



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2020-07-13
2) 제작자 : 교육지대(주)
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초
제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호
되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무
단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법
외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[역함수와 그 성질]

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응일 때, $x \in X, y \in Y$ 에 대해

- (1) f 의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재한다.
- (2) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- (3) $(f^{-1} \circ f)(x) = x, (f \circ f^{-1})(y) = y$
- (4) $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

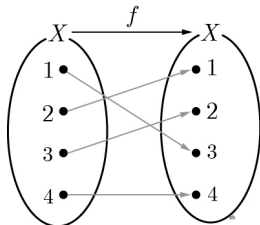
[역함수의 그래프]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

기본문제

[문제]

1. 다음 그림과 같은 함수 $f: X \rightarrow X$ 에서
 $f(3) + f^{-1}(1)$ 의 값은?



- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

[예제]

2. 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ 의 역함수를 구한 것은?

- ① $y = 3x + 1$
- ② $y = -\frac{1}{3}x + 2$
- ③ $y = 3x + 3$
- ④ $y = -3x + 1$
- ⑤ $y = x + 3$

[문제]

3. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 의 역함수는?

- ① $y = 2x + 2$
- ② $y = 2x - 4$
- ③ $y = \frac{1}{2}x - 4$
- ④ $y = \frac{1}{2}x - 2$
- ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

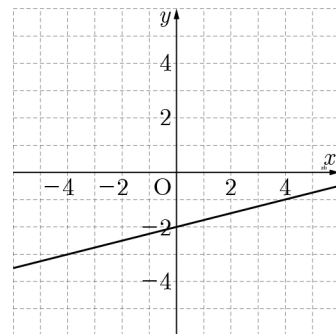
[문제]

4. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x + 2, g(x) = -x + 3$ 에 대하여
 $(f \circ g)^{-1}(1) + (g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은?

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

[문제]

5. 다음의 주어진 함수의 그래프를 이용하여 역함수
의 식을 바르게 구한 것은?



- ① $y = 4x + 2$
- ② $y = \frac{1}{4}x - 2$
- ③ $y = 4x + 8$
- ④ $y = -4x + \frac{1}{2}$
- ⑤ $y = \frac{1}{4}x + 2$

평가문제

[소단원 확인 문제]

6. 두 함수 $f(x) = -x + 5$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(6)$ 의 값은?

- ① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

[소단원 확인 문제]

7. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$,

$Y = \{y \mid 5 \leq y \leq a\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $y = 5x + b$ 의 역함수가 존재할 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

- ① 21 ② 22
③ 23 ④ 24
⑤ 25

[소단원 확인 문제]

8. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 다음 조건이 성립한다.

(가) $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재한다.

(나) $f(1) = 3$, $f(3) = 4$

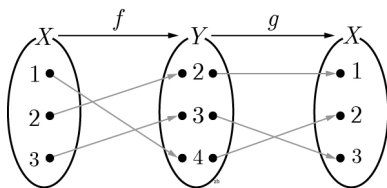
(다) $f^{-1}(5) < 3$

이때, $f^{-1}(2) + f(2)$ 의 값은?

- ① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[소단원 확인 문제]

9. 다음 그림의 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ 에서 $(g \circ f)(1) + (f \circ g)^{-1}(2)$ 의 값은?



- ① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[소단원 확인 문제]

10. 6세기에 활약한 인도의 수학자 아리아바타는 덧셈이 뺄셈이 되거나 곱셈이 나눗셈이 되는 관계를 그의 저서 “아리아바티야”에 소개하였다. 다음은 아리아바타가 소개한 관계를 이용한 수 퍼즐이다. ⑤의 수를 x , ①에서 선택한 수를 y 라고 할 때, y 를 x 의 식으로 나타낸 것은?

① - 1에서 9까지의 자연수 중에서 하나를 선택한다.

② - ①의 수에 5를 곱한다.

③ - ②의 수에 3을 뺀다.

④ - ③의 수를 4로 나눈다.

⑤ - ④의 수에서 1를 더한다.

① $y = \frac{5x}{4} - \frac{1}{4}$

② $y = \frac{4x}{5} - \frac{1}{4}$

③ $y = \frac{5x}{4} - \frac{1}{5}$

④ $y = \frac{4x}{5} - \frac{1}{5}$

⑤ $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{6}$

[중단원 연습 문제]

11. 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 일 때,

$f(1) + f^{-1}(2)$ 의 값은?

- ① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[중단원 연습 문제]

12. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(-1) = 2$,

$f^{-1}(1) = 0$ 이 성립할 때, $f(-2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 연습 문제]

13. 일대일대응인 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$)의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$
③ 2 ④ $2\sqrt{2}$
⑤ 4

[대단원 종합 문제]

14. 함수 $f(x) = mx + n$ 의 그래프는 점 $(1, 5)$ 를 지나고, 그 역함수의 그래프는 점 $(-4, -2)$ 를 지날 때, mn 의 값은?

- ① 2 ② 6
③ 12 ④ 20
⑤ 30

[대단원 종합 문제]

15. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 정의된 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 을 만족한다. $f(1) = 3$ 일 때, $(f \circ f)(2) + f^{-1}(1)$ 의 값은?

- ① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

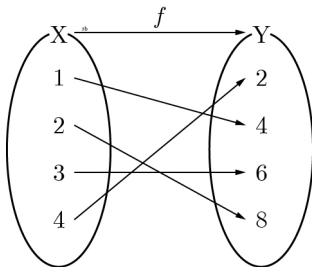
[대단원 종합 문제]

16. 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이고 역함수가 존재하는 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x+a & (x < 2) \\ -x+1 & (x \geq 2) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 하자. $g(g(0)) = b$ 일 때, 두 실수 a, b 에 대하여 $4ab$ 의 값은?

- ① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

유사문제

17. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 다음 그림과 같을 때, $f^{-1}(2) \times f^{-1}(6)$ 의 값을 구하면?



- ① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 12

18. 두 집합 $X = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$,

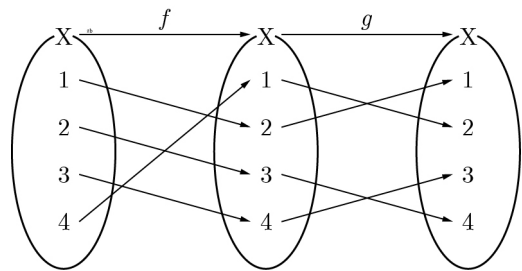
$Y = \{y | -2 \leq y \leq 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고 $a < 0$ 이다.)

- ① $-\frac{7}{4}$ ② -2
③ $-\frac{2}{3}$ ④ 2
⑤ $\frac{3}{2}$

19. 함수 $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

- ① $f^{-1}(x) = -3x + 2$ ② $f^{-1}(x) = -3x + 3$
③ $f^{-1}(x) = -3x + 4$ ④ $f^{-1}(x) = -3x + 5$
⑤ $f^{-1}(x) = -3x + 6$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 이고 X 에서 X 로의 두 함수 f, g 가 다음 그림과 같을 때 $(g \circ f^{-1})(1) + (f \circ g)^{-1}(3)$ 의 값은?



- ① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

21. 함수 $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x$ ($x \leq \frac{1}{3}$)와 그 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 점 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $2\frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ 1



정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $f(2)=1$ 이므로 $f^{-1}(1)=2$ 이다.
또한 $f(3)=2$ 이므로
 $f(3)+f^{-1}(1)=4$ 이다.

2) [정답] ③

[해설] $y = \frac{1}{3}x - 1$ 를 x 에 대하여 정리하면
 $x = 3y + 3$ 이므로
 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 의 역함수는 $y = 3x + 3$

3) [정답] ⑤

[해설] $y = 2x - 4$ 의 역함수를 구하면
 $x = 2y - 4$
 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 이다.

4) [정답] ③

[해설] 함수 $g(x)$ 에 대하여 $(g \circ g^{-1})(x) = x$
가 성립한다.
또한 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 이므로
 $(f \circ g)^{-1}(1) + (g \circ g^{-1})(2)$
 $= g^{-1}(f^{-1}(1)) + 2$
 $= g^{-1}(-3) + 2 = 6 + 2 = 8$ 이다.

5) [정답] ③

[해설] 주어진 함수의 그래프는 점 $(4, -1)$ 과 점
 $(0, -2)$ 를 지나므로
역함수는 점 $(-1, 4)$ 과 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.
따라서 주어진 함수의 역함수는 $y = 4x + 8$ 이다.

6) [정답] ①

[해설] $(g^{-1} \circ f)(6) = g^{-1}(f(6))$
 $= g^{-1}(-1) = -1$ 이다.

7) [정답] ⑤

[해설] $y = 5x + b$ 의 역함수가 존재하기 위해서는
일대일대응이어야 한다.
이 일차함수의 기울기 5는 0보다 크므로
 $x = 1$ 일 때 $y = 5$ 이 되어
 $5 = 5 + b$, $b = 0$ 이다.
또한, $x = 5$ 일 때 $y = a$ 가 되어
 $a = 25$ 이다.
따라서 $a + b = 25$ 이다.

8) [정답] ④

[해설] 조건 (가)에 의해 f 는 일대일대응이다.
조건 (나)에 의해 $f(1)=3$, $f(3)=4$ 이고
조건 (다)에 의해 $f(2)=5$ 이므로
 $f(4)=2$ 이다.

따라서 $f^{-1}(2)=4$ 가 되어
 $f^{-1}(2)+f(2)=4+5=9$ 이다.

9) [정답] ⑤

[해설] $(g \circ f)(1) + (f \circ g)^{-1}(2)$
 $= g(f(1)) + g^{-1}(f^{-1}(2))$
 $= g(4) + g^{-1}(2)$
 $= 2 + 4 = 6$ 이다.

10) [정답] ④

[해설] ①에서 선택한 수를 y 라 하면
② - ①의 수에 5를 곱한다. $\dots 5y$
③ - ②의 수에 3을 뺀다. $\dots 5y - 3$
④ - ③의 수를 4로 나눈다. $\dots \frac{5y-3}{4}$
⑤ - ④의 수에서 1를 더한다. $\dots \frac{5y-3}{4} + 1$

따라서 $x = \frac{5y-3}{4} + 1$ 이므로

y 를 x 에 대하여 나타낸 식은 $y = \frac{4x}{5} - \frac{1}{5}$ 이다.

11) [정답] ⑤

[해설] $(f^{-1})^{-1} = f$ 이므로
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$ 에서 $f(x) = 2x + 6$ 이다.
따라서
 $f(1) + f^{-1}(2) = 8 - 2 = 6$ 이다.

12) [정답] ③

[해설] $f^{-1}(1)=0$ 이므로 역함수의 정의에 의해
 $f(0)=1$ 이다. 또한 $f(-1)=2$ 이므로
두 식을 대입하면
 $b = 1$, $-a + b = 2$, $a = -1$
따라서 $f(-2) = -2a + b = 3$ 이다.

13) [정답] ②

[해설] 함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프와 역함수의 그래프는 $y = x$ 위에서 만난다. 따라서 교점의 좌표를 (a, a) 라 하면
 $a = a^2 - 2a + 2$
 $a^2 - 3a + 2 = 0$
 $a = 1$ 또는 $a = 2$
따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이다.

14) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x) = mx + n$ 의 그래프가
점 $(1, 5)$ 를 지나므로 $f(1) = m + n = 5 \dots \textcircled{1}$
역함수의 그래프가 점 $(-4, -2)$ 를 지나므로
역함수의 그래프 성질에 의하여
 $f(x) = mx + n$ 는 점 $(-2, -4)$ 를 지난다.
따라서 $f(-2) = -2m + n = -4 \dots \textcircled{2}$

㉠, ㉡을 연립하면 $m=3, n=2$
 $\therefore mn=6$

15) [정답] ④

[해설] $(f \circ f)(x)=x$ 이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이다.
 $f(1)=3$ 이므로 $f(3)=1$ 이고, 역함수가 존재하기
 위해서 $f(x)$ 는 일대일대응이므로 $f(2)=2$ 이다.
 따라서 $(f \circ f)(2)+f^{-1}(1)=2+3=5$ 이다.

16) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$ 의 역함수가
 존재하기 위해서는 일대일대응이어야 하므로
 $-4+a=-1, a=3$ 이다.
 $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ 이므로 $g(0)=\frac{3}{2}$ 이다.
 또한 $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$ 이므로 $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$ 이다.
 따라서 $g(g(0))=g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}=b$ 이므로
 $4ab=9$ 이다.

17) [정답] ⑤

[해설] $f^{-1}(2)=4, f^{-1}(6)=3$
 $\therefore f^{-1}(2) \times f^{-1}(6)=4 \times 3=12$

18) [정답] ⑤

[해설] $a<0$ 이므로 $y=f(x)$ 는 감소함수이다.
 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로
 $f(-1)=5, f(3)=-2$
 $f(-1)=-a+b=5$
 $f(3)=3a+b=-2$

연립하여 풀면 $a=-\frac{7}{4}, b=\frac{13}{4}$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

19) [정답] ⑤

[해설] 역함수는 함수와 직선 $y=x$ 에 대하여
 대칭이므로 $x=-\frac{1}{3}y+2$ 이다.
 즉, $y=-3x+6$ 이다.

20) [정답] ②

[해설] $(g \circ f^{-1})(1)=g(4)=3$
 $(f \circ g)^{-1}(3)=(g^{-1} \circ f^{-1})(3)=g^{-1}(2)=1$
 $\therefore (g \circ f^{-1})(1)+(f \circ g)^{-1}(3)=4$

21) [정답] ②

[해설] $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 교점은
 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$-x^2 + \frac{2}{3}x = x$$

$$3x^2 + x = 0, x(3x+1)=0$$

$$x=0, -\frac{1}{3}$$

따라서 두 교점 $(0, 0), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ 사이의 거리는

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \text{이다.}$$