01 원과 직선의 위치관계

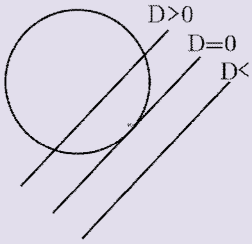
(1) 판별식 이용

원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

① $D>0$ ➔ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ ➔ 한 점에서 만난다.

③ $D<0$ ➔ 만나지 않는다.

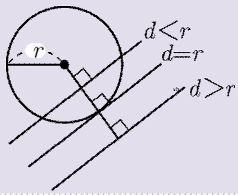


(2) 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

① $d<r$ ➔ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ➔ 한 점에서 만난다.

③ $d>r$ ➔ 만나지 않는다.



◪ 원 O와 직선 l의 방정식이 다음과 같을 때, 원 O와 직선 l의 위치관계를 말하여라.

1. $O: x^2+y^2=1, l: y=2x+3$

2. O: $x^2+y^2=1$, l: $y=2x+4$

3. O: $x^2+y^2=2$, l: $y=-3x-5$

4. O: $x^2+y^2=4$, l: $y=-x+1$

5. O: $x^2+y^2=4$, l: $3x+4y+4=0$

6. $O: x^2+y^2=5$, $l: 2x+y-5=0$

7. O: $x^2+y^2=9$, l: $y=2x+1$

8. $O: x^2+y^2=10, l: y=x-1$

9. $O: (x-3)^2+(y+2)^2=6$, $l: 3x-y-1=0$

10. $O: x^2+y^2+2x-4y-13=0$, $l: x-y-3=0$

11. $O: x^2+y^2+2x-4y-4=0, l: x-2y+2=0$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

12. O: $x^2+y^2-2x+6y=0$, l: $x+3y-2=0$

13. $O: x^2+y^2-3x+y-2=0, l: x+y-4=0$

14. O: $x^2+y^2-4x-2y+4=0$, l: $3x+4y=0$

15. $O: x^2+y^2+4x-3y-6=0$, $l: x-2y+1=0$

16. O: $x^2+y^2+4x+6y+3=0$, l: $x=2$

17. $O: x^2+y^2+10x+2y+17=0$, $l: x+2y+3=0$

◪ **다음 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.**

18. $x^2+y^2=2$, $y=x+k$

19. $x^2+y^2=2$, $y=2x+k$

20. $x^2+y^2=4, y=3x+k$

21. $x^2+y^2=4, 3x+4y+k=0$

22. $x^2+y^2=5, y=2x+k$

23. $x^2+y^2=5$, $y=kx-3$

24. $x^2+y^2=9$, $y=x+k$

25. $x^2+y^2=9, y=-x+k$

26. $x^2+y^2=9$, $y=\sqrt{3}x+k$

27. $x^2+y^2=k^2$, $y=2x+3$

28. $(x-1)^2+y^2=2, y=x+k$

29. $(x-2)^2+y^2=2, y=-x+k$

30. $(x-4)^2+y^2=16$, $y=kx+2$

31. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$, $y=x+k$

32. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$, $y=kx$

33. $(x+7)^2+(y-3)^2=36$, $3x-4y+k=0$

34. $x^2+y^2-2x=0$, $kx-y+1=0$

35. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$, $y=2x+k$

36. $x^2+y^2-6x+4y+5=0, y=x+2k$

37. $x^2+y^2-6x-4y+8=0, y=2x+k$

38. $x^2+y^2+6x-2y+5=0, y=-2x-k$

◪ 다음 원과 직선이 접할 때, 실수 k의 값을 구하여라.

39. $x^2+y^2=1, y=x+k$

40. $x^2+y^2=4, y=3x+k$

41. $x^2+y^2=4, x-y+k=0$

42. $x^2+y^2=5$, $y=2x+k$

43. $x^2+y^2=8, y=-2x+k$

44. $x^2+y^2=9$, $x-y+k=0$

45. $x^2+y^2=9$, $y=kx+5$

46. $x^2+y^2=10, y=3x+k$

47. $(x-1)^2+y^2=2, y=x+k$

48. $x^2+(y+3)^2=10$, $x+3y+k=0$

49. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$, $y=x+k$

50. $(x+1)^2+(y-2)^2=2, y=x+k$

51. $(x-1)^2+(y-3)^2=9$, $2x-y+k=0$

52. $(x-1)^2+(y-4)^2=20$, $2x+y+k=0$

53. $(x+7)^2+(y-3)^2=36$, $3x-4y+k=0$

54. $x^2+y^2-4x+2y=0, y=-2x-k$

55. $x^2+y^2-4x-6y+8=0$, $x+2y+k=0$

56. $x^2+y^2-6x+4y+5=0, y=x+2k$

◪ **다음 원과 직선이 만나지 않을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.**

57. $x^2+y^2=1$, $y=k(x-3)$

58. $x^2+y^2=1$, $y=-kx-2$

59. $x^2+y^2=2, x-y+k=0$

60. $x^2+y^2=4, y=-2x+k$

61. $x^2+y^2=4$, $y=3x+k$

62. $x^2+y^2=9$, $x-y+k=0$

63. $x^2+y^2=9, 3x-4y+k=0$

64. $(x-1)^2+y^2=2, y=x+k$

65. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$, $y=x+k$

66. $(x+7)^2+(y-3)^2=36$, $3x-4y+k=0$

67. $x^2+y^2=k$, $y=-x+1$

68. $(x-k)^2+y^2=1$, $x+y=2$

69. $x^2+(y-k)^2=10$, $y=x-1$

70. $x^2+y^2-2x-2y=0, y=-x+k$

71. $x^2+y^2-4x+6y+11=0, y=-x+k$

72. $x^2+y^2-6x+4y+5=0, y=x+2k$

정답 및 해설

1) 만나지 않는다.
⇨ $y=2x+3$을 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면
$5x^2+12x+8=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=6^2-5\cdot8=-4<0$
따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

2) 만나지 않는다.
⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면
$x^2+(2x+4)^2=1$, $x^2+4x^2+16x+16=1$
$\therefore 5x^2+16x+15=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=8^2-5\cdot15=-11<0$
따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

3) 만나지 않는다.
⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면
$x^2+(-3x-5)^2=2$, $x^2+9x^2+30x+25=2$
$\therefore 10x^2+30x+23=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=15^2-10\cdot23=-5<0$
따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

4) 서로 다른 두 점에서 만난다.
⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면
$x^2+(-x+1)^2=4$, $x^2+x^2-2x+1=4$
$\therefore 2x^2-2x-3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-3)=7>0$
따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

5) 서로 다른 두 점에서 만난다.
⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면
직선 l에서 $4y=-3x-4$ $\therefore y=-\frac{3}{4}x-1$
이 식을 원 O의 방정식에 대입하면
$x^2+\left(-\frac{3}{4}x-1\right)^2=4$, $16x^2+(3x+4)^2=64$
$16x^2+9x^2+24x+16=64$ $\therefore 25x^2+24x-48=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=12^2-25\cdot(-48)>0$
따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

6) 접한다.(한 점에서 만난다.)
⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는 $\frac{|0+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이고 $\sqrt{5}=\sqrt{5}$이므로 원 O와 직선 l은 접한다.(한 점에서 만난다.)

7) 서로 다른 두 점에서 만난다.
⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면
$x^2+(2x+1)^2=9$, $x^2+4x^2+4x+1=9$
$\therefore 5x^2+4x-8=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=2^2-5\cdot(-8)=44>0$
따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

8) 서로 다른 두 점에서 만난다.
⇨ $y=x-1$을 $x^2+y^2=10$에 대입하면
$x^2+(x-1)^2=10$ $\therefore 2x^2-2x-9=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-9)=19>0$
따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

9) 만나지 않는다.
⇨ 원의 중심 $(3,-2)$와 직선 $3x-y-1=0$ 사이의 거리는 $\frac{|9+2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이고 $\sqrt{10}>\sqrt{6}$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

10) 접한다.(한 점에서 만난다.)
⇨ $x-y-3=0$에서 $y=x-3$
이것을 $x^2+y^2+2x-4y-13=0$에 대입하면
$x^2+(x-3)^2+2x-4(x-3)-13=0$
$2x^2-8x+8=0$ $\therefore x^2-4x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$
따라서 원 O와 직선 l은 접한다.(한 점에서 만난다.)

11) 서로 다른 두 점에서 만난다.
⇨ $x-2y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$을
$x^2+y^2+2x-4y-4=0$에 대입하여 정리하면
$5x^2+4x-28=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-5\cdot(-28)=144>0$
따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

12) 접한다.(한 점에서 만난다.)
⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면
직선 l에서 $3y=-x+2$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

위 식을 원 O의 방정식에 대입하면

$x^2+\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2-2x+6\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)=0$

$9x^2+x^2-4x+4-18x-18x+36=0$

$10x^2-40x+40=0$

$\therefore x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 4=0$

따라서 원과 직선은 접한다.(한 점에서 만난다.)

13) 접한다.(한 점에서 만난다.)

⇨ $x+y-4=0$, 즉 $y=-x+4$를

$x^2+y^2-3x+y-2=0$에 대입하여 정리하면

$x^2-6x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot 9=0$

따라서 원과 직선은 접한다.(한 점에서 만난다.)

14) 만나지 않는다.

⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면

직선 l에서 $4y=-3x$ $\therefore y=-\frac{3}{4}x$

이 식을 원 O의 방정식에 대입하면

$x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2-4x-2\left(-\frac{3}{4}x\right)+4=0$

$16x^2+(3x+4)^2=64$

$16x^2+9x^2-64x+24x+64=0$ $\therefore 25x^2-40x+64=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-20)^2-25\cdot 64<0$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

15) 서로 다른 두 점에서 만난다.

⇨ $x-2y+1=0$에서 $x=2y-1$

이것을 $x^2+y^2+4x-3y-6=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2+4(2y-1)-3y-6=0$

$\therefore 5y^2+y-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot 5\cdot(-9)=181>0$

따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

16) 만나지 않는다.

⇨ 직선 l의 방정식을 원 O의 방정식에 대입하면

직선 l의 식을 원 O의 방정식에 대입하면

$4+y^2+8+6y+3=0$

$\therefore y^2+6y+15=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=3^2-15=-6<0$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

17) 서로 다른 두 점에서 만난다.

⇨ $x^2+y^2+10x+2y+17=0$에서 $(x+5)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(-5,-1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이가 3이고 $\frac{4\sqrt{5}}{5}<3$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

18) $-2<k<2$

⇨ $y=x+k$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=2$, $2x^2+2kx+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)=-k^2+4>0$

$k^2-4<0$ $\therefore -2<k<2$

19) $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

⇨ $y=2x+k$를 $x^2+y^2=2$에 대입하여 정리하면

$5x^2+4kx+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-2)>0$, $-k^2+10>0$

$k^2-10<0$ $\therefore -\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

20) $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$

⇨ $y=3x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$10x^2+6kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=9k^2-10(k^2-4)>0$, $-k^2+40>0$

$k^2<40$ $\therefore$ $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$

21) $-10<k<10$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{5}<2$, $|k|<10$

$\therefore -10<k<10$

22) $-5<k<5$

⇨ $y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하여 정리하면

$5x^2+4kx+k^2-5=0$

위에서 구한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과

직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)>0,\ -k^2+25>0$

$(k+5)(k-5)<0\ \therefore -5<k<5$

23) $k<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $k>\frac{2\sqrt{5}}{5}$

⇨ $y=kx-3$을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(kx-3)^2=5$

$(1+k^2)x^2-6kx+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-4(1+k^2)=9k^2-4-4k^2=5k^2-4>0$

$k^2>\frac{4}{5}\ \therefore k<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $k>\frac{2\sqrt{5}}{5}$

24) $-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<3, |k|<3\sqrt{2}$

$\therefore -3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

25) $-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

⇨ $y=-x+k$를 $x^2+y^2=9$에 대입하여 정리하면 $2x^2-2kx+k^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-9)>0,\ -k^2+18>0$

$k^2-18<0$

$\therefore -3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

26) $-6<k<6$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $\sqrt{3}x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{2}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{2}<3,\ |k|<6\ \therefore -6<k<6$

27) $k<-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 또는 $k>\frac{3\sqrt{5}}{5}$

⇨ $y=2x+3$을 $x^2+y^2=k^2$에 대입하면

$x^2+(2x+3)^2=k^2$, $5x^2+12x+9-k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=6^2-5(9-k^2)=5k^2-9>0$

$k^2>\frac{9}{5}\ \therefore k<-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 또는 $k>\frac{3\sqrt{5}}{5}$

28) $-3<k<1$

⇨ 원의 중심 $(1,0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|1+k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$, $|1+k|<2$

$-2<1+k<2\ \therefore -3<k<1$

29) $0<k<4$

⇨ 원의 중심 $(2,0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2-k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|2-k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$, $|2-k|<2$

$-2<2-k<2\ \therefore 0<k<4$

30) $k<\frac{3}{4}$

⇨ $y=kx+2$를 $(x-4)^2+y^2=16$에 대입하여 정리하면

$(k^2+1)x^2+2(2k-4)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k-4)^2-4(k^2+1)>0,\ -16k+12>0$

$\therefore k<\frac{3}{4}$

31) $-4<k<0$

⇨ 원의 중심 $(1,-1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$, $|2+k|<2$

$-2<2+k<2\ \therefore\ -4<k<0$

32) $0<k<\frac{4}{3}$

⇨ $y=kx$를 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$에 대입하면

$(x-2)^2+(kx-1)^2=1$

$(1+k^2)x^2-2(2+k)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2+k)^2-4(1+k^2)$

$=k^2+4k+4-4-4k^2=-3k^2+4k>0$

$3k^2-4k<0$, $k(3k-4)<0$

$\therefore 0<k<\frac{4}{3}$

33) $3<k<63$

⇨ 원의 중심 $(-7,3)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-21-12+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k-33|}{5}$

원의 반지름의 길이가 6이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k-33|}{5}<6$, $|k-33|<30$

$-30<k-33<30$ $\therefore 3<k<63$

34) $k<0$

⇨ $y=kx+1$을 $x^2+y^2-2x=0$에 대입하여 정리하면

$(k^2+1)x^2+2(k-1)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+1)>0$, $-2k>0$

$\therefore k<0$

35) $-5\sqrt{5}<k<5\sqrt{5}$

⇨ $y=2x+k$를 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$에 대입하여 정리하면

$5x^2+2(2k-5)x+k^2-4k-20=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k-5)^2-5(k^2-4k-20)>0$, $-k^2+125>0$

$k^2>125$ $\therefore$ $-5\sqrt{5}<k<5\sqrt{5}$

36) $-\frac{9}{2}<k<-\frac{1}{2}$

⇨ $x^2+y^2-6x+4y+5=0$에서 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$

원의 중심 $(3,-2)$와 직선 $y=x+2k$, 즉 $x-y+2k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2+2k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|5+2k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|5+2k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$, $|5+2k|<4$

$-4<5+2k<4$, $-9<2k<-1$

$\therefore$ $-\frac{9}{2}<k<-\frac{1}{2}$

37) $-9<k<1$

⇨ $x^2+y^2-6x-4y+8=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

원의 중심 $(3,2)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|4+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|4+k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|4+k|<5$

$-5<4+k<5$

$\therefore -9<k<1$

38) $0<k<10$

⇨ $y=-2x-k$를 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$에 대입하여 정리하면 $5x^2+2(2k+5)x+k^2+2k+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k+5)^2-5(k^2+2k+5)>0$, $-k^2+10k>0$

$k(k-10)<0$ $\therefore 0<k<10$

39) $k=\pm\sqrt{2}$

⇨ $y=x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$2x^2+2kx+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=0$, $-k^2+2=0$

$k^2=2$ $\therefore k=\pm\sqrt{2}$

40) $k=\pm 2\sqrt{10}$

⇨ $y=3x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$10x^2+6kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=9k^2-10(k^2-4)=0$, $-k^2+40=0$

$k^2=40$ $\therefore$ $k=\pm 2\sqrt{10}$

41) $k=\pm 2\sqrt{2}$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2$, $|k|=2\sqrt{2}$ $\therefore k=\pm 2\sqrt{2}$

42) ± 5

⇨ $y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=5$, $5x^2+4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)=-k^2+25=0$

$k^2=25 \quad \therefore k=\pm 5$

43) $k=\pm 2\sqrt{10}$

⇨ $y=-2x+k$를 $x^2+y^2=8$에 대입하여 정리하면

$5x^2-4kx+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-8)=0$, $-k^2+40=0$

$k^2=40 \quad \therefore k=\pm 2\sqrt{10}$

44) $k=-3\sqrt{2}$ 또는 $k=3\sqrt{2}$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=3$, $|k|=3\sqrt{2}$

$\therefore k=-3\sqrt{2}$ 또는 $k=3\sqrt{2}$

45) $\pm\frac{4}{3}$

⇨ $y=kx+5$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(kx+5)^2=9$

$(1+k^2)x^2+10kx+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(5k)^2-16(1+k^2)=9k^2-16=0$

$k^2=\frac{16}{9} \quad \therefore k=\pm\frac{4}{3}$

46) $k=\pm 10$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$, $|k|=\sqrt{10} \quad \therefore k=\pm 10$

47) $k=-3$ 또는 $k=1$

⇨ 원 $(x-1)^2+y^2=2$의 중심 $(1,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으므면 직선이 원에 접하므로

$\frac{|1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$|1+k|=2$, $1+k=\pm 2$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

48) $k=-1$ 또는 $k=19$

⇨ 원 $x^2+(y+3)^2=10$의 중심 $(0,-3)$에서 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으면 직선이 원에 접하므로

$\frac{|0-9+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$, $|k-9|=10$

$k-9=\pm 10 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=19$

49) $k=-4$ 또는 $k=0$

⇨ 원의 중심 $(1,-1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $|2+k|=2$

$2+k=\pm 2 \quad \therefore k=-4$ 또는 $k=0$

50) $k=1$ 또는 $k=5$

⇨ $y=x+k$를 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$에 대입하여 정리하면

$2x^2+2(k-1)x+k^2-4k+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-4k+3)=0$, $-k^2+6k-5=0$

$k^2-6k+5=0$, $(k-1)(k-5)=0 \therefore k=1$ 또는 $k=5$

51) $k=1\pm 3\sqrt{5}$

⇨ 원의 중심 $(1,3)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}=3$, $|k-1|=3\sqrt{5}$

$\therefore k=1\pm 3\sqrt{5}$

52) $k=4$ 또는 $k=-16$

⇨ 원의 중심 $(1,4)$와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|6+k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, $|6+k|=10$

$6+k=\pm 10 \quad \therefore k=4$ 또는 $k=-16$

53) $k=3$ 또는 $k=63$

⇨ 원의 중심 $(-7,3)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-21-12+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k-33|}{5}$

원의 반지름의 길이가 6이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k-33|}{5}=6$, $|k-33|=30$

$k-33=\pm 30$ $\therefore k=3$ 또는 $k=63$

54) $k=2$ 또는 $k=-8$

⇨ $x^2+y^2-4x+2y=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

원의 중심 $(2,-1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|3+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|3+k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|3+k|=5$

$3+k=\pm 5$ $\therefore k=2$ 또는 $k=-8$

55) $k=-13$ 또는 $k=-3$

⇨ $x^2+y^2-4x-6y+8=0$ $\therefore$ $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

원의 중심 $(2,3)$과 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+6+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|8+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|8+k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|8+k|=5$, $8+k=\pm 5$

$\therefore k=-13$ 또는 $k=-3$

56) $k=-\frac{9}{2}$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$

⇨ $x^2+y^2-6x+4y+5=0$에서 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$

원의 중심 $(3,-2)$와 직선 $y=x+2k$, 즉 $x-y+2k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2+2k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|5+2k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|5+2k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|5+2k|=4$, $5+2k=\pm 4$

$2k=-9$ 또는 $2k=-1$

$\therefore k=-\frac{9}{2}$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$

57) $k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

⇨ $y=k(x-3)$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+k^2(x-3)^2=1$

$\therefore (1+k^2)x^2-6k^2x+9k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3k^2)^2-(1+k^2)(9k^2-1)$

$=-8k^2+1<0$

$k^2>\frac{1}{8}$

$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

[다른풀이]

원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,0)$과 직선 $y=k(x-3)$, 즉 $kx-y-3k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}>1$, $|3k|>\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $9k^2>k^2+1$, $k^2>\frac{1}{8}$

$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

58) $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

⇨ $y=-kx-2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(-kx-2)^2=1$

$\therefore (1+k^2)x^2+4kx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(1+k^2)=4k^2-3-3k^2=k^2-3<0$

$k^2<3$ $\therefore -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

59) $k<-2$ 또는 $k>2$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, $|k|>2$ $\therefore k<-2$ 또는 $k>2$

60) $k<-2\sqrt{5}$ 또는 $k>2\sqrt{5}$

⇨ $y=-2x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$5x^2-4kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-4)<0$, $-k^2+20<0$

$k^2-20>0$

$\therefore k<-2\sqrt{5}$ 또는 $k>2\sqrt{5}$

61) $k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

⇨ $y=3x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$10x^2+6kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=9k^2-10(k^2-4)<0$, $-k^2+40<0$

$k^2>40$ $\therefore k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

62) $k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

만나지 않으려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>3, |k|>3\sqrt{2}$

$\therefore k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

63) $k<-15$ 또는 $k>15$

⇨ 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{|k|}{5}>3$, $|k|>15$

$\therefore k<-15$ 또는 $k>15$

64) $k<-3$ 또는 $k>1$

⇨ 원 $(x-1)^2+y^2=2$의 중심 $(1,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이보다 길어야 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{|1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$

$|1+k|>2$

$1+k<-2$ 또는 $1+k>2$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>1$

65) $k<-4$ 또는 $k>0$

⇨ 원의 중심 $(1,-1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 만나지 않으려면

$\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, $|2+k|>2$

$2+k<-2$ 또는 $2+k>2$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

66) $k<3$ 또는 $k>63$

⇨ 원의 중심 $(-7,3)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-21-12+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k-33|}{5}$

원의 반지름의 길이가 6이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k-33|}{5}>6$, $|k-33|>30$

$k-33<-30$ 또는 $k-33>30$

$\therefore k<3$ 또는 $k>63$

67) $0<k<\frac{1}{2}$

⇨ $y=-x+1$을 $x^2+y^2=k$에 대입하면

$x^2+(-x+1)^2=k$

$\therefore 2x^2-2x+1-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(1-k)=-1+2k<0$

$\therefore k<\frac{1}{2}$

그런데 $k>0$이어야 하므로

$0<k<\frac{1}{2}$

68) $k<2-\sqrt{2}$ 또는 $k>2+\sqrt{2}$

⇨ $x+y=2$에서 $y=2-x$를 $(x-k)^2+y^2=1$에 대입하면

$(x-k)^2+(2-x)^2=1$

$\therefore 2x^2-2(k+2)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2+3)=-k^2+4k-2<0$

$k^2-4k+2>0$ $\therefore k<2-\sqrt{2}$ 또는 $k>2+\sqrt{2}$

69) $k<-1-2\sqrt{5}$ 또는 $k>-1+2\sqrt{5}$

⇨ 원 $x^2+(y-k)^2=10$의 중심 $(0,k)$와 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$사이의 거리는 반지름의 길이보다 길어야 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{|0-k-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>\sqrt{10}$

$|k+1|>2\sqrt{5}$

$k+1<-2\sqrt{5}$ 또는 $k+1>2\sqrt{5}$

$\therefore k<-1-2\sqrt{5}$ 또는 $k>-1+2\sqrt{5}$

70) $k<0$ 또는 $k>4$

⇨ $y=-x+k$를 $x^2+y^2-2x-2y=0$에 대입하여 정리하면

$2x^2-2kx+k^2-2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2k)<0$, $-k^2+4k<0$

$k^2-4k>0, k(k-4)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>4$

71) $k<-3$ 또는 $k>1$

⇨ $x^2+y^2-4x+6y+11=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=2$

원의 중심 $(2,-3)$과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, $|k+1|>2$

$k+1<-2$ 또는 $k+1>2$ $\therefore k<-3$ 또는 $k>1$

72) $k<-\frac{9}{2}$ 또는 $k>-\frac{1}{2}$

⇨ $x^2+y^2-6x+4y+5=0$에서 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$

원의 중심 $(3,-2)$와 직선 $y=x+2k$, 즉 $x-y+2k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2+2k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|5+2k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|5+2k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|5+2k|>4$

$5+2k<-4$ 또는 $5+2k>4$

$2k<-9$ 또는 $2k>-1$

$\therefore k<-\frac{9}{2}$ 또는 $k>-\frac{1}{2}$