단원 ISSUE

이 단원에서는 **사인법칙과 코사인법칙을 이용한 문제, 삼각형의 모양을 결정하는 문제, 삼각형의 넓이를 구하는 문제** 등이 자주 출제되며 주어진 조건에 따라 사인법칙과 코사인법칙 중 어떤 공식을 이용할지에 대한 분명한 판단이 필요합니다.

평가문제

[중단원 마무리하기]

1. 삼각형 ABC에 대해서 다음 등식 $\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 C+1$을 만족할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하면?

① $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형
② $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형
③ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형
④ $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형
⑤ $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

[중단원 마무리하기]

2. 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $2\sin A\cos\left(\dfrac{-A+B+C}{2}\right)=1$을 만족할 때, a의 값을 구하면?

① $3\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$
③ $5\sqrt{2}$　④ $6\sqrt{2}$
⑤ $7\sqrt{2}$

[중단원 마무리하기]

3. $\triangle ABC$에서 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{5}{3}$을 만족하고 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하면?

① 14　② 16
③ 18　④ 20
⑤ 22

[중단원 마무리하기]

4. 삼각형 ABC의 변의 길이 a,b,c에 대하여 $(a+b):(b+c):(c+a)=11:12:13$을 만족할 때, $\sin A:\sin B:\sin C$ 의 값을 구하면?

① $5:6:7$　② $5:7:6$
③ $6:5:7$　④ $6:7:5$
⑤ $7:5:6$

[중단원 마무리하기]

5. 삼각형 ABC에서 $a=x, c=\dfrac{1}{2}x+1$을 만족 한다. $A=45^\circ$이고, $2\sin C\cos\left(\dfrac{A+B-C}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$을 만족할 때, x의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}+2$　② $2\sqrt{2}+1$
③ $2\sqrt{2}+2$　④ $4\sqrt{2}+2$
⑤ $4\sqrt{2}+4$

[중단원 마무리하기]

6. 삼각형 ABC에 대하여 $(\sin A+2\sin B):(\sin B+2\sin C):(\sin C+2\sin A)=8:11:8$ 이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 18일 때, a의 값을 구하면?

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

[대단원 평가하기]

7. 삼각형 ABC에서 $\dfrac{a+b}{9}=\dfrac{b+c}{10}=\dfrac{c+a}{11}$일 때, $\sin A:\sin B:\sin C$의 값을 구하면?

① $4:5:6$　② $4:6:5$
③ $5:4:6$　④ $5:6:4$
⑤ $6:4:5$

[대단원 평가하기]

8. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 가정하자. $\sin A \sin(B+C)=3R$ 이고 $b=2a$, $\cos B=\frac{1}{2}$일 때, R의 값을 구하면?

① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{1}{14}$
③ $\frac{1}{15}$ ④ $\frac{1}{16}$
⑤ $\frac{1}{17}$

[중단원 마무리하기]

9. 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 예각삼 각형 ABC에서 $a=6$, $b=3c$일 때, b의 값을 구하 면?

① $16\sqrt{\frac{5}{26}}$ ② $17\sqrt{\frac{5}{26}}$
③ $18\sqrt{\frac{5}{26}}$ ④ $19\sqrt{\frac{5}{26}}$
⑤ $20\sqrt{\frac{5}{26}}$

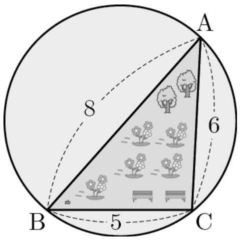
[중단원 마무리하기]

10. 삼각형 ABC에서 $a=2, b=3, c=4$일 때, 외접원의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{3}\sqrt{15}$ ② $\frac{2}{5}\sqrt{15}$
③ $\frac{7}{15}\sqrt{15}$ ④ $\frac{8}{15}\sqrt{15}$
⑤ $\frac{3}{5}\sqrt{15}$

[중단원 마무리하기]

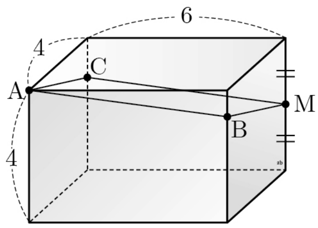
11. 다음 그림과 같이 삼각형의 공원이 존재한 다. 공원 주위에 원형으로 철조망을 설치하려고 할 때, 만들어지는 철조망의 길이를 최소화 하려고 한 다. 이때 만들어진 철조망의 반지름을 구하면? (삼각형 ABC 내부에 공원이 있다.)



① $\frac{60}{\sqrt{399}}$ ② $\frac{70}{\sqrt{399}}$
③ $\frac{80}{\sqrt{399}}$ ④ $\frac{90}{\sqrt{399}}$
⑤ $\frac{100}{\sqrt{399}}$

[중단원 마무리하기]

12. 다음 그림과 같이 직육면체에서 점 M은 직육면체의 높이를 이등분 하는 점이다. 이 때, 점 A에서 점 M을 거쳐 다시 점 A로 되돌아오는 실 을 감았다. ($ABCD$로 둘러싼 실) 직육면체를 두른 실의 길이의 최솟값을 구하면? (직육면체의 높이와 세로의 길이는 4, 가로의 길이는 6이다.)



① $12\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{5}$
③ $4\sqrt{22}$ ④ $4\sqrt{26}$
⑤ $8\sqrt{7}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 마무리하기]

13. 예각삼각형 ABC에서 $b=4, c=5$이고, $2\sin A\cos\left(\frac{-A+B+C}{2}\right)=\frac{32}{25}$을 만족한다. 삼각형 ABC에 외접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{205}{32}\pi$　② $\frac{415}{64}\pi$
③ $\frac{105}{16}\pi$　④ $\frac{425}{64}\pi$
⑤ $\frac{215}{32}\pi$

[중단원 마무리하기]

14. $\triangle ABC$에 대하여 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$을 만족할 때, $\cos A$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{4}$

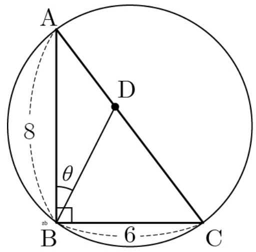
[중단원 마무리하기]

15. 삼각형 ABC에서 $\frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{3}{\sin C}$를 만족할 때, 최대인 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{2}{3}$

[대단원 평가하기]

16. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$인 직각삼각형 ABC이 있다. 점 D는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점일 때, $\cos\theta$의 값을 구하면?



① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[중단원 마무리하기]

17. 삼각형 ABC에 외접하는 원의 반지름은 6이고, $a=3, b=4, c=6$을 만족할 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하면?

① 2　② $\frac{5}{2}$
③ 3　④ $\frac{7}{2}$
⑤ 4

[중단원 마무리하기]

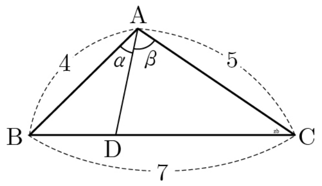
18. 세 변의 길이가 10, 12, a인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $4a$이고 내접원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$일 때, a의 값을 구하면?

① 5　② 6
③ 7　④ 8
⑤ 9

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 마무리하기]

19. 다음 그림에서 $\sin\alpha : \sin\beta = 1:2$를 만족하고, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AC}=5$를 만족할 때, 선분 BD의 길이를 구하면?



① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

[중단원 마무리하기]

20. 넓이가 200인 사각형 $ABCD$에서 대각선 AC의 길이를 10%늘리고 대각선 BD의 길이를 20%줄여 만든 새로운 사각형의 넓이를 구하면?

① 164
② 168
③ 172
④ 176
⑤ 180

[대단원 평가하기]

21. 삼각형 ABC에서 $a=6,\ b=3,\ c=6,\ A=30^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이는?

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$
⑤ 1

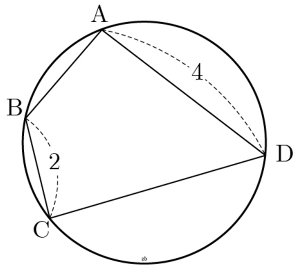
[대단원 평가하기]

22. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이다. 외접원에서 $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=1:2:3$을 만족할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하면?

① 15
② $10\sqrt{3}$
③ 20
④ $\frac{25\sqrt{3}}{2}$
⑤ 25

[대단원 평가하기]

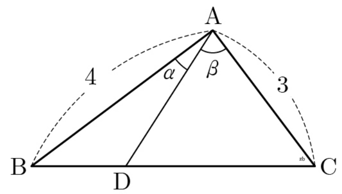
23. 다음과 같이 사각형 $ABCD$가 원에 내접하 고, 선분 AD의 길이가 4이고, 선분 BC의 길이가 2이다. 삼각형 ACD의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이 의 2배 일 때, $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$의 값을 구하면?



① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[대단원 평가하기]

24. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 D는 선 분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이고, 선분 AB의 길이 는 4, 선분 AC의 길이는 3일 때, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$의 값을 구 하면?

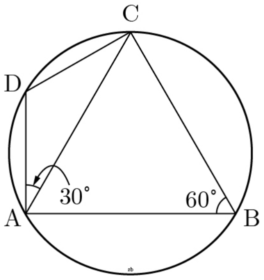


① $\frac{4}{3}$
② $\frac{5}{3}$
③ 2
④ $\frac{7}{3}$
⑤ $\frac{8}{3}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[대단원 평가하기]

25. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 $\square ABCD$ 에서 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=\frac{2}{x}$, $B=60^{\circ}$, $\angle CAD=30^{\circ}$ 사 각형 $ABCD$의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이의 최댓값을 구하면?



① $\sqrt{5}$　　② $\sqrt{6}$
③ $\sqrt{7}$　　④ $2\sqrt{2}$
⑤ 3

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ⑤
[해설] $\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 C+1$을 변형하면
$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=(1-\sin^2 C)+1$,
$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$이다.
삼각형 ABC의 외접원의 반지름을 R이라 하면
사인법칙에 의해
$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$ 이다.
이것을 위의 식에 대입하면 $a^2+b^2=c^2$ 이므로
삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

2) [정답] ③
[해설] $2\sin A\cos\left(\dfrac{-A+B+C}{2}\right)=2\sin A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$
$=2\sin^2 A=1$, $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
외접원의 반지름의 길이가 5이므로
$\dfrac{a}{\sin A}=10$, 따라서 $a=5\sqrt{2}$

3) [정답] ④
[해설] 삼각형 ABC에 대하여 사인법칙을 적용하면
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=12$
따라서 $a+b+c=12(\sin A+\sin B+\sin C)=20$

4) [정답] ③
[해설] $(a+b):(b+c):(c+a)=11:12:13$ 이므로
$a:b:c=6:5:7$을 만족한다. 사인법칙을 이용하면
$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$ 이므로
$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=6:5:7$이다.

5) [정답] ③
[해설] $2\sin C\cos\left(\dfrac{A+B-C}{2}\right)$
$=2\sin C\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=2\sin^2 C=\dfrac{1}{2}$
따라서 $\sin C=\dfrac{1}{2}$이다. 사인법칙을 적용하면
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$, $a=x$, $c=\dfrac{1}{2}x+1$ $A=45^\circ$이므로
$\sqrt{2}x=2(\dfrac{1}{2}x+1)$
따라서 $x=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)$

6) [정답] ②
[해설] 사인법칙을 이용하면
$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$ 이므로
$(\sin A+2\sin B):(\sin B+2\sin C):(\sin C+2\sin A)$
$=8:11:8$, 따라서
$(a+2b):(b+2c):(c+2a)=8:11:8$
$a+2b=8k$, $b+2c=11k$, $c+2a=8k$
세 식을 더하고 3으로 나누면
$a+b+c=9k$, 위의 세 식과 연립하면
$a=2k$, $b=3k$, $c=4k$ 이다.
삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $9k=18$이므로
$k=2$, 따라서 $a=4$이다.

7) [정답] ③
[해설] $\dfrac{a+b}{9}=\dfrac{b+c}{10}=\dfrac{c+a}{11}=k$라 하면
$a+b=9k$, $b+c=10k$, $c+a=11k$
세 식을 더하고 2로 나누면 $a+b+c=15k$ 이다.
따라서 $c=6k$, $a=5k$, $b=4k$가 된다.
즉 $a:b:c=5:4:6$을 만족한다.
사인법칙을 적용하면
$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로
$\sin A:\sin B:\sin C=5:4:6$을 만족한다.

8) [정답] ④
[해설] $A+B+C=\pi$ 이므로
$\sin A\sin(B+C)=\sin A\sin(\pi-A)=\sin^2 A=3R$
$\sin A=\sqrt{3R}$
사인법칙을 적용하면 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$, $a=2R\sqrt{3R}$
$b=2a=4R\sqrt{3R}$, $\cos B=\dfrac{1}{2}$이므로 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
사인법칙을 적용하면
$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{4R\sqrt{3R}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=8R\sqrt{R}=2R$
따라서 $R=\dfrac{1}{16}$을 만족한다.

9) [정답] ③
[해설] 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 $\dfrac{a}{\sin A}=10$을 만족하고 $a=6$이다. 따라서
$\sin A=\dfrac{3}{5}$이다. 삼각형 ABC는 예각삼각형이므로
$\cos A=\dfrac{4}{5}$ 이다. 코사인법칙을 적용하면
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$36=10c^2-6c^2\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{26}{5}c^2$
따라서 $c=6\sqrt{\dfrac{5}{26}}$, $b=18\sqrt{\dfrac{5}{26}}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

10) [정답] ④

[해설] 코사인법칙을 적용하면

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{25-4}{24} = \dfrac{7}{8}$

따라서 $\sin A = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$를 만족한다.

사인법칙을 적용하면 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{16}{\sqrt{15}} = 2R$

따라서 $R = \dfrac{8}{15}\sqrt{15}$이다.

11) [정답] ③

[해설] 철조망의 길이를 최소화하기 위해서 철조망은 삼각형 ABC의 외접원이 되어야 한다.
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라
하자. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

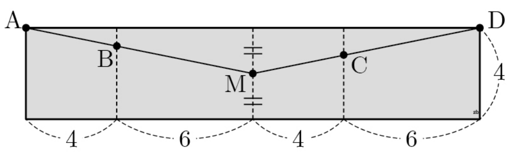
$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{75}{96} = \dfrac{25}{32}$

따라서 $\sin A = \dfrac{\sqrt{399}}{32}$

따라서 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{160}{\sqrt{399}} = 2R$, $R = \dfrac{80}{\sqrt{399}}$

12) [정답] ④

[해설] 실의 길이가 최소이려면 직육면체의 전개도 위에서 실의 위치가 다음과 같아야 한다.



삼각형 AMD에서 실선의 최소 길이는
$\overline{AM}+\overline{DM}$ 이고 $\overline{AM}=\overline{DM}$이다.
선분 AD의 중점을 E라 하면
직각 삼각형 AME에서 선분 AE의 길이는 10,
선분 ME의 길이는 2이므로 피타고라스 정리를
이용하면 선분 AM의 길이는 $\sqrt{104}=2\sqrt{26}$
따라서 실선의 최소 길이는 $4\sqrt{26}$이다.

13) [정답] ④

[해설] $A+B+C=\pi$이므로

$2\sin A\cos\left(\dfrac{-A+B+C}{2}\right) = 2\sin A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$

$=2\sin^2 A = \dfrac{32}{25}$, 따라서 $\sin A = \dfrac{4}{5}$이다.

A는 예각이므로 $\cos A = \dfrac{3}{5}$

따라서 $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A = 41-24=17$,
$a=\sqrt{17}$ 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{5}{4}\sqrt{17} = 2R$

외접하는 원의 반지름은 $R=\dfrac{5}{8}\sqrt{17}$이고,

원의 넓이는 $\dfrac{425}{64}\pi$ 이다.

14) [정답] ⑤

[해설] $\sin A : \sin B : \sin C = 4:5:6$이고 사인법칙에 의해 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$이므로
$a:b:c=4:5:6$을 만족한다.
$a=4k, b=5k, c=6k$ 라 하고 코사인법칙에 의해

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{61k^2-16k^2}{60k^2} = \dfrac{3}{4}$ 이다.

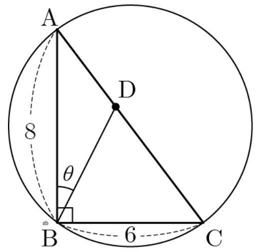
15) [정답] ①

[해설] $\dfrac{3}{\sin A} = \dfrac{4}{\sin B} = \dfrac{3}{\sin C}$을 만족하므로
$\sin A : \sin B : \sin C = 3:4:3$이고,
$\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$이므로
$a:b:c=3:4:3$ 이다.
따라서 삼각형 ABC의 최대인 각은
가장 길이가 긴 b의 대각인 B이다.
따라서 코사인법칙에 의하여

$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3} = \dfrac{1}{9}$

16) [정답] ⑤

[해설]



삼각형 ABC에서 피타고라스정리를 이용하면
선분 AC의 길이는 10이므로 $\cos A = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$이다. 점 D는 선분 AC를 $2:3$ 으로 내분하는 점이므로 선분 AD의 길이는 4이다.
삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{BD}^{\,2} = \overline{AB}^{\,2} + \overline{AD}^{\,2} - 2\overline{AB}\times\overline{AD}\cos A$

$=64+16-2\times8\times4\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{144}{5}$,

$\overline{BD} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$ 이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙의 변형을 적용하면

$\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-\overline{AD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BD}} = \dfrac{64+\dfrac{144}{5}-16}{2\times8\times\dfrac{12}{\sqrt{5}}}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

17) [정답] ③

[해설] $\dfrac{a}{\sin A}=2R$에서 문제의 조건을 대입하면

$\dfrac{3}{\sin A}=12$ 에서 $\sin A=\dfrac{1}{4}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc\sin A=12\sin A=3$

18) [정답] ④

[해설] 길이가 a인 변의 대각을 A라 하면

$\dfrac{a}{\sin A}=8a$를 만족하여 $\sin A=\dfrac{1}{8}$을 만족한다.

따라서 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\sin A\times10\times12=60\sin A=\dfrac{15}{2}$ 이다.

내접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}(a+10+12)=\dfrac{15}{2}$이고, $a=8$

19) [정답] ①

[해설] 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이를 비교하면 삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\sin\alpha\times4\times\overline{AD}$

삼각형 ADC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\sin\beta\times5\times\overline{AD}$

$\sin\alpha:\sin\beta=1:2$ 이므로 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 비는 $2:5$ 이다.

즉 점 D는 선분 BC를 $2:5$로 내분하는 점이다.

선분 BC의 길이는 7이므로

선분 BD의 길이는 2이다.

20) [정답] ④

[해설] 사각형 $ABCD$에서 두 대각선의 사이의 각을 θ라 하자. 두 대각선의 길이를 x,y라 하면 사각형 $ABCD$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$을 만족한다. 선분 AC의 길이를 x, 선분 BD의 길이를 y라 하면

$\dfrac{1}{2}xy\sin\theta=200$을 만족한다. 변형한 대각선의 선분의 길이는 $1.1x$, $0.8y$ 이고, 사이 각은 유지된다. 따라서 변형 이후의 사각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1.1x\times0.8y\sin\theta=200\times1.1\times0.8=176$이다.

21) [정답] ③

[해설] 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{9}{2}$이다.

삼각형 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{15}{2}r=\dfrac{9}{2}$, $r=\dfrac{3}{5}$이다.

22) [정답] ④

[해설] 삼각형 ABC를 외접하는 원의 중심을 O라 하자. $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=1:2:3$를 만족하므로

$\angle AOB:\angle BOC:\angle COA=1:2:3$

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=2\pi$ 이므로

$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle BOC=\dfrac{2}{3}\pi\,\angle COA=\pi$

즉 선분 AC는 원의 지름을 의미하게 된다.

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 10, $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형이다. 선분 AB, BC의 길이는 각각 특수각의 삼각비에 의해 5, $5\sqrt{3}$ 이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$이다.

23) [정답] ①

[해설] 사각형 $ABCD$가 원에 내접하므로 대각의 합은

π 이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\sin B=\overline{AB}\sin B$

(삼각형 ACD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\sin(\pi-B)$

$=2\overline{CD}\sin B$

삼각형 ACD가 삼각형 ABC 넓이의 2배이므로

선분 AB와 선분 CD의 길이는 같다.

따라서 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=1$

24) [정답] ⑤

[해설] 점 D는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$의 넓이비는 $1:2$이다.

(삼각형 ABD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AD}\times\sin\alpha$

(삼각형 ADC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\sin\beta$

$(\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AD}\times\sin\alpha):(\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\sin\beta)=1:2$

따라서 $4\sin\alpha:3\sin\beta=1:2$이고, $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{8}{3}$이다.

25) [정답] ②

[해설] 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times x\times\dfrac{2}{x}\times\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

사각형 $ABCD$의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로

삼각형 ACD의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{AC}^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}-4\cos60^\circ$

$=x^2+\dfrac{4}{x^2}-2\geq2\sqrt{x^2\times\dfrac{4}{x^2}}-2$

이므로 선분 AC의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

삼각형 ADC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{AC}\times\sin(\angle CAD)=\frac{1}{4}\overline{AD}\times\overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

선분 AD의 길이는 선분 AC의 길이가 최소일 때 최댓값을 가지므로 선분 AC의 길이가 $\sqrt{2}$일 때, 선분 AD의 길이는 최댓값 $\sqrt{6}$를 가지게 된다.