단원 ISSUE

이 단원에서는 **직선의 방정식과 직선의 위치관계, 점과 직선 사이의 거리 관련 문제**가 주로 출제됩니다.
직선의 방정식을 구하는 공식은 여러 가지가 있으므로 주어진 문제에 따라 올바른 방정식을 세워 문제를 해결할 수 있도록 반복적인 학습이 필요합니다.
또한, 점과 직선 사이의 거리는 단순한 거리 계산 뿐 아니라 삼각형의 넓이 등 다양한 도형에 활용되므로 여러 유형의 문제를 학습하도록 합니다.

평가문제

[중단원 마무리]

1. **세 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(8,\ -6)$, $\mathrm{C}(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 점 A를 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 구하면?**

① $y=-3x+7$　② $y=-2x+6$
③ $y=-x+5$　④ $y=x+3$
⑤ $y=2x+2$

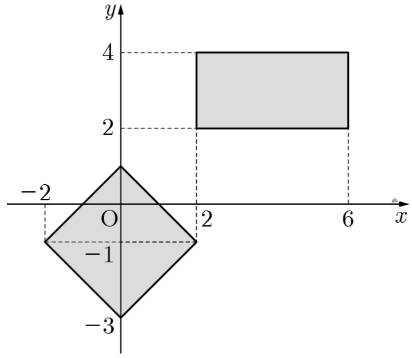
[중단원 마무리]

2. **두 점 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 7)$을 이은 선분의 중점을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식의 y절편을 구하면?**

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리]

3. **다음 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 직사각형과 마름모의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식의 x절편을 구하면?**



① -1　② 1
③ 3　④ 5
⑤ 7

[대단원 마무리]

4. **두 점 $A(3,\ -6)$, $B(4,\ -7)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점과 점 $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면?**

① $y=-3x+7$　② $y=2x-6$
③ $y=-x+5$　④ $y=x+3$
⑤ $y=2x+2$

[중단원 마무리]

5. **세 점 $\mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(k,\ 7)$, $\mathrm{C}(5,\ 11)$이 한 직선 위에 있도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하면?**

① 4　② 7
③ 10　④ 13
⑤ 16

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 마무리]

6. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것은?

<보기>

ㄱ. 점 $(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y=x-1$이다.

ㄴ. 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=2x-1$이다.

ㄷ. 두 점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $x=1$이다.

ㄹ. x절편이 2이고, y절편이 5인 직선의 방정식은 $5x+2y-10=0$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

[중단원 마무리]

7. 다음 중 점 $(-1,\ 5)$와 두 직선 $x+y-2=0$, $3x-2y-6=0$의 교점을 지나는 직선 위의 점은?

① $(3,\ 0)$
② $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$
③ $\left(1,\ \frac{5}{3}\right)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$
⑤ $(1,\ 0)$

[중단원 마무리]

8. 직선 $(a+2)x-(2a-1)y+a-1=0$은 임의의 a에 대하여 한 점 $(p,\ q)$를 지난다. 이 때 상수 $p,\ q$의 합 $p+q$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$
⑤ 1

[중단원 마무리]

9. 서로 다른 세 직선

$l\ :\ ax+y+1=0$,

$m\ :\ x+by+3=0$,

$n\ :\ 2x+y+5=0$

에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어지도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

[중단원 마무리]

10. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 $A(8, 0)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 9)$에서 각각의 대변에 그은 세 수선의 교점의 좌표가 (a, b)일 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하면?

① 3
② $\frac{29}{9}$
③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{32}{9}$
⑤ 4

[중단원 마무리]

11. 세 직선

$x-y+2=0$, $x+2y-1=0$, $2x+y+a=0$이 삼각형을 만들기 위한 상수 a의 조건을 구하면?

① $a\neq 0$
② $a\neq 1$
③ $a\neq 2$
④ $a\neq 3$
⑤ $a\neq 4$

[대단원 마무리]

12. 두 직선 $ax-4y+8=0$, $x-(a+3)y-2=0$에 대하여 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $a>0$일 때, 두 직선은 평행할 수 있다.
ㄴ. $a<0$일 때, 두 직선은 일치할 수 있다.
ㄷ. a가 정수일 때, 두 직선은 직교할 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ
③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄴ, ㄷ

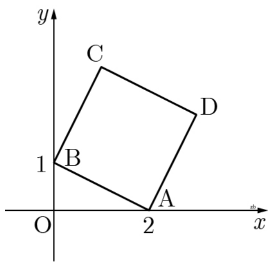
[중단원 마무리]

13. 두 직선 $ax+y+1=0$, $x-3y+2=0$이 평행할 때의 a의 값을 p, 수직일 때의 a의 값을 q라 할 때, pq의 값을 구하면?

① -1　② $-\frac{1}{3}$
③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{2}{3}$
⑤ 2

[중단원 마무리]

14. 좌표평면 위에 정사각형 ABCD가 있다. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$이고 직선 CD의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하면?



① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[대단원 마무리]

15. 직선 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$에 수직이고, 원점으로부터의 거리가 1인 직선의 방정식을 구하면?

① $4x-3y+5=0$
② $4x+3y+5=0$
③ $4x-3y-5=0$
④ $4x-3y+5=0$ 또는 $4x+3y+5=0$
⑤ $4x-3y+5=0$ 또는 $4x-3y-5=0$

[중단원 마무리]

16. 원점에서 거리가 2이고, 점 $(1,\ 2)$를 지나며 좌표축에 평행하지 않은 직선의 기울기를 구하면?

① $\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{4}$
③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{4}{3}$
⑤ -4

[중단원 마무리]

17. 두 직선 $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지날 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하면?

① $\frac{2}{7}$　② $\frac{4}{7}$
③ $\frac{6}{7}$　④ $\frac{8}{7}$
⑤ $\frac{10}{7}$

[대단원 마무리]

18. 세 직선 $x-2y-2=0$, $x+5y-9=0$, $4x-y+6=0$으로 만들어지는 삼각형의 넓이를 구하면?

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{9}{2}$
③ $\frac{21}{2}$　④ $\frac{13}{2}$
⑤ $\frac{15}{2}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 마무리]

19. 세 점 $A(1,5)$, $B(2,2)$, $C(3,4)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 넓이를 구하면?

① 1　② $\frac{3}{2}$
③ 2　④ $\frac{5}{2}$
⑤ 3

[중단원 마무리]

20. y축 위의 두 점 A, B에서 직선 $6x+8y-5=0$까지의 거리가 모두 2일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하면?

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] 직선 l이 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다. $\overline{BC}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{-6+2}{2}\right)=(4,\ -2)$
따라서 직선 l은 두 점 $(1,\ 4)$, $(4,\ -2)$를 지나므로 $y-4=\frac{-2-4}{4-1}(x-1)$에서 $y=-2x+6$이다.

2) [정답] ②

[해설] 두 점 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{1+7}{2}\right)=(1,\ 4)$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-4=2(x-1)$, $y=2x+2$이다. 따라서 y절편은 2이다.

3) [정답] ②

[해설] 마름모와 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점과 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선이다.
마름모의 두 대각선의 교점은 두 점 $(-2, -1)$, $(2, -1)$의 중점이므로 $(0,\ -1)$이다.
또, 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(2,\ 4)$, $(6,\ 2)$의 중점이므로 $(4,\ 3)$이다.
따라서 두 점 $(0,\ -1)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y-3=\frac{3-(-1)}{4-0}(x-4)$에서 $y=x-1$이다. 직선의 x절편은 1이다.

4) [정답] ②

[해설] $\overline{AB}$를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{2\cdot 4-3\cdot 3}{2-3},\ \frac{2\cdot(-7)-3\cdot(-6)}{2-3}\right)=(1,\ -4)$이다. 따라서 두 점 $(1,\ -4)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-(-4)=\frac{2-(-4)}{4-1}(x-1)$이므로 $y=2x-6$이다.

5) [정답] ⑤

[해설] 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\frac{11-k}{4}=\frac{4}{5-k}$
$(11-k)(5-k)=16$, $k^2-16k+39=0$
$(k-3)(k-13)=0$
$k=3$ 또는 $k=13$이다.
따라서 구하는 k의 값의 합은 $3+13=16$이다.

6) [정답] ④

[해설] ㄱ. 점 $(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y-0=1\cdot(x+1)$이므로 $y=x+1$이다.
ㄴ. 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1)$이므로 $y=2x-1$이다.
ㄷ. 두 점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=1$이다.
ㄹ. x절편이 2이고, y절편이 5인 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$이므로 $5x+2y-10=0$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

7) [정답] ③

[해설] 두 직선 $x+y-2=0$, $3x-2y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(3x-2y-6)+k(x+y-2)=0$ (k는 상수) $\cdots$㉠
㉠은 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로 대입하면
$2k-19=0$이고 $k=\frac{19}{2}$이다.
$k=\frac{19}{2}$를 ㉠에 대입하여 정리하면
$(3x-2y-6)+\frac{19}{2}(x+y-2)=0$
$25x+15y-50=0$, $5x+3y-10=0$이다.
따라서 주어진 보기의 점의 좌표를 위의 방정식에 대입할 때 성립하는 것은 ③ $\left(1,\ \frac{5}{3}\right)$이다.

8) [정답] ④

[해설] $(a+2)x-(2a-1)y+a-1=0$을 a에 대하여 정리하면 $(2x+y-1)+a(x-2y+1)=0$ $\cdots$㉠
㉠은 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여
$2x+y-1=0$, $x-2y+1=0$ 이다.
두 식을 연립하여 x, y의 값을 구하면 $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{3}{5}$이다. 따라서 주어진 직선은 a가 어떤 값을 갖더라도 정점 $\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$을 지나므로 $p=\frac{1}{5}$, $q=\frac{3}{5}$이고 $p+q=\frac{4}{5}$이다.

9) [정답] ⑤

[해설] 일치하지 않는 세 직선에 의하여 평면이 네 부분으로 나누어지는 경우는 세 직선이 모두 평행할 때이다.
즉, $\frac{a}{1}=\frac{1}{b}$, $\frac{1}{2}=\frac{b}{1}$에서 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$이다.
따라서 $a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이다.

10) [정답] ④

[해설] 삼각형 ABC 의 세 꼭짓점에서 각각의 대변에 그은 세 수선의 교점을 H라 하면 점 H는 점 C에서 변 AB에 내린 수선과 점 B에서 변 AC에

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

내린 수선의 교점이다.
점 C에서 변 AB에 내린 수선은 y축이므로 수선의 방정식은 $x=0$이다.
또, 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면 점 H는 선분 BD와 y축이 만나는 점이다.
직선 AC의 기울기를 구하면 $\frac{9-0}{0-8}=-\frac{9}{8}$,
직선 AC는 직선 BD와 수직이므로 두 직선의 수직 조건에 의하여 직선 BD의 기울기를 구하면 $\frac{8}{9}$이다.
기울기가 $\frac{8}{9}$이고, 점 $B(-4,0)$을 지나는 직선 BD의 방정식을 구하면 $y=\frac{8}{9}x+\frac{32}{9}$ …㉠
㉠에 $x=0$을 대입하여 선분 BD와 y축이 만나는 점의 좌표를 구하면 $y=\frac{32}{9}$이고 $\left(0,\ \frac{32}{9}\right)$이다.
즉, 구하는 점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{32}{9}\right)$이므로
$a+b=\frac{32}{9}$이다.

11) [정답] ②
[해설] 세 직선 중 어느 두 직선도 서로 평행하지 않으므로 삼각형을 만들기 위해서는 세 직선이 한 점에서 만나지만 않으면 된다.
따라서 두 직선의 방정식 $x-y+2=0$, $x+2y-1=0$을 연립하여 교점을 구하면 $(-1,\ 1)$이다.
이 점이 직선 $2x+y+a=0$ 위에 있지 않아야 하므로 $x=-1$, $y=1$을 대입하면 등식을 만족하지 않아야 한다. 즉, $-2+1+a\neq0$이고 $a\neq1$이다.

12) [정답] ④
[해설] ㄱ. 두 직선이 평행하려면
$\frac{a}{1}=\frac{-4}{-(a+3)}\neq\frac{8}{-2}$
(ⅰ) $\frac{a}{1}=\frac{4}{a+3}$에서 $a^2+3a=4$, $a^2+3a-4=0$
$(a+4)(a-1)=0$ $\therefore a=-4$ 또는 $a=1$
(ⅱ) $\frac{4}{a+3}\neq-4$에서 $-4a-12\neq4$, $-4a\neq16$
$\therefore a\neq-4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$
따라서 $a=1$이면 두 직선은 평행하다.
ㄴ. ㄱ에서 $a=-4$이면 $-\frac{4}{1}=\frac{-4}{-(-4+3)}=\frac{8}{-2}$
이므로 두 직선은 일치한다.
ㄷ. 두 직선이 수직이 되려면
$a\times1+(-4)\times\{-(a+3)\}=0$, $a+4a+12=0$
$\therefore a=-\frac{12}{5}$
따라서 두 직선이 직교하기 위한 정수 a의 값은 존재하지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13) [정답] ①
[해설] 두 직선 $ax+y+1=0$, $x-3y+2=0$에 대하여
(ⅰ) 두 직선이 평행할 때,
$\frac{a}{1}=\frac{1}{-3}\neq\frac{1}{2}$이므로 $a=-\frac{1}{3}$이다.
(ⅱ) 두 직선이 수직일 때,
$a-3=0$이므로 $a=3$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $p=-\frac{1}{3}$, $q=3$이므로 $pq=-1$

14) [정답] ③
[해설] 직선 AB와 직선 CD는 평행하므로 직선 CD의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. $a=-\frac{1}{2}$이다.
따라서 직선 CD의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}x+b$, 즉 $x+2y-2b=0$ …㉠
$\overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.
$\frac{|2-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$, $|2-2b|=5$
$2-2b=\pm5$이고 $b>0$이므로 $b=\frac{7}{2}$ 이다.
따라서 $a+b=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=3$이다.

15) [정답] ⑤
[해설] 직선 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$와 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x+a$,
$4x-3y+3a=0$이다. …㉠
원점으로부터 직선 ㉠까지의 거리가 1이므로
$\frac{|3a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$, $|3a|=5$
$3a=-5$ 또는 $3a=5$ …㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
$4x-3y+5=0$ 또는 $4x-3y-5=0$이다.

16) [정답] ④
[해설] 기울기가 m이고 점 (1,2)를 지나는 직선의 방정식은 $y=m(x-1)+2$이다.
이때 이 직선과 원점과의 거리가 2이므로
$2=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$, $2\sqrt{m^2+1}=|-m+2|$,
$m(3m+4)=0$이고 $m\neq0$이므로 $m=-\frac{4}{3}$이다.

17) [정답] ③

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[해설] 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점의 좌표를 $P(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-4y+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4x+3y+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$|3x-4y+9|=|4x+3y+12|$

$3x-4y+9=\pm(4x+3y+12)$

$x+7y+3=0$ 또는 $7x-y+21=0$

위의 두 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로 $x,\ y$의 좌표를 두 식에 각각 대입하면 a의 값을 구하면

$a+7\cdot(-1)+3=0 \quad \therefore a=4$

$7\cdot a-(-1)+21=0 \quad \therefore a=-\dfrac{22}{7}$

따라서 구하는 a의 값의 합은 $4+\left(-\dfrac{22}{7}\right)=\dfrac{6}{7}$이다.

18) [정답] ③

[해설] $x-2y-2=0$ …㉠

$x+5y-9=0$ …㉡

$4x-y+6=0$ …㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=1$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=2$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=-2$

세 직선의 교점의 좌표는

$A(4,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ -2)$이다.

세 점으로 만들어진 삼각형의 한 변 AC의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{(4+2)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{5}$ 이고, 높이는 점 $B(-1,\ 2)$에서 직선 ㉠까지의 거리이므로

$$\frac{|-1-4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\dfrac{7}{\sqrt{5}}=\dfrac{21}{2}$이다.

19) [정답] ④

[해설] 직선 AB의 방정식은

$y-5=\dfrac{2-5}{2-1}(x-1)$ 이므로 $3x+y-8=0$이다.

점 $C(3,4)$와 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|3\cdot 3+1\cdot 4-8|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ 이고,

선분 AB의 길이는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{10}$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{2}$

20) [정답] ③

[해설] y축 위의 점 $(0,b)$에서 직선 $6x+8y-5=0$까지의 거리가 2라고 하면

$$\frac{|8b-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|8b-5|}{10}=2$$

$|8b-5|=20$, $8b-5=\pm 20$

$b=\dfrac{25}{8}$ 또는 $b=-\dfrac{15}{8}$

따라서 두 점 A,B의 좌표는 $\left(0,\dfrac{25}{8}\right),\left(0,-\dfrac{15}{8}\right)$

이므로 $\overline{AB}=\left|\dfrac{25}{8}-\left(-\dfrac{15}{8}\right)\right|=\dfrac{40}{8}=5$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574