◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-03-10
2) 제작자 : 교육지대㈜
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[함수의 연속]
함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.
(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
즉 함숫값 $f(a)$가 존재한다.
(2) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

[함수의 불연속]
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라 한다.

기본문제

[문제]

1. 다음 함수 중 $x=3$에서 불연속인 함수는?

① $y=3x+4$
② $y=x^2+3$
③ $y=\dfrac{1}{x+3}$
④ $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & (x \neq 3) \\ 2 & (x=3) \end{cases}$
⑤ $y=\begin{cases} x^2-2 & (x \geq 3) \\ 8-x & (x<3) \end{cases}$

[문제]

2. 다음 중 집합을 구간으로 나타낸 것 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{x | -1 \leq x \leq 2\} \rightarrow [-1, 2]$
② $\{x | 3 \leq x < 5\} \rightarrow [3, 5)$
③ $\{x | -1 < x \leq 2\} \rightarrow (-1, 2]$
④ $\{x \mid x \leq 1\} \rightarrow (-\infty, 1)$
⑤ $\{x \mid x > 4\} \rightarrow (4, \infty)$

[문제]

3. 함수 $f(x)=\sqrt{1-2x}+\sqrt{16-x^2}$의 정의역에 속하는 정수의 개수는?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[문제]

4. 함수 $f(x)=\sqrt{2x+4}$가 연속인 구간을 구하면?

① $(-\infty, \infty)$ ② $(-\infty, -2]$
③ $(-\infty, -2)$ ④ $[-2, \infty)$
⑤ $(-2, \infty)$

평가문제

[스스로 확인하기]

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[스스로 확인하기]

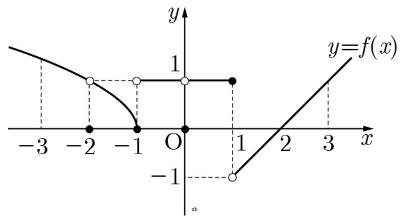
6. 다음 중 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속인 것은?

① $f(x)=3x-1$
② $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$
③ $f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+1 & (x \leq 1) \\ x+1 & (x>1) \end{cases}$
④ $f(x)=|x-1|+3$
⑤ $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x \neq 1) \\ 4-2x & (x=1) \end{cases}$

Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 확인하기]

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 $\lim_{x\to a-}f(x)\neq\lim_{x\to a+}f(x)$을 만족하는 상수 a 값의 개수를 m, 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 불연속일 때 상수 b 값의 개수를 n이라 하자. 이때, mn의 값은? (단, a, b는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에 속하는 값이다.)



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[스스로 확인하기]

8. 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-b}{x-3} & (x\neq a)\\ c & (x=a)\end{cases}$가 모든 실수에서 연속일 때, 세 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

[스스로 확인하기]

9. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-a)f(x)=x^2-3x-28$을 만족시킨다. 이 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 양수이다)

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

[스스로 확인하기]

10. 함수 $f(x)=|x^2-4x|+1$에 대하여, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to a}g(x)\neq g(a)$를 만족하는 모든 상수 a 값의 합은? (단, k는 상수이다.)

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

[스스로 마무리하기]

11. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-2)f(x)=x^2-4x+a$를 만족시킬 때, $a+f(1)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

[스스로 마무리하기]

12. $x\neq 2$에서의 함숫값이 $\dfrac{x^2+ax-6}{x-2}$인 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속일 때, $a+f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

[스스로 마무리하기]

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^2-1)f(x)=x^3+x^2+ax+b$를 만족시킬 때, $ab+f(1)$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다.)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

[스스로 마무리하기]

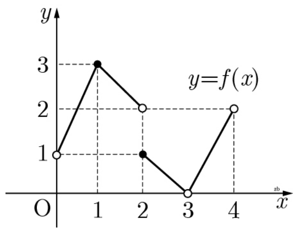
14. 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}+a}{x-2} & (x\neq 2)\\ b & (x=2)\end{cases}$이 실수 전체에서 연속일 때, $af(2)$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다)

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{2}$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

유사문제

15. 열린 구간 $(0,4)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 이 구간에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값의 개수를 m, $f(x)$가 불연속인 x의 값의 개수를 n이라고 할 때, $m-n$의 값은?



① -2　　② -1
③ 0　　④ 1
⑤ 2

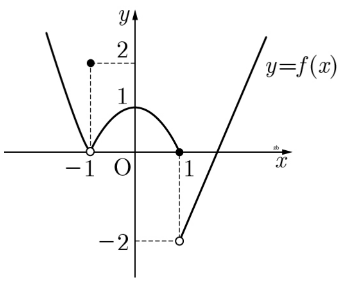
16. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+1}+b}{x^2+x} & (x\neq 0) \\ -3 & (x=0) \end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속일 때, $a-b$의 값은?

① -12　　② -6
③ -3　　④ 0
⑤ 12

17. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f(x)$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $f(-1)=2$
② $\lim_{x\to 1+}f(x)=-2$
③ $\lim_{x\to -1}f(x)$가 존재한다.
④ $\lim_{x\to 0+}f(f(x))=1$
⑤ 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 2개이다.

18. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수)

$$(x-2)f(x)=x^2+a(x-1)$$

① -4　　② -2
③ 0　　④ 2
⑤ 4

19. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leq 1) \\ ax+1 & (x>1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -2　　② -1
③ 0　　④ 1
⑤ 2

20. 함수 $f(x)=\begin{cases} a & (x<3) \\ x-1 & (x\geq 3) \end{cases}$가 $x=3$에서 연속이 되기 위한 상수 a의 값은?

① 2　　② 3
③ 4　　④ 5
⑤ 6

Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331

정답 및 해설

1) [정답] ⑤
[해설] ⑤에서 $\lim\limits_{x\to 3-}y=5$, $\lim\limits_{x\to 3+}y=7$ 이므로
$x=3$에서 불연속이다.

2) [정답] ④
[해설] ④ $\{x\,|\,x\le 1\}$ 는 $(-\infty, 1]$이다.

3) [정답] ⑤
[해설] $f(x)=\sqrt{1-2x}+\sqrt{16-x^2}$에서 정의역은
$\{x\,|\,-4\le x\le \frac{1}{2}\}$ 이므로
정의역에 속하는 정수는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개다.

4) [정답] ④
[해설] 함수 $f(x)=\sqrt{2x+4}$에서 $2x+4\ge 0$이어야 하므로
$2x\ge -4 \qquad \therefore x\ge -2$
즉 함수 $f(x)=\sqrt{2x+4}$는 열린 구간 $(-2,\ \infty)$에서 연속이고
$\lim\limits_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$
이므로 함수 $f(x)=\sqrt{2x+4}$는 구간 $[-2,\infty)$에서 연속이다.

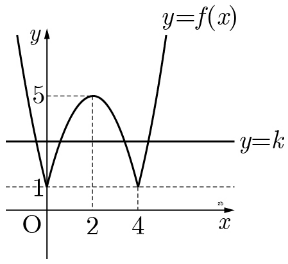
5) [정답] ①
[해설] $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (x\ne 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$이 $x=1$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=a$
$\therefore a=3$

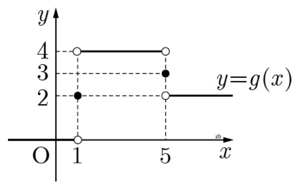
6) [정답] ②
[해답] ② $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

7) [정답] ④
[해답] $x=-1,\ 1$에서 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to a+}f(x)$이므로
$m=2$
$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1$에서 불연속이므로
$n=4$
$\therefore mn=8$

8) [정답] ②
[해설] $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-b}{x-3} & (x\ne a)\\ c & (x=a)\end{cases}$가 모든 실수에 대해 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.
즉, $\dfrac{x^2-x-b}{x-3}$가 정의될 수 있는 정의역은
$\{x\,|\,x\ne 3\}$이므로 $a=3$
$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-b}{x-3}=c$
(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
$9-3-b=0$
$b=6$
$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+2)=c$
$c=5$
$\therefore a+b+c=3+6+5=14$

9) [정답] ②
[해설] 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=a$에서도 연속이다.
즉 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-3x-28}{x-a}=f(a)$
이때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $a^2-3a-28=0$
$a=7\ (\because a>0)$
$f(a)=f(7)=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x-28}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}(x+4)=11$

10) [정답] ③
[해설]


위의 그림에서 $y=1$, $y=5$를 기준으로
$y=f(x)$와 $y=k$의 교점의 개수가 바뀐다.
이를 토대로 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.


따라서 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ne g(a)$를 만족하는 상수 a는 $1,\ 5$이므로, 합은 6이다.

11) [정답] ⑤
[해설] $x\ne 2$이면 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+a}{x-2}$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이다.

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로

$f(2)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재해야 한다.

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+a}{x-2}$에서 (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $4-8+a=0$

$a=4$

$a+f(1)=4+\frac{1-4+4}{-1}=4-1=3$

12) [정답] ③

[해설] 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-6}{x-2}$

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

$4+2a-6=0$

즉, $a=1$

$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=5$

따라서 $a+f(2)=1+5=6$

13) [정답] ④

[해설] $x\neq-1$, $x\neq1$이면 $f(x)=\frac{x^3+x^2+ax+b}{x^2-1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+ax+b}{x^2-1}=f(-1)$

$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+ax+b}{x^2-1}=f(1)$

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+ax+b}{x^2-1}=f(-1)$에서 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

$-a+b=0$, $a=b$ $\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+ax+b}{x^2-1}=f(1)$에서 (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이다.

$2+a+b=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립해서 풀면 $a=b=-1$

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

$\therefore ab+f(1)=1+2=3$

14) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

즉, $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}+a}{x-2}=b$

이때 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(\sqrt{x}+a)=0$, $a=-\sqrt{2}$

$f(2)=b$이므로

$b=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$

15) [정답] ②

[해설] 극한값이 존재하지 않는 x는 2의 1개이므로

$m=1$

또 $f(x)$가 불연속인 x는 2, 3의 2개이므로

$n=2$

$\therefore m-n=-1$

16) [정답] ①

[해설] 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x^2+x} & (x\neq0)\\ -3 & (x=0)\end{cases}$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x^2+x}=-3$이므로

$\lim_{x\to0}(a\sqrt{x+1}+b)=0$

$a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$

$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+1}-a}{x(x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+1}-1)}{x(x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{a}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\frac{a}{2}=-3$

$\therefore a=-6$, $b=6$

$\therefore a-b=-12$

17) [정답] ④

[해설] ① $f(-1)=2$

② $\lim_{x\to1+}f(x)=-2$

③ $\lim_{x\to-1}f(x)=0$

④ $\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{x\to1-}f(x)=0$

⑤ 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 -1, 1의 2개이다.

18) [정답] ③

[해설] $(x-2)f(x)=x^2+a(x-1)$이므로

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co.,Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$f(x)=\dfrac{x^2+a(x-1)}{x-2}\quad(x\neq 2)$

$f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이고 극한값을 갖는다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+a(x-1)}{x-2}$에서

$x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$4+a(2-1)=0$, $4+a=0\qquad\therefore\ a=-4$

$\therefore\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

19) [정답] ③

[해설] $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}(ax+1)=1$이므로

$a+1=1\qquad\therefore\ a=0$

20) [정답] ①

[해설] (ⅰ) $f(3)=3-1=2$

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(x-1)=2$, $\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}a=a$

따라서 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$a=2$

족보닷컴 zocbo.com
Copyright (c) since 2000 EDUZONE Co,.Ltd all rights reserved
교육지대(주) 서울특별시 구로구 구로동 디지털로33길 55 이앤씨벤처드림타워2차 805호 대표전화 : 1544-5633 FAX : 02-521-0331
I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125