 구한다.

◪ $0 \le x < 2\pi$**일 때, 다음 방정식을 풀어라.**

1. $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

2. $3\tan x-\sqrt{3}=0$

3. $\tan x=\sqrt{3}$

4. $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}=0$

6. $2\cos x+\sqrt{3}=0$

7. $2\cos x-\sqrt{3}=0$

8. $2\sin x-\sqrt{2}=0$

9. $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. $\sqrt{3}\tan 2x+1=0$

11. $\sqrt{3}\tan x-\sqrt{3}=0$

12. $2\sin 2x=-\sqrt{3}$

13. $\tan \dfrac{3}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

14. $\cos x = -\frac{1}{2}$

15. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

16. $2\sin 2x = 1$

17. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

19. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

20. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

21. $\sin(2x+\pi) = -\frac{1}{2}$

22. $\tan x = 2\sin x$

23. $\tan^2 x - 3 = 0$

24. $\cos^2 x - 1 = 0$

25. $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

26. $2\cos^2 x - \cos x = 0$

27. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

28. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

29. $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

30. $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

31. $-2\cos^2 x+\sin x+1=0$

32. $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$

33. $\cos^2 x+\sin x-1=0$

34. $\tan^2 x-(1-\sqrt{3})\tan x-\sqrt{3}=0$

◪ $0 \le x < 2\pi$**일 때, 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.**

35. $\sin x=\frac{1}{2}$

36. $2\cos x=\sqrt{3}$

37. $3\sin x-1=0$

38. $\sqrt{3}\tan x+1=0$

39. $2\cos^2 x+\sin x-1=0$

40. $2\sin x\cos x-\sin x=0$

41. $2\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$

42. $3\sin^2 x-2=0$

43. $\cos(\pi\sin x)=-\frac{1}{2}$

44. $\cos x+2\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)=0$

45. $\cos(\cos x)=1$

46. $(3\cos x-1)(4\cos x-3)=0$

◪ $-\pi < x < \pi$일 때, 다음 방정식을 풀어라.

47. $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$

48. $\tan\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

◪ 다음 물음에 답하여라.

49. $0 \le x \le 4\pi$에서 삼각방정식 $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$의 모든 해의 합을 구하여라.

50. 삼각방정식 $2\sin^2 x-\sin x-1=0$의 해를 구하여라. (단, $0 \le x < 3\pi$)

51. $0 \le x < \pi$일 때, 방정식 $\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구하여라.

02 삼각방정식의 실근의 개수

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

◪ 다음 방정식의 실근의 개수를 구하여라.

52. $\sin \pi x=\frac{1}{3}x$

53. $\cos \pi x=|x|$

54. $\cos \pi x=\frac{1}{3}|x|$

55. $\sin \pi x=\frac{1}{2}x$

56. $\sin\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)-\frac{x}{8}=0$

57. $\frac{1}{3}\log_2 x=-\sin \pi x$

◪ 다음 물음에 답하여라.

58. 방정식 $4\sin^2 x + 4\cos x - k = 0$이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

59. $\sin^2 x - 4\cos x + k = 0$이 실근을 갖기 위한 k의 값의 범위를 구하여라.

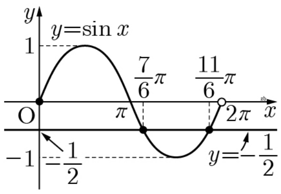
60. $\cos^2 x - 2\cos x + k = 0$이 실근을 갖기 위한 k의 값의 범위를 구하여라.

61. 방정식 $2\cos^2 x + (2k+1)\sin x - k - 2 = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 k의 값을 구하여라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

62. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x - \cos\theta = 0$이 중근을 가지도록 하는 θ의 값을 구하여라. (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

정답 및 해설

1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

⇨ 

그림에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

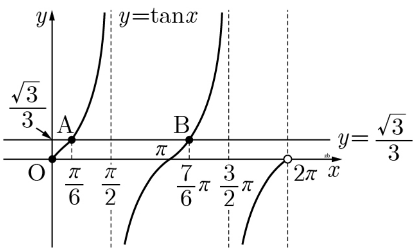
2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

⇨ $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $0 \le x < 2\pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표를 구한다.

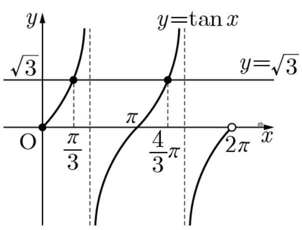
$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 점 A의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{6}$

$y=\tan x$의 그래프의 주기는 π이므로 점 B의 x좌표는 $x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$



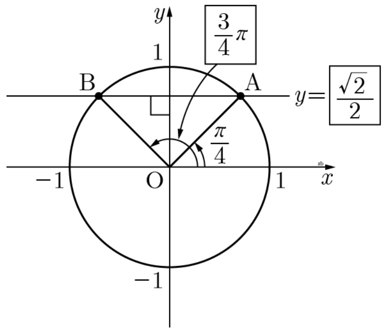
3) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

⇨ 

그림에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로

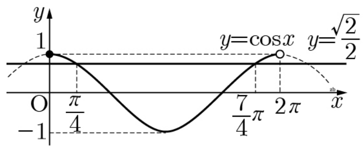
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

4) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

⇨ 

그림과 같이 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 단위원의 두 교점 A, B에 대하여 두 동경 OA, OB가 나타내는 각의 크기를 구하면 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

5) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

⇨ 

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{1}{2}=0$, 즉 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 근은 함수 $y=\cos x$ $(0 \le x < 2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

6) $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

7) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

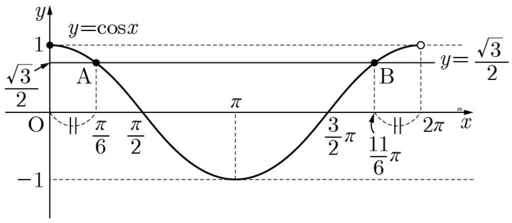
⇨ $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $0 \le x < 2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표를 구한다.

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 점 A의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{6}$

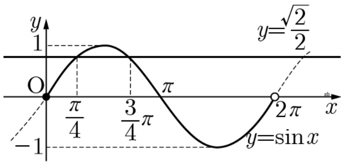
점 A와 점 B는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 점 B의 x좌표는 $x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110



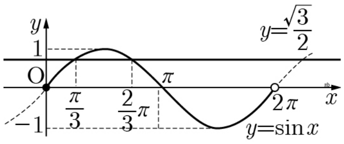
8) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

⇨ 

$2\sin x-\sqrt{2}=0$, 즉 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 근은 함수 $y=\sin x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

9) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

⇨ 

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 근은 함수 $y=\sin x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

10) $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

⇨ $2x=t$ $(0\le x<2\pi)$로 놓으면

$\tan t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(0\le t<4\pi)$에서

$t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{17}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{23}{6}\pi$이므로 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

11) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

⇨ $\sqrt{3}\tan x-\sqrt{3}=0$, 즉 $\tan x=1$의 근은 함수 $y=\tan x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

12) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

⇨ $2x=t$ $(0\le x<2\pi)$로 놓으면

$\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0\le t<4\pi)$에서

$t=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{10}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{11}{3}\pi$이므로 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

13) $x=\frac{\pi}{9}$ 또는 $x=\frac{7}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{9}\pi$

⇨ $\tan\frac{3}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $\frac{3}{2}x=t$로 놓으면 $0\le t<3\pi$이고, $\tan t=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 근은 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 t좌표이므로

$t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{9}$ 또는 $x=\frac{7}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{9}\pi$

14) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

⇨ $0\le x<2\pi$일 때, $\cos x=-\frac{1}{2}$의 해는

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

15) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

⇨ $\cos 2x=-\frac{1}{2}$에서 $2x=t$로 놓으면 $0\le t<4\pi$이고, $\cos t=-\frac{1}{2}$의 근은 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표이므로

$t=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{8}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{10}{3}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

16) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$

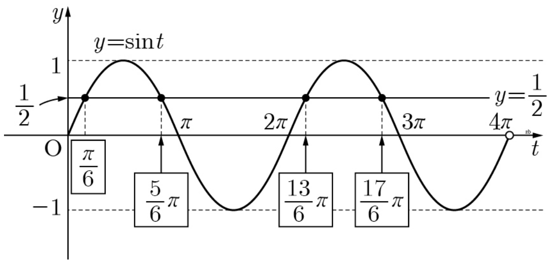
또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

⇨ $\sin 2x=\frac{1}{2}$이고 $2x=t$로 치환하면 $\sin t=\frac{1}{2}$

한편, $0\le x<2\pi$이므로 $0\le t<4\pi$ …… ㉠

㉠의 범위에서 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$

의 교점의 t좌표를 구하면 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$



$2x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $2x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{13}{6}\pi$

또는 $2x=\frac{17}{6}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$

또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

17) $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

⇨ $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

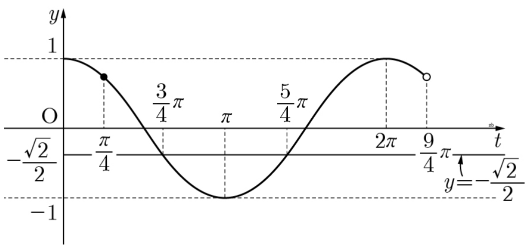
$x+\frac{\pi}{4}=t$로 치환하면 $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, $0\le x<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$ …… ㉠

㉠의 범위에서 $y=\cos t$의 그래프와

직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표를 구하면

$\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$



$x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

18) $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

⇨ $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ 에서 $x-\frac{\pi}{3}=t$ $(0\le x<2\pi)$로

놓으면 $\cos t=-\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi\right)$에서 $t=\frac{2}{3}\pi$

또는 $t=\frac{4}{3}\pi$이므로 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

19) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

⇨ $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x+\frac{\pi}{6}=t$ $(0\le x<2\pi)$

로 놓으면 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi\right)$에서

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

20) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

⇨ $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$에서

$x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$이고,

$\cos t=\frac{1}{2}$의 근은 함수 $y=\cos t$로 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표이므로

$t=\frac{1}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

21) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는

$x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

⇨ $\sin(2x+\pi)=-\frac{1}{2}$에서

$2x+\pi=t$로 놓으면 $\pi\le t<5\pi$이고, $\sin t=-\frac{1}{2}$의

근은 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의

교점의 t좌표이므로

$t=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{19}{6}\pi$

또는 $t=\frac{23}{6}\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$

또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

22) $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

23) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는

$x=\frac{5}{3}\pi$

⇨ $\tan^2 x-3=0$에서 $\tan x=t$로 놓으면

$t^2-3=0$, $(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\sqrt{3}$

즉, $\tan x=-\sqrt{3}$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

(ⅰ) $\tan x=-\sqrt{3}$ 일 때, $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ⅱ) $\tan x=\sqrt{3}$ 일 때, $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

24) $x=0$ 또는 $x=\pi$

⇨ $\cos^2 x-1=0$ 에서 $\cos x=t$ 로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고 $t^2-1=0$, $(t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

즉, $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=1$

(ⅰ) $\cos x=-1$ 일 때, $x=\pi$

(ⅱ) $\cos x=1$ 일 때, $x=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$

25) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

⇨ $3\sin^2 x-\cos^2 x=0$ 에서 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 이므로

$4\sin^2 x-1=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고,

$4t^2-1=0$, $(2t+1)(2t-1)=0$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

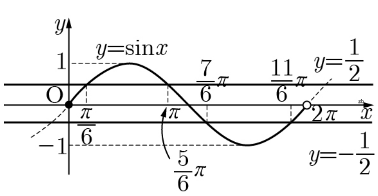
즉, $\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

(ⅰ) $\sin x=-\frac{1}{2}$ 일 때, $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=\frac{1}{2}$ 일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

또는 $x=\frac{11}{6}\pi$



26) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

⇨ $2\cos^2 x-\cos x=0$

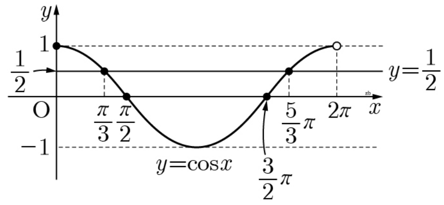
$\cos x(2\cos x-1)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서

(ⅰ) $\cos x=0$이면 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $\cos x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$



$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

27) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

⇨ $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$ 에서

$\cos x=t$ 로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고,

$2t^2+3t+1=0$, $(2t+1)(t+1)=0$

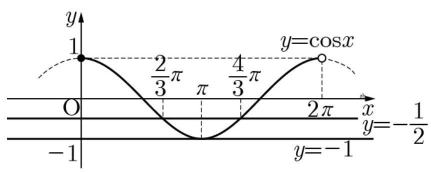
$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=-1$

즉, $\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

(ⅰ) $\cos x=-\frac{1}{2}$ 일 때, $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(ⅱ) $\cos x=-1$ 일 때, $x=\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



28) $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

⇨ $2\sin^2 x-\sin x-1=0$에서

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고,

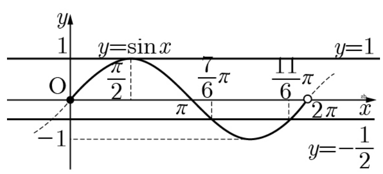
$2t^2-t-1=0$, $(2t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$

(ⅰ) $\sin x=-\frac{1}{2}$ 일 때, $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$



29) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

30) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

⇨ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

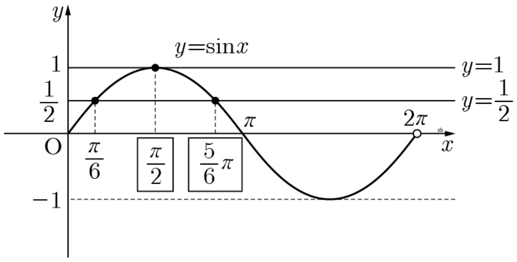
$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$0\le x<2\pi$에서

(ⅰ) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$



$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

31) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

⇨ $-2\cos^2 x+\sin x+1=0$에서 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고,

$2t^2+t-1=0,\ 2(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

즉, $\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

(ⅰ) $\sin x=-1$일 때, $x=\frac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ⅰ),(ⅱ)에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

32) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

⇨ 주어진 삼각방정식은 $(2\sin x+1)(\sin x-2)=0$이고 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x=-\frac{1}{2}$을 만족하는 x를 구한다.

$0\le x\le 2\pi$에서 $\sin x=-\frac{1}{2}$을 만족하는 x는 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이다.

33) $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

⇨ $\cos^2 x+\sin x-1=0$에서 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $-\sin^2 x+\sin x=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고,

$-t^2+t=0,\ t(t-1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=1$

즉, $\sin x=0$ 또는 $\sin x=1$

(ⅰ) $\sin x=0$일 때, $x=0$ 또는 $x=\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

34) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

⇨ $\tan^2 x-(1-\sqrt{3})\tan x-\sqrt{3}=0$

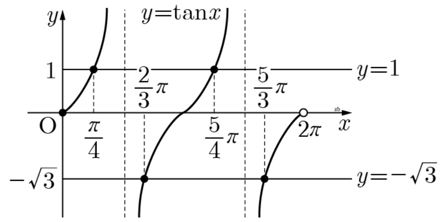
$(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-1)=0$

$\therefore\ \tan x=-\sqrt{3}$ 또는 $\tan x=1$

$0\le x<2\pi$에서

(ⅰ) $\tan x=-\sqrt{3}$일 때, $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ⅱ) $\tan x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

35) π

⇨ $\sin x=\frac{1}{2}$ $(0\le x<2\pi)$을 만족하는 x의 값은

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 두 근의 합은 π이다.

36) 2π

⇨ $0\le x<2\pi$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$를 만족하는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

$\therefore\ \frac{11\pi}{6}+\frac{1}{6}\pi=2\pi$

37) π

38) $\frac{8}{3}\pi$

39) $\frac{7}{2}\pi$

⇨ $2\cos^2 x+\sin x-1=0$

$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$

$2-2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

$\sin x=1$에서 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 모든 x의 합은 $\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

40) 3π

⇨ $2\sin x\cos x-\sin x=0$, $\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\sin x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 x의 합은 $0+\pi+\frac{1}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=3\pi$

41) 3π

⇨ $2\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$, $2\cos\theta-\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta}=0$

$\cos\theta\left(2-\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\right)=0$

$\therefore \cos\theta=0$ 또는 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ⅰ) $\cos\theta=0$일 때, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

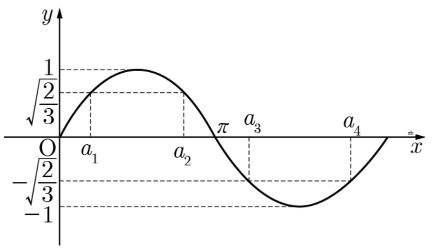
(ⅱ) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 합은 3π이다.

42) 4π

⇨ $\sin x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$가 되는 지점을 구하면 된다.

$y=\sin x$의 그래프를 그리고 이를 표시하자.



$a_1+a_2=\pi$, $a_3+a_4=3\pi$이므로 합은 4π이다.

43) 4π

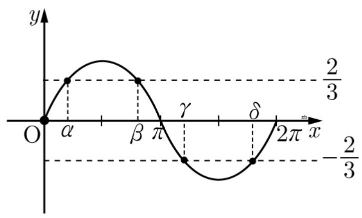
⇨ 주어진 범위에서 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-\pi\le\pi\sin x\le\pi$이므로

$\cos(\pi\sin x)=-\frac{1}{2}$

$\therefore \pi\sin x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\pi\sin x=-\frac{2}{3}\pi$

따라서 $\sin x=\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$를 만족하는 해는 그림과 같다.



$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 모든 해의 합은 $\pi+3\pi=4\pi$이다.

44) 3π

⇨ $\cos x+2\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)=0$

$\cos x+2\sin x(-\cos x)=0$

$\cos x(1-2\sin x)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi$

모든 실수 x의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=2\pi+\pi=3\pi$

45) 2π

⇨ $\cos(\cos x)=1$일 때, $\cos x=0$ 또는

$\cos x=2n\pi$(n은 정수)이므로 성립하는 경우는

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 x의 합은 $\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$이다.

46) 4π

47) $x=-\frac{\pi}{2}$

⇨ $-\pi<x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{x}{2}\neq 0$

이때, $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$, 즉 $\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{2}$에서

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면

$\sin t=-\cos t$, $\frac{\sin t}{\cos t}=-1$　　$\therefore \tan t=-1$

$\tan t = -1$의 근은 함수 $y = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y = -1$의 교점의 t좌표이므로

$t = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x = -\frac{\pi}{2}$

48) $x = -\frac{\pi}{2}$

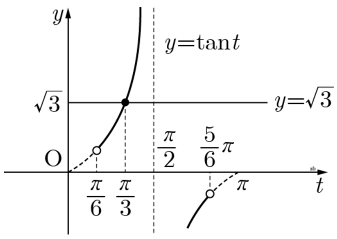
⇨ $\tan\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$에서 $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2} = t$로 치환하면

$\tan t = \sqrt{3}$

한편, $-\pi < x < \pi$이므로 $\frac{\pi}{6} < t < \frac{5}{6}\pi$ …… ㉠

㉠의 범위에서 $y = \tan t$의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$의 교점의 t좌표를 구하면 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$　　$\therefore\ x = -\frac{\pi}{2}$



49) 10π

⇨ 주어진 삼각방정식은 $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$이고 $-1 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin x = -\frac{1}{2}$을 만족하는 x는 $0 \le x \le 4\pi$에서 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi$, $\frac{23}{6}\pi$이므로 모든 해의 합은 10π이다.

50) $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{7\pi}{6}$

또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

⇨ $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$(\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$이므로

$\sin x = 1$ 또는 $\sin x = -\frac{1}{2}$

따라서 $0 \le x < 3\pi$일 때,

$\sin x = 1$에서 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{5}{2}\pi$

$\sin x = -\frac{1}{2}$에서 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

51) 2π

⇨ $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 3x$이므로 $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$3x = t$라 하면 $0 \le x < \pi$일 때, $0 \le t < 3\pi$이고,

주어진 방정식은 $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$t = \frac{\pi}{3}$ 또는 $t = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $t = \frac{7}{3}\pi$ 또는 $t = \frac{8}{3}\pi$

즉 $x = \frac{\pi}{9}$ 또는 $x = \frac{2}{9}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{9}\pi$

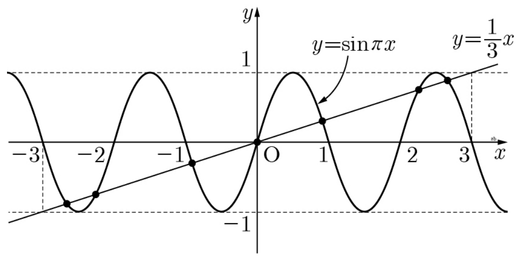
또는 $x = \frac{8}{9}\pi$

따라서 모든 근의 합은 2π이다.

52) 7

⇨ $\sin \pi x = \frac{1}{3}x$의 실근의 개수는 $y = \sin \pi x$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3}x$의 교점의 개수와 같다.

$y = \sin \pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$이므로 $y = \sin \pi x$와 $y = \frac{1}{3}x$의 그래프는 다음과 같다.



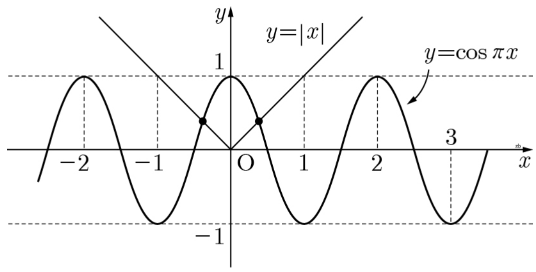
따라서 그림에서 두 그래프의 교점이 7개이므로 $\sin \pi x = \frac{1}{3}x$의 실근의 개수는 7이다.

53) 2

⇨ $\cos \pi x = |x|$의 실근의 개수는 $y = \cos \pi x$의 그래프와 $y = |x|$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$y = \cos \pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$이므로

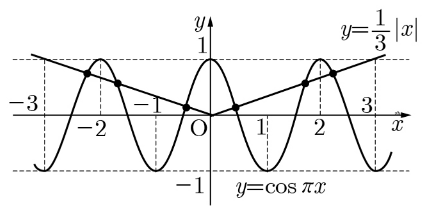
$y = \cos \pi x$와 $y = |x|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 그림에서 두 그래프의 교점이 2개이므로 $\cos \pi x = |x|$의 실근의 개수는 2이다.

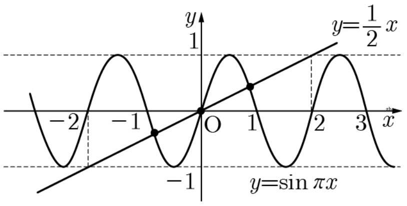
54) 6

⇨



위의 그림과 같이 두 함수 $y=\cos \pi x$, $y=\frac{1}{3}|x|$ 의 그래프의 교점의 개수는 6이므로 방정식 $\cos \pi x=\frac{1}{3}|x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6

55) 3

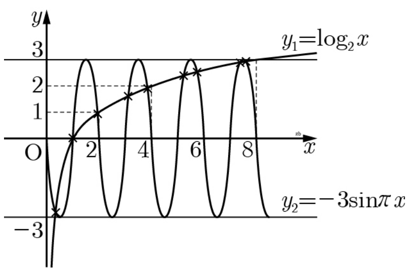
⇨ 

위의 그림과 같이 두 함수 $y=\sin \pi x$, $y=\frac{1}{2}x$의 그래프의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $\sin \pi x=\frac{1}{2}x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

56) 5

57) 9

⇨ 주어진 방정식의 해의 개수는 두 함수 $y_1=\log_2 x$, $y_2=-3\sin\pi x$의 교점 개수와 같다.



교점 개수는 그림에서 9개이다.

58) $-4 \le k \le 5$

⇨ $4\sin^2 x+4\cos x-k=0$에서

$4(1-\cos^2 x)+4\cos x=k$

$-4\cos^2 x+4\cos x+4=k$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야한다.

$\cos x=t$라 하면 $-1 \le t \le 1$이고

$y=-4t^2+4t+4$

$=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 5이고, $t=-1$일 때, 최솟값이 -4이므로

주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-4 \le k \le 5$

59) $-4 \le k \le 4$

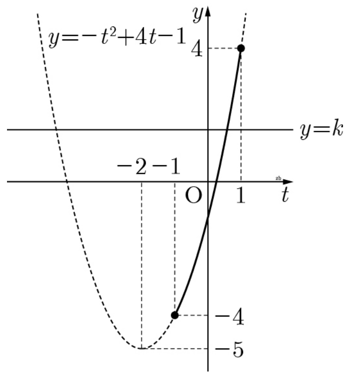
⇨ $\sin^2 x-4\cos x+k=0$에서

$(1-\cos^2 x)-4\cos x+k=0$

$\cos^2 x+4\cos x-1=k$

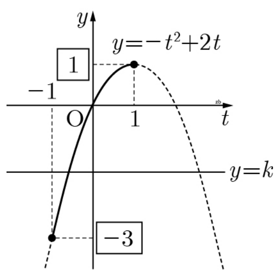
함수 $y=\cos^2 x+4\cos x-1$이라고 하고 $\cos x=t$로 치환하면 $-1 \le t \le 1$이고

$y=t^2+4t-1=(t+2)^2-5$



이때, $t=1$일 때, 최댓값 4, $t=-1$일 때, 최솟값 -4를 가지므로 주어진 방정식이 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위는 $-4 \le k \le 4$

60) $-3 \le k \le 1$

⇨ 

$\cos^2 x-2\cos x+k=0$에서

$-\cos^2 x+2\cos x=k$

함수 $y=-\cos^2 x+2\cos x$라고 하고 $\cos x=t$로 치환하면 $-1 \le t \le 1$이고

$y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

이때, $t=1$일 때, 최댓값 1,

$t=-1$일 때, 최솟값 -3을 가지므로 주어진 방정식이 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위는

$-3 \le k \le 1$

61) $k=-1$ 또는 $k=1$

⇨ $2\cos^2 x+(2k+1)\sin x-k-2=0$

$2(1-\sin^2 x)+(2k+1)\sin x-k-2=0$

$2\sin^2 x-(2k+1)\sin x+k=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-k)=0$

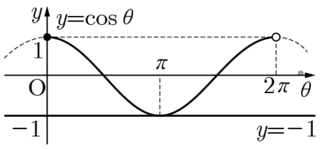
$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=k$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $k=-1$ 또는 $k=1$

62) π

⇨ $x^2+2x-\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+\cos\theta=0 \qquad \therefore\ \cos\theta=-1$



$\cos\theta=-1$ 의 근은 함수 $y=\cos\theta$ $(0\le\theta<2\pi)$ 의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 θ좌표이므로
$\theta=\pi$