01 삼차방정식 $x^3=1,\ x^3=-1$의 허근의 성질

(1) 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면

① $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1,\ \omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(2) 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라고 하면

① $\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1,\ \omega^2=-\overline{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}$

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

◪ 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

1. ω^3

2. ω^9

3. ω^{123}

4. $\omega^4+\omega^2+1$

5. $\omega^2+\omega+1$

6. $\omega+\omega^3+\omega^5$

7. $\omega+\omega^2+\omega^3$

8. $\omega+\overline{\omega}$

9. $\omega\overline{\omega}$

10. $\omega+\dfrac{1}{\omega}$

11. $\omega^{20}+\omega^{10}+1$

12. $\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$

13. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\cdots+\omega^{12}$

14. $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\overline{\omega}}$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

15. $\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}$

16. $(1+\omega)(1+\omega^2)$

17. $\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}$

18. $1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega^3}+\dfrac{1}{\omega^4}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^8}$

19. $\omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}$

20. $\omega+\dfrac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

21. $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega^3}-\dfrac{1}{\omega^4}-\dfrac{1}{\omega^5}-\dfrac{1}{\omega^6}$

22. $\omega+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}$

23. $\dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}$

24. $\dfrac{\omega^2+1}{\omega+1}+\dfrac{\omega+1}{\omega^2+1}$

25. $\omega^{100}+\omega^{50}+1$

26. $\omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}$

27. $\dfrac{\omega^2}{\omega+1}+\dfrac{\omega+1}{\omega^2}$

28. $\omega^7+\dfrac{1}{\omega^7}$

29. $\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^{30}+1}$

30. $(1+\omega)^3+(1+\omega^2)^3$

31. $1+\omega+\omega^5$

32. $\omega^{20}+(\overline{\omega})^{20}$

33. $\dfrac{1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{100}}{\omega^5}$

34. $(\omega+1)(\overline{\omega}+1)$

35. $\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}$

36. $1+\omega^4+\omega^8$

37. $\omega+\dfrac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

38. $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$

39. $\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}^2}{1+\overline{\omega}^2}$

40. $\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\left(\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}\right)+\cdots+\left(\omega^{11}+\dfrac{1}{\omega^{11}}\right)$

41. $1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$

42. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2014}+\omega^{2015}$

43. $1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}+\cdots+\omega^{100}$

44. $\dfrac{1}{\omega}\{1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\cdots+\omega^{92}\}$

45. $\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^{2016}+1}$

◪ 삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

46. ω^3

47. ω^{18}

48. $\omega+\overline{\omega}$

49. $\omega\overline{\omega}$

50. $\omega^3-(\omega^2-\omega)$

51. $\omega+\dfrac{1}{\omega}$

52. $\dfrac{1-\omega}{\omega^2}+\dfrac{1+\omega^2}{\omega}$

53. $\dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}$

54. $\omega^{10}-\omega^5+1$

55. $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}$

56. $(1-\omega)(1+\omega^2)$

57. $\omega^2-\omega+1$

58. $\omega^{20}+\omega^{10}+1$

59. $\dfrac{\overline{\omega}-1}{\omega}+\dfrac{\omega-1}{\overline{\omega}}$

60. $\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$

61. $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5+\omega^6$

62. ω^{123}

63. $\dfrac{\omega^2}{1-\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+(\overline{\omega})^2}=-2$

64. $\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}$

65. $\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}+\dfrac{\omega}{\overline{\omega}}$

66. $\omega+\dfrac{1}{\omega}+\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}$

67. $\omega^5+\omega^3+\omega+1$

68. $\omega^{2015}+(\overline{\omega})^{2015}$

69. $\omega+\overline{\omega}+\omega^2+(\overline{\omega})^2$

70. $\dfrac{\omega}{1-\overline{\omega}}+\dfrac{\overline{\omega}+\omega^5}{\omega-1}$

정답 및 해설

1) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^3=1$

2) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$\omega^9=(\omega^3)^3=1^3=1$

3) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^{123}=(\omega^3)^{41}=1$

4) 0

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1=\omega^2+\omega+1=0$

5) 0

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^2+\omega+1=0$

6) 0

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$\omega+\omega^3+\omega^5=\omega+\omega^3+\omega^3\cdot\omega^2=1+\omega+\omega^2=0$

7) 0

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\omega+\omega^2+\omega^3=\omega(1+\omega+\omega^2)=0$

8) -1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega+\overline{\omega}=-1$

9) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega\overline{\omega}=1$

10) -1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=\omega+\overline{\omega}=-1$

11) 0

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^{20}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2+\omega+1=0$

12) 0

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$
$=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)=0(\because \omega^2+\omega+1=0)$

13) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{12}$
$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{12}$
$=\omega^{12}=(\omega^3)^4=1$

14) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로

근과 계수의 관계에 의해 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$$
$$=\frac{2-(-1)}{1-(-1)+1}=1$$

15) -1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0, \omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1$

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\overline{\omega}^2}=\frac{\omega^2+\overline{\omega}^2}{\omega^2\overline{\omega}^2}=\frac{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}}{1^2}$$
$$=(-1)^2-2=-1$$

16) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$$(1+\omega)(1+\omega^2)=1+\omega^2+\omega+\omega^3$$
$$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3=1$$

17) -1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$$\omega^{10}+\frac{1}{\omega^{10}}=(\omega^3)^3\cdot\omega+\frac{1}{(\omega^3)^3\cdot\omega}=\omega+\frac{1}{\omega}$$
$$=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

18) 0

⇨ $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이때, $1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2}=0$이므로

$$1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^8}$$
$$=\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^6}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)$$
$$=0$$

19) -1

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1$

$$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

20) -2

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1$

$$\omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=-1+(-1)=-2$$

21) 0

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1$

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}-\frac{1}{\omega^4}-\frac{1}{\omega^5}-\frac{1}{\omega^6}$$
$$=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}-\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)=0$$

22) -1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이다. 따라서 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\omega+\overline{\omega}=-1$이

고, 두 근의 곱은 $\omega\overline{\omega}=1$이다.

또, $\omega^3=1$이고 $\omega^2=\overline{\omega}$을 만족시킨다.

$\overline{\omega^2}=\overline{\overline{\omega}}=\omega$이고 $\omega^2+\omega+1=0(\omega\neq0)$이므로

$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0$에서 $\omega+\frac{1}{\omega}=-1$이다.

$$\therefore\ \omega+\frac{1}{\overline{\omega^2}}=\omega+\frac{1}{\omega}=-1$$

23) 1

⇨ $x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이다. 따라서 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\omega+\overline{\omega}=-1$이

고, 두 근의 곱은 $\omega\overline{\omega}=1$이다.

또, $\omega^3=1$이고 $\omega^2=\overline{\omega}$을 만족시킨다.

$$\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\overline{\omega}}=\frac{2+\omega+\overline{\omega}}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}=1$$

24) -1

⇨ $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 ω, $\overline{\omega}$는 $x^2+x+1=0$의

두 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$ 이다.

또, $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega^2+1}{\omega+1}+\frac{\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{-\omega}{-\omega^2}+\frac{-\omega^2}{-\omega}$$
$$=\frac{1}{\omega}+\omega=\frac{1+\omega^2}{\omega}$$
$$=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

25) 0

⇨ $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω, $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$. $\omega\overline{\omega}=1$ 이다.

$\omega^{100}+\omega^{50}+1=(\omega^3)^{33}\omega+(\omega^3)^{16}\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

26) -1

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이다.

$$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

27) -2

⇨ $x^3=1$의 한 허근은 ω이므로 $\omega^3=1$

또, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

$$\frac{\omega^2}{\omega+1}+\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-2$$

28) -1

⇨ $x^3=1$의 한 허근은 ω이므로 $\omega^3=1$

또, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

$$\omega^7+\frac{1}{\omega^7}=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

29) 15

⇨ $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\frac{1}{\omega^{30}+1}$$
$$=\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)\times 10$$
$$=\left(-\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\times 10=\left(\frac{-1-\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}\right)\times 10$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times 10=10+5=15$$

30) -2

⇨ $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$(1+\omega)^3+(1+\omega^2)^3=(-\omega^2)^3+(-\omega)^3$$
$$=-\omega^6-\omega^3$$
$$=-1-1=-2$$

31) 0

⇨ $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이므로

$1+\omega+\omega^5=1+\omega+\omega^2=0$

32) -1

⇨ $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\omega^{20}+(\overline{\omega})^{20}=\omega^2+\overline{\omega}^2$$
$$=-1-\omega-1-\overline{\omega}$$
$$=-2-(\omega+\overline{\omega})$$
$$=-2+1=-1$$

33) -1

⇨ $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\frac{1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{100}}{\omega^5}$$
$$=\frac{(1+\omega+\omega^2)+\cdots+(\omega^{96}+\omega^{97}+\omega^{98})+\omega^{99}+\omega^{100}}{\omega^5}$$
$$=\omega^{94}+\omega^{95}$$
$$=\omega+\omega^2=-1$$

34) 1

⇨ $x^3=1$이면 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이므로

$\omega\overline{\omega}=1$이다. 따라서

$(\omega+1)(\overline{\omega}+1)=(-\omega^2)\cdot(-\overline{\omega}^2)=\omega^2\overline{\omega}^2=1$

35) -2

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=-2$$

36) 0

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$에서

$1+\omega^4+\omega^8=1+\omega+\omega^2=0$

37) -2

⇨ $x^3-1=(x+1)(x^2+x+1)=0$에서 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore\ \omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=(\omega+\overline{\omega})+\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$$
$$=-1+\frac{-1}{1}=-2$$

38) -1

⇨ $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

39) 1

⇨ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 ω는 허근이므로 $x^2+x+1=0$의 한 근이고

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이다.

$\omega^2+\omega+1=0$, $(\overline{\omega})^2+\overline{\omega}+1=0$

$\therefore \frac{\omega^2}{1+\omega^2}+\frac{(\overline{\omega})^2}{1+(\overline{\omega})^2}=\frac{\omega^2}{-\omega}+\frac{(\overline{\omega})^2}{-\overline{\omega}}=-\omega-\overline{\omega}=1$

40) -2

⇨ $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)+\cdots+\left(\omega^{11}+\frac{1}{\omega^{11}}\right)$

$=\left(\frac{\omega^2+1}{\omega}\right)+\left(\frac{\omega^4+1}{\omega^2}\right)+(1+1)+\left(\frac{\omega^8+1}{\omega^4}\right)+\cdots+\left(\frac{\omega^{22}+1}{\omega^{11}}\right)$

$=\left(\frac{\omega^2+1}{\omega}\right)+\left(\frac{\omega+1}{\omega^2}\right)+2+\left(\frac{\omega^2+1}{\omega}\right)+\cdots+\left(\frac{\omega+1}{\omega^2}\right)$

$=\frac{-\omega}{\omega}+\frac{-\omega^2}{\omega^2}+2+\frac{-\omega}{\omega}+\cdots+\frac{-\omega^2}{\omega^2}$

$=(-1)+(-1)+2+(-1)+\cdots+(-1)$

$=-2$

41) 0

⇨ $x^3=1$이면 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이므로

$1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2}=0$이다.

42) 0

⇨ $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 $x^3-1=0$ 의 한 허근 ω는 다음을 만족한다.

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

그리고 $x^2+x+1=0$ 의 두 허근이 ω , $\overline{\omega}$ 이므로

근과 계수와의 관계에 의하여

두 근의 합 : $\omega+\overline{\omega}=-1$

두 근의 곱 : $\omega\overline{\omega}=1$

$1+\omega+\omega^2=\omega^3+\omega^4+\omega^5=\cdots=\omega^{2013}+\omega^{2014}+\omega^{2015}=0$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{2014}+\omega^{2015}=0$

43) 0

⇨ $\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ 이다.

$1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}+\cdots+\omega^{98}+\omega^{100}$

$=1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+\cdots+1+\omega^2+\omega$

$=(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+\cdots+(1+\omega^2+\omega)$

$=0$

44) -1

⇨ $x^3=1$

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\omega=\omega^4=\omega^{10}=\cdots=\omega^{88}$

$\omega^2=\omega^8=\cdots=\omega^{92}$

$1=\omega^6=\omega^{12}=\cdots=\omega^{90}$

$\therefore 1+\omega^2+\omega^4=\omega^6+\omega^8+\omega^{10}=\cdots=\omega^{84}+\omega^{86}+\omega^{88}=0$

$\frac{1}{\omega}(1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\cdots+\omega^{92})$

$=\frac{1}{\omega}(\omega^{90}+\omega^{92})$

$=\frac{1}{\omega}(1+\omega^2)$

$=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

45) 1008

⇨ $x^3-1=0$이므로 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이다.

따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이다.

$\therefore \frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\frac{1}{\omega^{2016}+1}$

$=\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)\times 672$

$=\left(\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{2}\right)\times 672$

$=\frac{3}{2}\times 672=1008$

46) -1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^3=-1$

47) 1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\omega^{18}=(\omega^3)^6=(-1)^6=1$

48) 1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega+\overline{\omega}=1$

49) 1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega\overline{\omega}=1$

50) 0

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\omega^3-(\omega^2-\omega)=\omega(\omega^2-\omega+1)=0$

51) 1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=\omega+\overline{\omega}=1$

52) 0

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\dfrac{1-\omega}{\omega^2}+\dfrac{1+\omega^2}{\omega}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}+\dfrac{\omega}{\omega}=(-1)+1=0$

53) 1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\omega+\overline{\omega}=1, \omega\overline{\omega}=1$

$$\dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}=\dfrac{1+\omega+1+\overline{\omega}}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}$$
$$=\dfrac{2+(\omega+\overline{\omega})}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\dfrac{2+1}{1+1+1}=1$$

54) 0

⇨ $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$

$$\omega^{10}-\omega^5+1=(\omega^3)^3\cdot\omega-\omega^3\cdot\omega^2+1$$
$$=\omega^2-\omega+1=0$$

55) -1

⇨ $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

56) 1

⇨ $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$

$$(1-\omega)(1+\omega^2)=1+\omega^2-\omega-\omega^3$$
$$=(\omega^2-\omega+1)-\omega^3=1$$

57) 0

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^2-\omega+1=0$

58) 0

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^{20}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1=\omega^2-\omega+1=0$

59) -2

⇨ $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$의 두 허근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$

또, 근과 계수의 관계에 의해

$\omega+\overline{\omega}=1, \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{\overline{\omega}-1}{\omega}+\dfrac{\omega-1}{\overline{\omega}}=\dfrac{\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+\omega^2-\omega}{\omega\overline{\omega}}=\dfrac{(-1)+(-1)}{1}=-2$

[다른 풀이]

$\omega+\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}-1=-\omega$, $\omega-1=-\overline{\omega}$

$\therefore \dfrac{\overline{\omega}-1}{\omega}+\dfrac{\omega-1}{\overline{\omega}}=\dfrac{-\omega}{\omega}+\dfrac{-\overline{\omega}}{\overline{\omega}}=-1-1=-2$

60) 0

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$
$=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)$
$=-(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)=0$

61) 1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5+\omega^6$
$=(1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)+\omega^6$
$=\omega^6=(\omega^3)^2=(-1)^2=1$

62) -1

⇨ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\omega, \overline{\omega}$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^{123}=(\omega^3)^{41}=(-1)^{41}=-1$

63) 1

⇨ 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$

또, $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^2-\omega+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$이므로

$\dfrac{\omega^2}{1-\omega}=\dfrac{\omega-1}{1-\omega}=-1$

$\dfrac{\overline{\omega}}{1+(\overline{\omega})^2}=\dfrac{1-\omega}{1+(1-\omega)^2}$

$=\dfrac{1-\omega}{(\omega^2-\omega+1)-\omega+1}=\dfrac{1-\omega}{-\omega+1}=1$

64) -1

⇨ $x^3+1=0$ 이므로 $x^2-x+1=0$

$\therefore \omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}=\omega^2-\omega+1+\omega^2-\omega$

$=2\omega^2-2\omega+1$

$=2(\omega^2-\omega)+1$

$=-1$

65) -1

⇨ $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

ω , $\overline{\omega}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 두 근이 된다.

근과 계수와의 관계에 의하면

두 근의 합 : $\omega+\overline{\omega}=1$

두 근의 곱 : $\omega\overline{\omega}=1$

이다.

$\therefore \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}+\dfrac{\omega}{\overline{\omega}}=\dfrac{\overline{\omega}^2+\omega^2}{\omega\overline{\omega}}$

$=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}$

$=1-2=-1$

66) -1

⇨ $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\omega+\dfrac{1}{\omega}+\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}\right)$

$=\left(\dfrac{\omega^2+1}{\omega}\right)+(-1-1)$

$=\dfrac{\omega}{\omega}-2$

$=1-2=-1$

67) 1

⇨ $x^3=-1$

$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^5+\omega^3+\omega+1=-\omega^2-1+\omega+1$

$=-(\omega^2-\omega+1)+1=1$

68) 1

⇨ $x^3=-1$

$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\omega^{2015}=(\omega^3)^{671}\times\omega^2=-\omega^2$

$(\overline{\omega})^{2015}=\{(\overline{\omega})^3\}^{671}\times(\overline{\omega})^2=-(\overline{\omega})^2$

ω와 $\overline{\omega}$는 $x^2-x+1=0$의 두 근 이므로

근과 계수와의 관계에 의하여

두 근의 합 : $\omega+\overline{\omega}=1$

두 근의 곱 : $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega^{2015}+(\overline{\omega})^{2015}=-\omega^2-(\overline{\omega})^2$

$=-\{\omega^2+(\overline{\omega})^2\}$

$=-\{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}\}$

$=-(1-2)$

$=1$

69) 0

⇨ $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ 이고 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned}\omega+\overline{\omega}+\omega^2+(\overline{\omega})^2&=\omega+\omega^2+\overline{\omega}+(\overline{\omega})^2\\&=\omega+(\omega-1)+\overline{\omega}+(\overline{\omega}-1)\\&=-2+2(\omega+\overline{\omega})\\&=-2+2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\\&=-2+2=0\end{aligned}$$

70) -1

⇨ $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$\omega\overline{\omega}=1, \omega+\overline{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{1-\overline{\omega}}+\frac{\overline{\omega}+\omega^5}{\omega-1}&=\frac{\omega}{-\overline{\omega}^2}+\frac{\overline{\omega}+\omega^5}{\omega^2}\\&=\frac{\omega}{-\overline{\omega}^2}+\frac{\overline{\omega}}{\omega^2}+\omega^3\\&=\frac{\omega^3-\overline{\omega}^3}{-(\omega\overline{\omega})^2}+\omega^3\\&=\frac{-1+1}{-1}-1=-1\end{aligned}$$