



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시  
1) 제작연월일 : 2020-03-05  
2) 제작자 : 교육지대(주)  
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초  
제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호  
되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무  
단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법  
외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

### 개념check

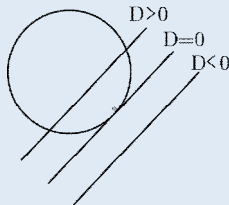
#### [원과 직선의 위치 관계]

원  $x^2 + y^2 = r^2$  과 직선  $y = mx + n$  의 위치 관계는

이차방정식  $x^2 + (mx + n)^2 = r^2$

즉,  $(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$  의 판별식  $D$  의 부호에 따라

- $D > 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 점에서 만난다.
- $D = 0 \Leftrightarrow$  한 점에서 만난다.(접한다)
- $D < 0 \Leftrightarrow$  만나지 않는다.



#### [기울기가 주어진 원의 접선의 방정식]

원  $x^2 + y^2 = r^2$  에 접하고, 기울기가  $m$  인 접선의 방정식은  
 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

#### [원 위의 한 점에서의 접선의 방정식]

원  $x^2 + y^2 = r^2$  위의 점  $P(x_1, y_1)$  에서의 접선의 방정식은  
 $x_1x + y_1y = r^2$

### 기본문제

[예제]

1. 원  $x^2 + y^2 = 16$  과 직선  $y = x + k$  가 서로 다른 두  
점에서 만날 때, 실수  $k$  의 값의 범위는?

- ①  $-3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$
- ②  $-4 < k < 4$
- ③  $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$
- ④  $-5 < k < 5$
- ⑤  $-5\sqrt{2} < k < 5\sqrt{2}$

[문제]

2. 원  $x^2 + y^2 = 4$  과 직선  $y = -x + k$  가 한 점에서 만  
날 때, 양의 실수  $k$  의 값은?

- ① 1
- ②  $\sqrt{2}$
- ③ 2
- ④  $2\sqrt{2}$
- ⑤ 3

[예제]

3. 원  $x^2 + y^2 = 5$  에 접하고 기울기가 2인 제 2사분  
면을 지나는 직선의 방정식은?

- ①  $y = x + 5$
- ②  $y = x + \sqrt{5}$
- ③  $y = x + 1$
- ④  $y = 2x + \sqrt{5}$
- ⑤  $y = 2x + 5$

[예제]

4. 다음은 원  $x^2 + y^2 = r^2$  위의 점  $P(x_1, y_1)$  에서의  
접선의 방정식이  $x_1x + y_1y = r^2$ 임을 설명하는 과정  
이다. (가)~(마)에 들어갈 내용으로 옳지 않은 것은?

(i)  $x_1y_1 \neq 0$  일 때,

직선 OP의 기울기는  $\frac{(가)}{x_1}$  이고, 직선 OP는 점 P를  
지나는 접선에 수직이므로

구하는 접선의 기울기는  $-\frac{(나)}{y_1}$

그러므로 접선의 방정식은  $y - y_1 = -\frac{(다)}{(나)}(x - x_1)$

즉  $x_1x + y_1y = (라)$

그런데 점  $P(x_1, y_1)$  은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = (마)$$

따라서  $x_1y_1 \neq 0$  일 때, 원의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2$$

(ii)  $x_1y_1 = 0$  일 때,

$x_1 = 0$  이면 점 P의 좌표는  $(0, \pm r)$  이므로 접선의  
방정식은  $y = \pm r$

$y_1 = 0$  이면 점 P의 좌표는  $(\pm r, 0)$  이므로 접선의  
방정식은  $x = \pm r$

따라서  $x_1y_1 = 0$  일 때, 원의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2$$

- ① (가)  $y_1$
- ② (나)  $x_1$
- ③ (다)  $\frac{x_1}{y_1}$
- ④ (라)  $x_1^2 - y_1^2$
- ⑤ (마)  $r^2$

[문제]

5. 원  $x^2 + y^2 = 8$ 에 접하고, 직선  $y = x + 2$ 와 평행한 제 2사분면을 지나는 직선의 방정식은?

- ①  $y = x - 4$                       ②  $y = x + 4$   
 ③  $y = x - 2$                       ④  $y = -x + 4$   
 ⑤  $y = -x + 2$

[문제]

6. 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은?

- ①  $y = -2x + 5$                       ②  $y = -2x$   
 ③  $y = -2x - 5$                       ④  $y = 2x - 3$   
 ⑤  $y = 2x - 5$

[예제]

7. 점  $(-3, 0)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 3$ 에 그은 접선의 방정식은? (단, 접선의 기울기는 양수)

- ①  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}$                       ②  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}$   
 ③  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{2}}{2}$                       ④  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{2\sqrt{2}}{2}$   
 ⑤  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

[문제]

8. 점  $(0, 5)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 10$ 에 그은 접선의 방정식은? (단, 접선의 기울기는 양수)

- ①  $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + 5$                       ②  $y = \frac{\sqrt{6}}{3}x + 5$   
 ③  $y = \sqrt{6}x + 5$                       ④  $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - 5$   
 ⑤  $y = \frac{\sqrt{6}}{3}x - 5$

평가문제

[소단원 확인 문제]

9. 원  $x^2 + y^2 = 13$  위의 점  $(3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

- ①  $y = -\frac{1}{2}x + 6$                       ②  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$   
 ③  $y = -\frac{3}{2}x + 6$                       ④  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$   
 ⑤  $y = -\frac{3}{2}x + 7$

[소단원 확인 문제]

10. 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 직선  $x - 2y + 3 = 0$ 과 수직인 제 1사분면을 지나는 직선의 방정식은?

- ①  $y = 2x + 5$                       ②  $y = 2x$   
 ③  $y = -2x + 5$                       ④  $y = -2x$   
 ⑤  $y = -2x - 5$

[소단원 확인 문제]

11. 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점  $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은?

- ①  $y = -2x + 5$                       ②  $y = -2x + 3$   
 ③  $y = 2x + 5$                       ④  $y = 2x$   
 ⑤  $y = 2x - 5$

[소단원 확인 문제]

12. 점  $(-7, -1)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 25$ 에 그은 접선의 방정식은? (단, 접선의 기울기는 양수)

- ①  $y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$                       ②  $y = \frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$   
 ③  $y = \frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$                       ④  $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$   
 ⑤  $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

[소단원 확인 문제]

13. 원  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ 과 직선  $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수  $k$ 의 값의 범위는?

- ①  $3 - \frac{\sqrt{2}}{2} < k < 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$       ②  $-1 < k < 1$   
 ③  $3 - \sqrt{2} < k < 3 + \sqrt{2}$       ④  $-2 < k < 2$   
 ⑤  $3 - 2\sqrt{2} < k < 3 + 2\sqrt{2}$

[중단원 연습 문제]

14. 원  $x^2 + y^2 = 2$  위의 점  $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식은?

- ①  $y = -x - 2$       ②  $y = -x$   
 ③  $y = x$       ④  $y = x - 2$   
 ⑤  $y = x - 4$

[중단원 연습 문제]

15. 원  $x^2 + y^2 = 10$ 에 접하고 기울기가 3인 제 2사분면을 지나는 직선의 방정식은?

- ①  $y = 3x + 4$       ②  $y = 3x + 7$   
 ③  $y = 3x + 10$       ④  $y = 3x - 7$   
 ⑤  $y = 3x - 10$

[중단원 연습 문제]

16. 원  $x^2 + y^2 = 16$ 과 직선  $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수  $k$ 의 값의 범위는?

- ①  $-5\sqrt{5} < k < 5\sqrt{5}$       ②  $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$   
 ③  $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$       ④  $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$   
 ⑤  $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

[중단원 연습 문제]

17. 원  $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선  $x - y + k = 0$ 이 만나지 않도록 하는 자연수  $k$ 의 최솟값은?

- ① 5      ② 4  
 ③ 3      ④ 2  
 ⑤ 1

[중단원 연습 문제]

18. 원  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$  위의 점과 직선  $4x - 3y - 4 = 0$  사이의 거리의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $M+m$ 의 값은?

- ①  $\frac{11}{2}$       ② 6  
 ③  $\frac{13}{2}$       ④ 7  
 ⑤  $\frac{15}{2}$

[중단원 연습 문제]

19. 점  $(0, 5)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{23}{2}$       ② 12  
 ③  $\frac{25}{2}$       ④ 13  
 ⑤  $\frac{27}{2}$

[중단원 연습 문제]

20. 원  $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선  $3x - y + 5 = 0$ 이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점 A, B에서의 두 접선의 교점의 좌표는?

- ①  $(-2, 1)$       ②  $(-2, 2)$   
 ③  $(-3, 0)$       ④  $(-3, 1)$   
 ⑤  $(-3, 2)$

[대단원 종합 문제]

21. 점  $(4, 0)$ 에서 원  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$ 에 그은 두 접선이 이루는 각을 이등분하는 직선 중 제 2사분면을 지나는 직선의 방정식은?

- ①  $y = x - 4$       ②  $y = x - 2$   
 ③  $y = -x$       ④  $y = -x + 2$   
 ⑤  $y = -x + 4$

[대단원 종합 문제]

22. 원점 O와 원  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$  위의 점 P에서 선분 OP의 길이의 최댓값과 최솟값의 차는?

- ① 2                                  ② 4  
 ③ 6                                  ④ 8  
 ⑤ 10

[대단원 종합 문제]

23. 점  $(3, 2)$ 에서 원  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱은?

- ①  $-\frac{5}{3}$                               ②  $-\frac{2}{3}$   
 ③  $\frac{1}{3}$                                 ④  $\frac{4}{3}$   
 ⑤  $\frac{7}{3}$

[대단원 종합 문제]

24. 원  $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + a^2 - 10 = 0$ 과 직선  $3x - 4y - 5 = 0$ 의 두 교점 A, B에서  $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 실수  $a$ 의 값은?

- ① 2                                  ② 1  
 ③ 0                                ④ -1  
 ⑤ -2



## 정답 및 해설

## 1) [정답] ③

[해설] 원의 중심인 원점과 직선  $y=x+k$ ,  
즉  $x-y+k=0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길  
이인 4보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 4, |k| < 4\sqrt{2}$$

$$-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$$

## 2) [정답] ④

[해설]  $y=-x+k$ 를  $x^2+y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2+(-x+k)^2=4$$

$$\text{즉 } 2x^2-2kx+k^2-4=0$$

원과 직선이 접해야 하므로  
이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-2\times(k^2-4)=-k^2+8=0$$

$$k^2-8=0, \text{ 즉 } (k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})=0$$

따라서 구하는 실수  $k$ 의 값은  
 $k>0$ 이므로  $k=2\sqrt{2}$

## 3) [정답] ⑤

[해설] 구하는 직선의  $y$ 절편을  $k$ 라고 하면 직선의 방  
정식은  $y=2x+k$

원의 중심인 원점과 직선  $y=2x+k$ ,  
즉  $2x-y+k=0$  사이의 거리가 원의 반지름의  
길이  $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, |k|=5$$

$$k=5 \text{ 또는 } k=-5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 제 2사분면을 지  
나므로  $y=2x+5$

## 4) [정답] ④

[해설] (i)  $x_1y_1 \neq 0$ 일 때,

직선  $OP$ 의 기울기는  $\frac{y_1}{x_1}$ 이고, 직선  $OP$ 는 점  $P$   
를 지나는 접선에 수직이므로  
구하는 접선의 기울기는  $-\frac{x_1}{y_1}$

그러므로 접선의 방정식은  $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

즉  $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$   
그런데 점  $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로  
 $x_1^2+y_1^2=r^2$   
따라서  $x_1y_1 \neq 0$ 일 때, 원의 접선의 방정식은  
 $x_1x+y_1y=r^2$

(ii)  $x_1y_1=0$ 일 때,

$x_1=0$ 이면 점  $P$ 의 좌표는  $(0, \pm r)$ 이므로 접선

의 방정식은  $y=\pm r$

$y_1=0$ 이면 점  $P$ 의 좌표는  $(\pm r, 0)$ 이므로 접선의  
방정식은  $x=\pm r$

따라서  $x_1y_1=0$ 일 때, 원의 접선의 방정식은  
 $x_1x+y_1y=r^2$

## 5) [정답] ②

[해설] 구하는 직선의  $y$ 절편을  $k$ 라고 하면

직선  $y=x+2$ 와 평행하므로 직선의 방정식은  
 $y=x+k$

원의 중심인 원점과 직선  $y=x+k$ ,  
즉  $x-y+k=0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길  
이  $2\sqrt{2}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}, |k|=4$$

$k=4$  또는  $k=-4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 제 2사분면을 지  
나므로  $y=x+4$

## 6) [정답] ①

[해설] 원 위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x+y=5, \text{ 즉 } y=-2x+5$$

## 7) [정답] ②

[해설] 접점을  $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점  $P$ 에서의 접선의  
방정식은

$$x_1x+y_1y=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선  $\textcircled{1}$ 은 점  $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$-3x_1=3, \text{ 즉 } x_1=-1$$

또 점  $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x_1=-1$ 을  $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(-1)^2+y_1^2=3, \text{ 즉 } y_1=\pm\sqrt{2}$$

구하는 접선의 방정식은

$$-x+\sqrt{2}y=3 \text{ 또는 } -x-\sqrt{2}y=3$$

$$\text{즉 } y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접선의 기울기는 양수이므로

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

## 8) [정답] ①

[해설] 접점을  $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점  $P$ 에서의 접선의  
방정식은

$$x_1x+y_1y=10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선  $\textcircled{1}$ 은 점  $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5y_1=10, \text{ 즉 } y_1=2$$

또 점  $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$y_1=2$ 을  $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x_1^2 + 2^2 = 10, \text{ 즉 } x_1 = \pm \sqrt{6}$$

구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{6}x + 2y = 10 \text{ 또는 } -\sqrt{6}x + 2y = 10$$

따라서 접선의 기울기는 양수이므로

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + 5$$

9) [정답] ④

[해설] 원 위의 점 (3, 2)에서의 접선의 방정식은

$$3x + 2y = 13, \text{ 즉 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

10) [정답] ③

[해설] 구하는 직선의 기울기를  $m$ ,  $y$ 절편을  $k$ 라고 하면

$$\frac{1}{2}m = -1, \text{ 즉 } m = -2$$

그러므로 구하는 직선은  $y = -2x + k$ , 즉  $2x + y - k = 0$

원과 직선은 접하므로 원점에서 직선까지의 거리는  $\sqrt{5}$ , 즉  $\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$ ,  $|-k| = 5$

따라서  $k = 5$  또는  $k = -5$ 이고 구하는 직선은 제 1사분면을 지나므로  $y = -2x + 5$

11) [정답] ⑤

[해설] 원 위의 점 (2, -1)에서의 접선의 방정식은

$$2x - y = 5, \text{ 즉 } y = 2x - 5$$

12) [정답] ①

[해설] 접점을  $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선 ①은 점  $(-7, -1)$ 을 지나므로

$$-7x_1 - y_1 = 25, \text{ 즉 } y_1 = -7x_1 - 25$$

또 점  $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$y_1 = -7x_1 - 25$ 을 ②에 대입하면

$$x_1^2 + (-7x_1 - 25)^2 = 25, \text{ 즉 } x_1^2 + 7x_1 + 12 = 0$$

$$(x_1 + 4)(x_1 + 3) = 0,$$

$$x_1 = -4, y_1 = 3 \text{ 또는 } x_1 = -3, y_1 = -4$$

구하는 접선의 방정식은

$$-4x + 3y = 25 \text{ 또는 } -3x - 4y = 25$$

$$\text{즉 } y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \text{ 또는 } y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

따라서 접선의 기울기는 양수이므로

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

13) [정답] ③

[해설]  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ 을 변형하면

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 이므로 원의 중심의 좌표는}$$

$(-2, 1)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

원의 중심인 점  $(-2, 1)$ 과 직선  $y = x + k$ ,

즉  $x - y + k = 0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작아야 하므로

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{2}} < 1, |k-3| < \sqrt{2}$$

$$3 - \sqrt{2} < k < 3 + \sqrt{2}$$

14) [정답] ④

[해설] 원 위의 점 (1, -1)에서의 접선의 방정식은

$$x - y = 2, \text{ 즉 } y = x - 2$$

15) [정답] ③

[해설] 구하는 직선의  $y$ 절편을  $k$ 라고하면 직선의 방정식은  $y = 3x + k$

원의 중심인 원점과 직선  $y = 3x + k$ ,

즉  $3x - y + k = 0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이  $\sqrt{10}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, |k| = 10$$

$$k = 10 \text{ 또는 } k = -10$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 제 2사분면을 지나므로  $y = 3x + 10$

16) [정답] ②

[해설] 원의 중심인 원점과 직선  $y = 2x + k$ ,

즉  $2x - y + k = 0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 4보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 4, |k| < 4\sqrt{5}$$

$$-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$$

17) [정답] ①

[해설] 원의 중심인 원점과 직선  $x - y + k = 0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이인  $2\sqrt{2}$ 보다 커야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}, |k| > 4, k > 4 \text{ 또는 } k < -4$$

따라서 자연수  $k$ 의 최솟값은 5

18) [정답] ②

[해설] 원의 중심의 좌표는  $(-2, 1)$ , 반지름은 2에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

(원의 중심과 직선 사이의 거리)+(반지름)

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은

(원의 중심과 직선 사이의 거리)-(반지름)이므로

$$M = \frac{|4 \times (-2) - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} + 2 = \frac{|-15|}{5} + 2 = 5$$

$$m = \frac{|4 \times (-2) - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} - 2 = \frac{|-15|}{5} - 2 = 1$$

따라서  $M + m = 6$

19) [정답] ③

[해설] 접점을  $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P에서의 접선의

방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선  $\textcircled{1}$ 은 점  $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5y_1 = 5, \text{ 즉 } y_1 = 1$$

또 점  $P(x_1, y_1)$ 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$y_1 = 1$ 을  $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x_1^2 + 1^2 = 5, \text{ 즉 } x_1 = \pm 2$$

점  $(0, 5)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선의 방정식은  $2x + y = 5$  또는  $-2x + y = 5$

$$\text{즉 } y = -2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x + 5$$

각각의  $x$ 절편은  $\left(\frac{5}{2}, 0\right), \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ 이므로

$$\text{삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) \times 5 = \frac{25}{2}$$

## 20) [정답] ④

[해설]  $3x - y + 5 = 0$ 에서  $y = 3x + 5$

$x^2 + y^2 = 5$ 에  $y = 3x + 5$ 를 대입하면

$$x^2 + (3x + 5)^2 = 5, \quad 10x^2 + 30x + 20 = 0$$

$$\text{즉 } x^2 + 3x + 2 = 0, \quad (x + 2)(x + 1) = 0$$

$$x = -2, \quad y = -1 \text{ 또는 } x = -1, \quad y = 2$$

(i) 원 위의 점  $(-2, -1)$ 에서의 접선은

$$-2x - y = 5, \text{ 즉 } y = -2x - 5$$

(ii) 원 위의 점  $(-1, 2)$ 에서의 접선은

$$-x + 2y = 5, \text{ 즉 } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\text{즉 두 직선의 교점은 } -2x - 5 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\frac{5}{2}x = -\frac{15}{2}, \quad x = -3, \quad y = 1$$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는  $(-3, 1)$

## 21) [정답] ⑤

[해설]  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$ 에서 원의 중심은  $(1, -3)$

점  $(4, 0)$ 에서 원  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$ 에 그은 두 접선이 이루는 각을 이등분하는 직선은

점  $(4, 0)$ 과 원의 중심  $(1, -3)$ 을 지나거나

점  $(4, 0)$ 과 원의 중심  $(1, -3)$ 을 지나는 직선과 수직이고 점  $(4, 0)$ 을 지난다.

(i) 점  $(4, 0)$ 과 원의 중심  $(1, -3)$ 을 지날 때,

$$y = \frac{-3 - 0}{1 - 4}(x - 4), \text{ 즉 } y = x - 4$$

(ii) 점  $(4, 0)$ 과 원의 중심  $(1, -3)$ 을 지나는 직선과 수직이고 점  $(4, 0)$ 을 지날 때,

점  $(4, 0)$ 과 원의 중심  $(1, -3)$ 을 지나는 직선의 기울기는 1이므로

$$y = -(x - 4), \text{ 즉 } y = -x + 4$$

직선은 제 2사분면을 지나므로  $y = -x + 4$

## 22) [정답] ②

[해설]  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$ 을 변형하면

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 2^2$$

원의 중심의 좌표는  $(2, -4)$ , 반지름은 2에서

선분 OP의 길이의 최댓값은

(원의 중심과 원점 사이의 거리) + (반지름),

선분 OP의 길이의 최솟값은

(원의 중심과 원점 사이의 거리) - (반지름)이므로

최댓값과 최솟값의 차는

$$2 \times (\text{반지름})$$

따라서 원점 O와 원  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$  위의 점 P에서 선분 OP의 길이의 최댓값과 최솟값의 차는 4

## 23) [정답] ①

[해설] 접선의 기울기를  $m$ 이라 하면 기울기가  $m$ 이고 점  $(3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = m(x - 3), \text{ 즉 } mx - y - 3m + 2 = 0$$

원의 중심의 좌표가  $(2, -1)$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2m + 1 - 3m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\frac{|-m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2, \quad |-m + 3| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 6m + 9 = 4m^2 + 4, \quad 3m^2 + 6m - 5 = 0$$

근과 계수의 관계에 의하여 점  $(3, 2)$ 에서 원  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기

$$\text{의 곱은 } -\frac{5}{3}$$

## 24) [정답] ④

[해설]  $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + a^2 - 10 = 0$ 을 변형하면

$$(x - 2a)^2 + (y + a)^2 = 4a^2 + 10$$

원의 중심은  $(2a, -a)$ , 반지름은  $\sqrt{4a^2 + 10}$

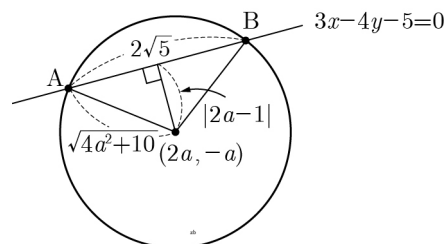
한편 원  $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + a^2 - 10 = 0$ 과 직선

$$3x - 4y - 5 = 0 \text{은 두 점에서 만나고}$$

원의 중심에서 직선까지의 거리는

$$\frac{|3 \times 2a - 4 \times (-a) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10a - 5|}{\sqrt{25}} = |2a - 1| \text{ 이}$$

므로 다음 그림과 같다.



원의 중심에서 직선까지의 수선의 발을 점 H, 원의 중심을 점 C라고 하면 피타고라스 공식에 의해

$$\overline{CA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2,$$

$$(\sqrt{4a^2+10})^2 = \sqrt{5^2+|2a-1|^2}$$

$$\text{즉 } 4a^2+10 = 5+4a^2-4a+1, \quad 4a = -4$$

$$\text{따라서 } a = -1$$