단원 ISSUE

이 단원에서는 **로그의 여러 가지 성질을 이용하여 계산하는 문제, 상용로그의 실생활의 활용과 관련된 문제** 등이 자주 출제되며 로그의 밑과 진수조건이 누락되지 않도록 학습합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. $\log_{\sqrt{7}}(x+y)=0$, $2^{x-3y}=\dfrac{1}{8}$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $-5x+9y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[스스로 확인하기]

2. $\log 2=a$, $\log 0.3=b$일 때, $\log\sqrt{1.2}=xa+yb$를 만족하는 두 실수 x,y에 대해 $x+4y$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[스스로 마무리하기]

3. 양의 실수 a,b,c에 대해 $a^3=b^4$, $b^3=c^2$이고, $\log_a b+\log_c a=\dfrac{q}{p}$를 만족할 때, 서로소 p,q에 대해 $p+q$의 값을 구하면?

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

[스스로 확인하기]

4. 양수 x,y,z에 대해 $\log_2 x-\log_2 y+\log_2\sqrt{z}=4$을 만족할 때, $\dfrac{x^2z}{y^2}$의 값을 구하면?

① 2^6 ② 2^7 ③ 2^8 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

[스스로 확인하기]

5. $f(x)=\log_x(x+1)$라 할 때, $f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(2021)$의 값은?

① $-\log_2 2021$ ② $\log_2 2021$ ③ $-\log_2 2022$ ④ $\log_2 2022$ ⑤ $-\log_2 2023$

[스스로 확인하기]

6. 자연수 k에 대해 아래의 식을 만족할 때,
$\log_3\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\log_3\left(1-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\log_3\left(1-\dfrac{1}{k}\right)=-2$, k의 값을 구하면?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

[스스로 확인하기]

7. 다음은 $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$임을 보이고 그것을 이용하여 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$임을 보이는 과정이다. (가),(나),(다)에 알맞은 식을 짝지은 것은?

> $\log_{a^m} a^n = k$라고 하자.
> 그러면 로그의 정의에 의하여
> $a^n = a^{\boxed{(가)}}$이고, $a^n = a^{\boxed{(가)}}$에서
> $n = \boxed{(가)}$이므로 $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$이다.
>
> $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ 에서 $a^{\log_c b} = p$라 하면
> 로그의 정의에 의하여 $\log_c b = \boxed{(나)}$
> 다시 로그의 정의에 의해
> $a^{\log_c b} = p$이고 $b = c^{\log_a p}$임에서
> $b = c^{\boxed{(다)}}$, 이는 위의 정리에 의해
> $\log_a a^{\log_c b} = \log_c b$ 이므로 $b = c^{\log_c b}$,
> 따라서 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

① (가) $-mk$　② (가) $\frac{k}{m}$
③ (나) $\log_p a$　④ (다) $\log_a a^{\log_c b}$
⑤ (다) $\log_a a^{\log_b c}$

[스스로 마무리하기]

8. 양의 실수 x, y, z에 대해 $\log_2 \sqrt{2xy} = \log_4 (x^2 + y^2)$, $\log_x z = \log_y (z^2 - z - 3)$, $\log_z xy = 4$를 만족할 때, $x + y + z$의 값을 구하면?

① 18　② 19
③ 20　④ 21
⑤ 22

[스스로 확인하기]

9. $\log x^2 = 1.4$일 때, $\log x^3 + \log \sqrt{x}$의 값을 구하면?

① 2.45　② 2.5
③ 2.55　④ 2.6
⑤ 2.65

[스스로 확인하기]

10. $\log 2 = 0.3$일 때, $n < \log 250 < n + 1$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하면?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

11. $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ 라 할 때, $\log 450 = ax + by + z$를 만족한다. 실수 x, y에 대하여 $x + y + z$의 값을 구하면?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

12. $\log 2 = 0.3$ 이고, 200의 모든 약수를 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이라 할 때, $n + \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$의 정수 부분을 구하면?

① 23　② 24
③ 25　④ 26
⑤ 27

[스스로 확인하기]

13. 식료품점의 매출액이 매년 60%증가한다. 식료품점의 매출액이 올해 매출액의 10배가 되는 것은 앞으로 몇 년후 인지 구하면? ($\log 2 = 0.3$)

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

[스스로 마무리하기]

14. $x^2-5nx+4n^2=0$의 두 근이 $\log a, \log b$이다. $\log b-\log_{\sqrt{10}} a=7$을 만족할 때, $\frac{(\log b)^2}{\log a}$의 값을 구하면? ($b>a$)

① 48 ② 52
③ 56 ④ 60
⑤ 64

실전문제

15. 1보다 큰 서로 다른 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킬 때, m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는?

(가) $mn<1000$
(나) mn은 홀수이다.
(다) $\log_m n$은 유리수이다.

① 10 ② 12
③ 14 ④ 16
⑤ 18

16. $\log_a 3=\log_2 24+\log_2 4-\log_2 3$, $\log_b 9=3\log_2 3\times\log_{27} 8$일 때, $\log_a 9b=\frac{q}{p}$이다. 서로소인 자연수 p, q에 대하여 $q-12p$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

17. $\log_3 n-\log_9 k$의 값이 자연수가 되게 하는 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)=2$를 만족시키는 50 이하의 자연수의 n의 개수는? (단, k는 자연수)

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

18. 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 서로 다른 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$
③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$
⑤ $\frac{25}{3}$

19. $L>0$, $M>0$, $N>0$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $\log(10LMN)=1+\log N+\log(ML)$
ㄴ. $\log(10^2 LMN)^{10}=10^{20}(\log L+\log M+\log N)$
ㄷ. $L:M:N=2:3:4$이면 $10^{2\log L-\log M-\log N}=\frac{1}{3}$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 정수 m과 $1\leq a<10$인 a에 대하여 $2^{40}=a\times 10^m$일 때, $m+a^{25}$의 값은? (단, $\log 2=0.3010$)

① 18 ② 19
③ 20 ④ 21
⑤ 22

정답 및 해설

1) [정답] ⑤
[해설] $\log_{\sqrt{7}}(x+y)=0$ 는 로그의 정의에 의하여
$x+y=(\sqrt{7})^0=1$이고,
$2^{x-3y}=\frac{1}{8}=2^{-3}$ 이므로 $x-3y=-3$ 이다.
$\begin{cases}x+y=1\\x-3y=-3\end{cases}$ 의 해는 $x=0, y=1$ 이므로
$-5x+9y=9$ 이다.

2) [정답] ③
[해설] $\log 2=a$, $\log 0.3=b$에서 다음의 식을 변형하면
$\log\sqrt{1.2}=\log(1.2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 1.2=\frac{1}{2}\log(0.3\times 2^2)$
$=\frac{1}{2}(\log 0.3+2\log 2)=\frac{1}{2}(2a+b)=a+\frac{1}{2}b$
따라서 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$ 이고, $x+4y=3$ 이다.

3) [정답] ⑤
[해설] $a^3=b^4$이므로 $b=a^{\frac{3}{4}}$이고, $b^3=a^{\frac{9}{4}}$를 만족한다.
$b^3=a^{\frac{9}{4}}=c^2$이므로 $c=a^{\frac{9}{8}}$을 만족한다.
$\log_a b+\log_c a=\log_a a^{\frac{3}{4}}+\log_c c^{\frac{8}{9}}=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}=\frac{59}{36}$으로
$p+q=95$이다.

4) [정답] ③
[해설] $\log_2 x-\log_2 y+\log_2\sqrt{z}=4$ 를 로그의 성질을 이용해 정리하면 $\log_2\frac{x\sqrt{z}}{y}=4$ 이므로
$\frac{x\sqrt{z}}{y}=2^4$
이다. 따라서 $\frac{x^2z}{y^2}=\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)^2=2^8$

5) [정답] ④
[해설] 로그의 성질에 의하여
$f(x)=\log_x(x+1)=\frac{\log_a(x+1)}{\log_a x}$ $(a>0, a\neq 1)$
이므로
$f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(2021)$
$=\frac{\log_a 3}{\log_a 2}\times\frac{\log_a 4}{\log_a 3}\times\frac{\log_a 5}{\log_a 4}\times\cdots\times\frac{\log_a 2022}{\log_a 2021}$
$=\frac{\log_a 2022}{\log_a 2}=\log_2 2022$

6) [정답] ②
[해설] $\log_3\left(1-\frac{1}{4}\right)+\log_3\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\log_3\left(1-\frac{1}{k}\right)$
$=\log_3\frac{3}{4}+\log_3\frac{4}{5}+\cdots+\log_3\frac{k-1}{k}$
$=\log_3\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{k-1}{k}\right)=\log_3\frac{3}{k}=-2$
따라서 $\frac{3}{k}=\frac{1}{9}$가 되어 $k=27$이 된다.

7) [정답] ④
[해설] $\log_{a^m}a^n=k$라고 하자.
그러면 로그의 정의에 의하여
$a^n=(a^m)^k$이고, $a^n=a^{mk}$에서
$n=mk$이므로 $k=\log_{a^m}a^n=\frac{n}{m}$이다.
$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ 에서 $a^{\log_c b}=p$라 하면
로그의 정의에 의하여 $\log_c b=\log_a p$
다시 로그의 정의에 의해
$a^{\log_c b}=p$이고 $b=c^{\log_a p}$임에서
$b=c^{\log_a a^{\log_c b}}$, 이는 위의 정리에 의해
$\log_a a^{\log_c b}=\frac{\log_c b}{1}=\log_c b$ 이므로 $b=b^{\log_c c}=c^{\log_c b}$,
즉, 지수에 있는 로그의 진수와
밑은 서로 교환할 수 있으므로 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

8) [정답] ④
[해설] $\log_2\sqrt{2xy}=\log_4(x^2+y^2)$을 변형하면
$\log_4(\sqrt{2xy})^2=\log_4(x^2+y^2)$으로 $x^2+y^2=2xy$를
만족하므로 $(x-y)^2=0$ 이 되어 $x=y$이다.
따라서 $\log_x z=\log_y(z^2-z-3)$은
$\log_x z=\log_x(z^2-z-3)$와 같이 쓸 수 있다.
$z=z^2-z-3$ 이고 $z=3,-1$ 인데 진수의 조건에 의해 $z\neq -1$이므로 $z=3$이다. $\log_z xy=4$ 이므로
$xy=3^4$ 이고, $x=y=9$ 이다.
따라서 $x+y+z=9+9+3=21$이다.

9) [정답] ①
[해설] $\log x^2=2\log x=1.4$ 이므로 $\log x=0.7$이다.
$\log x^3+\log\sqrt{x}=3\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{7}{2}\log x=2.45$

10) [정답] ②
[해설] $\log 2=0.3$이면 $\log 5=1-\log 2=0.7$
$\log 250=\log(5^3\times 2)=3\log 5+\log 2=2.1+0.3$
$=2.4$
따라서 $n=2$이다.

11) [정답] ③
[해설] $\log 2=a$이면 $\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=1-a$
$\log 450=\log(10\times 3^2\times 5)=\log 10+2\log 3+\log 5$
$=1+2b+(1-a)=-a+2b+2$ 이므로

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$x=-1$, $y=2$, $z=2$ 이다. 따라서 $x+y+z=3$

12) [정답] ③

[해설] $200=2^3\times5^2$이므로 양의 약수의 개수는 12개 이다. 양의 약수를 작은 것부터 나열하면
$1,2,4,5,\cdots,100,200$이고,
$a_1a_{12}=a_2a_{11}=\cdots=a_6a_7=200$ 을 만족한다.
$\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{12}=\log(a_1a_2\cdots a_{12})$
$=\log(200)^6$
$6(2+\log2)=6\times2.3=13.8$
따라서 $n+\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{12}=25.8$ 이고, 정수부분은 25가 된다.

13) [정답] ③

[해설] 올해 매출액을 a라 하면 n년 뒤의 매출액은 $(1.6)^n a$가 된다. n년 뒤의 매출액이 올해 매출액의 10배라 하면 $(1.6)^n=10$ 을 만족한다.
따라서 $n=\log_{1.6}10=\dfrac{1}{\log1.6}$
$\log1.6=4\log2-1=0.2$ $(\log2=0.3)$
따라서 $n=5$가 된다.

14) [정답] ③

[해설] $x^2-5nx+4n^2=(x-n)(x-4n)=0$이므로
$\log b=4n$, $\log a=n$이다. $(\because b>a)$
$\log b-\log_{\sqrt{10}}a=\log b-2\log a=2n=7$ 이므로
$n=\dfrac{7}{2}$이다.
따라서 $\dfrac{(\log b)^2}{\log a}=16n=16\times\dfrac{7}{2}=56$

15) [정답] ⑤

[해설] 조건 (다)에 의해 $\log_m n=\dfrac{q}{p}$라 할 수 있다.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
즉, $m^q=n^p$이고, m과 n은 같은 소인수를 가지고 있어야 한다.
이때 조건 (나)에서 m과 n은 홀수이므로 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여
(ⅰ) m, n의 소인수가 3인 경우
(가) 조건에 의해 순서쌍 (m,n)은
$(3,9)$, $(3,27)$, $(3,81)$, $(3,243)$, $(9,27)$, $(9,81)$, $(9,3)$, $(27,3)$, $(81,3)$, $(243,3)$, $(27,9)$, $(81,9)$으로 12개다.
(ⅱ) m, n의 소인수가 5인 경우
(가) 조건에 의해 순서쌍 (m,n)은
$(5,25)$, $(5,125)$, $(25,5)$, $(125,5)$로 4개다.
(ⅲ) m, n의 소인수가 7인 경우
$(7,49)$, $(49,7)$로 2개다.
따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 순서쌍 (m,n)의 개수는 $12+4+2=18$이다.

16) [정답] ④

[해설] $\log_a3=\log_2\left(24\times4\times\dfrac{1}{3}\right)=\log_2 32=5$이므로
$a^5=3$에서 $a=3^{\frac{1}{5}}$이다.
$\log_b9=3\log_2 3\times\log_{27}8=\log_2 27\times\log_{27}8$
$=\dfrac{\log27}{\log2}\times\dfrac{\log8}{\log27}=\log_2 8=3$이므로
$b^3=9$에서 $b=3^{\frac{2}{3}}$이다.
따라서 $\log_a 9b=\log_{3^{\frac{1}{5}}}3^{2+\frac{2}{3}}=5\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{40}{3}$이므로
$q=40$, $p=3$이다.
$\therefore q-12p=40-36=4$

17) [정답] ①

[해설] 자연수 p에 대하여 $\log_3 n-\log_9 k=p$라 하면
$\dfrac{n}{\sqrt{k}}=3^p$이다. $\therefore \dfrac{n}{3^p}=\sqrt{k}$
즉, n은 상수일 때, k의 값이 2개이려면 자연수 p의 값이 2개여야 한다.
따라서 자연수 n은 3^2을 인수로 갖고, 3^3은 인수로 갖지 않아야 하므로
50 이하의 자연수 중 9의 배수이면서 27의 배수가 아닌 수이다.
그러므로 $f(n)=2$를 만족시키는 50 이하의 자연수의 n의 개수는 $5-1=4$이다.

18) [정답] ③

[해설] 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 실근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로
근과 계수와의 관계에 의하여
$\log_2 a+\log_2 b=5$, $(\log_2 a)(\log_2 b)=3$이다.
$\therefore \log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$
$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{(\log_2 a)(\log_2 b)}$
$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2(\log_2 a)(\log_2 b)}{(\log_2 a)(\log_2 b)}$
$=\dfrac{5^2-2\times3}{3}=\dfrac{19}{3}$

19) [정답] ③

[해설] ㄱ. $\log(10LMN)=\log10+\log N+\log ML$
$=1+\log N+\log ML$ (참)
ㄴ. $\log(10^2LMN)^{10}=10\log(10^2LMN)$
$=10(2+\log L+\log M+\log N)$ (거짓)
ㄷ. $L:M:N=2:3:4$이면
$L=2k$, $M=3k$, $N=4k$
$10^{2\log L-\log M-\log N}=10^{\log\frac{L^2}{MN}}=\dfrac{L^2}{MN}=\dfrac{(2k)^2}{3k\times4k}=\dfrac{1}{3}$
(참)

20) [정답] ⑤

[해설] $1 \le a < 10$이므로 $0 \le \log a < 1$이다.

$2^{40} = a \times 10^{m}$에서 양변에 상용로그를 취하면

$40\log 2 = \log a + m$이고,

$40\log 2 = 40 \times 0.3010 = 12.04$이므로

$m + \log a = 12.04$이다.

$\therefore m = 12,\ \log a = 0.04\ (\because 0 \le \log a < 1)$

따라서 $a = 10^{\frac{1}{25}}$가 되어

$m + a^{25} = 12 + 10 = 22$이다.