01 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

◪ $a>0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

1. $a+\dfrac{4}{a}$

2. $a+\dfrac{1}{a}$

3. $4a+\dfrac{9}{a}$

4. $2a+\dfrac{9}{2a}$

5. $2a+1+\dfrac{16}{2a+1}$

6. $2a+\dfrac{3}{a+1}$

7. $\left(a+\dfrac{2}{a}\right)\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)$

◪ $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

8. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

9. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}$

10. $\left(\dfrac{2}{a}+4b\right)\left(\dfrac{2}{b}+a\right)$

11. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}\right)$

12. $\left(3a+\dfrac{2}{3b}\right)\left(\dfrac{1}{2a}+b\right)$

13. $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)$

14. $(a+3b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$

15. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}\right)$

16. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$

17. $\left(9a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)$

18. $(a+2b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$

19. $(a+2b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}\right)$

20. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

21. $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)$

22. $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{8}{a}+b\right)$

23. $(a+b)\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)-4$

24. $\left(3a+\frac{4}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+3b\right)$

25. $\left(2a+\frac{3}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+6b\right)$

26. $\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+16b\right)$

27. $(3a+b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)$

◪ **다음 식의 최솟값과 그때의 a의 값을 구하여라.**

28. $a+\frac{8}{a+2}$ ($a>0$)

29. $3a+\frac{3}{a-1}$ (단, $a>1$)

30. $a+\frac{1}{a-1}$ (단, $a>1$)

31. $4a+\frac{2}{2a-1}$(단 $a>\frac{1}{2}$)

32. $a+\frac{4}{a+1}$ (단, $a>-1$)

33. $4a+1+\frac{4}{a+2}$ (단, $a>-2$)

34. $4a+9+\frac{9}{a-2}$(단, $a>2$)

◪ 두 양수 a, b의 합이 주어질 때, 알맞은 값을 구하여라.

35. $a+2b=4$일 때, ab의 최댓값

36. $2a+b=6$일 때, ab의 최댓값

37. $a+b=2$일 때, ab의 최댓값

38. $4a+9b=24$일 때, ab의 최댓값

39. $2a+b=4$일 때, ab의 최댓값

40. $a^2+b^2=8$일 때, ab의 최댓값

41. $a+2b=1$일 때, $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값

42. $3a+2b=1$일 때, $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값

◪ 두 양수 a, b의 곱이 주어질 때, 알맞은 값을 구하여라.

43. $ab=1$일 때, $2a+3b$의 최솟값

44. $ab=2$일 때, $a+4b$의 최솟값

45. $ab=4$일 때, $a+b$의 최솟값

46. $ab=6$일 때, $3a+2b$의 최솟값

47. $ab=9$일 때, $2a+b$의 최솟값

◪ 다음 물음에 답하여라.

48. 둘레의 길이가 20인 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

49. $x>1$일 때, $4x-1+\frac{1}{x-1}$은 $x=k$일 때, 최솟값 m을 갖는다. $2k+m$의 값을 구하여라.

50. $x>6$인 실수 x에 대하여 $x+\frac{16}{x-6}$는 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다. $b-a$의 값을 구하여라.

51. $x>-3$에 대하여 $\dfrac{4}{x+3}+x+1$은 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a+b$의 값을 구하여라.

52. $x>2$에 대하여 $\dfrac{x^2+4x-3}{x-2}$은 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. 이때, $a+b$의 값을 구하여라.

53. $x>0$에 대하여 $\dfrac{3x}{x^2+4x+5}$의 최댓값을 M, 그때의 x값을 a라 할 때, $M+a$의 값을 구하여라.

54. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$(단, a는 실수)이 허근을 가질 때 $a+\dfrac{9}{a-4}$ 의 최솟값을 구하여라.

02 코시-슈바르츠의 부등식

실수 a, b, x, y에 대하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$
(단, 등호는 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$일 때 성립)

55. 다음은 실수 a, b, x, y에 대하여 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$이 성립함을 증명하는 과정이다. 다음 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

<증명>
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(\boxed{\text{(가)}})$
$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
$=(bx-ay)^2$
그런데 a, b, x, y는 실수이므로
$(bx-ay)^2\boxed{\text{(나)}}0$
$\therefore$ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$
이때 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\boxed{\text{(다)}}$일 때 성립한다.

◪ x, y가 실수일 때, 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

56. $12x+5y=13$일 때, x^2+y^2의 최솟값

57. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값

58. $2x+y=3$일 때, x^2+y^2의 최솟값

59. $3x+y=6\sqrt{5}$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값

60. $x^2+y^2=4$일 때, $x+y$의 최댓값

61. $x^2+y^2=10$일 때, $x+3y$의 최댓값

62. $x^2+y^2=4$일 때, $4x^2+12xy+9y^2$의 최댓값

63. $x^2+y^2=20$일 때, $2x+y$의 최댓값

64. $x^2+y^2=9$일 때, $3x+y$의 최댓값

65. $x^2+y^2=10$일 때, $3x+y$의 최댓값

66. $x^2+y^2=4$일 때, $2x+3y$의 최댓값

67. $x^2+y^2=4$일 때, $2x+y$의 최솟값

68. $x^2+y^2=4$일 때, $3x-4y$ 의 최댓값

69. $x^2+y^2=15$일 때, $x+3y$의 최댓값

70. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=5$일 때, $3x+2y$의 최댓값

◪ 다음 물음에 답하여라.

71. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=8$ 일 때, $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

72. 두 실수 x, y에 대하여 $4x+3y=5$일 때, $4x^2+9y^2$의 최솟값을 a, 최솟값을 가질 때 x, y의 값을 각각 b, c라 하자. abc의 값을 구하여라.

73. 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=1$일 때, $x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M\times\frac{m}{2}$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 4

⇨ $a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{4}{a}}=2\times 2=4$

따라서 $a+\frac{4}{a}$의 최솟값은 4이다.

2) 2

⇨ $a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=1$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

3) 12

⇨ $4a+\frac{9}{a}\geq 2\sqrt{4a\times\frac{9}{a}}=2\times 6=12$

따라서 $4a+\frac{9}{a}$의 최솟값은 12이다.

4) 6

⇨ $2a+\frac{9}{2a}\geq 2\sqrt{2a\times\frac{9}{2a}}=2\times 3=6$

따라서 $2a+\frac{9}{2a}$의 최솟값은 6이다.

5) 8

⇨ $2a+1+\frac{16}{2a+1}\geq 2\sqrt{(2a+1)\times\frac{16}{2a+1}}=2\times 4=8$

따라서 $2a+1+\frac{16}{2a+1}$의 최솟값은 8이다.

6) $2\sqrt{6}-2$

⇨ $2a+\frac{3}{a+1}=2(a+1)+\frac{3}{a+1}-2$

$\geq 2\sqrt{2(a+1)\times\frac{3}{a+1}}-2$

$=2\sqrt{6}-2$

따라서 $2a+\frac{3}{a+1}$의 최솟값은 $2\sqrt{6}-2$이다.

7) 9

8) 2

⇨ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$

따라서 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$의 최솟값은 2이다.

9) $2\sqrt{2}$

10) 18

11) $9+4\sqrt{2}$

12) $\frac{25}{6}$

⇨ $\left(3a+\frac{2}{3b}\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)=\frac{3}{2}+3ab+\frac{1}{3ab}+\frac{2}{3}$

$\geq\frac{13}{6}+2\sqrt{3ab\times\frac{1}{3ab}}$

$=\frac{13}{6}+2=\frac{25}{6}$

따라서 $\left(3a+\frac{2}{3b}\right)\left(\frac{1}{2b}+b\right)$의 최솟값은 $\frac{25}{6}$이다.

13) 4

⇨ $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=ab+1+1+\frac{1}{ab}$

$=ab+\frac{1}{ab}+2$

$\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+2=4$

$\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{1}{ab}\text{일 때}\right)$

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$의 최솟값은 4이다.

14) 16

⇨ $(a+3b)\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)=1+\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}+9$

$\geq 10+2\sqrt{\frac{3a}{b}\times\frac{3b}{a}}$

$=10+6=16$

따라서 $(a+3b)\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)$의 최솟값은 16이다.

15) 16

16) 9

⇨ $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=1+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+4$

$\geq 5+2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{a}}$

$=5+4=9$

따라서 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$의 최솟값은 9이다.

17) 16

18) 18

19) $\frac{9}{2}$

⇨ $(a+2b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$

$\geq\frac{5}{2}+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}$

$=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$

따라서 $(a+2b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

20) 4

21) 4

⇨ $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)=1+ab+\frac{1}{ab}+1$

$\geq 2+2\sqrt{ab\times\frac{1}{ab}}$

$=4$ $\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{1}{ab}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)$의 최솟값은 4이다.

22) 18

⇨ $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{8}{a}+b\right)=8+ab+\frac{16}{ab}+2$

$\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{16}{ab}}$

$=10+8=18$

따라서 $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{8}{a}+b\right)$의 최솟값은 18이다.

23) 8

24) 48

25) 50

26) 36

⇨ $\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+16b\right)=4+64ab+\frac{1}{ab}+16$

$=64ab+\frac{1}{ab}+20\geq 2\sqrt{64ab\cdot\frac{1}{ab}}+20$

$=16+20=36$

따라서 최솟값은 36이다.

27) 16

⇨ $(3a+b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=9+\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}+1$

$=\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}+10\geq 2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{3b}{a}}+10=6+10=16$

28) $a=-2+2\sqrt{2}$일 때, 최솟값 $4\sqrt{2}-2$

29) $a=2$일 때 최솟값 9

⇨ $3a+\frac{3}{a-1}=3(a-1)+\frac{3}{a-1}+3$

$\geq 2\sqrt{3(a-1)\times\frac{3}{a-1}}+3$

$=2\cdot 3+3=9$

$\left(\text{단, 등호는 } 3(a-1)=\frac{3}{a-1}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2a+\frac{3}{a-1}$의 최솟값은 9이고, 그때의 a의 값은 2이다.

30) $a=2$일 때 최솟값 3

⇨ $a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1$

$\geq 2\sqrt{(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+1$

$=2+1=3$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\frac{1}{a-1}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a+\frac{1}{a-1}$의 최솟값은 3이고, 그때의 a의 값은 2이다.

31) $a=1$일 때 최솟값 6

⇨ $4a+\frac{2}{2a-1}=2(2a-1)+\frac{2}{2a-1}+2$

$2\sqrt{2(2a-1)\times\frac{2}{2a-1}}+2$

$=2\cdot 2+2=6$

$\left(\text{단, 등호는 } 2(2a-1)=\frac{2}{2a-1}\text{, 즉 } a=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4a+\frac{2}{2a-1}$의 최솟값은 6이고, 그때의 a의 값은 1이다.

32) $a=1$일 때 최솟값 3

⇨ $a>-1$에서 $a+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{4}{a+1}=a+1+\frac{4}{a+1}-1$

$\geq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{4}{a+1}}-1=2\cdot 2-1=3$

이때, 등호는 $a+1=\frac{4}{a+1}$일 때 성립하므로

$(a+1)^2=4$, $a+1=2(\because a+1>0)$ $\therefore$ $a=1$

따라서 $a+\frac{4}{a+1}$는 $a=1$일 때 최솟값 3을 가진다.

33) $a=-1$일 때, 최솟값 1

⇨ $4a+1+\frac{4}{a+2}=4(a+2)+\frac{4}{a+2}-7$

$\geq 2\sqrt{4(a+2)\cdot\frac{4}{a+2}}-7=8-7=1$

등호는 $4(a+2)=\frac{4}{a+2}$일 때 성립한다.

$(a+2)^2=1$, $a>-2$이므로 $a=-1$

따라서 $a=1$일 때, 최솟값 1을 가진다.

34) $a=\frac{7}{2}$일 때, 최솟값 29

35) 2

⇨ $a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$이므로

$\sqrt{2ab}\leq\frac{a+2b}{2}=\frac{4}{2}=2$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$\therefore\ 2ab \le 4$

따라서 $ab \le 2$이므로 ab의 최댓값은 2이다.

36) $\dfrac{9}{2}$

⇨ $2a+b \ge 2\sqrt{2ab}$ 이므로

$\sqrt{2ab} \le \dfrac{2a+b}{2} = \dfrac{6}{2} = 3,\ 2ab \le 9$

따라서 $ab \le \dfrac{9}{2}$이므로 ab의 최댓값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

37) 1

⇨ $a>0,\ b>0$이고 $a+b=2$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ 이므로

$2 \ge 2\sqrt{ab}$ ⇨ $1 \ge \sqrt{ab}$

$\therefore\ 1 \ge ab$ (단, 등호는 $a=b$)

따라서 ab의 최댓값은 1이다.

38) 4

⇨ $4a+9b \ge 2\sqrt{36ab} = 12\sqrt{ab}$ 이므로

$\sqrt{ab} \le \dfrac{4a+9b}{12} = \dfrac{24}{12} = 2$

따라서 $ab \le 4$이므로 ab의 최댓값은 4이다.

39) 2

⇨ $a>0,\ b>0$이고 $2a+b=4$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 $2a+b \ge 2\sqrt{2a \cdot b}$ 이므로

$2a+b \ge 2\sqrt{2ab}$ ⇨ $4 \ge 2\sqrt{2ab}$

$\therefore\ 2 \ge ab$ (단, 등호는 $2a=b$일 때)

따라서 ab의 최댓값은 2이다.

40) 4

⇨ $a^2+b^2 \ge 2\sqrt{(ab)^2} = 2ab$이므로

$ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

따라서 ab의 최댓값은 4이다.

41) 8

⇨ $(a+2b)(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}) = 2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+2 = \dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4$

$\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}+4 = 4+4 = 8$

(등호는 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4b}{a}$일 때 성립)

$\therefore$최솟값은 8이다.

42) 25

⇨ $(3a+2b)\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}\right) = 9+\dfrac{6a}{b}+\dfrac{6b}{a}+4$에서

$\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b} = \dfrac{6a}{b}+\dfrac{6b}{a}+13 \ge 2\sqrt{\dfrac{6a}{b}\cdot\dfrac{6b}{a}}+13$

$=12+13=25$

따라서 최솟값은 25이다.

43) $2\sqrt{6}$

⇨ $2a+3b \ge 2\sqrt{6ab} = 2\sqrt{6}$

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

44) $4\sqrt{2}$

⇨ $a+4b \ge 2\sqrt{4ab} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

따라서 $a+4b$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

45) 4

⇨ $a+b \ge 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{4} = 4$

따라서 $a+b$의 최솟값은 4이다.

46) 12

⇨ $3a+2b \ge 2\sqrt{6ab} = 2\sqrt{36} = 12$

따라서 $3a+2b$의 최솟값은 12이다.

47) $6\sqrt{2}$

⇨ $2a+b \ge 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$

따라서 $2a+b$의 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

48) 25

⇨ 직사각형이 가로와 세로의 길이를 각각 $x,\ y$라 하면 $2x+2y=20$ $\quad\therefore\ x+y=10$

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 $x+y \ge 2\sqrt{xy}$

$\therefore\ 0<xy \le 25$ (단, 등호는 $x=y$일 때)

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 25 이다.

49) 10

50) 4

51) 1

⇨ (준 식)$=x+3+\dfrac{4}{x+3}-2$

$\ge 2\sqrt{(x+3)\cdot\dfrac{4}{x+3}}-2 = 4-2 = 2\quad \therefore b=2$

등호는 $x+3 = \dfrac{4}{x+3}$일 때 성립한다. $(x+3)^2=4$

$x>-3$이므로 $x=-1$이다. $\therefore a=-1$

$\therefore a+b=1$

52) 19

⇨ $\dfrac{x^2+4x-3}{x-2} = x+6+\dfrac{9}{x-2}$

$=(x-2)+\dfrac{9}{x-2}+8 \ge 2\sqrt{(x-2)\cdot(\dfrac{9}{x-2})}+8$

$=14$

$x-2 = \dfrac{9}{x-2}$일 때, 등호가 성립하므로

$(x-2)^2=9$에서 $x>2$이므로 $x=5$이다.

$\therefore\ a=5,\ b=14$이므로 $a+b=19$

53) $\dfrac{5\sqrt{5}-6}{2}$

⇨ $\dfrac{3x}{x^2+4x+5}=\dfrac{3}{x+4+\dfrac{5}{x}}$ ⋯ ㉠

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균에 의하여

$x+\dfrac{5}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{5}{x}}=2\sqrt{5}$

(단, 등호는 $x=\dfrac{5}{x}$, 즉 $x^2=5$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최댓값은 ㉠에서 분모가 가장 작을 때이므로

$M=\dfrac{3}{4+2\sqrt{5}}=\dfrac{3(\sqrt{5}-2)}{2}$이고 $a=\sqrt{5}$이므로

$M+a=\dfrac{5\sqrt{5}-6}{2}$

54) 10

55) (가) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ (나) $\geq$ (다) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

⇨ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(\boxed{a^2x^2+2abxy+b^2y^2})$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(bx-ay)^2$

그런데 a, b, x, y는 실수이므로

$(bx-ay)^2\boxed{\geq}0$

$\therefore$ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\boxed{\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}}$일 때 성립한다.

56) 1

⇨ 코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(12^2+5^2)(x^2+y^2)\geq(12x+5y)^2$

$12x+5y=13$이므로

$169(x^2+y^2)\geq 169$

$\therefore$ $x^2+y^2\geq 1$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{5}\text{일 때}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다.

57) 144

⇨ 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$\left((\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{1}{4})^2\right)(x^2+y^2)\geq\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\right)^2$

$\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}\right)(x^2+y^2)\geq 25$

$x^2+y^2\geq 144$

따라서 최솟값은 144이다.

58) $\dfrac{9}{5}$

⇨ 코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(2x+y)^2$

$2x+y=3$이므로

$5(x^2+y^2)\geq 9$

$\therefore$ $x^2+y^2\geq\dfrac{9}{5}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=y\text{일 때}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 $\dfrac{9}{5}$이다.

59) 18

60) $2\sqrt{2}$

⇨ $(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$이므로

$2\times4\geq(x+y)^2$

$\therefore$ $-2\sqrt{2}\leq x+y\leq 2\sqrt{2}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

61) 10

⇨ $(1^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(x+3y)^2$

$(x+3y)^2\leq 100$

$-10\leq x+3y\leq 10$

$\therefore x+3y$의 최댓값은 10이다.

62) 52

⇨ $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$

$(2x+3y)^2\leq 52$

따라서 최댓값은 52이다.

63) 10

⇨ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$이므로

$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(2x+y)^2$

$(2x+y)^2\leq 100$, $-10\leq 2x+y\leq 10$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 10이다.

64) $3\sqrt{10}$

⇨ 코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(3x+y)^2$

$x^2+y^2=9$이므로 $90\geq(3x+y)^2$

$\therefore$ $-3\sqrt{10}\leq 3x+y\leq 3\sqrt{10}$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{3}=y\text{일 때}\right)$

따라서 $3x+y$의 최댓값은 $3\sqrt{10}$이다.

65) 10

⇨ x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(3x+y)^2$

$10\cdot10\geq(3x+y)^2$

$\therefore -10\leq 3x+y\leq 10$

따라서 $3x+y$의 최댓값은 10이다.

66) $2\sqrt{13}$

⇨ 코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$

$x^2+y^2=4$이므로 $53\geq(2x+3y)^2$

$\therefore\ -2\sqrt{13} \le 2x+3y \le 2\sqrt{13}$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때}\right)$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $2\sqrt{13}$이다.

67) $-2\sqrt{5}$

⇨ $(2^2+1^2)(x^2+y^2) \ge (2x+y)^2$이므로

$5\times4 \ge (2x+y)^2$

$\therefore\ -2\sqrt{5} \le 2x+y \le 2\sqrt{5}$

따라서 $2x+y$의최솟값은 $-2\sqrt{5}$이다.

68) 10

⇨ $(3^2+(-4)^2)(x^2+y^2) \ge (3x-4y)^2$

$(3x-4y)^2 \le 100$

$-10 \le 3x-4y \le 10$

따라서 최댓값은 10이다.

69) $5\sqrt{6}$

⇨ $(1^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (x+3y)^2$

$x^2+y^2=15$이므로 $150 \ge (x+3y)^2$

$\therefore\ -5\sqrt{6} \le x+3y \le 5\sqrt{6}$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\dfrac{y}{3}\text{일 때}\right)$

따라서 $x+3y$의 최댓값은 $5\sqrt{6}$이다.

70) $5\sqrt{6}$

⇨ $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=5$에서 $3x^2+2y^2=30$

$((\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2)((\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2}y)^2) \ge (3x+2y)^2$

$(3x+2y)^2 \le 5\times30$

$-5\sqrt{6} \le 3x+2y \le 5\sqrt{6}$

$\therefore 3x+2y$의 최댓값은 $5\sqrt{6}$이다.

71) 0

72) $\dfrac{5}{3}$

73) -1

⇨ x , y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \ge (x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=1$ 이므로 $2 \ge (x+y)^2$

$\therefore -\sqrt{2} \le x+y \le \sqrt{2}$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 $x+y$의 최댓값 $M=\sqrt{2}$, 최솟값

$m=-\sqrt{2}$ 이므로 $M\times\dfrac{m}{2}=\sqrt{2}\times\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-1$