12 직선의 방정식

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식	☐	☐
필수유형 02	두 점을 지나는 직선의 방정식	☐	☐
필수유형 03	세 점이 한 직선 위에 있을 조건	☐	☐
필수유형 04	도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식	☐	☐
필수유형 05	계수의 부호와 직선의 개형	☐	☐
필수유형 06	두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식	☐	☐
필수유형 07	정점을 지나는 직선의 방정식의 활용	☐	☐
필수유형 08	한 직선에 평행 또는 수직인 직선의 방정식	☐	☐
필수유형 09	두 직선의 위치 관계	☐	☐
필수유형 10	선분의 수직이등분선의 방정식	☐	☐
필수유형 11	세 직선의 위치 관계	☐	☐
필수유형 12	점과 직선 사이의 거리	☐	☐
필수유형 13	점과 직선 사이의 거리의 활용	☐	☐
발전유형 14	점이 나타내는 도형의 방정식	☐	☐

필수유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $(-2, 4)$, $(1, 3)$을 이은 선분의 중점을 지나고 기울기가 1인 직선

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이고 점 $(0, 3)$을 지나는 직선

풍쌤 POINT

- 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$이야!
- 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 기울기는 $\tan\theta$야!

풀이

(1) **STEP 1** 두 점의 중점의 좌표 구하기

두 점 $(-2, 4)$, $(1, 3)$의 중점의 좌표는❶

$\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{4+3}{2}\right)$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

STEP 2 직선의 방정식 구하기

따라서 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-\frac{7}{2}=x-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=x+4$

❶ 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

(2) **STEP 1** 기울기 구하기

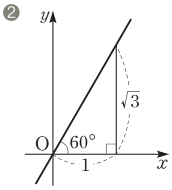
x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이므로 기울기는❷

$\tan 60°=\sqrt{3}$

STEP 2 직선의 방정식 구하기

따라서 점 $(0, 3)$을 지나고❸ 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+3$

❷


❸ y절편이 3이다.

답 (1) $y=x+4$ (2) $y=\sqrt{3}x+3$

풍쌤 강의 NOTE

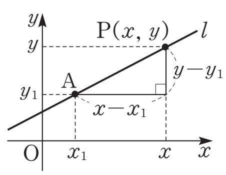
점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 l의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면

$x\neq x_1$일 때, $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

이 식의 양변에 $x-x_1$을 곱하면 구하는 직선 l의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$



01-1 유사

두 점 $A(2, 3)$, $B(5, 0)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여라.

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

01-2 유사

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이고 점 $(4, 6)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

01-3 유사

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$이고 y절편이 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식을 구하여라.

01-4 변형

세 점 $A(1, 4)$, $B(-1, 0)$, $C(6, -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

01-5 변형

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $135°$이고 점 $(1, -3)$을 지나는 직선의 y절편을 구하여라.

01-6 실력

세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 6)$에 대하여 삼각형 OAB의 외심을 지나고 기울기가 -2인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

필수유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $(-3,\ -1)$, $(1,\ 3)$을 지나는 직선

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점과 점 $(2,\ 6)$을 지나는 직선

(3) x축과 만나는 점이 $(2,\ 0)$이고 y축과 만나는 점이 $(0,\ 4)$인 직선

풍쌤 POINT

지나는 두 점의 좌표를 이용해 기울기를 구한 후 주어진 두 점 중에서 아무거나 한 점을 이용해 직선의 방정식을 구하면 돼!

풀이

(1) 두 점 $(-3,\ -1)$, $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{3-(-1)}{1-(-3)}(x-1) \text{ ❶}$$

$$\therefore\ y=x+2 \text{ ❷}$$

(2) STEP 1 내분점의 좌표 구하기

선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times6+1\times(-2)}{3+1},\ \frac{3\times1+1\times5}{3+1}\right) \text{ ❸} \qquad \therefore\ (4,\ 2)$$

STEP 2 직선의 방정식 구하기

두 점 $(4,\ 2)$, $(2,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{6-2}{2-4}(x-4)$$

$$\therefore\ y=-2x+10$$

(3) 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{4-0}{0-2}(x-0)$$

$$\therefore\ y=-2x+4$$

다른 풀이

x절편이 2이고 y절편이 4이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore\ y=-2x+4$$

답 (1) $y=x+2$ (2) $y=-2x+10$ (3) $y=-2x+4$

❶ 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

❷ 점 $(-3,\ -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y-(-1)=1\times\{x-(-3)\}$ $\therefore\ y=x+2$

❸ 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

풍쌤 강의 NOTE

- 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)
- 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$, 즉 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

정답과 풀이 252쪽

02-1 유사

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 5)$를 지나는 직선

(2) 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 지나는 직선

02-2 유사

기출

좌표평면에서 두 점 $(-2,\ 3)$, $(2,\ 5)$를 지나는 직선이 점 $(a,\ 7)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하여라.

02-3 변형

두 직선 $3x-2y+7=0$, $x+2y-3=0$의 교점과 한 점 $(3,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

02-4 변형

세 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 6)$, $\mathrm{C}(8,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심과 점 A를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

02-5 변형

세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$, $\mathrm{B}(-4,\ -1)$, $\mathrm{C}(3,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G와 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

02-6 실력

x절편의 절댓값이 y절편의 절댓값의 2배인 직선이 점 $(-4,\ 2)$를 지날 때, 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(단, 직선은 원점을 지나지 않는다.)

필수유형 03 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

다음 물음에 답하여라.

(1) 세 점 $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하여라.

(2) 세 점 $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(a, 7)$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 실수 a의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

- 세 점이 한 직선 위에 있다면 어느 두 점을 이용해 기울기를 구해도 같은 값이 나와!
- 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 같은 직선 위에 있어야 돼!

풀이

(1) 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같아야 한다.

두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ ❶를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-0}{0-1}=-2$$

직선 AC의 기울기는 $\frac{a-0}{-2-1}=-\frac{a}{3}$

즉, $-2=-\frac{a}{3}$이므로 $a=6$

다른 풀이

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$ ❷ $\quad \therefore y=-2x+2$

이 직선 위에 점 $C(-2, a)$가 있어야 하므로

$a=-2\times(-2)+2=6$

(2) 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 (직선 AB의 기울기)=(직선의 BC의 기울기) ❸ 이어야 하므로

$$\frac{4-1}{0-(-2)}=\frac{7-4}{a-0} \qquad \therefore a=2$$

다른 풀이

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{4-1}{0-(-2)}(x-0) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x+4$$

이 직선이 점 $C(a, 7)$을 지나므로

$7=\frac{3}{2}a+4 \qquad \therefore a=2$

❶ 미지수가 없는 두 점을 이용하여 기울기를 구한다.

❷ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

❸ (직선 AB의 기울기) =(직선 AC의 기울기) 또는 (직선 BC의 기울기) =(직선 AC의 기울기) 를 구해도 된다.

답 (1) 6 (2) 2

풍쌤 강의 NOTE

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있으면

➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

➡ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_3\neq x_1$)

03-1 유사

세 점 $\mathrm{A}(-3, k)$, $\mathrm{B}(k, 2)$, $\mathrm{C}(3, 8)$이 한 직선 위에 있도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

03-2 유사

세 점 $\mathrm{A}(-2, 2)$, $\mathrm{B}(4, 6)$, $\mathrm{C}(7, k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않을 때, k의 값을 구하여라.

03-3 변형 기출

좌표평면 위의 두 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$를 지나는 직선이 y축과 점 $(0, 5)$에서 만날 때, a의 값을 구하여라.

03-4 변형

두 점 $(6, 4)$, $(-k, 7)$을 지나는 직선이 y축과 점 $(k, 0)$에서 만날 때, k의 값을 구하여라. (단, $k \neq -6$)

03-5 변형

점 $\mathrm{A}(-2, k+3)$이 두 점 $\mathrm{B}(2, k)$, $\mathrm{C}(k+3, 1)$을 지나는 직선 위에 있을 때, 직선 BC의 방정식을 구하여라.

03-6 실력

평면 위의 서로 다른 세 점

$$\mathrm{A}(-2k-1, 5),\ \mathrm{B}(1, k+3),\ \mathrm{C}(k+2, k+6)$$

이 한 직선 위에 있을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

필수유형 04 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 직선 $y=mx$가 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

(2) 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 4)$, $\mathrm{C}(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC의 넓이를 점 $(0,\ 3)$을 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 지나는 직선은 삼각형의 넓이를 이등분해.

➡ 꼭짓점 O를 지나고 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하는 직선은 점 O의 대변인 변 AB의 중점을 지난다.

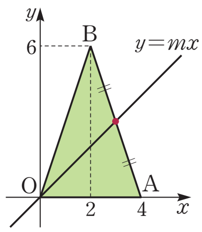
풀이

(1) STEP 1 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표 구하기

직선 $y=mx$❶가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.❷

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{0+6}{2}\right)$ $\quad\therefore (3,\ 3)$



❶ 직선 $y=mx$는 원점 O를 지난다.

❷ 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 △OAB의 꼭짓점 O와 그 대변인 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.

STEP 2 m의 값 구하기

따라서 직선 $y=mx$는 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

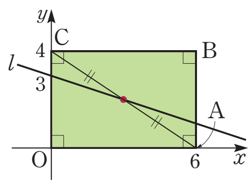
$3=3m \qquad \therefore m=1$

(2) STEP 1 사각형의 대각선의 중점의 좌표 구하기

직선 l이 직사각형 OABC의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 점 A, C의 중점의 좌표는❸

$\left(\dfrac{6+0}{2},\ \dfrac{0+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (3,\ 2)$



❸ 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형은 모두 두 대각선의 교점이 일치하므로 어느 한 대각선의 중점만 생각해도 된다.

STEP 2 직선 l의 방정식 구하기

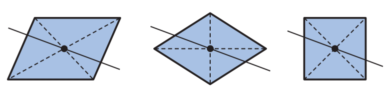
따라서 직선 l은 두 점 $(0,\ 3)$, $(3,\ 2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-3=\dfrac{2-3}{3-0}(x-0) \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{3}x+3$

답 (1) 1 $\quad$ (2) $y=-\dfrac{1}{3}x+3$

풍쌤 강의 NOTE

평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의해 이등분된다.



평행사변형 마름모 정사각형

04-1 유사

세 점 $\mathrm{A}(-4,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(-3,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 점 C를 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 구하여라.

04-2 유사

네 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 2)$, $\mathrm{C}(7,\ 6)$, $\mathrm{D}(3,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 이등분하면서 원점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

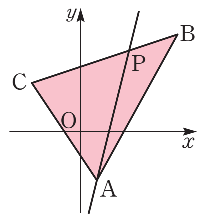
04-3 변형

기출

좌표평면에서 원점 O를 지나고 꼭짓점이 $\mathrm{A}(2,\ -4)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 B라고 하자. 직선 $y=mx$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하도록 하는 실수 m의 값을 구하여라.

04-4 변형

세 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(6,\ 6)$, $\mathrm{C}(-3,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 선분 BC 위의 한 점을 P라고 하자. 삼각형 APC의 넓이가 삼각형 ABP의 넓이의 2배가 될 때, 두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

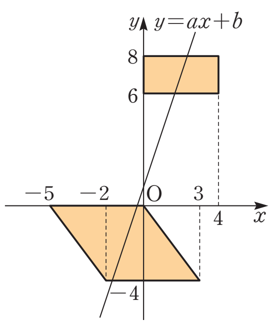


04-5 변형

네 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 4)$, $\mathrm{C}(5,\ 6)$, $\mathrm{D}(1,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 이등분하면서 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

04-6 실력

오른쪽 그림에서 직선 $y=ax+b$가 직사각형과 마름모의 넓이를 동시에 이등분할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.



필수유형 05 계수의 부호와 직선의 개형

다음 물음에 답하여라.

(1) 세 상수 a, b, c가 $ab>0$, $bc<0$을 만족시킬 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

(2) 직선 $ax-2y+b=0$이 제1, 3, 4사분면을 지날 때, 직선 $bx-ay-3=0$이 지나는 사분면을 모두 구하여라.

풍쌤 POINT

❶ 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 주어지면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 변형해!

❷ 기울기 $-\frac{a}{b}$와 y절편 $-\frac{c}{b}$의 부호를 조사해!

풀이

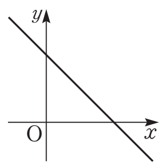
(1) $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$❶이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$❷

$ab>0$이므로 기울기는 $-\frac{a}{b}<0$

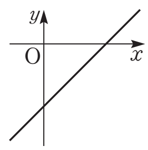
$bc<0$이므로 y절편은 $-\frac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선은 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다.



(2) $ax-2y+b=0$에서 $y=\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}$

이 직선이 제1, 3, 4사분면을 지나므로 오른쪽 그림과 같이 기울기는 양수이고 y절편은 음수이다.



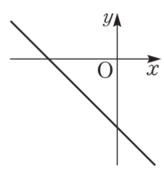
즉, $\frac{a}{2}>0$, $\frac{b}{2}<0$에서 $a>0$, $b<0$

$bx-ay-3=0$에서 $a\neq0$이므로❸

$y=\frac{b}{a}x-\frac{3}{a}$

이 직선은 기울기가 $\frac{b}{a}<0$,

y절편이 $-\frac{3}{a}<0$이므로 오른쪽 그림과 같이 제2, 3, 4사분면을 지난다.



❶ $ab>0$, $bc<0$이므로 $b\neq0$

❷ $ax+by+c=0$ $(b\neq0)$을 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 꼴로 변형한 후 기울기와 y절편의 부호를 정한다.

❸ $a>0$이므로 $a\neq0$

답 (1) 제3사분면 (2) 제2, 3, 4사분면

풍쌤 강의 NOTE

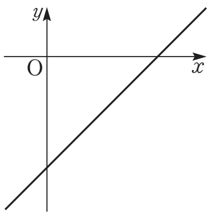
- 좌표평면에서 직선의 기울기가 양수이면 직선은 오른쪽 위로 향하고, 기울기가 음수이면 직선은 오른쪽 아래로 향하는 그래프가 그려진다.
- 직선의 y절편이 양수이면 직선은 x축보다 위에서 y축과 만나고, y절편이 음수이면 직선은 x축보다 아래에서 y축과 만난다.

05-1 유사

세 상수 a, b, c에 대하여 $c=0$, $ab<0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하여라.

05-2 유사

직선 $ax+by+c=0$의 개형이 오른쪽 그림과 같다. $a>0$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 abc의 부호를 구하여라.



05-3 변형

직선 $y=mx+n$이 제1, 2, 3사분면을 지나고 직선 $ax+by+c=0$과 y축에서 만나고 두 직선의 x절편의 부호가 다를 때, 다음 값의 부호를 구하여라.

(단, m, n, a, b, c 상수)

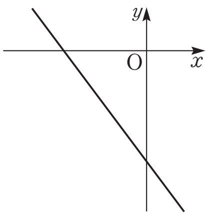
(1) ab (2) bc

05-4 변형

직선 $ax+by+c=0$이 제1, 2, 3사분면을 지나고, 직선 $bcx+ay+b=0$의 x절편이 음수일 때, 이 직선이 항상 지나는 사분면을 모두 구하여라.

05-5 변형

직선 $ax+by+c=0$의 개형이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $abx+bcy+ca=0$이 지나지 않는 사분면을 구하여라.



05-6 실력

직선 $ax+by+2a=0$이 제4사분면을 지나고 직선 $bx-ay+2a=0$과 제2사분면에서 만날 때, a^2과 b^2의 대소를 비교하여라. (단, $ab\neq0$)

필수유형 06 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 직선 $kx+(k-2)y+2k+1=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

(2) 두 직선 $2x-3y+3=0$, $x-2y+2=0$이 만나는 점과 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

(1) "k의 값에 관계없이"라는 말이 나오면 주어진 식이 k에 대한 항등식임을 나타내.

(2) 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은 k로 묶인 등식으로 표현될 수 있어!

풀이

(1) 주어진 식을 k에 대하여 정리하면 $(x+y+2)k-2y+1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로[1]

$x+y+2=0$, $-2y+1=0$ $\therefore y=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$을 $x+y+2=0$에 대입하면 $x=-\frac{5}{2}$

따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 $\mathrm{P}\left(-\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다.

[1] $Ak+B=0$에서 k의 값에 상관없이 등식이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.
➡ $A=0$이고 $B=0$이다.

(2) STEP 1 교점을 지나는 방정식 세우고, k의 값 구하기

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x-3y+3+k(x-2y+2)=0$ (단, k는 실수이다.) …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$4+3+3+k(2+2+2)=0$ $\therefore k=-\frac{5}{3}$

STEP 2 직선의 방정식 구하기

$k=-\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=0$

$\therefore x+y-1=0$

다른 풀이

주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=1$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

따라서 두 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-1-1}{2-0}(x-0)$ $\therefore y=-x+1$

답 (1) $\mathrm{P}\left(-\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $x+y-1=0$

풍쌤 강의 NOTE

- $(a'k+a)x+(b'k+b)y+(c'k+c)=0$ 꼴의 식이 주어진 경우
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$과 같이 k에 대한 식으로 나타낸 후, 항등식의 성질에 의해
$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이라고 놓는다.
- 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)으로 표현될 수 있다.

06-1 유사

직선 $2kx+(k-3)y-k+3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

06-2 유사

기출

좌표평면에서 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$이 만나는 점과 점 $(4, 0)$을 지나는 직선의 y절편을 구하여라.

06-3 변형

직선 $(k-1)x-(2k+1)y+3=0$이 임의의 실수 k에 대하여 항상 일정한 점 P를 지날 때, 기울기가 2이고 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

06-4 변형

직선 $(3+k)x+(-1+2k)y+13-5k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 사분면을 구하여라.

06-5 변형

두 직선 $ax-2y+1=0$, $x+y-2=0$의 교점을 지나고 점 $(-1, b)$를 지나는 직선의 방정식이 $x-4y+5=0$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, a는 실수이다.)

06-6 실력

직선 $y=mx-3m+2$가 실수 m의 값에 관계없이 항상 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다. 점 A의 좌표가 $(2, -1)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하여라.

필수유형 07 정점을 지나는 직선의 방정식의 활용

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(2, 2)$, $\mathrm{B}(-2, 4)$를 이은 선분 AB와 직선 $y=mx+4m$이 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

(2) 두 직선 $2x-3y+12=0$, $mx-y-2m=0$이 제2사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

풍쌤 POINT

미정계수 m을 포함한 직선의 방정식은 m에 대하여 식을 정리하여 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾은 후, 두 점 A, B를 대입하여 m의 값의 범위를 구할 수 있어.

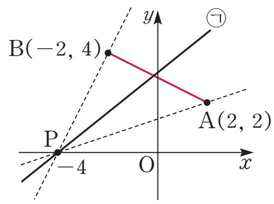
풀이

(1) 직선 $y=mx+4m$을 m에 대하여 정리하면

$y=m(x+4)$ …… ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $\mathrm{P}(-4, 0)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(2, 2)$를 지날 때,

$2=m(2+4)$ $\quad\therefore m=\frac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(-2, 4)$를 지날 때,

$4=m(-2+4)$ $\quad\therefore m=2$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$\frac{1}{3}\le m\le 2$

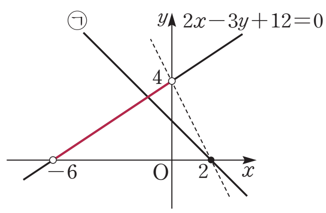
(2) 직선 $mx-y-2m=0$을 m에 대하여 정리하면

$y=m(x-2)$ …… ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $\mathrm{P}(2, 0)$을 지난다.

직선 $2x-3y+12=0$이 $(-6, 0)$, $(0, 4)$를 지나므로

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(-6, 0)$을 지날 때,

$0=m(-6-2)$ $\quad\therefore m=0$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지날 때,

$4=m(0-2)$ $\quad\therefore m=-2$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-2<m<0$

답 (1) $-\frac{1}{3}\le m\le 2$ (2) $-2<m<0$

풍쌤 강의 NOTE

직선 $y-b=m(x-a)$는 m의 값에 관계없이 항상 점 (a, b)를 지난다.

07-1 유사

두 점 $A(0, -1)$, $B(0, 3)$을 이은 선분 AB와 직선 $y=kx-(2k-5)$가 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

07-2 유사

두 직선 $y=-x-3$, $y=mx-2m+1$이 제3사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

07-3 변형

두 직선 $3x-2y+12=0$, $y=mx+2m-2$가 제2사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위가 $m<a$ 또는 $m>b$일 때, $4a^2b^2$의 값을 구하여라.

07-4 변형

직선 l과 직선 $y=kx+2k+2$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위가 $-\frac{1}{2}<k<1$일 때, 직선 l의 방정식을 구하여라.

07-5 변형

네 점 $A(4, 3)$, $B(8, 3)$, $C(7, 8)$, $D(3, 8)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에 대하여 직선 $mx-y+m=0$이 평행사변형 ABCD와 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

07-6 실력

네 점 $A(6, 4)$, $B(5, 7)$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 직선 BD가 x축과 만나는 점을 E라고 하자. 점 E를 지나면서 정사각형 ABCD와 만나는 직선의 방정식을 $y=m(x-k)$라고 할 때, 실수 m의 값의 범위가 $\alpha \le m \le \beta$이다. 세 실수 α, β, k에 대하여 $\alpha\beta k$의 값을 구하여라.

(단, $x_1<x_2<5$, $y_2<y_1$)

필수유형 08 한 직선에 평행 또는 수직인 직선의 방정식

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 직선 $y=-x+1$에 평행하고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선

(2) 점 $(2,\ 4)$를 지나고 직선 $2x-y+1=0$에 수직인 직선

풍쌤 POINT

- 두 직선의 평행 또는 수직인 조건을 알면 기울기를 구할 수 있어!
- 두 직선이 서로 평행하면 기울기가 같고, 두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1이야!

풀이

(1) STEP 1 평행 조건을 이용하여 직선의 기울기 구하기

직선 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 $-1$❶이다.

❶ 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

STEP 2 직선의 방정식 구하기

따라서 구하는 직선은 기울기가 -1이고, 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+1$

다른 풀이

평행한 직선은 기울기가 같으므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-x+k$라고 할 수 있다.

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $0=-1+k$ $\quad\therefore k=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+1$

(2) STEP 1 수직 조건을 이용하여 직선의 기울기 구하기

직선 $2x-y+1=0$❷에서 $y=2x+1$

❷ 주어진 직선의 방정식을 $y=mx+n$ 꼴로 고친다.

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라고 하면

$2\times m=-1$❸ $\quad\therefore m=-\dfrac{1}{2}$

❸ 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

STEP 2 직선의 방정식 구하기

따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y-4=-\dfrac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+5$

답 (1) $y=-x+1$ (2) $y=-\dfrac{1}{2}x+5$

풍쌤 강의 NOTE

두 직선 $y=mx+n$, $y=mx+n'$이

- 평행하다. ➡ $m=m'$, $n\neq n'$ → 두 직선의 기울기는 같고, y절편이 다르다.
- 수직이다. ➡ $mm'=-1$ → 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

08-1 유사

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 직선 $y=3x-4$에 평행하고 점 $(-2,\ 0)$을 지나는 직선

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$에 수직인 직선

08-2 유사

두 점 $(1,\ 5)$, $(3,\ 0)$을 지나는 직선에 평행하고 y절편이 -1인 직선의 방정식을 구하여라.

08-3 변형 기출

좌표평면 위의 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나고 직선 $x-3y+6=0$에 수직인 직선의 y절편을 구하여라.

08-4 변형

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -4)$, $\mathrm{B}(-5,\ 2)$를 지나는 직선에 수직이고, 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

08-5 변형 기출

세 직선 $l:\ x-ay+2=0$, $m:\ 4x+by+2=0$, $n:\ x-(b-3)y-2=0$에 대하여 두 직선 l과 m은 수직이고 두 직선 l과 n은 평행할 때, a^2+b^2의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

08-6 실력

원점에서 직선 $x+2y-10=0$에 내린 수선의 발의 좌표를 구하여라.

필수유형 09 두 직선의 위치 관계

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 직선 $ax+2y-2=0$, $(a-1)x-y+3=0$이 서로 수직이 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

(2) 두 직선 $2x-y+1=0$, $(a-2)x+ay+a=0$이 만나지 않을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

• 직선의 방정식 $y=ax+b$, $ax+by+c=0$의 두 가지 꼴이 모두 자주 나오므로 각 경우의 평행, 수직, 일치 등의 조건을 기억하자!

• 두 직선이 서로 평행하면 기울기가 같고, 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1이야!

풀이

(1) 두 직선 $ax+2y-2=0$, $(a-1)x-y+3=0$이 서로 수직이므로

$a(a-1)+2\times(-1)=0$ ❶

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

다른 풀이

$ax+2y-2=0$에서 $y=-\frac{a}{2}x+1$

$(a-1)x-y+3=0$에서 $y=(a-1)x+3$

두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

$\left(-\frac{a}{2}\right)\times(a-1)=-1$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$　　$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(2) 두 직선이 만나지 않으므로 두 직선은 서로 평행하다. 즉,

$\frac{a-2}{2}=\frac{a}{-1}\neq\frac{a}{1}$ ❷　　$\therefore a=\frac{2}{3}$

다른 풀이

$2x-y+1=0$에서 $y=2x+1$

$(a-2)x+ay+a=0$에서 $y=-\frac{a-2}{a}-1$

두 직선이 평행하므로 기울기가 같다. 즉,

$2=-\frac{a-2}{a}$, $3a=2$　　$\therefore a=\frac{2}{3}$

❶ 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 서로 수직이면 $aa'+bb'=0$

❷ 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에서 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$만으로는 두 직선의 평행과 일치를 구분할 수 없으므로 $\frac{c}{c'}$도 반드시 비교한다.

답 (1) -1, 2　(2) $\frac{2}{3}$

풍쌤 강의 NOTE

• 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

(1) 평행하다. ➡ $m=m'$, $n\neq n'$　　(2) 수직이다. ➡ $mm'=-1$

• 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ $(abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이

(1) 평행하다. ➡ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$　　(2) 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

09-1 유사

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 직선 $(k-3)x-2ky+3=0$, $2x-y+4=0$ 이 서로 평행할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 $(2k-4)x+ky-1=0$, $x-3y+3=0$ 이 서로 수직일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

09-2 유사

두 직선 $ax+y-b=0$, $bx-2y-a=0$이 만나지 않을 때, 직선 $bx+ay=0$의 기울기를 구하여라.

(단, a, b는 상수이다.)

09-3 변형

직선 $x-2y+1=0$이 직선 $x+(a+2)y-3=0$과 평행하고 직선 $(2-a)x+by+2=0$과 수직일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

09-4 변형

직선 $ax-y+3=0$은 직선 $3x-by+1=0$과 평행하고 직선 $(b-2)x-y+2=0$과 수직일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

09-5 변형

두 직선 $(k-2)x+ky-2=0$, $2x-y+2=0$이 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 a, 서로 수직이 되도록 상수 하는 k의 값을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

09-6 실력

두 직선 $(a+1)x+(2-a)y-3a=0$, $x-(2b+3)y-1=0$이 x축에서 서로 수직으로 만날 때의 점 $\mathrm{Q}(a, b)$와 직선 $(k+1)x+(2-k)y-3k=0$ 이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값을 구하여라.(단, a, b는 상수이다.)

필수유형 10 선분의 수직이등분선의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(-1, 5)$, $\mathrm{B}(1, 3)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

(2) 두 점 $\mathrm{A}(0, 3)$, $\mathrm{B}(2, -3)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(5, a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

선분 AB의 수직이등분선은 선분의 중점을 지나고 직선 AB에 수직인 직선이야!
이때 중점은 선분 AB의 $1:1$ 내분점으로, 서로 수직인 두 직선은 기울기의 곱이 -1임을 이용해!

풀이

(1) STEP 1 선분 AB의 중점의 좌표와 기울기 구하기

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$ ❶ $\quad \therefore (0, 4)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{1-(-1)}=-1$

STEP 2 수직이등분선의 방정식 구하기

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 1❷이고

점 $(0, 4)$를 지나므로 그 방정식은 $y=x+4$

❶ 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

❷ 직선 AB에 수직이므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{(\text{직선 AB의 기울기})}$

(2) STEP 1 선분 AB의 중점의 좌표와 기울기 구하기

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{3-3}{2}\right) \quad \therefore (1, 0)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-3}{2-0}=-3$

STEP 2 수직이등분선의 방정식 구하기

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고

점 $(1, 0)$을 지나므로 그 방정식은 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ ❸

❸ $y=\frac{1}{3}(x-1)$
$=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

STEP 3 a의 값 구하기

이 직선이 점 $(5, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{3}\times 5-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

답 (1) $y=x+4$ (2) $\frac{4}{3}$

풍쌤 강의 NOTE

선분 AB의 수직이등분선의 방정식은 선분 AB의 중점을 이용하여 다음 순서로 구한다.

❶ 직선이 선분 AB의 중점을 지남을 이용하여 선분 AB의 중점의 좌표를 구한다.

❷ 직선이 직선 AB와 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 구하려는 직선의 기울기를 구한다.

❸ ❶, ❷에서 구한 중점의 좌표와 기울기를 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

10-1 유사

두 점 A$(-1, 3)$, B$(5, 1)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

10-2 유사

두 점 A$(-4, 5)$, B$(0, -3)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(0, a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

10-3 유사

두 점 A$(-1, 2)$, B$(3, -4)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $ax+by-5=0$일 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

10-4 변형

직선 $2x-3y+12=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

10-5 변형

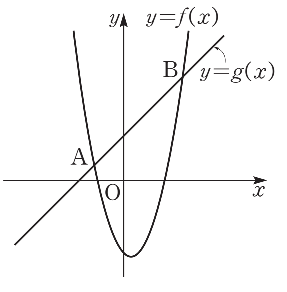
마름모 ABCD에서 이웃하지 않는 두 꼭짓점이 A$(0, 0)$, C$(2, 6)$이다. 이때 마름모의 나머지 두 꼭짓점 B, D를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

10-6 실력

기출

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=x^2-x-5$와 $g(x)=x+3$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, 점 P의 x좌표를 구하여라.

(단, 점 P의 x좌표는 양수이다.)



필수유형 11 세 직선의 위치 관계

세 직선 $2x+y-8=0$, $3x-2y+2=0$, $ax+2y+a-2=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

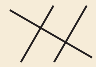
풍쌤 POINT

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같아.

① 세 직선이 모두 평행할 때 ② 세 직선이 한 점에서 만날 때 ③ 세 직선 중 두 직선이 평행할 때


교점:0개, 영역:4개


교점:1개, 영역:6개


교점:2개, 영역:6개

풀이

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선이 모두 평행할 때[1]

두 직선 $2x+y-8=0$, $3x-2y+2=0$에서

$\frac{2}{3}\neq\frac{1}{-2}$이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때[2]

직선 $ax+2y+a-2=0$이 두 직선 $2x+y-8=0$, $3x-2y+2=0$의 교점을 지나야 한다.

$2x+y-8=0$, $3x-2y+2=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=4$

따라서 직선 $ax+2y+a-2=0$이 점 $(2, 4)$를 지나야 하므로

$2a+2\times4+a-2=0$

$\therefore a=-2$

(iii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때[3]

① 두 직선 $2x+y-8=0$, $ax+2y+a-2=0$이 평행할 때

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{2}\neq\frac{-8}{a-2}$$

$\therefore a=4$

② 두 직선 $3x-2y+2=0$, $ax+2y+a-2=0$이 평행할 때

$$\frac{3}{a}=\frac{-2}{2}\neq\frac{2}{a-2}$$

$\therefore a=-3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 a의 값은 -3, -2, 4이다.

답 -3, -2, 4

❶ 세 직선의 기울기가 모두 같다.

❷ 한 직선이 다른 두 직선의 교점을 지난다.

❸ 두 직선의 기울기는 같고, 다른 한 직선의 기울기는 다르다.

풍쌤 강의 NOTE

세 직선 중 결정되지 않은 한 직선을 제외한 나머지 두 직선의 위치 관계를 먼저 파악한다.
두 직선이 한 점에서 만난다면 세 직선이 모두 평행한 경우는 없으므로 나머지 두 경우만 생각한다.

11-1 유사

세 직선 $x-y=0$, $x+2y=3$, $3x-ky=12$가 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

11-2 변형

세 직선 $y=1$, $ax-3y-4=0$, $x-ay+6=0$이 한 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

11-3 변형

세 직선 $x+ay+2=0$, $2x-y-6=0$, $3x+y+2=0$으로 이루어지는 삼각형이 직각삼각형일 때, 상수 a의 값을 모두 구하여라.

11-4 변형

세 직선 $ax-y=0$, $3x-y=1$, $x+ay=1$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱을 구하여라.

11-5 변형

서로 다른 세 직선 $3x-y+2=0$, $(2a-1)x+2y+5=0$, $(5-4a)x+by-3=0$에 의하여 좌표평면이 4개의 영역으로 나누어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

11-6 실력

세 직선 $x-2y=0$, $ax-2y-4=0$, $x-3y+a=0$이 한 점에서 만날 때, 상수 a의 값이 a_1 또는 a_2이다. $a=a_1$일 때의 교점을 A, $a=a_2$일 때의 교점을 B라고 할 때, $\overline{AB}$의 값을 구하여라.

필수유형 12 점과 직선 사이의 거리

다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $(-4, 2)$와 직선 $x+ay+8=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 정수 a의 값을 구하여라.

(2) 평행한 두 직선 $2x-y+2=0$, $2x-y-3=0$ 사이의 거리를 구하여라.

풍쌤 POINT

- 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

풀이

(1) **STEP 1** 점과 직선 사이 거리 공식을 이용하여 식 세우기

점 $(-4, 2)$와 직선 $x+ay+8=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|-4+2a+8|}{\sqrt{1^2+a^2}}=\sqrt{10}$$

STEP 2 a의 값 구하기

$|2a+4|=\sqrt{10(1+a^2)}$

양변을 제곱하면

$(2a+4)^2=10a^2+10$, $2(a+2)^2=5a^2+5$

$3a^2-8a-3=0$, $(3a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=3$

이때 a는 정수이므로 $a=3$

(2) 주어진 두 직선은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+2=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $2x-y-3=0$ 사이의 거리와 같다.❶

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

다른 풀이

평행한 두 직선 $2x-y+2=0$, $2x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$❷

❶ 평행한 두 직선 사이의 거리는 직선 위의 한 점과 다른 직선 사이의 거리와 같다.

❷ 평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

답 (1) 3 (2) $\sqrt{5}$

풍쌤 강의 NOTE

평행한 두 직선 l_1: $ax+by+c=0$, l_2: $ax+by+c'=0$ 사이의 거리 d는

➡ l_2: $ax+by+c'=0$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 l_1: $ax+by+c=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

정답과 풀이 268쪽

12-1 기본 기출

좌표평면 위의 점 $(0, 1)$과 직선 $\sqrt{3}x+y+23=0$ 사이의 거리를 구하여라.

12-2 유사

점 $(1, 5)$와 직선 $x+ay-1=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 상수 a의 값을 모두 구하여라.

12-3 유사

평행한 두 직선 $3x-4y-4=0$, $3x-4y+6=0$ 사이의 거리를 구하여라.

12-4 변형

평행한 두 직선 $ax-2y-1=0$, $x-(a+1)y-1=0$ 사이의 거리를 구하여라. (단, a는 상수이다.)

12-5 변형

점 $(0, 2)$를 지나는 직선 l에 대하여 직선 l과 점 $(3, 1)$ 사이의 거리가 3일 때, 직선 l의 기울기를 구하여라.

12-6 실력

x축 위의 점 $(a, 0)$과 두 직선 $4x-3y+1=0$, $3x+4y-2=0$ 사이의 거리가 같을 때, 정수 a의 값을 구하여라.

필수유형 13 점과 직선 사이의 거리의 활용

다음 물음에 답하여라.

(1) 좌표평면 위의 세 점 $A(1, 2)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

(2) 세 점 $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(5, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 7일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

좌표평면 위의 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 밑변의 길이와 높이를 구해야 해!

- 밑변의 길이 ➡ 두 점 사이의 거리를 이용해.
- 높이 ➡ 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용해.

풀이

(1) STEP 1 삼각형의 밑변의 길이 구하기

선분 AB를 삼각형 ABC의 밑변이라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$

STEP 2 삼각형의 높이와 넓이 구하기

직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{0-2}{5-1}(x-5)$ ❶ $\quad\therefore x+2y-5=0$

따라서 점 $C(4, 3)$과 직선 $x+2y-5=0$ 사이의 거리를 h라고 하면 $h=\dfrac{|4+6-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$ ❷

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

❶ 두 점 $A(1, 2)$, $B(5, 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

❷ 밑변과 다른 꼭짓점 사이의 거리는 점과 직선 사이의 거리로 구한다.

(2) STEP 1 삼각형의 밑변의 길이 구하기

선분 AB를 삼각형 ABC의 밑변이라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{13}$

STEP 2 넓이 조건을 이용하여 식 세우고 a의 값 구하기

직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{0-3}{3-1}(x-3)\quad\therefore 3x+2y-9=0$

이때 점 $C(5, a)$와 직선 $3x+2y-9=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|15+2a-9|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{|2a+6|}{\sqrt{13}}$

삼각형 ABC의 넓이가 7이므로

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\dfrac{|2a+6|}{\sqrt{13}}=7$에서 $\dfrac{|2a+6|}{2}=7$

$|2a+6|=14\qquad\therefore a=4\ (\because a>0)$

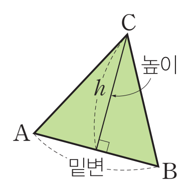
답 (1) 5 (2) 4

풍쌤 강의 NOTE

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이는 다음과 같은 순서로 구해!

❶ 밑변인 선분 AB의 길이 구하기
❷ 직선 AB의 방정식 구하기
❸ 점 C와 직선 AB 사이의 거리 h 구하기

➡ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$



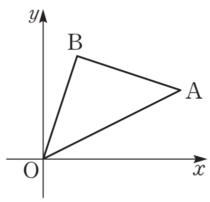
13-1 유사

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(7,\ 8)$, $\mathrm{C}(-1,\ 7)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

13-2 유사

기출

오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, 양수 k의 값을 구하여라.



13-3 변형

네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 6)$, $\mathrm{C}(-1,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC의 넓이를 구하여라.

13-4 변형

세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(6,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형 AOB에서 $\angle\mathrm{AOB}=90^{\circ}$이다. 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 직선 $y=3x+15$ 위에 있을 때, 삼각형 AOB의 넓이가 c이다. $a+b+c$의 값을 구하여라.

13-5 변형

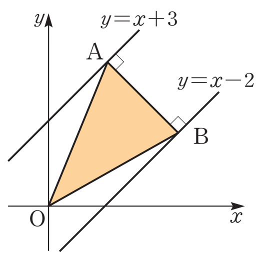
세 점 $\mathrm{A}(6,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 있다. x축 위의 점 D에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이가 같아지는 점 D의 좌표를 구하여라.

(단, 원점 O에 대하여 점 D는 선분 OB 위에 있다.)

13-6 실력

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x+3$, $y=x-2$와 수직인 선분 AB를 밑변으로 하는 삼각형 OBA의 넓이가 10일 때, 직선 AB의 방정식을 구하여라.

(단, O는 원점이고 두 점 A, B는 제1사분면 위의 점이다.)



발전유형 14 점이 나타내는 도형의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 A$(1,\ 5)$, B$(5,\ 3)$으로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

(2) 두 직선 $x+2y+3=0$, $2x-y-1=0$으로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

풍쌤 POINT

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 풀면 쉽게 접근할 수 있어!
이때 거리가 같다는 것을 수식으로 나타내면 관계식이 자연스럽게 나와!

풀이

(1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}^2=(x-1)^2+(y-5)^2$

$\overline{BP}^2=(x-5)^2+(y-3)^2$

이때 점 P가 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있으므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$(x-1)^2+(y-5)^2=(x-5)^2+(y-3)^2$

$x^2-2x+1+y^2-10y+25=x^2-10x+25+y^2-6y+9$

$8x-4y-8=0$ $\quad \therefore\ 2x-y-2=0$ ❶

(2) STEP 1 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같음을 이용하여 식 세우기

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$\therefore\ |x+2y+3|=|2x-y-1|$

STEP 2 점 P가 나타내는 도형의 방정식 구하기

(i) $x+2y+3=2x-y-1$일 때, $x-3y-4=0$

(ii) $x+2y+3=-2x+y+1$일 때, $3x+y+2=0$

(i), (ii)에서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$x-3y-4=0$ 또는 $3x+y+2=0$ ❷

❶ 두 점 A, B의 중점은 $(3,\ 4)$이고 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 이때 기울기가 2이고 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=2x-2$이므로 구한 직선은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이다.

❷ 구한 직선은 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다.

답 (1) $2x-y-2=0$ (2) $x-3y-4=0$ 또는 $3x+y+2=0$

풍쌤 강의 NOTE

- 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이다.
- 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형은 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다.

14-1 유사

두 점 $A(-4, 2)$, $B(4, 6)$으로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

14-2 유사

두 직선 $x+4y+2=0$, $4x+y+8=0$이 이루는 각의 이등분선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식을 구하여라.

14-3 변형

직선 $2x-y+2=0$ 위의 임의의 점 P와 원점 O에 대하여 선분 OP의 중점 M의 자취의 방정식을 구하여라.

14-4 변형

점 P가 직선 $2x+y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $A(2, 1)$과 점 P를 이은 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점 Q가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

14-5 변형

임의의 점 $P(x, y)$에서 직선 $4x+3y-6=0$까지의 거리가 k이고, 직선 $3x-4y+8=0$까지의 거리가 $2k$일 때, 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

(단, $k>0$)

14-6 실력

임의의 점 $P(x, y)$에서 직선 $y=-1$까지의 거리와 점 $Q(0, 1)$까지의 거리가 같을 때, 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

풍산자
유형 특강

삼각형의 넓이를 구하는 방법

두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 이용하면 좌표평면 위에 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있어.

삼각형의 넓이를 구하는 특급 노하우!
익숙해지면 세상 편한 삼각형의 넓이 구하는 skill

주의!!
선생님께서 가르쳐주시지 않았다면 서술형 문제 풀 때는 적용하면 안 돼!

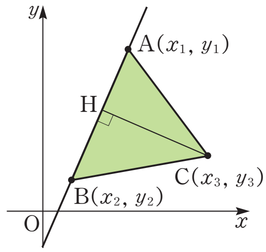
특강 1 세 점이 주어질 때 삼각형의 넓이 구하기

한 직선 위에 있지 않은 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)|$$

> 정말로 적용되는지 확인해 볼까?

서로 다른 세 점이 주어진 경우 교과서에서 배운 내용만 이용하면 오른쪽과 같이 풀 수 있지만 많이 번거로워!



선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$\therefore\ -(y_2-y_1)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1=0$

이때 점 $C(x_3, y_3)$에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 ABC의 높이, 즉 $\overline{CH}$의 길이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리이므로

삼각형의 세 꼭짓점 A, B, C를 동일한 평행이동으로 세 점 A′, B′, C′으로 옮겼을 때, 삼각형 ABC와 삼각형 A′B′C′은 합동이므로 그 넓이가 같다.

이때 점 $C(x_3, y_3)$와 직선 AB 사이의 거리는

$$\overline{CH}=\frac{|-(y_2-y_1)\times x_3+(x_2-x_1)\times y_3+x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{\{-(y_2-y_1)\}^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$$=\frac{|-x_3y_2+x_3y_1+x_2y_3-x_1y_3+x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$=\frac{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\frac{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)|$$

다른 방법으로 설명해 줄까?

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이 S는

점 A의 좌표를 한 번 더 쓴다.

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(\searrow+\searrow+\searrow)-(\swarrow+\swarrow+\swarrow)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$$

만약 점 A의 좌표가 $(0, 0)$이면 $x_1=0$, $y_1=0$이므로

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & y_2 & y_3 & 0 \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_3y_2|$$

좌표평면 위의 꼭짓점의 좌표가 주어질 때, 왼쪽과 같이 다각형의 넓이를 구하는 방법을 신발끈 공식(사선공식)이라고 한다.

풍산자 풀이 흐름

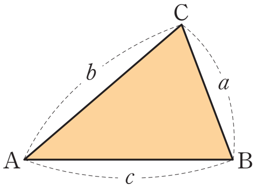
❶ 세 점의 좌표를 왼쪽과 같이 배열해.

❷ 오른쪽 아래로 향한 곱에는 $+$부호를 붙여서 더해.

❸ 왼쪽 아래로 향한 곱에는 $-$부호를 붙여서 더해.

삼각형 ABC의 넓이 S를 구하는 여러 가지 공식들도 살펴 보자.

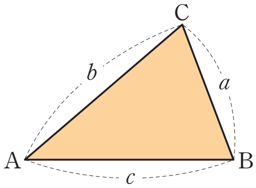
(1)



$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\left(\text{단, } s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

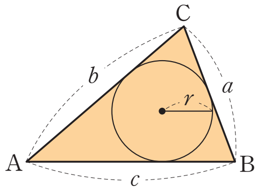
(2)



$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

$\quad=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

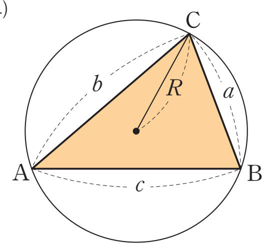
(3)



$S=rs$

$\left(\text{단, } s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

(4)



$S=\dfrac{abc}{4R}$

$\quad=2R^2\sin A\sin B\sin C$

문제 푸는 key point

(1), (3)은 지금까지 배운 내용으로 쉽게 적용할 수 있어.
(2), (4)는 수학Ⅰ－Ⅱ. 삼각함수 단원을 배우고 적용할 수 있어.

(1)은 헤론의 공식이라고 한다.

확인 정답과 풀이 273쪽

1. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}(5, -3)$, $\mathrm{C}(3, 1)$ (2) $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(8, -1)$, $\mathrm{C}(6, 8)$

2. 세 점 $\mathrm{A}(2, 3)$, $\mathrm{B}(5, -3)$, $\mathrm{C}(7, 5)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 세 점 A', B', C'을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$의 넓이를 구하여라.

실전 연습 문제

01

두 점 $A(-2, 3)$, $B(4, 0)$에 대하여 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은?

① $x-2y+1=0$　② $x+2y-4=0$
③ $2x-y+3=0$　④ $2x-y-3=0$
⑤ $4x-2y-7=0$

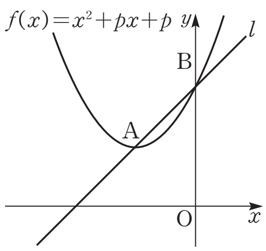
02

두 점 $A(1, 2)$, $B(3, 5)$를 지나는 직선과 평행하고 점 $(-2, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

03

기출

다음 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2+px+p$의 그래프의 꼭짓점을 A, 이 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점을 B라고 할 때, 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라고 하자. 직선 l의 x절편은?



① $-\frac{5}{2}$　② -2　③ $-\frac{3}{2}$
④ -1　⑤ $-\frac{1}{2}$

04

서로 다른 세 점 $A(2-2k, -1)$, $B(0, k+4)$, $C(1, k+6)$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 k의 값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

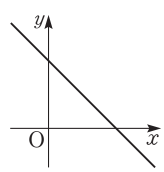
05 서술형

네 점 $A(-3, 5)$, $B(3, 4)$, $C(7, 9)$, $D(1, 10)$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 이등분하면서 점 $(-2, -1)$을 지나는 직선의 방정식이 $ax-y+b=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

06

직선 $ax+by+c=0$ $(b\neq0)$이 오른쪽 그림과 같을 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b, c는 상수이다.)



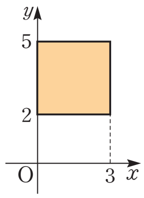
|보기|

ㄱ. $ab<0$　ㄴ. $bc<0$　ㄷ. $ac>0$

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07

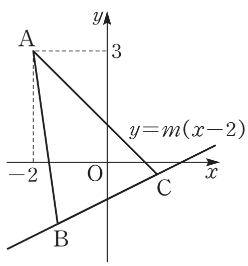
직선 $y=mx+3m-1$이 오른쪽 그림과 같은 정사각형과 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위가 $a \le m \le b$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.



08

기출

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$과 직선 $y=m(x-2)$ 위의 서로 다른 두 점 B, C가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$를 만족시킨다. 선분 BC의 중점이 y축 위에 있을 때, 양수 m의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

09

두 직선 $ax-3y+b=0$, $2x+3y-5=0$이 두 개 이상의 교점을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

10

기출

점 $(1, 0)$을 지나는 직선과 직선 $(3k+2)x-y+2=0$이 y축에서 수직으로 만날 때, 상수 k의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

11 서술형

두 점 $\mathrm{A}(5, 4)$, $\mathrm{B}(-3, k)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(0, 4)$를 지나도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

12

점 $(-1, 1)$을 지나는 직선 $ax+by-1=0$에 대하여 점 $(1, 4)$와 이 직선 사이의 거리가 13일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4

④ 6 ⑤ 8

13 서술형

두 점 $A(1,\ a)$, $B(-3,\ 4)$를 지나는 직선과 직선 $y=bx$가 서로 평행하고 두 직선 사이의 거리가 5일 때, $4b+a$의 값을 구하여라. (단, b는 상수이다.)

14 기출

좌표평면 위의 원점과 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$ 사이의 거리의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

15

세 직선 $x-3y+9=0$, $x+y-11=0$, $2x-y+8=0$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

16

세 점 $A(5,\ 2)$, $B(-2,\ 0)$, $C(0,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 12일 때, 정수 a의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

17

두 점 $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ 2)$에 대하여 $\overline{PA}^2-\overline{BP}^2=4$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

18 서술형

세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(5,\ 0)$, $C\left(\frac{5}{2},\ 6\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내심의 좌표를 구하여라.

상위권 도약 문제

01

기출

좌표평면 위에서 직선 $y=2x+2$가 x축과 만나는 점을 A라 하고 이 직선 위의 임의의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때 삼각형 PAH의 넓이가 5가 되도록 하는 점 P는 두 개가 있다. 이 두 점의 x좌표를 각각 α, β라고 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

02

세 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(7, 5)$, $\mathrm{C}(-a, 8)$에 대하여 $a=k_1$일 때, b의 값에 관계없이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 생기고, $b=k_2$일 때, a의 값에 관계없이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 생긴다. 이때 k_1+k_2의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

03

서로 다른 세 직선 $2ax+y-(4a+3)=0$, $2x+ay-(3a+4)=0$, $x-4y+a=0$이 좌표평면을 여섯 부분으로 나눌 때, 모든 상수 a의 값의 곱은?

① 1 ② 5 ③ 10
④ 12 ⑤ 16

04

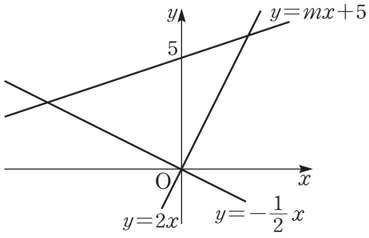
기출

곡선 $y=-x^2+4$ 위의 점과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리의 최솟값이 $2\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

05

기출

좌표평면에서 세 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+5$ $(m>0)$로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형일 때, 상수 m의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{8}{15}$　⑤ $\frac{3}{5}$

06

네 점 $O(0,\ 0)$, $A(3,\ -3)$, $B(6,\ 4)$, $C(3,\ 5)$와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값이 최소일 때, 선분 PA의 길이를 구하여라.

07

다음 그림과 같이 직사각형 ABCD에 대하여 선분 BC의 중점을 M이라 하고 선분 AM을 접는 선으로 하여 접었을 때, 점 B가 이동한 점을 점 P라고 하자. 두 직선 BC, AP가 만나는 점을 Q라고 할 때, 선분 BQ의 길이를 구하여라.