## 01 로그함수의 도함수

(1) $y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

### ◪ 다음 함수를 미분하여라.

**1.** $y=\ln 3x$

**2.** $y=e^x\ln 5x$

**3.** $y=x\ln x$

**4.** $y=5x\ln x$

**5.** $y=\ln 2x$

**6.** $y=\ln x^4$

**7.** $y=3^x+x\ln x$

**8.** $y=x^3\ln 2x$

**9.** $y=(\ln x)^3$

**10.** $y=e^x\ln x$

**11.** $y=\ln 6x$

**12.** $y=(e^x-3)\ln x$

**13.** $y=\log_2 3x$

**14.** $y=x^3+\log_3 x$

**15.** $y=\ln x+\log_2 x$



I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

16. $y=x\log_3 2x$

17. $y=\log_2 16x$

18. $y=\log_2 4x$

19. $y=\ln x+\log_{\sqrt{5}} x$

20. $y=x^2\log_5 x$

21. $y=\log_3 \dfrac{1}{x}$

22. $y=(3x-1)\log_2 x$

23. $y=(x+2)\log_2 x$

◪ 다음 극한값을 구하여라.

24. 함수 $f(x)=\ln x^2+e^x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값

25. 함수 $f(x)=x^2+x\ln(2x-1)$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값

26. 함수 $f(x)=(x^2-2x)\ln x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e+2h)-f(e)}{5h}$의 값

27. 함수 $f(x)=x\ln x+x^3$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값

28. 함수 $f(x)=x\ln x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$의 값

29. 함수 $f(x)=x^2\ln x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{h}$의 값


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

**30.** 함수 $f(x)=\ln 2x$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h}$의 값

**31.** 함수 $f(x)=\log_3 x^3+\log_5 x^5$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(15+h)-f(15-2h)}{h}$의 값

**32.** 함수 $f(x)=e^x\log_3 x$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$의 값

**33.** 함수 $f(x)=\log 2x$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5-h)}{h}$의 값

**34.** 함수 $f(x)=e^x(1+\ln x)$에 대하여

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-e}{x-1}$의 값

**35.** 함수 $f(x)=x\ln 3x$에 대하여

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-x^3\ln 3}{x-1}$의 값

◪ 다음 값을 구하여라.

**36.** 함수 $f(x)=\ln x+e^{x-2}$에 대하여 $f'(2)$의 값

**37.** 함수 $f(x)=e^{2x}\ln x$에 대하여 $f'(1)$의 값

**38.** 함수 $f(x)=x^3-\ln x$ 에 대하여 $f'(1)$의 값

**39.** 함수 $f(x)=e^x+\ln 2x$에 대하여 $f'(1)$의 값

**40.** 함수 $f(x)=\ln 3x-7x^2$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값

**41.** $f(x)=(e^x-1)\ln x$일 때, $f'(1)$의 값

**42.** 함수 $y=e^{x-1}\ln 3x$에 대하여 $f'(1)$의 값

**43.** 함수 $f(x)=x\ln x$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{e}\right)$의 값



I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

**44.** 함수 $f(x)=x^3\ln x-x^2+1$일 때, $f'(e)$의 값

**45.** 함수 $f(x)=(x+1)\ln x$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{e}\right)$의 값

**46.** 함수 $f(x)=x\log_3 x$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{e}\right)$의 값

**47.** 함수 $f(x)=x\log x^3$에 대하여 $f'(100)$의 값

**48.** 함수 $f(x)=\log_5 x-x^5+10x$에 대하여 $f'(1)$의 값

**49.** 함수 $f(x)=(x^3-6x)\log_2 x$에 대하여 $f'(\sqrt{2})$의 값

**50.** 함수 $f(x)=e^x\log_2 x-\ln x$ 에 대하여 $f'(1)$의 값

◪ 다음 물음에 답하여라.

**51.** 함수 $f(x)=e^{\ln x+2}+x\ln x$에 대하여 $f'(e)=e^a+b$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**52.** 함수 $f(x)=x\log_3 ax^2\ (x>0)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2\log_3 4a}{x-2}=4$일 때, 상수 $a$값을 구하여라.

**53.** 함수 $f(x)=x\ln ax^3$에 대하여 $f'(1)=1$일 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

**54.** 함수 $f(x)=ax-b\ln x$에 대하여 $\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-3}{x-1}\right\}=2$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**55.** 함수 $f(x)=x\log_2 x+\ln x$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)}{x-1}=\frac{a}{\ln b}+c$일 때, 세 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

**56.** 함수 $f(x)=e^{a(x-1)}+bx$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=8$을 만족시킬 때, 두 상수 $a$, $b$의 곱 $a\cdot b$의 값을 구하여라.

**57.** 함수 $f(x)=(ax^2+bx)\times\log x$에 대하여 $f'(x)=(-2x+3)\times\log x+(3-x)\times c$일 때, 상수 $a$, $b$, $c$의 값을 구하여라.

**58.** 함수 $f(x)=(x+a)\times\ln x^b$에 대하여 $f'(x)=2\left(\ln x+1+\frac{3}{x}\right)$일 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**59.** 함수 $f(x)=a^x\ln x+bx$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=3$일 때, $f(e)$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$는 상수)

**60.** 함수 $f(x)=x^2\ln x+ax$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^3-1}=b$를 만족시킬 때, 두 상수 $a,b$에 대하여 $a^2+b^2$의 값을 구하여라.

## 02 로그함수의 도함수와 미분가능성

◪ 다음 물음에 답하여라.

**61.** 함수 $f(x)=\begin{cases}ax^2+2 & (x<1)\\ \ln bx+1 & (x\ge1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**62.** 함수 $f(x)=\begin{cases}4+ax\ln x & (0<x\le1)\\ bx+3 & (x>1)\end{cases}$ 가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**63.** 함수 $f(x)=\begin{cases}ax^3 & (x\le2)\\ \ln bx & (x>2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 $a,b$의 값을 구하여라.

**64.** 함수 $f(x)=\begin{cases}ax^2+4 & (x\le2)\\ \ln b(x-1) & (x>2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**65.** 함수 $f(x)=\begin{cases}e^x & (x<1)\\ ax+b & (x\ge1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

**66.** 함수 $f(x)=\begin{cases}\ln ax & (0<x<1) \\ be^x & (x \geq 1)\end{cases}$이 모든 양수 $x$에 대하여 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**67.** 함수 $f(x)=\begin{cases}\ln x & (0<x \leq e) \\ ax+b & (x>e)\end{cases}$가 $x=e$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**68.** 함수 $f(x)=\begin{cases}a\ln 2x-b & (x>1) \\ x+1 & (x \leq 1)\end{cases}$ 가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**69.** 함수 $f(x)=\begin{cases}\ln x+bx^2 & (x<1) \\ ae^{x-1} & (x \geq 1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 상수 $a, b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**70.** 함수 $f(x)=\begin{cases}a+\ln x & (0<x \leq 1) \\ bx+2 & (x>1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$의 값을 구하여라.

**71.** 함수 $f(x)=\begin{cases}3+a\ln x & (0<x \leq 1) \\ be^x+2 & (x>1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값을 구하여라.

**72.** 함수 $f(x)=\begin{cases}a^{x-1} & (x \leq 1) \\ \ln bx & (x>1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $ab$의 값을 구하여라.

**73.** 함수 $f(x)=\begin{cases}\ln x^3+a & (0<x<1) \\ a\times 3^{x+1}+b & (x \geq 1)\end{cases}$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

**74.** 다음 함수 $f(x)=\begin{cases}x \cdot \ln x^a & (0<x \leq e) \\ x+b & (x>e)\end{cases}$가 $x=e$에서 미분가능할 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값을 구하여라.


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

## 정답 및 해설

1) $y'=\frac{1}{x}$

⇨ $y=\ln3+\ln x$이므로 $y'=\frac{1}{x}$

2) $y'=e^x\left(\ln 5x+\frac{1}{x}\right)$

3) $y'=\ln x+1$

⇨ $y'=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

4) $y'=5\ln x+5$

⇨ $y'=(5x)'\ln x+5x(\ln x)'=5\ln x+5x\cdot\frac{1}{x}$

$=5\ln x+5$

5) $y'=\frac{1}{x}$

⇨ $y=\ln 2x=\ln 2+\ln x$이므로

$y'=(\ln 2)'+(\ln x)'=\frac{1}{x}$

6) $y'=\frac{4}{x}$

⇨ $y=\ln x^4=4\ln x$이므로 $y'=(4\ln x)'=\frac{4}{x}$

7) $y'=3^x\ln3+\ln x+1$

⇨ $y'=3^x\ln3+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=3^x\ln3+\ln x+1$

8) $y'=x^2(3\ln x+3\ln 2+1)$

⇨ $y'=3x^2\cdot\ln 2x+x^3\cdot\frac{1}{x}$

$=3x^2(\ln x+\ln 2)+x^2=x^2(3\ln x+3\ln 2+1)$

9) $y'=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

⇨ $y'=3(\ln x)^2\cdot(\ln x)'=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

10) $y'=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

⇨ 곱의 미분법에 의하여

$y'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'$

$=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

11) $y'=\frac{1}{x}$

12) $y'=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{x}$

13) $y'=\frac{1}{x\ln2}$

⇨ $y=\log_2 3x=\log_2 3+\log_2 x$이므로

$y'=(\log_2 3)'+(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

14) $y'=3x+\frac{1}{x\ln3}$

15) $y'=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{\ln2}\right)$

16) $y'=\log_3 2x+\frac{1}{\ln3}$

⇨ $y=x(\log_3 2+\log_3 x)$이므로

$y'=1\times(\log_3 2+\log_3 x)+x\times\frac{1}{x\ln3}$

$=\log_3 2x+\frac{1}{\ln3}$

17) $y'=\frac{1}{x\ln2}$

⇨ $y'=(\log_2 16x)'=(4+\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln2}$

18) $y'=\frac{1}{x\ln2}$

⇨ $y=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$이므로 $y'=\frac{1}{x\ln2}$

19) $y'=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln5}\right)$

20) $y'=x\left(2\log_5 x+\frac{1}{\ln5}\right)$

⇨ 곱의 미분법에 의하여

$y'=(x^2)'\log_5 x+x^2\times(\log_5 x)'$

$=2x\log_5 x+x^2\times\frac{1}{x\ln5}=x\left(2\log_5 x+\frac{1}{\ln5}\right)$

21) $y'=-\frac{1}{x\ln3}$

⇨ $y=\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$이므로

$y'=-(\log_3 x)'=-\frac{1}{x\ln3}$

22) $y'=3\log_2 x+\frac{3x-1}{x\ln2}$

⇨ $y'=(3x-1)'\log_2 x+(3x-1)(\log_2 x)'$

$=3\log_2 x+(3x-1)\cdot\frac{1}{x\ln2}=3\log_2 x+\frac{3x-1}{x\ln2}$

23) $y'=\log_2 x+\frac{x+2}{x\ln2}$

24) $2(2+e)$

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2=2f'(1)$

한편 $f(x)=2\ln x+e^x$에서 $f'(x)=\frac{2}{x}+e^x$이므로

구하는 극한값은 $2f'(1)=2(2+e)$

25) 8

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)$

$f'(x)=2x+\ln(2x-1)+\frac{2x}{2x-1}$

$f'(1)=2+2=4$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)=2\times 4=8$

26) $\frac{2}{5}(3e-4)$

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+2h)-f(e)}{5h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+2h)-f(e)}{2h}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}f'(e)$

한편

$f'(x)=(x^2-2x)'\times\ln x+(x^2-2x)\times(\ln x)'$

$=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\times\frac{1}{x}$

$=(2x-2)\ln x+x-2$

이므로 구하는 극한값은

$\frac{2}{5}f'(e)=\frac{2}{5}(2e-2+e-2)=\frac{2}{5}(3e-4)$

27) 8

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)$

$f'(x)=\ln x+1+3x^2$

$\therefore\ f'(1)=4$

$\therefore\ 2f'(1)=2\times 4=8$

28) 4

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}\times(-1)$

$=2f'(e)$

따라서 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$2f'(e)=2(\ln e+1)=4$

29) $12\ln 2+6$

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=3f'(2)$

$f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

$f'(2)=4\ln 2+2$

$3f'(2)=12\ln 2+6$

30) $\frac{1}{3}$

⇨ $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f'(3)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h}=\frac{1}{2}\cdot 2f'(3)=\frac{1}{3}$

31) $3\left(\frac{1}{5\ln 3}+\frac{1}{3\ln 5}\right)$

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(15+h)-f(15-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(15+h)-f(15)-\{f(15-2h)-f(15)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(15+h)-f(15)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(15-2h)-f(15)}{-2h}\times(-2)$

$=f'(15)+2f'(15)=3f'(15)$

한편 $f(x)=3\log_3 x+5\log_5 x$에서

$f'(x)=\frac{3}{x\ln 3}+\frac{5}{x\ln 5}$이므로 구하는 극한값은

$3f'(15)=3\left(\frac{3}{15\ln 3}+\frac{5}{15\ln 5}\right)=3\left(\frac{1}{5\ln 3}+\frac{1}{3\ln 5}\right)$

32) $2e^3\left(1+\frac{1}{3\ln 3}\right)$

⇨ $f'(x)=e^x\log_3 x+e^x\frac{1}{x\ln 3}$

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)-f(3-h)+f(3)}{h}=2f'(3)$

$=2e^3\left(1+\frac{1}{3\ln 3}\right)$

33) $\frac{2}{5\ln 10}$

⇨ $\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}+\frac{f(5)-f(5-h)}{h}=2f'(5)$

$f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$이므로 주어진 극한값은

$2f'(5)=\frac{2}{5\ln 10}$

34) $6e$

⇨ $f(1)=e$이고,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)=3f'(1)$

이때 $f'(x)=e^x(1+\ln x)+e^x\left(\frac{1}{x}\right)$,

$f'(1)=e+e=2e$

$\therefore\ 3f'(1)=6e$

35) 3

⇨ $f(x^3)=x^3\ln 3x^3=x^3(\ln 3+3\ln x)$


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-x^3\ln3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3\ln3+3x^3\ln x-x^3\ln3}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3x^3\ln x}{x-1}$ ($x-1=t$라 하면)

$=\lim_{t\to0}\frac{3(t+1)^3\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}3(t+1)^3\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$

$=3\cdot1\cdot1=3$

36) $\frac{3}{2}$

⇨ $f(x)=\ln x+e^{x-2}$를 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{x}+e^{x-2}$이므로 $f'(2)=\frac{1}{2}+e^0=\frac{3}{2}$

37) $e^2$

⇨ $f'(x)=2e^{2x}\ln x+e^{2x}\cdot\frac{1}{x}$ $\quad\therefore f'(1)=e^2$

38) 2

⇨ $f(x)=x^3-\ln x$

$f'(x)=(x^3)'-(\ln x)'=3x^2-\frac{1}{x}$

$f'(1)=3-1=2$

39) $e+1$

⇨ $f'(x)=e^x+\frac{2}{2x}=e^x+\frac{1}{x}$ $\quad\therefore f'(1)=e+1$

40) $-5$

⇨ $f(x)=\ln x+\ln3-7x^2$에서

$f'(x)=\frac{1}{x}-14x$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2-14\times\frac{1}{2}=-5$

41) $e-1$

⇨ $f'(x)=e^x\ln x+(e^x-1)\times\frac{1}{x}$이므로 $f'(1)=e-1$

42) $\ln3+1$

⇨ $y'=e^{x-1}\ln3x+e^{x-1}\times\frac{3}{3x}=\left(\ln3x+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}$

$f'(1)=\ln3+1$

43) 0

⇨ $f'(x)=\ln x+1$이므로 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=-1+1=0$

44) $4e^2-2e$

⇨ $f'(x)=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'-2x$
$=3x^2\ln x+x^2-2x$

$\therefore f'(e)=3e^2+e^2-2e=4e^2-2e$

45) $e$

⇨ $f'(x)=(x+1)'\times\ln x+(x+1)\times\frac{1}{x}$

$=\ln x+1+\frac{1}{x}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{e}\right)=f'(e^{-1})=-1+1+e=e$

46) 0

⇨ $f'(x)=\log_3x+\frac{1}{\ln3}$

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=-\log_3e+\frac{1}{\ln3}=-\frac{1}{\ln3}+\frac{1}{\ln3}=0$

47) $3\left(2+\frac{1}{\ln10}\right)$

⇨ $f(x)=3x\log x$에서

$f'(x)=3\{(x)'\times\log x+x\times(\log x)'\}$
$=3\left(\log x+x\times\frac{1}{x\ln10}\right)=3\left(\log x+\frac{1}{\ln10}\right)$

$\therefore f'(100)=3\left(2+\frac{1}{\ln10}\right)$

48) $\frac{1}{\ln5}+5$

⇨ $f'(x)=\frac{1}{x\ln5}-5x^4+10$이므로

$f'(1)=\frac{1}{\ln5}-5+10=\frac{1}{\ln5}+5$

49) $-\frac{4}{\ln2}$

⇨ $f'(x)=(x^3-6x)'\times\log_2x+(x^3-6x)\times(\log_2x)'$

$=(3x^2-6)\times\log_2x+(x^3-6x)\times\frac{1}{x\ln2}$

$=(3x^2-6)\times\log_2x+(x^2-6)\times\frac{1}{\ln2}$

$\therefore f'(\sqrt{2})=(2-6)\times\frac{1}{\ln2}=-\frac{4}{\ln2}$

50) $\frac{e}{\ln2}-1$

⇨ $f(x)=e^x\log_2x-\ln x$

$f'(x)=e^x\left(\log_2x+\frac{1}{x\ln2}\right)-\frac{1}{x}$

$f'(1)=e^1\left(\log_21+\frac{1}{1\cdot\ln2}\right)-\frac{1}{1}=\frac{e}{\ln2}-1$

51) 4

⇨ 주어진 함수를 미분하면

$f'(x)=\frac{e^{\ln x+2}}{x}+\ln x+1$

$f'(e)=\frac{e^{\ln e+2}}{e}+\ln e+1=e^2+2$

$\therefore a=2,\ b=2$

따라서 구하는 값은 $a+b=2+2=4$

52) $\frac{81}{4e^2}$

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2\log_34a}{x-2}=4$에서 분모가 0으로 수렴하

므로 분자도 0으로 수렴한다.
즉, $f(2)=2\log_3 4a$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-2\log_3 4a}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$

$f'(x)=\log_3 ax^2+\dfrac{2}{\ln 3}$

$f'(2)=\log_3 4a+\log_3 e^2=\log_3 3^4$

$\log_3 4a=\log_3\dfrac{81}{e^2}\qquad \therefore\ a=\dfrac{81}{4e^2}$

53) $\dfrac{1}{e^2}$

⇨ $f'(x)=\ln ax^3+x\cdot\dfrac{3ax^2}{ax^3}=\ln ax^3+3$

$f'(1)=\ln a+3=1$

$\ln a=-2\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{e^2}$

54) 4

⇨ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=2$이므로 $f(1)=a=3$

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

$f'(x)=a-\dfrac{b}{x}=3-\dfrac{b}{x}$이므로

$f'(1)=3-b=2\qquad \therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=4$

55) 6

⇨ $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)=2f'(1)$

$f(x)=x\log_2 x+\ln x$를 미분하면

$f'(x)=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{x}$

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^2)}{x-1}=2f'(1)=2\left(\log_2 1+\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{1}\right)=\dfrac{2}{\ln 2}+2$

$\therefore a=2,\ b=2,\ c=2$

따라서 구하는 값은 $a+b+c=2+2+2=6$

56) 16

⇨ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=8$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이어야 한다.

$f(1)-5=1+b-5=0\quad \therefore b=4$

$f(x)=e^{a(x-1)}+4x$를 미분하면

$f'(x)=ae^{a(x-1)}+4$이고,

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=8$이다.

따라서 $f'(1)=a+4=8\quad \therefore a=4$

따라서 구하는 값은 $a\cdot b=4\cdot 4=16$

57) $a=-1,\ b=3,\ c=\dfrac{1}{\ln 10}$

⇨ $f'(x)=(ax^2+bx)'\times\log x+(ax^2+bx)\times(\log x)'$

$=(2ax+b)\times\log x+(ax^2+bx)\times\dfrac{1}{x\ln 10}$

$=(2ax+b)\times\log x+(ax+b)\times\dfrac{1}{\ln 10}$

$=(-2x+3)\times\log x+(3-x)\times c$

$\therefore a=-1,\ b=3,\ c=\dfrac{1}{\ln 10}$

58) $a=3,\ b=2$

⇨ $f(x)=b(x+a)\times\ln x$

$f'(x)=b\{(x+a)'\times\ln x+(x+a)\times(\ln x)'\}$

$=b\left\{\ln x+(x+a)\times\dfrac{1}{x}\right\}$

$=b\left(\ln x+1+\dfrac{a}{x}\right)$

$=2\left(\ln x+1+\dfrac{3}{x}\right)$

$\therefore a=3,\ b=2$

59) $2^e+e$

⇨ $f(1)=1$에서 $b=1$이다.

$f'(x)=a^x\ln a\times\ln x+\dfrac{a^x}{x}+1$에서

$f'(1)=a+1=3\quad \therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2^x\ln x+x$이므로 $f(e)=2^e+e$ 이다.

60) 5

⇨ 주어진 극한에서 분모가 0에 수렴하므로, 분자도 0에 수렴한다.

즉 $f(1)-2=0\qquad \therefore\ f(1)=2$

$\therefore\ f(1)=a=2$

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{f'(1)}{3}$

이때, $f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}+2=2x\ln x+x+2$

$\therefore\ f'(1)=1+2=3$

$b=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x^3-1}=\dfrac{f'(1)}{3}=1$

$\therefore\ a^2+b^2=4+1=5$

61) $a=\dfrac{1}{2},\ b=e^{\frac{3}{2}}$

⇨ $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(\ln bx+1)=\lim_{x\to1-}(ax^2+2)=f(1)$

즉, $\ln b+1=a+2$에서 $a=\ln b-1\cdots$ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<1)\\ \dfrac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$

여기에서 $\lim\limits_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to1-}2ax \qquad \therefore 2a=1\cdots$ ㉡

㉠,㉡에 의하여 $a=\frac{1}{2},\ b=e^{\frac{3}{2}}$

62) $a=1,\ b=1$

⇨ $x=1$에서 연속이므로

$4+a\ln1=b+3,\ 4=b+3 \qquad \therefore\ b=1$

$f(x)=\begin{cases}4+ax\ln x & (0<x\le1)\\ x+3 & (x>1)\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}a\ln x+a & (0<x\le1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$

$x=1$에서 미분가능하므로

$a\ln1+a=1 \qquad \therefore\ a=1$

63) $a=\frac{1}{24},\ b=\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$

⇨ $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $8a=\ln2b$

$f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & (x\le2)\\ \frac{1}{x} & (x>2)\end{cases}$

$x=2$에서 미분 가능하므로

$12a=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ a=\frac{1}{24}$

$8a=\ln2b$이므로 $\frac{1}{3}=\ln2b,\ 2b=e^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ b=\frac{e^{\frac{1}{3}}}{2}=\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$

64) $a=\frac{1}{4},\ b=e^5$

⇨ 함수 $f(x)$가 미분가능하면 함수 $f(x)$는 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$a\cdot2^2+4=\ln b(2-1),$

$4a+4=\ln b$ ……㉠

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x\le2)\\ \frac{1}{x-1} & (x>2)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to2-}f'(x)=\lim\limits_{x\to2-}2ax=4a$

$\lim\limits_{x\to2+}f'(x)=\lim\limits_{x\to2+}\frac{1}{x-1}=1$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

$a$의 값을 식 ㉠에 대입하여 $b$의 값을 구하면

$b=e^5$

65) $a=e,\ b=0$

⇨ $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to1-}e^x=f(1)$에서

$a+b=e \qquad \therefore a=e-b\cdots$ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}e^x & (x<1)\\ a & (x>1)\end{cases}$

여기에서 $\lim\limits_{x\to1+}a=\lim\limits_{x\to1-}e^x \qquad \therefore a=e\cdots$ ㉡

㉠,㉡에 의하여 $a=e,\ b=0$

66) $a=e,\ b=\frac{1}{e}$

⇨ $f(x)$가 모든 양수 $x$에 대하여 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}be^x=\lim\limits_{x\to1-}\ln ax=f(1)$

$\therefore be=\ln a\cdots$ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1)\\ be^x & (x>1)\end{cases}$

여기에서 $\lim\limits_{x\to1+}be^x=\lim\limits_{x\to1-}\frac{1}{x} \qquad \therefore be=1\cdots$ ㉡

㉠,㉡에 의하여 $a=e,\ b=\frac{1}{e}$

67) $a=\frac{1}{e},\ b=0$

⇨ $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하려면 $x=e$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to e+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to e-}\ln x=f(e)$

$ae+b=1$

$\therefore b=1-ae\cdots$ ㉠

또, $f'(e)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<e)\\ a & (x>e)\end{cases}$

여기에서 $\lim\limits_{x\to e+}a=\lim\limits_{x\to e-}\frac{1}{x}$

$\therefore a=\frac{1}{e}\cdots$ ㉡

㉠,㉡에 의하여 $a=\frac{1}{e},\ b=0$

68) $\ln2-1$

⇨ (ⅰ) $x=1$에서 연속

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로 $a\ln2-b=2$이다.

(ⅱ) $x=1$에서 미분가능

$f'(x)=\begin{cases}\frac{a}{x} & (x>1)\\ 1 & (x\le1)\end{cases}$이고,

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=f'(1)$이므로 $\frac{a}{1}=a=1$이다.

이를 (ⅰ)에 대입하면 $b=\ln2-2$이다.

따라서 $a+b=\ln2-1$이다.

69) $-2$

⇨ $x=1$에서 미분 가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $b=a$이다.

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}+2bx & (x<1) \\ ae^{x-1} & (x \geq 1) \end{cases}$

$x=1$에서 미분가능하므로

$1+2b=a$, $1+2b=b$

$\therefore\ b=-1$, $a=-1$

$\therefore\ a+b=-2$

70) 10

⇨ $x=1$에서 미분가능하므로, $x=1$에서 연속이다.

$a=b+2$

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (0<x\leq 1) \\ b & (x>1) \end{cases}$

$\dfrac{1}{1}=b \qquad \therefore\ b=1,\ a=3$

$\therefore\ a^2+b^2=9+1=10$

71) $\dfrac{1}{e}$

⇨ (ⅰ) $x=1$에서 연속

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$이므로 $3=be+2$

따라서 $b=\dfrac{1}{e}$이다.

(ⅱ) $x=1$에서 미분가능

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & (0<x\leq 1) \\ be^x & (x>1) \end{cases}$에서

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1+}f'(x)$이므로 $a=be=1$이다.

따라서 $ab=\dfrac{1}{e}$이다.

72) $e^2$

⇨ $x=1$에서 연속이므로

$a^{1-1}=\ln b$, $1=\ln b \qquad \therefore\ b=e$

$f'(x)=\begin{cases} (\ln a)a^{x-1} & (x\leq 1) \\ \dfrac{1}{x} & (x>1) \end{cases}$

$x=1$에서 미분가능하므로 $\ln a=1 \qquad \therefore\ a=e$

$\therefore\ a\times b=e^2$

73) $\dfrac{3}{\ln 3}$

⇨ 실수 전체에서 연속이므로

$a=a\times 3^2+b$, $8a+b=0$

$f'(x)=\begin{cases} 3\times\dfrac{1}{x} & (0<x<1) \\ 3a(\ln 3)3^x & (x\geq 1) \end{cases}$

$x=1$에서 미분 가능하므로 $3=9a(\ln 3)$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{3\ln 3}$, $b=-8a=-\dfrac{8}{3\ln 3}$

$\therefore\ a-b=\dfrac{1}{3\ln 3}+\dfrac{8}{3\ln 3}=\dfrac{3}{\ln 3}$

74) $-\dfrac{1}{4}e$

⇨ $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하므로 $x=e$에서 연속

$\lim\limits_{x\to e}f(e)=e+b=ae$

$f'(e)=\ln e^a+ae\dfrac{1}{e}=(\ln e+1)a=2a=1$이므로

$a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ b=-\dfrac{1}{2}e$

$\therefore\ ab=-\dfrac{1}{4}e$


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110