개념check

[함수의 증가와 감소]

• 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
(1) $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.
(2) $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

[함수의 극대와 극소]

• 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여
(1) $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, $f(a)$를 극댓값이라 한다.
(2) $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, $f(a)$를 극솟값이라 한다.
이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.

[함수의 그래프]

• 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 순서로 그린다.
① $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.
② ①에서 구한 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만들고, 극값을 구한다.
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축의 교점의 좌표를 구한다.
④ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

기본문제

[예제]

1. 다음 x값 중 함수 $f(x)=x^3-3x^2+4$가 증가하는 구간의 x값이 아닌 것은?

① -4 ② -1
③ 1 ④ 5
⑤ 8

[문제]

2. 다음 열린구간 중 함수 $f(x)=x^3-6x^2+2$가 감소하는 구간인 것은?

① $(-1, 3)$ ② $(0, 4)$
③ $(1, 5)$ ④ $(2, 6)$
⑤ $(3, 7)$

[예제]

3. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$의 극값을 모두 더하면?

① 24 ② 26
③ 28 ④ 30
⑤ 32

[문제]

4. 함수 $f(x)=x^3-12x+3$의 극값을 모두 더하면?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[예제]

5. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이 $x=1$에서 극댓값 7을 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -15 ② -14
③ -13 ④ -12
⑤ -11

[문제]

6. 함수 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+1$이 $x=-2$에서 극솟값 -19를 갖는다. 이때 극댓값은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[문제]

7. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$은 $x=1$과 $x=3$에서 극값을 갖는다. 이때 모든 극값의 합은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

[예제]

8. 함수 $f(x)=ax^3-3x+4$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[문제]

9. 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax+2$가 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 17　② 20　③ 23　④ 26　⑤ 29

[예제]

10. 다음 중 함수 $x^4+x^3-2ax^2+1$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값이 될 수 있는 것은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

[문제]

11. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2-ax$가 극값을 갖지 않도록 하는 모든 정수 a의 합은?

① -23　② -22　③ -21　④ -20　⑤ -19

평가문제

[중단원 학습 점검]

12. 함수 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+1$이 $x=k$에서 극값을 가질 때, 가능한 상수 k의 값의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

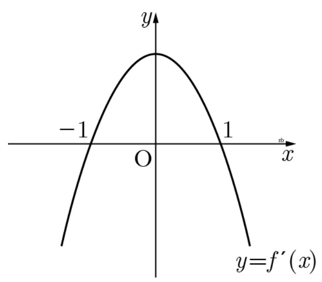
[중단원 학습 점검]

13. 삼차함수 $f(x)=x^3-kx^2+12x$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 정수 k의 값의 개수는?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

[중단원 학습 점검]

14. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?



① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[대단원 학습 점검]

15. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x-1$이 역함수를 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[대단원 학습 점검]

16. $x=a$에서 극값 b를 갖는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=xf(x)$라고 할 때, 다음 중 $g'(a)$를 a, b에 관한 식으로 옳게 나타낸 것은?

① a　② b　③ ab　④ b^2　⑤ a^2

유사문제

17. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax-5$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 6　② 7　③ 12　④ 15　⑤ 21

18. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+4x^3+(a-1)x^2$가 극댓값을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

19. 함수 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+20$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 하자. $M-m=32$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

20. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$가 $x=3$에서 극솟값 -4를 가질 때, 극댓값 M의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2ax+3$이 $x>1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $a<0$　③ $a>2$　④ $a<2$　⑤ $0<a<2$

22. 삼차함수 $f(x)=x^3-ax^2+2ax+2$가 극값을 갖도록 상수 a의 값을 정할 때, 자연수 a의 최솟값을 구하면?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

23. 삼차함수 $f(x)=x^3-27x-1$은 구간 $[a, b]$에서 감소한다. $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 감소한다.

따라서 ③의 $x=1$에서는 함수는 감소한다.

2) [정답] ②

[해설] $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-30	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[4, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[0, 4]$에서 감소한다.

따라서 ②의 열린구간 $(0, 4)$에서 함수는 감소한다.

3) [정답] ①

[해설] $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-3$에서 극댓값 $f(-3)=28$,

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=-4$를 갖는다.

∴ 극댓값과 극솟값의 합은 24

4) [정답] ④

[해설] $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	19	↘	-13	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=19$,

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=-13$을 갖는다.

∴ 극댓값과 극솟값의 합은 6

5) [정답] ①

[해설] $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=0$

$2a+b=-3$ ⋯㉠

또, 극댓값이 7이므로

$f(1)=1+a+b+3=7$

$a+b=3$ ⋯㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=-6$, $b=9$

이때 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$이다.

∴ $a-b=-6-9=-15$

6) [정답] ③

[해설] $f'(x)=-6x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=-24-4a+b=0$

$4a-b=-24$ ⋯㉠

또, 극솟값이 -19이므로

$f(-2)=16+4a-2b+1=-19$

$4a-2b=-36$ ⋯㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$b=12$, $a=-3$이므로

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x+1$

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-19	↗	8	↘

∴ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 8을 갖는다.

7) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 $f'(1)=f'(3)=0$이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$=3x^2-12x+9$

$a=-6$, $b=9$

$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$f(1)=1$

$f(3)=-3$

∴ 극댓값과 극솟값의 합은 -2

8) [정답] ①

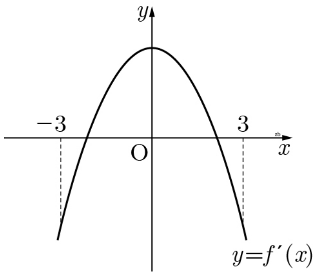
[해설] $f(x)=ax^3-3x+4$에서 $f'(x)=3ax^2-3$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=36a>0$이므로 $a>0$
따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다.

9) [정답] ④
[해설] $f(x)=-x^3+ax+2$에서 $f'(x)=-3x^2+a$
함수 $f(x)$가 구간 $(-3,\ 3)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-3<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=12a>0$이므로 $a>0$
(ⅱ) $f'(-3)=-27+a<0$
$f'(3)=-27+a<0$
이상에서 a의 값의 범위는 $0<a<27$
따라서 정수 a의 개수는 26개다.

10) [정답] ⑤
[해설] $f(x)=x^4+x^3-2ax^2+1$에서
$f'(x)=4x^3+3x^2-4ax=x(4x^2+3x-4a)$
사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로
이차방정식 $4x^2+3x-4a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $4x^2+3x-4a=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=9-64a>0$이므로 $a>-\dfrac{9}{64}$
이때 $x=0$이 방정식 $4x^2+3x-4a=0$의 근이 아니어야 하므로 $a\neq 0$
$\therefore\ -\dfrac{9}{64}<a<0$ 또는 $a>0$

11) [정답] ③
[해설] $f(x)=2x^3+ax^2-ax$에서
$f'(x)=6x^2+2ax-a$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D/4=a^2+6a\le 0$이므로 $a(a+6)\le 0$
$\therefore\ -6\le a\le 0$
따라서 모든 정수 a의 합은 -21

12) [정답] ④
[해설] $f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗	1	↘

따라서 가능한 상수 k의 값의 개수는 3이다.

13) [정답] ③
[해설] $f(x)=x^3-kx^2+12x$에서
$f'(x)=3x^2-2kx+12$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이때 방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\dfrac{D}{4}=k^2-3\times 12\le 0,\ k^2-36\le 0$
즉, $-6\le k\le 6$
$\therefore$ 가능한 정수 k의 값의 개수는 13

14) [정답] ④
[해설] $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
이때 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가
$x=-1$ 또는 $x=1$이므로
$f'(-1)=-3-2a+b=0$
$f'(1)=-3+2a+b=0$
두 식을 연립하면 $a=0,\ b=3$
한편, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값이 2이므로
$f(-1)=1+a-b+c=-2+c=2$
즉, $c=4$이므로 $f(x)=-x^3+3x+4$
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.
따라서 극댓값은 $f(1)=6$

15) [정답] ②
[해설] 함수 $f(x)$는 증가함수이어야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.
$f(x)=x^3+ax^2+3x-1$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+3$
방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\dfrac{D}{4}=a^2-9\le 0,\ (a+3)(a-3)\le 0$
즉, $-3\le a\le 3$이므로 함수 $f(x)$가 역함수를 갖도록 하는 정수 a의 개수는 7이다.

16) [정답] ②

[해설] 다항함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값 b를 가지므로
$f(a)=b$, $f'(a)=0$
$g(x)=xf(x)$에서
$g'(x)=f(x)+xf'(x)$
즉, $g'(a)=f(a)+af'(a)=b$

17) [정답] ⑤
[해설] $f(x)=x^3+ax^2+2ax-5$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+2a$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-6a\le 0$
$a(a-6)\le 0 \quad \therefore 0\le a\le 6$
따라서 이를 만족하는 정수 a는 0, 1, 2, …, 6이므로 그 합은
$0+1+2+3+4+5+6=21$

18) [정답] ②
[해설] $f(x)=\frac{1}{2}x^4+4x^3+(a-1)x^2$에서
$f'(x)=2x^3+12x^2+2(a-1)x=2x(x^2+6x+a-1)$
사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로
방정식 $x^2+6x+a-1=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
따라서 $a\ne 1$
이차방정식 $x^2+6x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9-(a-1)>0$에서 $a<10$
$\therefore a<1$ 또는 $1<a<10$
따라서 이를 만족하는 자연수 a는 2, 3, 4, …, 9의 8개이다.

19) [정답] ③
[해설] $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+20$에서
$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}a$ 또는 $x=a$
즉 $x=-\frac{1}{3}a$에서 극댓값, $x=a$에서 극솟값을 가지므로
$M=f\left(-\frac{1}{3}a\right)=-\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{9}a^3+\frac{1}{3}a^3+20=\frac{5}{27}a^3+20$
$m=f(a)=a^3-a^3-a^3+20=-a^3+20$
$M-m=32$이므로
$\frac{5}{27}a^3+20-(-a^3+20)=32$
$\frac{32}{27}a^3=32$, $a^3=27 \quad \therefore a=3$

20) [정답] ④
[해설] $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+b$
이때 $f'(3)=0$, $f(3)=-4$이므로
$54+6a+b=0 \quad \therefore 6a+b=-54$ …㉠
$54+9a+3b-4=-4 \quad \therefore 3a+b=-18$ …㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-12$, $b=18$
$f'(x)=6x^2-24x+18=6(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
따라서 $f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$이므로 극댓값은
$f(1)=2-12+18-4=4$

21) [정답] ③
[해설] $f'(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+2a-a^2$에서
이차방정식 $(x-a)^2+2a-a^2=0$의 두 실근이 1보다 커야 한다.
즉 $a>1$이고,
$D=a^2-2a>0$에서 $a(a-2)>0$
즉 $a>1$이고, $a<0$ 또는 $a>2$
$\therefore a>2$

22) [정답] ④
[해설] $f(x)=x^3-ax^2+2ax+2$에서
$f'(x)=3x^2-2ax+2a$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
판별식을 D라 하면
$D/4=a^2-6a>0$
$a(a-6)>0 \quad \therefore a<0$ 또는 $a>6$
따라서 이를 만족하는 자연수 a의 최솟값은 7이다.

23) [정답] ③
[해설] $f'(x)=3x^2-27$
$f'(x)\le 0$일 때, $f(x)$가 감소하므로
$3x^2-27\le 0$
$x^2\le 9 \quad \therefore -3\le x\le 3$
따라서 $a=-3$, $b=3$이므로
$a+b=0$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125