01 세 변의 길이에 따른 삼각형의 모양

주어진 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 모양을 결정할 때에는 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 세 변의 길이를 각각 구한다.

(1) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c(c가 가장 긴 변)라고 할 때,

① $a=b=c$이면 정삼각형

② $a^2+b^2=c^2$이면 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

③ $a=b$(또는 $b=c$ 또는 $c=a$)이면 이등변삼각형

(2) 삼각형 ABC에서

① $\angle B<90^\circ \Leftrightarrow \overline{AB}^2+\overline{BC}^2>\overline{CA}^2$

② $\angle B=90^\circ \Leftrightarrow \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

③ $\angle B>90^\circ \Leftrightarrow \overline{AB}^2+\overline{BC}^2<\overline{CA}^2$

◪ **세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 모양을 다음 순서에 따라 구하여라.**

1. $A(-1,-3), B(-3,1), C(4,2)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

2. $A(0,2), B(-5,-1), C(3,-3)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

3. $A(-1,1), B(1,0), C(2,3)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

4. $A(3,5), B(0,2), C(7,1)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

5. $A(2,3), B(-1,-1), C(6,0)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

6. $A(3,-1), B(1,1), C(0,0)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

7. $A(-2,\ -1), B(1,3), C(3,\ -1)$

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\overline{BC}$의 길이

(3) $\overline{CA}$의 길이

(4) 삼각형 ABC의 모양

◪ 다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 모양을 말하여라.

8. $A(1,2), B(-1,\ -2), C(5,0)$

9. $A(1,\ 0),\ B(-1,\ 4),\ C(3,\ 1)$

10. $A(-1,-3),\ B(1,2),\ C(4,-1)$

11. $A(4,1), B(1,\ -1), C(1,3)$

12. $A(1,\ 5),\ B(-2,\ 3),\ C(-4,\ 6)$

13. $A(2,\ 3),\ B(-1,\ -1),\ C(6,\ 0)$

14. $A(-2,\ 1),\ B(4,\ 5),\ C(3,\ 0)$

15. $A(2,2), B(-4,\ -1), C(4,\ -2)$

16. $A(5,\ -1),\ B(-1,\ 2),\ C(2,\ 8)$

17. $A(1,\ 1),\ B(-1,\ 5),\ C(3,\ 2)$

02 삼각형의 모양을 이용하여 미지수 구하기

$\triangle ABC$의 세 변의 길이 a, b, c

(c가 가장 긴 변의 길이)에 대하여

(1) $a=b=c$ ⇨ 정삼각형

(2) $a=b$ ⇨ $a=b$인 이등변삼각형

(3) $a^2+b^2=c^2$ ⇨ $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형

◪ 다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, x, y의 값 또는 a, b의 값을 구하여라. (단, a, b는 양수)

18. $A(1,2), B(-1,\ -2), C(x,y)$

19. $A(1,\ -1), B(-1,1), C(a,b)$

20. $A(0,0), B(2,4), C(x,y)$

◪ 다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형일 때, 상수 k의 값 또는 a의 값을 구하여라. (단, a는 양수이다.)

21. $A(-1,1), B(3,3), C(k,-3)$

22. $A(1,-1), B(-1,a), C(5,3)$

23. $A(0,a), B(4,2), C(-2,0)$

24. $A(a,1), B(-1,2), C(3,4)$

25. $A(-3,-2), B(0,2), C(1,k)$

26. $\mathrm{A}(0,\ 0),\ \mathrm{B}(3,\ 1),\ \mathrm{C}(1,\ k)$

◪ 다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 $\angle B=\angle C$인 이등변삼각형일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

27. $A(-1,1), B(3,4), C(2,k)$

28. $A(4,2), B(k,1), C(3,7)$

◪ 다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 이등변삼각형일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

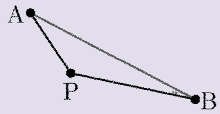
29. $\mathrm{A}(-4,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ -2),\ \mathrm{C}(5,\ a)$ (단, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$)

30. $\mathrm{A}(1,\ -3),\ \mathrm{B}(4,\ 4),\ \mathrm{C}(-1,\ a)$ (단, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$)

03 선분의 길이의 합의 최솟값

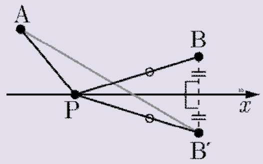
(1) 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여

⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$



(2) 두 점 A, B가 모두 x축 위쪽에 있을 때, x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구할 때는

⇨ 점 B의 x축에 대한 대칭점 B'을 구한 후, $\overline{AP}+\overline{PB'}$의 최솟값을 구한다.



◪ 두 점 A, B와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

31. $A(-2,3), B(4,-1)$

32. $A(-1,2), B(3,4)$

33. $A(1,3), B(4,1)$

34. $A(3,2), B(6,4)$

35. $A(-1,1), B(4,4)$

36. $A(5,2), B(-3,-2)$

37. $A(2,-4), B(5,-2)$

38. $A(3,-4), B(-2,1)$

◪ **두 점 A, B와 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.**

39. $A(-1,-3), B(-3,-5)$

40. $A(-3,1), B(1,5)$

41. $A(3,-1), B(-1,-4)$

42. $A(2,1), B(3,4)$

43. $A(4,2), B(1,7)$

44. $A(5,1), B(1,9)$

45. $A(-3,2), B(3,-4)$

04 거리의 제곱의 합의 최솟값

(1) $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값

⇨ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 이차함수의 최솟값을 이용한다.

<참고> $a>0$일 때, $y=a(x-p)^2+q$는 $x=p$에서 최솟값 q를 가진다.

(2) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값

⇨ 점 P의 좌표를 (x,y)라 하고 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 식을 x, y의 완전제곱식으로 나타내어 최솟값을 구한다.

<참고> 좌표평면 위의 세 점 A, B, C와 임의의 점 $P(x,y)$에 대하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(x-a)^2+(y-b)^2+c$

의 꼴로 나타낼 때

⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 c이다.

이때, 점 P의 좌표는 (a,b)이다.

◪ **다음의 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.**

46. $A(1,5), B(5,3)$

47. $A(4,2), B(2,6)$

48. $A(3,0), B(5,-2)$

◪ 두 점 A, B와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값을 구하여라.

49. $A(-1,5), B(3,1)$

50. $\mathrm{A}(1,\ 2),\ \mathrm{B}(5,\ 3)$

51. $\mathrm{A}(-2,\ 3),\ \mathrm{B}(4,\ 6)$

52. $A(-2,4), B(5,-2)$

53. $A(0,\ 1),\ B(4,\ 3)$

◪ 두 점 A, B와 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값을 구하여라.

54. $A(1,0), B(3,-2)$

55. $\mathrm{A}(3,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ 5)$

56. $A(1,0), B(3,4)$

◪ 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값과 그때의 점 P의 좌표를 구하여라.

57. $A(1,2), B(5,4)$

58. $A(0,3), B(4,-1)$

59. $A(-1,2), B(3,4)$

60. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1),\ \mathrm{B}(-1,\ 5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 직선 $y=x+3$ 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

◪ 다음의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 점 P가 있을 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

61. $A(-1,2), B(4,6), C(0,1)$

62. $A(1,1), B(6,2), C(5,6)$

63. $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 6)$

64. $A(2,2), B(0,3), C(4,4)$

65. $A(2,6), B(0,2), C(4,-2)$

66. $A(0,\ 0)$, $B(6,\ 0)$, $C(3,\ 3\sqrt{3})$

정답 및 해설

1) (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $5\sqrt{2}$ (4) 이등변삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-3+1)^2+(1+3)^2}$
$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{(4+3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{(4+1)^2+(2+3)^2}$
$=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

(4) $\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 이등변삼각형

2) (1) $\sqrt{34}$ (2) $2\sqrt{17}$ (3) $\sqrt{34}$
(4) $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{5^2+(2+1)^2}$
$=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{(3+5)^2+(-3+1)^2}$
$=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{3^2+(-3-2)^2}$
$=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

(4) $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이고 $\overline{AB}=\overline{CA}$이므로
$\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형

3) (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{10}$ (3) $\sqrt{13}$ (4) 예각삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{(2-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

(4) $\overline{CA}^2<\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로 예각삼각형

4) (1) $3\sqrt{2}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $4\sqrt{2}$
(4) $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{7^2+(1-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{(3-7)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

(4) $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로 $\triangle ABC$는
$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

5) (1) 5 (2) $5\sqrt{2}$ (3) 5
(4) $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25}=5$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{(6+1)^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{(2-6)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

(4) $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이고 $\overline{AB}=\overline{CA}$이므로
$\triangle ABC$는 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

6) (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{10}$
(4) $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

(4) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 $\angle B=90^\circ$인
직각삼각형

7) (1) 5 (2) $2\sqrt{5}$ (3) 5
(4) $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

⇨ (1) $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(3) $\overline{CA}=\sqrt{(-2-3)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{25}=5$

(4) $\overline{AB}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인
이등변삼각형이다.

8) $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5+1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이고 $\overline{AB}=\overline{CA}$이므로
$\triangle ABC$는 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

9) $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3+1)^2+(1-4)^2}=5$

$\overline{CA}=\sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로 $\triangle ABC$는
$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

10) $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$
$\overline{AC}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$
$\overline{BC}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$

$\overline{AB}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인
이등변삼각형이다.

11) $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\sqrt{(1-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{16}=4$

$\overline{CA}=\sqrt{(4-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$

$\overline{AB}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인
이등변삼각형이다.

12) $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2+4)^2+(3-6)^2}=\sqrt{13}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1+4)^2+(5-6)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle B=90^\circ$인
직각이등변삼각형이다.

13) $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-6)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-6)^2+(3-0)^2}=\sqrt{25}=5$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$, $\overline{AB} = \overline{CA}$이므로
$\triangle ABC$는 $\angle A = 90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

14) $\angle C = 90^\circ$인 직각이등변삼각형
⇨ $\overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2+(5-0)^2} = \sqrt{26}$
$\overline{CA} = \sqrt{(3+2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{26}$
$\overline{BC} = \overline{CA}$, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$이므로
$\triangle ABC$는 $\angle C = 90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

15) $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형
⇨ $\overline{AB} = \sqrt{(2+4)^2+(2+1)^2} = 3\sqrt{5}$
$\overline{BC} = \sqrt{(4+4)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{65}$
$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2+(-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이므로 $\triangle ABC$는
$\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형이다.

16) $\angle B = 90^\circ$인 직각이등변삼각형
⇨ $\overline{AB} = \sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
$\overline{AC} = \sqrt{(5-2)^2+(-1-8)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
$\overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
$\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$이므로
$\triangle ABC$는 $\angle B = 90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

17) $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형
⇨ $\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2+(1-5)^2} = 2\sqrt{5}$
$\overline{BC} = \sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2} = 5$
$\overline{CA} = \sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이므로 $\triangle ABC$는
$\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형이다.

18) $y = \pm\sqrt{3}, x = \mp 2\sqrt{3}$(복부호동순)
⇨ $\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$이므로
$(-1-1)^2+(-2-2)^2 = (x+1)^2+(y+2)^2$
$\therefore x^2+2x+y^2+4y = 15$ ⋯ ㉠
$\overline{AB} = \overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2$이므로
$(-1-1)^2+(-2-2)^2 = (x-1)^2+(y-2)^2$
$\therefore x^2-2x+y^2-4y = 15$ ⋯ ㉡
㉠－㉡을 하면
$4x+8y = 0 \quad \therefore x = -2y$
이것을 ㉠에 대입하면
$4y^2-4y+y^2+4y = 15$, $y^2 = 3$
$\therefore y = \pm\sqrt{3}, x = \mp 2\sqrt{3}$(복부호동순)

19) $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}$
⇨ $\triangle ABC$가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
(ⅰ) $\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$이므로
$(-1-1)^2+(1+1)^2 = (a+1)^2+(b-1)^2$
$8 = a^2+2a+1+b^2-2b+1$
$\therefore a^2+2a+b^2-2b-6 = 0$ ⋯ ㉠
(ⅱ) $\overline{BC} = \overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$이므로
$(a+1)^2+(b-1)^2 = (1-a)^2+(-1-b)^2$
$a^2+2a+1+b^2-2b+1 = 1-2a+a^2+1+2b+b^2$
$4a-4b = 0 \quad \therefore b = a$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+2a+a^2-2a-6 = 0$
$a^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3}\,(\because a > 0)$
$\therefore a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}$

20) $y = 2\pm\sqrt{3}, x = 1\mp 2\sqrt{3}$(복부호동순)
⇨ $\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$이므로
$2^2+4^2 = (x-2)^2+(y-4)^2$
$\therefore x^2+y^2-4x-8y = 0$ ⋯ ㉠
$\overline{AB} = \overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2$이므로
$2^2+4^2 = x^2+y^2$
$\therefore x^2+y^2 = 20$ ⋯ ㉡
㉠－㉡을 하면
$-4x-8y = -20$
$\therefore x+2y = 5$ ⋯ ㉢
㉢에서 $x = 5-2y$를 ㉡에 대입하면
$(5-2y)^2+y^2 = 20$, $25-20y+4y^2+y^2 = 20$
⇨ $5y^2-20y+5 = 0$, $y^2-4y+1 = 0$
$\therefore y = 2\pm\sqrt{3}, x = 1\mp 2\sqrt{3}$(복부호동순)

21) 1
⇨ $\triangle ABC$가 $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$
$\overline{AB}^2 = (3+1)^2+(3-1)^2 = 20$
$\overline{CA}^2 = (-1-k)^2+(1+3)^2 = k^2+2k+17$
$\overline{BC}^2 = (k-3)^2+(-3-3)^2 = k^2-6k+45$
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$이므로
$20+k^2+2k+17 = k^2-6k+45, 8k = 8 \quad \therefore k = 1$

22) 1
⇨ $\overline{AB}^2 = (-1-1)^2+(a+1)^2 = a^2+2a+5$
$\overline{AC}^2 = (5-1)^2+(3+1)^2 = 32$
$\overline{BC}^2 = (5+1)^2+(3-a)^2 = a^2-6a+45$
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이므로
$a^2+2a+5+32 = a^2-6a+45$
$8a = 8 \quad \therefore a = 1$

23) 4
⇨ $\overline{AB}^2 = 4^2+(2-a)^2 = a^2-4a+20$
$\overline{AC}^2 = 2^2+a^2 = a^2+4$
$\overline{BC}^2 = (4+2)^2+2^2 = 40$
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이므로
$a^2-4a+20+a^2+4 = 40$
$2a^2-4a-16 = 0$
$a^2-2a-8 = 0$

$(a-4)(a+2)=0$
그런데 $a>0$이므로 $a=4$

24) 2
⇨ $\overline{AB}^2=(-1-a)^2+(2-1)^2=a^2+2a+2$
$\overline{AC}^2=(3-a)^2+(4-1)^2=a^2-6a+18$
$\overline{BC}^2=(3+1)^2+(4-2)^2=20$
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로
$a^2+2a+2+a^2-6a+18=20$
$2a^2-4a=0$
$2a(a-2)=0$
그런데 $a>0$이므로 $a=2$

25) -5
⇨ $\triangle ABC$가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$
$\overline{AB}^2=3^2+(2+2)^2=25$
$\overline{CA}^2=(-3-1)^2+(-2-k)^2=k^2+4k+20$
$\overline{BC}^2=1^2+(k-2)^2=k^2-4k+5$
$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로
$25+k^2+4k+20=k^2-4k+5, 8k=-40 \quad \therefore k=-5$

26) -3
⇨ $\angle$A가 직각이면 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 직선 AC의 기울기는 -3이고,
A$(0,0)$이므로 직선 AC의 방정식은 $y=-3x$이다.
따라서 점 C는 직선 $y=-3x$ 위에 점이므로
C$(1,k)=$C$(1,-3)$이다.
$\therefore\ k=-3$

27) 5
⇨ $\triangle ABC$가 $\angle B=\angle C$인 이등변삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로
$(3+1)^2+(4-1)^2=(2+1)^2+(k-1)^2$
$25=k^2-2k+10, k^2-2k-15=0$
$(k+3)(k-5)=0 \quad \therefore k=5(\because k>0)$

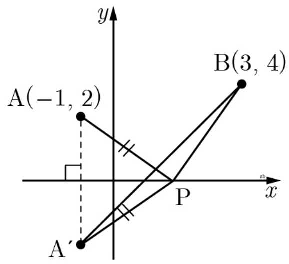
28) 9
⇨ $\triangle ABC$가 $\angle B=\angle C$인 이등변삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로
$(k-4)^2+(1-2)^2=(3-4)^2+(7-2)^2$
$k^2-8k+17=26, k^2-8k-9=0$
$(k+1)(k-9)=0 \quad \therefore k=9(\because k>0)$

29) 4
⇨ $\triangle ABC$가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로
$\sqrt{(-4-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{(2-5)^2+(-2-a)^2}$
양변을 제곱하면
$36+9=9+a^2+4a+4$
$a^2+4a-32=0$
$(a+8)(a-4)=0$
$a=-8$ 또는 $a=4$
$a>0$이므로 $a=4$

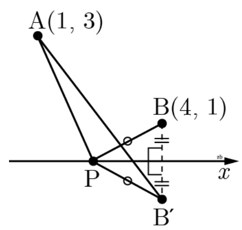
30) 2
⇨ $\triangle ABC$가 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$인 이등변삼각형이므로
$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$
$\overline{BC}^2=(4-(-1))^2+(4-a)^2=25+16-8a+a^2$
$\quad=41-8a+a^2$
$\overline{CA}^2=(1-(-1))^2+(-3-a)^2=4+9+6a+a^2$
이므로 $41-8a+a^2=13+6a+a^2,\ 28=14a$
$\therefore a=2$

31) $2\sqrt{13}$
⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}$
$\quad=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$
따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다.

32) $2\sqrt{13}$
⇨ 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면
$A'(-1,-2)$
이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$
$\quad\ge\overline{A'B}$
$\quad=\sqrt{(3+1)^2+(4+2)^2}$
$\quad=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$



33) 5
⇨ 다음 그림과 같이 점 B의 x축에 대한 대칭점을 B'이라 하면



$B'(4,-1)$
이때, $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$
$\quad\ge\overline{AB'}=5$
따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 5이다.

34) $3\sqrt{5}$
⇨ 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면

$A'(3, -2)$

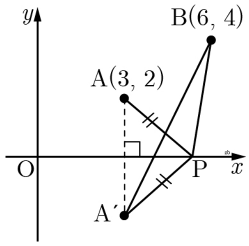
이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(6-3)^2+(4+2)^2}$

$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$



35) $5\sqrt{2}$

⇨ 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면

$A'(-1,-1)$

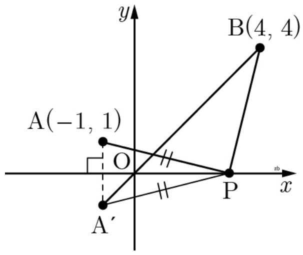
이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(4+1)^2+(4+1)^2}$

$=5\sqrt{2}$



따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

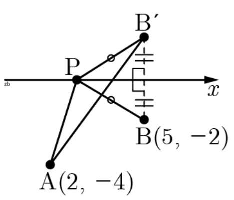
36) $4\sqrt{5}$

⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq \overline{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+(-2-2)^2}$

$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다.

37) $3\sqrt{5}$

⇨ 

점 B의 x축에 대한 대칭점을 B'이라 하면 $B'(5,2)$

이때 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq \overline{AB'}$

$=\sqrt{(5-2)^2+(2+4)^2}$

$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

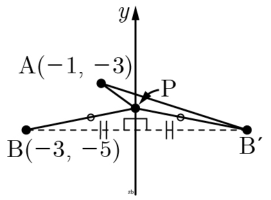
38) $5\sqrt{2}$

⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq \overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(1+4)^2}$

$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

39) $2\sqrt{5}$

⇨ 

점 B의 y축에 대한 대칭점을 B'이라 하면

$B'(3,-5)$

이때, $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq \overline{AB'}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(-5+3)^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

40) $4\sqrt{2}$

⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq \overline{AB}=\sqrt{(1+3)^2+(5-1)^2}$

$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

41) 5

⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq \overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(-4+1)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 5이다.

42) $\sqrt{34}$

⇨ 점 B와 y축에 대하여 대칭인 점을 B'이라고 하면

$B'(-3,4)$

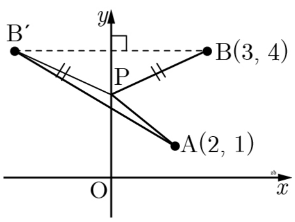
이때, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}$

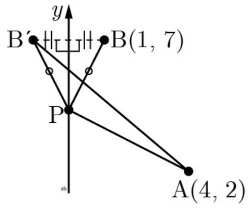
$=\sqrt{(2+3)^2+(1-4)^2}$

$=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\sqrt{34}$이다.

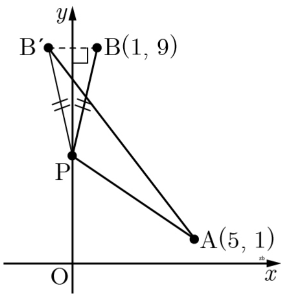


43) $5\sqrt{2}$

⇨ 

점 B의 y축에 대한 대칭점을 B'이라 하면
$B'(-1,7)$
이때, $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로
$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PB}&=\overline{AP}+\overline{PB'}\\&\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(-1-4)^2+(7-2)^2}\\&=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\end{aligned}$$
따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

44) 10
⇨ 점 B와 y축에 대하여 대칭인 점을 B'이라고 하면
$B'(-1,9)$
이때, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로
$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(-1-5)^2+(9-1)^2}=10\end{aligned}$$
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 10 이다.



45) $6\sqrt{2}$
⇨ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq \overline{AB}=\sqrt{(3+3)^2+(-4-2)^2}$
$=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$
따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

46) $P(3\,,4\,)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=(x-1)^2+(y-5)^2+(x-5)^2+(y-3)^2\\&=2x^2-12x+2y^2-16y+60\\&=2(x-3\,)^2+2(y-4\,)^2+10\end{aligned}$$
따라서 $x=3\,,y=4$, 즉 $P(3\,,4\,)$일 때,
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값은 최소가 된다.

47) $P(3,4)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=(x-4)^2+(y-2)^2+(x-2)^2+(y-6)^2\\&=2x^2-12x+2y^2-16y+60\\&=2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$
따라서 $P(3,4)$일 때,
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 된다.

48) $P(4,-1)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (a,b)라고 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a-3)^2+b^2+(a-5)^2+(b+2)^2$
$=2a^2-16a+2b^2+4b+38$
$=2(a^2-8a+16-16)+2(b^2+2b+1-1)+38$
$=2(a-4)^2+2(b+1)^2+4$
따라서 $P(4,-1)$일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 된다.

49) 34
⇨ x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,0)$이라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=(x+1)^2+5^2+(x-3)^2+1^2\\&=2x^2-4x+36=2(x-1)^2+34\end{aligned}$$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 34이다.

50) 21
⇨ x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,0)$이라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=(x-1)^2+4+(x-5)^2+9\\&=2x^2-12x+39\\&=2(x-3)^2+21\end{aligned}$$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 21이다.

51) 63
⇨ x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,0)$이라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2&=(x+2)^2+9+(x-4)^2+36\\&=2x^2-4x+65\\&=2(x-1)^2+63\end{aligned}$$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 63이다.

52) $\dfrac{89}{2}$
⇨ x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,0)$이라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=(x+2)^2+4^2+(x-5)^2+2^2\\&=2x^2-6x+49=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{89}{2}\end{aligned}$$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 $\dfrac{89}{2}$이다.

53) 18
⇨ x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,0)$이라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2&=x^2+1+(x-4)^2+9\\&=2x^2-8x+26\\&=2(x-2)^2+18\end{aligned}$$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 18이다.

54) 12
⇨ y축 위의 점 P의 좌표를 $(0,\ y)$라고 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$
$=(0-1)^2+y^2+(0-3)^2+(y+2)^2$
$=2y^2+4y+14$
$=2(y^2+2y)+14$
$=2(y+1)^2+12$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 12이다.

55) 21
⇨ y축 위의 점 P의 좌표를 $(0,\ y)$라고 하면

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$
$=9+(y-1)^2+4+(y-5)^2$
$=2y^2-12y+39$
$=2(y-3)^2+21$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 21이다.

56) 18
⇨ y축 위의 점 P의 좌표를 $(0,\ y)$라고 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$
$=1+y^2+9+(y-4)^2$
$=2y^2-8y+26$
$=2(y-2)^2+18$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 18이다.

57) 최솟값: 10, P의 좌표: $(3,3)$
⇨ 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$
$=\{(a-1)^2+(b-2)^2\}+\{(a-5)^2+(b-4)^2\}$
$=2a^2-12a+2b^2-12b+46$
$=2(a^2-6a)+2(b^2-6b)+46$
$=2(a-3)^2+2(b-3)^2+10$
따라서 $a=3, b=3$, 즉 점 P의 좌표가 $(3,3)$일 때
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 10을 갖는다.

58) 최솟값: 16, P의 좌표: $(2,1)$
⇨ 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=\{a^2+(b-3)^2\}+\{(a-4)^2+(b+1)^2\}\\&=2a^2-8a+2b^2-4b+26\\&=2(a^2-4a)+2(b^2-2b)+26\\&=2(a-2)^2+2(b-1)^2+16\end{aligned}$$
따라서 $a=2, b=1$, 즉 점 P의 좌표가 $(2,1)$일 때
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 최솟값 16을 갖는다.

59) 최솟값:10, P의 좌표:$(1,3)$
⇨ 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=\{(a+1)^2+(b-2)^2\}+\{(a-3)^2+(b-4)^2\}\\&=2a^2-4a+2b^2-12b+30\\&=2(a^2-2a)+2(b^2-6b)+30\\&=2(a-1)^2+2(b-3)^2+10\end{aligned}$$
따라서 $a=1, b=3$, 즉 점 P의 좌표가 $(1,3)$일 때
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 최솟값 10을 갖는다.

60) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\frac{13}{4}\right)$
⇨ 점 P의 좌표를 $(a,a+3)$라 하면
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=(a-2)^2+(a+2)^2+(a+1)^2+(a-2)^2\\&=4a^2-2a+13=4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{51}{4}\end{aligned}$$
따라서 $a=\frac{1}{4}$, 즉 점 P의 좌표가 $\left(\frac{1}{4},\frac{13}{4}\right)$일 때
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 최솟값 $\frac{51}{4}$을 갖는다.

61) $P(1,3)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(x+1)^2+(y-2)^2+(x-4)^2\\&\quad+(y-6)^2+x^2+(y-1)^2\\&=3x^2-6x+3y^2-18y+58\\&=3(x-1)^2+3(y-3)^2+28\end{aligned}$$
즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=1, y=3$일 때,
최솟값 28을 가진다.
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(1,3)$

62) $P(4,3)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-6)^2\\&\quad+(y-2)^2+(x-5)^2+(y-6)^2\\&=3x^2-24x+3y^2-18y+103\\&=3(x-4)^2+3(y-3)^2+28\end{aligned}$$
즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=4, y=3$일 때
최솟값 28을 가진다.
$\therefore P(4,3)$

63) $P(2,\ 2)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$=3(x-2)^2+3(y-2)^2+32$
즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2, y=2$일 때
최솟값 32를 가진다.
$\therefore P(2,\ 2)$

64) $P(2,3)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$=(x-2)^2+(y-2)^2+x^2+(y-3)^2+(x-4)^2+(y-4)^2$
$=3x^2-12x+3y^2-18y+49$
$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+10$
즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2, y=3$일 때
최솟값 10을 가진다.
$\therefore P(2,3)$

65) $P(2,2)$
⇨ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(x-2)^2+(y-6)^2+x^2\\&\quad+(y-2)^2+(x-4)^2+(y+2)^2\\&=3x^2-12x+3y^2-12y+64\\&=3(x-2)^2+3(y-2)^2+40\end{aligned}$$
즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2, y=2$일 때
최솟값 40을 가진다.
$\therefore P(2,2)$

66) $\mathrm{P}(3,\ \sqrt{3})$

⇨ 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는
삼각형 ABC의 무게중심과 같다.
$\therefore P(3,\ \sqrt{3})$