01 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

1. 수열의 귀납적 정의
 : 수열 $\{a_n\}$을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의라 한다.
2. 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의
 : 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때
 (1) 등차수열을 나타내는 관계식
  ① $a_{n+1}-a_n=d$ ⇨ 공차가 d인 등차수열
  ② $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
  ③ $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$
 (2) 등비수열을 나타내는 관계식
  ① $a_{n+1}\div a_n=r$ ⇨ 공비가 r인 등비수열
  ② $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$
  ③ $a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$

◪ **다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라.(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)**

1. $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

2. $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$

3. $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_2=-1,\ \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

4. $a_1=1,\ a_2=-2,\ (a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$

5. $a_1=3,\ a_2=7,\ a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

6. $a_1=32,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$

7. $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n$

8. $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n$

9. $a_1=-3,\ a_2=0,\ a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

10. $a_1=3,\ a_2=-1,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

11. $a_1=-4,\ a_{n+1}=a_n+2$

12. $a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=3$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하여라.(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

13. $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$

14. $9,\ -3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$

15. $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

16. $10,\ 6,\ 2,\ -2,\ -6,\ \cdots$

◪ 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

17. $a_1=9,\ a_{n+1}=3a_n$

18. $a_1=11,\ a_2=19,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

19. $a_1=100,\ a_{n+1}=a_n-3$

20. $a_1=1,\ a_2=2,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$

21. $a_1=3,\ a_2=2,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

22. $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n$

23. $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{4},\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$

24. $a_1=2,\ a_2=3,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$

25. $a_1=6,\ a_2=3,\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

26. $a_1=-1,\ a_{n+1}=2a_n$

27. $a_1=2,\ a_2=6,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

28. $a_1=7,\ a_2=4,\ a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

29. $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n-3$

30. $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n+3$

02 여러 가지 수열의 귀납적 정의

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 꼴 ⇨ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

(2) $a_{n+1}=a_nf(n)$의 꼴 ⇨ $a_n=a_1f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)$

(3) $a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq1,\ q\neq0)$ 꼴

⇨ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 변형하여 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열임을 이용한다.

(4) $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\ (p+q+r=0)$ 꼴

⇨ $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$으로 변형하여 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\frac{r}{p}$인 등비수열임을 이용한다.

(5) $a_{n+1}=\frac{ra_n}{pa_n+q}$ 꼴

⇨ 양변의 역수를 취하여 $b_n=\frac{1}{a_n}$로 놓고 b_n을 구한 후 a_n을 구한다.

◪ **다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제5항을 구하여라.(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)**

31. $a_1=-5,\ a_{n+1}=a_n+4$

32. $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$

33. $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3n$

34. $a_1=\frac{1}{2},\ (n+1)a_{n+1}=2na_n$

35. $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n+n^2$

36. $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

37. $a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n-2$

38. $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}a_n$

39. $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n+1$

40. $a_1=-1,\ a_{n+1}=3a_n+2n$

41. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 2$

42. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{3n}{n+2} a_n$

43. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + (2n+1)$

44. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

45. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = na_n$

46. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n$

47. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + n$

48. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = 2a_n + n$

◪ **다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제10항을 구하여라.(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)**

49. $a_1 = 1,\ a_{n+1} \div a_n = 2^n$

50. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

51. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 4n$

52. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$

53. $a_1 = 3,\ a_{n+1} - a_n = 2n + 1$

54. $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$

55. $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

◪ **다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)**

56. $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$

57. $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$

58. $a_1=4$, $a_{n+1}=a_n+2^n$

59. $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}a_n$

60. $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

61. $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n-4$

62. $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+1$

63. $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,a_n$

64. $a_1=4$, $a_{n+1}=-a_n+2$

65. $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n+3$

66. $a_1=8$, $a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n$

67. $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$

68. $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1$

69. $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+n}$

70. $a_1=-5,\ a_{n+1}=a_n+3n$

71. $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2n$

72. $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n$

◪ 다음 물음에 답하여라.

73. $a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n+2\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10}=p\cdot 3^q-1$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, $p,\ q$는 자연수)

74. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$로 정의될 때, $\dfrac{a_{10}}{a_6}$의 값을 구하여라.

75. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{2n-1}{2n+1}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의될 때, a_{20}의 값을 구하여라.

76. $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{18}의 값을 구하여라.

77. $a_1=3,\ a_2=4,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_k=258$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하여라.

78. $a_1=1,\ a_2=5$이고 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 8

⇨ $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$

$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$

$\therefore\ a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$

2) 9

⇨ $a_3 = 2a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5$

$a_4 = 2a_3 - a_2 = 10 - 3 = 7$

$\therefore\ a_5 = 2a_4 - a_3 = 14 - 5 = 9$

3) 8

⇨ 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{a_2}{a_1} = -2$인 등비수열이므로

$a_n = \dfrac{1}{2} \times (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-2}$

$\therefore\ a_5 = -(-2)^3 = 8$

4) 16

⇨ 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{a_2}{a_1} = -2$인 등비수열이므로

$a_n = 1 \times (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = (-2)^4 = 16$

5) 19

⇨ $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$

$a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$ 이므로 등차중항의 성질을 나타낸다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_1 = 3,\ a_2 = 7$ 이므로 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore a_5 = 3 + 4 \cdot 4 = 19$

6) 2

⇨ 첫째항이 32, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n = 32 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-6}$

$\therefore\ a_5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

7) 32

⇨ 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore\ a_5 = 32$

8) 81

⇨ $a_2 = 3a_1 = 3,\ a_3 = 3a_2 = 9,\ a_4 = 3a_3 = 27$

$\therefore\ a_5 = 3a_4 = 81$

9) 9

⇨ 첫째항이 -3, 공차가 $a_2 - a_1 = 0 - (-3) = 3$인 등차수열이므로 $a_n = -3 + (n-1) \times 3 = 3n - 6$

$\therefore\ a_5 = 3 \times 5 - 6 = 9$

10) -13

⇨ 첫째항이 3, 공차가 $a_2 - a_1 = -1 - 3 = -4$인 등차수열이므로 $a_n = 3 + (n-1) \times (-4) = -4n + 7$

$\therefore\ a_5 = -4 \times 5 + 7 = -13$

11) 4

⇨ 첫째항이 -4, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = -4 + (n-1) \times 2 = 2n - 6$

$\therefore\ a_5 = 2 \times 5 - 6 = 4$

12) 14

⇨ 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$

$\therefore\ a_5 = 14$

13) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$

⇨ 첫째항 $a_1 = 2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$

$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$

$a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3$

$\vdots$

$a_{n+1} - a_n = 3 \ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

14) $a_1 = 9,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n$

⇨ 첫째항 $a_1 = 9$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2 \div a_2 = (-3) \div 9 = -\dfrac{1}{3}$

$a_3 \div a_2 = 1 \div (-3) = -\dfrac{1}{3}$

$a_4 \div a_3 = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \div 1 = -\dfrac{1}{3}$

$\vdots$

$a_{n+1} \div a_n = -\dfrac{1}{3} \ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 9,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

15) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n$

⇨ 첫째항 $a_1 = 1$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2 \div a_1 = 2 \div 1 = 2$

$a_3 \div a_2 = 4 \div 2 = 2$

$a_4 \div a_3 = 8 \div 4 = 2$

$\vdots$

$a_{n+1} \div a_n = 2 \ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n \ (n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$

16) $a_1 = 10, \ a_{n+1} = a_n - 4 \ (n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$

⇨ 첫째항 $a_1 = 10$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4$

$a_3 - a_2 = 2 - 6 = -4$

$a_4 - a_3 = -2 - 2 = -4$

$\vdots$

$a_{n+1} - a_n = -4 \ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 10, \ a_{n+1} = a_n - 4 \ (n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$

17) $a_n = 3^{n+1}$

⇨ $a_{n+1} = 3a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

$a_1 = 9$이므로 $a_n = 9 \cdot 3^{n-1} = 3^{n+1}$

18) $a_n = 8n + 3$

⇨ $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, $a_1 = 11$이고 공차가 $a_2 - a_1 = 8$이므로

$a_n = 11 + 8(n-1) = 8n + 3$

19) $a_n = -3n + 103$

⇨ $a_{n+1} = a_n - 3$, 즉 $a_{n+1} - a_n = -3$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다.

$a_1 = 100$이므로 $a_n = 100 - 3(n-1) = -3n + 103$

20) $a_n = 2^{n-1}$

⇨ ${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고 $a_1 = 1, \ a_2 \div a_1 = 2 \div 1 = 2$이므로 첫째항이 1, 공비가 2이다.

$\therefore \ a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

21) $a_n = -n + 4$

⇨ $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고 $a_1 = 3, \ a_2 - a_1 = 2 - 3 = -1$이므로 첫째항이 3, 공차가 -1이다.

$\therefore \ a_n = 3 + (n-1) \cdot (-1) = -n + 4$

22) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

⇨ $a_{n+1} \div a_n = 2$에서 주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이다. 이때 첫째항이 3이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

23) $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

⇨ ${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 1$이고 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}$이므로

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

24) $a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

⇨ ${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$에서 a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등비중항임을 알 수 있다.

이때, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$, $a_1 = 2$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore \ a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

25) $a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⇨ $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$이므로 $\{a_n\}$은 두 항 사이의 비가 일정한 등비수열이다.

이때, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$, 즉 공비가 $\frac{1}{2}$이고 $a_1 = 6$이므로

$a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

26) $a_n = -2^{n-1}$

⇨ $a_{n+1} = 2a_n$이므로 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$a_1 = -1$이므로 $a_n = -2^{n-1}$

27) $a_n = 4n - 2$

⇨ $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에서 a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등차중항임을 알 수 있다.

이때, $a_2 - a_1 = 4, \ a_1 = 2$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore \ a_n = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$

28) $a_n = -3n + 10$

⇨ $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$이므로 $\{a_n\}$은 두 항 사이의 차가 일정한 등차수열이다.

이때, $a_2 - a_1 = -3$, 즉 공차가 -3이고 $a_1 = 7$이므로 $a_n = 7 + (n-1) \times (-3) = -3n + 10$

29) $a_n = -3n + 6$

⇨ $a_{n+1} - a_n = -3$에서 주어진 수열은 공차가 -3인 등차수열이다. 이때 첫째항이 3이므로

$a_n = 3 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 6$

30) $a_n = 3n + 2$

⇨ $a_{n+1}=a_n+3$이므로 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
$a_1=5$이므로 $a_n=5+(n-1)\times 3=3n+2$

31) 11
⇨ $a_2=a_1+4=-5+4=-1$
$a_3=a_2+4=-1+4=3$
$a_4=a_3+4=3+4=7$
$\therefore\ a_5=a_4+4=7+4=11$

32) 41
⇨ $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$에서
$a_3=2a_2+a_1=2\cdot 3+1=7$
$a_4=2a_3+a_2=2\cdot 7+3=17$
$\therefore\ a_5=2a_4+a_3=2\times 17+7=41$

33) 94
⇨ $a_1=1$
$a_2=2a_1+3\times 1=2\times 1+3\times 1=5$
$a_3=2a_2+3\times 2=2\times 5+3\times 2=16$
$a_4=2a_3+3\times 3=2\times 16+3\times 3=41$
$a_5=2a_4+3\times 4=2\times 41+3\times 4=94$

34) $\frac{8}{5}$
⇨ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n}{n+1}, a_1=\frac{1}{2}$이므로
$n=1: \frac{a_2}{a_1}=1,\ a_2=1\times a_1=\frac{1}{2}$
$n=2: \frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{3},\ a_3=\frac{4}{3}\times a_2=\frac{2}{3}$
$n=3: \frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2},\ a_4=\frac{3}{2}\times a_3=1$
$n=4: \frac{a_5}{a_4}=\frac{8}{5},\ a_5=\frac{8}{5}\times a_4=\frac{8}{5}$

35) 35
⇨ $a_{n+1}=a_n+n^2$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면
$a_n=a_1+1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$
$=5+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
$\therefore\ a_5=5+\frac{5\cdot 4\cdot 9}{6}=35$

36) 5
⇨ $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=a_2+a_1=1+1=2$
$a_4=a_3+a_2=2+1=3$
$a_5=a_4+a_3=3+2=5$

37) $a_5=163$
⇨ $a_1=3,\ a_2=3a_1-2=7,\ a_3=3a_2-2=19$
$a_4=3a_3-2=55,\ a_5=3a_4-2=163$

38) $a_5=\frac{1}{9}$
⇨ $a_1=1,\ a_2=\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1+1}a_1=\frac{1}{3}$
$a_3=\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2+1}a_2=\frac{1}{5},\ a_4=\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3+1}a_3=\frac{1}{7}$
$a_5=\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 4+1}a_4=\frac{1}{9}$

39) $a_5=16$
⇨ $a_1=2,\ a_2=a_1+1+1=4$
$a_3=a_2+2+1=7,\ a_4=a_3+3+1=11$
$a_5=a_4+4=1=16$

40) 35
⇨ $a_2=3a_1+2=-1,\ a_3=3a_2+4=1,\ a_4=3a_3+6=9$
$\therefore\ a_5=3a_4+8=35$

41) $\frac{41}{17}$
⇨ $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+2$에서 $a_2=\frac{1}{a_1}+2=1+2=3$
$a_3=\frac{1}{a_2}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$
$a_4=\frac{1}{a_3}+2=\frac{3}{7}+2=\frac{17}{7}$
$a_5=\frac{1}{a_4}+2=\frac{7}{17}+2=\frac{41}{17}$

42) $\frac{54}{5}$
⇨ $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{3n}{n+2}a_n$의 n에 1 , 2 , 3 , 4을 차례대로 대입하여 좌변끼리 곱하고, 우변끼리 곱하면
$a_2=\frac{3}{3}\cdot a_1$
$a_3=\frac{6}{4}\cdot a_2$
$a_4=\frac{9}{5}\cdot a_3$
$a_5=\frac{12}{6}\cdot a_4$
$\Rightarrow a_5=\frac{3}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{12}{6}\cdot a_1$
$\therefore a_5=\frac{54}{5}$

43) 25
⇨ $b_n=a_{n+1}-a_n=2n+1,\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$\therefore a_5 = 1+\sum_{k=1}^{4}(2k+1) = 1+2\cdot\frac{4\cdot5}{2}+4=25$

44) 17

⇨ $a_{n+1}=2a_n-1$

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_1-1=1$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열이므로 $b_n=2^{n-1}$

따라서 $a_n=b_n+1=2^{n-1}+1$ 이므로

$a_5=2^4+1=17$

45) -24

⇨ $a_{n+1}=na_n$에서

$a_2=a_1=-1$

$a_3=2a_2=2\cdot(-1)=-2$

$a_4=3a_3=3\cdot(-2)=-6$

$a_5=4a_4=4\times(-6)=-24$

46) 42

⇨ $a_{n+1}=2a_n+n$에서

$a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=3$

$a_3=2a_2+2=2\cdot3+2=8$

$a_4=2a_3+3=2\cdot8+3=19$

$a_5=2a_4+4=2\times19+4=42$

47) 12

⇨ $a_2=a_1+1=2+1$, $a_3=a_2+2=3+2=5$

$a_4=a_3+3=5+3=8$

$\therefore$ $a_5=a_4+4=8+4=12$

48) -6

⇨ $a_2=2a_1+1=-3$, $a_3=2a_2+2=-4$,

$a_4=2a_3+3=-5$

$\therefore$ $a_5=2a_4+4=-6$

49) 2^{45}

⇨ $a_{n+1}\div a_n=2^n$, 즉 $a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=2^1a_1 \\ & a_3=2^2a_2 \\ & a_4=2^3a_3 \\ & \quad\vdots \\ \times) & \underline{a_{10}=2^9a_9} \end{array}$$

$a_{10}=2^1\cdot2^2\cdot2^3\cdot\cdots2^9\cdot a_1=2^{1+2+3+\cdots+9}$

$=2^{\frac{9\cdot10}{2}}=2^{45}$

50) 1025

⇨ $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$에서

$b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면 $b_1=2$, $b_n=2^n$이므로

$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$이므로

$a_{10}=3+\sum_{k=1}^{9}2^k=3+\frac{2(2^9-1)}{2-1}=1+2^{10}=1025$

51) 181

⇨ $a_{n+1}=a_n+4n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+4\cdot1 \\ & a_3=a_2+4\cdot2 \\ & a_4=a_3+4\cdot3 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_{10}=a_9+4\cdot9} \end{array}$$

$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}4k=1+4\cdot\frac{9\cdot10}{2}=181$

52) $\frac{1}{210}$

⇨$(n+2)a_{n+1}=na_n$이므로 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & 3a_2=1a_1 \\ & 4a_3=2a_2 \\ & 5a_4=3a_3 \\ & \quad\vdots \\ \times) & \underline{11a_{10}=9a_9} \end{array}$$

$10\times11\times a_{10}=2\times a_1$

$\therefore$ $a_{10}=\frac{a_1}{55}=\frac{1}{55}$

53) 102

⇨ $a_{n+1}-a_n=2n+1$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=2\cdot1+1 \\ & a_3-a_2=2\cdot2+1 \\ & a_4-a_3=2\cdot3+1 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_{10}-a_9=2\cdot9+1} \end{array}$$

$a_{10}-a_1=\sum_{k=1}^{9}(2k+1)$

$\therefore$ $a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(2k+1)=3+2\cdot\frac{9\cdot10}{2}+9=102$

54) $\frac{7}{5}$

⇨ $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$의 양변에 $n=1$, 2, $\cdots$, 9를 대입하여 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 더하면

$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{10}-a_9)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$a_{10}-a_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}$

$\therefore a_{10}=1-\frac{1}{10}+a_1=1-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$

55) $\frac{1}{5}$

⇨ $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1$

$a_3=\frac{2}{3}a_2$

$a_4=\frac{3}{4}a_3$

⋮

$\times)\ a_{10}=\frac{9}{10}a_9$

$a_{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{9}{10}a_1=\frac{1}{10}\cdot 2=\frac{1}{5}$

56) $a_n=\frac{n^2+n}{2}$

⇨ $a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 곱하면

$a_n=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot a_1$

$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot 1=\frac{n^2+n}{2}$

57) $a_n=2n$

⇨ $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$을 정리하면 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$이므로

$a_1=2$

$\frac{a_2}{2}=\frac{a_1}{1}$에서 $a_2=2\cdot 2$

$\frac{a_3}{3}=\frac{a_2}{2}$에서 $a_3=2\cdot 3$

⋮

$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}$에서 $a_n=2n$이다.

58) $a_n=2^n+2$

⇨ $a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면

$a_n=a_1+(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})$

$=4+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+2$

59) $a_n=\frac{6}{n+1}$

⇨ $a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 곱하면

$a_n=\frac{n}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot a_1$

$=\frac{2}{n+1}\cdot 3=\frac{6}{n+1}$

60) $a_n=\frac{2}{n}$

⇨ $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 곱하면

$a_n=\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a_1$

$=\frac{1}{n}\cdot 2=\frac{2}{n}$

61) $a_n=3^n+2$

⇨ $a_{n+1}=3a_n-4$를 $a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하면

$a_{n+1}=3a_n-2\alpha$에서 $\alpha=2$

$\therefore\ a_{n+1}-2=3(a_n-2)$

따라서 수열 $\{a_n-2\}$은 첫째항이 a_1-2, 공비가 3인 등비수열이다. 이때, $a_1-2=3$이므로

$a_n-2=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ $\qquad\therefore\ a_n=3^n+2$

62) $a_n=2^{n+1}-1$

⇨ $a_{n+1}=2a_n+1$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하면

$a_{n+1}=2a_n-\alpha$에서 $\alpha=-1$

$\therefore\ a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

따라서 수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 a_1+1, 공비가 2인 등비수열이다. 이때, $a_1+1=4$이므로

$a_n+1=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$ $\qquad\therefore\ a_n=2^{n+1}-1$

63) $\frac{1}{\sqrt{n}}$

⇨ $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 곱하면

$a_n=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\cdots\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot a_1$

$=\sqrt{\frac{1}{n}}\times 1=\frac{1}{\sqrt{n}}$

64) $a_n=3\cdot(-1)^{n-1}+1$

⇨ $a_{n+1}=-a_n+2$를 $a_{n+1}-\alpha=-(a_n-\alpha)$꼴로 변형하면

$a_{n+1}=-a_n+2\alpha$에서 $\alpha=1$

$\therefore\ a_{n+1}-1=-(a_n-1)$

따라서 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 a_1-1이고 공비

가 -1인 등비수열이다.
이때, $a_1-1=3$이므로
$a_n-1=3\cdot(-1)^{n-1}$
$\therefore\ a_n=3\cdot(-1)^{n-1}+1$

65) $a_n=5\cdot 2^{n-1}-3$
⇨ $a_{n+1}=2a_n+3$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$꼴로 변형하면
$a_{n+1}=2a_n-\alpha$에서 $\alpha=-3$
$\therefore\ a_{n+1}+3=2(a_n+3)$
따라서 수열 $\{a_n+3\}$은 첫째항이 a_1+3이고 공비가 2인 등비수열이다.
이때, $a_1+3=5$이므로
$a_n+3=5\cdot 2^{n-1}$ $\therefore\ a_n=5\cdot 2^{n-1}-3$

66) $a_n=4(n+1)$
⇨ $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 곱하면
$a_n=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+1}{n}\cdot a_1$
$=\dfrac{n+1}{2}\cdot 8=4(n+1)$

67) $a_n=3-\dfrac{1}{n}$
⇨ $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}=a_n+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면
$a_n=a_1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$
$=2+1-\dfrac{1}{n}=3-\dfrac{1}{n}$

68) $a_n=2^{n-1}+1$
⇨ $a_{n+1}=2a_n-1$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하면
$a_{n+1}=2a_n-\alpha$에서 $\alpha=1$
$\therefore\ a_{n+1}-1=2(a_n-1)$
따라서 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 a_1-1이고 공비가 2인 등비수열이다.
이때, $a_1-1=1$이므로
$a_n-1=2^{n-1}$ $\therefore\ a_n=2^{n-1}+1$

69) $a_n=\dfrac{2n-1}{n}$
⇨ $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+n}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$
$=a_n+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$
의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면
$a_n=a_1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$
$+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$
$=1+1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{2n-1}{n}$

70) $a_n=\dfrac{3n^2-3n-10}{2}$
⇨ $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면
$a_n=a_1+3+6+9+\cdots+3(n-1)$
$=-5+3\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$
$=-5+3\times\dfrac{(n-1)n}{2}$
$=\dfrac{3n^2-3n-10}{2}$

71) $a_n=n^2-n+3$
⇨ $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면
$a_n=a_1+2+4+6++\cdots+2(n-1)$
$=3+2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$
$=3+2\times\dfrac{(n-1)n}{2}$
$=n^2-n+3$

72) $a_n=\dfrac{n^2-n+2}{2}$
⇨ $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 더하면
$a_n=a_1+1+2+3+\cdots+n-1$
$=1+\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^2-n+2}{2}$

73) 13
⇨ $a_{n+1}=3a_n+2$에서 $a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$이므로
$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}8\cdot 3^{k-1}=3+\dfrac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}$
$=4\cdot 3^{n-1}-1$
따라서 $a_{10}=4\cdot 3^9-1$이므로 $p=4,\ q=9$이고 $p+q=13$이다.

74) 5040
⇨ $a_{10}=10a_9$, $a_9=9a_8$, $a_8=8a_7$, $a_7=7a_6$
$a_{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot a_6$
$\therefore\dfrac{a_{10}}{a_6}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040$

75) $\dfrac{1}{39}$

⇨ $a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}a_n$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 각각 곱하면

$a_n=\frac{2n-3}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot a_1=\frac{1}{2n-1}$

$\therefore\ a_{20}=\frac{1}{2\cdot 20-1}=\frac{1}{39}$

76) $2-\frac{1}{2^{17}}$

⇨ $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하면 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$에서 $\alpha=2$

$\therefore\ a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

따라서 수열 $\{a_n-2\}$는 첫째항이 a_1-2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때, $a_1-2=-1$이므로

$a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^{n-1}}$, $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore\ a_{18}=2-\frac{1}{2^{17}}$

77) 9

⇨ $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$을 정리하면

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$이므로

$\{b_n\}=\{a_{n+1}-a_n\}$이라 하면

$b_1=1,\ b_n=2^{n-1}$이므로

$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=3+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2+2^{n-1}$이다.

따라서 $a_k=2+2^{k-1}=258$을 만족하는 $k=9$이다.

78) 397

⇨ $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$을 정리하면

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$이므로

수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫항이 4이고 공비가 1인 등비수열이다.

따라서 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4=1+4(n-1)=4n-3$이고

$a_{100}=400-3=397$이다.