

2-1-2.도함수 천재(류희찬)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

- 1) 제작연월일 : 2020-03-10
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check /

[도함수의 정의]

미분가능한 함수 y = f(x)의 정의역의 각 원소 x에 미분계수 f'(x)를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

를 얻는다. 이때 이 함수 f'(x)를 f(x)의 도함수라 한다.

[함수 x^n 과 상수함수의 도함수]

- (1) $y=x^n$ $(n \ge 2$ 인 정수) $\Rightarrow y'=nx^{n-1}$
- (2) $y = x \Rightarrow y' = 1$
- (3) y = c (c는 상수) $\Rightarrow y' = 0$

[함수의 실수배, 합, 차의 미분법]

- 두 함수 f(x), g(x)가 미분가능할 때,
- (1) $\{cf(x)\}' = cf'(x)$ (단, c는 상수)
- (2) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$
- (3) $\{f(x) g(x)\}' = f'(x) g'(x)$

[곱의 미분법]

- (1) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (2) $\{f(x)g(x)h(x)\}'$
- = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)

기본문제

[예제]

1. 다음 중 함수 $f(x) = 2x^2 + 3x$ 의 도함수는?

- (1) f'(x) = 2x 3
- ② f'(x) = 2x + 3
- $\mathfrak{I}(x) = 4x 3$
- (4) f'(x) = 4x
- (5) f'(x) = 4x + 3

2. 함수 f(x) = -x + 2, $g(x) = 2x^2 - 1$ 에 대하여, 다 음 중 두 함수의 도함수의 합은?

- ① f'(x)+g'(x)=2x-1 ② f'(x)+g'(x)=2x+1
- 3 f'(x)+g'(x)=4x-1 4 f'(x)+g'(x)=4x
- (5) f'(x)+g'(x)=4x+1

[문제]

3. 함수 $f(x)=2x^6+3$ 의 도함수는?

- ① $2x^5+3$
- ② $6x^5$
- $3) 6x^5 + 3$
- $\bigcirc 4$ 12 x^5
- (5) $12x^5 + 3$

[예제]

4. 함수 $y = 2x^3 - x + 2$ 을 미분하면?

- ① 6x-1
- ② 6x
- $3) 2x^2-1$
- (4) $6x^2$
- (5) $6x^2 1$

5. 함수
$$f(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^4 - 2$$
에 대하여 $f'(2)$ 의 값은?

- 1) 46
- 2 48
- ③ 50
- **4**) 52
- (5) 54

[예제]

6. 함수 $y = (2x-1)(x^2+x)$ 를 미분한 함수를 f(x)라 할 때, f(1)의 값은?

- ① 3
- 2 4
- 3 5
- **4**) 6

(5) 7

[문제]

7. 함수 $y = (x^2 + 2x)^2$ 을 미분한 것은?

- ① $x^3 + 2x^2$
- ② $x^3 + 4x^2$
- $3) 2x^3 + 4x^2$
- (4) $4x^3 + 2x^2$

[예제]

8. 다항식 $x^5 + x^4 + 1$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 ax + b라 할 때, a + b의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

- ① 0
- ② 1
- 3 2
- (4) 3
- (5) 4

[문제]

9. 다항식 x^8+1 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 4x-6
- (2) 4x-8
- 3) 8x 6
- $\bigcirc 8x 8$
- (5) 8x 10

평가문제

[스스로 확인하기]

10. 다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?

(1) 미분가능한 함수 f(x)에 대하여 $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 를 함수 f(x)의 (\neg) (이)라 한다.

(2) $f(x) = x^n$ (n은 2 이상의 양의 정수)의 도함수는 $f'(x) = \boxed{(\mathsf{L})}$

① (기) : 도함수, (L) : nx^{n-1}

② (기): 도함수, (L): nx^n

③ (ㄱ) : 도함수, (ㄴ) : nx^{n+1}

④ (ㄱ) : 미분계수, (ㄴ) : nx^{n-1}

⑤ (ㄱ) : 미분계수, (ㄴ) : nx^n

[스스로 확인하기]

11. 함수 $f(x)=5x^2$, g(x)=8에 대하여 f'(1)+g'(2)의 값은?

① 8

- 2 10
- ③ 12
- 4) 14
- ⑤ 16

[스스로 확인하기]

12. f(0) = 1, f'(0) = 3, f'(1) = 5를 만족시키는 이 차함수 f(x)에 대하여 f(1)의 값은?

- 1
- ② 3
- 3 5
- (4) 7
- (5) 9

[스스로 확인하기]

13. 다항함수 f(x)가 f(2)=1, f'(2)=-2를 만족시키고 함수 g(x)를 g(x)=xf(x)라 할 때, g'(2)의 값은?

- $\bigcirc -3$
- ② -2
- (3) -1
- **4** 0
- **(5)** 1

[스스로 확인하기]

14. 두 다항함수 f(x), g(x)가

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3, \ \lim_{x \to 1} \frac{g(x) + 1}{x - 1} = 1$$

를 만족시킬 때, 함수 h(x)=f(x)g(x)에 대하여 h'(1)의 값은?

- $\bigcirc -2$
- 3 0
- **4** 1

⑤ 2

[스스로 확인하기]

15。 전선에 흐르는 전류의 세기는 어떤 시각에서 전 하량의 순간변화율을 뜻한다. 어느 전선에 전류가 흐르기 시작하여 t초 동안 흐르는 전하량을 $\mathit{Q}(t)$ C 이라 할 때, $Q(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2$ 이라 한다. t = 5, t = 10일 때, 이 전선에 흐르는 전류의 세기를 각각 α, β 라 할 때, $\beta-\alpha$ 의 값은? (단, 전류의 세기의 단위는

A(암페어)이고, 전하량의 단위는 C(쿨롱)이다.)

- 1) 80
- ② 85
- 3 90
- **(4)** 95
- ⑤ 100

[스스로 마무리하기]

- **16.** 이차함수 $f(x) = x^2 + ax$ 과 다항함수 g(x)에 대 하여 x좌표가 1인 점에서의 곡선 y = f(x)g(x)의 접선의 기울기가 -12라 한다. g(1) = -4, g'(1) = 2일 때, 상수 a의 값은?
 - ① 1
- ② 2
- ③ 3
- 4
- (5) 5

유사문제

- **17.** 다항함수 f(x)가 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2+2x} = 3$, $\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 를 만족시킬 때, f(2)의 값은?
 - $\bigcirc -5$
- $\bigcirc 2 2$
- ③ 0
- **(4)** 2
- (5) 4
- **18.** 함수 $f(x)=x^3-2x^2+3$ 에 대하여 f'(1)의 값은?
 - $\bigcirc -2$
- $\bigcirc -1$
- ③ 0
- 4 1

(5) 2

- **19.** 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & (x \ge 2) \\ 2x & (x < 2) \end{cases}$ 가 x = 2에서 미분 가능하도록 하는 상수 a, b에 대하여 a+b의 값은?
- ① 1
- ② 2

③ 3

(4) 4

- (5) 5
- **20.** 함수 f(x)가 x=1에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 a-2b의 값을 구하면?

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2x + 1 & (x \le 1) \\ x^2 - bx & (x > 1) \end{cases}$$

- $\bigcirc -1$

(3) 0

4) 2

- (5) 4
- **21.** x에 대한 다항식 $f(x) = x^{2018} + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어질 때, b-a의 값은? (단, a, b는 상수)
 - ① 2017
- ② 2018
- ③ 3620
- **4**) 3860
- (5) 4035
- 22. 어느 공장에서 x시일 때, 전력 사용량을 ykWh라고 하면 $y=-\frac{1}{24}x(x-12)(x-24)+3000$ 의 관계 식이 성립한다고 한다. 오전 10시일 때, 이 공장의 전력 사용량의 순간변화율을 P라고 하자. 이 때, 4P의 값은?
 - ① 14
- ② 16
- ③ 18
- **4**) 20
- (5) 22

- ${f 23.}$ 함수 f(x)가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, f(1)
- $(7) \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) 2x^3}{x^2 1} = 1$
- (나) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) f(2)}{x^2 4} = 8$
- (다) f(0) = 1
- ① 2
- 2 4

3 6

- **4**) 8
- **⑤** 10
- **24.** 두 다항함수 f(x), g(x)가 다음 조건을 만족시킨 다. 곡선 y=g(x) 위의 점 (2,f(2))에서의 접선의 기울기는?
- (7) $g(x) = x^3 f(x) + 7$
- (나) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) g(x)}{x 2} = 3$
- ① $-\frac{12}{7}$
- $3 \frac{7}{3}$
- ⑤ 3
- **25.** 함수 $f(x) = (x^3-1)(3x+4)$ 에 대하여 f'(-1)의 값은?
 - $\bigcirc -6$
- 3 0
- **4** 1
- ⑤ 4

4

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설]
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{2(x+h)^2 + 3(x+h)\} - (2x^2 + 3x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h + 3) = 4x + 3$$

2) [정답] ③

[해설]
$$f'(x) = -1$$
, $g'(x) = 4x$
 $\therefore f'(x) + g'(x) = 4x - 1$

3) [정답] ④

[해설]
$$f'(x) = (2x^6)' + 3'$$

= $2(x^6)' + 3'$
= $2 \times 6x^5 + 0$
= $12x^5$

4) [정답] ⑤

[해설]
$$y' = (2x^3 - x + 2)'$$

= $(2x^3)' - (x)' + (2)'$
= $2(x^3)' - (x)' + (2)'$
= $2 \times 3x^2 - 1 + 0$
= $6x^2 - 1$

5) [정답] ②

[해설]
$$f'(x)=2x^5-2x^3$$

 $\therefore f'(2)=64-16=48$

6) [정답] ⑤

[해설]
$$y' = \{(2x-1)(x^2+x)\}'$$

= $2(x^2+x)+(2x-1)(2x+1)$
= $6x^2+2x-1$
 $\therefore f(1)=6+2-1=7$

7) [정답] ⑤

[해설]
$$y' = \{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x)\}'$$

= $(2x+2)(x^2+2x)+(x^2+2x)(2x+2)$
= $4x^3+12x^2+8x$

8) [정답] ④

©의 양변에
$$x=-1$$
을 대입하면 $a=1$ $a=1$ 를 $\mathbb Q$ 에 대입하면

$$b=2$$

$$\therefore a+b=3$$

9) [정답] ③

[해설]
$$x^8+1$$
를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ $(a, b \leftarrow b \leftarrow b \leftarrow b)$ 라 하면 $x^8+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …① ①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $2=a+b$ …① ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $8x^7=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ …ⓒ의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a=8$ $a=8$ 를 ©에 대입하면 $b=-6$

10) [정답] ①

[해설]
$$(1)$$
 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

∴ 나머지는 8x-6

를 함수 f(x)의 도함수라 한다.

(2)
$$f(x) = x^n$$
 (n은 2 이상의 양의 정수)의 도함수는 $f'(x) = nx^{n-1}$

11) [정답] ②

[해설]
$$f'(x)=10x$$
, $g'(x)=0$ 이므로 $f'(1)+g'(2)=10+0=10$

12) [정답] ③

[해설]
$$f(x)=ax^2+bx+c$$
라 하면 $f(0)=c=1$ $f'(x)=2ax+b$ 에서 $f'(0)=b=3$ $f'(1)=2a+3=5$ 에서 $a=1$ $f(x)=x^2+3x+1$ $\therefore f(1)=5$

13) [정답] ①

[해설]
$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

 $g'(2)=f(2)+2f'(2)$
 $=1-2\times 2=-3$

14) [정답] ②

[해설]
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3$$
에서 $f(1)=2$, $f'(1)=3$
$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = 1$$
에서 $g(1)=-1$, $g'(1)=1$ $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

= -3 × 1 + 2 × 1 = -1

15) [정답] ②

[해설]
$$Q'(t) = t^2 + 2t$$

 $Q'(10) = 120 = \beta$
 $Q'(5) = 35 = \alpha$
 $\therefore \beta - \alpha = 85$

16) [정답] ③

[해설]
$$h(x) = f(x)g(x)$$
라 하면
$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$= (2x+a)g(x) + (x^2+ax)g'(x)$$
$$h'(1) = (2+a)g(1) + (1+a)g'(1)$$
$$g(1) = -4, \ g'(1) = 2 \ \text{이므로}$$
$$h'(1) = -8 - 4a + 2 + 2a = -2a - 6 = -12$$
$$2a = 6$$
$$a = 3$$

17) [정답] ⑤

[해설]
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x}=3$$
에서 $f(x)=3x^2+ax+b$ 라 할수 있다.
$$f(x)=3x^2+ax+b$$
에서 $f'(x)=6x+a$
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$
에서 $f(1)=0$, $f'(1)=1$ $3+a+b=0$, $6+a=1$ $\therefore a=-5$, $b=2$ 따라서 $f(x)=3x^2-5x+2$ 이므로 $f(2)=12-10+2=4$

18) [정답] ②

[해설]
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$
에서 $f'(x) = 3x^2 - 4x$
 $\therefore f'(1) = -1$

19) [정답] ②

[해설]
$$g(x) = x^2 + ax + b$$
, $h(x) = 2x$ 라 하면 $g'(x) = 2x + a$, $h'(x) = 2$ 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하려면 $x = 2$ 에서 연속이어야 하므로 $g(2) = h(2)$ 즉 $4 + 2a + b = 4$ $\therefore 2a + b = 0$ \cdots 한수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하려면 $x = 2$ 에서 미분계수가 존재해야 하므로 $g'(2) = h'(2)$ 즉 $a + 4 = 2$ 이므로 $a = -2$ $a = -2$ 를 \bigcirc 에 대입하면 $b = 4$ $\therefore a + b = 2$

20) [정답] ①

[해설] 함수 f(x)가 x=1에서 미분가능하려면 연속 이어야 하므로 $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x^2-bx) = 1-b$ $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (ax^3-2x+1)$

$$=a-2+1=a-1$$

즉
$$1-b=a-1$$
이므로 $a+b=2$ …

함수 f(x)가 x=1에서 미분가능하려면 미분계수 가 존재해야하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2 & (x \le 1) \\ 2x - b & (x > 1) \end{cases}$$

$$3a-2=2-b$$
 $\therefore 3a+b=4 \cdots \bigcirc$

$$\bigcirc$$
, \bigcirc 을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$$\therefore a-2b=1-2=-1$$

21) [정답] ⑤

b - a = 2017 - (-2018) = 4035

22) [정답] ⑤

[해설]
$$f(x) = -\frac{1}{24}x(x-12)(x-24) + 3000$$
라 하면
$$f(x) = -\frac{1}{24}x(x^2 - 36x + 12 \cdot 24) + 3000$$
$$= -\frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x + 3000$$
$$f'(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 3x - 12$$
오전 10시일 때, 전력사용량의 순간변화율은
$$P = f'(10) = -\frac{1}{8} \cdot 100 + 30 - 12 = -\frac{100}{8} + 18 = \frac{11}{2}$$
$$\therefore 4P = 4 \times \frac{11}{2} = 22$$

23) [정답] ④

(나)에서
$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4}f'(2) = 8$$
 이므로 $f'(2) = 32$
$$f(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$$
에서 $f'(x) = 6x^2 + 2x + a$ 즉 $24 + 4 + a = 32$ 이므로 $a = 4$ (다)에서 $f(0) = 1$ 이므로 $b = 1$ 따라서 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ 이므로 $f(1) = 2 + 1 + 4 + 1 = 8$

[해설] (가)에서 $f(x)=2x^3+x^2+ax+b$ 라 할 수 있다.

24) [정답] ①

[해설] (나)에서
$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} = 3$$
이므로 $f(2) = g(2)$ 이고

$$\begin{split} &\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-g(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)+g(2)-g(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} - \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \\ &= f'(2)-g'(2) = 3 \\ (7)의 식에서 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $g(2)=8f(2)+7$ $7f(2)=-7$ $\therefore f(2)=g(2)=-1$ $g(x)=x^3f(x)+7$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$ 위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $g'(2)=12f(2)+8f'(2)$ $g'(2)=-12+8\{g'(2)+3\}$ $7g'(2)=-12$ $\therefore g'(2)=-\frac{12}{7}$$$

25) [정답] ②

[해설]
$$f(x) = (x^3 - 1)(3x + 4)$$
에서
$$f'(x) = 3x^2(3x + 4) + 3(x^3 - 1)$$
$$\therefore f'(-1) = 3(-3 + 4) + 3(-1 - 1) = 3 - 6 = -3$$