1-1.제곱근과 실수

1-1-1.제곱근의 뜻과 성질_비상(김원경)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

- 1) 제작연월일: 2020-03-18
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[제곱근의 뜻]

- (1) 제곱해서 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다.
- 즉 $x^2 = a$ 일 때, x는 a의 제곱근이다.
- (2) 제곱근의 개수
- ① 양수의 제곱근: 2개
- ② 0의 제곱근: 1개
- ③ 음의 제곱근: 없다.

[제곱근의 표현]

- (1) 제곱근은 근호라고 하는 $\sqrt{}$ 를 사용하며, '제곱근' 또는 '루트'라
- (2) 양수 a의 제곱근 중에서 양의 제곱근을 \sqrt{a} , 음의 제곱근을 $-\sqrt{a}$ 라 한다.
- 즉 양수 a에 대하여 $x^2 = a$ 이면 $x = \pm \sqrt{a}$

[제곱근의 성질]

- (1) a의 제곱근을 제곱하면 a가 되므로 $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$
- (2) 근호 안의 수가 어떤 수의 제곱이면 근호 없이 표현할 수 있으므 로 $\sqrt{a^2} = a$. $\sqrt{(-a)^2} = a$

[제곱근의 대소 관계]

- a>0, b>0일 때
- (1) a < b이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
- (2) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이면 a < b

기본문제

[문제]

1. 다음 <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은?

- ㄱ. 49의 제곱근은 7이다.
- ㄴ. 3은 9의 제곱근이다.
- ㄷ. 0의 제곱근은 없다.
- 리. 0.09의 제곱그은 ±0.3이다.
- \Box . $-\frac{7}{6}$ 은 $\frac{49}{36}$ 의 음의 제곱근이다.
- ① 7. L
- ② 7, L, ⊏
- ③ ∟, ⊏
- ④ ∟, ≥, □
- ⑤ □. □

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 3의 제곱근은 $\pm \sqrt{3}$ 이다.
- ② 5의 제곱근과 제곱근 5는 같다.
- ③ 제곱근 17은 $\sqrt{17}$ 이다.
- (4) $-\sqrt{6}$ 은 6의 음의 제곱근이다.
- ⑤ $\frac{5}{8}$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$ 이다.

[문제]

[문제]

3. 다음 그림과 같이 넓이가 $35 \, \text{cm}^2$ 인 정사각형의 한 변의 길이를 구하면?



- ① 5 cm
- ② 7 cm
- ③ 10 cm
- (4) $\sqrt{35}$ cm
- ⑤ $\sqrt{70}$ cm

[문제]

4. 다음 중 옳은 것은?

- ① $(-\sqrt{2})^2 = -2$ ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- $(3) \sqrt{(-5)^2} = 5$ $(4) \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{4}$
- (5) $\sqrt{(-0.2)^2} = 0.2$

[문제]

5. 다음을 근호를 사용하지 않고 나타낸 것으로 옳 은 것을 <u>모두</u> 고르면? (정답 2개)

- ① $\sqrt{25} = 5$
- ② $\sqrt{3} = 9$
- $\sqrt{3} \sqrt{144} = 12$
- $(4) \sqrt{49} = 7$
- (5) $\sqrt{0.1} = 0.01$

[예제]

6. 다음에서 a+b의 값은?

$$(7)$$
 $(-\sqrt{5})^2 + \sqrt{169} = a$

- (나) $-\sqrt{(-7)^2} \times \sqrt{25} = b$ (1) -17

- ③ 18
- **4** 33
- (5) 54

[문제]

7. 다음 계산 결과가 가장 큰 것은?

- ① $\sqrt{9} \sqrt{(-3)^2}$ ② $(-\sqrt{5})^2 \sqrt{16}$
- $(3) \sqrt{(-8)^2} \times \sqrt{\frac{49}{16}}$ $(4) \sqrt{(-3)^2} \div \left(-\sqrt{\frac{81}{25}}\right)$
- (5) $(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{5})^2$

[문제]

8. 다음 두 수의 크기 비교가 옳은 것은?

- ① $-2 < -\sqrt{3}$ ② $3 < \sqrt{8}$
- $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < \frac{2}{3}$ $\sqrt[4]{-0.2} < -\sqrt{0.2}$
- (5) $\sqrt{15} > 5$

[중단원 학습 점검]

9. 11의 음의 제곱근을 a, $(-3)^2$ 의 양의 제곱근을 b라 할 때, a^2-b 의 값을 구하면?

- $\bigcirc -8$
- $\bigcirc -5$
- 3 0
- **4** 5

(5) 8

[중단원 학습 점검]

10. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

- ① $(-\sqrt{5})^2 = 5$ ② $-\sqrt{(-11)^2} = -11$
- $(3) \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{9}$ $(4) \sqrt{0.25} = 0.5$
- $\boxed{5} \sqrt{0.01} = -0.1$

[중단원 학습 점검]

11. $(-2.5)^2$ 의 양의 제곱근을 a, 0.01의 음의 제곱근 을 b라 할 때, a-b의 값을 구하면?

- (1) 2.3
- ② 2.4
- 32.5
- 4) 2.6
- **⑤** 2.7

[중단원 학습 점검]

12. 다음 중 그 값이 다른 하나는?

- ① 3의 제곱근
- ② $\sqrt{9}$
- $(-\sqrt{3})^2$
- ④ 3
- (5) $\sqrt{(-3)^2}$

[중단원 학습 점검]

13. 다음 식을 계산하면?

$$(-\sqrt{5})^2 - \sqrt{64} \times \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

- $\bigcirc -3$

3 1

④ 3

(5) 5

[중단원 학습 점검]

14. $\sqrt{56x}$ 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x의 값을 구하면?

- 1) 2
- ② 4
- ③ 7
- **(4)** 8
- ⑤ 14

[중단원 학습 점검]

15. 두 실수 a, b에 대하여 b < 0 < a일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{(-a)^2} - \sqrt{(-b)^2} - \sqrt{(b-a)^2} + \sqrt{(2a-b)^2}$$

- $\bigcirc -2a-$
- ③ 2a-b
- (4) 2a + b
- (5) 2a+3b

[대단원 학습 평가]

16. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 4는 16의 양의 제곱근이다.
- ② 제곱근 25는 ±5이다.
- ③ 0의 제곱근은 0이다.
- ④ 7의 제곱근은 $\pm \sqrt{7}$ 이다.
- ⑤ -2의 제곱근은 없다.

[대단원 학습 평가]

17. -2 < x < 2일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{(x-5)^2}$$

- ① -x+5
- 2 x + 3
- 3 x + 1
- 4 x 1
- ⑤ x-3

[대단원 학습 평가]

18. $5 < \sqrt{3x-1} < 6$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 3개
- ④ 4개
- ⑤ 5개

[대단원 학습 평가]

19. $\sqrt{30-n}$ 이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 값이 <u>아</u>닌 것은?

1 5

- 2 14
- ③ 21
- 4) 25
- ⑤ 26

유사문제

20. 제곱근에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- $\neg . \sqrt{64} 는 8이다.$
- L. 제곱근 3은 $\pm \sqrt{3}$ 이다.
- \Box . $\sqrt{25}$ 의 제곱근은 ±5이다.
- \Box . $(-4)^2$ 의 양의 제곱근은 4이다.
- ㅂ. $\sqrt{(-3)^2}$ 의 음의 제곱그은 $-\sqrt{3}$ 이다.
- ① ¬, □
- ② 7, 0, 1
- ③ 7, ⊏, ≥, ਖ
- ④ ∟, ⊏, ≥, □
- ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

21. 다음 중 값이 <u>다른</u> 하나는?

- $\bigcirc -\sqrt{2^2}$
- ② $(\sqrt{2})^2$
- $\sqrt{2^2}$
- $(4) (-\sqrt{2})^2$
- $\sqrt{(-2)^2}$

22. $\sqrt{81} - \sqrt{(-3)^2} \times (-\sqrt{2})^2$ 을 계산하면?

- ① 75
- 2 48
- 3 12
- **4** 8
- **⑤** 3

- **23.** 두 수의 대소 관계를 비교한 것으로 옳은 것은?
 - ① $2 < \sqrt{3}$
- ② $\sqrt{45} > 7$
- $3 \sqrt{0.6} < \sqrt{\frac{4}{7}}$ $4 3\sqrt{2} > -2\sqrt{3}$
- \bigcirc $-\sqrt{\frac{1}{7}} < -\frac{1}{3}$
- **24.** $\sqrt{50-n}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 n의 개수 를 구하면?
 - 1) 4
- 2 5
- 3 6

(4) 7

- **⑤** 8
- **25.** $a = \sqrt{748 \times b}$ 를 만족하는 자연수 a, b에 대하여 a-b의 최댓값은?
 - ① 81
- 2 114
- 3 143
- **4** 187
- (5) 289
- **26.** 부등식 $5 < \sqrt{10x} < 7$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?
 - ① 7

- 2 11
- 3 15
- ④ 17
- **⑤** 25
- **27.** 2 < x < 5일 때, $\sqrt{(x-2)^2} \sqrt{(x-5)^2}$ 을 간단히 하면?
 - ① -2x+7
- ② 2x-7
- 3 7
- $\bigcirc 3$
- ⑤ 3

4

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] ㄱ. 49의 제곱근은 ±7이다.

- L. 9의 제곱근은 ±3이다.
- ㄷ. 0의 제곱근은 0이다.
- \Box . $\frac{49}{36}$ 의 제곱근은 $\pm \frac{7}{6}$ 이다.

2) [정답] ②

[해설] ② 5의 제곱근은 $\pm \sqrt{5}$ 이고, 제곱근 5는 $\sqrt{5}$ 이다.

3) [정답] ④

[해설] 넓이가 35인 정사각형의 한 변의 길이는 35의 양의 제곱근이므로 $\sqrt{35}$ 이다.

4) [정답] ⑤

[해설] ① $(-\sqrt{2})^2 = 2$

②
$$\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$$

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(-0.2)^2} = -(-0.2) = 0.2$$

5) [정답] ①, ③

[해설] ① $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

- ② $\sqrt{3}$ 은 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 없다.
- $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$
- $(4) \sqrt{49} = -\sqrt{7^2} = -7$
- ⑤ $\sqrt{0.1}$ 은 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 없다.

6) [정답] ①

[해설]
$$a = (-\sqrt{5})^2 + \sqrt{169} = 5 + 13 = 18$$

 $b = -\sqrt{(-7)^2} \times \sqrt{25} = -7 \times 5 = -35$
 $\therefore a + b = 18 + (-35) = -17$

7) [정답] ③

[해설] ①
$$\sqrt{9} - \sqrt{(-3)^2} = 3 - 3 = 0$$

②
$$(-\sqrt{5})^2 - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

$$\sqrt{(-8)^2} \times \sqrt{\frac{49}{16}} = 8 \times \frac{7}{4} = 14$$

$$=3\times\left(-\frac{5}{9}\right)=-\frac{5}{3}$$

(5)
$$(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{5})^2 = 6 + 5 = 11$$

8) [정답] ①

[해설] ①
$$-\sqrt{4} < -\sqrt{3}$$
이므로 $-2 < -\sqrt{3}$

②
$$\sqrt{9} > \sqrt{8}$$
이므로 $3 > \sqrt{8}$

③
$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}}$$
, $\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}}$ 이므로 $\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{2}{3}$

④
$$-\sqrt{0.04} > -\sqrt{0.2}$$
이므로 $-0.2 > -\sqrt{0.2}$

⑤
$$\sqrt{15} < \sqrt{25}$$
이므로 $\sqrt{15} < 5$

9) [정답] ⑤

[해설] 11의 음의 제곱근은 $-\sqrt{11}$ 이므로 $a=-\sqrt{11}$ $(-3)^2$, 즉 9의 양의 제곱근은 3이므로 b=3 $\therefore a^2-b=(-\sqrt{11})^2-3=11-3=8$

10) [정답] ③

[해설] ③
$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

(4)
$$\sqrt{0.25} = \sqrt{0.5^2} = 0.5$$

(5)
$$-\sqrt{0.01} = -\sqrt{0.1^2} = -0.1$$

11) [정답] ④

[해설] $(-2.5)^2$ 의 양의 제곱근은 2.5이므로 a=2.50.01의 음의 제곱근은 -0.1이므로 b=-0.1 $\therefore a-b=2.5-(-0.1)=2.6$

12) [정답] ①

[해설] ① $\pm \sqrt{3}$

2, 3, 4, 5 3

13) [정답] ④

[해설]
$$(-\sqrt{5})^2 - \sqrt{64} \times \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

= $5 - 8 \times \frac{1}{4} = 5 - 2 = 3$

14) [정답] ⑤

[해설] $\sqrt{56x} = \sqrt{2^3 \times 7 \times x}$ 가 자연수가 되려면 $x = 2 \times 7 \times k^2$ (단, k는 자연수)의 꼴이어야 하므로 x = 14, 14×2^2 , 14×3^2 , … 따라서 가장 작은 자연수 x의 값은 14이다.

15) [정답] ④

[해설] b < 0 < a일 때, -a < 0, -b > 0, b-a < 0, 2a-b > 0

$$\therefore \sqrt{(-a)^2} - \sqrt{(-b)^2} - \sqrt{(b-a)^2} + \sqrt{(2a-b)^2}$$

$$= a - (-b) - (-b+a) + (2a-b)$$

$$= a + b + b - a + 2a - b$$

$$= 2a + b$$

16) [정답] ②

[해설] ② 제곱근 25는 $\sqrt{25} = 5$ 이다.

⑤ 음수의 제곱근은 없다.

17) [정답] ①

[해설] -2 < x < 2일 때, x-2 < 0, 2-x > 0, x-5 < 0

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{(x-5)^2}$$

$$= (-x+2) - (2-x) + (-x+5)$$

$$= -x+2-2+x-x+5$$

$$= -x+5$$

18) [정답] ④

[해설] $5 < \sqrt{3x-1} < 6$ 에서 $25 < 3x-1 < 36, \ 26 < 3x < 37$ $\therefore \frac{26}{3} < x < \frac{37}{3}$

따라서 이를 만족하는 정수 x는 9, 10, 11, 12의 4개이다.

19) [정답] ④

[해설] $\sqrt{30-n}$ 이 정수가 되려면 30-n은 0 또는 제곱수가 되어야 하므로 30-n=0, 1, 4, 9, 16, 25∴ n=30, 29, 26, 21, 14, 5

20) [정답] ②

[해설] ㄱ. $\sqrt{64} = 8$

- ㄴ. 제곱근 3은 $\sqrt{3}$ 이다.
- \Box . $\sqrt{25} = 5$ 의 제곱근은 $\pm \sqrt{5}$ 이다.
- $= .\sqrt{(-7)^2} = 7$ 의 제곱근은 $\pm \sqrt{7}$ 이다.
- \Box . $(-4)^2 = 16$ 의 양의 제곱근은 $\sqrt{16} = 4$ 이다.
- ㅂ. $\sqrt{(-3)^2} = 3$ 의 음의 제곱근은 $-\sqrt{3}$ 이다.

21) [정답] ①

[해설] ① $-\sqrt{2^2} = -2$ ② $(\sqrt{2})^2 = 2$ ③ $\sqrt{2^2} = 2$ ④ $(-\sqrt{2})^2 = 2$ ⑤ $\sqrt{(-2)^2} = -(-2) = 2$

22) [정답] ⑤

[해설] $\sqrt{81} - \sqrt{(-3)^2} \times (-\sqrt{2})^2$ = $9 - 3 \times 2 = 9 - 6 = 3$

23) [정답] ⑤

[해설] ① $2 = \sqrt{4}$ 이므로 $2 > \sqrt{3}$

②
$$7 = \sqrt{49}$$
이므로 $\sqrt{45} < 7$

③
$$\sqrt{0.6} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{21}{35}}$$
, $\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{20}{35}}$ 이 므로 $\sqrt{0.6} > \sqrt{\frac{4}{7}}$

프로
$$\sqrt{0.6} > \sqrt{7}$$

④ $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 이므로 $-3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$

⑤
$$-\frac{1}{3}$$
= $-\sqrt{\frac{1}{9}}$ 이므로 $-\sqrt{\frac{1}{7}}<-\frac{1}{3}$

24) [정답] ④

[해설] $\sqrt{50-n}$ 이 자연수가 되려면 $50-n=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \cdots$ $\therefore n=49,\ 46,\ 41,\ 34,\ 25,\ 14,\ 1(∵ n은 자연수)$ 따라서 자연수 n은 모두 7개이다.

25) [정답] ④

[해설] $\sqrt{748\times b}=\sqrt{2^2\times 11\times 17\times b}$ 가 자연수가 되려 면

 $b=11\times17\times k^2$ (단, n은 자연수)의 꼴이어야 한 다.

 $a = \sqrt{2^2 \times 11^2 \times 17^2 \times k^2} = 2 \times 11 \times 17 \times k = 374k$

(i) k=1일 때, a=374, b=187이므로

a - b = 187

- (ii) k=2일 때, a=748, b=748이므로 a-b=0
- (iii) k = 3일 때, a = 1122, b = 1683이므로 a b = -561

따라서 a-b의 최댓값은 187이다.

26) [정답] ①

[해설] $5 < \sqrt{10x} < 7$ 에서 25 < 10x < 49∴ 2.5 < x < 4.9따라서 이를 만족하는 자연수 x는 3, 4이므로 그 합은 3+4=7

27) [정답] ②

[해설] 2 < x < 5일 때, x-2 > 0, x-5 < 0 $\therefore \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x-5)^2} = x - 2 - (-x+5)$ = 2x - 7