● 3회차

01 ④	02 ③	03 ⑤	04 ①	05 ①
06 ①	07 ④	08 ②	09 ④	10 ③
11 ①	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 ②
16 ②	17 ①			

[서술형 1] (1) $f(x)=x^3+3x^2+2x$ (2) 2
[서술형 2] $\sqrt{2}$
[서술형 3] -4

01 ① $\lim_{x\to-1} f(x)=2$

② $\lim_{x\to0-} f(x)=0$

③ $\lim_{x\to0+} f(x)=-1$

④ $\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)\neq \lim_{x\to1+} f(x)$

즉 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않는다.

⑤ $f(x)=t$라 하면 $x\to1-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=1$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ④이다.

02 $\lim_{x\to-3-}\frac{|x+3|}{x+3}=\lim_{x\to-3-}\frac{-(x+3)}{x+3}=-1$

$\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+} x=1$

$\therefore \lim_{x\to-3-}\frac{|x+3|}{x+3}+\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x}{|x-1|}=-1+1=0$

03 $\lim_{x\to2}(-x^2+2x+5)=-4+4+5=5$

04 $i(x)=5f(x)-3g(x)+h(x)$라 하면

$\lim_{x\to a} i(x)=5$, $g(x)=\frac{5f(x)+h(x)-i(x)}{3}$

$\therefore \lim_{x\to a} g(x)$

$=\lim_{x\to a}\frac{5f(x)+h(x)-i(x)}{3}$

$=\frac{5}{3}\lim_{x\to a} f(x)+\frac{1}{3}\lim_{x\to a} h(x)-\frac{1}{3}\lim_{x\to a} i(x)$

$=\frac{5}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot3-\frac{1}{3}\cdot5$

$=1$

05 $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2-1}}{3x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{4t^2-1}}{-3t+1}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1-\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}{-3+\frac{1}{t}}$

$=1$

오답 피하기

분모의 최고차항인 t로 분자와 분모를 나눌 때, 근호 안은 t^2으로 나누어야 한다.

06 $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+a+2)$

$=a+4$

즉 $a+4=5$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2-4=-6$

$\therefore a+b=1+(-6)=-5$

07 ㄱ, ㄹ. 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $g(0)=\lim_{x\to0} g(x)=-1$이므로 함수 $g(x)$는

$x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{2x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{2x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to0-}h(x)\neq\lim_{x\to0+}h(x)$

즉 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ로 그 개수는 3이다.

08 주어진 그래프에서 불연속인 점은 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때이므로 그 개수는 4이다.
또 극한값이 존재하지 않는 점은 $x=-1$, $x=1$일 때이므로 그 개수는 2이다.
따라서 $m=4$, $n=2$이므로
$m+n=4+2=6$

09 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$이므로
$\lim_{x\to2-}(ax+3)=\lim_{x\to2+}(-x+9)=f(2)$
$2a+3=7$ $\qquad\therefore a=2$

Lecture **함수가 연속일 조건 (1)**
두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 연속함수일 때,
함수 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\geq a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이려면
⇨ $\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=f(a)$

10 $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x-1}$
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.
즉 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+a}{x-1}$ …… ㉠
㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로
$\lim_{x\to1}(x^2+x+a)=a+2=0$
$\therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$
$\therefore a+f(1)=-2+3=1$

11 함수 $g(f(x))$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{x\to0+}g(f(x))=g(f(0))$
이때 $f(x)=t$라 하면
$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to-a-}g(t)=2a^2+3a-4$
$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to3-}g(t)=18-9-4=5$
즉 $2a^2+3a-4=5$이므로 $2a^2+3a-9=0$
$(a+3)(2a-3)=0$ $\qquad\therefore a=-3$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
따라서 구하는 모든 a의 값의 합은
$-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

12 x의 값이 2에서 5까지 변할 때의 평균변화율은
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$
$=\frac{(25+5a+b)-(4+2a+b)}{3}$
$=a+7$
즉 $a+7=6$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=x^2-x+b$이므로
$f'(x)=2x-1$
$\therefore f'(5)=10-1=9$

13 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{5h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\frac{1}{5}$
$=\frac{1}{5}f'(2)$
즉 $\frac{1}{5}f'(2)=8$이므로 $f'(2)=40$
이때 $f'(x)=9x^2+a$이므로
$f'(2)=36+a=40$ $\qquad\therefore a=4$
따라서 $f(x)=3x^3+4x+2$이므로
$f(2)=24+8+2=34$

14 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

즉 $f'(2)=3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\cdot3$$
$$=3f'(2)$$
$$=3\cdot3=9$$

15 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=1$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}\{f(x)-2\}=f(-1)-2=0$

$\therefore f(-1)=2$

$f(-1)=2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)$

$\therefore f'(-1)=1$

이때

$g'(x)=(6x^2-3)f(x)+(2x^3-3x+2)f'(x)$

이므로

$$g'(-1)=3f(-1)+3f'(-1)$$
$$=3\cdot2+3\cdot1=9$$

16 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-3$에 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-3-f(x)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-3}{h}$$

또 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-3$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-3$ $\quad\therefore f(0)=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

즉

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3}{h}+\lim_{h\to0}\frac{2xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+2x\ (\because ㉡)$$
$$=f'(0)+2x$$
$$=2x+1$$

$\therefore f'(-1)=-2+1=-1$

17 $f(x)=x^2-2x$라 하면 $f'(x)=2x-2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4-2=2$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-0=2(x-2)$ $\quad\therefore y=2x-4$

따라서 $a=2$, $b=-4$이므로

$a+b=2+(-4)=-2$

[서술형 1] (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+1}=3$에서 $f(x)-x^3$은 x^2의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

$f(x)-x^3=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-1$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

즉 $f(-1)=-1+3-a+b=0$이므로

$b=a-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-1$에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+ax+b}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+ax+a-2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+2x+a-2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+2x+a-2)$$
$$=a-3$$

즉 $a-3=-1$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2-2=0$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2+2x$

❶

(2) $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3+3t^2+2t}{t}\\&=\lim_{t\to 0}(t^2+3t+2)\\&=2\end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	4점
❷ $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] 점 Q의 좌표는 $(t, \sqrt{2})$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=t-1$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2t}-\sqrt{2}$

❶

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to 1+}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}&=\lim_{t\to 1+}\frac{t-1}{\sqrt{2t}-\sqrt{2}}\\&=\lim_{t\to 1+}\frac{t-1}{\sqrt{2}(\sqrt{t}-1)}\\&=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}\\&=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{2}(t-1)}\\&=\lim_{t\to 1+}\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ $\overline{\mathrm{AQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값을 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] $g(x)=x^3f(x)+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

❶

위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\begin{aligned}g'(2)&=12f(2)+8f'(2)\\&=12\cdot(-3)+8\cdot 4\\&=-4\end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ $g'(x)$를 구할 수 있다.	3점
❷ $g'(2)$의 값을 구할 수 있다.	3점