01 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① $cf(x)$ (단, c는 상수)
② $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$
③ $f(x)g(x)$
④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

1. **두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 실수 전체의 집합에서 항상 연속인 함수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 골라라.**

<보기>

ㄱ. $f(x)+g(x)$ ㄴ. $f(x)-g(x)$
ㄷ. $f(x)g(x)$ ㄹ. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2. **두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, <보기>의 함수 중 $x=a$에서 항상 연속인 것만을 있는 대로 골라라.**

<보기>

ㄱ. $\{g(x)\}^2$ ㄴ. $\dfrac{1}{3}f(x)-2g(x)$
ㄷ. $\dfrac{g(x)}{f(x)+g(x)}$

◪ **두 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+2x-8$에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.**

3. $f(x)-g(x)$

4. $f(x)g(x)$

5. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

6. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

◪ **함수 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x-1$에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.**

7. $f(x)+g(x)$

8. $f(x)g(x)$

9. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

10. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

◪ **함수 $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=4x+3$에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.**

11. $f(x)-2g(x)$

12. $f(x)\{g(x)\}^2$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

13. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

14. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

◪ **다음 함수 $f(x)$에 대하여 구간 $[-1,1]$에서의 연속성을 조사하여라.**

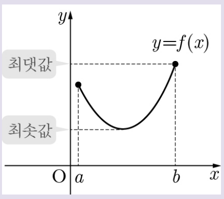
15. $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$

16. $f(x)=x|x|$

17. $f(x)=|x|+|x-1|$

02 최대·최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.



주의 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이 아닌 함수도 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가질 수 있다. 따라서 최대·최소 정리의 역은 성립하지 않는다.

◪ **주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.**

18. $f(x)=x-1$ $\quad [0,\ 1]$

19. $f(x)=x+2$ $\quad [-1,\ 3]$

20. $f(x)=x^2+3$ $\quad [1,\ 3]$

21. $f(x)=x^2+5$ $\quad [-1,4]$

22. $f(x)=-x^2+1$ $\quad [-2,3]$

23. $f(x)=x^2-4x$ $\quad [0,\ 3]$

24. $y=x^2-2x+3$ $\quad [0,4]$

25. $y=x^2-2x+4$ $\quad [2,4]$

26. $y=x^2-4x+5$ $\quad [-1,3]$

27. $f(x)=-x^2+4x-1$ $\quad [-1,\ 3]$

28. $f(x)=-x^2+4x+2$ $\quad [-1,3]$

29. $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ $\quad [2,5]$

30. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $\quad[2,\ 4]$

31. $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$ $\quad[2,\ 4]$

32. $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ $\quad[-2,\ 1]$

33. $f(x)=\dfrac{1}{-x+2}$ $\quad[3, 5]$

34. $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}+2$ $\quad[1,\ 3]$

35. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ $\quad[-2,\ 2]$

36. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$ $\quad[-1,\ 2]$

37. $f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad[0, 8]$

38. $f(x)=\sqrt{x+2}$ $\quad[-1, 2]$

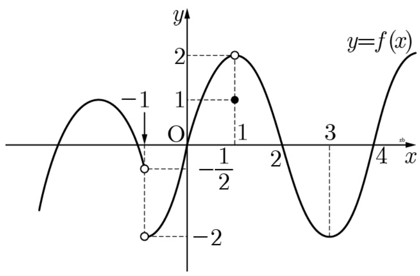
39. $f(x)=\sqrt{12-4x}$ $\quad[-2, 2]$

40. $f(x)=3-\sqrt{x-1}$ $\quad[2,\ 5]$

41. $f(x)=|x-1|$ $\quad[-1, 2]$

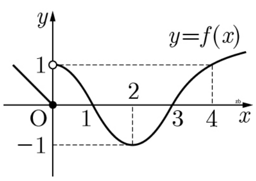
42. $f(x)=\log_{10}x+5$ $\quad[1,\ 10]$

43. **함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, <보기>에서 함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것을 골라라.**



<보기>
ㄱ. $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 구간 $[0, 2]$에서 최댓값이 존재한다.
ㄷ. 구간 $[2, 4]$에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

◪ **함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값이 있으면 구하여라.**



44. $[0,\ 1]$

45. $[2,\ 4]$

◪ **주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값, 최솟값이 있으면 구하여라.**

46. $f(x)=x^2-2x+2$ $[0, 3]$

47. $f(x)=x^2-2x+2$ $(0,\ 3)$

48. $f(x)=-x^2+4x+1$ $[-1, 3]$

49. $f(x)=x^4-2x^2-1$ $[-2, 2]$

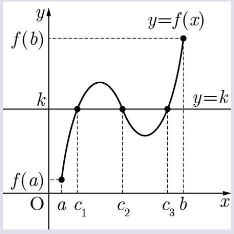
50. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $[-2, 0]$

03 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$f(c)=k$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



참고 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 적어도 한 점에서 만난다. 즉 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

51. **다음은 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $f(c)=\sqrt{3}$을 만족시키는 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재함을 증명하는 과정이다. 다음 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 구하여라.**

<증명>

함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 (가) 이므로 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 (가) 이다.
또 $f(1)\neq f(2)$이고 $f(1)<\sqrt{3}<f(2)$, 즉 $1<\sqrt{3}<4$ 이므로 (나) 에 의하여 $f(c)=\sqrt{3}$을 만족시키는 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

◪ **다음 방정식은 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.**

52. $x^2+2x-2=0$ $(-1, 2)$

53. $x^3-3x-1=0$ $(0, 2)$

54. $x^3+3x-2=0$ $(-1, 1)$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

55. $x^3+3x-9=0$ $(1,3)$

56. $x^4+x-1=0$ $(0,1)$

57. 방정식 $x^3+3x-3=0$이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음에서 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>

ㄱ. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ㄴ. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ㄷ. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

ㄹ. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ㅁ. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

58. 방정식 $x^3+2x-10=0$이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>

ㄱ. $(-2, -1)$ ㄴ. $(-1, 0)$ ㄷ. $(0, 1)$

ㄹ. $(1, 2)$ ㅁ. $(2, 3)$

59. 방정식 $x^3+x^2+x-2=0$이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음에서 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>

ㄱ. $(-1,0)$ ㄴ. $(0,1)$ ㄷ. $(1,2)$

ㄹ. $(2,3)$ ㅁ. $(3,4)$

60. 방정식 $\sqrt{x+1}-2x+3=0$이 단 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾아라.

<보기>

ㄱ. $(0, 1)$ ㄴ. $(1, 2)$ ㄷ. $(2, 3)$

ㄹ. $(3, 4)$ ㅁ. $(4, 5)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

61. 연속함수 $f(x)$에서 $f(-2)=-1$, $f(-1)=1$, $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f(3)=-4$일 때, $-2 \le x \le 3$에서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

62. 연속함수 $f(x)$에서 $f(0)=-1$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$, $f(3)=-4$, $f(4)=-2$일 때, $0 \le x \le 4$에서 방정식 $f(x)-2x=0$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

63. 연속함수 $f(x)$에서 $f(-1)=3$, $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=0$일 때, $-1 \le x \le 2$에서 방정식 $f(x)-2x=0$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

64. 연속함수 $f(x)$에서 $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=2$일 때, $0 \le x \le 2$에서 방정식 $f(x-1)=f(x)$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

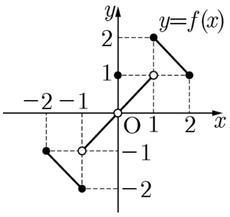
65. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-3)=-5$, $f(-1)=2$, $f(0)=5$, $f(2)=-1$, $f(4)=6$이고 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이다. 방정식 $f(x)=0$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

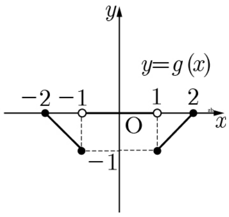
66. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(-1)=a+1$, $f(2)=a-3$을 만족시킨다. 방정식 $f(x)-x^2=0$이 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 때 이 실근이 열린구간 $(-1,\ 2)$에 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

67. $a<b<c$인 세 실수 a, b, c에 대하여 이차방정식 $(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$이 열린 구간 $(a,\ b)$와 $(b,\ c)$에서 각각 하나의 실근을 가짐을 보여라.

68. $-2\le x\le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.





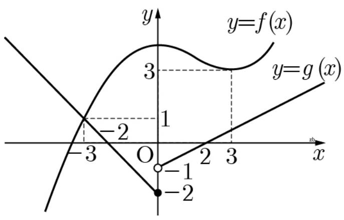
<보기>

ㄱ. $\lim_{x\to -1} g(f(x))=-1$

ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ. 방정식 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다.

69. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1 & (x>0)\\ -x-2 & (x\le 0)\end{cases}$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 골라라.



<보기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} g(x)=-2$

ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 방정식 $g(f(x))=0$은 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

70. 희철이와 수현이가 $1000\,\mathrm{m}$ 달리기를 하였다. 1분 후의 희철이의 속력은 $20\,\mathrm{km}/$시, 수현이의 속력은 $15\,\mathrm{km}/$시이었고 3분 후 희철이의 속력은 시속 $17\,\mathrm{km}/$시, 수현이의 속력은 $19\,\mathrm{km}/$시이었다. 희철이와 수현이의 속력이 시간에 대한 연속함수라 할 때, 달리기를 시작한 후 1분과 3분 사이에 두 사람의 속력이 같아졌을 때가 있는지 구하여라.

정답 및 해설

1) ㄱ, ㄴ, ㄷ

⇨ ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

이상에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2) ㄱ, ㄴ

⇨ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to a}g(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

$=g(a)\cdot g(a)=\{g(a)\}^2$

따라서 주어진 함수는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\left\{\frac{1}{3}f(x)-2g(x)\right\}=\frac{1}{3}\lim_{x\to a}f(x)-2\lim_{x\to a}g(x)$

$=\frac{1}{3}f(a)-2g(a)$

따라서 주어진 함수는 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $f(a)=-g(a)$이면 $x=a$에서 $\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}$가 정의되지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

이상에서 $x=a$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

3) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ $f(x)-g(x)=2x-(x^2+2x-8)=-x^2+8$

따라서 $f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$

4) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ $f(x)g(x)=2x(x^2+2x-8)=2x^3+4x^2-16x$

따라서 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$

5) $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$

⇨ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+2x-8}{2x}$

따라서 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $2x\neq0$, 즉 $x\neq0$인 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$

6) $(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ 2)\cup(2,\ \infty)$

⇨ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x}{x^2+2x-8}=\frac{2x}{(x+4)(x-2)}$

따라서 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $(x+4)(x-2)\neq0$, 즉 $x\neq-4$이고 $x\neq2$인 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ 2)\cup(2,\ \infty)$

7) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

8) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

9) $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$

⇨ $\frac{f(x)}{g(x)}$는 분수함수이므로 $2x-1\neq0$, 즉 $x\neq\frac{1}{2}$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$이다.

10) $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 1)\cup(1,\ \infty)$

⇨ $\frac{g(x)}{f(x)}$는 분수함수이므로 $x^2+x-2\neq0$, 즉 $x\neq-2$, $x\neq1$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은

$(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 1)\cup(1,\ \infty)$이다.

11) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ $f(x)-2g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

12) $(-\infty,\ \infty)$

⇨ $f(x)\{g(x)\}^2$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

13) $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},\infty\right)$

⇨ $\frac{f(x)}{g(x)}$는 분수함수이므로 $4x+3\neq0$, 즉 $x\neq-\frac{3}{4}$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},\infty\right)$이다.

14) $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

⇨ $\frac{g(x)}{f(x)}$는 분수함수이므로 $x^2-2x+1\neq0$,

즉 $x\neq1$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$이다.

15) 불연속

⇨ $g(x)=x^2$, $h(x)=|x|$로 놓으면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 닫힌구간 $[-1,1]$에서 연속이지만 함수 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 구간 $[-1,1]$에서 불연속이다.

16) 연속

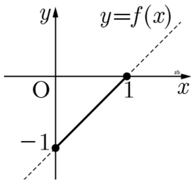
⇨ $g(x)=x$, $h(x)=|x|$로 놓으면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 닫힌구간 $[-1,1]$에서 연속이므로 함수 $f(x)=g(x)h(x)$도 이 구간에서 연속이다.

17) 연속

⇨ $g(x)=|x|$, $h(x)=|x-1|$로 놓으면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 닫힌구간 $[-1,1]$에서 연속이므로 함수 $f(x)=g(x)+h(x)$도 이 구간에서 연속이다.

18) 최댓값: 0, 최솟값: -1

⇨ 함수 $f(x)=x-1$은 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 0, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖는다.

19) 최댓값: 5, 최솟값: 1

⇨ 함수 $f(x)=x+2$은 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이다.

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 5, $x=-1$에서 최솟값 1을 갖는다.

20) 최댓값: 12, 최솟값: 4

⇨ $f(x)=x^2+3$은 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 $x=3$일 때 최댓값 12, $x=1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

21) 최댓값: 21, 최솟값: 5

⇨ $f(x)=x^2+5$는 구간 $[-1,4]$에서 연속이고

$x=4$일 때 최댓값 21, $x=0$일 때 최솟값 5를 갖는다.

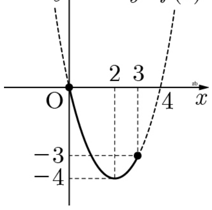
22) 최댓값: 1, 최솟값: -8

⇨ $f(x)=-x^2+1$는 구간 $[-2,3]$에서 연속이고

$x=0$일 때 최댓값 1, $x=3$일 때 최솟값 -8을 갖는다.

23) 최댓값: 0, 최솟값: -4

⇨ 함수 $f(x)=x^2-4x$는 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 0, $x=2$에서 최솟값 -4를 갖는다.

24) 최댓값: 11, 최솟값: 2

⇨ $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$x=0$일 때, $y=1+2=3$

$x=1$일 때, $y=2$

$x=4$일 때, $y=9+2=11$

25) 최댓값: 12, 최솟값: 4

⇨ $y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

$x=2$일 때, $y=4-4+4=4$

$x=4$일 때, $y=16-8+4=12$

26) 최댓값: 10, 최솟값: 1

⇨ $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

$x=-1$일 때, $y=9+1=10$

$x=2$일 때, $y=1$

$x=3$일 때, $y=2$

27) 최댓값: 3, 최솟값: -6

⇨ $f(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$은 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고, $x=2$일 때 최댓값 3, $x=-1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

28) 최댓값: 6, 최솟값: -3

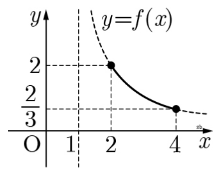
⇨ $f(x)=-x^2+4x+2=-(x-2)^2+6$은 구간 $[-1,3]$에서 연속이고 $x=2$일 때 최댓값 6, $x=-1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

29) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{2}$

⇨ $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 구간 $[2,5]$에서 연속이고 $x=2$일 때 최댓값 1, $x=5$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

30) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$

⇨ 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이고 구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=4$에서 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

31) 최댓값: 3, 최솟값: 1

⇨ $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$은 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이고 $x=2$일 때 최댓값 3, $x=4$일 때 최솟값 1을 갖는다.

32) 최댓값: -1, 최솟값: -4

⇨ $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$은 구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 $x=-2$일 때 최댓값 -1, $x=1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

33) 최댓값: $-\frac{1}{3}$, 최솟값: -1

⇨ $f(x)=\frac{1}{-x+2}$은 구간 $[3,5]$에서 연속이고 $x=5$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$, $x=3$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

34) 최댓값: $\frac{7}{4}$, 최솟값: $\frac{3}{2}$

⇨ $f(x)$는 증가함수이므로

최솟값은 $f(1)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$,

최댓값은 $f(3)=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$

35) 최댓값: 1, 최솟값: -3

⇨ $f(x)=\frac{2x+1}{x+3}=2+\frac{-5}{x+3}$이므로 $f(x)$는 증가함수

따라서 최댓값은 $f(2)=\frac{5}{5}=1$이고, 최솟값은 $f(-2)=\frac{-3}{1}=-3$

36) 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: $\frac{3}{5}$

⇨ $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$에 대하여

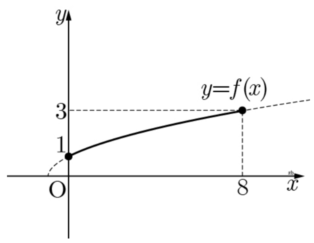
$f(-1)=\frac{3}{2}$, $f(2)=\frac{3}{5}$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 $\frac{3}{5}$이다.

37) 최댓값: 3, 최솟값: 1

⇨ $f(x)=\sqrt{x+1}$은 닫힌 구간 $[0,8]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.

구간 $[0,8]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$f(x)$는 $x=8$일 때, 최댓값 3, $x=0$일 때, 최솟값 1을 가진다.

38) 최댓값: 2, 최솟값: 1

⇨ $f(x)=\sqrt{x+2}$는 닫힌 구간 $[-1,2]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.

함수 $f(x)$는 $x\geq -2$인 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=2$일 때, 최댓값 2, $x=-1$일 때, 최솟값 1을 갖는다.

39) 최댓값: $2\sqrt{5}$, 최솟값: 2

⇨ $f(x)=\sqrt{12-4x}=\sqrt{-4(x-3)}$은 $x=-2$일 때 최댓값 $2\sqrt{5}$, $x=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.

40) 최댓값: 2, 최솟값: 1

⇨ 함수 $f(x)=3-\sqrt{x-1}$은 구간 $[2,\ 5]$에서 연속이다.

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=5$에서 최솟값 1을 갖는다.

41) 최댓값: 2, 최솟값: 0

⇨ $f(x)=|x-1|$은 닫힌 구간 $[-1,2]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.

$x=-1$일 때, $f(-1)=2$

$x=1$일 때, $f(1)=0$

$x=2$일 때, $f(2)=1$

따라서 $f(x)$는 최댓값 2, 최솟값 0을 갖는다.

42) 최댓값: 6, 최솟값: 5

⇨ $f(x)=\log_{10}x+5$는 구간 $[1,\ 10]$에서 연속이고 $x=10$일 때 최댓값 6, $x=1$일 때 최솟값 5를 갖는다.

43) ㄷ

⇨ ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)=2$, $f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. 구간 $[0,2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 존재하지 않는다.

ㄷ. 구간 $[2,4]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

44) 최댓값: 없다, 최솟값: 0

45) 최댓값: 1, 최솟값: -1

46) 최댓값: 5, 최솟값: 1

⇨ $f(x)=(x-1)^2+1$이므로 $x=3$일 때 최댓값 5, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

47) 최댓값: 없다, 최솟값: 1

⇨ $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$은 $x=1$일 때 최솟값 1을 갖고, 최댓값은 없다.

48) 최댓값: 5, 최솟값: -4

⇨ $f(x)=-(x-2)^2+5$이므로

$f(-1)=-4$, $f(2)=5$, $f(3)=4$

따라서 최댓값 5, 최솟값 -4를 갖는다.

49) 최댓값: 7, 최솟값: -2

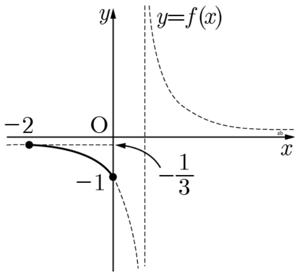
⇨ $f(x)=(x^2-1)^2-2$

$f(-2)=f(2)=7$, $f(-1)=f(1)=-2$

따라서 최댓값 7, 최솟값 -2를 갖는다.

50) 최댓값: $-\dfrac{1}{3}$, 최솟값: -1

⇨ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$은 닫힌구간 $[-2,0]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.
구간 $[-2,0]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{3}$, $x=0$일 때 최솟값 -1을 가진다.

51) (가) 연속, (나) 사잇값의 정리

⇨ 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $\boxed{\text{연속}}$이므로 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서도 연속이다.
또 $f(1)=1$, $f(2)=4$에서 $f(1)\neq f(2)$이고, $1<\sqrt{3}<4$이므로 $\boxed{\text{사잇값의 정리}}$에 의하여 $f(c)=\sqrt{3}$을 만족시키는 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

52) $f(x)=x^2+2x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,2]$에서 연속이고 $f(-1)=-3<0$, $f(2)=6>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 구간 $(-1,2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^2+2x-2=0$은 구간 $(-1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

53) $f(x)=x^3-3x-1$이라 하면 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,2]$에서 연속이고 $f(0)f(2)<0$이므로 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(0,2)$에 적어도 하나 존재한다.

54) $f(x)=x^3+3x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,1]$에서 연속이고, $f(-1)=-6<0$, $f(1)=2>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,1)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린구간 $(-1,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

55) $f(x)=x^3+3x-9$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 $f(1)=-5<0$, $f(3)=27>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 구간 $(1,3)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3+3x-9=0$은 구간 $(1,3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

56) $f(x)=x^4+x-1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^4+x-1=0$은 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

57) ㄹ

⇨ $f(x)=x^3+3x-3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $f(-1)=-7<0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{37}{8}<0$, $f(0)=-3<0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{11}{8}<0$, $f(1)=1>0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{39}{8}>0$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(1)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$에서 실근을 가진다.

58) ㄹ

⇨ $f(x)=x^3+2x-10$이라고 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고
$f(-2)=-22<0$, $f(-1)=-13<0$, $f(0)=-10<0$, $f(1)=-7<0$, $f(2)=2>0$, $f(3)=23>0$
$\therefore f(1)f(2)<0$
따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,2)$에서 실근을 갖는다.

59) ㄴ

⇨ $f(x)=x^3+x^2+x-2$라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(-1)=-3<0$, $f(0)=-2<0$, $f(1)=1>0$, $f(2)=12>0$, $f(3)=37>0$, $f(4)=82>0$
$\therefore f(0)f(1)<0$
따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,1)$에서 실근을 가진다.

60) ㄷ

⇨ $f(x)=\sqrt{x+1}-2x+3$이라고 하면 $f(x)$는 $x\geq-1$인 실수 x에 대하여 연속이고
$f(0)=4>0$, $f(1)=\sqrt{2}+1>0$, $f(2)=\sqrt{3}-1>0$, $f(3)=-1<0$, $f(4)=\sqrt{5}-5<0$, $f(5)=\sqrt{6}-7<0$
$\therefore f(2)f(3)<0$
따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,3)$에서 실근을 갖는다.

61) 3개

⇨ $f(-2)=-1<0$, $f(-1)=1>0$이므로
$-2<x<-1$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
또한, $f(1)=0$이므로 $x=1$은 하나의 실근이다.
그리고 $f(2)=2>0$, $f(3)=-4<0$이므로 $2<x<3$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 $-2 \le x \le 3$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

62) 2개
⇨ $f(0)-2\cdot 0=-1<0$
$f(1)-2\cdot 1=-3-2=-5<0$
$f(2)-2\cdot 2=5-4=1>0$
$f(3)-2\cdot 3=-4-6=-10<0$
$f(4)-2\cdot 4=-2-8=-10<0$
따라서 방정식 $f(x)-2x=0$은 $0 \le x \le 4$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

63) 1개
⇨ $f(-1)-2\cdot(-1)=3+2=5>0$
$f(0)-2\cdot 0=-1<0$
$f(1)-2\cdot 1=1-2=-1<0$
$f(2)-2\cdot 2=0-4=-4<0$
따라서 방정식 $f(x)-2x=0$은 $-1 \le x \le 2$에서 적어도 1개의 실근을 갖는다.

64) 2개
⇨ 방정식 $f(x-1)=f(x)$에서 $f(x-1)-f(x)=0$
$f(-1)-f(0)=1-1=0$
$f(0)-f(1)=1-0=1>0$
$f(1)-f(2)=0-2=-2<0$
따라서 방정식 $f(x-1)=f(x)$는 $0 \le x \le 2$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

65) 5개
⇨ 방정식 $f(x)=0$의 실근은
구간 $(-\infty,\ -3)$에서 적어도 한 개,
구간 $(-3,\ -1)$에서 적어도 한 개,
구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 한 개,
구간 $(2,\ 4)$에서 적어도 한 개,
구간 $(4,\ \infty)$에서 적어도 한 개 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

66) $0<a<7$
⇨ $g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=x^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 방정식 $g(x)=0$이 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면
$g(-1)g(2)<0$이어야 한다.
$g(-1)=f(-1)-(-1)^2=a+1-1=a$
$g(2)=f(2)-2^2=a-3-4=a-7$
이므로 $g(-1)g(2)=a(a-7)<0$에서 $0<a<7$

67) $f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$라 하면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$, $[b,\ c]$에서 연속이다.
(ⅰ) $f(a)=(a-b)(a-c)$, $f(b)=(b-c)(b-a)$이고 $f(a)>0$, $f(b)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(ⅱ) $f(b)=(b-c)(b-a)$, $f(c)=(c-a)(c-b)$이고 $f(b)<0$, $f(c)>0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(b,\ c)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
이때, $f(x)=0$은 이차방정식이고 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구간 $(a,\ b)$, $(b,\ c)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

68) ㄴ, ㄷ
⇨ ㄱ. $\lim_{x\to -1-} g(f(x))=\lim_{t\to -2+} g(t)=0$
$\lim_{x\to -1+} g(f(x))=\lim_{t\to -1+} g(t)=0$
$\therefore \lim_{x\to -1} g(f(x))=0$ (거짓)
ㄴ. $\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{t\to 0-} g(t)=0$
$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{t\to 0+} g(t)=0$
$g(f(0))=g(1)=-1$
따라서 $\lim_{x\to 0} g(f(x))\ne g(f(0))$이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (참)
ㄷ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 닫힌구간 $[1,2]$에서 연속이고 $1 \le f(x) \le 2$이므로 함수 $g(f(x))$도 닫힌구간 $[1,2]$에서 연속이다.
이때, $h(x)=g(f(x))+\frac{1}{2}$이라고 하면 $h(1)h(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=g(f(x))+\frac{1}{2}=0$, 즉 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 열린구간 $(1,2)$에 적어도 하나 존재한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

69) ㄴ, ㄷ
⇨ ㄱ. $\lim_{x\to 0+} g(x)=-1$ (거짓)
ㄴ. $f(0)=a(a>3)$라고 하면 $g(f(0))=g(a)$
이때, 함수 $g(x)$는 $x>3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{t\to a} g(t)=g(a)$
$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=g(f(0))$
따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.(참)
ㄷ. $h(x)=g(f(x))$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[-3,3]$에서 연속이다.
$h(-3)=g(f(-3))=g(1)<0$,
$h(3)=g(f(3))=g(3)>0$에서 $h(-3)h(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(-3,3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $g(f(x))=0$은 닫힌구간 $[-3,3]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.(참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

70) 희철이와 수현이가 달리기를 시작하여 x분 후의

속력을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$도 연속이고,

$f(1)-g(1)=20-15=5>0$,

$f(3)-g(3)=17-19=-2<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 1과 3 사이에

$f(c)-g(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

따라서 두 사람의 속력이 같아지는 시각이 1분과 3분 사이에 존재한다.