개념check

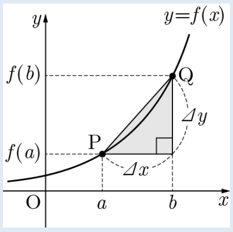
[평균변화율과 미분계수]

• 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이고 평균변화율은 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



• 미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

[미분계수의 기하적 의미]

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

[미분가능성과 연속성]

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다.

기본문제

[예제]

1. 함수 $f(x)=x^2-1$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[문제]

2. 함수 $f(x)=|x+2|+3$에서 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[문제]

3. 어떤 상품을 x개 생산하는 데 드는 비용을 $f(x)$만 원이라 할 때, $f(x)=x^2+2x+4$라 한다. 이 상품의 생산량을 10개에서 20개로 증가시켰을 때, 생산 비용의 평균변화율은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

[문제]

4. 함수 $f(x)=x^2-3x$의 $x=2$에서의 미분계수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[문제]

5. 곡선 $y=x^2+2x-3$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[예제]

6. 함수 $f(x)=|x-4|(x-3)$는 $x=a$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 이때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[문제]

7. 함수 $f(x)=x-|x-1|+2$에서 연속이지만 미분가능하지 않는 x 값의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

평가문제

[스스로 확인하기]

8. 다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-\boxed{(ㄱ)}}=\dfrac{f(a+\boxed{(ㄴ)})-f(a)}{\Delta x}$

① (ㄱ) : a, (ㄴ) : Δa
② (ㄱ) : a, (ㄴ) : Δx
③ (ㄱ) : a, (ㄴ) : b
④ (ㄱ) : b, (ㄴ) : Δa
⑤ (ㄱ) : b, (ㄴ) : Δx

[스스로 확인하기]

9. 함수 $f(x)=-x^2+2x+1$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구하면?

① -4 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 4

[스스로 확인하기]

10. 곡선 $y=2x^2+1$과 $y=-3x+1$에 대하여, $x=2$일 때의 접선의 기울기를 각각 α, β라 하자. $\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[스스로 확인하기]

11. 함수 $f(x)$에서 $f'(1)=3$일 때, $\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+4h)-f(1)}{2h}$의 값은?

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

[스스로 확인하기]

12. $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 <u>않은</u> 함수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르면?

<보기>
ㄱ. $f(x)=x-2$
ㄴ. $f(x)=\lvert x-2\rvert$
ㄷ. $f(x)=\lvert x^2-4\rvert$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ,ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

[스스로 확인하기]

13. 두 자동차 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여 4시간 동안 달렸다. 두 자동차 A, B가 출발 후 x시간 동안 달린 거리 y km에 대하여 A자동차는 $y=60x$, B자동차는 $y=10x^2+20x$의 관계식이 성립할 때, 두 자동차의 순간변화율이 동일하게 되는 x의 값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 마무리하기]

14. 함수 $f(x)=x^2-3x+2$에서 x의 값이 1에서 5까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 같을 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[스스로 마무리하기]

15. 함수 $f(x)=x^3-x^2+2x+1$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$의 값은?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

[스스로 마무리하기]

16. 다항함수 $f(x)$가 $f(2)=3,\ f'(2)=1$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

[스스로 마무리하기]

17. 함수 $f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<2)\\ x^2+bx & (x\ge2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다)

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

유사문제

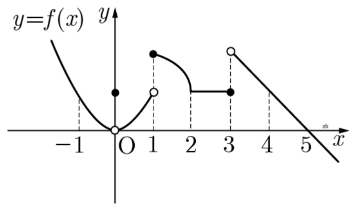
18. 함수 $f(x)=x^2+ax-1$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 때의 평균변화율이 5일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

19. 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$을 만족하고 $f'(0)=3$일 때, $f'(2)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

20. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 구간 $(-1,5)$에서 함수 $f(x)$의 불연속인 x의 값은 m개, 미분가능하지 않은 x의 값은 n개이다. 이때 $n-m$의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21. 함수 $y=x^2+x+1$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때 평균변화율은?

① 2　② $\frac{3}{2}$　③ 4　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 6

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

22. **두 함수 $f(x)=|x^3+1|$, $g(x)=(x+1)^2$ 에 대하여 $x=-1$에서 미분 가능한 함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?**

<보기>		
ㄱ. $f(x)$	ㄴ. $g(x)$	ㄷ. $f(x)g(x)$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] $f(1)=0$, $f(4)=15$이므로

x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{15}{3}=5$

2) [정답] ①

[해설] $f(-1)=4$, $f(1)=6$이므로

x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{2}{2}=1$

3) [정답] ⑤

[해설] $f(10)=124$, $f(20)=444$ 이므로

함수 $f(x)$의 $x=10$에서 $x=20$까지의 평균변화율은

$\dfrac{f(20)-f(10)}{20-10}=\dfrac{444-124}{10}=32$

4) [정답] ①

[해설] $f'(2)=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{f(2+\triangle x)-f(2)}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{\{(2+\triangle x)^2-3(2+\triangle x)\}-(-2)}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{\triangle x^2+\triangle x}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}(\triangle x+1)=1$

5) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^2+2x-3$이라 하면 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$f'(2)=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{f(2+\triangle x)-f(2)}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{\{(2+\triangle x)^2+2\times(2+\triangle x)-3\}-5}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{\triangle x^2+6\triangle x}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x \to 0}(\triangle x+6)=6$

6) [정답] ④

[해설] ⅰ) $f(4)=\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$이므로

$f(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

ⅱ) $\lim\limits_{x\to 4-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to 4-}\dfrac{-(x-4)(x-3)}{x-4}=-1$

$\lim\limits_{x\to 4+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to 4+}\dfrac{(x-4)(x-3)}{x-4}=1$이므로

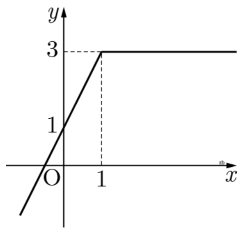
$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하지 않다.

7) [정답] ②

[해설] $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x<1) \\ 3 & (x\geq 1)\end{cases}$ 이므로

$y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



따라서 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이고,

$x=1$에서만 미분가능하지 않다.

8) [정답] ②

[해설] 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

9) [정답] ①

[해설] $f(2)=-4+4+1=1$

$f(4)=-16+8+1=-7$ 이므로

x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{-7-1}{2}=-4$

10) [정답] ③

[해설] α와 β는 각각 $y=2x^2+1$과 $y=-3x+1$의 $x=2$에서의 미분계수이다.

$\alpha=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{\{2\times(\triangle x+2)^2+1\}-9}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{2\triangle x^2+8\triangle x}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x \to 0}(2\triangle x+8)=8$

$\beta=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{\{-3\times(2+\triangle x)+1\}-(-5)}{\triangle x}$

$=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{-3\triangle x}{\triangle x}=-3$

$\therefore \alpha+\beta=5$

11) [정답] ③

[해설] $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+4h)-f(1)}{2h}$

$=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+4h)-f(1)}{4h}$

$=2f'(1)=2\times 3=6$

12) [정답] ⑤

[해설] ㄴ. (ⅰ) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

(ⅱ) $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)=|x-2|$은 $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

ㄷ. (ⅰ) $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\{-(x+2)\}=-4$

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}(x+2)=4$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)=|x^2-4|$은 $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

13) [정답] ③

[해설] $x=a$일 때 두 자동차의 순간변화율이 동일해진다고 하자.

A자동차의 $x=a$에서의 순간변화율은

$\lim_{x\to a}\frac{60x-60a}{x-a}=60$

B자동차의 $x=a$에서의 순간변화율은

$\lim_{x\to a}\frac{10x^2+20x-10a^2-20a}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{10(x+a)(x-a)+20(x-a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(10x+10a+20)}{x-a}$

$=20a+20$

$60=20a+20$에서 $a=2$

14) [정답] ③

[해설] $f(1)=0$, $f(5)=12$ 이므로

x 값이 1부터 5까지의 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=3$

$f(x)=x^2-3x+2$이므로

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-3x-a^2+3a}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)-3(x-a)}{x-a}=2a-3$

$2a-3=3$에서 $2a=6$

$\therefore a=3$

15) [정답] ②

[해설] $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)-f(1-2h)+f(1)}{h}$

$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}$

$-(-2)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}$

$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)$

$f(x)=x^3-x^2+2x+1$

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3$

$\therefore 5f'(1)=15$

16) [정답] ⑤

[해설] $\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(2)-4f(2)+4f(2)-4f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)(x^2-4)}{x-2}-4\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)(x+2)(x-2)}{x-2}-4\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=4\times f(2)-4\times f'(2)=8$

17) [정답] ②

[해설] (ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$가 성립한다.

즉, $4+a=4+2b$에서 $a=2b$ ⋯㉠

(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 성립한다.

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{2x-4}{x-2}=2$

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+bx-4-2b}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+2)(x-2)+b(x-2)}{x-2}=4+b$

$2=4+b$이므로 $b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=-4$

$f(x)=\begin{cases}2x-4 & (x<2)\\ x^2-2x & (x\geq 2)\end{cases}$이므로

$f(1)=-2$

18) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)=x^2+ax-1$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 때의 평균변화율이 5이므로

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3a+8)-a}{2}=\frac{2a+8}{2}=a+4=5$

$\therefore a=1$

19) [정답] ⑤

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[해설] $x=y=0$을 주어진 식에 대입하면 $f(0)=-1$

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h+1-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2=f'(0)+2=5$$

20) [정답] ①

[해설] 함수 $y=f(x)$가 불연속인 지점은 $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 3개이므로 $m=3$

또 미분 불가능한 지점은 $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 4개이므로 $n=4$

$\therefore n-m=4-3=1$

21) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^2+x+1$이라 하면 x의 값이 1에서 4까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(16+4+1)-3}{3}=\frac{18}{3}=6$$

22) [정답] ⑤

[해설] ㄱ. $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}|x^3+1|=0=f(-1)$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(x^2-x+1)=3$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{-x^3-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1-}(-x^2+x-1)=-3$$

즉 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분계수가 존재한지 않으므로 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}(x+1)^2=0=g(-1)$이므로 $x=-1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)^2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(x+1)=0$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)^2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1-}(x+1)=0$$

즉 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1}f(x)\cdot\lim_{x\to-1}g(x)=0$이고 $f(-1)g(-1)=0$이므로 연속이다.

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$\lim_{x\to-1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{|x^3+1|(x+1)^2}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{(x^3+1)(x+1)^2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(x^3+1)(x+1)=0$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x^3+1)(x+1)^2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1-}(-x^3-1)(x+1)=0$$

즉 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125