01 원이 되기 위한 조건

1. 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형이 원이 되기 위한 조건
: 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 $r^2>0$임을 이용한다.
⇨ $A^2+B^2-4C>0$

◪ 다음 방정식이 원을 나타낼 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

1. $x^2+y^2+2ay+2a^2-9=0$

2. $x^2+y^2+2x-2y-a=0$

3. $x^2+y^2-4x+2ay+7=0$

4. $x^2+y^2-2x-4y+a-1=0$

5. $x^2+y^2+6x-2y+a=0$

6. $x^2+y^2-4x-6y+a=0$

7. $x^2+y^2+4x+a-3=0$

8. $x^2+y^2+8y+3a+1=0$

9. $x^2+y^2-4x+2y-a+2=0$

10. $x^2+y^2+2x-y+a+1=0$

11. $x^2+y^2-2y+a-2=0$

12. $x^2+y^2+4x-6y+a+9=0$

13. $x^2+y^2+2x+3-a=0$

14. $x^2+y^2-4x+2y+a=0$

15. $x^2+y^2-2ax+2ay+8=0$

02 세 점을 지나는 원의 방정식

세 점을 지나는 원의 방정식은 다음의 순서로 구한다.

❶ 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓는다.

❷ 주어진 세 점의 좌표를 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 대입하여 세 개의 방정식을 구한다.

❸ 세 방정식을 연립하여 상수 A, B, C의 값을 구한다.

◪ 다음 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식을 구하여라.

16. $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(-1,1), \mathrm{C}(4,0)$

17. $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ 1)$

18. $\mathrm{A}(3,0), \mathrm{B}(-3,2), \mathrm{C}(1,4)$

19. $\mathrm{A}(1,-2), \mathrm{B}(2,-1), \mathrm{C}(4,-3)$

20. $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(0,1), \mathrm{C}(-1,4)$

21. $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(5,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ -4)$

22. $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(2,1), \mathrm{C}(3,1)$

23. $\mathrm{A}(2,3), \mathrm{B}(-3,-2), \mathrm{C}(6,1)$

24. $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(2,-1), \mathrm{C}(-3,0)$

25. $\mathrm{A}(1,5), \mathrm{B}(-2,-4), \mathrm{C}(5,3)$

26. $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(1,-1), \mathrm{C}(3,1)$

◪ 다음 세 점 A, B, C에 대하여 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하여라.

27. $\mathrm{A}(-2,\ 5)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$

28. $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ -3)$, $\mathrm{C}(2,\ 2)$

29. $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 3)$

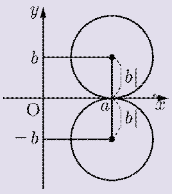
30. $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$

31. $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(-3,\ -1)$

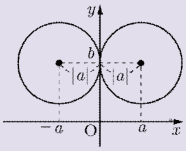
03 좌표축에 접하는 원의 방정식

1. 중심이 $(a,\ b)$이고, x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식

(1) x축에 접하는 원의 방정식: $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$



(2) y축에 접하는 원의 방정식: $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



2. x축, y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식

(1) 중심이 제 1사분면에 있으면

⇨ $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

(2) 중심이 제 2사분면에 있으면

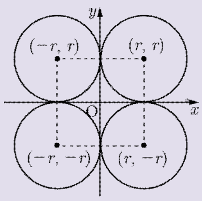
⇨ $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

(3) 중심이 제 3사분면에 있으면

⇨ $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

(4) 중심이 제 4사분면에 있으면

⇨ $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$



참고 (반지름의 길이)=|중심의 x좌표|=|중심의 y좌표|

◪ **다음 주어진 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 방정식을 구하여라.**

32. 점 $(-5,2)$

33. 점 $(3,\ 2)$

34. 점 $(-4,\ -2)$

35. 점 $(-3,\ 2)$

◪ **다음 주어진 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원의 방정식을 구하여라.**

36. 점 $(-4,5)$

37. 점 $(-2,\ 1)$

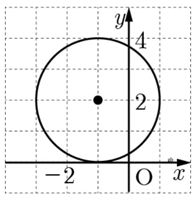
38. 점 $(1,\ -1)$

39. 점 $(3,\ -2)$

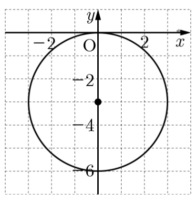
40. 점 $(-1,3)$

◪ **다음 그림을 보고 원의 방정식을 구하여라.**

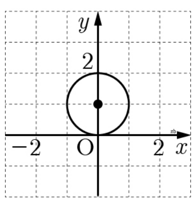
41.



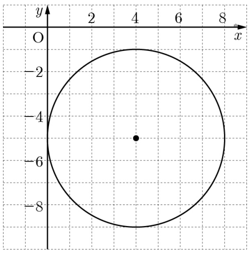
42.

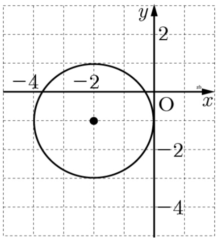


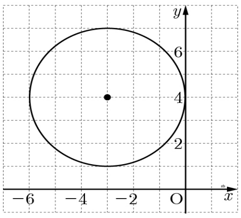
43.



I410-ECN-0199-2017-001-000057208

44. 

45. 

46. 

◪ 다음 주어진 점을 지나고 x축과 y축을 동시에 접하는 두 원의 넓이의 합을 구하여라.

47. 점 $(3, -2)$

48. 점 $(-2,\ 1)$

49. 점 $(2,\ 3)$

50. 점 $(1,2)$

◪ 다음의 원과 중심이 같고, 주어진 축에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

51. $x^2+y^2+4x-2y=10$, x축

52. $x^2+y^2+4x+8y+3=0$, x축

53. $x^2+y^2-2x+4y-5=0$, x축

54. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$, x축

55. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$, y축

56. $x^2+y^2-6x-2y=0$, y축

57. $x^2+y^2-6x+4=0$, y축

◪ 다음 원이 x축과 y축에 동시에 접할 때, 양수 a, b의 값을 구하여라.

58. $x^2+y^2+4x-4ay+12-b=0$

59. $x^2+y^2+6x-2ay+20-b=0$

60. $x^2+y^2-4x+4ay+12-b=0$

61. $x^2+y^2+2ax-6y+13-b=0$

62. $x^2+y^2-6x+2ay+10-b=0$

63. $x^2+y^2+8x+4ay+23-b=0$

◪ 다음을 구하여라.

64. 원 $x^2+y^2-8x-4y+k^2+7=0$이 x축에 접할 때, 양수 k의 값

65. 원 $x^2+y^2+kx+4y+9=0$이 x축에 접할 때, 양수 k의 값

66. 원 $x^2+y^2-2x-4y+4-k^2=0$이 x축에 접할 때, 양수 k의 값

67. 원 $x^2+y^2-6x+4y+11-k^2=0$이 x축에 접할 때, 양수 k의 값

68. 원 $x^2+y^2+6x-2y+5-k^2=0$이 y축에 접할 때, 양수 k의 값

69. 원 $x^2+y^2-4x+4ky+8=0$이 y축에 접할 때, 양수 k의 값

70. 원 $x^2+y^2-4x-2y+k^2=0$이 y축에 접할 때, 양수 k의 값

71. 원 $x^2+6x+y^2+2y+10-k^2=0$이 y축에 접할 때, 양수 k의 값

72. 원 $x^2+y^2-4x-6y+k=0$이 y축에 접할 때, 양수 k의 값

정답 및 해설

1) $-3<a<3$

⇨ $x^2+y^2+2ay+2a^2-9=0$에서
$x^2+(y+a)^2=9-a^2$
이 방정식이 원을 나타내려면 $9-a^2>0$이어야 하므로
$a^2-9<0,\ (a+3)(a-3)<0 \quad \therefore -3<a<3$

2) $a>-2$

⇨ $x^2+y^2+2x-2y-a=0$
$(x+1)^2+(y-1)^2=a+2$
$\therefore$ 원이 되기 위해서는 $a+2>0 \quad \therefore a>-2$

3) $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

⇨ $x^2+y^2-4x+2ay+7=0$에서
$(x-2)^2+(y+a)^2=a^2-3$
이 방정식이 원을 나타내려면
$a^2-3>0 \quad \therefore a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

4) $a<6$

⇨ $x^2+y^2-2x-4y+a-1=0$에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=6-a$
이 방정식이 원을 나타내려면 $6-a>0 \quad \therefore a<6$

5) $a<10$

⇨ $x^2+y^2+6x-2y+a=0$에서
$(x+3)^2+(y-1)^2=10-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$10-a>0 \quad \therefore a<10$

6) $a<13$

⇨ $(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=13-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$13-a>0 \quad \therefore a<13$

7) $a<7$

⇨ $x^2+y^2+4x+a-3=0$에서
$(x^2+4x+4)+y^2+a-7=0$
$\therefore (x+2)^2+y^2=7-a$
이 방정식이 원을 나타내려면 $7-a>0$이어야 하므로 $a<7$

8) $a<5$

⇨ $x^2+y^2+8y+3a+1=0$에서
$x^2+(y+4)^2=15-3a$
이 방정식이 원을 나타내려면 $15-3a>0 \quad \therefore a<5$

9) $a>-3$

⇨ $x^2+y^2-4x+2y-a+2=0$에서
$(x-2)^2+(y+1)^2=a+3$
이 방정식이 원을 나타내려면 $a+3>0 \quad \therefore a>-3$

10) $a<\frac{1}{4}$

⇨ $x^2+y^2+2x-y+a+1=0$
$(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-a$
원이 되려면 $\frac{1}{4}-a>0 \quad \therefore a<\frac{1}{4}$

11) $a<3$

⇨ 방정식 $x^2+y^2-2y+a-2=0$을 변형하면
$x^2+(y-1)^2=3-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$3-a>0 \quad \therefore a<3$

12) $a<4$

⇨ 방정식 $(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=4-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$4-a>0 \quad \therefore a<4$

13) $a>2$

⇨ $(x^2+2x+1)+y^2=a-2$
이 방정식이 원을 나타내려면
$a-2>0 \quad \therefore a>2$

14) $a<5$

⇨ $x^2+y^2-4x+2y+a=0$
$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$
$\therefore$ 원이 되려면 $5-a>0 \quad \therefore a<5$

15) $a<-2$ 또는 $a>2$

⇨ $x^2+y^2-2ax+2ay+8=0$에서
$(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2-8$
이 방정식이 원을 나타내려면 $2a^2-8>0$이어야 하므로
$a^2-4>0,\ (a+2)(a-2)>0$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

16) $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

⇨ 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로
$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-1)^2$
$\therefore a-b+1=0 \cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로
$a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$
$-8a+16=0 \quad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$
따라서 원의 중심은 $\mathrm{P}(2,3)$이고 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$이므로 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

17) $x^2+y^2-x-y-2=0$

⇨ 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고

주어진 세 점의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
A$(-1,0)$일 때, $-A+C=-1$ ……㉠
B$(0,2)$일 때, $2B+C=-4$ ……㉡
C$(2,1)$일 때, $2A+B+C=-5$ ……㉢
㉠에서 $C=A-1$이고, 이를 ㉡과 ㉢에 대입하여 정리하면
$A+2B=-3$, $3A+B=-4$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $A=-1, B=-1$
이때, $C=A-1$이므로 $C=-2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x-y-2=0$

18) $x^2+(y-1)^2=10$
⇨ 원의 중심을 P$(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로
$(a-3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-2)^2$
$\therefore 3a-b+1=0 \cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로
$(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+(b-4)^2$
$\therefore a-2b+2=0 \cdots$ ㉡
㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$
따라서 원의 중심은 P$(0,1)$이고 반지름의 길이는 $\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=10$

19) $x^2+y^2-5x+5y+10=0$
⇨ 구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ⋯ ㉠으로 놓고
A, B, C의 좌표를 ㉠에 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} A-2B+C=-5 \\ 2A-B+C=-5 \\ 4A-3B+C=-25 \end{cases}$
위의 식을 연립하여 풀면
$A=-5, B=5, C=10$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-5x+5y+10=0$

20) $x^2+y^2-8x-8y+7=0$
⇨ 구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ⋯ ㉠으로 놓고
A, B, C의 좌표를 ㉠에 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} A+C=-1 \\ B+C=-1 \\ -A+4B+C=-17 \end{cases}$
위의 식을 연립하여 풀면 $A=-8, B=-8, C=7$
$\therefore x^2+y^2-8x-8y+7=0$

21) $x^2+y^2-5x+4y=0$
⇨ 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
주어진 세 점의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
A$(0,0)$일 때, $C=0$ ……㉠
B$(5,0)$일 때, $5A+C=-25$ ……㉡
C$(0,-4)$일 때, $-4B+C=-16$ ……㉢
㉠을 ㉡과 ㉢에 대입하여 정리하면 $A=-5, B=4$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-5x+4y=0$

22) $x^2+y^2-5x-5y+10=0$
⇨ 구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ⋯ ㉠으로 놓고
A, B, C의 좌표를 ㉠에 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} A+2B+C=-5 \\ 2A+B+C=-5 \\ 3A+B+C=-10 \end{cases}$
위의 식을 연립하여 풀면 $A=-5, B=-5, C=10$
$\therefore x^2+y^2-5x-5y+10=0$

23) $x^2+y^2-4x+4y-17=0$
⇨ 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식과 같으므로 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} 2A+3B+C=-13 \\ -3A-2B+C=-13 \\ 6A+B+C=-37 \end{cases}$
위 식을 연립하여 풀면 $A=-4, B=4, C=-17$
$\therefore x^2+y^2-4x+4y-17=0$

24) $x^2+y^2-4y-9=0$
⇨ 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} 3A+4B+C=-25 \\ 2A-B+C=-5 \\ -3A+C=-9 \end{cases}$
위 식을 연립하여 풀면 $A=0, B=-4, C=-9$
$\therefore x^2+y^2-4y-9=0$

25) $x^2+y^2-2x-24=0$
⇨ 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} A+5B+C=-26 \\ -2A-4B+C=-20 \\ 5A+3B+C=-34 \end{cases}$
위 식을 연립하여 풀면 $A=-2, B=0, C=-24$
$\therefore x^2+y^2-2x-24=0$

26) $x^2+y^2-3x-y=0$
⇨ 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고
세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$\begin{cases} C=0 \\ A-B+C=-2 \\ 3A+B+C=-10 \end{cases}$
위 식을 연립하여 풀면 $A=-3, B=-1, C=0$
$\therefore x^2+y^2-3x-y=0$

27) 10π
⇨ 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하자.

점 A를 대입하면 $4+25-2a+5b+c=0$,
$-2a+5b+c=-29 \cdots$ ①
점 B를 대입하면, $16+9+4a+3b+c=0$,
$4a+3b+c=-25 \cdots$ ②
점 C를 대입하면, $1+b+c=0$, $b+c=-1 \cdots$ ③
①$\times 2+$②를 하면, $13b+3c=-83 \cdots$ ④
④$-$③$\times 3$을 하면, $10b=-80$
$\therefore b=-8$, $c=7$, $a=-2$
$\therefore x^2+y^2-2x-8y+7=0$
$(x-1)^2+(y-4)^2=10$
$\therefore$ 원의 넓이는 10π이다.

28) 17π
⇨ 세 점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하자.
점 A를 대입하면, $4+2a+c=0$, $2a+c=-4 \cdots$ ①
점 B을 대입하면, $1+9-a-3b+c=0$,
$a+3b-c=10 \cdots$ ②
점 C를 대입하면, $4+4+2a+2b+c=0$,
$2a+2b+c=-8 \cdots$ ③
①$+$②를 하면, $3a+3b=6 \cdots$ ④
②$+$③을 하면, $3a+5b=2 \cdots$ ⑤
⑤$-$④를 하면, $2b=-4$ $\therefore b=-2$, $a=4$, $c=-12$
$\therefore$ 원의 방정식은 $x^2+y^2+4x-2y-12=0$,
$(x+2)^2+(y-1)^2=17$이다.
$\therefore$ 원의 넓이는 17π이다.

29) $\frac{13}{4}\pi$
⇨ 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라고 하면 세 점$(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$을 지나므로
$C=0$
$4+2A=0$ $\therefore A=-2$
$9+3B=0$ $\therefore B=-3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2x-3y=0$,
즉 $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$
따라서 원의 넓이는 $\frac{13}{4}\pi$

30) $\frac{5}{4}\pi$
⇨ 세 점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하자.
점 A$(0,\ 0)$을 대입하면, $c=0$
점 B$(0,\ 1)$을 대입하면, $1+b=0$, $b=-1$
점 C$(2,\ 0)$을 대입하면, $4+2a=0$, $a=-2$
$\therefore$ 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x-y=0$,
$(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$이다.
$\therefore$ 원의 넓이는 $\frac{5}{4}\pi$

31) 5π
⇨ 세 점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하자.
점 A$(0,\ 2)$를 대입하면, $4+2b+c=0$,
$2b+c=-4 \cdots$ ①
점 B$(1,\ 1)$을 대입하면, $1+1+a+b+c=0$,
$a+b+c=-2 \cdots$ ②
점 C$(-3,\ -1)$을 대입하면, $9+1-3a-b+c=0$,
$3a+b-c=10 \cdots$ ③
②$\times 3-$③을 하면, $2b+4c=-16$,
$b+2c=-8 \cdots$ ④
①과 ④를 연립하여 풀면, $b=0$, $c=-4$
$\therefore a=2$, $b=0$, $c=-4$
원의 방정식은 $x^2+y^2+2x-4=0$
$(x+1)^2+y^2=5$
$\therefore$ 원의 넓이는 5π이다.

32) $(x+5)^2+(y-2)^2=4$

33) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$
⇨ 중심이 $(3,2)$인 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이가 2이다. 따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2=4$

34) $(x+4)^2+(y+2)^2=4$
⇨ 중심이 점 $(-4,-2)$인 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=4$

35) $(x+3)^2+(y-2)^2=4$
⇨ 중심이 점 $(-3,2)$인 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
$\therefore (x+3)^2+(y-2)^2=4$

36) $(x+4)^2+(y-5)^2=16$
⇨ 점 $(-4,5)$를 중심으로 하고 y축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 4이다.
$\therefore (x+4)^2+(y-5)^2=16$

37) $(x+2)^2+(y-1)^2=4$
⇨ 중심이 점 $(-2,1)$인 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$이다.
$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=4$

38) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$
⇨ 중심이 점 $(1,-1)$인 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 1이다.
$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$

39) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$
⇨ 중심이 점 $(3,-2)$인 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.

$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=9$

40) $(x+1)^2+(y-3)^2=1$

⇨ 점 $(-1,3)$을 중심으로 하고 y축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 1이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-3)^2=1$

41) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

⇨ 중심이 $(-1,2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

42) $x^2+(y+3)^2=9$ 3

⇨ 중심이 $(0,-3)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 원의 방정식은 $x^2+(y+3)^2=9$

43) $x^2+(y-1)^2=1$

⇨ 중심이 $(0,1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 원의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=1$

44) $(x-4)^2+(y+5)^2=16$

⇨ 중심이 $(4,-5)$이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y+5)^2=16$

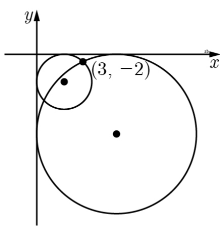
45) $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

⇨ 중심이 $(-2,-1)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

46) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

⇨ 중심이 $(-3,4)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

47) 74π

⇨ 

그림에서 제4사분면에서 x,y축과 접해야 하기 때문에 원의 방정식을 $(x-r)^2+(x+r)^2=r^2$둔다.
원의 식에 (3,−2)를 대입하여 정리하면
$r^2-10r+13=0$ 두 원의 반지름을 각각 r_1,r_2라 하면 $r_1+r_2=10, r_1 \cdot r_2=13$이다.
두 원의 넓이의 합은
$(r_1)^2\pi+(r_2)^2\pi=(r_1+r_2)^2\pi-2r_1\cdot r_2\pi=74\pi$

48) 26π

⇨ 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로 원의 중심은 제2사분면에 위치한다. x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심을 $(-a,\ a)$, 반지름의 길이를 a라 하면 $(a>0)$ 원의 방정식은 $(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$이다.
점 $(-2,\ 1)$을 대입하면, $(-2+a)^2+(1-a)^2=a^2$
$a^2-6a+5=0$, $(a-5)(a-1)=0$, $a=5,\ 1$
$\therefore$두 원의 반지름의 길이는 1, 5이므로 두 원의 넓이의 합은 $\pi(1+25)=26\pi$이다.

49) 74π

⇨ x축과 y축을 동시에 접하는 원의 방정식을
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$로 놓으면 이 원은
점 $(2,3)$을 지나므로 $(2-a)^2+(3-a)^2=a^2$,
$a^2-10a+13=0$
이때 이 이차방정식의 두 근을 a_1, a_2라 하면
근과 계수와의 관계에 의해
$a_1+a_2=10$, $a_1a_2=13$
따라서 두 원의 넓이의 합은
$\pi(a_1^2+a_2^2)=\pi\{(a_1+a_2)^2-2a_1a_2\}$
$=\pi(10^2-2\times13)=74\pi$

50) 26π

51) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

⇨ 원 $x^2+y^2+4x-2y=10$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2=15$
즉, 구하는 원은 중심이 $(-2,1)$이고 x축에 접하므로 반지름의 길이가 1이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-1)^2=1$

52) $(x+2)^2+(y+4)^2=16$

⇨ $x^2+y^2+4x+8y+3=0$에서
$(x+2)^2+(y+4)^2=17$
즉, 구하는 원은 중심이 $(-2,-4)$이고 x축에 접하므로 반지름의 길이가 4이다.
$\therefore (x+2)^2+(y+4)^2=16$

53) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

⇨ $x^2+y^2-2x+4y-5=0$에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=10$
즉, 구하는 원은 중심이 $(1,-2)$이고 x축에 접하므로 반지름의 길이가 2이다.
$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=4$

54) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

⇨ $x^2+y^2-4x+6y-3=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=16$
즉, 구하는 원은 중심이 $(2,-3)$이고 x축에 접하므로 반지름의 길이가 3이다.
$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=9$

55) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

⇨ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$
즉, 구하는 원은 중심이 $(1,-2)$이고 y축에 접하

므로 반지름의 길이는 1이다.
$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=1$

56) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$
⇨ $x^2+y^2-6x-2y=0$에서
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$
즉, 구하는 원은 중심 $(3,1)$이고 y축에 접하므로 반지름의 길이가 3이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=9$

57) $(x-3)^2+y^2=9$
⇨ $x^2+y^2-6x+4=0$에서 $(x-3)^2+y^2=5$
즉 구하는 원은 중심이 $(3,0)$이고 y축에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.
$\therefore (x-3)^2+y^2=9$

58) $a=1, b=8$
⇨ $x^2+y^2+4x-4ay+12-b=0$에서
$(x+2)^2+(y-2a)^2=4a^2+b-8$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$4a^2+b-8=|-2|^2=|2a|^2$
$\therefore a=1, b=8\ (\because a>0)$

59) $a=3, b=11$
⇨ $x^2+y^2+6x-2ay+20-b=0$에서
$(x+3)^2+(y-a)^2=a^2+b-11$
이 원은 x축과 y축에 동시에 접하므로
$|-3|=|a|=\sqrt{a^2+b-11}$
$|-3|=|a|$에서 $a=3(\because a>0)$
$|-3|=\sqrt{a^2+b-11}$에서 $a^2+b-11=9$
$9+b-11=9 \qquad \therefore b=11$

60) $a=1, b=8$
⇨ $x^2+y^2-4x+4ay+12-b=0$에서
$(x-2)^2+(y+2a)^2=4a^2+b-8$
이 원은 x축과 y축에 동시에 접하므로 중심의 x좌표와 y좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 모두 같다.
즉, $|2|=|-2a|=\sqrt{4a^2+b-8}$이므로
$a=1, b=8\ (\because a>0, b>0)$

61) $a=3, b=4$
⇨ $x^2+y^2+2ax-6y+13-b=0$에서
$(x+a)^2+(y-3)^2=a^2+b-4$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$a^2+b-4=|-a|^2=|3|^2$
$\therefore a=3, b=4(\because a>0)$

62) $a=3, b=1$
⇨ $x^2+y^2-6x+2ay+10-b=0$에서
$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2+b-1$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$a^2+b-1=|3|^2=|-a|^2$
$\therefore a=3, b=1(\because a>0)$

63) $a=2, b=7$
⇨ $x^2+y^2+8x+4ay+23-b=0$에서
$(x+4)^2+(y+2a)^2=4a^2+b-7$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$4a^2+b-7=|-4|^2=|-2a|^2$
$\therefore a=2, b=7(\because a>0)$

64) 3
⇨ $x^2+y^2-8x-4y+k^2+7=0$에서
$(x-4)^2+(y-2)^2=13-k^2$
이때, 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
즉, $13-k^2=2^2$, $k^2=9 \quad \therefore k=3(\because k>0)$

65) 6
⇨ $x^2+y^2+kx+4y+9=0$에서
$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{k^2}{4}-5$
이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$이다.
즉, $\frac{k^2}{4}-5=2^2$이므로 $k^2=36$
$\therefore k=6(\because k>0)$

66) $\sqrt{3}$
⇨ $x^2+y^2-2x-4y+4-k^2=0$에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=k^2+1$
이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
즉, $k^2+1=2^2$이므로 $k^2=3$
$\therefore k=\sqrt{3}(\because k>0)$

67) $\sqrt{2}$
⇨ $x^2+y^2-6x+4y+11-k^2=0$에서
$(x-3)^2+(y+2)^2=k^2+2$
이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$이다.
즉, $k^2+2=2^2$이므로 $k^2=2$
$\therefore k=\sqrt{2}(\because k>0)$

68) 2
⇨ $x^2+y^2+6x-2y+5-k^2=0$에서
$(x+3)^2+(y-1)^2=k^2+5$
이때, 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.
즉, $k^2+5=3^2$, $k^2=4 \quad \therefore k=2(\because k>0)$

69) $\sqrt{2}$
⇨ $x^2+y^2-4x+4ky+8=0$에서

$(x-2)^2+(y+2k)^2=4k^2-4$
이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
즉, $4k^2-4=2^2$이므로 $k^2=2$
$\therefore k=\sqrt{2}\,(\because k>0)$

70) 1
⇨ $x^2+y^2-4x-2y+k^2=0$에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=5-k^2$
이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
즉, $5-k^2=2^2$이므로 $k^2=1$
$\therefore k=1\,(\because k>0)$

71) 3
⇨ $x^2+6x+y^2+2y+10-k^2=0$에서
$(x+3)^2+(y+1)^2=k^2$
이 원은 y축에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값과 반지름의 길이는 같다.
$\therefore k=3\,(\because k>0)$

72) 9
⇨ $x^2+y^2-4x-6y+k=0$에서
$(x-2)^2+(y-3)^2=-k+13$
이 원은 y축에 접하므로
$|2|=\sqrt{-k+13}$, $-k+13=4$, $-k=-9$
$\therefore k=9$