01 도함수의 그래프의 해석

(1) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때

① 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다.

② 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 **감소**한다.

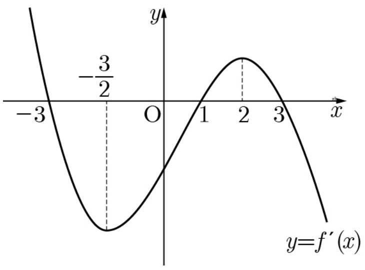
(2) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때,

① $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

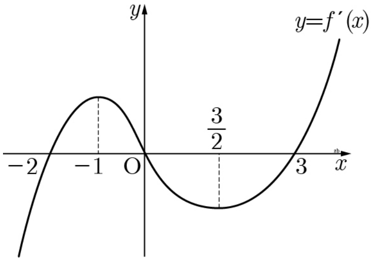
② $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

◪ 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값과 극솟값을 갖는 x의 값을 각각 구하여라.

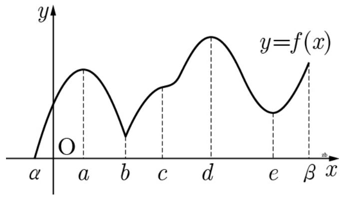
1.



2.



◪ 함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 다음을 구하여라.

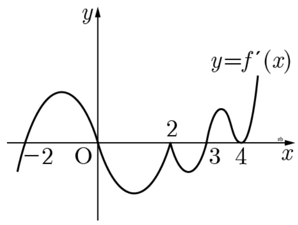


3. 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값

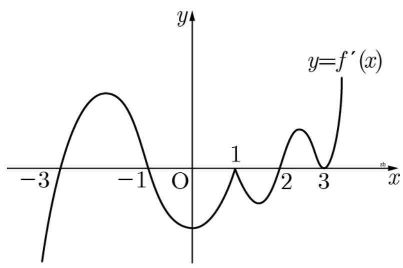
4. 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값

◪ 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$가 극값을 가지게 되는 점의 개수를 구하여라.

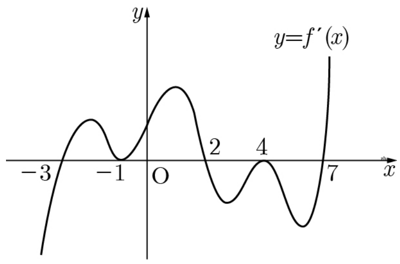
5.



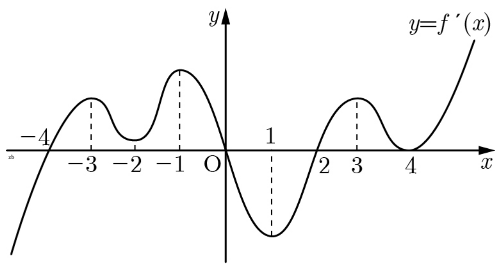
6.



7.

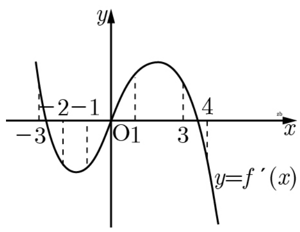


8.



◪ 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. <보기>에서 옳은 것을 모두 골라라.

9.



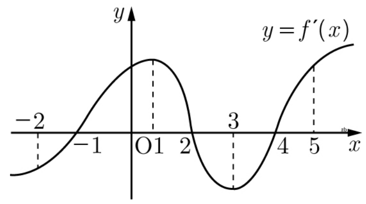
<보기>

ㄱ. 구간 $(-3,-2)$에서 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 구간 $(-2,-1)$에서 $f(x)$는 감소한다.

ㄷ. 구간 $(-1,1)$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

10.



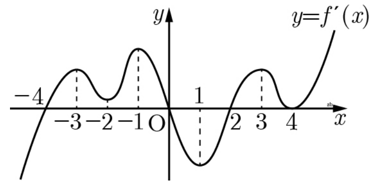
<보기>

ㄱ. $f(2)=f(4)$

ㄴ. $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.

ㄷ. 구간 $(-2,1)$에서 $f(x)$는 증가한다.

11.



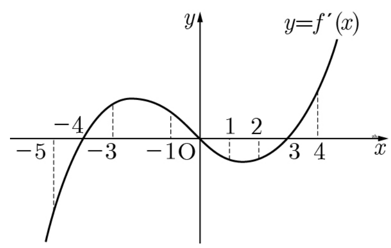
<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=-4$에서 극소이다.

ㄴ. 구간 $(1,3)$에서 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. 구간 $(-4,0)$에서 $f(x)$는 증가한다.

12.



<보기>

ㄱ. $f(x)$는 구간 $(-5,-3)$에서 감소한다.

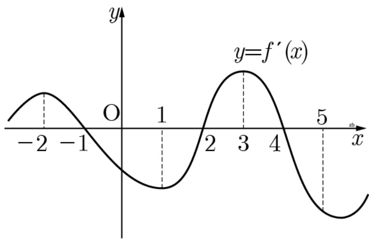
ㄴ. $f(x)$는 구간 $(-3,-1)$에서 증가한다.

ㄷ. $f(x)$는 구간 $(-1,1)$에서 극솟값을 갖는다.

ㄹ. $f(x)$는 구간 $(1,2)$에서 극댓값을 갖는다.

ㅁ. $f(x)$는 구간 $(2,4)$에서 극솟값을 갖는다.

13.



<보기>

ㄱ. $f(x)$는 구간 $(-2, 1)$에서 증가한다.

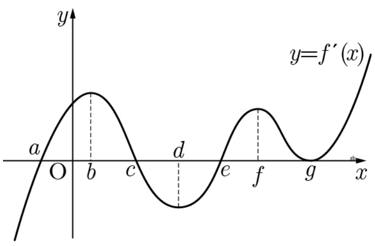
ㄴ. $f(x)$는 구간 $(1, 3)$에서 증가한다.

ㄷ. $f(x)$는 구간 $(4, 5)$에서 감소한다.

ㄹ. $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

ㅁ. $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

14.



<보기>

ㄱ. $f(x)$는 구간 (b, c)에서 감소한다.

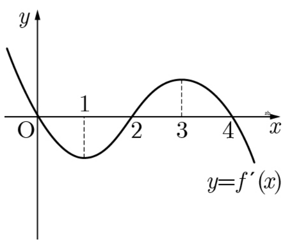
ㄴ. $f(x)$는 구간 (f, g)에서 증가한다.

ㄷ. $f(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

ㄹ. $f(x)$는 $x=c$에서 극댓값을 갖는다.

ㅁ. $f(x)$는 $x=g$에서 극솟값을 갖는다.

15.



<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.

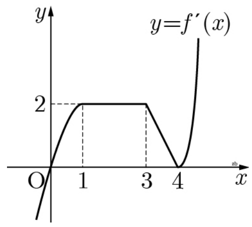
ㄴ. $f(x)$는 $x>4$에서 감소한다.

ㄷ. $f(x)$는 3개의 극값을 가진다.

ㄹ. $f(x)$는 $0<x<2$에서 감소한다.

ㅁ. $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

16.



<보기>

ㄱ. $f(x)$는 두 개의 극값을 갖는다.

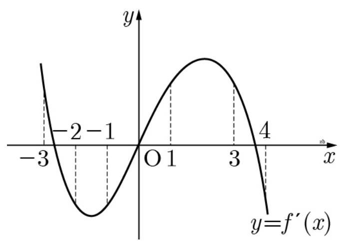
ㄴ. $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

ㄷ. $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하지 않다.

ㄹ. $1<x<3$에서 $f(x)$는 일차함수이다.

ㅁ. $3<x<4$에서 $f(x)$는 일차함수이다.

17.



<보기>

ㄱ. 구간 $(-3,\ -2)$에서 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 구간 $(-2,\ -1)$에서 $f(x)$는 감소한다.

ㄷ. 구간 $(-1,\ 1)$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

ㄹ. 구간 $(1,\ 3)$에서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㅁ. 구간 $(3,\ 4)$에서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

02 그래프의 개형

미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 순서로 그린다.
① $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.
② ①에서 구한 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만들고, 극값을 구한다.
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축의 교점의 좌표를 구한다.
④ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

◪ **다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.**

18. $f(x)=x^3+3x^2+1$

19. $f(x)=x^3-3x+3$

20. $f(x)=x^3-3x^2+4$

21. $f(x)=x^3-6x^2+9x$

22. $f(x)=x^3+6x^2+9x+4$

23. $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

24. $f(x)=-x^3+3x^2+1$

25. $f(x)=-x^3+6x^2-12x$

26. $f(x)=-x^3+6x^2-9x+5$

27. $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$

28. $f(x)=x^3+6x^2-15x$

29. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

30. $f(x)=3x^4+4x^3+1$

31. $f(x)=3x^4-4x^3-1$

32. $f(x)=3x^4-4x^3+1$

33. $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$

34. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+3$

35. $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3(x+1)$

36. $f(x)=-x^4+2x^2+1$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

37. $f(x)=-3x^4+4x^3-1$

03 극값을 가질 조건

(1) 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

① $f(x)$가 극값을 가질 조건 ⇨ $D>0$

② $f(x)$가 극값을 갖지 않을 조건 ⇨ $D\leq 0$

(2) 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 극댓값을 가질 조건

⇨ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극댓값을 갖지 않을 조건

⇨ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 다른 중근 또는 삼중근을 갖는다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

38. 삼차함수 $f(x)=x^3-2ax^2+12x+2$가 극값을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

39. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$가 극값을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

40. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$가 극값을 갖기 위한 자연수 a의 값의 범위를 구하여라.

41. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2-3ax+5$가 극값을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

42. 삼차함수 $f(x)=x^3-3(a+1)x^2-3(a-5)x$가 극값을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

43. 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+3ax+5$가 극값을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

44. 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-ax+3$이 극값을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

45. 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4x+1$이 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

46. 삼차함수 $f(x)=-3x^3+ax^2+ax$가 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

47. 삼차함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax+1$이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

48. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax-2$가 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

49. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2-2ax+3$이 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

50. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2-3ax+2$가 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

51. 삼차함수 $f(x)=x^3-2ax^2+7ax+3$이 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

52. 삼차함수 $f(x)=x^3+(a-3)x^2-2(a-3)x+a-4$가 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

53. 삼차함수 $f(x)=2x^3-ax^2+ax+1$이 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

54. 삼차함수 $f(x)=2x^3+2ax^2+2ax+1$이 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

55. 사차함수 $f(x)=x^4-4x^3+3ax^2+1$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

56. 사차함수 $f(x)=x^4-4x^3+\frac{a}{2}x^2-5$가 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

57. 사차함수 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

58. 사차함수 $f(x)=x^4+4x^3-4ax^2$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

59. 사차함수 $f(x)=2x^4-8x^3+4ax^2$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

60. 사차함수 $f(x)=-\frac{3}{4}x^4+4x^3+ax^2$이 극솟값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

정답 및 해설

1) $x=-3$, $x=3$에서 극대, $x=1$에서 극소
⇨ $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 -3, 1, 3이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 극댓값을 갖는 x의 값은 -3, 3이고, 극솟값을 갖는 x의 값은 1이다.

2) $x=0$에서 극대, $x=-2$, $x=3$에서 극소
⇨ $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 -2, 0, 3이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 극댓값을 갖는 x의 값은 0이고, 극솟값을 갖는 x의 값은 -2, 3이다.

3) a, d
⇨ $x=a$, $x=d$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

4) b, e
⇨ $x=b$, $x=e$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

5) 3개
⇨ x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $f'(x)=0$의 부호가
(ⅰ) 음에서 양으로 바뀌면 $x=a$에서 극소이므로 $x=-2$, $x=3$에서 극소이다.
(ⅱ) 양에서 음으로 바뀌면 $x=a$에서 극대이므로 $x=0$에서 극대이다.
(ⅲ) $x=2$, $x=4$에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 부호의 변화가 있는 3개의 점에서 극값을 갖는다.

6) 3개
⇨ x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $f'(x)$의 부호가
(ⅰ) 음에서 양으로 바뀌면 $x=a$에서 극소이므로 $x=-3$, $x=2$에서 극소이다.
(ⅱ) 양에서 음으로 바뀌면 $x=a$에서 극대이므로 $x=-1$에서 극대
(ⅲ) $x=1$, $x=3$에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 부호의 변화가 있는 3개의 점에서 극값을 갖는다.

7) 3개
⇨ x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $f'(x)$의 부호가
(ⅰ) 음에서 양으로 바뀌면 $x=a$에서 극소이므로 $x=-3$, $x=7$에서 극소이다.
(ⅱ) 양에서 음으로 바뀌면 $x=a$에서 극대이므로 $x=2$에서 극대
(ⅲ) $x=-1$, $x=4$에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 부호의 변화가 있는 3개의 점에서 극값을 갖는다.

8) 3개
⇨ x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $f'(x)$의 부호가
(ⅰ) 음에서 양으로 바뀌면 $x=a$에서 극소이므로 $x=-4$, $x=2$에서 극소이다.
(ⅱ) 양에서 음으로 바뀌면 $x=a$에서 극대이므로 $x=0$에서 극대
(ⅲ) $x=4$에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 부호의 변화가 있는 3개의 점에서 극값을 갖는다.

9) ㄴ, ㄷ
⇨ ㄱ. 구간 $(-3,-2)$에서 $f'(a)=0$이라 하면
$-3<x<a$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가
$a<x<-2$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소
ㄴ. 구간 $(-2,-1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소
ㄷ. $-1<x<0$에서 $f'(x)<0$, $0<x<1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-1,1)$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10) ㄴ
⇨ ㄱ. 주어진 것만으로는 알 수 없다.
ㄴ. $f'(2)=0$이고 $-1<x<2$에서 $f'(x)>0$, $2<x<4$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.
ㄷ. 구간 $(-2,-1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소, 구간 $(-1,1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

11) ㄱ, ㄷ
⇨ ㄱ. $f'(-4)=0$이고 $x<-4$에서 $f'(x)<0$, $-4<x<0$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $x=-4$에서 극소이다.
ㄴ. $1<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소, $2<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. $-4<x<0$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12) ㄴ, ㅁ
⇨ $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 $-4, 0, 3$이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $(-5, -3)$에서 $f'(x)$는 음수 값과 양수 값을 모두 가지므로 $f(x)$는 주어진 구간에서 감소하다가 증가한다.
ㄷ. $x=0$인 점의 좌우에서 $f'(x)$는 양수 값에서 음수값으로 바뀌므로 주어진 구간에서 극댓값을 갖는다.
ㄹ. 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)$는 항상 음수 값을 가지므로 $f(x)$는 주어진 구간에서 감소한다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

13) ㄷ, ㅁ
⇨

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 구간 $(-2, 1)$에서 $f(x)$는 증가하다가 감소한다.
ㄴ. 구간 $(1, 3)$에서 $f(x)$는 감소하다가 증가한다.
ㄹ. $x=3$인 점의 좌우에서 $f'(x)$의 값의 부호가 변화가 없으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㅁ이다.

14) ㄴ, ㄹ
⇨ $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 a, c, e, g이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$	g	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗		↗

ㄱ. 구간 (b, c)에서 $f(x)$는 증가한다.
ㄷ. $x=b$인 점의 좌우에서 $f'(x)$의 값의 부호가 변화가 없으므로 극값을 갖지 않는다.
ㅁ. $x=g$인 점의 좌우에서 $f'(x)$의 값의 부호가 변화가 없으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

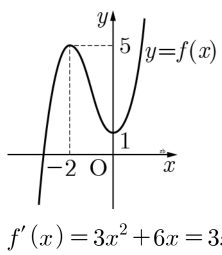
15) ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ
⇨ $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 $0, 2, 4$이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 극대이다.

16) ㄹ
⇨ ㄱ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 한편, $f(4)=0$이지만 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 한 개의 극값을 갖는다. (거짓)
ㄴ. $x \le 0$일 때, $f'(x) \le 0$이고, $x \ge 0$일 때 $f'(x) \ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x \le 0$에서 감소, $x \ge 0$에서 증가한다. (거짓)
ㄷ. $f'(4)=0$이므로 함수 $f(x)$의 $x=4$에서의 미분계수가 존재한다. 따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다. (거짓)
ㄹ. $1<x<3$에서 $f'(x)=2$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 일차함수이다. (참)
ㅁ. $3<x<4$에서 $f'(x)=-2x+8$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 이차함수이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄹ이다.

17) ㄴ, ㄷ, ㅁ
⇨ ㄱ. 구간 $(-3,\ -2)$에서 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $-3<x \le \alpha$에서 $f'(x) \ge 0$, $\alpha \le x<-2$에서 $f'(x) \le 0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-3,\ \alpha]$에서 증가, 구간 $[\alpha,\ -2)$에서 감소한다. (거짓)
ㄴ. 구간 $(-2,\ -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 감소한다. (참)
ㄷ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄹ. 구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. (거짓)
ㅁ. 구간 $(3,\ 4)$에서 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 β라 하면 $f'(\beta)=0$이고 $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

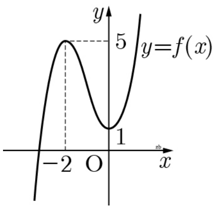
18) 

⇨ $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

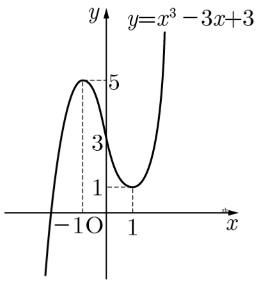
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 5, $x=0$에서 극

솟값 1을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



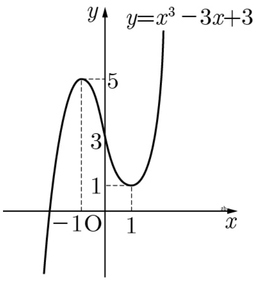
19)



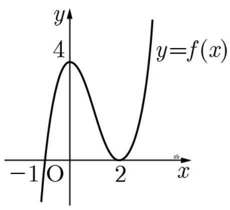
⇨ $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

한편, $f(0)=3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



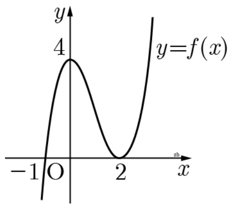
20)



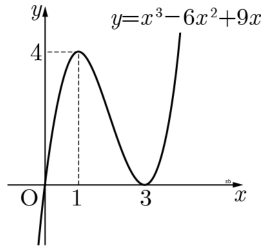
⇨ $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4, $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



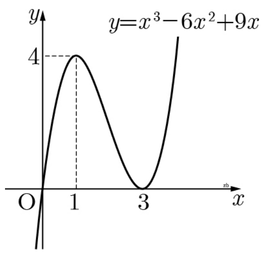
21)



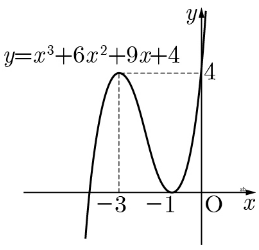
⇨ $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

한편, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



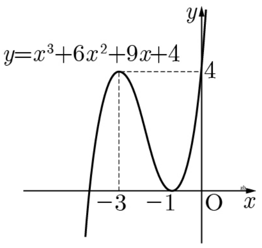
22)



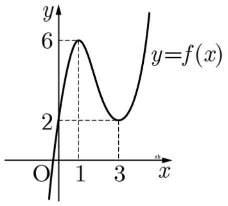
⇨ $f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음 그림과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

한편, $f(0)=4$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



23)

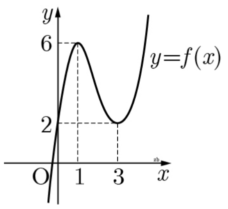


⇨ $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

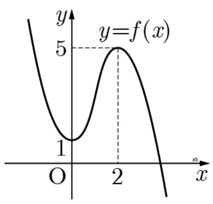
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 6, $x=3$에서 극솟값 2를 갖고 $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



24)



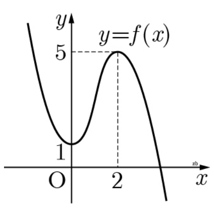
⇨ $f(x)=-x^3+3x^2+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3(x-2)$

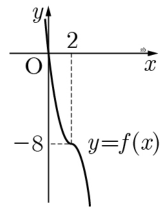
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



25)



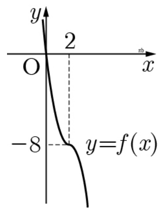
⇨ $f(x)=-x^3+6x^2-12x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

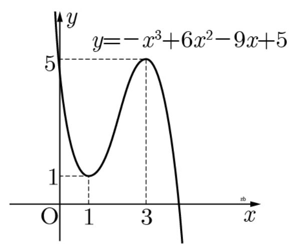
$f'(x)=0$에서 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↘

즉, 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



26)



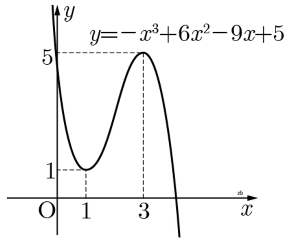
⇨ $f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

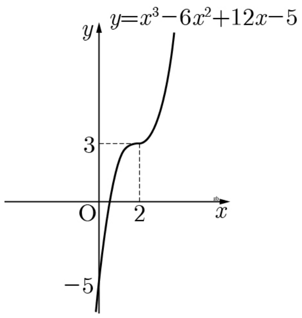
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

한편, $f(0)=5$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



27)



⇨ $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

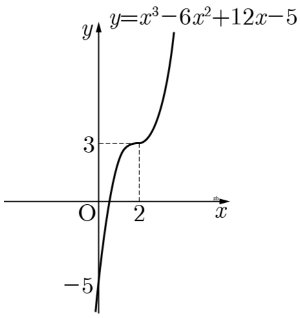
$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 다.

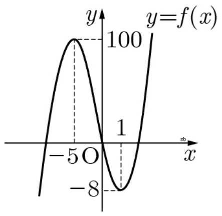
x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↗

함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



28)



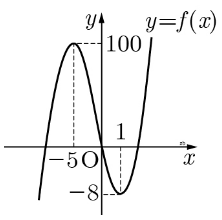
⇨ $f(x)=x^3+6x^2-15x$에서

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

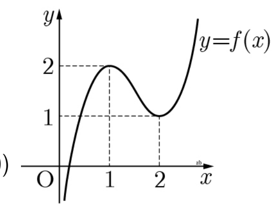
$f'(x)=0$에서 $x=-5$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	100	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



29)

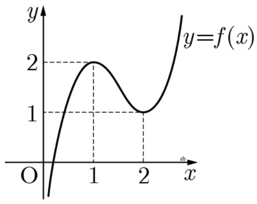


⇨ $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

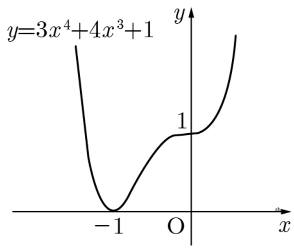
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2, $x=2$에서 극솟값 1을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



30)



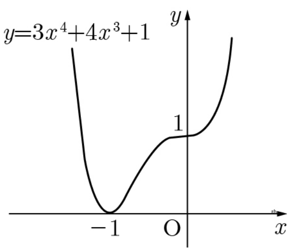
⇨ $f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

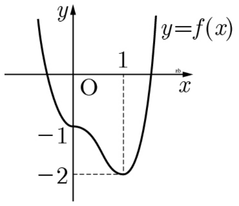
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=0$을 갖고, $x=0$에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



31) 

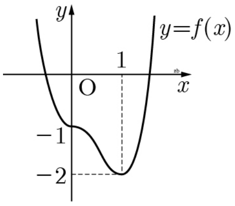
⇨ $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

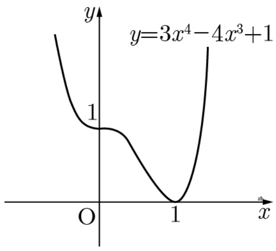
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



32) 

⇨ $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

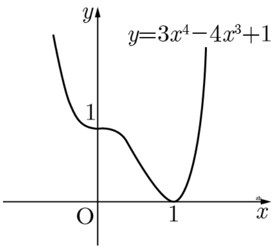
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

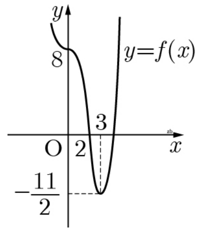
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않고 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



33) 

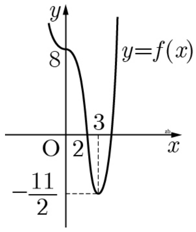
⇨ $f'(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$

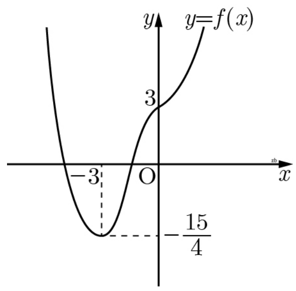
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↘	$-\frac{11}{2}$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=3$에서 극솟값 $-\frac{11}{2}$을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



34) 

⇨ $f'(x)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$

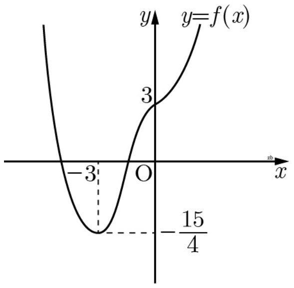
$f'(x)=0$에서 $x=-3$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

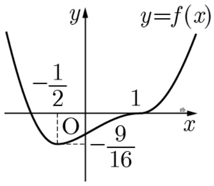
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $-\frac{15}{4}$을 갖고 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



35)



⇨ $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3(x+1)$에서

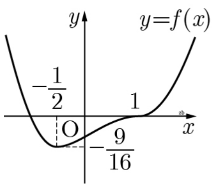
$f'(x)=(x-1)^2(x+1)+\frac{1}{3}(x-1)^3$

$=\frac{2}{3}(x-1)^2(2x+1)$

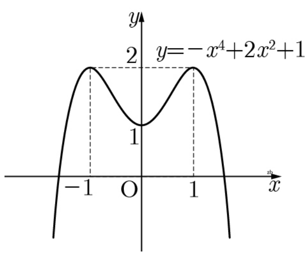
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



36)



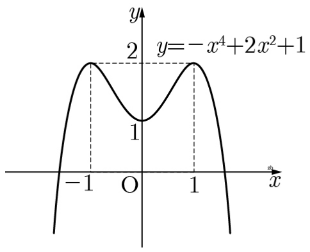
⇨ $f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

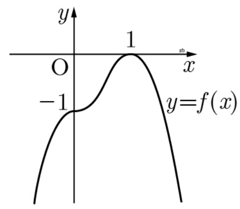
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



37)



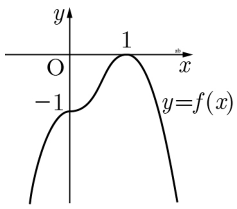
⇨ $f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	0	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=1$에서 극댓값 0을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



38) $a<-3$ 또는 $a>3$

⇨ $f(x)=x^3-2ax^2+12x+2$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+12$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-36>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

39) $a<-3$ 또는 $a>3$

⇨ $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$,

즉 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore$ $a<-3$ 또는 $a>3$

40) $a>3$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

그런데 a는 자연수이므로 $a>3$

41) $a<-9$ 또는 $a>0$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax-3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+9a>0$, $a(a+9)>0$

$\therefore a<-9$ 또는 $a>0$

42) $a<-4$ 또는 $a>1$

⇨ $f'(x)=3x^2-6(a+1)x-3(a-5)$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9(a+1)^2+9(a-5)>0$

$9(a+4)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-4$ 또는 $a>1$

43) $a<0$ 또는 $a>3$

⇨ $f'(x)=x^2+2ax+3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

44) $a<0$ 또는 $a>3$

⇨ $f(x)=-x^3+ax^2-ax+3$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉

$-3x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

$\therefore$ $a<0$ 또는 $a>3$

45) $-1\le a\le 3$

⇨ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4x+1$에서

$f'(x)=x^2+2(a-1)x+4$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $x^2+2(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야한다.

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-4\le 0$, $(a+1)(a-3)\le 0$

$\therefore$ $-1\le a\le 3$

46) $-9\le a\le 0$

⇨ $f(x)=-3x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=-9x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $-9x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야한다.

$\frac{D}{4}=a^2+9a>0$, $a(a+9)>0$

$\therefore$ $-9\le a\le 0$

47) $0\le a\le 3$

⇨ $f(x)=x^3-ax^2+ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 3$

48) $0\le a\le 3$

⇨ $f(x)=x^3+ax^2+ax-2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$

$\therefore$ $0\le a\le 3$

49) $-6\le a\le 0$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax-2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+6a\le 0$, $a(a+6)\le 0$

$\therefore$ $-6\le a\le 0$

50) $-9\le a\le 0$

⇨ $f(x)=x^3+ax^2-3ax+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax-3a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

$\frac{D}{4}=a^2+9a \le 0,\ a(a+9) \le 0$

$\therefore\ -9 \le a \le 0$

51) $0 \le a \le \frac{21}{4}$

⇨ $f(x)=x^3-2ax^2+7ax+3$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+7a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2-4ax+7a=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=4a^2-21a \le 0,\ a(4a-21) \le 0$

$\therefore\ 0 \le a \le \frac{21}{4}$

52) $-3 \le a \le 3$

⇨ $f(x)=x^3+(a-3)x^2-2(a-3)x+a-4$에서

$f'(x)=3x^2+2(a-3)x-2(a-3)$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2(a-3)x-2(a-3)=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(a-3)^2+6(a-3) \le 0$

$a^2-9 \le 0,\ (a+3)(a-3) \le 0$

$\therefore\ -3 \le a \le 3$

53) $0 \le a \le 6$

⇨ $f(x)=2x^3-ax^2+ax+1$에서

$f'(x)=6x^2-2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $6x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-6a \le 0,\ a(a-6) \le 0$

$\therefore\ 0 \le a \le 6$

54) $0 \le a \le 3$

⇨ $f(x)=2x^3+2ax^2+2ax+1$에서

$f'(x)=6x^2+4ax+2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $6x^2+4ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=4a^2-12a \le 0,\ 4a(a-3) \le 0$

$\therefore\ 0 \le a \le 3$

55) $a<0$ 또는 $0<a<\frac{3}{2}$

⇨ $f(x)=x^4-4x^3+3ax^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+6ax=x(4x^2-12x+6a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2-12x+6a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $4x^2-12x+6a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=36-24a>0\ \therefore a<\frac{3}{2}$

이때, $x=0$이 $4x^2-12x+6a=0$의 근이 아니어야 하므로

$6a \ne 0\ \ \therefore a \ne 0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{3}{2}$

56) $a<0$ 또는 $0<a<9$

⇨ $f(x)=x^4-4x^3+\frac{a}{2}x^2-5$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+ax=x(4x^2-12x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2-12x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $4x^2-12x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=36-4a>0\ \ \therefore a<9$

이때 $x=0$이 $4x^2-12x+a=0$의 근이 아니어야 하므로 $a \ne 0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $0<a<9$

57) $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{2}$

⇨ $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2+2ax=2x(2x^2+3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $2x^2+3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9-2a>0\qquad \therefore\ a<\frac{9}{2}(a \ne 0)$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{2}$

58) $-\frac{9}{2}<a<0$ 또는 $a>0$

⇨ $f(x)=x^4+4x^3-4ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2-8ax=4x(x^2+3x-2a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $x^2+3x-2a=0$이 0이 아닌 서로 다

른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9+2a>0 \quad \therefore\ a>-\frac{9}{2}(a\neq 0)$

$\therefore\ -\frac{9}{2}<a<0$ 또는 $a>0$

59) $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

⇨ $f(x)=2x^4-8x^3+4ax^2$에서

$f'(x)=8x^3-24x^2+8ax=8x(x^2-3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9-4a>0 \quad \therefore\ a<\frac{9}{4}(a\neq 0)$

$\therefore\ a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

60) $-6<a<0$ 또는 $a>0$

⇨ $f(x)=-\frac{3}{4}x^4+4x^3+ax^2$에서

$f'(x)=-3x^3+12x^2+2ax=-x(3x^2-12x-2a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $3x^2-12x-2a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$3x^2-12x-2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=36+6a>0 \quad \therefore a>-6$

이때, $x=0$이 $3x^2-12x-2a=0$의 근이 아니어야 하므로

$-2a\neq 0 \quad \therefore a\neq 0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-6<a<0$ 또는 $a>0$