03

지수함수

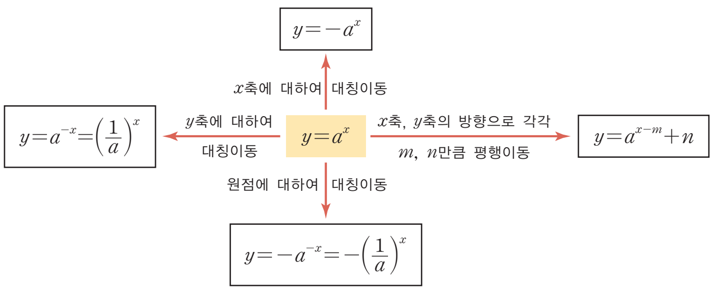
예제 01 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

다음 지수함수의 그래프를 그리고, 치역을 구하여라.

(1) $y=2^{x-2}-3$ (2) $y=3^{-x+1}$

접근 방법

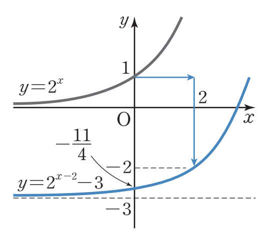
함수 $y=a^x$의 그래프를 기준으로 주어진 함수의 그래프를 생각해야 합니다. 즉, 평행이동이나 대칭이동을 이용하여 지수함수의 그래프를 그려 봅시다.



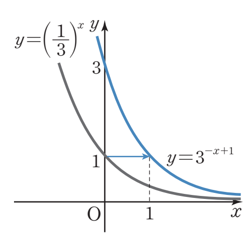
Bible $y=a^x \xrightarrow{x\text{축, } y\text{축의 방향으로 각각 } m,\ n\text{만큼 평행이동}} y=a^{x-m}+n$

상세 풀이

(1) 함수 $y=2^{x-2}-3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같습니다. 이때, 치역은 $\{y\,|\,y>-3$인 실수$\}$입니다.



(2) 함수 $y=3^{-x+1}=3^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같습니다. 이때, 치역은 $\{y\,|\,y>0$인 실수$\}$입니다.



정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

지수함수의 그래프를 그릴 때, 점근선을 먼저 그리는 것이 좀 더 편리합니다.

풀이집 p.35

숫자 바꾸기

01-1 다음 지수함수의 그래프를 그리고, 치역을 구하여라.

(1) $y=2^{x+3}+1$　　(2) $y=4^{-x-2}-2$

(3) $y=-2^{x+2}-1$　　(4) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$

표현 바꾸기　　◆ 보충 설명

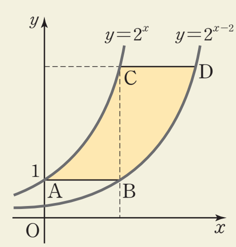
01-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $y=3^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 함수 $y=27\times 3^{2x}-12$의 그래프와 겹쳐졌다. mn의 값을 구하여라.

(2) 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(0,\ 5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆　　◆ 보충 설명

01-3 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프와 만나는 점을 D라고 하자. 두 함수 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$의 그래프와 두 선분 AB, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.



정답 **01-1** p.537 참조　**01-2** (1) 18 (2) 18　**01-3** 6

예제 02

절댓값 기호를 포함한 지수함수의 그래프

함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=2^{|x|}$ (2) $y=2^{-|x|}$

접근 방법

절댓값 기호 안의 식의 값이 0보다 크거나 같은 경우와 0보다 작은 경우로 나누어, 각 범위별로 그래프를 그려줍니다.

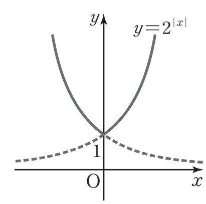
또는 두 함수 $y=f(x)$, $y=-f(x)$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭임을 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있습니다.

Bible 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나누어 그래프를 그린다.

상세 풀이

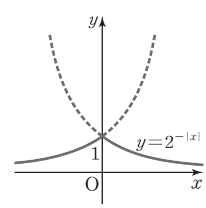
(1) $y=2^{|x|}=\begin{cases} 2^x & (x\geq 0) \\ 2^{-x} & (x<0) \end{cases}$

따라서 함수 $y=2^{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.



(2) $y=2^{-|x|}=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & (x\geq 0) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} & (x<0) \end{cases}$

따라서 함수 $y=2^{-|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.



정답 ➡ 풀이 참조

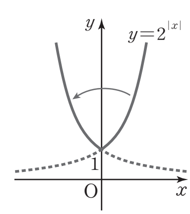
보충 설명

수학 〈하〉에서 배운 것처럼 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음과 같은 방법으로 그릴 수 있습니다.

① 절댓값 기호를 없앤 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그립니다.

② 절댓값 기호가 없는 식을 0으로 하는, 즉 직선 $x=0$ (y축)을 기준으로 $x\geq 0$인 부분을 대칭이동합니다.

따라서 위의 예제 (1)에서 함수 $y=2^{|x|}$의 그래프는 $x\geq 0$인 부분에 그린 함수 $y=2^x$의 그래프를 직선 $x=0$ (y축)에 대하여 대칭이동하면 됩니다.



풀이집 p.36

숫자 바꾸기

◆ 보충 설명

02-1 함수 $y=3^x$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=3^{|x|}$

(2) $y=3^{-|x|}$

(3) $y=|3^x-1|$

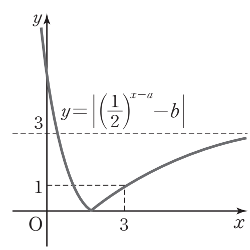
(4) $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-3\right|$

03

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

02-2 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}-b\right|$의 그래프가 직선 $y=3$을 점근선으로 하고 점 $(3,\ 1)$을 지난다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.



개념 넓히기 ★★☆

02-3 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하여라.

(단, 좌표축은 어느 사분면에도 속하지 않는다.)

정답 **02-1** p.537 참조 **02-2** 7 **02-3** 31

예제 03

지수함수의 성질

다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=2^x+2^{-x}$에 대하여 $f(a)=5$일 때, $f(-2a)$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $g(x)=2^{-x}$에 대하여 $g(2a)g(b)=4$, $g(a-b)=2$일 때, $2^{3a}+2^{3b}$의 값을 구하여라.

접근 방법

지수법칙을 이용하여 주어진 문제의 조건을 정리해 봅니다.

Bible

함수 $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)과 임의의 두 실수 x, y에 대하여

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$

(2) $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

(3) $f(px)=\{f(x)\}^p$ (단, p는 실수)

상세 풀이

(1) $f(a)=2^a+2^{-a}=5$이므로

$$f(-2a)=2^{-2a}+2^{2a}=(2^a+2^{-a})^2-2=5^2-2=23$$

(2) $g(2a)g(b)=2^{-2a}\times2^{-b}=2^{-2a-b}=4$이므로

$$-2a-b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g(a-b)=2^{-a+b}=2$이므로

$$-a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ b=0$$

$$\therefore 2^{3a}+2^{3b}=2^{-3}+2^0=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$$

정답 ➡ (1) 23 (2) $\dfrac{9}{8}$

보충 설명

지수함수의 함숫값을 구할 때에도 지수법칙은 자주 이용됩니다.

즉, $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$

(4) $(ab)^n=a^nb^n$

풀이집 p.38

숫자 바꾸기

03-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(3^{x}-3^{-x})$에 대하여 $f(p)=2$일 때, $f(3p)$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $g(x)=3^{-x}$에 대하여 $g(2a)g(a)g(2b)=27$, $g(a-b)=3$일 때, $3^{2a}+3^{2b}$의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

03-2 지수함수 $f(x)=a^{x}(a>0,\ a\neq1)$에 대한 설명 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$　　ㄴ. $f(x)=\sqrt{f(2x)}$　　ㄷ. $f(x^{3})=\{f(x)\}^{3}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 넓히기 ★★☆

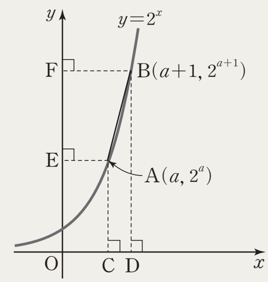
03-3 두 함수 $f(x)=2^{x}+2^{-x}$, $g(x)=2^{x}-2^{-x}$에 대하여 $f(x)f(y)=14$, $g(x)g(y)=10$일 때, $f(x+y)$의 값을 구하여라.

정답 **03-1** (1) 38 (2) $\frac{10}{9}$　**03-2** ③　**03-3** 12

예제 04

지수함수의 그래프와 도형

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(a+1,\ 2^{a+1})$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D, y축에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. 사각형 ACDB와 사각형 ABFE의 넓이의 비가 $2:5$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.



접근 방법

일반적으로 x축에 평행한 직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_1)^2}=|x_2-x_1|$$

입니다. 즉, x좌표의 차가 두 점 사이의 거리가 됩니다. 마찬가지로 y축에 평행한 직선 위의 두 점 $\mathrm{R}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{S}(x_1,\ y_2)$ 사이의 거리는 y좌표의 차, 즉

$$\overline{\mathrm{RS}}=|y_2-y_1|$$

입니다.

Bible x축 (또는 y축)에 평행한 선분의 길이는 x좌표 (또는 y좌표)의 차를 이용한다.

상세 풀이

$$\square\mathrm{ACDB}=\frac{1}{2}\times(2^a+2^{a+1})\times1=\frac{2^a+2^{a+1}}{2}=2^a\times\frac{1+2}{2}=3\times2^{a-1}$$

$$\square\mathrm{ABFE}=\frac{1}{2}\times(a+a+1)\times(2^{a+1}-2^a)=\frac{2a+1}{2}\times2^a=(2a+1)2^{a-1}$$

이때, $\square\mathrm{ACDB}:\square\mathrm{ABFE}=2:5$이므로

$$3\times2^{a-1}:(2a+1)2^{a-1}=2:5$$

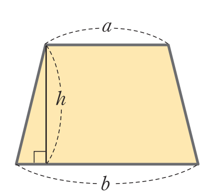
$$3:(2a+1)=2:5,\ 4a+2=15 \qquad \therefore\ a=\frac{13}{4}$$

정답 ➡ $\frac{13}{4}$

보충 설명

오른쪽 그림과 같이 윗변의 길이가 a, 아랫변의 길이가 b, 높이가 h인 사다리꼴의 넓이 S는

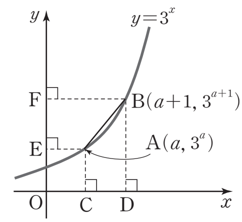
$$S=\frac{a+b}{2}h$$



풀이집 p.38

숫자 바꾸기

04-1 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 두 점 $A(a,\ 3^a)$, $B(a+1,\ 3^{a+1})$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D, y축에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. 사각형 ACDB와 사각형 ABFE의 넓이의 비가 $4:5$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.



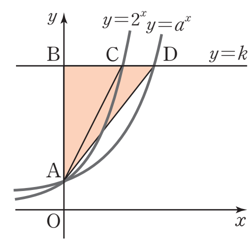
03

표현 바꾸기

04-2 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$ $(k>1)$가 y축과 만나는 점을 B, 점 $A(0,\ 1)$을 지나는 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라고 하자. 삼각형 ACB와 삼각형 ADC의 넓이의 비가 $2:1$일 때, 상수 a의 값은?

(단, $1<a<2$)

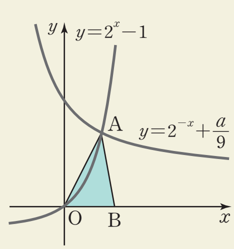
① $\sqrt[4]{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[4]{3}$
④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ $\sqrt[4]{8}$



개념 넓히기 ★☆☆

04-3 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=2^{-x}+\dfrac{a}{9}$의 교점을 A라고 하자. 점 B의 좌표가 $(4,\ 0)$일 때, 삼각형 AOB의 넓이가 16이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

(단, O는 원점이다.)



정답 **04-1** $\dfrac{3}{4}$ **04-2** ④ **04-3** 71

예제 05

지수함수의 그래프를 이용한 대소 관계

다음 세 수의 대소를 비교하여라.

(1) $3^{0.5}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[3]{9}$　　(2) $\sqrt{0.5}$, $\sqrt[3]{0.25}$, $\sqrt[5]{0.125}$

접근 방법

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소합니다.

따라서 거듭제곱근을 밑이 같은 거듭제곱 꼴로 나타낸 후 지수함수의 성질을 이용하여 대소를 비교합니다.

Bible

$a>1$일 때, $x_1<x_2 \iff a^{x_1}<a^{x_2}$

$0<a<1$일 때, $x_1<x_2 \iff a^{x_1}>a^{x_2}$

상세 풀이

(1) 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$3^{0.5}=3^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}},\ \sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$$

이때, 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로

$$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}} \qquad \therefore\ 3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$$

(2) 밑이 0.5인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{0.5}=0.5^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{0.5^2}=0.5^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[5]{0.125}=\sqrt[5]{0.5^3}=0.5^{\frac{3}{5}}$$

이때, 함수 $y=0.5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이므로

$$0.5^{\frac{2}{3}}<0.5^{\frac{3}{5}}<0.5^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore\ \sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$$

정답 ➡ (1) $3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$　(2) $\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$

보충 설명

지수의 대소 비교는 거듭제곱근의 대소 비교와 마찬가지로 밑을 통일하거나 똑같이 거듭제곱하는 방법, 지수를 통일하는 방법, 두 지수의 비를 조사하는 방법 등 여러 가지 방법이 있습니다.
따라서 주어진 수의 형태에 따라 어떤 방법을 써야 하는지 다양하게 접근해 봅니다.

풀이집 p.39

숫자 바꾸기

05-1 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

(1) $2^{0.5}$, $\sqrt[5]{4}$, $0.5^{-\frac{3}{4}}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$

(3) 2^{444}, 3^{333}, 5^{222}

(4) $\sqrt[3]{0.2}$, $\sqrt[4]{0.04}$, $\sqrt[15]{0.008}$

표현 바꾸기

05-2 다음 중 부등식 $a^m < a^n < b^n < b^m$을 만족시키는 두 양수 a, b와 두 자연수 m, n에 대하여 옳은 것은?

① $a<1<b$, $m>n$ ② $a<1<b$, $m<n$ ③ $a<b<1$, $m<n$
④ $1<a<b$, $m>n$ ⑤ $1<a<b$, $m<n$

개념 넓히기 ★★☆

05-3 다음 물음에 답하여라.

(1) 세 양수 a, b, c에 대하여 등식 $2^{5a}=3^{3b}=5^{2c}$이 성립할 때, a, b, c의 대소를 비교하여라.

(2) 세 양수 x, y, z에 대하여 등식 $2^x=3^y=5^z$이 성립할 때, $2x$, $3y$, $5z$의 대소를 비교하여라.

정답
05-1 (1) $\sqrt[5]{4}<2^{0.5}<0.5^{-\frac{3}{4}}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{6}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (3) $2^{444}<5^{222}<3^{333}$ (4) $\sqrt[4]{0.04}<\sqrt[3]{0.2}<\sqrt[15]{0.008}$
05-2 ① **05-3** (1) $a<b<c$ (2) $3y<2x<5z$

예제 06

지수함수의 최대, 최소

주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(1) $y=2^{2x-4}+5\ (2\le x\le 4)$ (2) $y=2^{x}\times 3^{-x+1}\ (-1\le x\le 1)$

접근 방법

지수법칙을 이용하여 주어진 함수를 $y=a^{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 봅니다.

Bible 지수함수 $y=a^{x}$은
$a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

상세 풀이

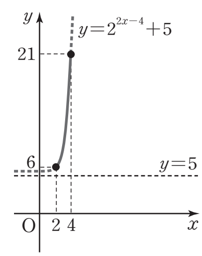
(1) $y=2^{2x-4}+5=2^{2(x-2)}+5=4^{x-2}+5$

밑이 4이고 $4>1$이므로 증가하는 함수이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.

따라서 $2\le x\le 4$에서 주어진 함수는

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $4^{4-2}+5=16+5=21$

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $4^{2-2}+5=1+5=6$



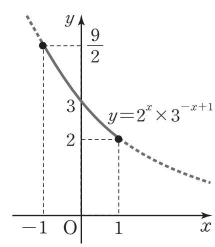
(2) $y=2^{x}\times 3^{-x+1}=2^{x}\times 3^{-x}\times 3^{1}=2^{x}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\times 3=3\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$

밑이 $\frac{2}{3}$이고 $0<\frac{2}{3}<1$이므로 감소하는 함수이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.

따라서 $-1\le x\le 1$에서 주어진 함수는

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 $3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=2$



정답 ➡ (1) 최댓값 : 21, 최솟값 : 6 (2) 최댓값 : $\frac{9}{2}$, 최솟값 : 2

보충 설명

최대, 최소 문제는 그래프만 그릴 수 있으면 바로 확인할 수 있습니다.
그런데 사실 위와 같은 몇몇 함수는 굳이 그리지 않더라도 답을 쉽게 알 수 있습니다. 지수함수와 로그함수, 무리함수 등은 계속 증가하거나 계속 감소하므로 주어진 범위의 양 끝에 있는 값을 대입해서 큰 값을 최댓값, 작은 값을 최솟값으로 구하면 됩니다.

풀이집 p.40

숫자 바꾸기

06-1 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(1) $y=3^{3-2x}$ $(0\leq x\leq 2)$　　(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2x+1}$ $(-1\leq x\leq 2)$

표현 바꾸기　◆ 보충 설명

06-2 $-1\leq x\leq 4$에서 정의된 함수 $f(x)=x^2-6x-1$에 대하여 $g(x)=2^{f(x)}$이라고 하면, 함수 $g(x)$는 $x=a$일 때 최댓값 b를 가진다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

06-3 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=x^2+2x+3$에 대하여 함수 $y=(f\circ g)(x)$가 최솟값 4를 가질 때, $(g\circ f)(1)$의 값은? (단, $a>1$)

① 7　② 9　③ 11
④ 13　⑤ 15

정답
06-1 (1) 최댓값 : 27, 최솟값 : $\frac{1}{3}$ (2) 최댓값 : 4, 최솟값 : $\frac{1}{4}$
06-2 63　**06-3** ③

예제 07

치환을 이용한 지수함수의 최대, 최소

$1\le x\le 4$일 때, 함수 $y=4^x-2^{x+4}+30$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

접근 방법

$4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$이므로 2^x을 t로 치환하여 t에 대한 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구합니다. 이때, 변수 t의 값의 범위에 주의합니다.

Bible a^x 꼴이 반복되는 함수의 최대, 최소 ➡ a^x을 t로 치환한다.

상세 풀이

지수법칙을 이용하여 주어진 식을 변형하면

$$y=4^x-2^{x+4}+30=(2^2)^x-2^4\times 2^x+30=(2^x)^2-16\times 2^x+30$$

$2^x=t$로 놓으면 $1\le x\le 4$에서

$$2^1\le 2^x\le 2^4 \qquad \therefore 2\le t\le 16$$

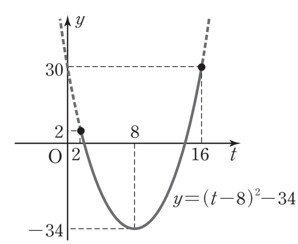
이때, 주어진 함수는

$$y=t^2-16t+30=(t-8)^2-34$$

따라서 $2\le t\le 16$에서 함수 $y=(t-8)^2-34$는

$t=16$일 때 최대이고, 최댓값은 $(16-8)^2-34=30$

$t=8$일 때 최소이고, 최솟값은 $(8-8)^2-34=-34$

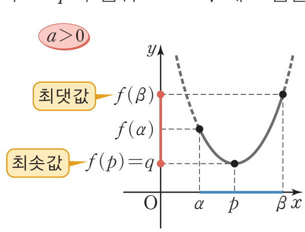


정답 ➡ 최댓값 : 30, 최솟값 : -34

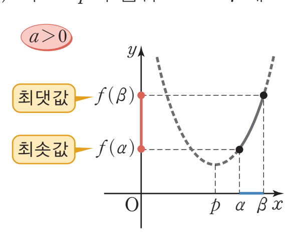
보충 설명

제한된 범위 $\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a>0)$의 최대, 최소는 축 $x=p$가 주어진 범위에 포함되는지 여부에 따라 나누어 생각할 수 있습니다.

(i) 축 $x=p$가 범위 $\alpha\le x\le\beta$에 포함될 때



(ii) 축 $x=p$가 범위 $\alpha\le x\le\beta$에 포함되지 않을 때



따라서 a^x을 t로 치환하여 t에 대한 이차함수의 최대, 최소를 구할 때 반드시 t의 값의 범위에 축이 포함되는지 포함되지 않는지 확인해야 합니다.

풀이집 p.41

숫자 바꾸기

07-1 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(1) $y=4^{-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\ (-2\leq x\leq 0)$

(2) $y=4^{x+1}-2^{x+3}+1\ (-1\leq x\leq 2)$

표현 바꾸기

07-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $y=4^{x}+4^{-x}-2^{x+2}-2^{-x+2}+2$의 최솟값을 구하여라.

(2) 함수 $y=6(3^{x}+3^{-x})-(9^{x}+9^{-x})+2$의 최댓값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

07-3 함수 $f(x)=3^{a+x}+3^{a-x}+2$의 최솟값이 20일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

정답 **07-1** (1) 최댓값 : 24, 최솟값 : 3 (2) 최댓값 : 33, 최솟값 : -3
07-2 (1) -4 (2) 13　**07-3** ⑤

예제 08

밑이 같은 지수방정식의 풀이

다음 방정식을 풀어라.

(1) $2^{x^2+4}=32^x$　　　(2) $(x-2)^{x-4}=3^{x-4}$ (단, $x>2$)

접근 방법

(1)과 같이 밑을 같게 할 수 있는 지수방정식은 지수법칙을 이용하여 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\,(a>0,\ a\neq1) \iff f(x)=g(x)$$

임을 이용하여 풉니다.

한편, (2)와 같이 지수를 같게 할 수 있는 지수방정식은 지수법칙을 이용하여 $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ 꼴로 변형한 후

$$a^{f(x)}=b^{f(x)}\ (a>0,\, a\neq1,\, b>0,\, b\neq1) \iff a=b \text{ 또는 } f(x)=0$$

임을 이용하여 풉니다.

Bible $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$

상세 풀이

(1) $32^x=(2^5)^x=2^{5x}$이므로 주어진 방정식은 $2^{x^2+4}=2^{5x}$

밑이 같으므로 $x^2+4=5x$

$$x^2-5x+4=0,\ (x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

(2) 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 풀면 됩니다.

(ⅰ) 지수가 $x-4$로 서로 같으므로 밑을 같게 하면

$$x-2=3 \qquad \therefore x=5$$

(ⅱ) 지수가 0, 즉 $x=4$이면 주어진 방정식은 $2^0=3^0$이므로 등식이 성립합니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 해는 $x=4$ 또는 $x=5$

정답 ➡ (1) $x=1$ 또는 $x=4$　(2) $x=4$ 또는 $x=5$

보충 설명

개념 넓히기 08-3과 같이 밑이 문자로 주어진 경우에는 밑이 1인지 아닌지를 반드시 조사해야 합니다. 즉,

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\ (a>0) \Rightarrow f(x)=g(x) \text{ 또는 } a=1$$

풀이집 p.42

숫자 바꾸기

08-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $3^{-x^2+4}=27^x$

(2) $(2\sqrt{2})^{x^2}=4^{x+1}$

(3) $2^{x^2-1}=3^{x+1}$ (단, x는 정수)

(4) $(x-1)^{x-4}=2^{x-4}$ (단, $x>1$)

표현 바꾸기

◆보충 설명

08-2 방정식 $2^{x+3}=49$의 근을 α라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $0<\alpha<1$ ② $1<\alpha<2$ ③ $2<\alpha<3$
④ $3<\alpha<4$ ⑤ $4<\alpha<5$

개념 넓히기 ★☆☆

08-3 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^{2x-1}=x^{x+2}$ (단, $x>0$)

(2) $(x+1)^{x^2}=(x+1)^{2x}$ (단, $x>-1$)

정답 **08-1** (1) $x=-4$ 또는 $x=1$ (2) $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$ (3) $x=-1$ (4) $x=3$ 또는 $x=4$
08-2 ③ **08-3** (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=0$ 또는 $x=2$

치환을 이용한 지수방정식의 풀이

예제 09

방정식 $4^x-3\times2^{x+2}+32=0$을 풀어라.

접근 방법

a^x 꼴이 반복되는 지수방정식은 a^x을 t로 치환하여 t에 대한 방정식을 풉니다. 이때, $t>0$임에 주의하여 해를 구합니다.

Bible a^x 꼴이 반복되는 지수방정식 ➡ a^x을 t로 치환한다.

상세 풀이

주어진 방정식을 변형하면

$$(2^2)^x-3\times2^2\times2^x+32=0,\ (2^x)^2-12\times2^x+32=0$$

이때, $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-12t+32=0$

$$(t-4)(t-8)=0 \qquad \therefore t=4 \text{ 또는 } t=8$$

따라서 $2^x=4=2^2$ 또는 $2^x=8=2^3$이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=3$$

정답 ➡ $x=2$ 또는 $x=3$

보충 설명

위의 상세 풀이에서 방정식 $4^x-3\times2^{x+2}+32=0$의 두 실근은 $x=2$ 또는 $x=3$이고, 방정식 $t^2-12t+32=0$의 두 실근은 $t=4$ 또는 $t=8$입니다. 따라서 $4^x-3\times2^{x+2}+32=0$의 두 실근을 α, β라고 하면 $t^2-12t+32=0$의 두 실근은 2^α, 2^β이 된다는 것을 알 수 있습니다. 이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $2^\alpha\times2^\beta=32$이므로

$$2^{\alpha+\beta}=2^5$$

에서 $\alpha+\beta=5$가 성립합니다.

일반적으로 $a^{2x}+pa^x+q=0$의 두 근을 α, β라고 하면 a^x을 $t\ (t>0)$로 치환한 이차방정식 $t^2+pt+q=0$의 두 근은 a^α, a^β이 됩니다.

풀이집 p.43

숫자 바꾸기

09-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $9^x-10\times 3^{x+1}+81=0$

(2) $4^x-2^{x+2}-2^5=0$

(3) $2^{\frac{x}{2}}(2^{\frac{x}{2}}-2)=8$

(4) $8^x-3\times 4^{x+1}+2^{x+5}=0$

표현 바꾸기

09-2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $2(4^x+4^{-x})-3(2^x+2^{-x})-1=0$

(2) $(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x=6$

개념 넓히기 ★★☆

09-3 다음 물음에 답하여라.

(1) 방정식 $4^x-7\times 2^x+12=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2^{2\alpha}+2^{2\beta}$의 값을 구하여라.

(2) 방정식 $16^x-12\times 4^x+9=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2^\alpha+2^\beta$의 값을 구하여라.

정답 **09-1** (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=3$ (3) $x=4$ (4) $x=2$ 또는 $x=3$
09-2 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ (2) $x=-1$ 또는 $x=1$ **09-3** (1) 25 (2) $3\sqrt{2}$

예제 10

밑이 같은 지수부등식의 풀이

다음 부등식을 풀어라.

(1) $4(\sqrt{2})^x > \sqrt{128}$　　(2) $\frac{1}{81} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

접근 방법

밑을 같게 할 수 있는 지수부등식은 지수법칙을 이용하여 $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후 지수를 비교합니다. 이때, (밑)>1이면 지수의 부등호의 방향은 그대로이고, $0<$(밑)<1이면 지수의 부등호의 방향은 반대로 바뀝니다.

Bible
$a>1$일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$
$0<a<1$일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$

상세 풀이

(1) $4(\sqrt{2})^x = 2^2 \times 2^{\frac{x}{2}} = 2^{2+\frac{x}{2}}$, $\sqrt{128} = \sqrt{2^7} = 2^{\frac{7}{2}}$이므로 주어진 부등식은

$$2^{2+\frac{x}{2}} > 2^{\frac{7}{2}}$$

이때, 밑이 2이고 $2>1$이므로

$$2+\frac{x}{2} > \frac{7}{2},\ \frac{x}{2} > \frac{3}{2} \qquad \therefore x>3$$

(2) $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$이므로 주어진 부등식은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이때, 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$$4 > 2x > \frac{1}{2} \qquad \therefore \frac{1}{4} < x < 2$$

정답 ➡ (1) $x>3$ (2) $\frac{1}{4}<x<2$

보충 설명

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은
(i) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가합니다.
(ii) $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소합니다.
이 성질이 지수부등식에 적용되어 $a^{f(x)} < a^{g(x)}$에서 $a>1$이면 큰 쪽의 지수가 커야 하므로 $f(x)<g(x)$이고, $0<a<1$이면 큰 쪽의 지수가 작아야 하므로 $f(x)>g(x)$입니다.

풀이집 p.44

숫자 바꾸기

10-1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}<32$

(2) $\frac{1}{25}<5^{x}<125$

(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3}$

(4) $4^{x^2}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8x}$

표현 바꾸기

10-2 다음 부등식을 풀어라.

(1) $x^{3x-2}>x^{x+4}$ (단, $x>0$)

(2) $(x^2-2x+1)^{x-1}<1$ (단, $x\neq1$)

개념 넓히기 ★★☆

10-3 $0<a<b<1$일 때, 다음 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

$$a^6\le a^{6-x}b^x\le b^6$$

정답 **10-1** (1) $x>-\frac{1}{2}$ (2) $-2<x<3$ (3) $-3\le x\le1$ (4) $-2<x<0$

10-2 (1) $0<x<1$ 또는 $x>3$ (2) $x<0$ 또는 $1<x<2$ **10-3** 7

예제 11

치환을 이용한 지수부등식의 풀이

다음 부등식을 풀어라.

(1) $2\times4^x-17\times2^x+8<0$　　(2) $9^x+3^{x-2}>3^{x+2}+1$

접근 방법

a^x 꼴이 반복되는 지수부등식은 a^x을 t로 치환하여 t에 대한 부등식을 풉니다. 이때, $t>0$임에 주의하여 해를 구합니다.

Bible a^x 꼴이 반복되는 지수부등식 ➡ a^x을 t로 치환한다.

상세 풀이

(1) 주어진 부등식을 변형하면

$$2\times(2^x)^2-17\times2^x+8<0$$

이때, $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $2t^2-17t+8<0$

$$(2t-1)(t-8)<0 \qquad \therefore \frac{1}{2}<t<8$$

따라서 $\frac{1}{2}<2^x<8$이므로 $2^{-1}<2^x<2^3$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $-1<x<3$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$$(3^x)^2+\frac{1}{9}\times3^x>9\times3^x+1$$

이때, $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+\frac{1}{9}t>9t+1$

$$9t^2-80t-9>0,\ (9t+1)(t-9)>0$$

$$\therefore t<-\frac{1}{9} \text{ 또는 } t>9$$

그런데 $t>0$이므로 $t>9$

따라서 $3^x>9$이므로 $3^x>3^2$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $x>2$

정답 ➡ (1) $-1<x<3$ (2) $x>2$

보충 설명

위의 **예제**와 같이 $a^{f(x)}$을 t로 치환하면 대부분 t에 대한 이차부등식이 됩니다. 이차부등식을 풀어서 구한 해를 다시 x에 대한 해로 바꾸기 위해서 치환했던 식 $a^{f(x)}=t$를 다시 대입하면 앞에서 공부한 $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ 꼴의 지수부등식이 됩니다. 즉, 위의 문제와 같은 지수부등식을 풀려면 앞에서 나온 간단한 지수부등식부터 확실하게 풀 수 있어야 합니다.

풀이집 p.45

숫자 바꾸기

11-1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $9^x-4\times3^{x+2}+243<0$

(2) $2^{2x+1}-9\times2^x+4\le0$

(3) $3^{2x+1}-26\times3^x-9\ge0$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-3>0$

표현 바꾸기

11-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 부등식 $4a^{2x}-5a^x+1<0$의 해가 $0<x<2$일 때, a의 값을 구하여라. (단, $0<a<1$)

(2) 부등식 $3a^{2x}-28a^x+9>0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>2$일 때, a의 값을 구하여라. (단, $a>1$)

개념 넓히기 ★★☆

11-3 $a>0$, $a\neq1$일 때, 다음 부등식을 풀어라.

(1) $a^{2x}-a^{x+2}-a^{x-2}+1<0$

(2) $a^{2x-2}-1<a^{x+1}-a^{x-3}$

정답 **11-1** (1) $2<x<3$ (2) $-1\le x\le2$ (3) $x\ge2$ (4) $x<-1$ **11-2** (1) $\frac{1}{2}$ (2) 3
11-3 (1) $-2<x<2$ (2) $a>1$일 때 $x<3$, $0<a<1$일 때 $x>3$

지수방정식과 지수부등식의 응용

예제 12

x에 대한 방정식

$$4^x-k\times 2^{x+2}+k=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

접근 방법

주어진 방정식에서 2^x을 t로 치환합니다. 이때, $2^x>0$에서 $t>0$이므로 x에 대한 방정식 $4^x-k\times 2^{x+2}+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다는 것은 t에 대한 방정식 $t^2-4kt+k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가진다는 뜻이 됩니다.

Bible a^x을 t로 치환할 때는 $t>0$이라는 것에 주의한다.

상세 풀이

주어진 방정식을 변형하면 $(2^x)^2-4k\times 2^x+k=0$

이때, $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-4kt+k=0$ ...... ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가집니다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-1\times k>0,\ 4k^2-k>0$$

$$k(4k-1)>0 \qquad \therefore k<0 \text{ 또는 } k>\frac{1}{4}$$

(ii) (두 근의 합)$=4k>0$ $\quad \therefore k>0$

(iii) (두 근의 곱)$=k>0$

(i)~(iii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $k>\frac{1}{4}$

정답 ➡ $k>\frac{1}{4}$

보충 설명

수학 ⟨상⟩ **09 여러 가지 부등식**에서 배운 것과 같이 계수가 실수인 이차방정식의 두 근이 실수이면 직접 두 근을 구하지 않고도 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 두 실근의 부호를 판별할 수 있습니다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라고 하면

① 두 근이 모두 양수일 조건 : $D\ge 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수일 조건 : $D\ge 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건 : $\alpha\beta<0$

풀이집 p.47

숫자 바꾸기

12-1 **다음 물음에 답하여라.**

(1) x에 대한 방정식 $9^x-2\times3^x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(2) x에 대한 방정식 $4^x-2^{x+a}+2^{a+1}=0$이 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

표현 바꾸기

◆ 다른 풀이

12-2 **다음 물음에 답하여라.**

(1) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $4^x-4\times2^x+k\geq0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

(2) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+k>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

개념 넓히기 ★★★

12-3 **x에 대한 방정식 $4^x+4^{-x}-2^{1+x}-2^{1-x}+a=0$이 적어도 하나의 실근을 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.**

정답 **12-1** (1) $0<a<1$ (2) $a\geq3$ **12-2** (1) $k\geq4$ (2) $k\geq0$ **12-3** $a\leq2$

예제 13

지수함수의 그래프와 격자점의 개수

좌표평면에서 두 곡선 $y=2^x$, $y=4^x$과 직선 $y=32$로 둘러싸인 도형의 내부 또는 그 경계에 포함되는 정사각형 중에서 네 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 구하여라.

접근 방법

좌표평면 위에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 앞으로 격자점이라고 하겠습니다!^^

구하는 정사각형의 네 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이므로 [그림 1]과 같이 x좌표가 1, 2, 3, 4, …일 때로 나누어 생각해 봅시다.

즉, 좌표평면 위에 모눈을 그려서 지수함수 $y=2^x$에서 점 $(1, 2)$, 점 $(2, 4)$, 점 $(3, 8)$, 점 $(4, 16)$, 점 $(5, 32)$, 지수함수 $y=4^x$에서 점 $(1, 4)$, 점 $(2, 16)$, 점 $(3, 64)$에 주목하여 정사각형의 개수를 차근차근 세면 됩니다.

Bible 지수함수의 그래프에서 격자점의 개수는 x좌표를 기준으로 생각하자!

상세 풀이

(i) $1\leq x\leq 2$일 때

정사각형은 존재하지 않습니다.

(ii) $2\leq x\leq 3$일 때

[그림 1]과 같이 구하는 정사각형의 개수는

$$(2^4-2^3)\times(3-2)=8$$

(iii) $3\leq x\leq 4$일 때

[그림 2]와 같이 구하는 정사각형의 개수는

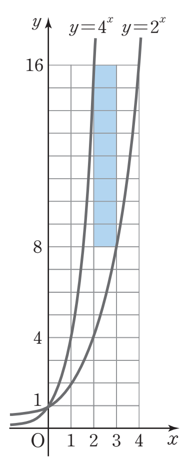
$$(2^5-2^4)\times(4-3)=16$$

(iv) $4\leq x\leq 5$일 때

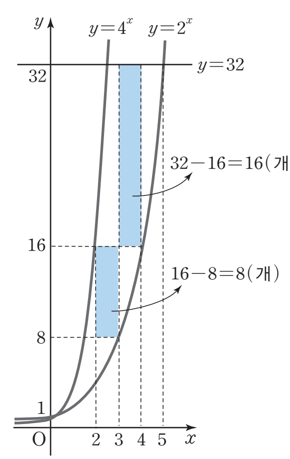
$y=2^x$에서 $2^4\leq y\leq 2^5$이므로 [그림 2]와 같이 정사각형은 존재하지 않습니다.

(i)~(iv)에서 구하는 정사각형의 개수는

$$8+16=24$$



[그림 1]



[그림 2]

정답 ➡ 24

보충 설명

격자점의 개수를 구할 때에는 x좌표, y좌표가 모두 자연수인지, 모두 정수인지 꼭 구별하도록 합니다. 또한 도형의 내부, 도형의 외부는 경계를 제외한다는 점에 주의합니다.

풀이집 p.49

숫자 바꾸기

13-1 좌표평면에서 두 곡선 $y=3^x$, $y=9^x$과 직선 $y=81$로 둘러싸인 도형의 내부 또는 그 경계에 포함되는 정사각형 중에서 네 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 구하여라.

표현 바꾸기

13-2 좌표평면에서 함수 $y=2^{|x|}$의 그래프와 직선 $y=32$로 둘러싸인 도형의 내부 또는 그 경계에 포함되는 정사각형 중에서 네 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이고 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 구하여라.

정답 **13-1** 54 **13-2** 196