07

삼차방정식과 사차방정식

예제 01 — 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-4x=0$ (2) $x^3-27=0$

(3) $16x^4-1=0$ (4) $x^4-x^2-2=0$

접근 방법

(1), (2), (3)은 인수분해 공식을 이용하여 인수분해하고 (4)는 $x^2=X$로 치환하여 인수분해합니다.

Bible 방정식의 좌변을 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다.

상세 풀이

(1) $x^3-4x=0$의 좌변을 인수분해하면 $x(x^2-4)=0$, $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$

(2) $x^3-27=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore$ $x-3=0$ 또는 $x^2+3x+9=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $16x^4-1=0$의 좌변을 인수분해하면 $(4x^2+1)(4x^2-1)=0$, $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore$ $4x^2+1=0$ 또는 $2x+1=0$ 또는 $2x-1=0$

$\therefore$ $x=\pm\dfrac{1}{2}i$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(4) $x^2=X$로 놓으면 $X^2-X-2=0$

$(X+1)(X-2)=0$

$\therefore$ $X=-1$ 또는 $X=2$

(i) $X=-1$일 때, $x^2=-1$이므로 $x=\pm i$

(ii) $X=2$일 때, $x^2=2$이므로 $x=\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

정답 ➡ (1) $x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ (2) $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=\pm\dfrac{1}{2}i$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$ (4) $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

보충 설명

삼차방정식 $f(x)=0$ 또는 사차방정식 $f(x)=0$에서 다항식 $f(x)$를 인수분해하여 일차식 또는 이차식의 곱으로 바꿔서 풀이하는 것이 삼차방정식과 사차방정식의 풀이의 기본입니다.

풀이집 p.85

숫자 바꾸기

01-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-9x=0$ (2) $x^3+64=0$

(3) $81x^4-1=0$ (4) $x^4+3x^2-4=0$

표현 바꾸기

01-2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15=0$ (2) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$

개념 넓히기 ★☆☆

01-3 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4+4=0$ (2) $x^4+x^2+1=0$

정답

01-1 (1) $x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$ (2) $x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

(3) $x=\pm\frac{1}{3}i$ 또는 $x=\pm\frac{1}{3}$ (4) $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm1$

01-2 (1) $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=1$

(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=-4$ 또는 $x=1$

01-3 (1) $x=-1\pm i$ 또는 $x=1\pm i$ (2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

예제 02 인수정리를 이용한 삼 · 사차방정식의 풀이

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-3x-2=0$ (2) $x^4-2x^3-4x^2+2x+3=0$

접근 방법

(1)에서는 x에 ±1, ±2를 대입하여 삼차식이 0이 되는 값을 찾고, (2)에서는 x에 ±1, ±3을 대입하여 사차식이 0이 되는 값을 찾아 조립제법을 이용하여 방정식을 풉니다.

Bible 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가진다.

상세 풀이

(1) $f(x)=x^3-3x-2$라고 하면

$$f(-1)=-1+3-2=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^2-x-2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-x-2)=0$$

$$(x+1)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1\text{(중근) 또는 } x=2$$

(2) $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$이라고 하면

$$f(1)=1-2-4+2+3=0$$

$$f(-1)=1+2-4-2+3=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-2x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & -4 & 2 & 3 \\ & & 1 & -1 & -5 & -3 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -5 & -3 & \boxed{0} \\ & & -1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-1)(x+1)(x^2-2x-3)=0$$

$$(x-1)(x+1)^2(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1\text{(중근) 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

정답 ➡ (1) $x=-1$(중근) 또는 $x=2$ (2) $x=-1$(중근) 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

보충 설명

방정식 $f(x)=0$에서 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 양의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 양의 약수})}$$

중에서 찾을 수 있습니다.

풀이집 p.86

숫자 바꾸기

02-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-4x^2+3x+2=0$　　(2) $x^4-4x+3=0$

표현 바꾸기

02-2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $2x^3-x^2-13x-6=0$　　(2) $2x^4-5x^3+5x-2=0$

07

개념 넓히기 ★★☆

02-3 사차방정식 $x^4+ax^3+(a+3)x^2+16x+b=0$의 두 근이 1, 3일 때, 나머지 두 근을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

정답 **02-1** (1) $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$ (2) $x=1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

02-2 (1) $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$ (2) $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

02-3 -2, 2

예제 03

계수가 좌우 대칭인 사차방정식의 풀이

사차방정식 $x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$을 풀어라.

접근 방법

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ $(a\neq0)$과 같이 x^2항을 중심으로 계수가 좌우 대칭인 사차방정식은 양변을 x^2으로 나누고 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하여 방정식을 풉니다.

Bible 계수가 좌우 대칭인 사차방정식은 양변을 x^2으로 나누고 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하여 푼다.

상세 풀이

$x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-2x-6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0 \quad \leftarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$$X^2-2X-8=0,\ (X+2)(X-4)=0$$

$$\therefore X=-2 \text{ 또는 } X=4$$

(i) $X=-2$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-2$이므로 양변에 x를 곱하여 정리하면

$$x^2+2x+1=0,\ (x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1\text{(중근)}$$

(ii) $X=4$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=4$이므로 양변에 x를 곱하여 정리하면

$$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$$

(i), (ii)에서 $x=-1$(중근) 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

정답 ➡ $x=-1$(중근) 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

보충 설명

계수가 좌우 대칭인 오차방정식 $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$은 $x=-1$이 방정식의 근이 되므로 좌변을 $x+1$로 나누어서 계수가 좌우 대칭인 사차방정식으로 변형하여 풀 수 있습니다.

풀이집 p.87

숫자 바꾸기

03-1 사차방정식 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$을 풀어라.

표현 바꾸기

03-2 사차방정식 $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0$의 모든 실근의 합을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

03-3 오차방정식 $x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1=0$을 만족시키는 실수 x에 대하여 서로 다른 x^2+3x의 값의 합을 구하여라.

정답

03-1 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

03-2 $\frac{5}{2}$

03-3 -3

예제 04

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $x^3+2x^2+3x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ (2) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$ (3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

접근 방법

$x^3+2x^2+3x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 $x^3+2x^2+3x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$입니다. 따라서 삼차방정식의 세 근의 합과 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱의 값을 알 수 있으므로 이를 이용하여 주어진 식의 값을 구합니다.

> **Bible** 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면
> $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

상세 풀이

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{2}{1}=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{1}=3,\ \alpha\beta\gamma=-\frac{-1}{1}=1$$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{1}=3$

(2) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{1}=-2$

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(-2)^2-2\cdot3=-2$

정답 ➡ (1) 3 (2) -2 (3) -2

보충 설명

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 대한 문제에서 다음 곱셈 공식의 변형이 자주 이용됩니다.

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(2) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

풀이집 p.88

숫자 바꾸기

04-1 삼차방정식 $x^3-3x^2+5x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　(2) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}$　(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

표현 바꾸기

04-2 삼차방정식 $x^3-4x^2+3x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$　(2) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

07

개념 넓히기 ★★★　◆ 다른 풀이

04-3 삼차방정식 $x^3-3x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　(2) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

정답 **04-1** (1) $\dfrac{5}{3}$ (2) 1 (3) -1　**04-2** (1) 6 (2) 14　**04-3** (1) -6 (2) 18

예제 05

세 수를 근으로 가지는 삼차방정식

삼차방정식 $x^3-x^2-2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 가지고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

접근 방법

삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구한 후, 이 값을 이용하여 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$에 대하여 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱의 값을 구합니다.

Bible 세 수 α, β, γ를 근으로 가지고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

상세 풀이

삼차방정식 $x^3-x^2-2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이므로

$$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=1+3=4$$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3\\&=-2+2\cdot1+3=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)&=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1\\&=-1+(-2)+1+1=-1\end{aligned}$$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 가지고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-4x^2+3x+1=0$$

정답 ➡ $x^3-4x^2+3x+1=0$

보충 설명

삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 근을 직접 구하지 않고도 세 근의 합과 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱의 값을 구할 수 있습니다.

풀이집 p.89

숫자 바꾸기

05-1 삼차방정식 $4x^3-12x^2+8x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $2\alpha-1$, $2\beta-1$, $2\gamma-1$을 세 근으로 가지고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

표현 바꾸기

05-2 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 가지고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은?

① $x^3+3x^2+2x+1=0$ ② $x^3+3x^2-2x+1=0$ ③ $x^3+2x^2+3x+1=0$
④ $x^3+2x^2-3x+1=0$ ⑤ $x^3-2x^2-3x+1=0$

07

개념 넓히기 ★☆☆

05-3 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

정답 **05-1** $x^3-3x^2-x+5=0$ **05-2** ④ **05-3** 34

예제 06

방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{1+\omega^2}{\omega}+\dfrac{1}{\omega+\omega^2}$ (2) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{21}$

접근 방법

방정식 $x^3=1$은 $x^3-1=0$에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

이므로 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근입니다.

Bible $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

상세 풀이

$x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

(1) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $1+\omega=-\omega^2$, $1+\omega^2=-\omega$, $\omega+\omega^2=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{1+\omega^2}{\omega}+\frac{1}{\omega+\omega^2}&=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{-\omega}{\omega}+\frac{1}{-1}\\&=-1+(-1)+(-1)\\&=-3\end{aligned}$$

(2) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{21}$

$$\begin{aligned}&=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)+\cdots+(\omega^{18}+\omega^{19}+\omega^{20})+\omega^{21}\\&=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{18}(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^7\\&=(\omega^3)^7=1^7=1\end{aligned}$$

정답 ➡ (1) -3 (2) 1

보충 설명

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 근이 됨을 알 수 있습니다.

풀이집 p.90

숫자 바꾸기

06-1 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\dfrac{\omega^2}{1-\omega}+\dfrac{1+\omega^2}{\omega^4}+\dfrac{\omega^3}{\omega-\omega^2}$

(2) $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\cdots+\omega^{14}-\omega^{15}$

표현 바꾸기

06-2 방정식 $x^3+1=0$의 두 허근을 ω_1, ω_2라고 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $\omega_1^2-\omega_1+1=0$ ㄴ. $\omega_1+\omega_2=1$ ㄷ. $\omega_1\omega_2=-1$

ㄹ. $\omega_1^2=-\omega_2$ ㅁ. $\omega_1^3+\omega_2^3=-2$ ㅂ. $\omega_1^5+\omega_2^5=-1$

07

개념 넓히기 ★★☆

06-3 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2+\cdots+\left(\omega^{18}+\frac{1}{\omega^{18}}\right)^2$$

의 값을 구하여라.

정답 **06-1** (1) -3 (2) 1 **06-2** ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ **06-3** 36