09

여러 가지 부등식

예제 01

부등식 $ax>b$의 풀이

x에 대한 부등식 $ax+b<0$의 해가 $x>2$일 때, x에 대한 부등식

$$(a+b)x+(2a-b)>0$$

을 풀어라.

접근 방법

a가 양수라고 하면 부등식 $ax<-b$의 해는 $x<-\dfrac{b}{a}$이므로 해가 $x>2$가 될 수 없습니다. 그러므로 a는 음수이고 해는 $x>-\dfrac{b}{a}$이므로 $-\dfrac{b}{a}=2$입니다.

Bible 부등식에서 양변에 음수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

$a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

상세 풀이

$ax+b<0$, 즉 $ax<-b$의 해가 $x>2$이므로

$a<0$ ...... ㉠

$-\dfrac{b}{a}=2 \quad \therefore b=-2a$ ...... ㉡

㉡을 x에 대한 부등식 $(a+b)x+(2a-b)>0$에 대입하면

$(a-2a)x+(2a+2a)>0$

$-ax>-4a$

㉠에서 $a<0$이므로 $-a>0$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x>4$

정답 ➡ $x>4$

보충 설명

x에 대한 부등식 $ax>b$를 풀 때에는 다음과 같이 경우를 나누어 각각의 해를 구해야 합니다.

(i) $a>0$일 때, $x>\dfrac{b}{a}$

(ii) $a<0$일 때, $x<\dfrac{b}{a}$

(iii) $a=0$일 때, $\begin{cases} b<0\text{이면 해는 모든 실수} \\ b\geq 0\text{이면 해는 없다.} \end{cases}$

풀이집 p.116

숫자 바꾸기

01-1 x에 대한 부등식 $ax-b>0$의 해가 $x<3$일 때, x에 대한 부등식

$$bx+(3a+b)<0$$

을 풀어라.

표현 바꾸기

01-2 x에 대한 부등식 $(a+b)x+(a-3b)>0$의 해가 $x<\frac{1}{3}$일 때, x에 대한 부등식 $(a-3b)x+(a-4b)>0$의 해를 구하여라.

개념 넓히기 ★☆☆

01-3 x에 대한 부등식 $a(x-1)-b(x-2)>1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

정답 **01-1** $x>-2$ **01-2** $x>-2$ **01-3** $a\leq 1$

예제 02

부등식의 사칙연산

$4\le x\le 8$, $1\le y\le 2$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x+y$ (2) $x-y$

(3) xy (4) $\dfrac{x}{y}$

접근 방법

(1) $x+y$의 값은 x, y의 값이 모두 최소일 때 최소, x, y의 값이 모두 최대일 때 최대입니다.
(2) $x-y$의 값은 x가 최소이고 y가 최대일 때 최소, x가 최대이고 y가 최소일 때 최대입니다.
(3) xy의 값은 x, y의 값이 모두 최소일 때 최소, x, y의 값이 모두 최대일 때 최대입니다.
(4) $\dfrac{x}{y}$의 값은 x가 최소이고 y가 최대일 때 최소, x가 최대이고 y가 최소일 때 최대입니다.

Bible $a\le x\le b$, $c\le y\le d$이면 $\begin{cases} a+c\le x+y\le b+d \\ a-d\le x-y\le b-c \end{cases}$

상세 풀이

(1) 큰 것끼리 더할 때에 가장 크고, 작은 것끼리 더할 때에 가장 작습니다. 따라서 왼쪽 값끼리 더하고 오른쪽 값끼리 더해 주면 됩니다.

$$\begin{array}{rl} & 4\le \ x \ \le 8 \\ +) & 1\le \ y \ \le 2 \\ \hline & 5\le x+y\le 10 \end{array}$$

(2) 큰 것에서 작은 것을 뺄 때에 가장 크고, 작은 것에서 큰 것을 뺄 때에 가장 작습니다. 따라서 좌우로 엇갈려서 빼 주면 됩니다.

$$\begin{array}{rl} & 4\le \ x \ \le 8 \\ -) & 1\le \ y \ \le 2 \\ \hline & 2\le x-y\le 7 \end{array}$$

(3) 큰 것끼리 곱할 때에 가장 크고, 작은 것끼리 곱할 때에 가장 작습니다.

$$\begin{array}{rl} & 4\le \ x \ \le 8 \\ \times) & 1\le \ y \ \le 2 \\ \hline & 4\le \ xy \ \le 16 \end{array}$$

(4) 큰 것을 작은 것으로 나누면 가장 크고, 작은 것을 큰 것으로 나누면 가장 작습니다.

$$\begin{array}{rl} & 4\le \ x \ \le 8 \\ \div) & 1\le \ y \ \le 2 \\ \hline & 2\le \ \dfrac{x}{y} \ \le 8 \end{array}$$

정답 ➡ (1) $5\le x+y\le 10$ (2) $2\le x-y\le 7$ (3) $4\le xy\le 16$ (4) $2\le \dfrac{x}{y}\le 8$

보충 설명

주어진 범위가 양수만 포함할 때는 위와 같이 xy와 $\dfrac{x}{y}$의 값의 범위를 쉽게 정할 수 있지만 범위가 음수를 포함하고 있을 때에는 곱셈과 나눗셈을 할 때 유의해야 합니다. 예를 들어, $-1\le x\le 2$, $1\le y<2$일 때, xy의 값의 범위는 $-1\le xy<4$가 아니라 $-2<xy<4$이고, $\dfrac{x}{y}$의 값의 범위도 $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{x}{y}\le 2$가 아니라 $-1\le\dfrac{x}{y}\le 2$입니다.

풀이집 p.116

숫자 바꾸기

02-1 $3<x\le 6$, $1\le y\le 3$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x+y$

(2) $x-y$

(3) xy

(4) $\frac{x}{y}$

표현 바꾸기

02-2 $|x-3|\le 1$, $|y-5|<2$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하여라.

(1) $xy+2x$

(2) $\frac{x}{y-2}$

09

개념 넓히기 ★☆☆

02-3 $\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2}$, $-1\le y\le\frac{1}{3}$일 때, $a\le xy\le b$라고 하자. 상수 a, b에 대하여 $\frac{2}{ab}$의 값을 구하여라.

정답 **02-1** (1) $4<x+y\le 9$ (2) $0<x-y\le 5$ (3) $3<xy\le 18$ (4) $1<\frac{x}{y}\le 6$

02-2 (1) $10<xy+2x<36$ (2) $\frac{2}{5}<\frac{x}{y-2}<4$ **02-3** -24

예제 03 연립일차부등식

다음 연립부등식의 해를 구하여라.

(1) $\begin{cases} 2(3-x)+8 \geq x-4 \\ \dfrac{2x+1}{3} > \dfrac{-x+3}{2} \end{cases}$ (2) $2(x-2) \leq x+4 \leq 3(x-2)$

접근 방법

(1)에서는 주어진 각각의 일차부등식의 해를 구한 후, 수직선 상에 나타내어 공통부분의 해를 구합니다.
(2)에서는 $f(x)<g(x)<h(x)$의 해는 두 부등식 $f(x)<g(x)$, $g(x)<h(x)$의 각각의 해의 공통부분임을 이용하여 해를 구합니다.

Bible $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$의 해는 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$의 각각의 해의 공통부분이다.

상세 풀이

(1) $2(3-x)+8 \geq x-4$에서

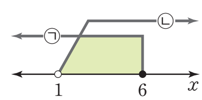
$6-2x+8 \geq x-4$, $-3x \geq -18$ $\quad \therefore x \leq 6$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{2x+1}{3} > \dfrac{-x+3}{2}$에서

$2(2x+1) > 3(-x+3)$, $7x > 7$ $\quad \therefore x > 1$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는

$1 < x \leq 6$



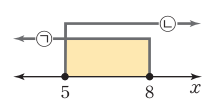
(2) 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 2(x-2) \leq x+4 \\ x+4 \leq 3(x-2) \end{cases}$ 이므로

$2x-4 \leq x+4$에서 $x \leq 8$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$x+4 \leq 3x-6$에서 $-2x \leq -10$ $\quad \therefore x \geq 5$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는

$5 \leq x \leq 8$

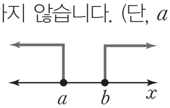


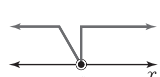
정답 ➡ (1) $1 < x \leq 6$ (2) $5 \leq x \leq 8$

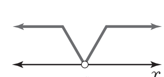
보충 설명

연립부등식에서 해가 존재하지 않는 경우

연립부등식에서 각 일차부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때, 다음과 같이 공통부분이 없으면 연립부등식의 해는 존재하지 않습니다. (단, $a<b$)

(1) $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$ 

(2) $\begin{cases} x < a \\ x \geq a \end{cases}$ 

(3) $\begin{cases} x < a \\ x > a \end{cases}$ 

풀이집 p.117

숫자 바꾸기

03-1 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

(1) $\begin{cases} 6(x+1)>5x+9 \\ \dfrac{x-1}{2}\le\dfrac{x}{3}+1 \end{cases}$

(2) $2(x+1)<4x-2\le3(x+1)+5$

표현 바꾸기

03-2 다음 연립부등식의 해가 아래와 같이 주어졌을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

(1) 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1>3a-5 \\ 2(x-1)\le x+5 \end{cases}$ 의 해가 $2<x\le b$이다.

(2) 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<ax+2 \\ x+b>2x+1 \end{cases}$ 의 해가 $-1<x<3$이다. (단, $a>2$)

09

개념 넓히기 ★★☆

03-3 연립부등식 $\begin{cases} a+4x<2a \\ 3(x+1)\ge x+6 \end{cases}$ 의 해가 존재하지 않도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

정답 **03-1** (1) $3<x\le9$ (2) $2<x\le10$
03-2 (1) $a=4$, $b=7$ (2) $a=7$, $b=4$ **03-3** ①

예제 04

절댓값 기호를 포함한 부등식

다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-2|>2x-1$ (2) $|x|+|x+2|\le 4$

접근 방법

(1)에서는 $x<2$일 때와 $x\ge 2$일 때로 나누어 부등식을 풀고 해당 범위에서 공통 범위를 구한 후, 각 범위에서 구한 해를 합칩니다. (2)에서는 $x<-2$일 때, $-2\le x<0$일 때, $x\ge 0$일 때로 나누어 부등식을 푼 후 해당 범위에서 공통 범위를 구한 후, 각 범위에서 구한 해를 합칩니다.

Bible 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

상세 풀이

(1) (i) $x<2$일 때, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$-(x-2)>2x-1$, $-3x>-3$ $\quad\therefore x<1$

그런데 $x<2$이므로 $x<1$

(ii) $x\ge 2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$x-2>2x-1$, $-x>1$ $\quad\therefore x<-1$

그런데 $x\ge 2$이므로 해는 없습니다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x<1$

(2) (i) $x<-2$일 때, $|x|=-x$, $|x+2|=-(x+2)$이므로

$-x-(x+2)\le 4$, $-2x\le 6$ $\quad\therefore x\ge -3$

그런데 $x<-2$이므로 $-3\le x<-2$

(ii) $-2\le x<0$일 때, $|x|=-x$, $|x+2|=x+2$이므로

$-x+(x+2)\le 4$, $0\cdot x\le 2$ $\quad\therefore$ 해는 모든 실수

그런데 $-2\le x<0$이므로 $-2\le x<0$

(iii) $x\ge 0$일 때, $|x|=x$, $|x+2|=x+2$이므로

$x+(x+2)\le 4$, $2x\le 2$ $\quad\therefore x\le 1$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x\le 1$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3\le x\le 1$

정답 ➡ (1) $x<1$ (2) $-3\le x\le 1$

보충 설명

절댓값 기호를 포함한 부등식의 해는 다음과 같이 간단하게 구할 수 있습니다. (단, $a>0$)

(1) $|x|<a$이면 $-a<x<a$

(2) $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

풀이집 p.118

숫자 바꾸기

04-1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $2|x-3|<2x+5$

(2) $|x+1|+|x-1|>4$

표현 바꾸기

04-2 부등식 $|x-3|+2|x+1|\le 5$를 만족시키는 x의 최솟값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

04-3 $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

정답 **04-1** (1) $x>\frac{1}{4}$ (2) $x<-2$ 또는 $x>2$

04-2 $-\frac{4}{3}$ **04-3** $0\le a\le 1$

연립일차부등식의 활용

예제 05

두 식품 A, B를 각각 100 g씩 섭취했을 때 얻을 수 있는 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다. 두 식품 A, B를 합하여 200 g을 섭취하고, 열량은 360 kcal 이상, 단백질은 13 g 이상을 얻으려고 한다. 식품 A를 섭취할 수 있는 양의 범위를 구하여라.

	열량(kcal)	단백질(g)
식품 A	120	8
식품 B	320	5

접근 방법

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라고 하면 섭취해야 하는 식품 B의 양은 $(200-x)$g입니다. 두 식품 A, B를 각각 1 g씩 섭취했을 때 얻을 수 있는 열량과 단백질의 양을 계산한 후, 문제의 조건에 맞게 연립부등식을 세워 해를 구합니다.

Bible 구하려는 것을 x라 하고, 조건에 맞게 연립부등식을 세워 해를 구한다.

상세 풀이

두 식품 A, B를 각각 1 g씩 섭취하였을 때 얻을 수 있는 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같습니다.

	열량(kcal)	단백질(g)
식품 A	$\frac{120}{100}$	$\frac{8}{100}$
식품 B	$\frac{320}{100}$	$\frac{5}{100}$

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라고 하면 섭취해야 하는 식품 B의 양은 $(200-x)$g이므로

$$\begin{cases} \frac{120}{100}x+\frac{320}{100}(200-x)\geq 360 \\ \frac{8}{100}x+\frac{5}{100}(200-x)\geq 13 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} 12x+32(200-x)\geq 3600 \\ 8x+5(200-x)\geq 1300 \end{cases}$ 을 풀면

$12x+32(200-x)\geq 3600$에서 $20x\leq 2800$ $\quad\therefore x\leq 140$ ······ ㉠

$8x+5(200-x)\geq 1300$에서 $3x\geq 300$ $\quad\therefore x\geq 100$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $100\leq x\leq 140$입니다.

따라서 식품 A를 섭취할 수 있는 양은 100 g 이상 140 g 이하입니다.

정답 ➡ 100 g 이상 140 g 이하

보충 설명

소금물이나 설탕물의 농도에 대한 문제가 나올 때에는 다음 식을 이용하여 부등식을 세웁니다.

$$(\text{소금물(설탕물)의 농도})\,(\%)=\frac{(\text{소금(설탕)의 양})}{(\text{소금물(설탕물)의 양})}\times 100(\%)$$

$$(\text{소금(설탕)의 양})=\frac{(\text{소금물(설탕물)의 농도})}{100}\times(\text{소금물(설탕물)의 양})$$

풀이집 p.119

숫자 바꾸기

05-1

두 식품 A, B를 각각 100 g씩 섭취했을 때 얻을 수 있는 열량과 탄수화물의 양은 오른쪽 표와 같다. 두 식품 A, B를 합하여 600 g을 섭취하고, 열량은 750 kcal 이하, 탄수화물은 18 g 이상을 얻으려고 한다. 식품 A를 섭취할 수 있는 양의 범위를 구하여라.

	열량(kcal)	탄수화물(g)
식품 A	150	6
식품 B	90	2

표현 바꾸기

05-2

1500원짜리 과자와 800원짜리 우유를 합하여 12개를 사려고 한다. 전체 가격은 14700원 이하로 하고, 과자를 우유보다 많이 사려고 할 때, 과자를 몇 개 사면 되는지 구하여라.

09

개념 넓히기 ★★☆

05-3

물 350 g에 설탕 50 g을 넣어 만든 설탕물에 물을 더 넣어서 8 % 이상 12 % 이하의 설탕물을 만들려고 한다. 더 넣어야 하는 물의 양은 최대 몇 g인가?

① 215 g ② 220 g ③ 225 g
④ 230 g ⑤ 235 g

정답 **05-1** 150 g 이상 350 g 이하 **05-2** 7개
05-3 ③

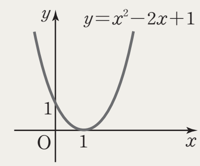
예제 06

이차함수의 그래프와 이차부등식의 해

이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 이차부등식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-2x+1>0$ (2) $x^2-2x+1\geq 0$

(3) $x^2-2x+1<0$ (4) $x^2-2x+1\leq 0$



접근 방법

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ $(ax^2+bx+c<0)$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 $y>0$ $(y<0)$인 x의 값의 범위와 같습니다. 즉, 이차함수의 그래프가 x축보다 위쪽 (아래쪽)에 있는 x의 값의 범위가 이차부등식의 해가 됩니다.

Bible 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
(1) $f(x)=0$의 해는 그래프와 x축의 교점의 x좌표
(2) $f(x)>0$의 해는 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위
(3) $f(x)<0$의 해는 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위

상세 풀이

(1) 이차부등식 $x^2-2x+1>0$의 해는 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위입니다. 따라서 주어진 부등식의 해는 $x\neq 1$인 모든 실수입니다.

(2) 이차부등식 $x^2-2x+1\geq 0$의 해는 모든 실수입니다.

(3) 이차부등식 $x^2-2x+1<0$의 해는 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위입니다. 따라서 주어진 부등식의 해는 없습니다.

(4) 이차부등식 $x^2-2x+1\leq 0$의 해는 $x=1$입니다.

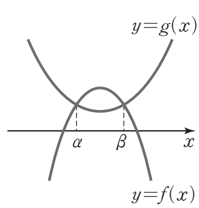
정답 ➡ (1) $x\neq 1$인 모든 실수 (2) 모든 실수 (3) 해가 없다. (4) $x=1$

보충 설명

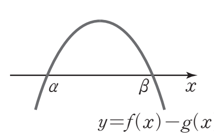
부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 다음과 같이 두 가지 방법으로 구할 수 있습니다.

[방법 1] 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

[방법 2] 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.



[방법 1]



[방법 2]

풀이집 p.120

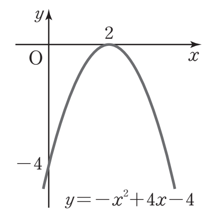
숫자 바꾸기

◆다른 풀이

06-1 이차함수 $y=-x^2+4x-4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 이차부등식의 해를 구하여라.

(1) $-x^2+4x-4>0$ (2) $-x^2+4x-4\geq 0$

(3) $-x^2+4x-4<0$ (4) $-x^2+4x-4\leq 0$

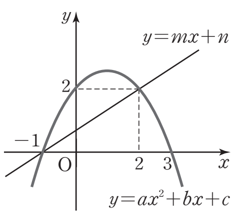


표현 바꾸기

◆보충 설명

06-2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 2)$에서 만날 때, 부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$의 해를 구하여라.

(단, a, b, c, m, n은 상수이다.)



09

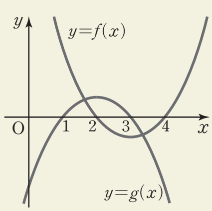
개념 넓히기 ★★☆

06-3 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는?

① $x<1$ 또는 $3<x<4$ ② $1<x<2$ 또는 $3<x<4$

③ $1<x<2$ 또는 $x>4$ ④ $x<1$ 또는 $x>4$

⑤ $1<x<4$



정답 06-1 (1) 해가 없다. (2) $x=2$ (3) $x\neq 2$인 모든 실수 (4) 모든 실수

06-2 $-1<x<2$ 06-3 ②

예제 07

이차부등식의 풀이

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $-x^2-3x+4>0$　　(2) $x^2-4x+1\ge0$

(3) $x^2-2x+4>0$　　(4) $x^2+2x+3<0$

접근 방법

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\ge0$, $ax^2+bx+c\le0$을 풀 때 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하고, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면 $D>0$일 때는 $f(x)$를 인수분해하거나 근의 공식을 이용하여 x의 값의 범위를 구하고, $D=0$ 또는 $D<0$일 때는 완전제곱꼴로 식을 변형하여 x의 값의 범위를 구합니다.

Bible 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 두 실근이 α, β $(\alpha<\beta)$일 때
(1) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
(2) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

상세 풀이

(1) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면

$$x^2+3x-4<0,\ (x+4)(x-1)<0$$

$$\therefore -4<x<1$$

(2) 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 해는

$$x=2\pm\sqrt{3}$$

이므로 $x^2-4x+1\ge0$에서

$$\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}\ge0$$

$$\therefore x\le2-\sqrt{3} \text{ 또는 } x\ge2+\sqrt{3}$$

(3) $x^2-2x+4=(x^2-2x+1)+3=(x-1)^2+3>0$

따라서 $x^2-2x+4>0$의 해는 모든 실수입니다.

(4) $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$

따라서 $x^2+2x+3<0$의 해는 없습니다.

정답 ➡ (1) $-4<x<1$ (2) $x\le2-\sqrt{3}$ 또는 $x\ge2+\sqrt{3}$ (3) 모든 실수 (4) 해가 없다.

보충 설명

(3)에서 이차방정식 $x^2-2x+4=0$은 허근 $x=1\pm\sqrt{3}i$를 가지므로 $\{x-(1-\sqrt{3}i)\}\{x-(1+\sqrt{3}i)\}>0$으로 생각하여 실수에서와 같이 $x<1-\sqrt{3}i$ 또는 $x>1+\sqrt{3}i$로 이차부등식을 풀지 않도록 주의해야 합니다. 왜냐하면 두 수 $1-\sqrt{3}i$와 $1+\sqrt{3}i$는 허수이며 허수에서는 대소 관계가 없기 때문입니다.

풀이집 p.120

숫자 바꾸기

07-1 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $2x^2+5x-12>0$

(2) $3x^2-6x-1\leq 0$

(3) $x^2-4x+5\geq 0$

(4) $-x^2+8x-16<0$

표현 바꾸기

07-2 〈보기〉에서 해가 모든 실수인 부등식만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $x^2+x+1>0$

ㄴ. $4x^2+12x+9>0$

ㄷ. $-9x^2+6x-1\leq 0$

ㄹ. $-x^2+x-1\leq 0$

09

개념 넓히기 ★☆☆

07-3 다음 이차부등식을 풀어라. (단, a는 실수이다.)

(1) $x^2-(a+2)x+2a<0$

(2) $x^2-ax-a-1\geq 0$

정답

07-1 (1) $x<-4$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ (2) $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

(3) 모든 실수 (4) $x\neq 4$인 모든 실수

07-2 ㄱ, ㄷ, ㄹ

07-3 (1) $\begin{cases} a>2\text{일 때, } 2<x<a \\ a=2\text{일 때, 해가 없다.} \\ a<2\text{일 때, } a<x<2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a>-2\text{일 때, } x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq a+1 \\ a=-2\text{일 때, 모든 실수} \\ a<-2\text{일 때, } x\leq a+1 \text{ 또는 } x\geq -1 \end{cases}$

예제 08 해가 주어진 이차부등식

다음 물음에 답하여라.

(1) 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-2<x<1$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

(2) 이차부등식 $ax^2-4x+b\geq 0$의 해가 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

접근 방법

(1)에서 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x+2)(x-1)<0$이고, (2)에서는 해가 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x+1)(x-3)\geq 0$임을 이용하여 a, b의 값을 각각 구합니다.

Bible

해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$$

해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$$

상세 풀이

(1) 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-1)<0 \qquad \therefore x^2+x-2<0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b<0$과 같으므로

$$a=1,\ b=-2$$

(2) 해가 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-3)\geq 0 \qquad \therefore x^2-2x-3\geq 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠과 주어진 부등식의 부등호 방향이 같으므로 $a>0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-2ax-3a\geq 0$

이 부등식이 $ax^2-4x+b\geq 0$과 같으므로

$$-2a=-4,\ -3a=b$$

$$\therefore a=2,\ b=-6$$

정답 ➡ (1) $a=1$, $b=-2$ (2) $a=2$, $b=-6$

보충 설명

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 쉽게 구할 수 있습니다. (1)에서 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-2<x<1$인 것은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $x=-2$ 또는 $x=1$인 것과 같습니다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $-a=(-2)+1=-1$, $b=(-2)\cdot 1=-2$이므로 $a=1$, $b=-2$입니다.

풀이집 p.121

숫자 바꾸기

08-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차부등식 $3x^2+ax+b\le 0$의 해가 $1\le x\le 2$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

(2) 이차부등식 $ax^2+x+b<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

표현 바꾸기

08-2 이차부등식 $ax^2+bx-2>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<2$일 때, x에 대한 부등식 $(a+b)x+ab+1\ge 0$의 해를 구하여라.

09

개념 넓히기 ★★☆

08-3 부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+b<0$의 해와 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

정답
08-1 (1) $a=-9$, $b=6$ (2) $a=-1$, $b=6$
08-2 $x\ge 5$
08-3 14

예제 09

이차부등식이 항상 성립할 조건

다음 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2-2(k-1)x+4\geq 0$　　　　(2) $kx^2+2kx-2<0$

접근 방법

(1)에서는 x^2의 계수가 양수이므로 판별식 $D\leq 0$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 되고, (2)에서는 이차부등식이라는 조건이 없으므로 $k=0$일 때와 $k\neq 0$일 때로 나누어서 생각해야 합니다. 또한 $k\neq 0$일 때, x^2의 계수는 음수이고 판별식 $D<0$이어야 함을 이용하여 k의 값의 범위를 구합니다.

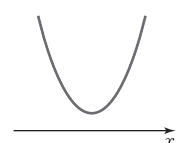
Bible
모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이려면
$a>0,\ D=b^2-4ac\leq 0$
모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이려면
$a<0,\ D=b^2-4ac<0$

상세 풀이

(1) x^2의 계수가 양수이므로 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+4=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D\leq 0$이어야 합니다. 즉,

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\cdot 4\leq 0,\ k^2-2k-3\leq 0$$

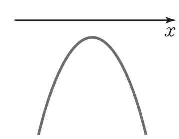
$$(k+1)(k-3)\leq 0\qquad \therefore\ -1\leq k\leq 3$$



(2) (i) $k=0$일 때, 주어진 부등식은 $0\cdot x^2+0\cdot x-2<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립합니다.

(ii) $k\neq 0$일 때, 주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k<0$이고, 이차방정식 $kx^2+2kx-2=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D<0$이어야 합니다. 즉,

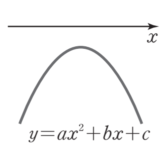
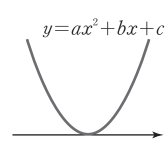
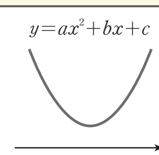
$$\frac{D}{4}=k^2-k\cdot(-2)<0,\ k(k+2)<0\qquad \therefore\ -2<k<0$$



(i), (ii)에서 $-2<k\leq 0$

정답 ➡ (1) $-1\leq k\leq 3$　(2) $-2<k\leq 0$

보충 설명

이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 존재하지 않을 조건	이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 존재하지 않을 조건
	 
$a<0,\ D=b^2-4ac<0$	$a>0,\ D=b^2-4ac\leq 0$

풀이집 p.122

숫자 바꾸기

09-1 다음 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) $3x^2-6x-k\geq 0$　　(2) $kx^2+4x+(k+3)<0$

표현 바꾸기

09-2 x에 대한 부등식 $ax^2+ax-1<0$의 해가 모든 실수일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

09

개념 넓히기 ★★☆

09-3 x에 대한 이차부등식 $x^2-4ax+a^2-2a+1<0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

정답 **09-1** (1) $k\leq -3$ (2) $k<-4$　**09-2** $-4<a\leq 0$
09-3 $-1\leq a\leq \frac{1}{3}$

예제 10

이차부등식의 활용

지면에서 70 m/초의 속도로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이를 h m라고 할 때, $h=70t-5t^2$인 관계가 성립한다고 한다. 이 물체가 지면으로부터 120 m 이상의 높이에 떠 있는 시간은 몇 초 동안인지 구하여라.

접근 방법

t초 후의 물체의 높이인 h에 대한 관계식이 주어져 있고, 120 m 이상의 높이에 떠 있는 시간을 구하는 것이므로 $h\geq120$이어야 함을 이용합니다.

Bible 주어진 관계식에서 조건에 맞게 부등식을 세워서 푼다.

상세 풀이

물체가 지면으로부터 120 m 이상의 높이에 떠 있는 시간은

$h=70t-5t^2$에서 $h\geq120$이므로

$$70t-5t^2\geq120$$
$$-5t^2+70t-120\geq0$$
$$5t^2-70t+120\leq0$$
$$t^2-14t+24\leq0$$
$$(t-2)(t-12)\leq0$$
$$\therefore 2\leq t\leq12$$

따라서 이 물체가 지면으로부터 120 m 이상의 높이에 떠 있는 시간은 2초에서 12초까지, 즉 10초 동안입니다.

정답 ➡ 10초

보충 설명

실생활 활용 문제는 관계식이 주어진 경우와 관계식을 찾아야 하는 경우로 나눌 수 있으며, 관계식이 주어진 경우는 주어진 관계식에서 조건에 맞게 식을 세워서 풀고, 관계식을 찾아야 하는 경우는 미지수를 정하고 주어진 조건에 빠짐이 없는지를 잘 따져 보며 식을 세워서 풉니다. 또한 부등식을 풀고 나서는 변수에 제한된 범위가 있는지 꼭 확인해 보아야 합니다.

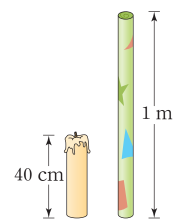
풀이집 p.123

숫자 바꾸기

10-1 리듬 체조 선수가 바닥에서 1 m 높이의 위치에서 공을 위로 던져 올릴 때, t초 후의 공의 높이를 $h\text{ m}$라고 하면 $h=-5t^2+14t+1$인 관계가 성립한다. 공이 바닥으로부터 9 m 이상의 높이에 떠 있는 시간은 몇 초 동안인지 구하여라.

표현 바꾸기

10-2 오른쪽 그림과 같이 길이가 40 cm인 초와 길이가 1 m인 종이로 만든 봉에 불을 붙이면 초는 x분 동안 $\frac{x}{2}\text{ cm}$가 타고, 종이 봉은 $\frac{x^2+3x}{2}\text{ cm}$가 탄다고 한다. 초와 종이 봉에 동시에 불을 붙일 때, 종이 봉의 길이가 초의 길이 이하가 되는 것은 몇 분 후부터인지 구하여라.



09

개념 넓히기 ★★☆

10-3 어떤 약의 어른에 대한 적정 투여량이 정해져 있을 때, 어린이에 대한 적정 투여량을 결정하는 여러 방식이 있다. 어린이의 나이를 n, 이 약의 어린이에 대한 적정 투여량과 어른에 대한 적정 투여량을 각각 x, y라고 할 때, [방식 A], [방식 B]는 각각

$$[\text{방식 A}]\ x=\frac{3n-8}{2}y,\quad [\text{방식 B}]\ x=\frac{n(n-1)}{6}y$$

인 관계가 성립한다고 한다. [방식 A]에 의한 어린이에 대한 적정 투여량이 [방식 B]에 의한 어린이에 대한 적정 투여량 이상이 되는 나이는 몇 세부터 몇 세까지인지를 구하여라.

(단, 적정 투여량이 0인 경우는 없다.)

정답 **10-1** $\frac{6}{5}$초 **10-2** 10분 **10-3** 4세부터 6세까지

예제 11

연립이차부등식의 풀이

다음 연립부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-3x-10<0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \end{cases}$　　　(2) $x+2<x^2\leq 5x-4$

접근 방법

(1)에서는 각각의 이차부등식의 해를 구한 후 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구합니다. (2)에서는 부등식을 연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x^2-5x+4\leq 0 \end{cases}$으로 변형하여 각각의 이차부등식의 해를 구한 후, 공통부분을 구합니다.

Bible 연립부등식의 해는 수직선을 이용하여 공통부분을 구한다.

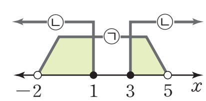
상세 풀이

(1) $x^2-3x-10<0$에서 $(x+2)(x-5)<0$　　$\therefore -2<x<5$　　…… ㉠

$x^2-4x+3\geq 0$에서 $(x-1)(x-3)\geq 0$　　$\therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는

$-2<x\leq 1$ 또는 $3\leq x<5$



(2) 주어진 부등식에서 $\begin{cases} x+2<x^2 \\ x^2\leq 5x-4 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x^2-5x+4\leq 0 \end{cases}$이므로

$x^2-x-2>0$에서

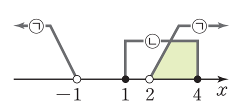
$(x+1)(x-2)>0$　　$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$　　…… ㉠

$x^2-5x+4\leq 0$에서

$(x-1)(x-4)\leq 0$　　$\therefore 1\leq x\leq 4$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는

$2<x\leq 4$



정답 ➡ (1) $-2<x\leq 1$ 또는 $3\leq x<5$　(2) $2<x\leq 4$

보충 설명

수직선 위에 부등식의 범위를 나타낼 때에는 경계점이 범위에 속할 때(•)와 속하지 않을 때(∘)를 구분하여 나타내도록 합니다.

풀이집 p.124

숫자 바꾸기

11-1 다음 연립부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-x-12<0 \\ x^2-5x+4\geq 0 \end{cases}$

(2) $2x+1\leq x^2<-2x+15$

표현 바꾸기

11-2 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-(a+4)x+4a\leq 0 \end{cases}$ 의 해가 $3<x\leq 4$가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

09

개념 넓히기 ★★☆

11-3 연립부등식 $\begin{cases} x^2-ax+b\leq 0 \\ x^2-x-a>0 \end{cases}$ 의 해가 $2<x\leq 3$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

정답 **11-1** (1) $-3<x\leq 1$ (2) $-5<x\leq 1-\sqrt{2}$ 또는 $1+\sqrt{2}\leq x<3$
11-2 $-1\leq a\leq 3$ **11-3** 13

예제 12

두 근이 k보다 클(작을) 조건

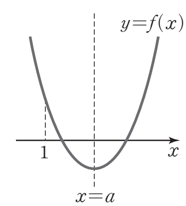
이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

접근 방법

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 두 근이 모두 1보다 크다는 것은 이차함수 $y=x^2-2ax+3a$의 그래프가 x축과 만나는 두 교점의 x좌표가 모두 1보다 크다는 것을 뜻합니다.
따라서 두 교점의 x좌표가 모두 1보다 큰 이차함수 $y=x^2-2ax+3a$의 그래프를 그려 보고 그래프에서 (i) 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식의 부호 (ii) 그래프의 축의 방정식 (iii) $x=1$에서의 함숫값의 부호를 확인해 봅시다.

Bible 이차방정식의 두 근의 존재 범위를 판별하기 위해서는 다음 세 가지 조건을 확인해야 한다.
(i) 판별식의 부호 (ii) 축의 방정식 (iii) 경계점에서의 함숫값의 부호

상세 풀이



$f(x)=x^2-2ax+3a$라고 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.
(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot 3a\geq 0$$

$a^2-3a\geq 0$, $a(a-3)\geq 0$ $\quad\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq 3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

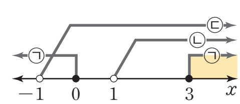
(ii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\dfrac{-2a}{2\cdot 1}=a$이므로

$a>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $f(1)=1-2a+3a>0$에서 $a+1>0$ $\quad\therefore a>-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

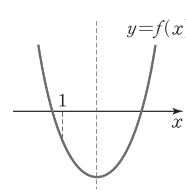
㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$a\geq 3$



정답 ➡ $a\geq 3$

보충 설명



이차방정식의 실근의 존재 범위를 판별하기 위한 Bible 의 세 조건 중 어느 하나만 빠져도 문제의 조건을 만족시키지 않는 그래프가 생길 수 있습니다.
예를 들어, 오른쪽 그림과 같이 조건 (i), (ii)는 만족시키지만 조건 (iii)을 만족시키지 않는 경우에는 두 실근 중 한 실근이 1보다 작은 그래프가 생깁니다.
일반적으로 축의 위치나 함숫값의 부호를 따질 때에 기준이 되는 것은 문제에서 주어진 경계점 (위의 문제에서는 $x=1$)입니다.

풀이집 p.125

숫자 바꾸기

12-1 이차방정식 $x^2+2ax+3a+4=0$의 두 근이 모두 -1보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

표현 바꾸기

12-2 이차방정식 $x^2-2x+m=0$의 두 근이 모두 이차방정식 $x^2-4x-5=0$의 두 근 사이에 있을 때, 정수 m의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

개념 넓히기 ★★☆

12-3 이차방정식 $2x^2-2(m-1)x+m-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $-1<\alpha\le\beta<1$이 성립할 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

정답 **12-1** $a\ge4$ **12-2** ③ **12-3** $\frac{1}{3}<m\le1$

예제 13

두 근 사이에 k가 있을 조건

x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+a^2-5=0$의 두 근 사이에 1이 있을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

접근 방법

이차방정식 $x^2-3ax+a^2-5=0$의 두 근 사이에 1이 있다는 것은 이차함수 $y=x^2-3ax+a^2-5$의 그래프가 x축과 만나는 두 교점의 x좌표 사이에 1이 있다는 것을 뜻합니다.
따라서 두 교점의 x좌표 사이에 1이 있도록 이차함수 $y=x^2-3ax+a^2-5$의 그래프를 그려 보고 그래프에서 $x=1$에서의 함숫값의 부호를 확인해 봅시다.

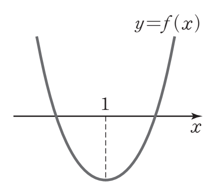
Bible **이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 두 근 사이에 k가 있을 때, $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면 $f(k)<0$**

상세 풀이

$f(x)=x^2-3ax+a^2-5$라고 하면
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.
따라서 $f(1)=1-3a+a^2-5<0$에서

$a^2-3a-4<0$, $(a+1)(a-4)<0$

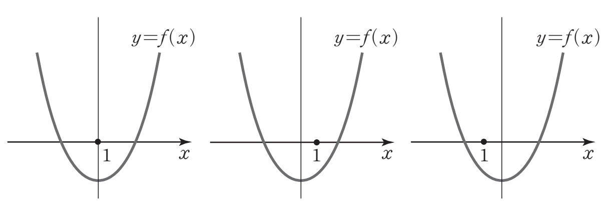
$\therefore -1<a<4$



정답 ➡ $-1<a<4$

보충 설명

일반적으로 이차방정식의 근의 존재 범위에 대한 문제에서 **예제 12** Bible 에 있는 세 가지 사항을 모두 조사해야 하지만, 위의 문제처럼 '두 근 사이에 p가 있다.'의 유형은 다른 것과는 달리 판별식이나 축의 방정식을 생각할 필요가 없습니다.
왜냐하면 x^2의 계수가 양수이고 $f(p)<0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 당연히 x축과 서로 다른 두 점에서 만나게 되어 $D>0$이 항상 성립하기 때문입니다.
또한 축의 방정식만으로는 다음 그림과 같이 그 위치를 정할 수 없으므로 고려할 필요가 없습니다.



풀이집 p.126

숫자 바꾸기

13-1 x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-a^2+7=0$의 두 근 사이에 -1이 있을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

표현 바꾸기

13-2 x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-2<\beta<1$이 성립할 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$ ② $-2<a<1$ ③ $0<a<1$
④ $1<a<2$ ⑤ $1<a<3$

09

개념 넓히기 ★★☆

13-3 x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+a^2-7=0$의 두 근이 이차부등식 $x^2-1\geq0$의 해의 범위에 존재하도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라. (단, 두 근의 부호는 서로 다르다.)

정답 **13-1** $a<-4$ 또는 $a>2$ **13-2** ⑤ **13-3** 5