

6. 다음 식을 계산한 값이 1이 아닌 것을 고르시오.

- ① $\frac{1}{3}\log_2 \frac{8}{7} + \log_2 \sqrt[3]{7}$
 ② $2\log_5 \sqrt{45} - \log_5 \frac{9}{125}$
 ③ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log_{10} 2500 + \log_{10} 6 - \log_{10} 3 \right)$
 ④ $\log_a b + \frac{1}{2} \log_a a^2 b - \log_a b \sqrt{b}$
 ⑤ $\frac{1}{2} (\log_{abc} a^2 + \log_{abc} b^2 + \log_{abc} c^2)$

[문제]

7. $\log_{16} 8 = a$, $\log_{\frac{1}{27}} 9 = b$ 일 때, $\log_{(-ab)} \frac{a}{3}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1
 ③ 0 ④ 1
 ⑤ 2

[문제]

8. $\log_3 15 \times \log_5 15 - \log_3 5 - \log_5 3$ 의 값은?

- ① 1 ② 2
 ③ 3 ④ 4
 ⑤ 5

[예제]

9. $\log_6 2 = a$, $\log_5 6 = b$ 일 때, $\log_5 40$ 을 a , b 로 나타내시오.

- ① $a^3 + b$ ② $\frac{a^3}{b}$
 ③ $3a + b$ ④ $\frac{3a}{b}$
 ⑤ $3ab + 1$

[문제]

10. $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\log_{10} 18 = a + 2b$ ② $\log_2 24 = \frac{3a+b}{a}$
 ③ $\log_{27} \sqrt{8} = \frac{a}{2b}$ ④ $\log_5 108 = \frac{2a+3b}{1-a}$
 ⑤ $\log_6 15 = \frac{1+a-b}{a+b}$

평가문제

[스스로 확인하기]

11. 다음 중 빈 칸에 들어갈 것으로 알맞은 것을 모두 고르면?

$a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ 일 때

(1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

(2) $\log_a MN = \text{ (가) }$

(3) $\log_a \frac{M}{N} = \text{ (나) }$

(4) $\log_a M^k = \text{ (다) }$ (단, k 는 실수)

① (가) $\log_a M \times \log_a N$ ② (가) $\log_a M + \log_a N$

③ (나) $\log_a M - \log_a N$ ④ (나) $\frac{\log_a M}{\log_a N}$

⑤ (다) $(\log_a M)^k$

[스스로 확인하기]

12. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $3^5 = 243 \iff \log_3 243 = 5$

② $2^{-4} = \frac{1}{16} \iff \log_2 \frac{1}{16} = -4$

③ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16 \iff \log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$

④ $10^0 = 1 \iff \log_{10} 1 = 0$

⑤ $13^{\frac{1}{2}} = \sqrt{13} \iff \log_{\sqrt{13}} 13 = \frac{1}{2}$

[스스로 확인하기]

13. 다음 식의 값은?

$$\left(\log_3 \frac{1}{2} - \log_3 \frac{3}{2}\right) + \left(\log_3 \frac{3}{4} - \log_3 \frac{5}{4}\right) + \left(\log_3 \frac{5}{6} - \log_3 \frac{7}{6}\right) + \dots + \left(\log_3 \frac{23}{24} - \log_3 \frac{25}{24}\right) + \left(\log_3 \frac{25}{26} - \log_3 \frac{27}{26}\right)$$

- ① -3 ② -1
③ 1 ④ 3
⑤ 5

[스스로 확인하기]

14. $\log_3 2 = a$, $\log_5 2 = b$ 일 때, $\log_5 30$ 을 a , b 에 관하여 나타낸 것은?

- ① $a^2 + ab + a$ ② $b^2 + ab + b$
③ $b + 1 + \frac{b}{a}$ ④ $b + 1 + \frac{a}{b}$
⑤ $1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{a}$

[스스로 확인하기]

15. $\log_2 \sqrt{9} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{5} + \frac{3}{2} \log_8 45 = p \log_2 q$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

- ① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

[스스로 확인하기]

16. 다음은 $\log_{10} 5$ 는 유리수가 아님을 보이는 과정이다. 빈칸에 들어갈 말로 알맞은 것을 고르시오.

결론을 부정하여 $\log_{10} 5$ 가 유리수라 하자.

두 자연수 p , q 가 서로소일 때

$$\log_{10} 5 = \frac{p}{q} \quad (p < q) \text{ 라 하면}$$

로그의 정의에 따라 $10^{\frac{p}{q}} = 5$, $10^p = 5^q$ 이므로

$$2^p 5^p = 5^q, \text{ 즉 } 2^p = \boxed{\text{(가)}}$$

그런데 $\boxed{\text{(가)}}$ 은/는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고,

2^p 은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이므로 2^p 과 $\boxed{\text{(가)}}$ 은/는 항상 같지 않다. 따라서 $\log_{10} 5$ 는 유리수가 아니다.

- ① (가) 5^{p-q} , (나) 홀수, (다) 짝수
② (가) 5^{p-q} , (나) 짝수, (다) 짝수
③ (가) 5^{p-q} , (나) 홀수, (다) 홀수
④ (가) 5^{q-p} , (나) 짝수, (다) 홀수
⑤ (가) 5^{q-p} , (나) 홀수, (다) 짝수

[스스로 마무리하기]

17. $\log_4 3 \sqrt{2} - \log_4 2 \sqrt{2} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$
③ 0 ④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

[스스로 마무리하기]

18. 다음 이차방정식의 두 실근을 α , β 라 할 때, $\log_2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$ 의 값은?

$$x^2 - 2(\log 2 + \log 3)x + \log 12 - \log 2 = 0$$

- ① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2



정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $2^6 = 64$ 를 로그를 사용하여 나타내면

$$\log_2 64 = 6 \text{ 이므로 } a = 2, b = 64, c = 6 \text{ 이다.}$$

또한, $\log_3 27 = 3$ 을 지수를 사용하여 나타내면

$$3^3 = 27 \text{ 이므로 } p = 3, q = 3, r = 27 \text{ 이다.}$$

따라서

$$b - (ap + cq + r) = 64 - (2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 27) = 13 \text{ 이다}$$

2) [정답] ②

[해설] $\log_a 81 = 4$ 에서 $a^4 = 81$ 이다.

이때, $3^4 = 81$ 이므로 $a = 3$ 이다.

또 $\log_2 b = 5$ 에서 $2^5 = 32 = b$ 이다.

또 $\log_4 64 = c$ 에서 $4^c = 64$ 이다.

이때, $4^3 = 64$ 이므로 $c = 3$ 이다.

따라서 $ac + b = 3 \cdot 3 + 32 = 41$ 이다.

3) [정답] ③

[해설] ① $\sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$ 이므로 $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$ 이다.

② $0.1 = 10^{-1}$, $1000 = 10^3$ 이므로 $1000 = (0.1)^{-3}$ 이다. 따라서 $\log_{0.1} 1000 = -3$ 이다.

③ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $8 = 2^3$ 이므로 $8 = 2^3 = (\sqrt{2})^6$ 이다. 따라서 $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$ 이다.

④ $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, $9 = 3^2$ 이므로 $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 이다. 따라서 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ 이다.

⑤ $32 = 2^5$, $8 = 2^3$ 이므로 $8 = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 32^{\frac{3}{5}}$ 이다.

따라서 $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$ 이다.

4) [정답] ①

[해설] $a = \log_{12} 8 + \log_{12} 2 + \log_{12} 9 = \log_{12} (2^3 \cdot 2 \cdot 3^2)$

$$= \log_{12} (2^3 \cdot 2 \cdot 3^2) = \log_{12} (2^2 \cdot 3)^2 = 2$$

$$b = \log_6 \sqrt{54} - \log_6 3 = \log_6 \frac{3\sqrt{6}}{3} = \log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = 1$$

5) [정답] ②

[해설]

$$a - b = \frac{1}{2} \log_6 3 - 2 \log_5 \sqrt{10} - \left(\log_5 \frac{1}{2} - \log_6 \sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_6 3 + \log_6 \sqrt{2} - 2 \log_5 \sqrt{10} - \log_5 \frac{1}{2}$$

$$= \log_6 \sqrt{3} + \log_6 \sqrt{2} - \left(\log_5 10 + \log_5 \frac{1}{2} \right)$$

$$= \log_6 \sqrt{6} - \log_5 5 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

6) [정답] ②

[해설] ① $\frac{1}{3} \log_2 \frac{8}{7} + \log_2 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log_2 \frac{8}{7} + \frac{1}{3} \log_2 7$

$$= \frac{1}{3} \left(\log_2 \frac{8}{7} + \log_2 7 \right) = \frac{1}{3} \left(\log_2 \frac{8}{7} \cdot 7 \right) = \frac{1}{3} \log_2 8 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \log_5 \sqrt{45} - \log_5 \frac{9}{125} = \log_5 (\sqrt{45})^2 - \log_5 \frac{9}{125}$$

$$= \log_5 45 \cdot \frac{125}{9} = \log_5 5^4 = 4$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log_{10} 2500 + \log_{10} 6 - \log_{10} 3 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_{10} 50 + \log_{10} 6 - \log_{10} 3) = \frac{1}{2} \log_{10} 50 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \log_{10} 100 = 1$$

$$\textcircled{4} \quad \log_a b + \frac{1}{2} \log_a a^2 b - \log_a b \sqrt{b}$$

$$= \log_a b + \log_a a \sqrt{b} - \log_a b \sqrt{b} = \log_a \left(b \cdot a \sqrt{b} \cdot \frac{1}{b \sqrt{b}} \right)$$

$$= \log_a a = 1$$

⑤

$$\frac{1}{2} (\log_{abc} a^2 + \log_{abc} b^2 + \log_{abc} c^2) = \frac{1}{2} \{ \log_{abc} (abc)^2 \}$$

$$= 1$$

7) [정답] ⑤

[해설] $16 = 2^4$, $8 = 2^3$ 이므로

$$\log_{16} 8 = \log_{2^4} 2^3 = \frac{3}{4} = a$$

$$\frac{1}{27} = 3^{-3}, 9 = 3^2 \text{ 이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{27}} 9 = \log_{3^{-3}} 3^2 = -\frac{2}{3} = b$$

$$\therefore \log_{(-ab)} \frac{a}{3} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$$

8) [정답] ②

[해설] $\log_3 15 \times \log_5 15 - \log_3 5 - \log_5 3$

$$= (1 + \log_3 5)(1 + \log_5 3) - \log_3 5 - \log_5 3$$

$$= 1 + \log_3 5 + \log_5 3 + \log_3 5 \times \log_5 3 - \log_3 5 - \log_5 3$$

$$= 1 + \log_3 5 \times \log_5 3 = 2$$

9) [정답] ⑤

[해설] $\log_5 40 = \frac{\log_6 40}{\log_6 5}$

$\log_6 40$ 을 a , b 로 나타내면

$$\log_6 40 = \log_6 (2^3 \times 5) = 3 \log_6 2 + \log_6 5$$

$$= 3a + \frac{1}{b} \quad \left(\because \log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} \right)$$

따라서 $\log_5 40$ 을 a , b 로 나타내면

$$\frac{3a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{b}} = 3ab + 1$$

[다른 풀이] $ab = \log_5 6 \times \log_6 2 = \log_5 2$

$$\therefore \log_5 40 = \log_5 (2^3 \times 5) = 3ab + 1$$

10) [정답] ⑤

[해설] ① $\log_{10} 18 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2 = a + 2b$

$$\textcircled{2} \log_2 24 = \frac{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{3a + b}{a}$$

$$\textcircled{3} \log_{27} \sqrt{8} = \frac{\log_{10} 2^{\frac{3}{2}}}{\log_{10} 3^3} = \frac{\frac{3}{2}a}{3b} = \frac{a}{2b}$$

④

$$\begin{aligned} \log_5 108 &= \frac{\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3^3}{\log_{10} 5} = \frac{2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} \\ &= \frac{2a + 3b}{1 - a} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \log_6 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 6} = \frac{\log_{10} 3 + \log_{10} 5}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} = \frac{1 - a + b}{a + b}$$

11) [정답] ②, ③

[해설] $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때

$$(1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$(2) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(4) \log_a M^k = k \log_a M \quad (\text{단, } k \text{는 실수})$$

12) [정답] ⑤

$$[\text{해설}] 13^{\frac{1}{2}} = \sqrt{13} \iff \log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2}$$

13) [정답] ①

$$\begin{aligned} [\text{해설}] & \left(\log_3 \frac{1}{2} - \log_3 \frac{3}{2} \right) + \left(\log_3 \frac{3}{4} - \log_3 \frac{5}{4} \right) \\ & + \dots + \left(\log_3 \frac{23}{24} - \log_3 \frac{25}{24} \right) + \left(\log_3 \frac{25}{26} - \log_3 \frac{27}{26} \right) \\ & = \log_3 \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \dots \times \frac{23}{25} \times \frac{25}{27} \right) \\ & = \log_3 \frac{1}{27} = -3 \end{aligned}$$

14) [정답] ③

$$[\text{해설}] \log_2 3 = \frac{1}{a}, \log_2 5 = \frac{1}{b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 30}{\log_2 5} &= \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 5} = \frac{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{b}} \\ &= \frac{ab + a + b}{a} = b + 1 + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

15) [정답] ②

$$\begin{aligned} [\text{해설}] & \log_2 \sqrt{9} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{5} + \frac{3}{2} \log_2 45 \\ & = \log_2 \sqrt{9} + \log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\log_2 45}{\log_2 8} \\ & = \log_2 3 + \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} + \log_2 \sqrt{45} = \log_2 9 = 2 \log_2 3 \\ & \text{따라서 } p = 2, q = 3 \text{이므로 } p + q = 5 \end{aligned}$$

16) [정답] ⑤

[해설] 결론을 부정하여 $\log_{10} 5$ 가 유리수라 하자.

두 자연수 p, q 가 서로소일 때

$$\log_{10} 5 = \frac{p}{q} \quad (p < q) \text{라 하면 로그의 정의에 따라}$$

$$10^{\frac{p}{q}} = 5, 10^p = 5^q$$

$$\text{이므로 } 2^p 5^p = 5^q, \text{ 즉 } 2^p = \frac{5^q}{5^p} = \boxed{5^{q-p}}$$

그런데 $\boxed{5^{q-p}}$ 은/는 $\boxed{\text{홀수}}$ 이고, 2^p 은 $\boxed{\text{짝수}}$ 이

므로 2^p 과 $\boxed{5^{q-p}}$ 은/는 항상 같지 않다.

따라서 $\log_{10} 5$ 는 유리수가 아니다.

17) [정답] ②

$$\begin{aligned} [\text{해설}] & \log_4 3 \sqrt{2} - \log_4 2 \sqrt{2} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & = \log_4 3 \sqrt{2} - \log_4 2 \sqrt{2} + \log_4 \frac{1}{3} \\ & = \log_4 \left(3 \sqrt{2} \div 2 \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \right) \\ & = \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

18) [정답] ④

[해설] x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - 2(\log 2 + \log 3)x + \log 12 - \log 2 = 0 \text{의 두 근을}$$

α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2(\log 2 + \log 3) = 2 \log 6,$$

$$\alpha \beta = \log 12 - \log 2 = \log 6$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{2 \log 6}{\log 6} = 2$$

$$\therefore \log_2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = \log_2 2 = 1$$