01 지수함수 $y=a^x$의 최대 · 최소

정의역이 $\{x|m \le x \le n\}$일 때,
지수함수 $y=a^x (a>0,\ a \ne 1)$은
(1) $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 a^m, $x=n$일 때 최댓값 a^n을 갖는다.
(2) $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 a^m, $x=n$일 때 최솟값 a^n을 갖는다.

◪ 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

1. $y=2^x \ (-1 \le x \le 2)$

2. $y=2^x \ (1 \le x \le 5)$

3. $y=2^{x+1}-1 \ (-2 \le x \le 2)$

4. $y=3^x \ (-1 \le x \le 1)$

5. $y=3^{x+3}-4 \ (-1 \le x \le 2)$

6. $y=3^{x-2} \ (-2 \le x \le 1)$

7. $y=3^{2-x}+1 \ (-1 \le x \le 4)$

8. $y=5^{x-2}+3 \ (1 \le x \le 3)$

9. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+1 \ (2 \le x \le 5)$

10. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+3 \ (-1 \le x \le 2)$

11. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-\frac{3}{2} \ (-3 \le x \le 0)$

12. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \ (-1 \le x \le 2)$

13. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+2 \ (-1 \le x \le 3)$

14. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+1 \ (-2 \le x \le 3)$

15. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \ (-2 \le x \le 2)$

16. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+1 \ (-2 \le x \le 2)$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 물음에 답하여라.

17. 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 최댓값을 구하여라.

18. 정의역이 $\{x| -1 \le x \le 3\}$인 지수함수 $f(x)=3^{x+a}$의 최솟값이 3일 때, 최댓값을 구하여라.

19. 닫힌 구간 $[-3,\ 6]$에서 정의된 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값을 구하여라.

20. 정의역이 $\{x| -1 \le x \le 1\}$일 때, 함수 $f(x)=2^{a-x}+3$의 최댓값과 최솟값의 차는 3이다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

21. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$일 때 함수 $y=3^{x+1}\cdot 4^{-x+1}+2$의 최댓값을 구하여라.

22. 닫힌구간 $[-1,2]$에서 정의된 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2x}$의 최댓값과 최솟값의 곱이 1이라고 할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

02 함수 $y=a^{f(x)}$꼴의 최대 · 최소

① 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.
② ①에서 구한 $f(x)$의 최댓값과 최솟값에서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

◪ 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

23. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-2}$ $(-3 \le x \le 0)$

24. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4x}$ $(1 \le x \le 4)$

25. $y=5^{x^2-6x+7}$ $(1 \le x \le 4)$

26. $y=3^{-x^2+2x+3}$ $(-2 \le x \le 0)$

27. $y=2^{-x^2+6x-7}$ $(2 \le x \le 4)$

28. $y=3^{x^2-4x+1}$ $(1 \le x \le 4)$

29. $y=2^{x^2+4x-1}\ (-2 \le x \le 1)$

30. $y=2^{x^2-4x}\ (0 \le x \le 3)$

31. $y=-2^{x-1}+3\ (0 \le x \le 2)$

32. $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}\ (-1 \le x \le 3)$

◪ 다음 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

33. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$

34. $y=3^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$

35. $y=3^{x^2-6x+11}$

36. $y=3^{x^2-6x+6}$

◪ 다음 물음에 답하여라.

37. 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4x+6}$의 최댓값을 구하여라.

38. 곡선 $0<a<1$일 때, $f(x)=a^{x^2-2x-3}$의 최댓값이 16이라고 하면, 구간 $[0,3]$에서 $f(x)$의 최솟값을 구하여라.

39. 정의역이 $\{x|-2 \le x \le 3\}$인 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x^2+4x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값을 구하여라.

40. 두 함수 $f(x)=2^x,\ g(x)=x^2-2x+2$에 대하여 $y=(f\circ g)(x)$의 최솟값을 구하여라.

41. 구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2x-4}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하여라.

42. 함수 $f(x)=a^{-x^2+4x-2}$가 $x=b$에서 최댓값 8을 가질 때, 두 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하여라. (단, $a>0,\ a\ne 1$)

43. 함수 $y=a^{x^2-4x+7}$이 최댓값 $\frac{1}{64}$을 가질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

44. 닫힌 구간 $[-1,2]$에서 정의된 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.

45. 닫힌 구간 $[-1,3]$에서 정의된 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-4x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값을 구하여라.

03 지수함수 $y=a^x$의 최대 • 최소의 응용

(1) 치환을 이용한 지수함수의 최대 • 최소
: $a^x=t$로 치환하면 $t>0$이고, t의 범위를 이용하여 최대, 최소를 구한다.

(2) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 지수함수의 최대 • 최소
: $a>0,\ a\neq 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여
$a^x>0,\ a^{-x}>0$이므로
$a^x+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}$ (등호는 $a^x=a^{-x}$일 때 성립)

◪ 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

46. $y=9^{-x}+2\cdot 3^{-x+1}+7\ (-1\leq x\leq 0)$

47. $y=2\cdot 5^{x+1}-25^x\ (0\leq x\leq 1)$

48. $y=4^x-2^{x+2}+5\ (0\leq x\leq 2)$

49. $y=4^x-12\cdot 2^{x-1}+5(-1\leq x\leq 3)$

50. $y=3\cdot 2^{x+1}-4^x+6\ (x\leq 3)$

51. $y=2^{2x}-2^{x+1}+2\ (1\leq x\leq 2)$

52. $y=25^{-x}+2\times 5^{-x}-1\ (-2\leq x\leq 0)$

53. $y=3^{2x}-3^{x+1}\ (0\leq x\leq 2)$

54. $y=4^x-2^{x+1}+1\ (-2\leq x\leq 1)$

55. $y=4^x-2^{x+1}+5\ (-1\leq x\leq 3)$

56. $y=4^x-2^{x+1}-3\ (-1\leq x\leq 2)$

57. $y=3^{2x}-6\cdot 3^{x-1}\ (-1\leq x\leq 1)$

58. $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-6\ (-2\leq x\leq 1)$

◪ 다음 함수를 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구하여라.

59. $y=4\cdot 2^{-x}+2^{x+1}$

60. $y=2^{x}+2^{-x}$

61. $y=2^{x}+2^{-x}+1$

62. $y=2\cdot 3^{x}+\dfrac{8}{3^{x}}$

63. $y=3^{x}+3^{-x+2}$

64. $y=(3^{x})^{2}+4\cdot 9^{-x}$

65. $y=5^{x-1}+5^{-x+3}$

66. $y=4^{x}+4^{-x}+2^{x}+2^{-x}$

67. $y=2^{x}+3^{x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}+5$

68. $y=3(4^{x}+4^{-x})-10(2^{x}+2^{-x})$

◪ 다음 물음에 답하여라.

69. 함수 $y=2(2^{x}+2^{-x})-(4^{x}+4^{-x})$의 최댓값을 구하여라.

70. 정의역이 $\{x|-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=4^{x}-2^{x+2}-1$이 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

71. 정의역이 $\{x|0\le x\le 2\}$인 함수 $y=9^{x}+2\cdot 3^{x+1}+9$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

72. $0\le x\le 2$에서 함수 $y=4^{x}-2^{x+2}+a$의 최솟값이 -3이다. 상수 a와 최댓값 M에 대하여 $a+M$의 값을 구하여라.

73. $-1 \le x \le 2$일 때, 두 함수 $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$는 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 이때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하여라.

74. 함수 $y=(4 \cdot 2^x)^2+4^{-(x+1)}$는 $x=\alpha$일 때, 최솟값 m을 가진다. 이 때, $\frac{8}{3}\alpha+m$의 값을 구하여라.

75. $-2 \le x \le 3$에서 함수 $y=2^{-3x} \cdot 3^x$의 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여 Mm의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 최댓값 : 4, 최솟값 : $\frac{1}{2}$

⇨ $y=2^x$은 밑이 2이므로
$x=2$일 때, 최댓값은 $2^2=4$
$x=-1$일 때, 최솟값은 $2^{-1}=\frac{1}{2}$

2) 최댓값 : 32, 최솟값 : 2
⇨ 함수 $y=2^x$은 x의 값의 증가하면 y의 값도증가하고, $1 \le x \le 5$이므로
최댓값은 $x=5$일 때 $2^5=32$,
최솟값은 $x=1$일 때 $2^1=2$이다.

3) 최댓값: 7, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

⇨ $y=2^{x+1}-1$은 증가함수이므로
$x=-2$일 때 최솟값 $2^{-1}-1=-\frac{1}{2}$
$x=2$일 때, 최댓값 $2^3-1=7$

4) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

⇨ 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $-1 \le x \le 1$일 때
$x=-1$에서 최솟값 $3^{-1}=\frac{1}{3}$,
$x=1$에서 최댓값 $3^1=3$을 갖는다.

5) 최댓값 : 239, 최솟값 : 5
⇨ $y=3^{x+3}-4$는 밑이 3이므로
$x=2$일 때, 최댓값은 $3^{2+3}-4=239$
$x=-1$일 때, 최솟값은 $3^{-1+3}-4=5$

6) 최댓값 : $\frac{1}{3}$, 최솟값 : $\frac{1}{81}$

⇨ 함수 $y=3^{x-2}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도증가하고, $-2 \le x \le 1$이므로
최댓값은 $x=1$일 때 $3^{1-2}=3^{-1}=\frac{1}{3}$,
최솟값은 $x=-2$일 때 $3^{-2-2}=3^{-4}=\frac{1}{81}$이다.

7) 최댓값 : 28, 최솟값 : $\frac{10}{9}$

⇨ 함수 $y=3^{2-x}+1$, 즉 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $-1 \le x \le 4$이므로
최댓값은 $x=-1$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-2}+1=3^3+1=28$,
최솟값은 $x=4$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-2}+1=\frac{1}{9}+1=\frac{10}{9}$이다.

8) 최댓값 : 8,, 최솟값 : $\frac{16}{5}$

⇨ 함수 $y=5^{x-2}+3$은 x의 값이 증가하면 y의값도 증가하고, $1 \le x \le 3$이므로
최댓값은 $x=3$일 때, $5^{3-2}+3=5^1+3=8$,
최솟값은 $x=1$일 때 $5^{1-2}+3=5^{-1}+3=\frac{16}{5}$이다.

9) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{5}{4}$

10) 최댓값 : 5, 최솟값 : $\frac{13}{4}$

⇨ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$은 밑이 $\frac{1}{2}$이므로
$x=-1$일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+3=5$
$x=2$일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\frac{13}{4}$

11) 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : $-\frac{5}{4}$

⇨ 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-\frac{3}{2}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $-3 \le x \le 0$이므로
최댓값은 $x=-3$일 때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+2}-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$,
최솟값은 $x=0$일 때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4}$이다.

12) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\frac{1}{9}$

⇨ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 밑이 $\frac{1}{3}$이므로
$x=-1$일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$
$x=2$일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

13) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\frac{163}{81}$

⇨ 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $-1 \le x \le 3$이므로
최댓값은 $x=-1$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+1}+2=1+2=3$,
최솟값은 $x=3$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3+1}+2=\frac{1}{81}+2=\frac{163}{81}$이다.

14) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{244}{243}$

⇨ 밑이 1보다 작은 지수함수이고, 감소함수이므로 정의역이 $\{x|-2 \le x \le 3\}$이면

$x=-2$일 때, 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2+2}+1=2$

$x=3$일 때, 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3+2}+1=\frac{244}{243}$

15) 최댓값 : 16, 최솟값 : $\frac{1}{16}$

⇨ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $-2\le x\le 2$일 때

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$,

$x=2$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}$을 갖는다.

16) 최댓값 : 17, 최솟값 : $\frac{17}{16}$

⇨ 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $-2\le x\le 2$이므로

최댓값은 $x=-2$일 때 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+1=4^2+1=17$,

최솟값은 $x=2$일 때 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+1=\frac{1}{16}+1=\frac{17}{16}$이다.

17) 9

⇨ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$는 감소함수이므로

최댓값은 $x=-2$일 때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$이다.

18) 243

19) 4

20) 1

21) 14

⇨ $y=12\left(\frac{3}{4}\right)^{x}+2$는 감소함수이므로 $(0\le x\le 2)$에서 $x=0$일 때, 최댓값 $12\left(\frac{3}{4}\right)^{0}+2=12+2=14$를 갖는다.

22) 1

23) 최댓값 : 27, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

⇨ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-2}$에서

$f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$으로 놓으면

$-3\le x\le 0$일 때 $-3\le f(x)\le 1$

이때, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $f(x)=-3$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=3^3=27$,

최솟값은 $f(x)=1$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=\frac{1}{3}$이다.

24) 최댓값 : 256, 최솟값 : 1

⇨ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4x}$에서 $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$로 놓으면 $1\le x\le 4$일 때 $-4\le f(x)\le 0$

이때, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $f(x)=-4$일 때 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}=4^4=2^8=256$,

최솟값은 $f(x)=0$일 때 $\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=1$이다.

25) 최댓값 : 25, 최솟값 : $\frac{1}{25}$

⇨ $y=5^{x^2-6x+7}$에서 $f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$로 놓으면 $1\le x\le 4$일 때 $-2\le f(x)\le 2$

이때, $y=5^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

최댓값은 $f(x)=2$일 때 $5^2=25$,

최솟값은 $f(x)=-2$일 때 $5^{-2}=\frac{1}{25}$이다.

26) 최댓값 : 27, 최솟값 : $\frac{1}{243}$

⇨ $y=3^{-x^2+2x+3}$에서

$f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$로 놓으면

$-2\le x\le 0$일 때 $-5\le f(x)\le 3$

이때, $y=3^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 최댓값은 $f(x)=3$일 때 $3^3=27$,

최솟값은 $f(x)=-5$일 때 $3^{-5}=\frac{1}{243}$이다.

27) 최댓값 : 4, 최솟값 : 2

⇨ $f(x)=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$로 놓으면

$2\le x\le 4$에서

$f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=1$

$\therefore\ 1\le f(x)\le 2$

$y=2^{-x^2+6x-7}=2^{f(x)}$의 밑이 2이므로

$f(3)=2$일 때, 최댓값은 $2^2=4$이고,

$f(2)=f(4)=1$일 때, 최솟값은 $2^1=2$이다.

28) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\frac{1}{27}$

⇨ $f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$으로 놓으면

$1\le x\le 4$에서

$f(1)=-2$, $f(2)=-3$, $f(4)=1$

$\therefore\ -3\le f(x)\le 1$

$y=3^{x^2-4x+1}=3^{f(x)}$의 밑이 3이므로

$f(4)=1$일 때, 최댓값은 $3^1=3$,

$f(2)=-3$일 때, 최솟값은 $3^{-3}=\frac{1}{27}$이다.

29) 최댓값 : 16, 최솟값 : $\frac{1}{32}$

⇨ $y=2^{x^2+4x-1}$에서 $f(x)=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$로 놓으면 $-2\le x\le 1$일 때 $-5\le f(x)\le 4$
이때, $y=2^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
최댓값은 $f(x)=4$일 때 $2^4=16$,
최솟값은 $f(x)=-5$일 때 $2^{-5}=\frac{1}{32}$이다.

30) 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{1}{16}$

⇨ $y=2^{x^2-4x}$에서 $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$로 놓으면 $0\le x\le 3$일 때 $-4\le f(x)\le 0$
이때, $y=2^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 최댓값은 $f(x)=0$일 때 $2^0=1$,
최솟값은 $f(x)=-4$일 때, $2^{-4}=\frac{1}{16}$이다.

31) 최댓값 : $\frac{5}{2}$, 최솟값 : 1

⇨ 함수 $y=-2^{x-1}+3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $0\le x\le 2$이므로
최댓값은 $x=0$일 때, $-2^{-1}+3=\frac{5}{2}$,
최솟값은 $x=2$일 때, $-2^{2-1}+3=1$이다.

32) 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{8}{27}$

⇨ 함수 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $-1\le x\le 3$이므로
최댓값은 $x=3$일 때 $\left(\frac{3}{2}\right)^{3-2}=\frac{3}{2}$,
최솟값은 $x=-1$일 때 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{8}{27}$이다.

33) 최댓값 : $\frac{1}{4}$

⇨ $t=x^2-2x+3$으로 놓으면 $t=(x-1)^2+2\ge 2$
이때 주어진 함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$이고, 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $t=2$일 때 최댓값 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$을 갖는다.

34) 최솟값: 9

⇨ $y=3^{x^2-2x+3}=3^{(x-1)^2+2}$
$x=1$일 때, 최솟값 $y=3^2=9$를 갖는다.

35) 최솟값: 9

⇨ $y=3^{x^2-6x+11}=3^t$일 때, 3^t는 증가함수이므로
$t=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$가 최솟값을 가질 때,
즉 $x=3$일 때, y는 최솟값 $3^2=9$를 갖는다.

36) 최솟값 : $\frac{1}{27}$

⇨ $t=x^2-6x+6$으로 놓으면 $t=(x-3)^2-3\ge -3$
이때 주어진 함수는 $y=3^t$이고, 밑 3이 $3>1$이므로 $t=-3$일 때 최솟값 $y=3^{-3}=\frac{1}{27}$을 갖는다.

37) $\frac{1}{16}$

⇨ $x^2-4x+6=(x-2)^2+2$
$\frac{1}{4}<1$이므로 $x=2$일 때 최댓값 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

38) 1

⇨ $f(x)=a^{x^2-2x-3}=a^{(x-1)^2-4}$는 $0<a<1$이므로
$x=1$일 때, 최댓값 16을 갖는다.
$a^{-4}=16 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$
구간 $[0,3]$에서 $f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$,
$f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$이므로 최솟값은 $f(3)=1$이다.

39) 2^{18}

⇨ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x^2+4x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2(x-1)^2+2}$이므로
$x=1$일 때, 최솟값 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^2=2^{-2}$
$x=-2$일 때, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-16}=2^{16}$
$x=3$일 때, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=2^6$이므로 최댓값 $M=2^{16}$
$\therefore \frac{M}{m}=\frac{2^{16}}{2^{-2}}=2^{18}$

40) 2

⇨ $f(x)$가 증가함수이므로 $(f\circ g)(x)$는 $g(x)$가 최소일 때, 최솟값을 갖는다.
따라서 $g(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$은 $x=1$일 때, 최솟값 1을 가지므로 $(f\circ g)(x)$는 $f(g(1))=f(1)=2^1=2$를 최솟값으로 갖는다.

41) 2^{10}

42) $4\sqrt{2}$

⇨ ($f(x)$의 지수)$=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$
최댓값이 2이고 $f(x)$의 최댓값은 8이므로

$a>1$, $b=2$, $a^2=8$ $\therefore a=2\sqrt{2}$

$\therefore ab=4\sqrt{2}$

43) $\dfrac{1}{4}$

⇨ 지수 $x^2-4x+7=(x-2)^2+3$에서 최솟값은 3이고, 최댓값은 없다.

$y=a^{x^2-4x+7}$이 최댓값을 가지므로 $0<a<1$이고,

$a^3=\dfrac{1}{64}$ $\therefore a=\dfrac{1}{4}$

44) $\dfrac{1}{256}$

45) 64

⇨ $[-1,3]$에서 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-4x}$의 최댓값은 $x=3$일 때,

$M=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-11}=2^{11}$

최솟값은 $x=-1$일 때, $m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=2^{-5}$

$\therefore Mm=2^6=64$

46) 최댓값 : 34, 최솟값 : 14

⇨ $y=9^{-x}+2\cdot 3^{-x+1}+7=(3^{-x})^2+6\cdot 3^{-x}+7$에서

$3^{-x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2+6t+7=(t+3)^2-2$

이때, $-1\le x\le 0$에서 $1\le t\le 3$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=3$일 때 34, 최솟값은 $t=1$일 때 14이다.

47) 최댓값 : 25, 최솟값 : 9

⇨ $y=2\cdot 5^{x+1}-25^x=-(5^x)^2+10\cdot 5^x$에서

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=-t^2+10t=-(t-5)^2+25$

이때, $0\le x\le 1$에서 $1\le t\le 5$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=5$일 때 25,

최솟값은 $t=1$일 때 9이다.

48) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1

⇨ $y=4^x-2^{x+2}+5$, 즉 $y=(2^x)^2-2^2\cdot 2^x+5$에서

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

이때, $0\le x\le 2$에서 $1\le t\le 4$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=4$일 때 5,

최솟값은 $t=2$일 때 1이다.

49) 최댓값: 21, 최솟값: -4

⇨ $2^x=t$라 하면 t의 범위는 $\dfrac{1}{2}\le t\le 8$이다.

$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$이므로

y의 최솟값은 $t=3$일 때, -4이고,

y의 최댓값은 $t=8$일 때, 21이다.

50) 최댓값: 15, 최솟값: -10

⇨ $2^x=t$라 하면 $0<t\le 8$이고, 주어진 함수는

$y=-t^2+6t+6=-(t-3)^2+15$

따라서 최댓값은 $t=3$일 때인 15이고, 최솟값은 $t=8$일 때인 -10이다.

51) 최댓값: 10, 최솟값: 2

⇨ $2^x=t$라 하면 $1\le x\le 2$이고, $2\le t\le 4$이므로

$y=f(t)=(t-1)^2+1$에서 최댓값은 $f(4)=10$,

최솟값은 $f(2)=2$

52) 최댓값 : 674, 최솟값 : 2

⇨ $y=25^{-x}+2\times 5^{-x}-1=\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right\}^2+2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^x-1$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=t$ $(t>0)$로 치환하면

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

이때, $-2\le x\le 0$에서 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^0\le\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\le\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$이므로 $1\le t\le 25$

따라서 $t=25$일 때, 최댓값 674이고,

$t=1$일 때, 최솟값은 2이다.

53) 최댓값 : 54, 최솟값 : $-\dfrac{9}{4}$

⇨ $y=3^{2x}-3^{x+1}=(3^x)^2-3\times 3^x$

$3^x=t$ $(t>0)$로 치환하면

$y=t^2-3t=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

이때, $0\le x\le 2$에서 $3^0\le 3^x\le 3^2$이므로

$1\le t\le 9$

따라서 $t=9$일 때, 최댓값은 54이고,

$t=\dfrac{3}{2}$일 때, 최솟값은 $-\dfrac{9}{4}$이다.

54) 최댓값 : 1, 최솟값 0

⇨ $y=4^x-2^{x+1}+1=(2^x)^2-2\cdot 2^x+1$에서

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+1=(t-1)^2$

이때, $-2\le x\le 1$에서 $\dfrac{1}{4}\le t\le 2$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=2$일 때 1,

최솟값은 $t=1$일 때 0이다.

55) 최댓값 : 53, 최솟값 : 4

⇨ $y=4^x-2^{x+1}+5=(2^x)^2-2\times 2^x+5$

$2^x=t$ $(t>0)$로 치환하면

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

이때, $-1\le x\le 3$에서 $2^{-1}\le 2^x\le 2^3$이므로

$\dfrac{1}{2}\le t\le 8$

따라서 $t=8$일 때, 최댓값은 53이고,

$t=1$일 때, 최솟값은 4이다.

56) 최댓값: 5, 최솟값: -4

⇨ $y=2^{2x}-2\cdot 2^{x}-3\ (-1\le x\le 2)$

$2^{x}=t$라 하면 $\frac{1}{2}\le t\le 4$이므로 $y=(t-1)^{2}-4$이다.

따라서 y는 $t=1$에서 최솟값 -4를 가지고,

y는 $t=4$에서 최댓값 5를 가진다.

57) 최댓값 : 3, 최솟값 -1

⇨ $y=3^{2x}-6\cdot 3^{x-1}=(3^{x})^{2}-2\cdot 3^{x}$에서

$3^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^{2}-2t=(t-1)^{2}-1$

이때, $-1\le x\le 1$에서 $\frac{1}{3}\le t\le 3$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=3$일 때 3,

최솟값은 $t=1$일 때, -1이다.

58) 최댓값 : 3, 최솟값 : -33

⇨ $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+6,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x}-6,$

즉 $y=-\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right)^{2}+6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-6$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=-t^{2}+6t-6=-(t-3)^{2}+3$

이때, $-2\le x\le 1$에서 $\frac{1}{3}\le t\le 9$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $t=3$일 때 3,

최솟값은 $t=9$일 때 -33이다.

59) $4\sqrt{2}$

⇨ $2^{x+1}>0,\ 2^{-x}>0$이므로

$y=4\cdot 2^{-x}+2^{x+1}\ge 2\sqrt{4\cdot 2^{-x}\cdot 2^{x+1}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

(단, 등호는 $4\cdot 2^{-x}=2^{x+1}$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

60) 2

⇨ $2^{x}>0,\ 2^{-x}>0$이므로

$y=2^{x}+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^{x}\cdot 2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $2^{x}=2^{-x}$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 2이다.

61) 3

⇨ $2^{x}>0,\ 2^{-x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=2^{x}+2^{-x}+1\ge 2\sqrt{2^{x}\times 2^{-x}}+1=3$

(단, 등호는 $2^{x}=2^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 3이다.

62) 8

⇨ $3^{x}>0,\ \frac{1}{3^{x}}=3^{-x}>0$이므로

$y=2\cdot 3^{x}+\frac{8}{3^{x}}\ge 2\sqrt{2\cdot 3^{x}\cdot\frac{8}{3^{x}}}=2\sqrt{16}=8$

$\left(\text{단, 등호는 } 2\cdot 3^{x}=\frac{8}{3^{x}}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 8이다.

63) 6

⇨ $3^{x}>0, 3^{-x+2}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=3^{x}+3^{-x+2}\ge 2\sqrt{3^{x}\times 3^{-x+2}}=2\sqrt{3^{2}}=6$

등호는 $3^{x}=3^{-x+2}$, 즉 $x=1$일 때 성립하므로

따라서 $x=1$일 때 주어진 함수의 최솟값은 6이다.

64) 4

⇨ $t=9^{x}+\frac{4}{9^{x}}\ge 2\sqrt{9^{x}\times\frac{4}{9^{x}}}=2\times 2=4$이므로

y의 최솟값은 4이다.

65) 최솟값: 10

⇨ $5^{x-1}>0,\ 5^{-x+3}>0$이므로

$y=5^{x-1}+5^{-x+3}\ge 2\sqrt{5^{x-1}\cdot 5^{-x+3}}=2\sqrt{5^{2}}=10$

(단, 등호는 $5^{x-1}=5^{-x+3}$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 10이다.

66) 4

⇨ $2^{x}+2^{-x}=t$라 하면 $2^{x}>0,\ 2^{-x}>0$이므로

$t=2^{x}+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^{x}\times 2^{-x}}=2$이다.

그러므로 $4^{x}+4^{-x}+2^{x}+2^{-x}=t^{2}+t-2$는

$t=2$일 때, 최솟값 $4+2-2=4$를 갖는다.

67) 9

⇨ $2^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ \ge\ 2\sqrt{2^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}=2$

$3^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\ \ge\ 2\sqrt{3^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}=2$

$\therefore\ y\ \ge\ 2+2+5=9$

68) -14

⇨ $2^{x}+2^{-x}=t$라 하면 $2^{x}>0,\ 2^{-x}>0$이므로

$t=2^{x}+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^{x}\times 2^{-x}}=2$

주어진 함수는 $y=3(t^{2}-2)-10t$이므로

$y=3t^{2}-10t-6$의 최솟값은 $t\ge 2$이므로

$t=2$일 때, $y=12-20-6=-14$이다.

69) 2

⇨ $2^{x}+2^{-x}=t$라 하면 $2^{x}>0,\ 2^{-x}>0$이므로

$t=2^{x}+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^{x}\times 2^{-x}}=2$

주어진 함수는 $y=-t^{2}+2+2t=-(t-1)^{2}+3$이므로 $t=2$일 때, 최댓값 $-1+3=2$를 갖는다.

70) -4

⇨ $y=(2^x)^2-4\cdot 2^x-1$에서 $2^x=t$라 하면

$\frac{1}{2}\le t\le 4$이고, $y=t^2-4t-1=(t-2)^2-5$이므로

$t=2$, $2^a=2$ $\quad\therefore a=1$

최솟값 $b=-5$를 가진다.

$\therefore a+b=-4$

71) 160

⇨ $3^x=t$라 하면 $0\le x\le 2$이므로 $1\le t\le 9$

$y=9^x+2\cdot 3^{x+1}+9=t^2+6t+9=(t+3)^2$

$t=1$일 때, 최솟값 16, $t=9$일 때,

최댓값 144이므로

최댓값과 최솟값의 합은 $144+16=160$

72) 2

⇨ $y=4^x-2^{x+2}+a=(2^x)^2-4\cdot 2^x+a$에서

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-4t+a=(t-2)^2+a-4$

이때, $0\le x\le 2$에서 $1\le t\le 4$이므로 주어진 함수의 최솟값은 $t=2$일 때 $a-4$이다.

따라서 $a-4=-3$이므로 $a=1$

또, 최댓값은 $t=4$일 때, a, 즉 1이므로 $M=1$

$\therefore a+M=2$

73) -8

⇨ $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$

이때, $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로

$-1\le x\le 2$일 때 $-1\le f(x)\le 3$

함수 $(g\circ f)(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$은 x^2-2x의 값이 증가하면 $(g\circ f)(x)$의 값은 감소하므로

함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값은 $f(x)=3$,

즉 $x=-1$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$이다.

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1}{8}$이므로 $\frac{a}{b}=-8$

74) 0

⇨ $4^x=t(t>0)$라 하면

$f(x)=16t+\frac{1}{4t}\ge 2\sqrt{16t\times\frac{1}{4t}}=2\times 2=4$이므로 최솟값 $m=4$를 갖는다.

$16t=\frac{1}{4t}$일 때, 최솟값 $m=4$이므로

$64t^2=1$, $t^2=\frac{1}{64}$ $\quad\therefore t=\frac{1}{8}(\because t>0)$

$4^\alpha=\frac{1}{8}$이므로 $\alpha=-\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{8}{3}a+m=-4+4=0$

75) $\frac{3}{8}$

⇨ $y=2^{-3x}\cdot 3^x$, 즉 함수 $y=\left(\frac{3}{8}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $-2\le x\le 3$이므로

최댓값은 $x=-2$일 때 $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}=\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$

최솟값은 $x=3$일 때 $\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{27}{512}$

따라서 $M=\frac{64}{9}$, $m=\frac{27}{512}$이므로 $Mm=\frac{3}{8}$