1회차

01 ⑤	02 ④	03 ④	04 ④	05 ②
06 ③	07 ③	08 ①	09 ③	10 ③
11 ①	12 ⑤	13 ④	14 ①	15 ③
16 ③	17 ①			

[서술형 1] 32

[서술형 2] $-\frac{3}{2} \le k < -\frac{5}{6}$

[서술형 3] (1) 63 (2) 85

01 $g(1)=1+2=3$이므로

$(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(3)$

$=\frac{2\cdot 3-3}{3-2}=3$

02 $f(1)=1$이므로 $3\cdot 1+a=1$ $\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=3x-2$

이때 $f^{-1}(a)=f^{-1}(-2)=k$라 하면

$f(k)=-2$이므로

$3k-2=-2$ $\therefore k=0$

$\therefore f^{-1}(a)=0$

Lecture 역함수의 성질

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

03 $(f \circ h)(x)=f(h(x))=h(x)-2$

이때 $(f \circ h)(x)=g(x)$이므로

$h(x)-2=\sqrt{2x+1}$ $\therefore h(x)=\sqrt{2x+1}+2$

$\therefore h(4)=\sqrt{2\cdot 4+1}+2=5$

다른 풀이

$(f \circ h)(4)=g(4)$에서 $f(h(4))=g(4)$

$h(4)-2=\sqrt{2\cdot 4+1}$ $\therefore h(4)=5$

04 $f^1(3)=f(3)=2$

$f^2(3)=f(f^1(3))=f(2)=1$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(1)=3$

$f^4(3)=f(f^3(3))=f(3)=2$

⋮

즉 $f^n(3)$의 값은 2, 1, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $16=3\cdot 5+1$이므로

$f^{16}(3)=f^1(3)=2$

또

$f^1(2)=f(2)=1$

$f^2(2)=f(f^1(2))=f(1)=3$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=1$

⋮

즉 $f^n(2)$의 값은 1, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $11=3\cdot 3+2$이므로

$f^{11}(2)=f^2(2)=3$

$\therefore f^{16}(3)+f^{11}(2)=2+3=5$

05 $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$이므로 주어진 식의 양변에 x^2+2x-8을 곱하면

$a(x+4)+b(x-2)=x+10$

즉 $(a+b)x+4a-2b=x+10$이므로

$a+b=1,\ 4a-2b=10$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore a+2b=2+2\cdot(-1)=0$

06 ① $y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{x+4}{x+2}=\frac{(x+2)+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}+1$

이므로 함수 $y=\frac{x+4}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{x}{x-3}=\frac{(x-3)+3}{x-3}=\frac{3}{x-3}+1$

이므로 함수 $y=\frac{x}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{3x+11}{x+3}=\dfrac{3(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}+3$

이므로 함수 $y=\dfrac{3x+11}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\dfrac{-2x-2}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+2}{x+2}=\dfrac{2}{x+2}-2$

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x-2}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은 ③이다.

07 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{2(x-3)-3}{(x-3)+1}+k$

$\therefore y=\dfrac{2x-9}{x-2}+k$

이 함수의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{2\cdot3-9}{3-2}+k$

$2=-3+k \qquad \therefore k=5$

08 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-2}-1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{0-2}-1 \qquad \therefore k=-2$

따라서 구하는 함수의 식은

$y=\dfrac{-2}{x-2}-1=\dfrac{-2-(x-2)}{x-2}=\dfrac{-x}{x-2}$

이므로 $a=-1$, $b=0$, $c=-2$

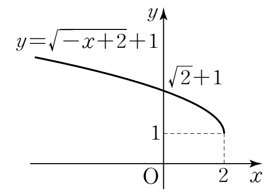
$\therefore a+b+c=-1+0+(-2)=-3$

09 ㄱ. $-x+2\geq0$에서 $x\leq2$이므로 정의역은 $\{x|x\leq2\}$이다.

ㄴ. $\sqrt{-x+2}\geq0$에서 $\sqrt{-x+2}+1\geq1$이므로 치역은 $\{y|y\geq1\}$이다.

ㄷ. $y=\sqrt{-x+2}+1=\sqrt{-(x-2)}+1$이므로 함수 $y=\sqrt{-x+2}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 함수 $y=\sqrt{-x+2}+1$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

10 $y=-\sqrt{-2x+4}+3=-\sqrt{-2(x-2)}+3$이므로 함수 $y=-\sqrt{-2x+4}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-6\leq x\leq0$에서 주어진 함수는 $x=-6$일 때 최솟값 -1, $x=0$일 때 최댓값 1을 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a+b=1+(-1)=0$

11 함수 $y=\sqrt{ax+1}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(x-1)+1}+3-1$

$\therefore y=\sqrt{ax-a+1}+2$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a\cdot(-x)-a+1}+2$

$\therefore y=\sqrt{-ax-a+1}+2$

이 함수의 그래프가 점 $(1, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{-a-a+1}+2$, $3=\sqrt{-2a+1}$

$9=-2a+1 \qquad \therefore a=-4$

Lecture **무리함수의 그래프의 대칭이동**

함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 그래프를

(1) x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-p)}-q$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{-a(x+p)}+q$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-a(x+p)}-q$

12 (ⅰ) 카드에 적힌 숫자가 3의 배수인 경우는
$3, 6, 9, \cdots, 30$의 10가지

(ⅱ) 카드에 적힌 숫자가 5의 배수인 경우는
$5, 10, 15, 20, 25, 30$의 6가지

(ⅲ) 카드에 적힌 숫자가 15의 배수인 경우는
$15, 30$의 2가지

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$10+6-2=14$

오답 피하기

3과 5의 공배수, 즉 15의 배수가 적힌 카드를 주의한다.

13 x, y는 자연수이므로

(ⅰ) $x=1$을 ㈏에 대입하면 $10\leq3+2y\leq20$
$\therefore 3.5\leq y\leq8.5$
즉 $y=4, 5, 6, 7, 8$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 5이다.

(ⅱ) $x=2$를 ㈏에 대입하면 $10\leq6+2y\leq20$
$\therefore 2\leq y\leq7$
즉 $y=2, 3, 4, 5, 6, 7$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 6이다.

(ⅲ) $x=3$을 ㈏에 대입하면 $10\leq9+2y\leq20$
$\therefore 0.5\leq y\leq5.5$
즉 $y=1, 2, 3, 4, 5$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 5이다.

(ⅳ) $x=4$를 ㈏에 대입하면 $10\leq12+2y\leq20$
$\therefore -1\leq y\leq4$
즉 $y=1, 2, 3, 4$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다.

(ⅴ) $x=5$를 ㈏에 대입하면 $10\leq15+2y\leq20$
$\therefore -2.5\leq y\leq2.5$
즉 $y=1, 2$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 2이다.

(ⅵ) $x=6$을 ㈏에 대입하면 $10\leq18+2y\leq20$
$\therefore -4\leq y\leq1$
즉 $y=1$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 1이다.

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+6+5+4+2+1=23$

Lecture **부등식의 해의 개수**

부등식 $ax+by\leq k$를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 x, y 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구하면 편리하다.

14 7명 중에서 3명을 뽑는 순열의 수이므로
${}_7P_3=210$

15 집합 Y의 원소 5개 중에서 4개를 뽑는 순열의 수이므로 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는
${}_5P_4=120$

16 자음인 c, l, s의 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
c, l, s 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 모음인 o, e의 2개의 문자를 나열하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot12=72$

17 남학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=10$
여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
따라서 체육대회 준비단의 수는
$10\cdot6=60$

[서술형 1] $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(x)$
$=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(x)$
$=(f^{-1}\circ g)(x)$
$=f^{-1}(g(x))$ ❶

$y=\frac{1}{2}x-5$라 하면 $-\frac{1}{2}x=-y-5$

$\therefore x=2y+10$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+10$

즉 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x-5$의 역함수는

$f^{-1}(x)=2x+10$

$\therefore f^{-1}(g(x))=2(x+3)+10=2x+16$

❷

따라서 $a=2$, $b=16$이므로

❸

$ab=2\cdot16=32$

❹

채점 기준	배점
❶ 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(x)$를 간단히 할 수 있다.	3점
❷ $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	1점
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

Lecture **합성함수와 역함수의 성질**

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

(단, I는 항등함수)

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$

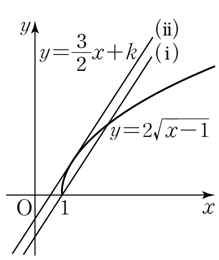
(2) $f\circ f^{-1}=I$, $f^{-1}\circ f=I$

(3) $f\circ g=I \Longleftrightarrow f=g^{-1}$, $g=f^{-1}$

(4) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

[서술형 2] $y=2\sqrt{x-1}=\sqrt{4(x-1)}$이므로 함수 $y=2\sqrt{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 또 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$는 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 y절편이 k이다.

즉 함수 $y=2\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이다.



❶

(i) 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때

$0=\frac{3}{2}+k \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$

❷

(ii) 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 함수 $y=2\sqrt{x-1}$의 그래프에 접할 때

$2\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}x+k$에서 $4\sqrt{x-1}=3x+2k$

양변을 제곱하면

$16(x-1)=9x^2+12kx+4k^2$

$\therefore 9x^2+2(6k-8)x+4k^2+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(6k-8)^2-9(4k^2+16)=0$

$-96k-80=0 \qquad \therefore k=-\frac{5}{6}$

❸

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$-\frac{3}{2}\le k<-\frac{5}{6}$

❹

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=2\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 그래프를 그릴 수 있다.	2점
❷ 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$가 함수 $y=2\sqrt{x-1}$의 그래프에 접할 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] (1) 1학년 학생 7명 중에서 부회장 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$

2학년 학생 3명 중에서 회장 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\cdot3=63$

❶

(2) 10명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

1학년 학생만 3명 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-35=85$

❷

채점 기준	배점
❶ 1학년 학생 중 부회장 2명을 뽑고 2학년 학생 중 회장 1명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❷ 축제에 참가할 대표 3명을 뽑을 때 적어도 한 명은 2학년 학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	3점