01 지수함수와 로그함수의 그래프의 관계

$a>0$, $a\neq1$일 때, 지수함수 $y=a^x$와 로그함수 $y=\log_a x$는 **역함수 관계**이다.

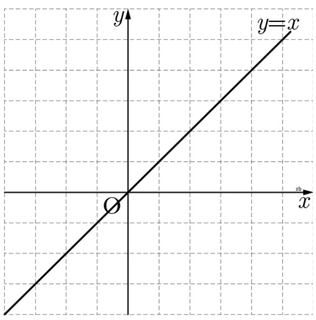
(1) 두 함수 $y=a^x$와 $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) 점 $(m,\ n)$이 $y=a^x$의 그래프 위의 점이면 점 $(n,\ m)$은 $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이다.

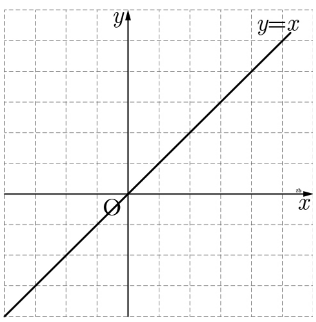
참고 역함수를 구할 때, 먼저 x와 y를 바꾼 후 y를 x에 관한 식으로 나타내면 구할 수 있다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

1. 다음 좌표평면 위에 함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그려라.



2. 다음 좌표평면 위에 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 그려라.



◪ 함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$에 대하여 알맞은 함숫값을 구하여라. (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)

3. $f^{-1}(3)$

4. $f^{-1}(1)$

5. $f^{-1}(2)$

6. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

◪ 함수 $f(x)=\log_4(x+2)+1$에 대하여 알맞은 함숫값을 구하여라. (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)

7. $f^{-1}(2)$

8. $f^{-1}(3)$

9. $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

◪ 함수 $f(x)=4^{x}$에 알맞은 함숫값을 구하여라. (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)

10. $f^{-1}(2)$

11. $f^{-1}(16)$

12. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

◪ 함수 $f(x)=3^{-x+2}-1$에 알맞은 함숫값을 구하여라. (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)

13. $f^{-1}(2)$

14. $f^{-1}(8)$

15. $f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$

◪ 함수 $f(x)=2^{x}$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 다음 함숫값을 구하여라.

16. $g\left(\frac{1}{8}\right)$

17. $(f \circ g)(16)$

18. $g(3)$

19. $f(3)$

◪ 다음 함수의 역함수를 구하여라.

20. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

21. $y=10^{x}$

22. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

23. $y=3 \cdot 2^{x-1}$

24. $y=5^{x+2}-3$

25. $y=2^{x}$

26. $y=10^{\frac{x}{2}-3}$

27. $y=2 \cdot 5^{x+1}$

28. $y=3^{x-1}+2$

29. $y=\frac{2^{x-1}}{3}$

30. $y=\log_3 2x$

31. $y=\log_5 x+1$

32. $y=\log_4 (x-2)+1$

33. $y=1-\log_3 x$

34. $y=2\log_3 (x-1)$

35. $y=\log_{\frac{1}{2}} x+3$

36. $y=\log_5 x$

37. $y=\log_4 (x-2)+3$

◪ 다음을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

38. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)-1$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 점 $(-2,\ 1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

39. 로그함수 $y=\log_a x+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 각각 $1,\ 3$이다.

40. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_a x-1$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 점 $(1,\ 9)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

41. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2 (x-a)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 점 $(3,\ 5)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

42. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 (x-1)+a$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 $(4,\ 5)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

43. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_a x+1$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 점 $\left(0,\ \frac{1}{5}\right)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

44. 두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=\log_3 x$에 대하여 $(f\circ g)(18)-g(9)$의 값을 구하여라.

45. 함수 $f(x)=\log_2(x-2)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $(f\circ g)(5)+g(2)$의 값을 구하여라.

46. 함수 $f(x)=4\log_3(x+3)+1$과 일대일 대응인 함수 $g(x)$에 대하여 $f(g(x))=x$일 때, $g(9)$의 값을 구하여라.

47. 함수 $y=\log_2(x-m)+n$의 그래프와 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표가 각각 1, 2일 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

48. $y=\log_2(x-m)+n$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표가 각각 2, 3일 때, 상수 m, n의 합 $m+n$의 값을 구하여라.

49. 로그함수 $y=\log_a x+m$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만난다. 두 교점의 x좌표가 각각 1과 3일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $a\neq 1$)

50. 지수함수 $f(x)=a^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g(m)=3$, $g(n)=2$일 때, $g(m^3n)$의 값을 구하여라.

51. 두 함수 $f(x)=2^{x-1}+b$, $g(x)=\log_2(ax-6)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

52. 함수 $y=\log_2(4x-20)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭 이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동한 그래프의 식이 $y=m\cdot 2^{-x}+n$이다. 두 상수 m, n에 대하여 $2mn$의 값을 구하여라.

53. 로그함수 $f(x)=\log_a bx+1$의 그래프와 그 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근은 3과 6이다. 이 때, $f(12)$의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $a\neq 1$, b는 상수)

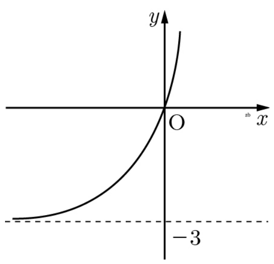
54. 두 함수 $y=\log_a(3x-2)+4$, $y=a^{x-5}+b$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b를 구하여라.

55. 두 함수 $y=3^{x-1}+a$, $y=\log_3(x-3)-b$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, $a-b$의 값을 구하여라.

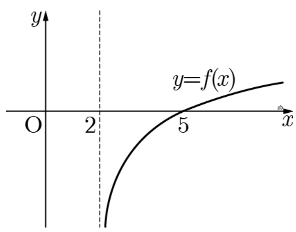
56. $a>0$, $a\neq1$일 때 함수 $f(x)=a^{x-3}+2$의 역함수를 $g(x)$라고 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 점 $(b,\ 4)$에서 만난다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

57. 함수 $y=\log_3(x-a)+b$의 그래프가 다음 그림과 $y=x$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

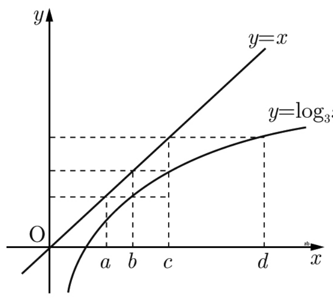


58. 함수 $y=a^{x+1}+b$의 역함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

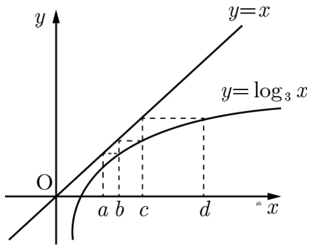


◪ 다음 물음에 답하여라.

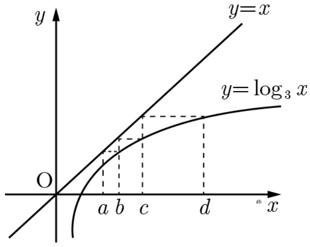
59. 다음 그림은 두 함수 $y=\log_3 x$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{a-c}$의 값과 같은 것을 구하여라.(단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



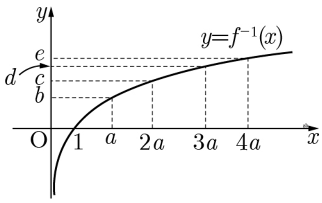
60. 다음 그림과 같은 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 직선 $y=x$에서 $d=2b$일 때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{a-c}$의 값을 구하여라. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



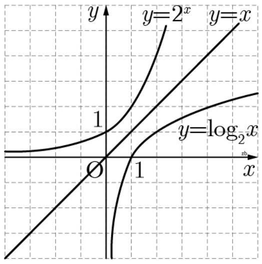
61. 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 직선 $y=x$에서 $d=3b$일 때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{c-a}$의 값을 구하여라. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

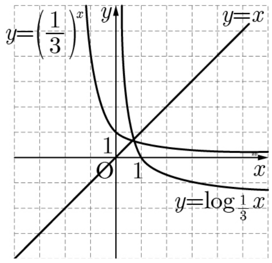


62. 함수 $f(x)=2^x$의 역함수의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(e-c)f(d-b)$의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) 

2) 

3) $\frac{26}{27}$

⇨ $f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(1-k)=3,\ 1-k=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\therefore\ k=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$

4) $\frac{2}{3}$

⇨ $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(1-k)=1,\ 1-k=\frac{1}{3}$

$\therefore\ k=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

5) $\frac{8}{9}$

⇨ $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(1-k)=2,\ 1-k=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\therefore\ k=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

6) $\frac{2}{3}$

⇨ $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(1-k)=\frac{1}{2},\ 1-k=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ k=1-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

7) 2

⇨ $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\log_4(k+2)+1=2,\ \log_4(k+2)=1$

$k+2=4\qquad \therefore\ k=2$

8) 14

⇨ $f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\log_4(k+2)+1=3,\ \log_4(k+2)=2$

$k+2=4^2\qquad \therefore\ k=14$

9) 0

⇨ $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{3}{2}$이므로

$\log_4(k+2)+1=\frac{3}{2},\ \log_4(k+2)=\frac{1}{2}$

$k+2=4^{\frac{1}{2}},\ k+2=2\quad \therefore\ k=0$

10) $\frac{1}{2}$

⇨ $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$4^k=2,\ 2^{2k}=2^1,\ 2k=1\qquad \therefore\ k=\frac{1}{2}$

11) 2

⇨ $f^{-1}(16)=k$라 하면 $f(k)=16$이므로

$4^k=16,\ 2^{2k}=2^4,\ 2k=4\qquad \therefore\ k=2$

12) $-\frac{1}{2}$

⇨ $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로

$4^k=\frac{1}{2},\ 2^{2k}=2^{-1},\ 2k=-1\qquad \therefore\ k=-\frac{1}{2}$

13) 1

⇨ $y=3^{-x+2}-1$, 즉 $y+1=3^{-x+2}$에서

x와 y를 서로 바꾸면 $x+1=3^{-y+2}$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3(x+1)=-y+2$

$\therefore\ y=2-\log_3(x+1)\ \ (x>-1)$

따라서 $f^{-1}(x)=2-\log_3(x+1)$이므로

$f^{-1}(2)=2-\log_3 3=1$

14) 0

⇨ $f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$3^{-k+2}=1+8,\ 3^{-k+2}=3^2$

$-k+2=2\qquad \therefore\ k=0$

15) 3

⇨ $f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=k$라 하면 $f(k)=-\frac{2}{3}$이므로

$3^{-k+2}=1-\frac{2}{3},\ 3^{-k+2}=\frac{1}{3}=3^{-1}$

$-k+2=-1\qquad \therefore\ k=3$

16) -3

⇨ $y=2^x$에서 $x=\log_2 y$이므로

$y=\log_2 x$ $\quad\therefore\ g(x)=\log_2 x$

$\therefore\ g\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$

17) 16

⇨ $(f\circ g)(16)=f(g(16))=f(\log_2 16)$

$=f(4)=2^4=16$

18) $\log_2 3$

⇨ $y=2^x$에서 $x=\log_2 y$이므로

$y=\log_2 x$ $\quad\therefore\ g(x)=\log_2 x$

$\therefore\ g(3)=\log_2 3$

19) 8

⇨ $f(3)=2^3=8$

20) $y=\log_{\frac{1}{2}}x+1\ (x>0)$

⇨ 주어진 함수는 집합 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$에서 집합 $\{y\,|\,y>0\}$으로의 일대일대응이다.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$에서 $x-1=\log_{\frac{1}{2}}y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_{\frac{1}{2}}x+1\ (x>0)$

21) $y=\log x$

⇨ 함수 $y=10^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이다.

로그의 정의로부터 $x=\log y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log x$

22) $y=\log_{\frac{1}{3}}x\ (x>0)$

⇨ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $x=\log_{\frac{1}{3}}y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_{\frac{1}{3}}x\ (x>0)$

23) $y=\log_2\frac{x}{3}+1$

⇨ 함수 $y=3\cdot 2^{x-1}$에서 $2^{x-1}=\frac{y}{3}$

정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이다.

로그의 정의로부터

$x-1=\log_2\frac{y}{3}$ $\quad\therefore\ x=\log_2\frac{y}{3}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_2\frac{x}{3}+1$

24) $y=\log_5(x+3)-2\ (x>-3)$

⇨ 주어진 함수는 집합 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$에서 집합 $\{y\,|\,y>-3\}$으로의 일대일대응이다.

$y=5^{x+2}-3$에서 $5^{x+2}=y+3$

$x+2=\log_5(y+3)$

$x=\log_5(y+3)-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_5(x+3)-2\ (x>-3)$

25) $y=\log_2 x\ (x>0)$

⇨ 함수 $y=2^x$은 치역이 $\{y\,|\,y>0\}$인 일대일 대응이다.

$y=2^x$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=2^y$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $\log_2 x=\log_2 2^y$

따라서 구하는 역함수는 $y=\log_2 x\ (x>0)$

26) $y=2\log x+6$

⇨ $y=10^{\frac{x}{2}-3}$에서 로그의 정의에 의하여

$\frac{x}{2}-3=\log y,\ \frac{x}{2}=\log y+3$

$x=2\log y+6$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2\log x+6$

27) $y=\log_5\frac{x}{2}-1\ (x>0)$

⇨ 함수 $y=2\cdot 5^{x+1}$은 치역이 $\{y\,|\,y>0\}$인 일대일 대응이나, $y=2\cdot 5^{x+1}$에서 x와 y를 서로 바꾸고

양변을 2로 나누면 $x=2\cdot 5^{y+1}$ $\quad\therefore\ \frac{x}{2}=5^{y+1}$

양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5\frac{x}{2}=\log_5 5^{y+1},\ \log_5\frac{x}{2}=y+1$

따라서 구하는 역함수는 $y=\log_5\frac{x}{2}-1\ (x>0)$

28) $y=\log_3(x-2)+1\ (x>2)$

⇨ 함수 $y=3^{x-1}+2$는 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$인 일대일 대응이다.

$y=3^{x-1}+2$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=3^{y-1}+2$ $\quad\therefore\ x-2=3^{y-1}$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3(x-2)=\log_3 3^{y-1},\ \log_3(x-2)=y-1$

따라서 구하는 역함수는

$y=\log_3(x-2)+1\ (x>2)$

29) $y=\log_2 3x+1$

30) $y=\frac{3^x}{2}$

31) $y=5^{x-1}$

⇨ $y=\log_5 x+1$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\log_5 y+1$, $\log_5 y=x-1$

$\log_5 y=\log_5 5^{x-1}$ $\quad\therefore\ y=5^{x-1}$

32) $y=4^{x-1}+2$

⇨ $y=\log_4(x-2)+1$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\log_4(y-2)+1$, $\log_4(y-2)=x-1$

$\log_4(y-2)=\log_4 4^{x-1}$, $y-2=4^{x-1}$

$\therefore\ y=4^{x-1}+2$

33) $y=3^{1-x}$

⇨ $y=1-\log_3 x$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=1-\log_3 y$, $\log_3 y=1-x$

$\log_3 y=\log_3 3^{1-x}$ $\quad\therefore\ y=3^{1-x}$

34) $y=3^{\frac{x}{2}}+1$

⇨ $y=2\log_3(x-1)$에서 $\log_3(x-1)=\dfrac{y}{2}$

$x-1=3^{\frac{y}{2}}$, $x=3^{\frac{y}{2}}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=3^{\frac{x}{2}}+1$

35) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$

⇨ 주어진 함수는 집합 $\{x\,|\,x>0\}$에서 집합 $\{y\,|\,y$는 실수$\}$로의 일대일대응이다.

$y=\log_{\frac{1}{2}} x+3$에서 $\log_{\frac{1}{2}} x=y-3$

$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$

36) $y=5^x$

⇨ $y=\log_5 x$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\log_5 y$, $\log_5 5^x=\log_5 y$ $\quad\therefore\ y=5^x$

37) $y=4^{x-3}+2$

⇨ $y=\log_4(x-2)+3$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\log_4(y-2)+3$, $\log_4(y-2)=x-3$

$y-2=4^{x-3}$ $\quad\therefore\ y=4^{x-3}+2$

38) 2

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수

$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)-1$의 그래프가

직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)-1$은

서로 역함수 관계이다.

따라서 점 $(-2,\ 1)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(1,\ -2)$는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)-1$의 그래프 위의 점이다.

즉, $-2=\log_{\frac{1}{3}}(1+a)-1$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(1+a)=-1$, $-\log_3(1+a)=-1$

$1+a=3$ $\quad\therefore\ a=2$

39) $\sqrt{3}$

40) 3

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_a x-1$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_a x-1$은 서로 역함수 관계이다.

따라서 점 $(1,\ 9)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(9,\ 1)$은 함수 $y=\log_a x-1$의 그래프 위의 점이다.

즉, $1=\log_a 9-1$이므로

$\log_a 9=2$, $a^2=9$ $\quad\therefore\ a=3$ ($\because\ a>0$)

41) -3

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_2(x-a)$는 서로 역함수 관계이다.

따라서 점 $(3,\ 5)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(5,\ 3)$은 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프 위의 점이다.

즉, $3=\log_2(5-a)$이므로

$5-a=2^3$ $\quad\therefore\ a=-3$

42) 2

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수

$y=\log_2(x-1)+a$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_2(x-1)+a$는

서로 역함수 관계이다.

따라서 점 $(4,\ 5)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(5,\ 4)$는 함수 $y=\log_2(x-1)+a$의 그래프 위의 점이다.

즉, $4=\log_2(5-1)+a$이므로

$a=4-\log_2 4=4-2=2$

43) $a=5$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_a x+1$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_a x+1$은 서로 역함수 관계이다.

따라서 점 $\left(0,\ \frac{1}{5}\right)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $\left(\frac{1}{5},\ 0\right)$은 함수 $y=\log_a x+1$의 그래프 위의 점이다.
즉, $0=\log_a \frac{1}{5}+1$이므로
$\log_a \frac{1}{5}=-1,\ a^{-1}=\frac{1}{5}\qquad \therefore\ a=5$

44) 16
⇨ $f(g(18))-g(9)=3^{\log_3 18}-\log_3 9=18-2=16$

45) 11

46) 6
⇨ $f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
$f(x)=4\log_3(x+3)+1$, 즉 $y=4\log_3(x+3)+1$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면
$x=4\log_3(y+3)+1,\ \frac{x-1}{4}=\log_3(y+3)$
$y+3=3^{\frac{x-1}{4}}\qquad \therefore\ y=3^{\frac{x-1}{4}}-3$
따라서 $g(x)=3^{\frac{x-1}{4}}-3$이므로
$g(9)=3^2-3=6$

47) -1

48) 3
⇨ 역함수와의 교점은 $y=x$의 교점과 같으므로
$y=\log_2(x-m)+n$는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$을 지난다.
$\log_2(2-m)+n=2\quad \cdots ①$
$\log_2(3-m)+n=3\quad \cdots ②$
②－①을 계산하면
$\log_2(3-m)-\log_2(2-m)=1$
$\log_2\frac{3-m}{2-m}=\log_2 2$
$\frac{3-m}{2-m}=2,\ 3-m=4-2m\qquad \therefore\ m=1$
$m=1$을 ①식에 대입하여 계산하면
$\log_2 1+n=2\qquad \therefore\ n=2$
$\therefore\ m+n=1+2=3$

49) $1+\sqrt{3}$
⇨ 역함수와 $x=1$, $x=3$에서 만나므로
로그함수는 $(1,1)$, $(3,3)$을 지난다.
$1=\log_a 1+m,\ m=1$
$3=\log_a 3+1,\ 2=\log_a 3$
$a^2=3,\ a=\sqrt{3}$
$a+m=\sqrt{3}+1$

50) 11
⇨ 역함수 관계로 $f(3)=m, f(2)=n$이므로
$a^3=m, a^2=n\ \therefore m^3=a^9,\ m^3n=a^{11}$이다.
즉, $g(m^3n)=k\ \Leftrightarrow\ f(k)=a^k=m^3n$
$\therefore\ k=11$

51) 5
⇨ 두 함수는 $y=x$에 대칭이므로 역함수 관계이다.
$x=2^{y-1}+b\ \Rightarrow\ x-b=2^{y-1}$
$\Rightarrow\ y-1=\log_2(x-b)\ \Rightarrow\ y=\log_2(x-b)+1$
$\Rightarrow\ y=\log_2(2x-2b)$
$\log_2(2x-2b)=\log_2(ax-6)\qquad \therefore\ a=2,\ b=3$
$\therefore\ a+b=2+3=5$

52) $\frac{5}{2}$
⇨ 함수 $y=\log_2(4x-20)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭 이동한 그래프의 식은
$-y=\log_2(4x-20)\qquad \therefore\ y=-\log_2(4x-20)$
이 함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동한 그래프는 함수 $y=-\log_2(4x-20)$의 역함수의 그래프이다.
함수 $y=-\log_2(4x-20)$의 역함수는
$y=-\log_2(4x-20)$에서 x와 y를 서로 바꾸면
$x=-\log_2(4y-20),\ \log_2(4y-20)=-x$
$4y-20=2^{-x}\qquad \therefore\ y=\frac{1}{4}\cdot 2^{-x}+5$
따라서 $m=\frac{1}{4}$, $n=5$이므로 $2mn=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 5=\frac{5}{2}$

53) 9
⇨ 역함수와의 교점은 $y=x$와의 교점과 같으므로
$f(x)$가 지나는 점의 좌표는 $(3,\ 3)$, $(6,\ 6)$이다.
$3=\log_a 3b+1\ \cdots ㉠,\ 6=\log_a 6b+1\ \cdots ㉡$
㉠, ㉡식을 빼면 $\log_a 2=3,\ a^3=2\qquad \therefore\ a=2^{\frac{1}{3}}$
$3=\log_a 3b+1,\ 2=\log_a 3b\qquad \therefore\ 3b=a^2$
$\therefore\ f(12)=\log_a 12b+1=\log_a 4a^2+1=\log_a 4+3=9$

54) $a=3,\ b=\frac{2}{3}$
⇨ 두 함수가 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수이다.
따라서 $y=a^{x-5}+b$의 역함수를 구하면
$x-5=\log_a(y-b)$이므로 $y=\log_a(x-b)+5$
$y=\log_a(x-b)+5$은 $y=\log_a(3x-2)+4$과 같으므로 $\log_a(3x-2)=\log_a(x-b)+1$
$\therefore\ a=3, b=\frac{2}{3}$

55) 4

56) 6

57) -4

58) 5

⇨ 역함수를 구하자.

$y-b=a^{x+1}$

$\log_a(y-b)=x+1$

$x=\log_a(y-b)-1$

$y=\log_a(x-b)-1$

이때 주어진 그래프의 점근선이 $x=2$이므로

$b=2$

점 $(5,\ 0)$을 지나므로 $0=\log_a(5-2)-1$

$5-2=a \qquad \therefore\ a=3$

$\therefore\ a+b=3+2=5$

59) $\dfrac{d}{b}$

⇨ 그래프의 점을 이용하면

$\log_3 b=a,\ \log_3 c=b,\ \log_3 d=c$

$\Leftrightarrow\ 3^a=b,\ 3^b=c,\ 3^c=d$

$\therefore\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{a-c}=3^{c-a}=\dfrac{3^c}{3^a}=\dfrac{d}{b}$

60) 2

⇨ $a=\log_3 b,\ \ b=\log_3 c,\ \ c=\log_3 d$

$a-c=\log_3 b-\log_3 d=\log_3\dfrac{b}{d}=\log_3\dfrac{b}{2b}=\log_3\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{a-c}=3^{-\log_3\frac{1}{2}}=3^{\log_3 2}=2$

61) $\dfrac{1}{3}$

62) 3

⇨ $f(b)=a,\ f(c)=2a,\ f(d)=3a,\ f(e)=4a$

$2^b=a,\ 2^c=2a,\ 2^d=3a,\ 2^e=4a$

$\dfrac{2^e}{2^c}=\dfrac{4a}{2a}=2,\ 2^{(e-c)}=2,\ e-c=1$

$\dfrac{2^d}{2^b}=\dfrac{3a}{a}=3,\ 2^{(d-b)}=3,\ f(d-b)=3$

$(e-c)f(d-b)=3$