



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시  
 1) 제작연월일 : 2019-02-13  
 2) 제작자 : 교육지대(주)  
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

## 01 등비중항

0이 아닌 세 수  $a, b, c$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때,  $b$ 를  $a$ 와  $c$ 의 등비중항이라 하며  $b^2 = ac$ 가 성립한다.

(참고)  $a > 0, c > 0$ 일 때,  $b = \sqrt{ac}$ 에서  $b$ 를  $a$ 와  $c$ 의 기하평균이라 한다.

■ 다음 세 수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때,  $x$ 의 값을 구하여라.

1.  $2, x, 8$

2.  $2, 6, x$

3.  $x, x^2 - 2, x^3$

4.  $x - 2, x + 1, x - 5$

5.  $x - 2, x, 2x + 3$  (단,  $x > 0$ )

6.  $x + 1, 2x, 4x - 3$

7.  $x - 2, x + 2, x + 7$

8.  $x, x + 1, 4$

9.  $3x, x - 1, \frac{1}{12}x$  (단,  $x > 1$ )

■ 다음 물음에 답하여라.

10. 서로 다른 세 수  $4, a, b$ 는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수  $a, b, 4$ 는 이 순서로 등비수열을 이룰 때,  $a, b$ 의 값을 구하여라.

11. 세 수  $a, b, 24$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수  $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때,  $a, b$ 의 값을 각각 구하여라. (단,  $ab > 0$ )

12. 서로 다른 두 수  $a, b$ 에 대하여 세 수  $a, 3, b$ 는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수  $3, a, b$ 는 이 순서로 등비수열을 이룰 때,  $a, b$ 의 값을 구하여라.

13. 2와 12 사이에 두 양수  $a, b$ 를 넣으면 세 수 2,  $a, b$ 는 이 순서로 등비수열을 이루고, 세 수  $a, b, 12$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다. 이때,  $a, b$ 의 값을 구하여라.

14. 서로 다른 두 양수  $a, b$ 에 대하여 세 수  $-4, a, b$ 는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수  $a, b, 16a$ 는 이 순서로 등비수열을 이룰 때,  $a, b$ 의 값을 구하여라.

15. 서로 다른 두 양수  $a, b$ 에 대하여 세 수  $a, b, 9$ 는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수  $a, b, 4a$ 는 이 순서로 등비수열을 이룰 때,  $a, b$ 의 값을 구하여라.

16. 세 수 1,  $a, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수  $a, b, 1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 1이 아닌 실수  $a, b$ 의 값을 각각 구하여라.

17. 서로 다른 두 양수  $a, b$ 에 대하여 세 수  $3a, b, 10$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수  $2, a, b$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때,  $a-2b$ 의 값을 구하여라.

18. 세 수  $a, b, c$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 세 수  $2c, a, 4$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.  $a+b+c=0$ 일 때,  $c-a$ 의 값을 구하여라.

19. 두 양수  $a, b$ 에 대하여 세 수  $a+3, 3, b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수  $\frac{2}{b}, 1, \frac{2}{a+3}$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 때,  $b-a$ 의 값을 구하여라.

## 02 등비수열의 합

### 1. 등비수열의 합

첫째항이  $a$ , 공비가  $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면 다음과 같다.

$$(1) r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(2) r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

$$\textcircled{\text{참고}} r > 1 \text{ 일 때 } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

$$r < 1 \text{ 일 때 } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ 을 이용하면 편리하다.}$$

### 2. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면  $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

■ 첫째항  $a$ 와 공비  $r$ 가 다음과 같은 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째 항부터 제 10항까지의 합  $S_{10}$ 을 구하여라.

20.  $a = \frac{1}{9}, r = \sqrt{3}$

21.  $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$

22.  $a = 2, r = \frac{1}{3}$

23.  $a = -3, r = -2$

■ 다음을 만족시키는 등비수열의 합을 구하여라.

24.  $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^9$

25.  $2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$

26.  $4 + (-2) + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{128}\right)$

■ 다음 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 을 구하여라.

27.  $1, 2, 4, 8, \dots$

28.  $4, 4, 4, 4, \dots$

29.  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

30.  $2, 8, 32, 128, \dots$

31.  $-27, -9, -3, -1, \dots$

32.  $\frac{3}{2}, -1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots$

33.  $2, -6, 18, -54, \dots$

34.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

35.  $\frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, \dots$

■ 등비수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이 다음과 같이 주어질 때, 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 을 구하여라.

36.  $a_n = \frac{1}{3^n}$

37.  $a_n = 2^{2n-1}$

38.  $a_n = 5 \cdot 2^{n-2}$

39.  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

▣ 다음 등비수열의 첫째항부터 주어진 항까지의 합  $S_n$ 을 구하여라.

40. 첫째항이 8, 공비가 -3, 끝항이 648

41. 첫째항이 9, 공비가 1, 항수가 11

42. 첫째항이 3, 공비가 2, 항수가 6

▣ 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

43.  $a_1 + a_2 = 1$ ,  $a_3 + a_4 = 3$ 이고 공비가 양수일 때, 첫째항부터 제6항까지의 합을 구하여라.

44. 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합이 처음으로 500보다 크게 되는 자연수  $n$ 의 값을 구하여라.

45. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 6, \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 12 \text{ 일 때,}$$

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \text{의 값을 구하여라.}$$

46.  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ,  $a_4 + a_5 + a_6 = 8$ 이고 공비가 실수일 때, 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하여라.

47. 수열  $\{a_n\}$ 은 등비수열이고,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5, \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 10 \text{ 일 때,}$$

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \text{의 값을 구하여라.}$$

48. 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $S_5 = 10$ ,  $S_{10} = 30$ 이다. 이때,  $S_{15}$ 의 값을 구하여라.

49. 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.  $\frac{S_{20}}{S_{10}} = 10$ 일 때,

$$\frac{a_{22}}{a_7} \text{의 값을 구하여라.}$$

50. 모든 항이 실수인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21, 첫째항부터 제6항까지의 합이 189일 때, 첫째항부터 제8항까지의 합을 구하여라.

51. 첫째항부터 제4항까지의 합이 2, 첫째항부터 제8항까지의 합이 8인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제12항까지의 합을 구하여라.

52. 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $S_{10} = 5$ ,  $S_{20} = 20$ 이다. 이때,  $S_{30}$ 의 값을 구하여라.

53. 첫째항부터 등비수열을 이루는 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 이  $S_n = a \cdot 3^{n-1} + 3$ 일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하여라.

54. 각 항이 실수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 + a_2 = 20$ ,  $a_4 + a_5 = 160$ 을 만족한다. 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\frac{S_{10}}{S_5}$ 의 값을 구하여라.

55. 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 에 대하여  $\frac{S_4}{S_2} = 9$ 일 때,  $\frac{a_5}{a_3}$ 의 값을 구하여라.

56. 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 할 때,  $S_4 = 13S_2$ 가 성립한다.  $\frac{a_7}{a_5}$ 의 값을 구하여라.

57. 첫째항이 2이고, 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\frac{S_6 - S_4}{S_2} = 36$ 이 성립한다.  $a_3$ 의 값을 구하여라.

■ 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 이 다음과 같을 때, 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하고, 첫째항부터 등비수열을 이루는지 확인하여라.

58.  $S_n = 3^{n+1}$

59.  $S_n = 2^n + 1$

60.  $S_n = 3 \cdot 5^n - 3$

61.  $S_n = 2^n - 1$

62.  $S_n = 3 \cdot 2^n - 3$

63.  $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$

64.  $S_n = 5^{n+1} - 5$

65.  $S_n = 3^n - 1$

## 03 등비수열의 합 활용

(1) 원리합계 : 원금과 이자를 합한 금액을 원리합계라 하고, 원금  $a$ 원을 연이율  $r$ 로  $n$ 년간 예금했을 때, 원리합계  $S$ 는 다음 두 가지 방법으로 계산한다.

① 단리법 : 원금에 대해서만 이자를 계산하는 방법

$$\Rightarrow S = a(1+rn) \text{ (원)}$$

② 복리법 : 원금에 이자를 합한 금액을 다시 원금으로 보고 이자를 계산하는 방법  $\Rightarrow S = a(1+r)^n \text{ (원)}$

(2) 적금 : 일정한 금액을 일정한 기간마다 적립하는 것을 적금 또는 적립예금이라 하고, 연이율  $r$ , 1년마다 복리로  $a$ 원씩 적립했을 때,  $n$ 년째 말의 원리합계  $S$ 는 각각 다음과 같다.

① 매년 초에 적립하는 경우:  $S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)}$

② 매년 말에 적립하는 경우:  $S = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)}$

■ 다음과 같은 이율과 기간 동안 매년 초에 10만 원씩  $n$ 년 동안 적립할 때,  $n$ 년 말에 적립되는 금액을 구하여라.

66. 연이율 1%의 복리로 12년 동안 적립 (단,  $1.01^{12} = 1.13$ 로 계산한다.)

67. 연이율 2%의 복리로 36년 동안 적립 (단,  $1.02^{36} = 2.04$ 로 계산한다.)

68. 연이율 7%의 복리로 9년 동안 적립 (단,  $1.07^9 = 1.84$ 로 계산한다.)

69. 연이율 8%의 복리로 12년 동안 적립 (단,  $1.08^{12} = 2.52$ 로 계산한다.)

70. 연이율 6%의 복리로 11년 동안 적립 (단,  $1.06^{11} = 1.9$ 로 계산한다.)

71. 연이율 5%의 복리로 8년 동안 적립 (단,  $1.05^8 = 1.48$ 로 계산한다.)

■ 다음 물음에 답하여라.

72. 월이율 1%의 복리로 매월 초에 10만 원씩 24개월 동안 적립했을 때, 24개월 후에 적립되는 금액을 구하여라. (단,  $1.01^{24} = 1.27$ 로 계산한다.)

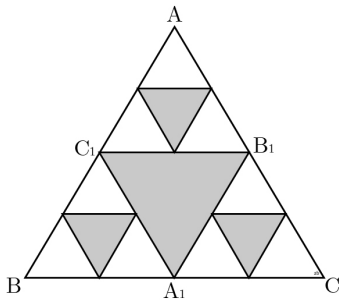
73. 값은 여행경비 600만원을 마련하기 위해 2017년 1월 말부터 2018년 12월 말까지 매달 말  $a$ 원씩 적립하려고 한다. 이때  $a$ 의 값을 구하여라. (단, 월이율 1%의 복리,  $1.01^{24} = 1.27$ 으로 계산하여 천의 자리에서 버림한다.)

74. 매월 1일에 1만 원씩 월이율 1%의 1개월마다의 복리로 적립해 나가려고 한다. 올해 1월 1일에 첫 적립금을 내었을 때, 내년 12월 31일에 받는 원리합계를 구하여라. (단,  $1.01^{25} = 1.28$ 로 계산한다.)

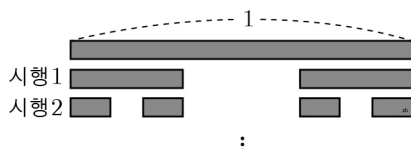
75. 연이율 6%의 복리로 매년 초에 30만 원씩 적립하면 10년 말에는 적립 총액이 얼마나 되는지 구하여라. (단,  $1.06^{10} = 1.79$ 로 계산한다.)

76. 2000만 원짜리 자동차를 구입하는 데 있어 모두 할부로 지불하기로 하였다. 구입한 날로부터 1개월 후부터 매달 일정한 금액을 36회로 나누어 갚는다면 매달 갚아야 하는 값을 구하여라. (단,  $1.01^{36} = 1.4$ , 월이율은 1%, 1개월 마다의 복리로 계산한다.)

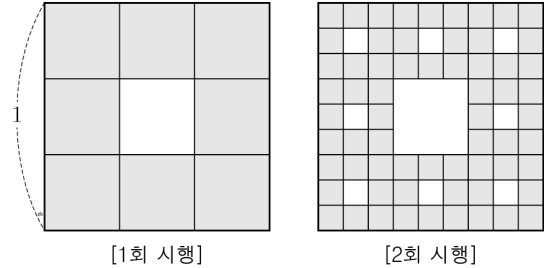
77. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형  $ABC$ 가 있다. 첫 번째 시행에서 각 변의 중점을 이어서 만든 정삼각형  $A_1B_1C_1$ 을 색칠하고, 두 번째 시행에서 첫 번째 시행 후 남은 3개의 정삼각형에서 같은 방법으로 만든 정삼각형을 색칠한다. 이와 같은 시행을 5회 반복했을 때, 색칠한 부분의 넓이의 합을 구하여라.



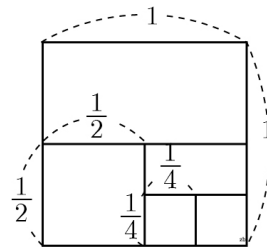
78. 길이가 1인 막대가 있다. 그림과 같이 이 막대를 3등분하여 가운데 부분을 잘라 내는 것을 시행1이라고 하자. 시행1 이후 남아 있는 두 막대를 각각 3등분하여 가운데 부분을 잘라내는 것을 시행2라고 하자. 이와 같은 시행을 10번 반복했을 때, 그동안 잘라 낸 모든 막대의 길이의 합을 구하여라.



79. 한 변의 길이가 1인 정사각형이 있다. 이 정사각형을 왼쪽 그림과 같이 9등분하여 중앙의 정사각형을 제거한다. 다음과 같이 나머지 정사각형 8개의 각각을 다시 9등분하여 중앙의 정사각형을 제거한다. 이 과정을  $n$ 회 반복하여 시행한 후 남은 정사각형들의 넓이의 합을 구하여라.



80. 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 종이가 있다. 그림과 같이 사각형의 절반을 오려내어 버리는 시행을 한다. 남은 사각형에 같은 시행을 반복한다고 했을 때,  $n$ 번의 시행 후 버려진 사각형의 넓이의 총합을 구하여라.





## 정답 및 해설

1)  $\pm 4$ 

$$\Rightarrow x^2 = 2 \times 8 = 16 \quad \therefore x = \pm 4$$

2) 18

$$\Rightarrow 36 = 2x \quad \therefore x = 18$$

3)  $\pm 1$ 

$$\Rightarrow (x^2 - 2)^2 = x^4, \quad -4x^2 + 4 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$$

4) 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+1)^2 &= (x-2)(x-5) \text{이므로} \\ x^2 + 2x + 1 &= x^2 - 7x + 10 \\ 9x &= 9 \quad \therefore x = 1 \end{aligned}$$

5) 3

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 &= (x-2)(2x+3) \text{에서} \\ x^2 - x - 6 &= 0 \quad (x+2)(x-3) = 0 \\ \therefore x &= 3 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

6) 3

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x^2 &= (x+1)(4x-3) \\ x-3 &= 0 \quad \therefore x = 3 \end{aligned}$$

7) 18

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+2)^2 &= (x-2)(x+7) \\ 4x+4 &= 5x-14 \quad \therefore x = 18 \end{aligned}$$

8) 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+1)^2 &= 4x, \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \quad \therefore x = 1 \end{aligned}$$

9) 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x-1)^2 &= 3x \times \frac{1}{12}x \text{이므로 } x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4}x^2 \\ 3x^2 - 8x + 4 &= 0, \quad (3x-2)(x-2) = 0 \\ \therefore x &= \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2 \\ \text{이때, } x > 1 \text{이므로 } x &= 2 \end{aligned}$$

10)  $a = 1, b = -2$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4, a, b \text{는 이 순서로 등차수열을 이루므로} \\ 2a &= 4 + b \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ a, b, 4 \text{는 이 순서로 등비수열을 이루므로} \\ b^2 &= 4a \\ a = \frac{b^2}{4} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ \frac{b^2}{2} &= 4 + b, \quad b^2 - 2b - 8 = 0 \\ (b+2)(b-4) &= 0 \quad \therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 4 \\ \text{이때, } b = 4 \text{이면 } a &= 4 \text{가 되어 } a, b \text{는 서로 다른} \\ \text{수라는 조건에 모순된다.} \\ \text{따라서 } b &= -2 \text{이고 이때의 } a = 1 \end{aligned}$$

11)  $a = 8, b = 16$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow a, b, 24 \text{가 이 순서로 등차수열을 이루므로} \\ 2b &= a + 24 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ 4, a, b \text{가 이 순서로 등비수열을 이루므로} \\ a^2 &= 4b \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ \textcircled{7} \text{을 } \textcircled{8} \text{에 대입하면 } a^2 &= 2a + 48 \\ (a-8)(a+6) &= 0 \\ \therefore a &= 8, b = 16 \quad (\because ab > 0) \end{aligned}$$

12)  $a = -6, b = 12$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow a, 3, b \text{는 이 순서로 등차수열을 이루므로} \\ 6 &= a + b \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ 3, a, b \text{는 이 순서로 등비수열을 이루므로} \\ a^2 &= 3b \\ b = \frac{a^2}{3} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하여 풀면} \\ 6 &= a + \frac{a^2}{3}, \quad a^2 + 3a - 18 = 0 \\ (a+6)(a-3) &= 0 \quad \therefore a = -6 \text{ 또는 } a = 3 \\ \text{이때, } a = 3 \text{이면 } \textcircled{7} \text{에서 } b &= 3 \text{이 되어 } a, b \text{는 서로} \\ \text{다른 두 수라는 조건에 모순된다.} \\ \therefore a &= -6, b = 12 \end{aligned}$$

13)  $a = 4, b = 8$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2, a, b \text{는 이 순서로 등비수열을 이루므로 } a^2 &= 2b \\ a, b, 12 \text{는 이 순서로 등차수열을 이루므로} \\ 2b &= a + 12 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ 2b = a^2 \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하여 풀면} \\ a^2 &= a + 12, \quad a^2 - a - 12 = 0 \\ (a+3)(a-4) &= 0 \\ \therefore a &= 4 \quad (\because a > 0), \quad b = 8 \end{aligned}$$

14)  $a = 2, b = 8$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow -4, a, b \text{는 이 순서로 등차수열을 이루므로} \\ 2a &= -4 + b \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ a, b, 16a \text{는 이 순서로 등비수열을 이루므로} \\ b^2 &= 16a^2 \quad \therefore b = \pm 4a \\ \text{이때, } a, b \text{는 모두 양수이므로 } a, b \text{는 서로 같은} \\ \text{부호이다.} \\ \text{따라서 } b &= 4a \text{이고 이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ 2a &= 4 \quad \therefore a = 2, b = 8 \end{aligned}$$

15)  $a = 3, b = 6$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow a, b, 9 \text{는 이 순서로 등차수열을 이루므로} \\ 2b &= a + 9 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ a, b, 4a \text{는 이 순서로 등비수열을 이루므로} \\ b^2 &= a \cdot 4a = 4a^2 \quad \therefore b = \pm 2a \\ \text{이때, } a, b \text{는 모두 양수이므로 } a, b \text{는 서로 같은} \\ \text{부호이다.} \\ \text{따라서 } b &= 2a \text{이고 이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ 4a &= a + 9 \quad \therefore a = 3, b = 6 \end{aligned}$$



$$16) a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

⇒ 1, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2a = 1 + b \quad \therefore b = 2a - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

a, b, 1이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면  $(2a-1)^2 = a$ 에서

$$4a^2 - 5a + 1 = 0, (4a-1)(a-1) = 0$$

$$a \neq 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$17) -20$$

⇒ b는 3a와 10의 등차중항이므로  $2b = 3a + 10$

$$a \text{는 } 2 \text{와 } b \text{의 등비중항이므로 } a^2 = 2b$$

연립하여 풀면  $a^2 = 3a + 10, a > 0$ 이므로

$$a = 5, b = \frac{25}{2}$$

$$\therefore a - 2b = -20$$

$$18) 16$$

⇒ b는 a와 c의 등차중항이므로  $2b = a + c$

$$a \text{는 } 2c \text{와 } 4 \text{의 등비중항이므로 } a^2 = 8c$$

$a + b + c = 0$ 에  $a + c = 2b$ 를 대입하면  $b = 0$

$$\begin{cases} a^2 = 8c \\ a + c = 0 \end{cases} \text{를 풀면 } a = -8, c = 8$$

$$\therefore c - a = 8 - (-8) = 16$$

$$19) 3 - 2\sqrt{5}$$

⇒ 3은  $a+3$ 과 b의 등차중항이므로  $a+3+b=6$

$$a+b=3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$1 \text{은 } \frac{2}{b} \text{와 } \frac{2}{a+3} \text{의 등비중항이므로 } \frac{4}{b(a+3)} = 1$$

$$b(a+3) = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면  $a = \sqrt{5}, b = 3 - \sqrt{5}$

$$\therefore b - a = 3 - \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3 - 2\sqrt{5}$$

$$20) \frac{121}{9}(\sqrt{3}+1)$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{1}{9} \times \{(\sqrt{3})^{10} - 1\}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(3^5 - 1)(\sqrt{3} + 1)}{9(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{121}{9}(\sqrt{3} + 1)$$

$$21) 31(2 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{\sqrt{2} \times \{(\sqrt{2})^{10} - 1\}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2^5 - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = 31(2 + \sqrt{2})$$

$$22) 3\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{2 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$$

$$23) 1023$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{(-3) \times \{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = 2^{10} - 1 = 1023$$

$$24) 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

⇒ 공비는  $\frac{1}{2}$ 이므로  $\left(\frac{1}{2}\right)^9$ 을 제n항이라 하면

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \quad \therefore n = 10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

$$25) 682$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{2 \cdot (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^5 - 1) = 682$$

$$26) \frac{341}{128}$$

⇒ 첫째항이 4, 공비가  $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$-\frac{1}{128}$ 을 제n항이라고 하면

$$4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128} = \left(-\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9 \quad \therefore n = 10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{4 \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8}{3} \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\} = \frac{341}{128}$$

$$27) 2^n - 1$$

⇒ 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$$S_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$28) 4n$$

⇒ 첫째항이 4, 공비가 1이므로  $S_n = 4n$

$$29) \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

⇒ 첫째항이 1, 공비가  $\frac{1}{3}$ 이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$30) \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

⇒ 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$$S_n = \frac{2 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

$$31) -\frac{81}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

⇒ 첫째항이 -27, 공비가  $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{-27 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{81}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$32) \frac{9}{10} \left\{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

⇒ 첫째항이  $\frac{3}{2}$ , 공비가  $-\frac{2}{3}$ 이므로

$$S_n = \frac{\frac{3}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{9}{10} \left\{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$33) \frac{1}{2} \{1 - (-3)^n\}$$

⇒ 첫째항이 2, 공비가 -3이므로

$$S_n = \frac{2 \times \{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)} = \frac{1}{2} \{1 - (-3)^n\}$$

$$34) 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

⇒ 첫째항이  $\frac{1}{2}$ , 공비가  $\frac{1}{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$35) \frac{1}{27}(3^n - 1)$$

⇒ 첫째항이  $\frac{2}{27}$ , 공비가 3이므로

$$S_n = \frac{\frac{2}{27} \times (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{27}(3^n - 1)$$

$$36) \frac{1}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

⇒  $a_n = \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 에서 첫째항이  $\frac{1}{3}$ ,

공비가  $\frac{1}{3}$ 이므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{3} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$37) \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

⇒  $a_n = 2^{2n-1} = 2 \cdot 2^{2(n-1)} = 2 \cdot 4^{n-1}$ 에서

첫째항이 2, 공비가 4이므로

$$S_n = \frac{2 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

$$38) \frac{5}{2}(2^n - 1)$$

⇒  $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} = \frac{5}{2} \cdot 2^{n-1}$ 에서

첫째항이  $\frac{5}{2}$ , 공비가 2이므로

$$S_n = \frac{\frac{5}{2} \times (2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{5}{2}(2^n - 1)$$

$$39) 3^n - 1$$

⇒ 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$$S_n = \frac{2 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

$$40) 488$$

⇒ 648을 제 $n$ 항이라고 하면

$$8 \times (-3)^{n-1} = 648 \text{이므로}$$

$$(-3)^{n-1} = 81 = (-3)^4 \quad \therefore n = 5$$

$$\therefore S_5 = \frac{8 \times \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 2 \times (1 + 3^5) = 488$$

$$41) 99$$

$$\Rightarrow S_{11} = 9 \times 11 = 99$$

$$42) 189$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{3 \times (2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 63 = 189$$

$$43) 13$$

⇒ 첫째항을  $a$ , 공비를  $r(r > 0)$ , 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$a_1 + a_2 = a + ar = 1 \text{에서}$$

$$a(1 + r) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = 3 \text{에서}$$

$$ar^2(1 + r) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2 = 3$$

$$\therefore r = \sqrt{3} \quad (\because r > 0)$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a(1 + \sqrt{3}) = 1 \quad \therefore a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\therefore S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{3^3-1}{\sqrt{3}-1} = 13$$

44) 7

⇒ 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열에서 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_n = \frac{5(2^n-1)}{2-1} = 5(2^n-1)$$

$$S_n > 500 \text{에서 } 5(2^n-1) > 500 \quad \therefore 2^n > 101$$

그런데  $2^6 = 64$ ,  $2^7 = 128$ 이므로  $n \geq 7$

따라서  $n = 7$ 일 때, 처음으로 500보다 크게 된다.

45) 24

⇒  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_4 = 6$ 이고

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = S_8 - S_4 = 12 \text{이므로}$$

$$S_8 = S_4 + 12 = 18$$

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$$S_4 = 6 \text{에서 } \frac{a(r^4-1)}{r-1} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_8 = 18 \text{에서 } \frac{a(r^8-1)}{r-1} = 18$$

$$\text{즉, } \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = 18 \text{이고 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$r^4 + 1 = 3 \quad \therefore r^4 = 2$$

이때,  $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = S_{12} - S_8$ 이므로

$$S_{12} = \frac{a(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1} \\ = 6(2^2+2+1) = 42$$

$$\therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = S_{12} - S_8 = 42 - 18 = 24$$

46) 73

⇒ 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ , 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 1 \text{에서}$$

$$a(1+r+r^2) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = ar^3 + ar^4 + ar^5 = 8 \text{에서}$$

$$ar^3(1+r+r^2) = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = 2 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 7a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{7}$$

$$\therefore S_9 = \frac{a(r^9-1)}{r-1} = \frac{1}{7} \times \frac{2^9-1}{2-1} = 73$$

47) 20

⇒ 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ , 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_4 = 5 \text{에서}$$

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_8 = S_8 = 5 + 10 = 15 \text{에서}$$

$$\frac{a(r^8-1)}{r-1} = 15$$

$$\therefore \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = 15 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면  $r^4 + 1 = 3$ , 즉  $r^4 = 2$ 이므로

$$S_{12} = \frac{a(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$$

$$= 5(2^2+2+1) = 35$$

$$\therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = S_{12} - S_8 = 35 - 15 = 20$$

48) 70

⇒ 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$$S_5 = 10 \text{에서 } \frac{a(r^5-1)}{r-1} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = 30 \text{에서 } \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 30$$

$$\text{즉, } \frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1} = 30 \text{이고 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$r^5 + 1 = 3 \quad \therefore r^5 = 2$$

$$\therefore S_{15} = \frac{a(r^{15}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1} \\ = 10(2^2+2+1) = 70$$

49) 27

⇒ 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하자.

$$\frac{S_{20}}{S_{10}} = \frac{\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}} = \frac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{(r^{10}-1)} = r^{10} + 1 = 10$$

$$\therefore r^{10} = 9$$

$$\therefore \frac{a_{22}}{a_7} = \frac{ar^{21}}{ar^6} = r^{15} = 9\sqrt{9} = 27$$

50) 765

⇒ 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ , 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 189 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 + 1 = 9 \text{이므로}$$

$$r^3 = 8 = 2^3 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 7a = 21 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore S_8 = \frac{a(r^8-1)}{r-1} = \frac{3 \times (2^8-1)}{2-1} = 765$$

51) 26

⇒ 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ , 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_8 = \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L} \div \textcircled{I}$ 을 하면

$$1+r^4=4 \quad \therefore r^4=3$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{12} &= \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r} \\ &= S_4(1+r^4+r^8) = 2 \times (1+3+3^2) = 26 \end{aligned}$$

52) 65

$\Rightarrow$  첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$$S_{10} = 5 \text{에서 } \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$S_{20} = 20 \text{에서 } \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 20$$

$$\text{즉, } \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 20 \text{이고 } \textcircled{I} \text{을 대입하면}$$

$$r^{10}+1=4 \quad \therefore r^{10}=3$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{30} &= \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5(3^2+3+1) = 65 \end{aligned}$$

53) -9

$\Rightarrow n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (a \cdot 3^{n-1} + 3) - (a \cdot 3^{n-2} + 3) \\ &= 2a \cdot 3^{n-2} \quad \dots\dots \textcircled{I} \end{aligned}$$

$$S_n = a \cdot 3^{n-1} + 3 \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = a + 3 \quad \dots\dots \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{II} \text{에서 } a_1 = \frac{2a}{3} = S_1 = a + 3 \text{을 만족시켜야 하}$$

$$\text{므로 } -\frac{a}{3} = 3 \quad \therefore a = -9$$

54) 33

$\Rightarrow$  등비수열의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하자.

$$a_1 + a_2 = a + ar = 20$$

$$a_4 + a_5 = ar^3 + ar^4 = r^3(a + ar) = 160$$

$$20r^3 = 160 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^5-1)}{r-1}} = \frac{(r^5-1)(r^5+1)}{(r^5-1)}$$

$$= r^5 + 1 = 2^5 + 1 = 33$$

55) 8

$\Rightarrow$  등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{\frac{a(1-r^4)}{1-r}}{\frac{a(1-r^2)}{1-r}} = \frac{1-r^4}{1-r^2} = \frac{(1+r^2)(1-r^2)}{1-r^2} = 1+r^2$$

$$1+r^2=9 \quad \therefore r^2=8$$

$$\therefore \frac{a_5}{a_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = r^2 = 8$$

56) 12

$\Rightarrow$  등비수열의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하자.

$$S_4 = \frac{a(r^4-1)}{r-1} = \frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}, \quad S_2 = \frac{a(r^2-1)}{r-1}$$

$$S_4 = 13S_2 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1} = 13 \cdot \frac{a(r^2-1)}{r-1}, \quad r^2+1=13,$$

$$r^2=12$$

$$\therefore \frac{a_7}{a_5} = \frac{ar^6}{ar^4} = r^2 = 12$$

57) 12

$\Rightarrow$  첫째항이 2인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 이라 하면

$$\frac{S_6 - S_4}{S_2} = \frac{a_6 + a_5}{a_1 + a_2} = \frac{2r^5 + 2r^4}{2 + 2r} = \frac{2r^4(r+1)}{2(r+1)} = r^4 = 36$$

$$r > 0 \text{이므로 } r^2 = 6 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_3 = 2 \cdot r^2 = 2 \times 6 = 12$$

58)  $a_n = 2 \cdot 3^n$  ( $n \geq 2$ ), 제2항부터 등비수열을 이룬다.

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3^n - 3 = 2 \cdot 3^n \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$S_1 = 9$ 와  $\textcircled{I}$ 에  $n=1$ 을 대입한 값이 다르므로 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 9이고, 제2항부터 공비가 3인 등비수열을 이룬다.

59)  $a_1 = 3, a_n = 2^{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 제2항부터 등비수열을 이룬다.

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2^n + 1 - (2^{n-1} + 1) = 2^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$S_1 = 3$ 과  $\textcircled{I}$ 에  $n=1$ 을 대입한 값이 다르므로 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고, 제2항부터 공비가 2인 등비수열을 이룬다.

60)  $a_n = 12 \cdot 5^{n-1}$  ( $n \geq 1$ ), 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3 \cdot 5^n - 3 - (3 \cdot 5^{n-1} - 3)$$

$$= 12 \cdot 5^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$S_1 = 12 \text{와 } \textcircled{I} \text{에 } n=1 \text{을 대입한 값이 같으므로}$$

$$a_n = 12 \cdot 5^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

61)  $a_n = 2^{n-1}$  ( $n \geq 1$ ), 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$   
 $= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1)$   
 $= 2^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{7}$   
 $S_1 = 2 - 1 = 1$ 과  $\textcircled{7}$ 에  $n=1$ 을 대입한 값이 같으므로  
 $a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$   
 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

62)  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$ , 첫째항부터 등비수열을 이룬다.  
 $\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$   
 $= 3 \cdot 2^n - 3 - (3 \cdot 2^{n-1} - 3)$   
 $= 3 \cdot 2^{n-1}$   
 $S_1 = 3, a_1 = 3$   
 $n=1$ 을 대입한 값이 같으므로 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$   
 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

63)  $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 1)$ , 첫째항부터 등비수열을 이룬다.  
 $\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$   
 $= 2 \cdot 3^n - 2 - (2 \cdot 3^{n-1} - 2)$   
 $= 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{7}$   
 $S_1 = 2 \cdot 3^1 - 2 = 4$ 와  $\textcircled{7}$ 에  $n=1$ 을 대입한 값이 같으므로 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  
 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 1)$   
 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

64)  $a_n = 4 \times 5^n \quad (n \geq 1)$ , 첫째항부터 등비수열을 이룬다.  
 $\Rightarrow n \geq 2$ 일 때,  
 $a_n = S_n - S_{n-1} = 5^{n+1} - 5^n = 4 \times 5^n \quad \dots\dots \textcircled{7}$   
 한편,  $a_1 = S_1 = 5^2 - 5 = 20$ 은  $\textcircled{7}$ 에  $n=1$ 을 대입한 것과 같다.  $\therefore a_n = 4 \times 5^n \quad (n \geq 1)$   
 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

65)  $a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 1)$ , 첫째항부터 등비수열을 이룬다.  
 $\Rightarrow n \geq 2$ 일 때,  
 $a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1)$   
 $= 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$   
 한편,  $a_1 = S_1 = 3 - 1 = 2$ 는  $\textcircled{7}$ 에  $n=1$ 을 대입한 것과 같다.  
 $\therefore a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 1)$   
 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

다.

$$\begin{aligned}
 & 66) \text{ 131.3(만 원)} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.01)^{12} + 10(1+0.01)^{11} + \dots + 10(1+0.01) \\
 & = \frac{10 \times 1.01(1.01^{12} - 1)}{1.01 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.01(1.13 - 1)}{0.01} = 131.3(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 67) \text{ 530.4(만 원)} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.02)^{36} + 10(1+0.02)^{35} + \dots + 10(1+0.02) \\
 & = \frac{10 \times 1.02(1.02^{36} - 1)}{1.02 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.02(2.04 - 1)}{0.02} \\
 & = 530.4(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 68) \text{ 128.4(만 원)} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.07)^9 + 10(1+0.07)^8 + \dots + 10(1+0.07) \\
 & = \frac{10 \times 1.07(1.07^9 - 1)}{1.07 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.07(1.84 - 1)}{0.07} \\
 & = 128.4(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 69) \text{ 205.2만원} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.08)^{12} + 10(1+0.08)^{11} + \dots + 10(1+0.08) \\
 & = \frac{10 \times 1.08(1.08^{12} - 1)}{1.08 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.08(2.52 - 1)}{0.08} \\
 & = 205.2(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 70) \text{ 159만원} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.06)^{11} + 10(1+0.06)^{10} + \dots + 10(1+0.06) \\
 & = \frac{10 \times 1.06(1.06^{11} - 1)}{1.06 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.06(1.9 - 1)}{0.06} \\
 & = 159(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

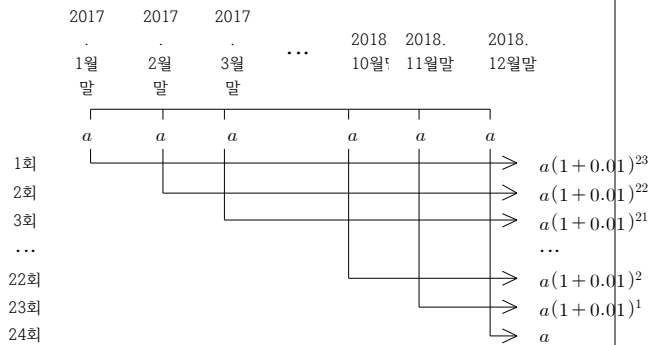
$$\begin{aligned}
 & 71) \text{ 100.8만원} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.05)^8 + 10(1+0.05)^7 + \dots + 10(1+0.05) \\
 & = \frac{10 \times 1.05(1.05^8 - 1)}{1.05 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.05(1.48 - 1)}{0.05} \\
 & = 100.8(\text{만 원})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 72) \text{ 272.7만원} \\
 & \Rightarrow 10(1+0.01)^{24} + 10(1+0.01)^{23} + \dots + 10(1+0.01) \\
 & = \frac{10 \times 1.01(1.01^{24} - 1)}{1.01 - 1} \\
 & = \frac{10 \times 1.01(1.27 - 1)}{0.01}
 \end{aligned}$$

$$= 272.7(\text{만 원})$$

73) 22만원

⇒ 매월말에  $a$ 만원씩 적립한 원리합계는 다음과 같다.



$$\begin{aligned} & a + a(1+0.01) + a(1+0.01)^2 + \cdots + a(1+0.01)^{23} \\ &= \frac{a(1.01^{24}-1)}{1.01-1} = \frac{a(1.27-1)}{0.01} = 27a(\text{만원}) \\ & 27a = 600 \quad \therefore a \approx 22(\text{만원}) \end{aligned}$$

74) 27만 원

⇒ (첫 번째 적립) 1만 원  $\xrightarrow{24\text{개월}} 1 \times 1.01^{24}$

(두 번째 적립) 1만 원  $\xrightarrow{23\text{개월}} 1 \times 1.01^{23}$

(세 번째 적립) 1만 원  $\xrightarrow{22\text{개월}} 1 \times 1.01^{22}$

$\vdots$

(마지막 적립) 1만 원  $\xrightarrow{1\text{개월}} 1 \times 1.01$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 1 \times 1.01^{24} + 1 \times 1.01^{23} + 1 \times 1.01^{22} + \cdots + 1 \times 1.01 \\ &= \frac{1.01 \times (1.01^{24}-1)}{1.01-1} = \frac{1.01^{25}-1.01}{0.01} \\ &= \frac{1.28-1.01}{0.01} = 27(\text{만 원}) \end{aligned}$$

75) 4187000원

⇒ 매년 적립금의 10년 말의 원리합계는 다음 표와 같다.

	처음 1년 말...8년 말	9년 말	10년 말	원리합계
제1회	30	10년		$30 \times (1+0.06)^{10}$
제2회	30	9년		$30 \times (1+0.06)^9$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
제9회	30		2년	$30 \times (1+0.06)^2$
제10회	30		1년	$30 \times (1+0.06)$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 30 \times (1+0.06)^{10} + 30 \times (1+0.06)^9 + \cdots + 30 \times (1+0.06)^2 + 30 \times (1+0.06) \\ &= \frac{30 \times 1.06 \times (1.06^{10}-1)}{1.06-1} \end{aligned}$$

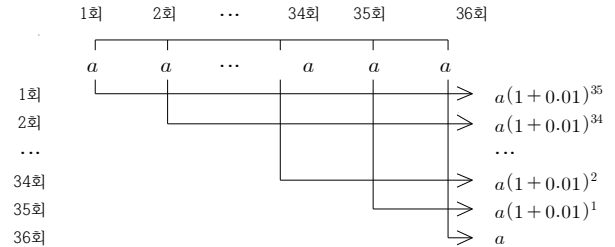
$$= \frac{30 \times 1.06 \times (1.79-1)}{0.06}$$

$$= 418.7(\text{만 원}) = 4187000\text{원}$$

76) 70만원

⇒ 매달 갚아야 할 금액을  $a$ 만원이라 하자.

매달  $a$ 만원씩 36회 갚아야 할 원리합계는 다음과 같다.



$$\begin{aligned} & a + a(1+0.01) + a(1+0.01)^2 + \cdots + a(1+0.01)^{35} \\ &= \frac{a(1.01^{36}-1)}{1.01-1} = \frac{a(1.4-1)}{0.01} = 40a(\text{만원}) \end{aligned}$$

2000만원의 원리합계는

$$2000(1+0.01)^{36} = 2000 \times 1.4 = 2800(\text{만원})$$

$$\therefore 40a = 2800, \quad a = 70(\text{만원})$$

$$77) 9\sqrt{3} \left\{ 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^5 \right\}$$

⇒  $n$ 번째 시행 후 색칠한 넓이를  $a_n$ 이라 하자.

$$a_1 = \triangle A_1B_1C_1 = 1 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 \right),$$

$$a_2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{3}{2} \right)^2$$

한번 시행할 때 정삼각형의 개수는 3배, 정삼각형

의 한 변의 길이는  $\frac{1}{2}$ 배가 되므로

$$a_n = 3^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 3 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 \frac{9\sqrt{3}}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^{k-1} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \left( \frac{3}{4} \right)^5}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 9\sqrt{3} \left\{ 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^5 \right\}$$

$$78) 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{10}$$

⇒ 시행  $n$ 에서 잘라낸 막대의 길이를  $a_n$ 이라 하면

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^2, \quad a_3 = 2^2 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^3, \quad \cdots$$

$$a_n = 2^{n-1} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{10} \right\} = 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{10}$$

79)  $\left(\frac{8}{9}\right)^n$

⇒ 1회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) \times 1^2 = \frac{8}{9}$$

2회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \frac{8}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

⋮

따라서  $n$ 회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의

$$\text{합은 } \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

80)  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

⇒  $n$ 번의 시행 후 버려진 사각형의 넓이의 총합은 첫

째항이  $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ , 공비가  $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$