단원 ISSUE

이 단원에서는 **복소수와 그 연산, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 해결하는 문제** 등이 자주 출제됩니다. 허수단위 i의 개념을 정확히 이해하여야 하며 근과 계수의 관계 관련 문제에는 앞의 곱셈공식 내용을 제대로 학습하여야 합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 오직 하나뿐이다.
② -1의 허수부분은 0이다.
③ $-2i$의 켤레복소수는 $2i$이다.
④ $2+5i>1+3i$ 이다.
⑤ 실수는 복소수이다.

[스스로 확인하기]

2. 두 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-3i$가 성립할 때, $3x+y$의 값을 구하면?

① 10　② 13
③ 14　④ 17
⑤ 5

[스스로 확인하기]

3. $\alpha=3+5i$, $\beta=3-5i$일 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값을 구하면?

① 152　② 160
③ 204　④ 234
⑤ 250

[스스로 확인하기]

4. $\sqrt{-4}\sqrt{-\dfrac{1}{9}}+\left(\sqrt{-\dfrac{2}{3}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　② $\dfrac{2}{3}$
③ $-\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{4}{3}$
⑤ $-\dfrac{4}{3}$

[스스로 확인하기]

5. $\alpha=1-\sqrt{3}i$일 때, 복소수 $\beta=\dfrac{\overline{\alpha}+1}{2\alpha-1}$에 대하여 $\beta\overline{\beta}$의 값을 구하면? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α,β의 켤레복소수이다.)

① 0　② $\dfrac{2}{13}$
③ $\dfrac{5}{13}$　④ $\dfrac{7}{13}$
⑤ $\dfrac{7}{21}$

[스스로 확인하기]

6. 저항 값이 R_1, R_2인 저항이 병렬로 연결된 전기 회로에서 R_1, R_2와 합성 저항 R 사이에는 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$인 관계가 성립한다. 저항 값이 $R_1=1+2i$, $R_2=2+i$인 2개의 저항이 병렬로 연결된 전기 회로의 합성 저항을 $R=a+bi$라 할 때, 실수 a, b의 값의 차를 구하면?

① 0　② 1
③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$
⑤ $\dfrac{5}{3}$

[스스로 마무리하기]

7. $z=a(2+i)-1+3i$에 대하여 z^2이 실수가 되게 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하면?

① 0 ② -1

③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$

⑤ $-\frac{3}{2}$

[스스로 마무리하기]

8. 등식 $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}=3-\frac{i}{5}$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $16xy$의 값을 구하면?

① 899 ② 512

③ 779 ④ 256

⑤ 689

[스스로 확인하기]

9. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-3=0$은 서로 다른 두 실근을 가지고 $4x^2-2(k+1)x+1=0$은 중근을 가진다. 이 때, 실수 k의 값을 구하면?

① -3 ② -2

③ -1 ④ 1

⑤ 2

[스스로 확인하기]

10. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2

③ 3 ④ 4

⑤ 5

[스스로 확인하기]

11. x에 대한 이차방정식 $x^2-2ax+a^2-ka+3k-2+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하면?

① -3 ② -2

③ -1 ④ 1

⑤ 2

[스스로 확인하기]

12. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이이고, x에 대한 이차방정식 $c(1+x^2)+2bx+a(1-x^2)=0$이 중근을 가질 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $a=b$인 이등변삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ 가장 긴 변의 길이가 b인 둔각삼각형

⑤ 빗변의 길이가 a인 직각이등변삼각형

[스스로 마무리하기]

13. x에 대한 두 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $ax^2+cx+2b=0$이 모두 중근을 가질 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab+2bc+2ca}$의 값을 구하면? (단, a, b, c는 실수이고 $abc \neq 0$)

① 1 ② 2

③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{7}{4}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

14. x에 대한 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 이차방정식 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

15. $x^2+2ax+a+2=0$, $x^2+(a-1)x+a^2=0$ 두 방정식 중 적어도 한 개의 이차방정식이 실근을 가질 때, 자연수 a의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

16. 이차방정식 $2x^2-4x+9=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2+\beta^2=-5$ ② $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=1$
③ $\alpha^3+\beta^3=-19$ ④ $\dfrac{1}{1+\alpha}+\dfrac{1}{1+\beta}=\dfrac{8}{15}$
⑤ $(\alpha-\beta)^2=-14$

[스스로 확인하기]

17. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax-(a-3)=0$의 두 근을 α,β라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근은 $\alpha+\beta,\alpha\beta$이다. 이 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하면?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 1
⑤ 2

[스스로 확인하기]

18. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값을 구하면?

① -4 ② -2
③ -1 ④ 1
⑤ 2

[스스로 확인하기]

19. 실수 a,b에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3+i$일 때, a,b의 값과 다른 한 근의 합을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $7+i$ ② $7-i$
③ $21-i$ ④ $1-i$
⑤ $1+i$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

20. 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α^3+1, β^3+1을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 x에 대한 이차방정식을 구하면?

① $x^2+28x-53=0$

② $x^2-28x-53=0$

③ $x^2+26x-53=0$

④ $x^2+24x-52=0$

⑤ $x^2-24x-52=0$

[스스로 확인하기]

21. 수민이와 성진이는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 수민이는 b를 잘못 보고 풀어 두 근 -2, 6을 얻었고, 성진이는 c를 잘못 보고 풀어 두 근 $-2+\sqrt{7}$, $-2-\sqrt{7}$을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 두 근 중 음수인 근을 구하면?

① -6 ② -5

③ -4 ④ -3

⑤ -2

[스스로 마무리하기]

22. 이차방정식 $x^2-4x+7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+4\beta$의 값을 구하면?

① 1 ② 2

③ 3 ④ 6

⑤ 9

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ①, ④

[해설] ① 제곱하여 $-a$이 되는 수는 $\sqrt{a}i$, $-\sqrt{a}i$의 두 개이다.
② $-1=-1+0\cdot i$로 나타낼 수 있으므로 허수 부분은 0이다.
③ $-2i$의 켤레복소수는 $2i$이다.
④ 실수가 아닌 복소수에서는 대소 관계는 성립하지 않는다.
⑤ 실수도 복소수이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

2) [정답] ③

[해설] $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=\dfrac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\dfrac{(x+y)+(-x+y)i}{1-i^2}=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{-x+y}{2}i$
복소수가 서로 같을 조건을 이용하면
$\dfrac{x+y}{2}=2$, $\dfrac{-x+y}{2}=-3$이다.
$x+y=4$, $-x+y=-6$를 연립하여 풀면
$x=5$, $y=-1$이다.
따라서 $3x+y=14$이다.

3) [정답] ③

[해설] $\alpha+\beta=(3+5i)+(3-5i)=6$
$\alpha\beta=(3+5i)(3-5i)=9-(-25)=34$
따라서 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=6\times34=204$이다.

4) [정답] ③

[해설] $\sqrt{-4}\sqrt{-\dfrac{1}{9}}+\left(\sqrt{-\dfrac{2}{3}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$
$=\sqrt{4}i\sqrt{\dfrac{1}{9}}i+\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}i\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}\sqrt{\dfrac{2}{3}}i$
$=\dfrac{2}{3}i^2+\dfrac{2}{3}i^2+\dfrac{2i}{3i}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

5) [정답] ④

[해설] $\alpha=1-\sqrt{3}i$에서 $\overline{\alpha}=1+\sqrt{3}i$이므로
$\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=1+3=4$이다.
$\beta\overline{\beta}=\dfrac{\overline{\alpha}+1}{2\alpha-1}\left(\overline{\dfrac{\overline{\alpha}+1}{2\alpha-1}}\right)=\dfrac{\overline{\alpha}+1}{2\alpha-1}\cdot\dfrac{\alpha+1}{2\overline{\alpha}-1}$
$=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+(\alpha+\overline{\alpha})+1}{4\alpha\overline{\alpha}-2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{4+2+1}{4\cdot4-2\cdot2+1}$
$=\dfrac{7}{13}$

6) [정답] ①

[해설] $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{2+i}$
$=\dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{3-3i}{5}$이므로
$R=\dfrac{5(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)}=\dfrac{5}{6}+\dfrac{5}{6}i$이다.
따라서 $a=\dfrac{5}{6}$, $b=\dfrac{5}{6}$이고 두 수의 차는 0이다.

7) [정답] ⑤

[해설] $z=a(2+i)-1+3i$에서
$z=(2a-1)+(a+3)i$
$z^2=(2a-1)^2-(a+3)^2+2(2a-1)(a+3)i$에서
z^2이 실수가 되려면 $2(2a-1)(a+3)=0$이다.
따라서 $a=-3$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$이므로 $-3\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$이다.

8) [정답] ①

[해설] $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}$
$=\dfrac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{y(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
$=\dfrac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$
이므로 $\dfrac{x+y}{5}+\dfrac{2(x-y)i}{5}=3-\dfrac{i}{5}$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\dfrac{x+y}{5}=3$, $\dfrac{2(y-x)}{5}=-\dfrac{1}{5}$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{31}{4}, y=\dfrac{29}{4}$이다. 따라서 $16xy=16\cdot\dfrac{31}{4}\cdot\dfrac{29}{4}=899$이다.

9) [정답] ④

[해설] $x^2-2(k+1)x+k^2-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-3)>0$이고, $k>-2$이다.
$4x^2-2(k+1)x+1=0$이 중근을 가지므로
$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-4=0$이고, $k=-3,1$이다.
두 조건을 만족시키는 $k=1$이다.

10) [정답] ②

[해설] 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1\neq0$이므로 $k\neq1$이다.
주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$\dfrac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0$, $2k-1>0$이므로
$k>\dfrac{1}{2}$이다. 띠라서 두 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

11) [정답] ④

[해설] 주어진 방정식이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-ka+3k-2+b)=0$
$ka-3k+2-b=0$이다.
이 등식이 k값에 관계없이 항상 성립하려면
$k(a-3)+(2-b)=0$이고 $a=3$, $b=2$이다.
따라서 $a-b=3-2=1$이다.

12) [정답] ③
[해설] $c(1+x^2)+2bx+a(1-x^2)=0$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면 $(c-a)x^2+2bx+a+c=0$
이차방정식이 중근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(a+c)=0$이고 $b^2+a^2=c^2$이다.
따라서 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

13) [정답] ④
[해설] $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가지므로,
$\frac{D}{4}=b^2-ac=0$이고, $a=\frac{b^2}{c}$ 이다.
$ax^2+cx+2b=0$이 중근을 가지므로
$D=c^2-8ab=0$이고, $a=\frac{b^2}{c}$ 를 대입하면
$c^2-8b\times\frac{b^2}{c}=0$, $c^3=8b^3$이고 $c=2b$이다.
$a=\frac{b^2}{c}$, $c=2b$에 의해 $a=\frac{b}{2}$이다.
따라서 $a:b:c=\frac{b}{2}:b:2b=1:2:4$이고,
$a=k$, $b=2k$, $c=4k$라고 하면
(단, k는 0이 아닌 상수)
$\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab+2bc+2ca}=\frac{k^2+4k^2+16k^2}{2(2k^2+8k^2+4k^2)}=\frac{3}{4}$이다.

14) [정답] ③
[해설] 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가지므로 $\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot(-3k)<0$,
$6k<-4$이고 $k<-\frac{2}{3}$이다.
이차방정식 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 가지므로
$D=5^2-4\cdot(-2k)\geq 0$, $8k\geq-25$이고 $k\geq-\frac{25}{8}$
이다. 두 조건을 동시에 만족하는 k의 값의 범위는 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$이다.
따라서 정수 k의 값은 -3, -2, -1이므로 그 개수는 3개이다.

15) [정답] ②
[해설] 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 실근을 갖기 위해서는 $\frac{D}{4}=a^2-(a+2)\geq 0$이다.
$(a-2)(a+1)\geq 0$이고 $a\leq-1$, $a\geq 2$이다.
이차방정식 $x^2+(a-1)x+a^2=0$이 실근을 갖기 위해서는 $D=(a-1)^2-4a^2\geq 0$이다.
$3a^2+2a-1\leq 0$이고 $-1\leq a\leq\frac{1}{3}$이다.
그러므로 $a\leq\frac{1}{3}$, $a\geq 2$이고 자연수의 최솟값은 2이다.

16) [정답] ②
[해설] 이차방정식 $2x^2-4x+9=0$의 두 근을 α,β라 하고 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{9}{2}$이다.
① $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-5$
② $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{10}{9}$
③ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-19$
④ $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}=\frac{2+(\alpha+\beta)}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{8}{15}$
⑤ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=-14$

17) [정답] ③
[해설] 이차방정식 $x^2+ax-(a-3)=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-(a-3)$ ……㉠
이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a$ ……㉡
(두 근의 곱)$=(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=b$ ……㉢
㉠을 ㉡, ㉢에 대입하면
$-a-(a-3)=a$이고 $a=1$이다.
$a(a-3)=b$이고 $b=-2$이다.
따라서 $a+b=-1$이다.

18) [정답] ①
[해설] $x^2-2x-1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이다.
$\alpha\beta<0$이고 $\frac{\beta}{\alpha}<0$, $\frac{\alpha}{\beta}<0$이므로
$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$ 이다.
$\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$
$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2=-4$

19) [정답] ②
[해설] 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $3+i$이므로 다른 한 근은 $3-i$이다.
따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $3+i$, $3-i$이므로 근과 계수의 관계에 의해
$(3+i)+(3-i)=-a$이므로 $a=-6$
$(3+i)(3-i)=b$이므로 $b=10$이다.
따라서 $(3-i)-6+10=7-i$이다.

20) [정답] ④
[해설] 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-3$이다.
α^3+1, β^3+1의 합과 곱을 구하면
$(\alpha^3+1)+(\beta^3+1)=\alpha^3+\beta^3+2$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+2$
$=(-2)^3-3(-3)(-2)+2=-24$
$(\alpha^3+1)(\beta^3+1)=\alpha^3\beta^3+\alpha^3+\beta^3+1$
$=(\alpha\beta)^3+(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+1$
$=(-3)^3+(-2)^3-3\cdot(-3)(-2)+1=-52$
따라서 α^3+1, β^3+1을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+24x-52=0$이다.

21) [정답] ①
[해설] 수민이는 a,c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}=-2\cdot 6=-12$이고 $c=-12a$이다.
성진이는 a,b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=-4$이고 $b=4a$이다.
$c=-12a$, $b=4a$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 $ax^2+4ax-12a=0$, $a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면 $x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$이고 $x=-6$ 또는 $x=2$이다.
따라서 음수인 근은 -6이다.

22) [정답] ⑤
[해설] α는 주어진 이차방정식의 근이므로
$\alpha^2-4\alpha+7=0$이고 $\alpha^2=4\alpha-7$이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$이므로
$\alpha^2+4\beta=4\alpha-7+4\beta=4(\alpha+\beta)-7=4\cdot 4-7=9$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574