단원 ISSUE

이 단원에서는 **여러 가지 수열의 귀납적 정의에 대한 문제, 수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명 문제** 등이 자주 출제되며 증명의 순서를 잘 기억하여 처음부터 끝까지 직접 작성해 보는 연습이 필요합니다.

평가문제

[스스로 마무리하기]

1. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=2a_n-3$을 만족한다고 할 때, a_{10}의 값은?

① 2^8+3 ② 2^8-3 ③ 2^9+3 ④ 2^9-3 ⑤ 2^{10}

[스스로 확인하기]

2. 수열 $\{a_n\}$에 대해서 $a_1=4$, $a_2=8$이고 $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ (n은 2 이상인 자연수) 을 만족한다. 이 때, a_{10}의 값을 구하면?

① 2^{10} ② 2^{11} ③ 2^{12} ④ 2^{13} ⑤ 2^{14}

[스스로 확인하기]

3. 수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=a_n+f(n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$과 같이 귀납적으로 정의되고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)=n^2-2n$일 때, a_{13}의 값을 구하면?

① 119 ② 120 ③ 121 ④ 122 ⑤ 123

[스스로 확인하기]

4. 수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$과 같이 귀납적으로 정의될 때, a_{15}의 값을 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

[스스로 확인하기]

5. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고, 항상 $a_{n+1}>a_n$을 만족하고, $(a_n+a_{n+1})^2=4a_na_{n+1}+9^n$을 만족할 때, a_5의 값을 구하면?

① 123 ② 124 ③ 125 ④ 126 ⑤ 127

[스스로 확인하기]

6. 10월 9일에 어느 수영장의 전체 물의 양은 $1000L$라고 한다. 수질 개선을 위해 하루가 지날 때마다 전날 물의 양의 절반을 빼고, 남아있는 물의 양의 80%를 새로운 물을 넣는다고 한다. 10월 18일의 수영장의 물의 양을 구하면?

① $1000\times(0.75)^8L$ ② $1000\times(0.75)^9L$ ③ $1000\times(0.9)^8L$ ④ $1000\times(0.9)^9L$ ⑤ $1000\times(0.9)^{10}L$

[스스로 마무리하기]

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n}{n+1}$을 만족한다. $a_1=2$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하면?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

[스스로 확인하기]

8. **수열 $\{a_n\}$은 $a_1=a$이고, $a_{n+1}=a_n+d$ ($n=1,2,3\cdots$)으로 정의된다. $a_5=12$, $a_1+a_7=16$을 만족할 때, ad의 값을 구하면?**

① -12 ② -16
③ -20 ④ -24
⑤ -28

[스스로 마무리하기]

9. **$a_1=2$이고, $a_{n+1}=3a_n-2$를 만족할 때, 모든 자연수 n에 대해 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3^{n-1}+1$임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명 한 과정을 아래에 나타낸 것이다. 위 과정에서 (가),(나),(다)의 값을 각각 a,b,c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?**

> $n=1$일 때, $a_1=2$, 이고 $a_n=3^{n-1}+1$에
> $n=1$을 대입하면 $a_1=2$를 만족한다.
> $n=1$일 때, $a_n=3^{n-1}+1$이 성립한다.
>
> $n=k$ 일 때, $a_n=3^{n-1}+1$임을 가정하면
> $a_{n+1}=3a_n-2$에 $n=k$를 대입하면
> $a_{k+1}=(가)(3^{k-1}+1)-2$
> $=3\times3^{k-1}+(나)-2=3^k+(다)$
> $n=k+1$일 때 $a_{k+1}=3^k+1$가 되고
> $a_n=3^{n-1}+1$식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 $a_n=3^{n-1}+1$임이 성립이 된다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n=3^{n-1}+1$이 성립한다.

① 3 ② 5
③ 7 ④ 9
⑤ 11

[스스로 확인하기]

10. **다음은 모든 자연수 n에 대해서 $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. 위 과정에서 (가), (나)에 들어갈 식을 $f(k), g(k)$라 할 때, $f(3)+g(5)$의 값을 구하면?**

> <증명>
> $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=1\times2=2$
> 따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.
> $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
> $2+4+6+8+\cdots+2k=k(k+1)$
> 이므로 등식의 좌변에 $2k+2$을 더하면
> $2+4+6+8+\cdots+2k+(가)$
> $=k(k+1)+2(k+1)$
> $=(k+1)(나)$
> 위 등식은 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
> 따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

① 7 ② 9
③ 11 ④ 13
⑤ 15

[스스로 확인하기]

11. **다음은 3이상의 자연수 n에 대해서 $2\times4\times6\times\cdots\times2n>3^n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. 위 과정에서 (가)의 식을 $f(k)$라 하고, (나)의 값을 a라 할 때, $f(a)$의 값을 구하면?**

> <증명>
> $n=3$일 때, (좌변)$=2\times4\times6=48$, (우변)$=3^3=27$
> 따라서 $n=1$일 때 부등식이 성립한다.
> $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
> $2\times4\times6\times\cdots\times2k>3^k$
> 이므로 등식의 양변에 (가)를 곱하면
> $2\times4\times6\times\cdots\times2k\times(가)>3^k\times(가)>3^{k+1}$
> (k는 3이상 이므로 $2k+2>(나)$)
> 따라서 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.

① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

12. 수열 a_n에서 $a_1=4$ 이고 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$ 일 때, $a_n=4n$임을 수학적 귀납법으로 증명한 과정 이다. 위 과정에서 (가)의 식을 $f(k)$, (나)의 식을 $g(k)$라 할 때, $f(3)g(3)$의 값을 구하면?

<증명>

$n=1$일 때, $a_1=4\times1=4$이므로
$a_n=4n$이 성립이 된다.
$n=k$일 때, $a_n=4n$이 성립한다고 가정하면
$a_k=$(가) 에서
$a_{k+1}=$(나)$a_k=4(k+1)$
따라서 $n=k+1$일 때도 성립이 된다.
모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4n$이 성립한다.

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

[스스로 확인하기]

13. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ …㉠ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다. 위 과정에서 (가), (나), (다)를 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $f(1)+g(2)+h(3)$의 값을 구하면?

<증명>

❶ $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{6}=1$
따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.
❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ …㉡
이므로 등식 ㉡의 좌변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\boxed{(가)}+(k+1)^2$
$=(k+1)\boxed{(나)}$
$=\frac{(k+1)(k+2)\boxed{다}}{6}$
위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.
❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

① 14 ② $\frac{43}{3}$ ③ $\frac{44}{3}$ ④ 15 ⑤ $\frac{46}{3}$

실전문제

14. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $n\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{a_n}+5$를 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{50}$

15. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{na_n-1}{a_n+1} & (a_n\ge0)\\ \frac{1}{1-a_n} & (a_n<0)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_7의 값은?

① 3 ② $\frac{37}{12}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

16. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=a_2=1$, $b_1=c$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$, $b_{n+1}=a_n-b_n+n$을 만족시킨다. $b_{30}=16$일 때, 상수 c의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

17. '하노이 탑'은 세 개의 기둥 중 어느 하나의 기둥에 크기가 큰 것부터 아래에 차례대로 쌓인 원판을 다른 기둥으로 옮기는 게임이다. 이 게임에서 원판은 다음과 같은 규칙에 따라 옮길 수 있다. 크기가 서로 다른 n개의 원판을 다음 규칙에 따라 다른 기둥으로 모두 옮기기 위한 최소 이동 횟수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1}사이의 관계식은 $a_{n+1}=p\cdot a_n+q(n=1,2,3,\cdots)$와 같다. 두 상수 p, q에 대하여 $p^2+q^2=m$이라고 할 때, a_m의 값은?

[규칙1] 원판은 한 번에 한 개씩만 한 기둥에서 다른 기둥으로 옮길 수 있다. [규칙2] 큰 원판을 작은 원판 위에 놓을 수 없다.

① 15　② 19　③ 23　④ 27　⑤ 31

18. $2L$들이 세 개의 물통 A, B, C에 물이 각각 $1L$, $2L$, $2L$가 들어있다. 첫 번째 시행에서 A와 B의 물을 서로 교환하여 A와 B를 같은 양으로 만든다. 두 번째 시행에서는 B와 C를 서로 교환하여 같은 양으로 만든다. 세 번째 시행에서는 C와 A를 서로 교환하여 같은 양으로 만든다. 네 번째 시행에서는 다시 A와 B의 물을 서로 교환하여 같은 양으로 만든다. 이와 같은 조작을 반복할 때, 10번째의 물의 교환에 관여하지 않았던 물통의 물의 양은?

① $\frac{847}{512}$　② $\frac{849}{512}$　③ $\frac{851}{512}$　④ $\frac{853}{512}$　⑤ $\frac{855}{512}$

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times 2+n\times 1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $f(9)-g(6)+h(7)$의 값은?

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 주어진 식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
$$1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+(k-1)\times 2+k\times 1=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$
$n=k+1$일 때 성립함을 보이면
$$1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)+\cdots+(k+1)\times 1$$
$$=1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+(k-1)\times 2+k\times 1+\boxed{(가)}+k+1$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\boxed{(나)}$$
$$=\boxed{(다)}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 식이 성립한다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 주어진 식이 성립한다.

① $\frac{605}{6}$　② 137　③ $\frac{289}{2}$　④ 193　⑤ 206

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

20. **다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식**

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)\quad\cdots\ (\ast)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=2$ 일 때,
>
> (좌변)$=\boxed{(가)}$, (우변)$=\frac{5}{8}$ 이므로 $(\ast)$이 성립함.
>
> (ⅱ) $n=k\,(k\geq 2)$일 때, $(\ast)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)$$
>
> $n=k+1$ 일 때, $(\ast)$이 성립함을 보이기 위해 양변에 $\boxed{(나)}$ 를 더하면
>
> $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}$$
> $$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(나)}$$
> $$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(다)}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$$
>
> 따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(\ast)$이 성립한다.
>
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $(\ast)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $12a+\frac{f(2)}{g(5)}$ 의 값은?

① 10　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 16

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ③
[해설] $a_{n+1}=2a_n-3$은 양변에 3을 빼면
$(a_{n+1}-3)=2(a_n-3)$이므로 수열 $\{a_n-3\}$은
$a_1-3=1$이 첫 항이고, 공비가 2인 등비수열이다.
따라서 $a_{10}-3=1\times 2^{10-1}$,
$a_{10}=2^9+3$이다.

2) [정답] ②
[해설] $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$이므로 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$으로 a_n은
등비중항이다. 따라서 수열 a_n은 등비수열이고,
$a_1=4$, $a_2=8$ 이므로 공비는 2이다.
따라서 $a_n=2^{n+1}$이다. $a_{10}=2^{11}$

3) [정답] ⑤
[해설] $\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=a_n+f(n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$에서

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+f(n)\\&=a_{n-1}+f(n)+f(n-1)\\&=a_{n-2}+f(n)+f(n-1)+f(n-2)\\&\ \vdots\\&=a_1+f(n)+f(n-1)+\cdots+f(1)\\&=a_1+\sum_{k=1}^{n}f(k)\\&=a_1+n^2-2n\end{aligned}$$

따라서 $a_{13}=3+12^2-2\times 12=123$ 이다.

4) [정답] ②
[해설] $\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}a_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$ 이므로

$a_2=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_1$

$a_3=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}a_2=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_1$

$\vdots$

$a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\times\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\times\cdots\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_1=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$

따라서 $a_{15}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

5) [정답] ②
[해설] $(a_n+a_{n+1})^2=4a_na_{n+1}+9^n$을 변형하면
$(a_{n+1}-a_n)^2=9^n$이므로 $a_{n+1}-a_n=3^n$
$(a_{n+1}>a_n)$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$가 된다.

따라서 $a_5=4+\sum_{k=1}^{4}3^k=4+3\times\dfrac{3^4-1}{3-1}=124$

6) [정답] ④
[해설] n일 째 수영장의 물의 양을 a_n이라 하고
$n+1$일 째 수영장의 물의 양을 a_{n+1}이라 하자.
$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}a_n\times 0.8=\dfrac{9}{10}a_n$ 이다.
10월 9일 수영장의 물의 양이 $1000L$이고
9일 후인 10월 18일 수영장의 물의 양은
$1000\times(0.9)^9L$가 된다.

7) [정답] ③
[해설] $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n}{n+1}$을 정리하면

$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n$, $a_1=2$이므로

$a_2=\dfrac{3}{2}\times 2$

$a_3=\dfrac{4}{3}\times a_2=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}\times 2$

$\vdots$

$a_n=\dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{n}{n-1}\times\cdots\times\dfrac{3}{2}\times 2=n+1$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k+1)=\dfrac{10\times 11}{2}+10=65$

8) [정답] ②
[해설] 수열 a_n은 $a_1=a$이고, $a_{n+1}=a_n+d$ 이므로
첫째항은 a이고 공차는 d인 등차수열이다.
따라서 $a_n=a+(n-1)d$를 만족한다.
$a_5=a+4d=12$
$a_1+a_7=2a+6d=16$
두 식을 연립하면 $d=4$, $a=-4$ 이다.
따라서 $ad=-16$

9) [정답] ③
[해설] $a_{n+1}=3a_n-2$에 $n=k$를 대입하면
$a_{k+1}=3a_k-2$
$=3(3^{k-1}+1)-2=3\times 3^{k-1}+3-2=3^k+1$ 이다.
따라서 $a=3$, $b=3$, $c=1$이다.
$a+b+c=7$이다.

10) [정답] ⑤
[해설] $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$2+4+6+8+\cdots+2k=k(k+1)$
이므로 등식의 좌변에 $2k+2$을 더하면
$2+4+6+8+\cdots+2k+(2k+2)$
$=k(k+1)+2(k+1)$
$=(k+1)(k+2)$
따라서 $f(k)=2k+2$, $g(k)=k+2$ 이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$f(3)+g(5)=8+7=15$

11) [정답] ④

[해설] $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면

$2\times4\times6\times\cdots\times2k>3^k$

이므로 등식의 양변에 $2k+2$를 곱하면

$2\times4\times6\times\cdots\times2k\times(2k+2)>3^k\times(2k+2)$

(k는 3이상 이므로 $2k+2>3$)

$2\times4\times6\times\cdots\times2k\times(2k+2)>3^k\times(2k+2)>3^{k+1}$

이므로 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=2k+2$, $a=3$이므로 $f(3)=8$이다.

12) [정답] ④

[해설] $n=k$일 때, $a_n=4n$이 성립한다고 가정하면

$a_k=4k$이고, $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$이므로

$a_{k+1}=\dfrac{k+1}{k}a_k=\dfrac{k+1}{k}\times4k=4(k+1)$

$n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수에 대해 성립한다. 따라서 $f(k)=4k$, $g(k)=\dfrac{k+1}{k}$ 이다.

$\therefore f(3)g(3)=16$

13) [정답] ③

[해설] $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

이므로 등식 ㉡의 좌변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=(k+1)\left\{\dfrac{k(2k+1)}{6}+k+1\right\}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

위 식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

$g(k)=\dfrac{k(2k+1)}{6}+k+1$, $h(k)=2k+3$이다.

$f(1)+g(2)+h(3)=1+\dfrac{5}{3}+3+9=\dfrac{44}{3}$

14) [정답] ⑤

[해설] $\dfrac{n}{a_{n+1}}=\dfrac{n+1}{a_n}+5$의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\dfrac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\dfrac{1}{na_n}+\dfrac{5}{n(n+1)}$

$\dfrac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\dfrac{1}{na_n}+5\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$이다.

$\dfrac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\dfrac{1}{na_n}+5\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$에서

$\dfrac{1}{2a_2}=\dfrac{1}{a_1}+5\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{1}{3a_3}=\dfrac{1}{2a_2}+5\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$

$\vdots$

$\dfrac{1}{10a_{10}}=\dfrac{1}{9a_9}+5\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 식을 모두 더하면 $\dfrac{1}{10a_{10}}=\dfrac{1}{a_1}+5\left(1-\dfrac{1}{10}\right)$이다.

즉, $\dfrac{1}{10a_{10}}=5\quad\therefore a_{10}=\dfrac{1}{50}$

15) [정답] ②

[해설] $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1-1}{2}=0$, $a_3=\dfrac{-1}{1}=-1$,

$a_4=\dfrac{1}{2}$, $a_5=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$, $a_6=\dfrac{\frac{10}{3}-1}{\frac{5}{3}}=\dfrac{7}{5}$,

$a_7=\dfrac{\frac{42}{5}-1}{\frac{12}{5}}=\dfrac{37}{12}$

16) [정답] ③

[해설] $a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$, $a_1=a_2=1$

$b_{n+1}=a_n-b_n+n$, $b_1=c$를 만족시키므로

$\{a_n\}$:$1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \cdots$

$\{b_n\}$:$c, 2-c, 1+c, 2-c, 1+c, 5-c, 1+c,$

$5-c, c+4, 5-c, c+4, 8-c, c+4, \cdots$

즉, $\{b_n\}$은 첫째항을 제외하고는

6개의 항마다 규칙을 띈다.

이에 따라 $b_{30}=17-c=16$이므로

$c=1$

17) [정답] ⑤

[해설] $a_1=1$

$a_2=3$

(맨 위의 작은 것을 옆 기둥으로 옮기고,
큰 것을 나머지 기둥으로 옮긴 후,
작은 것을 큰 것 위로 옮긴다.)

$a_3=7$

(먼저 2개를 앞의 방법으로 3번만에 옮긴 후,
제일 큰 원판을 다른 기둥으로 옮겨 놓고,
다시 2개를 큰 원판 위로 3번만에 옮긴다.)

이 방법대로 하면

$(n+1)$개의 원판은

먼저 n개의 원판을 옮겨놓고,

가장 큰 원판을 옮기고,

다시 n개의 원판을

가장 큰 원판 위로 옮겨놓으면 되므로

$a_{n+1}=a_n+1+a_n$ 즉, $a_{n+1}=2a_n+1$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$p=2, q=1$이므로 $p^2+q^2=5=m$
따라서 $a_m=a_5=2a_4+1=2(2a_3+1)+1=31$

18) [정답] ④
[해설] 각 시행을 거쳐도 세 개의 물통양의 합은 5L
n번째 시행에서 교환에 관여하지 않은 물통의 양을 x_n이라 하면
나머지 교환한 두 물통의 양은 $\frac{1}{2}(5-x_n)$
이 두 물통중 하나는 $(n+1)$번째 시행에서 교환에 관여하지 않은 물통이므로 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(5-x_n)$
첫 번째 시행에서 교환에 관여하지 않은 물통의 양은 $x_1=2$이므로
$x_2=\frac{5-x_1}{2}=\frac{3}{2}$
$x_3=\frac{5-x_2}{2}=\frac{7}{4}$
$x_4=\frac{5-x_3}{2}=\frac{13}{8}$
$x_5=\frac{5-x_4}{2}=\frac{27}{16}$
$x_6=\frac{5-x_5}{2}=\frac{53}{32}$
$x_7=\frac{5-x_6}{2}=\frac{107}{64}$
$x_8=\frac{5-x_7}{2}=\frac{213}{128}$
$x_9=\frac{5-x_8}{2}=\frac{427}{256}$
$x_{10}=\frac{5-x_9}{2}=\frac{853}{512}$

19) [정답] ②
[해설] $1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)+\cdots+(k+1)\times 1$
$=1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+(k-1)\times 2$
$+k\times 1+\boxed{(1+2+3+\ \cdots\ +k)}+(k+1)$ ⋯ ㉠
이므로 $f(k)=\frac{k(k+1)}{2}$이다.
이때 $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정했으므로 ㉠$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\boxed{\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)}$
$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$ ⋯ ㉡
이다. 즉, $g(k)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$이다.
또한, ㉡의 식을 정리하면
㉡$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{3(k+1)(k+2)}{6}$
$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}}$이므로
$h(k)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$이다.
$\therefore f(9)-g(6)+h(7)=45-28+120=137$

20) [정답] ②
[해설] (ⅰ) $n=2$ 일 때,
(좌변)$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{12}$, (우변)$=\frac{5}{8}$
이므로 (✱)이 성립함.
(ⅱ) $n=k\,(k\geq 2)$일 때, (✱)이 성립한다고 가정하면
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)$
$n=k+1$ 일 때, (✱)이 성립함을 보이기 위해 양변에 $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$를 더하면
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$
$+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$
$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$
$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+4}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$
$(\because \frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$이고,
$\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+4}=\frac{1}{4k(k+1)}$이므로
$\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}-\frac{1}{4k(k+1)}$
$=\frac{-1}{4k(k+1)(2k+1)}<0$이다.)
따라서 $n=k+1$ 일 때도 (✱)이 성립한다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식 (✱)이 성립한다.
따라서 $a=\frac{7}{12}$, $f(k)=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$,
$g(k)=\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+4}$이다.
$\therefore 12a+\frac{f(2)}{g(5)}=12\times\frac{7}{12}+4=11$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574