단원 ISSUE

이 단원에서는 기본적으로 함수의 개형을 파악해야 하는 문제가 자주 출제된다. **접선의 방정식**의 경우 주어진 조건에 따라 구하는 방법이 다르므로 각 방법을 반복하여 학습해야 한다. 또한 **함수의 극대와 극소**를 이용하여 **방정식과 부등식에 활용**하는 문제, 그리고 속도와 가속도의 그래프를 해석하는 문제도 자주 출제된다.

평가문제

[중단원 학습 점검]

1. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+3$에서 $x=2$일 때의 접선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[대단원 학습 점검]

2. 곡선 $y=x^3+x^2-2x$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라고 할 때, 선분 AB의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[중단원 학습 점검]

3. 곡선 $y=x^3+x$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

[대단원 학습 점검]

4. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=3x+4$일 때, 곡선 $y=\{f(x)\}^2$ 위의 x좌표가 -1인 점에서의 접선의 방정식은?

① $y=-6x-5$ ② $y=6x-4$ ③ $y=6x+7$ ④ $y=12x+13$ ⑤ $y=12x-12$

[중단원 학습 점검]

5. 함수 $f(x)=x^2-3x+1$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

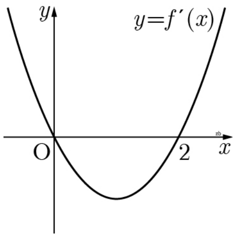
[중단원 학습 점검]

6. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2x+5$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 역함수가 존재하도록 하는 정수 a의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[중단원 학습 점검]

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음과 같다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -1일 때, 극댓값을 구하면?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[대단원 학습 점검]

8. 함수 $f(x)=ax^3+2x^2+4x+5$가 항상 증가하도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

[대단원 학습 점검]

9. $x=a$에서 극값 b를 갖는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=x^3\{f(x)\}^2$라고 할 때, $g'(a)$는?

① ab　② a^3b^2　③ $3a^2b$　④ $3a^2b^2+3a^3$　⑤ $3a^2b^2$

[중단원 학습 점검]

10. 함수 $f(x)=3x^4-4x^3+4$의 그래프의 극댓값과 극솟값의 합을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

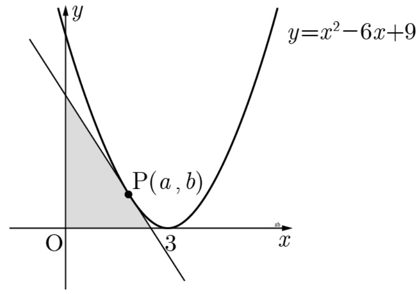
[대단원 학습 점검]

11. 밑면이 정사각형인 사각기둥이 있다. 사각기둥의 대각선의 길이가 12일 때, 이 사각기둥의 부피가 최대가 되게 하는 밑면의 한 변의 길이를 구하면?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{3}$　④ 8　⑤ $4\sqrt{5}$

[중단원 학습 점검]

12. 곡선 $y=x^2-6x+9$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 최대일 때, $a+b$의 값을 구하면? (단, $0<a<3$)



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[대단원 학습 점검]

13. 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$의 최댓값이 2일 때, 최솟값을 구하면?

① -21　② -18　③ -16　④ -11　⑤ -5

[대단원 학습 점검]

14. $a>0$인 실수 a에 대하여 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 함수 $y=x^3-12x$의 최솟값을 $f(a)$라고 할 때, $f(1)+f(3)+f(5)$의 값을 구하면?

① -29　② -32　③ -43　④ -21　⑤ 21

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 학습 점검]

15. 방정식 $f(x)=x^4-2x^3-x^2$, $g(x)=2x^3-5x^2-2$에 대하여 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 구하면?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

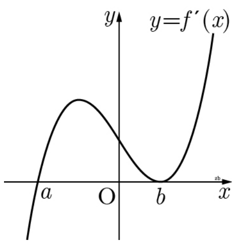
[중단원 학습 점검]

16. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^6-3x^2+5 \geq k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하면?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[대단원 학습 점검]

17. 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않을 필요충분조건은? (단, 중근은 하나로 생각한다.)



① $f(a)=0$ ② $f(b)=0$
③ $f(a)>0$ ④ $f(b)>0$
⑤ $f(a)<0$

[대단원 학습 점검]

18. 방정식 $x^3-5x^2+4x=x^2-5x+2-k$가 서로 다른 세 개의 근을 갖도록 하는 정수 k의 값의 합은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[대단원 학습 점검]

19. 곡선 $y=x^3+x^2-10x$와 $y=x^2-7x+k$의 교점이 제 2사분면에서 2개, 제 1사분면에서 1개 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$ ② $k=2$
③ $-2 \leq k \leq 2$ ④ $-2<k \leq 2$
⑤ $0 \leq k<2$

[중단원 학습 점검]

20. 수직선 위에서 원점을 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3+t^2+2t$일 때, 시각 $t=2$에서의 속도와 가속도의 합을 구하면?

① 31 ② 32
③ 33 ④ 34
⑤ 35

[중단원 학습 점검]

21. 직선 도로 위를 달리는 어느 자동차에 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리 $x\,\mathrm{m}$가 $x=27t-t^3$이다. 이 자동차에 제동을 건 후 정지할 때까지 움직인 거리를 구하면? (단, $0 \leq t \leq 3$)

① 51 ② 52
③ 53 ④ 54
⑤ 55

[대단원 학습 점검]

22. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라고 하자.
$f(t)-g(t)=\dfrac{2}{3}t^3-2t^2-30t$이고, 시각 $t=a$에서 두 점 P, Q의 속도가 같고, 속도가 같아지는 시각에서의 두 점 사이의 거리를 b라 할 때, $\dfrac{3b}{a}$를 구하면? (단, a, b는 상수이다.)

① -70 ② -35
③ 0 ④ 35
⑤ 70

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

실전문제

23. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선과 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$이 서로 수직일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{8h}$의 값을 구하시오.

① -2　② -1　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

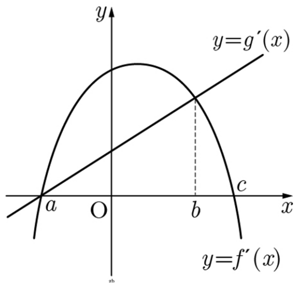
24. 점 $\mathrm{P}(0, -6)$에서 곡선 $y=kx^4$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 $64k$의 값을 구하시오.

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{16}$　④ $\frac{1}{32}$　⑤ $\frac{1}{64}$

25. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2ax+3$이 $x>1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $a<0$　③ $a>2$　④ $a<2$　⑤ $0<a<2$

26. 삼차함수 $y=f(x)$와 이차함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $a<x<c$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 $x=a$에서의 극값은 같다.

ㄷ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖고, $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

27. 두 곡선 $y=3x^4+10x^3-6x^2$, $y=2x^3+24x+a$가 서로 다른 세 개의 교점을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)=x^3-2x^2+3$에서 $x=2$일 때의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수와 같다.

$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+3-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x^2=4$

2) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^3+x^2-2x$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2x-2$

$f'(-1)=3-2-2=-1$ 이므로

$\mathrm{A}(-1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $y=-x+1$이고

곡선과 접선이 만나는 점은

$x^3+x^2-2x=-x+1$

$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$ 이므로

$x=-1,\ 1$에서 만난다.

점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$ 이다.

3) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^3+x$이라 하면 $f'(x)=3x^2+1$

$f'(1)=3+1=4$ 에서

$(1,\ 2)$에서 접선의 방정식은 $y=4x-2$ 이므로

직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이다.

4) [정답] ③

[해설] 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$를 지나고 그 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f(-1)=1,\ f'(-1)=3$

$g(x)=\{f(x)\}^2$으로 놓으면

$g'(x)=2f(x)f'(x)$

이때 $x=-1$에서의 접선의 기울기는

$g'(-1)=2f(-1)f'(-1)=6$

또, $x=-1$인 점의 y좌표는

$g(-1)=\{f(-1)\}^2=1$ 이므로

구하는 접선의 방정식은 $y=6x+7$이다.

5) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^2-3x+1$는 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 $(-1,\ 1)$에서 미분가능이므로

평균값 정리에 의해

$f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

$=\frac{(1-3+1)-(1+3+1)}{2}=-3$ 에서

$2c-3=-3\ \therefore\ c=0$

6) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^3+ax^2+2x+5$에서 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하거나 감소해야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+2$ 이므로 $f'(x)\ge0$ 에서

$f'(x)=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=a^2-3\times2\le0,\ -\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$ 이므로

정수 a는 $-2,-1,0,1,2$ 의 5개다.

7) [정답] ③

[해설] $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 $x=0$ 또는 $x=2$이므로

$f'(0)=b=0,\ f'(2)=12+4a+b=0$, 즉 $a=-3$

$f(x)=x^3-3x^2+c$

한편, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f(2)=8-12+c=-1$

즉, $c=3$이므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=3$ 이다.

8) [정답] ③

[해설] $f(x)=ax^3+2x^2+4x+5$에 대하여

함수 $f(x)$는 증가함수이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이다.

$f(x)=ax^3+2x^2+4x+5$에서

$f'(x)=3ax^2+4x+4$

방정식 $3ax^2+4x+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-3a\times4\le0,\ 12a\ge4$ 이므로

$a\ge\frac{1}{3}$이고, 정수 a의 최솟값은 1이다.

9) [정답] ⑤

[해설] 다항함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값 b를 가지므로 $f(a)=b,\ f'(a)=0$ 이다.

$g(x)=x^3\{f(x)\}^2$에서

$g'(x)=3x^2\{f(x)\}^2+2x^3f(x)f'(x)$

즉, $g'(a)=3a^2\{f(a)\}^2+2a^3f(a)f'(a)=3a^2b^2$

10) [정답] ③

[해설] $f(x)=3x^4-4x^3+4$에서 $f'(x)=12x^3-12x^2$

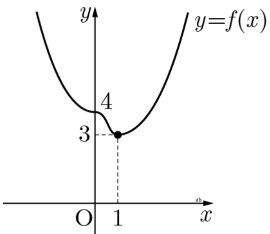
$f'(x)=12x^2(x-1)$에서

$f'(x)=0$일 때 $x=0$ 또는 $x=1$ 이므로

$f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↘	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 극댓값은 없고, 극솟값은 3이다.

11) [정답] ③

[해설] 사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 a, 높이를 x라 하면

사각기둥의 밑면의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$이고

$(\sqrt{2}a)^2+x^2=12^2$ 이므로 $2a^2=144-x^2$,

$a^2=72-\dfrac{x^2}{2}$이고

사각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=a^2x=\left(72-\dfrac{x^2}{2}\right)x$

$V'(x)=72-\dfrac{3}{2}x^2=0$ 에서 $x=\pm4\sqrt{3}$ 이므로

x	0	$\cdots$	$4\sqrt{3}$	$\cdots$
$V'(x)$		$+$	0	$-$
$V(x)$		↗	$192\sqrt{3}$	↘

$V(x)$는 $x=4\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 밑면의 한 변의 길이는 $a=4\sqrt{3}$이다.

12) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^2-6x+9$이라 하면

$(a,\ b)$는 $f(x)$위의 점이므로 $b=a^2-6a+9$

$f'(x)=2x-6$, $f'(a)=2a-6$이므로

$(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$y=(2a-6)(x-a)+a^2-6a+9$

$y=(2a-6)x-a^2+9$ 이므로 접선의 x절편은

$x=\dfrac{a+3}{2}$이고 y절편은 $-a^2+9$이므로

접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a+3}{2}\times(-a^2+9)$

$=\dfrac{1}{4}(-a^3-3a^2+9a+27)$

$S'(a)=-\dfrac{3}{4}(a^2+2a-3)=-\dfrac{3}{4}(a+3)(a-1)$에서

$S'(a)=0$일 때 $a=-3,\ 1$ 이므로

$S(a)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	8	↘	

$S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 이때 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이다.

따라서 구하는 값은 $1+4=5$

13) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$의 근은 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서

$x=1$ 또는 $x=3$ 이고 $f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-16$	↗	$a+4$	↘	a	↗	$a+4$

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 $a+4$을 가지므로 $a+4=2$, $a=-2$

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서의 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-1)=-2-16=-18$

14) [정답] ③

[해설] $h(x)=x^3-12x$로 놓으면

$h'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$에서

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이므로

$h(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	0	↘	-16	↗

$a=1$일 때 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서의 최솟값은 $f(1)=h(1)=-11$

$a=3$일 때 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서의 최솟값은 $f(3)=h(2)=-16$

$a=5$일 때 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서의 최댓값은 $f(5)=h(2)=-16$ 이다.

따라서 $f(1)+f(3)+f(5)=-43$

15) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^4-2x^3-x^2$와 $g(x)=2x^3-5x^2-2$의 교점을 구하기 위해

$x^4-2x^3-x^2=2x^3-5x^2-2$

$x^4-4x^3+4x^2+2=0$ 에서

$h(x)=x^4-4x^3+4x^2+2$라 하면

$h'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$h'(x)=0$일 때 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 이므로

$h(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $h(x)$의 그래프는

x축과 만나지 않는다.

16) [정답] ④

[해설] $f(x)=x^6-3x^2+5$라 하면

$f'(x)=6x^5-6x=6x(x^4-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm 1$ 이므로

$f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↗	5	↘	3	↗

따라서 $f(x)$의 최솟값은 3이고 $3\geq k$ 이면 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하므로

k의 최댓값은 3이다.

17) [정답] ③

[해설] 주어진 그래프에서 $f'(a)=0$, $f'(b)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 극소이다.

방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않으면

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 하므로 $f(a)>0$이다.

18) [정답] ①

[해설] $x^3-5x^2+4x=x^2-5x+2-k$ 에서

$x^3-6x^2+9x-2+k=0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$ 이므로

$f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2+k$	↘	$-2+k$	↗

주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-2<k<2$ 이므로

정수 k는 $-1,0,1$이다.

19) [정답] ①

[해설] $x^3+x^2-10x=x^2-7x+k$에서 $x^3-3x=k$

$f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로

$f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

$f(0)=0$이므로 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$가 주어진 조건에서 만나도록 하는 실수 k의 범위는

$0<k<2$ 이다.

20) [정답] ②

[해설] 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2t+2$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t+2$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=18$, $a=14$

21) [정답] ④

[해설] 시각 t에서의 자동차의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+27$ 이고

자동차가 정지할 때 $v=0$이므로

$-3t^2+27=-3(t+3)(t-3)=0$ 에서

$0\leq t\leq 3$이므로 $t=3$ 이다.

따라서 자동차에 제동을 건 후 정지할 때까지

움직인 거리는 $54\,\mathrm{m}$이다.

22) [정답] ⑤

[해설] $f(t)-g(t)=\dfrac{2}{3}t^3-2t^2-30t$

$h(t)=f(t)-g(t)$로 놓으면

$h'(t)=2t^2-4t-30$

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $h'(t)=0$이고

$h'(t)=2(t+3)(t-5)=0$에서 $t=5$, $(\because t>0)$

$h(5)=\dfrac{2}{3}\times 5^3-2\times 5^2-30\times 5=-\dfrac{350}{3}$ 이므로

두 점 P, Q 사이의 거리는 $\dfrac{350}{3}$이다.

$\therefore\ \dfrac{3b}{a}=\dfrac{3\times\dfrac{350}{3}}{5}=70$

23) [정답] ②

[해설] 문제의 조건에 의해 $f'(2)\times\dfrac{1}{2}=-1$이다.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2-2h)}{8h}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}+\dfrac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\right\}$

$=\dfrac{f'(2)}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{f'(2)}{2}=-1$

24) [정답] ④

[해설] 점 P에서 곡선에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 점 A의 x좌표를 $t(t>0)$라 할 때, 삼각형 APB는 직각이등변삼각형이므로

$t=kt^4+6$

또한 직선 PA의 기울기가 1이므로

$4kt^3=1$

따라서 두 식을 연립하여 풀면

$k=\dfrac{1}{2^{11}}$ $\quad\therefore\ 64k=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$

25) [정답] ③

[해설] $f'(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+2a-a^2$에서
이차방정식 $(x-a)^2+2a-a^2=0$의 두 실근이 1보다 커야 한다.
즉 $a>1$이고,
$D=a^2-2a>0$에서 $a(a-2)>0$
즉 $a>1$이고, $a<0$ 또는 $a>2$
$\therefore a>2$

26) [정답] ④
[해설] ㄱ. $a<x<c$에서 $f'(x)>0$이므로 주어진 구간에서 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에서 극값을 가지지만 $f(a)=g(a)$인지는 알 수 없다.
ㄷ. $f'(a)-g'(a)=f'(b)-g'(b)=0$
또 $f'(x)-g'(x)$의 값이 $x=a$를 전후로 음수에서 양수로 바뀌고, $x=b$를 전후로 양수에서 음수로 바뀌므로 $f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖고 $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

27) [정답] ④
[해설] 두 곡선의 방정식을 연립하여 정리하면
$3x^4+8x^3-6x^2-24x=a$이므로
$f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$라 하자.
$f'(x)=12x^3+24x^2-12x-24$
$\quad =12(x-1)(x+1)(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$이고
$f(-2)=8$, $f(-1)=13$, $f(1)=-19$이므로
$f(x)=a$의 실근의 개수가 3개이려면
정수 a의 값은 8, 13이어야 한다.
따라서 모든 정수 a의 값의 합은 21이다.