1-1-1.함수의 극한_천재(류희찬)

개념check

[함수의 극한]

• 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면
함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고,
L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라 하고
이것을 기호로 나타내면 다음과 같다.
⇨ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to L$

• 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때,
(1) $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고 이것을 기호로 나타내면 다음과 같다.
⇨ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to\infty$
(2) $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고 이것을 기호로 나타내면 다음과 같다.
⇨ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to -\infty$

[우극한과 좌극한]

• 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 존재하고 그 값이 L로 같으면 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
또 그 역도 성립한다.
⇨ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)=L$

기본문제

[문제]

1. $\lim\limits_{x\to 1}(-2x+5)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[문제]

2. 다음 극한 중 양의 무한대로 발산하는 것은?

① $\lim\limits_{x\to 2}3-\dfrac{1}{(x-2)^2}$
② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}+1$
③ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$
④ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3}{|x-3|}$
⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-1}{x^2}$

[문제]

3. 다음 극한 중 수렴하는 것은?

① $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
② $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2}{x+1}-3x\right)$
③ $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+1)$
④ $\lim\limits_{x\to \infty}(x-4)$
⑤ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4}{x-3}$

[문제]

4. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ 2x-3 & (x\ge 1)\end{cases}$일 때,
$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

[예제]

5. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$일 때,
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 1} f(x)$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[스스로 확인하기]

6. **다음 (ㄱ), (ㄴ)에 알맞은 것을 구하면?**

$x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 α일 때, 기호로 $\boxed{(ㄱ)}$ 또는 $x\to a$일 때, $f(x)\to\alpha$와 같이 나타낸다. 함수 $f(x)$에서 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=\alpha \Leftrightarrow \boxed{(ㄴ)}=\alpha$

① (ㄱ) : $\lim_{x\to a}f(x)$, (ㄴ) : $\lim_{x\to a}f(x)$

② (ㄱ) : $\lim_{x\to a}f(x)$, (ㄴ) : $\lim_{x\to a+}f(x)$

③ (ㄱ) : $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, (ㄴ) : $\lim_{x\to a}f(x)$

④ (ㄱ) : $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, (ㄴ) : $\lim_{x\to a+}f(x)$

⑤ (ㄱ) : $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, (ㄴ) : $\lim_{x\to a-}f(x)$

[스스로 확인하기]

7. **함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & (x\le 2) \\ k & (x>2)\end{cases}$일 때, $\lim_{x\to 2}f(x)$가 존재하게 하는 상수 k의 값은?**

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

[스스로 확인하기]

8. **유리함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+4$가 다음 조건을 만족시킨다.**

(가) $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$
(나) $x=1$에서 $f(x)$의 극한이 존재하지 않는다.

이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 3　② 5
③ 7　④ 9
⑤ 11

[스스로 마무리하기]

9. **함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+1 & (x\ge 1) \\ x^2-2x+a & (x<1)\end{cases}$일 때, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극한값을 갖기 위한 상수 a의 값은?**

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

유사문제

10. **함수 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x<0) \\ 1-x & (0\le x<1) \\ 2x(2-x) & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은?**

① 5　② 4
③ 3　④ 2
⑤ 1

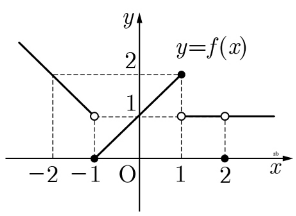
11. **다음 중 극한값이 존재하는 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)**

① $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-3}$　② $\lim_{x\to 0}(x-[x])$

③ $\lim_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$　④ $\lim_{x\to 0}\dfrac{[x]^2}{|x|}$

⑤ $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}$

12. **함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 2}f(x)$의 값은?**



① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

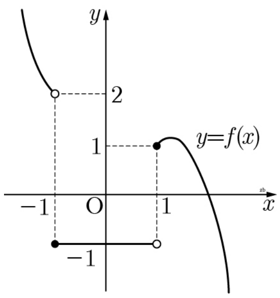
13. 극한값 $\lim_{x\to 4}(1-2x)$를 구하면?

① -7　② -6
③ -5　④ -3
⑤ -2

14. $\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}+\lim_{x\to 3-}\frac{|x^2-9|}{x-3}$의 값은?

① -6　② -4
③ 2　④ 4
⑤ 8

15. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값은?

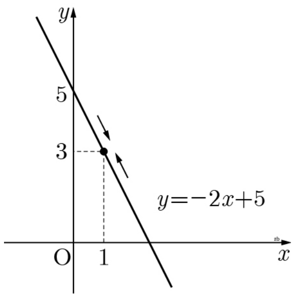
① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ③

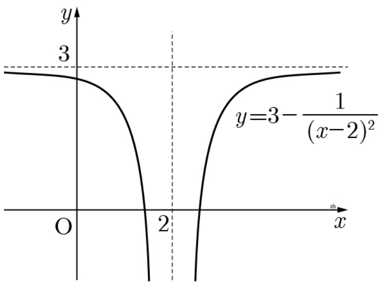
[해설] $y=-2x+5$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore \lim\limits_{x\to1}(-2x+5)=3$

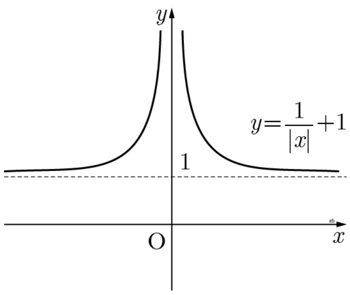
2) [정답] ②

[해설] ① $y=3-\dfrac{1}{(x-2)^2}$의 그래프는 다음과 같다.



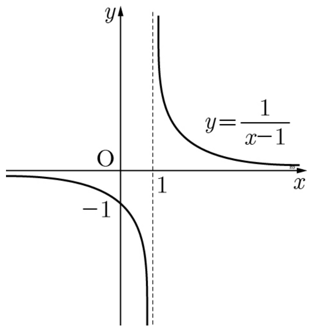
그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, y의 값은 한없이 작아지므로
주어진 극한은 음의 무한대로 발산한다.

② $y=\dfrac{1}{|x|}+1$의 그래프는 다음과 같다.



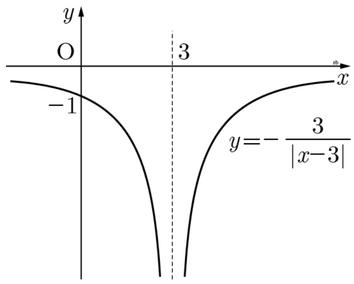
그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, y의 값은 한없이 커지므로
주어진 극한은 양의 무한대로 발산한다.

③ $y=\dfrac{1}{x-1}$의 그래프는 다음과 같다.



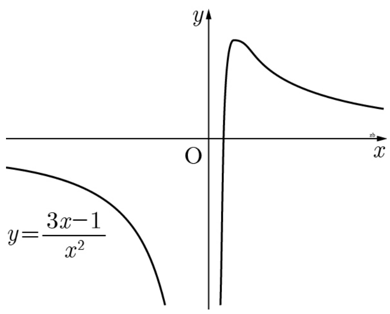
그래프에서 $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x-1}$이므로
주어진 극한의 극한값은 존재하지 않는다.

④ $y=\dfrac{-3}{|x-3|}$의 그래프는 다음과 같다.



그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, y의 값은 한없이 작아지므로
주어진 극한은 음의 무한대로 발산한다.

⑤ $y=\dfrac{3x-1}{x^2}$의 그래프는 다음과 같다.



그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, y의 값은 한없이 작아지므로
주어진 극한은 음의 무한대로 발산한다.

3) [정답] ⑤

[해설] ① 음의 무한대로 발산한다.
② 음의 무한대로 발산한다.
③ 양의 무한대로 발산한다.
④ 양의 무한대로 발산한다.
⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-3}=0$

4) [정답] ②

[해설] $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x+1)=2$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(2x-3)=-1$이므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

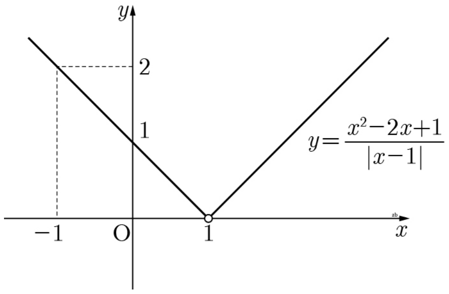
$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1$

5) [정답] ②

[해설] $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$

$=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)=2+1+0=3$

6) [정답] ③

[해답] $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 α일 때, 기호로 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$이다.

또한, 좌극한값과 우극한값이 같을 때, 극한값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=\alpha$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$이며 역도 성립한다.

7) [정답] ④

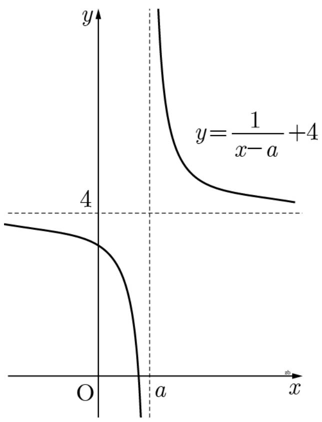
[해설] $\lim_{x\to2-}f(x)=2^2+2=6$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하기 위해서는

$\lim_{x\to2+}f(x)=k=6$이어야 한다.

8) [정답] ②

[해설] $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+4$의 그래프는 다음과 같다.



그래프에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=4$이므로 $b=4$

또한 $x=a$에서 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않으므로 $a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

9) [정답] ②

[해답] 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극한값을 가지려면

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$를 만족해야 한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-2x+a)=a-1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x^2+x+1)=-1+1+1=1$

이므로 $a-1=1$

$\therefore a=2$

10) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x)=\begin{cases}2 & (x<0)\\ 1-x & (0\le x<1)\\ 2x(2-x) & (x\ge1)\end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to0-}f(x)=2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=2+2=4$

11) [정답] ⑤

[해설] ① $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-3}=\infty$

② $\lim_{x\to0+}(x-[x])=0-0=0$,

$\lim_{x\to0-}(x-[x])=0-(-1)=1$

이므로 $\lim_{x\to0}(x-[x])$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$

④ $\lim_{x\to0+}\dfrac{[x]^2}{|x|}=\lim_{x\to0+}\dfrac{[x]^2}{x}=0$,

$\lim_{x\to0-}\dfrac{[x]^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\dfrac{[x]^2}{-x}=\infty$

이므로 $\lim_{x\to0}\dfrac{[x]^2}{|x|}$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$,

$\lim_{x\to0-}\dfrac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\dfrac{x^2}{-x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$

이므로 $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{|x|}=0$

12) [정답] ③

[해설] $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to2}f(x)=1$이므로

$\lim_{n\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)=1+1+1=3$

13) [정답] ①

[해설] $\lim_{x\to4}(1-2x)=1-2\times4=-7$

14) [정답] ②

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[해설] $\lim_{x \to 1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}+\lim_{x \to 3-}\frac{|x^2-9|}{x-3}$

$=\lim_{x \to 1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\lim_{x \to 3-}\frac{-(x^2-9)}{x-3}$

$=\lim_{x \to 1+}(x+1)+\lim_{x \to 3-}\frac{-(x+3)(x-3)}{x-3}=2-6=-4$

15) [정답] ①

[해설] $\lim_{x \to -1+}f(x)+\lim_{x \to 1-}f(x)=-1-1=-2$