개념check

[모평균의 추정]
표본으로부터 얻은 자료를 이용하여 모집단의 평균이나 표준편차와 같이 알지 못하는 값을 추측하는 것을 추정이라 한다.

[모평균에 대한 신뢰구간]
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때,
모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같다.
(1) 신뢰도 95%의 신뢰구간:
$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
(2) 신뢰도 99%의 신뢰구간:
$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

기본문제

[예제]

1. 어느 방송사의 '○○뉴스'의 방송 시간은 평균이 m분, 표준편차가 14분인 정규분포를 따른다고 한다. 방송된 '○○뉴스'를 대상으로 크기가 49인 표본을 임의추출하여 방송 시간을 조사하였더니 평균이 50분이었다. 방송된 '○○ 뉴스'의 평균 방송 시간 m에 대한 신뢰도 $95\ \%$의 신뢰구간은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.4750$)

① $49.02 \le m \le 50.98$
② $48.06 \le m \le 51.94$
③ $47.84 \le m \le 52.16$
④ $46.08 \le m \le 53.92$
⑤ $45.94 \le m \le 54.06$

[문제]

2. 어느 고등학교 2학년 학생들의 오래 매달리기 기록은 표준편차가 9초인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 2학년 학생 중에서 36명을 임의추출하여 기록을 측정하였더니 평균이 10초이었다. 이 고등학교 2학년 전체 학생의 평균 기록 m초에 대한 신뢰도 $99\ \%$의 신뢰구간은?
(단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$)

① $6.13 \le m \le 13.87$
② $6.85 \le m \le 13.15$
③ $7.24 \le m \le 12.76$
④ $7.91 \le m \le 12.09$
⑤ $8.16 \le m \le 11.84$

[예제]

3. 어느 빵집에서 만든 식빵의 무게는 모표준편차가 $3\,\mathrm{g}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 빵집에서 만든 식빵의 평균 무게를 신뢰도 $95\,\%$로 추정할 때, 그 신뢰구간의 길이가 $6\,\mathrm{g}$ 이하가 되려면 적어도 몇 개의 식빵을 조사해야 하는가?
(단, $\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)=0.95$)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[문제]

4. 어느 연구소에서 개발한 새로운 품종의 파프리카의 무게는 모표준편차가 $100\,\mathrm{g}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 품종의 파프리카의 평균 무게를 신뢰도 $99\,\%$로 추정할 때, 그 신뢰구간의 길이가 $20\,\mathrm{g}$ 이하가 되려면 적어도 몇 개의 파프리카를 조사해야 하는가?
(단, $\mathrm{P}(-2.58 \le Z \le 2.58)=0.99$)

① 662 ② 663
③ 664 ④ 665
⑤ 666

평가문제

[소단원 확인 문제]

5. **정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 225)$를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하였더니 평균이 70이었다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?**
(단, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$)

① 표본평균은 $\overline{x}$는 70이다.
② 모표준편차 σ는 5이다.
③ 표본표준편차는 1.5이다.
④ 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\ \%$의 신뢰구간은 $67.06 \leq m \leq 72.94$이다.
⑤ 모평균 m에 대한 신뢰도 $99\ \%$의 신뢰구간의 길이는 7.74이다.

[소단원 확인 문제]

6. **어느 광어 양식장에서 키우는 광어의 무게는 모표준편차가 $\sigma\,\mathrm{kg}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 양식장에서 키우는 광어 중 36마리를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 $2.5\,\mathrm{kg}$이었다. 이 양식장에서 키우는 광어 전체의 평균 무게 $m\,\mathrm{kg}$에 대한 신뢰도 $99\,\%$의 신뢰구간이 $1.21 \leq m \leq 3.79$일 때, σ의 값은?**
(단, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.495$)

① 2　② 2.2
③ 2.5　④ 2.8
⑤ 3

[소단원 확인 문제]

7. **어느 공장에서 새로 개발한 건전지의 수명은 모표준편차가 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 건전지의 평균 수명을 신뢰도 $99\,\%$로 추정할 때, 그 신뢰구간의 길이가 6시간 이하가 되려면 적어도 몇 개의 건전지를 조사해야 하는가? (단, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$)**

① 18　② 19
③ 20　④ 21
⑤ 22

[소단원 확인 문제]

8. **모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출 하였더니 표본평균이 $\overline{x}$이었다. 모평균을 추정하여 자료를 분석할 때 다음 <보기> 중에서 신뢰구간의 길이에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?**

<보기>
ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
ㄷ. 표본의 크기를 작게 하고, 신뢰도를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

① ㄱ　② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

[중단원 연습 문제]

9. **우리나라 농어촌 지역 고등학교의 전력사용량을 알아보기 위해 농어촌 지역에서 100개의 고등학교를 뽑아 한 달 동안의 전력사용량을 조사하였더니 표준편차가 $7.2\,\mathrm{kWh}$이었다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?**

① 모집단은 우리나라 농어촌 지역 고등학교이다.
② 표본은 농어촌 지역 100개 고등학교이다.
③ 표본의 크기는 100이다.
④ 모표준편차는 7.2이다.
⑤ 표본의 크기를 작게 하면 신뢰구간의 길이가 길어진다.

[중단원 연습 문제]

10. **어느 통신사 이용자들의 1일 통화 시간은 표준편차가 4.5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 통신사 이용자 중에서 81명을 임의추출하여 1일 통화 시간을 조사하였더니 평균이 30분이었다. 이 통신사 전체 이용자의 평균 1일 통화 시간 m분에 대한 신뢰도 $99\,\%$의 신뢰구간은?**
(단, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$)

① $29.03 \leq m \leq 30.97$
② $28.71 \leq m \leq 31.29$
③ $28.14 \leq m \leq 31.86$
④ $27.85 \leq m \leq 32.15$
⑤ $27.93 \leq m \leq 33.07$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[중단원 연습 문제]

11. 어느 과수원에서 수확한 배의 무게는 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 배 중 100개를 임의추출하여 무게를 측정하였더니 평균이 $320\,\mathrm{g}$, 표준편차가 $s\,\mathrm{g}$이었다. 이 과수원에서 수확한 배의 평균 무게 $m\,\mathrm{g}$에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간이 $a \le m \le 321.96$일 때, $a+s$의 값은? (단, $\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)=0.95$)

① 324.63
② 325.87
③ 326.14
④ 327.58
⑤ 328.04

[대단원 종합 문제]

12. 어느 회사에서 생산하는 배드민턴 라켓의 무게는 모표준편차가 $\sigma\,\mathrm{g}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 배드민턴 라켓 중 144개를 임의추출하여 평균 무게를 신뢰도 $95\,\%$로 추정할 때, 그 신뢰구간의 길이가 $2.94\,\mathrm{g}$이었다. 이때 σ의 값은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$)

① 8
② 9
③ 10
④ 11
⑤ 13

[대단원 종합 문제]

13. 평균이 m, 표준편차가 1인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하였을 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이었다. 이때 $\mathrm{P}(|Z| \le c)=0.95$를 만족시키는 c를 a, b로 나타낸 것은?
(단, a, b, c는 상수)

① $b-a$
② $2(b-a)$
③ $3(b-a)$
④ $4(b-a)$
⑤ $5(b-a)$

[대단원 종합 문제]

14. 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간이 $190.4m \le 229.6$이었다. 이때 같은 표본을 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 $99\,\%$의 신뢰구간은?
(단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$)

① $195.4 \le m \le 224.6$
② $190.2 \le m \le 229.8$
③ $189.1 \le m \le 231.9$
④ $185.4 \le m \le 234.6$
⑤ $184.2 \le m \le 235.8$

유사문제

15. 평균이 m, 표준편차가 12인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$와 모평균 m의 차가 2이하일 확률이 0.86이 되도록 하는 n의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

① 16
② 36
③ 64
④ 81
⑤ 100

16. 모표준편차가 1.5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 평균이 13일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[13-a,\ 13+a]$라 한다. $100a$의 값을 구하면? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 1.96)=0.4750$으로 계산한다.)

① 24.5
② 49
③ 98
④ 147
⑤ 196

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

17. 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균 $\overline{X}$라 하면 $P(|\overline{X}-m| \leq 0.84) \geq 0.95$이다. 다음 표준정규분포표를 이용하여 n의 최솟값을 구하면?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.44	0.425
1.64	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

① 36
② 49
③ 64
④ 81
⑤ 100

18. 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 모평균을 추정하려고 한다. 신뢰도 99%로 추정할 때의 신뢰구간의 길이가 l, 신뢰도 $a\%$로 추정할 때의 신뢰구간의 길이가 $\frac{2}{3}l$일 때, a의 값은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.72	0.4608
2.58	0.4950
2.71	0.4967

① 92.16
② 99.34
③ 96.08
④ 99.50
⑤ 99.67

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $\sigma=14$, $n=49$, $\bar{x}=50$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝 값은

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50-1.96\times\frac{14}{\sqrt{49}}=50-3.92=46.08$$

$$\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50+1.96\times\frac{14}{\sqrt{49}}=50+3.92=53.92$$

따라서 구하는 신뢰구간은 $46.08\le m\le 53.92$

2) [정답] ①

[해설] $\sigma=9$, $n=36$, $\bar{x}=10$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝 값은

$$\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10-2.58\times\frac{9}{\sqrt{36}}=10-3.87=6.13$$

$$\bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10+2.58\times\frac{9}{\sqrt{36}}=10+3.87=13.87$$

따라서 구하는 신뢰구간은 $6.13\le m\le 13.87$

3) [정답] ④

[해설] 표본의 크기를 n이라고 하면 식빵의 평균 무게에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}$이다.

이때 식빵의 평균 무게에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 6 이하이므로

$2\times1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}\le 6$, $n\ge 3.8416$

그런데 n은 자연수이므로 적어도 4개의 식빵을 조사해야 한다.

4) [정답] ⑤

[해설] 표본의 크기를 n이라고 하면 파프리카의 평균 무게에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{100}{\sqrt{n}}$이다.

이때 파프리카의 평균 무게에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 20 이하이므로

$2\times2.58\times\frac{100}{\sqrt{n}}\le 20$, $n\ge 665.64$

그런데 n은 자연수이므로 적어도 666개의 파프리카를 조사해야 한다.

5) [정답] ②

[해설] ② 모표준편차 σ는 15이다.

④ 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$70-1.96\times\frac{15}{\sqrt{100}}\le m\le 70+1.96\times\frac{15}{\sqrt{100}}$$

$67.06\le m\le 72.94$이다.

⑤ 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times2.58\times\frac{15}{\sqrt{100}}=7.74$이다.

6) [정답] ⑤

[해설] $n=36$, $\bar{x}=2.5$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$2.5-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le 2.5+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$

이때 $2.5+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=3.79$이므로

$2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=1.29$에서 $\sigma=\frac{1.29\times6}{2.58}=3$

7) [정답] ②

[해설] 표본의 크기를 n이라고 하면 건전지의 수명에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$이다.

이때 건전지의 평균 무게에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 6 이하이므로

$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le 6$, $\sqrt{n}\ge 4.3$ $\quad\therefore n\ge 18.49$

n은 자연수이므로 적어도 19개의 건전지를 조사해야 한다.

8) [정답] ⑤

[해설] ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄷ. 표본의 크기를 작게 하고, 신뢰도를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

9) [정답] ④

[해설] ④ 표본표준편차가 7.2이다.

10) [정답] ②

[해설] $\sigma=4.5$, $n=81$, $\bar{x}=30$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 양 끝 값은

$$\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=30-2.58\times\frac{4.5}{\sqrt{81}}=30-1.29=28.71$$

$$\bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=30+2.58\times\frac{4.5}{\sqrt{81}}=30+1.29=31.29$$

따라서 구하는 신뢰구간은 $28.71\le m\le 31.29$

11) [정답] ⑤

[해설] $n=100$, $\bar{x}=320$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$320-1.96\times\frac{s}{\sqrt{100}}\le m\le 320+1.96\times\frac{s}{\sqrt{100}}$$

$$\left(320-1.96\times\frac{s}{\sqrt{100}}\right)+\left(320+1.96\times\frac{s}{\sqrt{100}}\right)$$

$=a+321.96$

이므로 $640=a+321.96$에서 $a=318.04$

한편 $320+1.96\times\frac{s}{\sqrt{100}}=321.96$이므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$1.96\times\dfrac{s}{\sqrt{100}}=1.96$에서 $s=10$

$a+s=328.04$

12) [정답] ②

[해설] 표본의 크기를 n이라고 하면 배드민턴 라켓의 무게에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{144}}$이다.

신뢰구간의 길이가 2.94 g이므로

$2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{144}}=2.94$

$\therefore\sigma=9$

13) [정답] ②

[해설] 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{1}{16}\right)$을 따르므로

확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{1}{\sqrt{16}}}$은 표준정규분포를 따른다.

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$b-a=2\times c\times\dfrac{1}{\sqrt{16}}$

$b-a=\dfrac{c}{2}$에서 $c=2(b-a)$

14) [정답] ⑤

[해설] 표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간의 양 끝값은

$\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=190.4,$

$\overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=229.6$

위 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x}=210,\quad\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=10$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로

$210-2.58\times10\le m\le210+2.58\times10$

$184.2\le m\le235.8$

15) [정답] ④

[해설] $P(-2\le\overline{X}-m\le2)=0.86$

표준정규분포를 이용하면

$P(-2\le\overline{X}-m\le2)=P(-1.5\le Z\le1.5)$

$=P\left(-1.5\le\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le1.5\right)$

$=P(-1.5\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le1.5\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$=P(-1.5\times\dfrac{12}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le1.5\times\dfrac{12}{\sqrt{n}})$

$2=1.5\times\dfrac{12}{\sqrt{n}}$

$2\times\sqrt{n}=18,\quad\sqrt{n}=9$

$\therefore n=81$

16) [정답] ③

[해설] 모집단은 정규분포 $N(m,1.5^2)$을 따르고 표본평균은 정규분포 $N\left(m,\left(\dfrac{1.5}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$을 따른다.

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$13-1.96\dfrac{1.5}{\sqrt{9}}\le m\le13+1.96\dfrac{1.5}{\sqrt{9}}$

$a=1.96\dfrac{1.5}{\sqrt{9}}=0.98$

$\therefore100a=98$

17) [정답] ②

[해설] 표본평균은 $N\left(m,\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$P(|\overline{X}-m|\le0.84)$

$=P\left(-0.84\dfrac{\sqrt{n}}{3}\le\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}}\le0.84\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right)$

$=P(-0.28\sqrt{n}\le Z\le0.28\sqrt{n})\ge0.95$

$0.28\sqrt{n}\ge1.96$이므로 $\sqrt{n}\ge7$

$n\ge49$

따라서 n의 최솟값은 49이다.

18) [정답] ①

[해설] 신뢰구간의 길이는 $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$l=5.16\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\dfrac{2}{3}l=2\times1.72\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$a=0.4608\times2\times100=92.16$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125