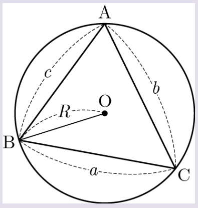
01 사인법칙

1. 사인법칙
   : 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면
   $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$



2. 사인법칙의 변형
   (1) $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$
   (2) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$
   (3) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

◪ △ABC에서 다음을 구하여라. (단, R는 외접원의 반지름의 길이)

1. $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$, $R=1$일 때, $\angle A$의 크기
(단, $0^\circ<C<90^\circ$)

2. $B=15^\circ$, $C=45^\circ$, $a=3$일 때, R의 값

3. $A=45^\circ$, $a=3\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{3}$일 때, $\angle C$의 크기

4. $C=60^\circ$, $b=5$, $c=5\sqrt{3}$일 때, $\angle A$의 크기

5. $B=30^\circ$, $C=15^\circ$, $b=5$일 때, a의 값

6. $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $a=3$일 때, c의 값

7. $A=60^\circ$, $a=\sqrt{3}$일 때, R의 값
(단, $0^\circ<\angle B<90^\circ$)

8. $b=12\sqrt{2}, R=12$일 때, $\angle B$의 크기

9. $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $c=10$일 때, R의 값

10. $A=120^\circ$, $R=10$일 때, a의 값

11. $B=75^\circ$, $C=60^\circ$, $a=2$일 때, R의 값

12. $A=60^\circ$, $a=\sqrt{3}$일 때, R의 값

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

13. $A=60^\circ$, $C=75^\circ$, $a=6$일 때, b의 값

14. $B=75^\circ$, $C=45^\circ$, $c=8$일 때, a의 값

15. $B=45^\circ$, $C=30^\circ$, $b=5$일 때, c의 값

16. $A=30^\circ$, $a=4$, $c=8$일 때, b의 값

17. $A=60^\circ$, $a=6$일 때, R의 값

18. $a=\sqrt{3}$, $A=60^\circ$일 때, R의 값

19. $C=120^\circ$, $c=2\sqrt{3}$, $b=2$일 때, $\angle B$의 크기

20. $B=135^\circ$, $a=3\sqrt{2}$, $b=6$일 때, $\angle A$의 크기

21. $b=12$, $A=30^\circ$, $B=120^\circ$일 때, a의 값

22. $a=2$, $b=2\sqrt{2}$, $A=30^\circ$일 때, $\angle B$의 크기

23. $A=45^\circ$, $a=5\sqrt{2}$, $b=5$일 때, $\angle B$의 크기

24. $c=5$, $B=30^\circ$, $C=45^\circ$일 때, b의 값

25. $a=4$, $A=60^\circ$, $C=45^\circ$일 때, c의 값

26. $b=2$, $c=\sqrt{6}$, $B=45^\circ$일 때, $\angle C$의 크기

27. $a=1$, $c=\sqrt{2}$, $C=135^\circ$일 때, $\angle A$의 크기

28. $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, $a=\sqrt{3}$일 때, b의 값

29. $B=30^{\circ}$, $c=\sqrt{2}$, $b=1$, $\angle C$의 크기 (단, $0^{\circ}<C<90^{\circ}$)

30. $c=3\sqrt{2}$, $b=6$, $\angle B=45^{\circ}$일 때, $\angle C$의 크기

31. $c=5\sqrt{2}$, $\angle C=45^{\circ}$, $\angle A=60^{\circ}$일 때, a의 값

32. $A=75^{\circ}$, $C=60^{\circ}$, $b=10$일 때, c의 값

33. $A=60^{\circ}$, $a=4\sqrt{3}$, $c=8$일 때, $\angle C$의 크기

34. $a=12$, $A=150^{\circ}$일 때, R의 값

35. $C=135^{\circ}$, $c=2\sqrt{2}$, $b=2$, $\angle A$의 크기

36. $A=30^{\circ}$, $a=3\sqrt{3}$, $b=9$일 때, $\angle B$의 크기 (단, $0^{\circ}<B<90^{\circ}$)

37. $\angle A=30^{\circ}$, $\angle B=135^{\circ}$, $a=5$일 때, b의 값

38. $b=2$, $c=2$, $\mathrm{A}=120^{\circ}$일 때, R의 값

39. $a=6$, $\mathrm{B}=100^{\circ}$, $\mathrm{C}=50^{\circ}$일 때, R의 값

◪ $\triangle\mathrm{ABC}$에서 다음을 구하여라. (단, R는 외접원의 반지름의 길이)

40. $a-2b+c=0$, $4a-4b+c=0$일 때, $\sin A:\sin B:\sin C$

41. $a+b-2c=0$, $a-3b+c=0$일 때, $\sin A:\sin B:\sin C$

42. $(a+b):(b+c):(c+a)=7:6:5$일 때, $\sin A:\sin B:\sin C$

43. $A:B:C=1:3:2$일 때, $\dfrac{c^2}{ab}$의 값

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

44. $A:B:C=1:2:3$**일 때,** $\dfrac{b^2}{a^2+c^2}$**의 값**

45. $A:B:C=1:2:3$**일 때,** $\dfrac{ab}{c^2}$**의 값**

46. $\mathrm{A}:\mathrm{B}:\mathrm{C}=1:2:3$**일 때,** $a:b:c$**의 값**

47. $\sin A+\sin B+\sin C=\sqrt{3}$, $R=3$**일 때,** $a+b+c$**의 값**

48. $\sin A:\sin B:\sin C=2:4:3$**일 때,** $\dfrac{ac}{b^2}$**의 값**

49. $\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$**일 때,** $\dfrac{a^2}{bc}$**의 값**

50. $A:B:C=1:2:3$**일 때,** $a:b:c$**의 값**

51. $A:B:C=2:1:1$**일 때,** $\dfrac{b^2}{ac}$**의 값**

52. $3\sin B-\sin C=\sin A$, $a+c=9$**일 때,** b**의 값**

53. $\sin A+\sin B-2\sin C=\sqrt{2}$, $a+b-2c=4$**일 때,** R**의 값**

54. $2\sin A=\sin B+\sin C$, $2a-c=2$**일 때,** b**의 값**

55. $2\sin A=\sin B+\sin C$, $b+c=8$**일 때,** a**의 값**

◪ **다음 등식을 만족하는** $\triangle\mathrm{ABC}$**는 어떤 삼각형인지 말하여라.**

56. $a\sin A=b\sin B$

57. $a\sin A=b\sin B+c\sin C$

58. $a\sin A=b\sin B=c\sin C$

59. $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$

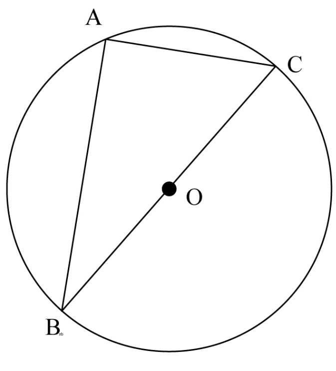
60. $\sin(\pi - A)\sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right) = 0$

61. $\sin^2 A - \sin^2 B = 0$

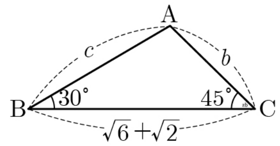
62. $a^2 \sin A - c^2 \sin C = 0$

◪ 다음 물음에 답하여라.

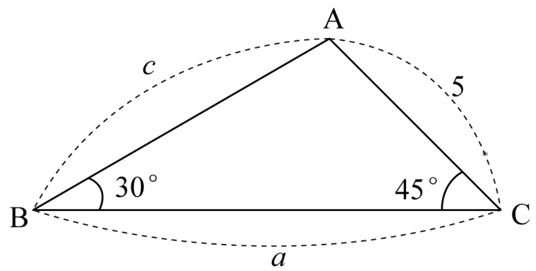
63. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$를 지름으로 하는 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 24$, $\overline{\mathrm{AC}} = 10$일 때, $\sin\mathrm{C}$의 값을 구하여라.



64. 다음 그림과 같은 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 A, b, c의 값을 구하여라.
$\left(단,\ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$



65. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R와 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이 c에 대하여 $\mathrm{R}+c^2$의 값을 구하여라.



66. x에 대한 이차방정식
$(\sin B - \cos A)x^2 + 2\cos C\, x - \sin B - \cos A = 0$이 중근을 가질 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

정답 및 해설

1) 75°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}=2\cdot 1$이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}=2$에서 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$ $(\because\ 0^\circ<B<180^\circ)$

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}=2$에서 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ C=60^\circ$ $(\because\ 0^\circ<C<90^\circ)$

그런데 $B+C<180^\circ$이어야 하므로 $B=45^\circ$

$\therefore\ A=180^\circ-B-C=75^\circ$

2) $\sqrt{3}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{3}{\sin 120^\circ}=2R$이므로

$\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ $\qquad\therefore\ R=\sqrt{3}$

3) 75° 또는 15°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin B}$이므로

$\dfrac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin B}$ $\qquad\therefore\ \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$ $(\because\ 0^\circ<B<135^\circ)$

이때, $C=180^\circ-A-B$이므로

$C=75^\circ$ 또는 $C=15^\circ$

4) 90°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{5}{\sin B}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$이므로

$\dfrac{5}{\sin B}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\qquad\therefore\ \sin B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ B=30^\circ$ $(\because\ 0^\circ<B<120^\circ)$

이때, $A=180^\circ-B-C$이므로 $A=90^\circ$

5) $5\sqrt{2}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이므로 $A=135^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{a}{\sin 135^\circ}$이므로

$\dfrac{5}{\frac{1}{2}}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad\therefore\ a=5\sqrt{2}$

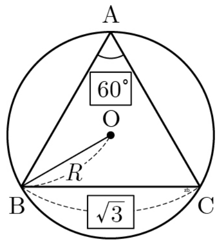
6) $\sqrt{6}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이므로 $C=45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$이므로

$\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad\therefore\ c=\sqrt{6}$

7) 1

⇨ 

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin \mathrm{A}}=2\mathrm{R}$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{R}$ $\qquad\therefore\ \mathrm{R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=1$

8) 45° 또는 135°

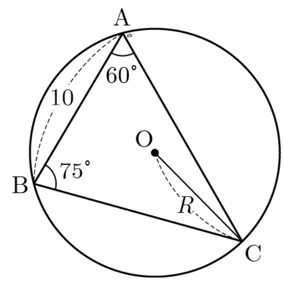
⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sin B}=2\cdot 12$이므로

$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

9) $5\sqrt{2}$

⇨ 

$\mathrm{C}=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$이므로 $\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=2\mathrm{R}$

$\therefore\ \mathrm{R}=\dfrac{10}{2\sin 45^\circ}=5\sqrt{2}$

10) $10\sqrt{3}$

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin 120^\circ}=2\cdot 10$이므로

$\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=20$ $\qquad\therefore\ a=10\sqrt{3}$

11) $\sqrt{2}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이므로 $A=45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=2R$이므로

$\dfrac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$ $\qquad\therefore\ R=\sqrt{2}$

12) 1

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ $\quad\therefore\ R=1$

13) $2\sqrt{6}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$ 이므로 $B=45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$\dfrac{6}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ $\quad\therefore\ b=2\sqrt{6}$

14) $4\sqrt{6}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$ 이므로 $A=60^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{8}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$\dfrac{a}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ $\quad\therefore\ a=4\sqrt{6}$

15) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$ 이므로

$\dfrac{5}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{2}}$ $\quad\therefore\ c=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

16) $4\sqrt{3}$

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{8}{\sin C}$이므로

$\dfrac{4}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{8}{\sin C}$ $\quad\therefore\ \sin C=1$

$\therefore\ C=90^\circ\ (\because\ 0^\circ<C<150^\circ)$

따라서 $\triangle$ABC는 c를 빗변으로 하는 직각삼각형

이므로 $b=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$

17) $2\sqrt{3}$

⇨ $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

사인법칙에 의해 $\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=2R$이므로

$\dfrac{6}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ $\quad\therefore\ R=2\sqrt{3}$

18) 1

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

19) 30°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ $\quad\therefore\ \sin B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ B=30^\circ\ (\because\ 0^\circ<B<60^\circ)$

20) 30°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{6}{\sin 135^\circ}$ 이므로

$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{6}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ $\quad\therefore\ \sin A=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ A=30^\circ\ (\because\ 0^\circ<A<45^\circ)$

21) $4\sqrt{3}$

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{12}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$a\sin 120^\circ=12\sin 30^\circ$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=6$

$\therefore\ a=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

22) 45° 또는 135°

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin B}$이므로

$2\sin B=2\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore\ \sin B=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$ 이므로 $B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

23) 30°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{5}{\sin B}$이므로

$\dfrac{5\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{5}{\sin B}$ $\quad\therefore\ \sin B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ B=30^\circ\ (\because\ 0^\circ<B<135^\circ)$

24) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{b}{\sin 30^\circ}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$b\sin 45^\circ=5\sin 30^\circ$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ b=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

25) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{c}{\sin 45^\circ}=\dfrac{4}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$c\sin 60^\circ = 4\sin 45^\circ$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c = 2\sqrt{2}$

$\therefore\ c = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

26) 60° 또는 120°

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin \mathrm{C}}$ 이므로

$2\sin \mathrm{C} = \sqrt{6}\sin 45^\circ$

$\therefore\ \sin \mathrm{C} = \sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < \mathrm{C} < 180^\circ$ 이므로 $\mathrm{C} = 60^\circ$ 또는 $\mathrm{C} = 120^\circ$

27) 30°

⇨ 사인법칙에 의하여 $\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$ 이므로

$\sqrt{2}\sin \mathrm{A} = \sin 135^\circ$

$\therefore\ \sin \mathrm{A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

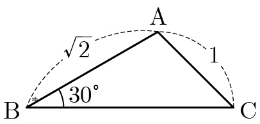
$0^\circ < \mathrm{A} < 180^\circ$ 이므로 $\mathrm{A} = 30^\circ$ 또는 $\mathrm{A} = 150^\circ$
그런데 $\mathrm{A} + \mathrm{C} < 180^\circ$ 이어야 하므로 $\mathrm{A} = 30^\circ$

28) $\sqrt{2}$

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{b}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad \therefore\ b = \sqrt{2}$

29) 45°

⇨ 

사인법칙에 의하여 $\dfrac{1}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin \mathrm{C}}$ 이므로

$\sin \mathrm{C} = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \therefore\ \mathrm{C} = 45^\circ$

30) 30°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{6}{\sin 45^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sin x}$ 이므로

$\dfrac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sin x}$ $\qquad \therefore\ \sin x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x = 30^\circ$ ($\because\ 0^\circ < x < 135^\circ$)

31) $5\sqrt{3}$

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{x}{\sin 60^\circ} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad \therefore\ x = 5\sqrt{3}$

32) $5\sqrt{6}$

⇨ $A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $B = 45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{10}{\sin 45^\circ} = \dfrac{c}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$\dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\qquad \therefore\ c = 5\sqrt{6}$

33) 90°

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{8}{\sin C}$ 이므로

$\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{8}{\sin C}$ $\qquad \therefore\ \sin C = 1$

$\therefore\ C = 90^\circ$ ($\because\ 0^\circ < C < 120^\circ$)

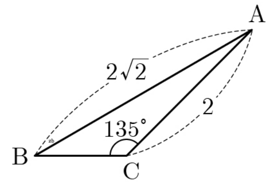
34) 12

⇨ $\triangle \mathrm{ABC}$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{12}{\sin 150^\circ} = 2\mathrm{R}$

$\therefore\ \mathrm{R} = \dfrac{12}{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = 12$

35) 15°

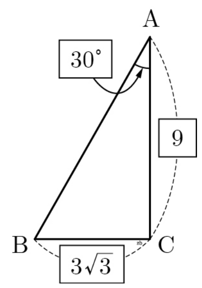
⇨ 

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin \mathrm{B}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$ 이므로

$\sin \mathrm{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{B} = 30^\circ$ 또는 $\mathrm{B} = 150^\circ$
그런데 $\mathrm{C} = 135^\circ$ 이므로 $\mathrm{B} = 30^\circ$
$\therefore\ \mathrm{A} = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$

36) 60°

⇨ 

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{9}{\sin \mathrm{B}}$ 이므로

$3\sqrt{3}\sin \mathrm{B} = 9 \times \dfrac{1}{2}$, $\sin \mathrm{B} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \mathrm{B} = 60^\circ$

37) $5\sqrt{2}$

⇨ 사인법칙에 의해 $\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{x}{\sin 135^\circ}$이므로

$\dfrac{5}{\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\quad\therefore\ x=5\sqrt{2}$

38) 2

⇨ $b=c=2$에서 $\triangle$ABC는 B$=$C인 이등변삼각형이므로 B$=$C$=\dfrac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=2\mathrm{R}$

$\therefore\ \mathrm{R}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=2$

39) 6

⇨ A$+$B$+$C$=180^\circ$이므로
A$=180^\circ-(100^\circ+50^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=2\mathrm{R}$

$\therefore\ \mathrm{R}=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=6$

40) $2:3:4$

⇨ $a-2b+c=0$ …… ㉠
$4a-4b+c=0$ …… ㉡
㉡-㉠을 하면

$3a-2b=0$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{2}{3}b$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{3}b-2b+c=0$ $\quad\therefore\ c=\dfrac{4}{3}b$

따라서 $a:b:c=\dfrac{2}{3}b:b:\dfrac{4}{3}b=2:3:4$이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:3:4$

41) $5:3:4$

⇨ $a+b-2c=0$ …… ㉠
$a-3b+c=0$ …… ㉡
㉠-㉡을 하면

$4b-3c=0$ $\quad\therefore\ b=\dfrac{3}{4}c$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a+\dfrac{3}{4}c-2c=0$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{5}{4}c$

따라서 $a:b:c=\dfrac{5}{4}c:\dfrac{3}{4}c:c=5:3:4$이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:3:4$

42) $3:4:2$

⇨ $(a+b):(b+c):(c+a)=7:6:5$이므로
$a+b=7k,\ b+c=6k,\ c+a=5k$ …… ㉠
세 식을 변끼리 더하면
$2a+2b+2c=18k$ $\quad\therefore\ a+b+c=9k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면 $a=3k,\ b=4k,\ c=2k$
$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$
$=3k:4k:2k=3:4:2$

43) $\dfrac{3}{2}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이고, $A:B:C=1:3:2$이므로

$A=180^\circ\times\dfrac{1}{6}=30^\circ,\ B=180^\circ\times\dfrac{3}{6}=90^\circ,$

$C=180^\circ\times\dfrac{2}{6}=60^\circ$

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{1}{2}:1:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1:2:\sqrt{3}$

이때, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:2:\sqrt{3}$이므로 $a=k,\ b=2k,\ c=\sqrt{3}k$라 하면

$\dfrac{c^2}{ab}=\dfrac{(\sqrt{3}k)^2}{k\cdot 2k}=\dfrac{3}{2}$

44) $\dfrac{3}{5}$

⇨ 사인 법칙의 변형에 의하여
$a:b:c=\sin \mathrm{A}:\sin B:\sin C=1\ :\ \sqrt{3}\ :\ 2$ 이므로
$a=k,\ b=\sqrt{3}k,\ c=2k\ (k>0)$라고 하자.

$\therefore\ \dfrac{b^2}{a^2+c^2}=\dfrac{3k^2}{k^2+4k^2}=\dfrac{3}{5}$

45) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이고, $A:B:C=1:2:3$이므로

$A=180^\circ\times\dfrac{1}{6}=30^\circ,\ B=180^\circ\times\dfrac{2}{6}=60^\circ,$

$C=180^\circ\times\dfrac{3}{6}=90^\circ$

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{1}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$

이때, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$이므로 $a=k,\ b=\sqrt{3}k,\ c=2k$라 하면

$\dfrac{ab}{c^2}=\dfrac{k\cdot\sqrt{3}k}{4k^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

46) $1\ :\ \sqrt{3}\ :2$

⇨ $A+B+C=\pi$이므로, $A=\dfrac{\pi}{6},\ B=\dfrac{\pi}{3},\ C=\dfrac{\pi}{2}.$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름을 R이라 하자. 이때 사인법칙에 의하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$에서 $a=2R\sin A=2R\sin\dfrac{\pi}{6}=R,$

$b=2R\sin B=2R\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}R,$

$c=2R\sin C=2R\sin\dfrac{\pi}{2}=2R.$

따라서 $a\ :b\ :c=R\ :\ \sqrt{3}R\ :2R=1\ :\ \sqrt{3}\ :2$

47) $6\sqrt{3}$

⇨ 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\sqrt{3}$ 에서

$a+b+c=2\sqrt{3}R=6\sqrt{3}$

48) $\frac{3}{8}$

⇨ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:4:3$이므로

$a=2k,\ b=4k,\ c=3k$라 하면

$\frac{ac}{b^2}=\frac{2k\cdot 3k}{16k^2}=\frac{3}{8}$

49) $\frac{9}{20}$

⇨ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$이므로

$a=3k,\ b=4k,\ c=5k$라 하면

$\frac{a^2}{bc}=\frac{9k^2}{4k\cdot 5k}=\frac{9}{20}$

50) $1:\sqrt{3}:2$

⇨ $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:2:3$이므로

$A=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

$B=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ$

$C=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$

$\therefore\ \sin A : \sin B : \sin C=\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

$=1 : \sqrt{3} : 2$

사인 법칙의 변형에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1 : \sqrt{3} : 2$

51) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$ 이고, $A:B:C=2:1:1$이므로

$A=180^\circ\times\frac{2}{4}=90^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{1}{4}=45^\circ$,

$C=180^\circ\times\frac{1}{4}=45^\circ$

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=1:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}:1:1$

이때, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{2}:1:1$이므로 $a=\sqrt{2}k,\ b=k,\ c=k$라 하면

$\frac{b^2}{ac}=\frac{k^2}{\sqrt{2}k\cdot k}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

52) 3

⇨ 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$3\cdot\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}=\frac{a}{2R}$ 에서

$3b=a+c=9\qquad \therefore\ b=3$

53) $\sqrt{2}$

⇨ $\sin A+\sin B-2\sin C=\sqrt{2}$ 에서

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}-2\cdot\frac{c}{2R}=\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}R=a+b-2c=4\qquad \therefore\ R=\sqrt{2}$

54) 2

⇨ $2\sin A=\sin B+\sin C$에서

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$2\cdot\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$2a=b+c\qquad \therefore\ b=2a-c=2$

55) 4

⇨ 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$2\cdot\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$에서

$2a=b+c=8\qquad \therefore\ a=4$

56) $a=b$인 이등변삼각형

⇨ 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$

$a^2=b^2\qquad \therefore\ a=b\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

57) $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형

⇨ $a\sin A=b\sin B+c\sin C$에서

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}+c\frac{c}{2R}$

$a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

58) 정삼각형

⇨ $a\sin A=b\sin B=c\sin C$에서

$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$

$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R}$

$a^2=b^2=c^2\qquad \therefore\ a=b=c$

따라서 △ABC는 정삼각형이다.

59) $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형

⇨ $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$에서

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

60) $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

⇨ $\sin(\pi-A)=\sin A$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=\cos B$이므로,

$\sin(\pi-A)\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=\sin A\cos B=0$에서

$\sin A=0$ 또는 $\cos B=0$. 그런데 $0<A<\pi$이므로

$\sin A\neq 0$. $\therefore \cos B=0$에서 $B=\frac{\pi}{2}$

따라서 $\triangle ABC$는 $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

61) $a=b$인 이등변삼각형

⇨ $\sin^2 A-\sin^2 B=0$에서

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2=0$

$a^2-b^2=0$, $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore\ a=b$ ($\because\ a+b>0$)

따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

62) $a=c$인 이등변삼각형

⇨ $a^2\sin A-c^2\sin C$에서

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$a^2\cdot\frac{a}{2R}-c^2\cdot\frac{c}{2R}=0$

$a^3-c^3=0$, $(a-c)(a^2+ac+c^2)=0$

$\therefore\ a=c$ ($\because\ a^2+ac+c^2>0$)

따라서 $\triangle$ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

63) $\frac{12}{13}$

⇨ $\triangle ABC$는 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로,

$\overline{BC}=\sqrt{24^2+10^2}=26$.

따라서 $\sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$.

64) $A=105^\circ$, $b=2$, $c=2\sqrt{2}$

⇨ $A+B+C=180^\circ$이므로 $A=105^\circ$

사인법칙에 의해

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}=\frac{b}{\sin 30^\circ}$이고, $\sin 105^\circ=\sin 75^\circ$이므로

$b=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}\times\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\times\frac{1}{2}=2$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}$이므로

$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

65) 55

⇨ 사인법칙에 의하면 $\frac{5}{\sin 30^\circ}=2R$에서

$R=\frac{5}{2\sin 30^\circ}=5$.

한편 $\frac{c}{\sin 45^\circ}=2\times 5=10$에서

$c=10\sin 45^\circ=5\sqrt{2}$.

$\therefore\ R+c^2=5+(5\sqrt{2})^2=55$.

66) $C=90^\circ$인 직각삼각형

⇨ 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식이 0이어야 한다.

즉, $D/4=\cos^2 C+(\sin B-\cos A)(\sin B+\cos A)=0$

$\Rightarrow \cos^2 C+\sin^2 B-\cos^2 A=0$

$\Rightarrow 1-\sin^2 C+\sin^2 B-(1-\sin^2 A)=0$

$\Rightarrow \sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=0$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름을 R이라 할 때 사인법칙에 의하면 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$에서

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}$

에서 $a^2+b^2=c^2$.

따라서 $\triangle ABC$는 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.