



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
 1) 제작연월일 : 2019-03-15
 2) 제작자 : 교육지대(주)
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 곡선과 x 축 사이의 넓이

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

■ 다음 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

1. $y = -(x+1)(x-2)$

2. $y = -(x-1)(x-3)$

3. $y = 2(x+1)(x-2)$

4. $y = x^2 - 1$

5. $y = x^2 - x$

6. $y = x^2 - 2x$

7. $y = x^2 - 4x + 3$

8. $y = 2x^2 + 6x$

9. $y = -x^2 + 4x$

10. $y = -x^2 + x + 2$

11. $y = -x^2 + 2x + 3$

12. $y = x(x+1)(x-1)$

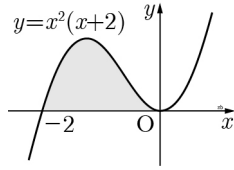
13. $y = x(x-1)(x+2)$

14. $y = x^3 - 4x$

15. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$

16. $y = -x^3 + x$

17. 다음 그림과 같이 곡선 $y = x^2(x+2)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



■ 주어진 구간에서 다음 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

18. $y = x^2$ $[-1, 2]$

19. $y = -x^2 - 2$ $[-2, 1]$

20. $y = x^2 - x$ $[0, 2]$

21. $y = x^2 - 2x$ $[0, 3]$

22. $y = x^2 - 3x$ $[-1, 2]$

23. $y = x^2 - 4x$ $[-1, 2]$

24. $y = x^2 + x - 2$ $[0, 2]$

25. $y = x^2 - 4x + 3$ $[0, 2]$

26. $y = x(x-1)(x-3)$ $[0, 2]$

27. $y = x^2(x-2)$ $[0, 4]$

02 / 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

■ 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

28. $y = -2x^2$, $y = -x - 1$

29. $y = x^2 + 2$, $y = -x + 2$

30. $y = x^2 - 2$, $y = 3x + 2$

31. $y = -x^2 + 4$, $y = x - 2$

32. $y = x^2 - 3x$, $y = x - 3$

33. $y = x^2 + x - 3$, $y = 2x - 1$

34. $y = x^2 - 3x + 1, y = x - 2$

35. $y = 2x^2 - x + 1, y = 3x + 1$

36. $y = -x^2 + 3x, y = x$

37. $y = -x^2 + 6x, y = 2x$

38. $y = -x^2 + 7x, y = 2x + 4$

39. $y = -x^2 + x + 4, y = -x + 1$

40. $y = x^3 + 3, y = 3x + 1$

41. $y = x^3 - x, y = x$

42. $y = -x^3 + 4x + 3, y = x + 1$

▣ 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

43. $y = x^2, y = -x^2 + 2$

44. $y = -x^2 + x, y = x^2 + x - 2$

45. $y = x(x - 2), y = -x(x - 2)$

46. $y = x^2 - 3x, y = -x^2 + 5x - 6$

47. $y = x^2 - 5x + 6, y = -x^2 + 3x$

48. $y = x^2 - 2x + 3, y = -x^2 + 4x + 11$

49. $y = -x^2 + 4x - 3, y = x^2 - 6x + 5$

50. $y = 2x^2 - 4x - 4, y = x^2 - 2x + 4$

51. $y = x^2 - 2x - 1, y = -2x^2 + 4x - 1$

52. $y = x^3 - 2x, y = x^2$

53. $y = x^2 + 3x, y = -2x^2 + 6$

54. $y = x^3 - 2x^2, y = -x(x - 2)$

55. $y = x^3 - 2x, y = 3x^2 - 4x$

56. $y = x(x-2), y = -x(x+1)(x-2)$

57. $y = x(x+2), y = x(x+2)(x-1)$

■ 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

58. $f(x) = x^2$

59. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

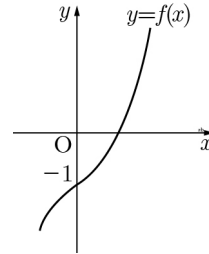
60. $f(x) = x^3 \ (x \geq 0)$

61. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \ (x \geq 0)$

62. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x \ (x \geq 0)$

■ 다음 물음에 답하여라.

63. 함수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$ 의 값을 구하여라.



64. 함수 $f(x) = x^2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $\int_2^3 f(x)dx + \int_4^9 g(x)dx$ 의 값을 구하여라.

65. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 g(x)dx$ 의 값을 구하여라.

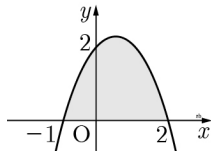
66. 함수 $f(x) = x^3 + 2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx + \int_2^{10} g(x)dx$ 의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) $\frac{9}{2}$

⇒ 곡선 $y=-(x+1)(x-2)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-(x+1)(x-2)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$



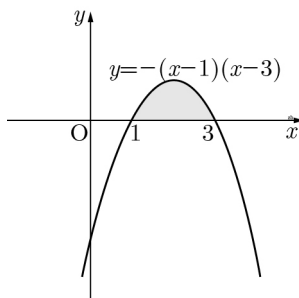
$$y=-(x+1)(x-2)$$

$y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (-x^2+x+2) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2) $\frac{4}{3}$

⇒ 곡선 $y=-(x-1)(x-3)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 -(x-1)(x-3) dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = 0 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3) 9

⇒ 곡선 $y=2(x+1)(x-2)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 이므로 구하는 도형의 넓이 S 는

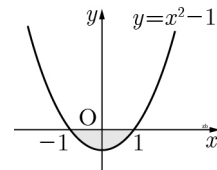
$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^2 2(x+1)(x-2) dx = -\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x \right]_{-1}^2 \\ &= -\left(\frac{16}{3} - 4 - 8 \right) + \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4 \right) = \frac{20}{3} + \frac{7}{3} = 9 \end{aligned}$$

4) $\frac{4}{3}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2-1=(x+1)(x-1)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$



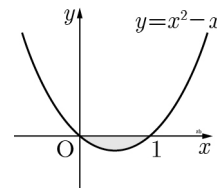
구간 $[-1, 1]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{-(x^2-1)\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2+1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

5) $\frac{1}{6}$

⇒ 곡선 $y=x^2-x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-x=0$ 에서

$$x(x-1)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$



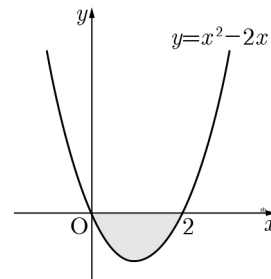
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{-(x^2-x)\} dx &= -\int_0^1 (x^2-x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

6) $\frac{4}{3}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x=x(x-2)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$



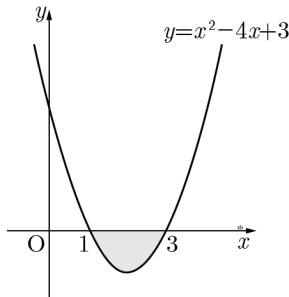
구간 $[0, 2]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로

$$-\int_0^2 (x^2-2x) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

7) $\frac{4}{3}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$



구간 $[1, 3]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx &= -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 \\ &= -(9 - 18 + 9) + \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

8) 9

⇒ 곡선 $y = 2x^2 + 6x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$2x^2 + 6x = 0 \text{에서 } 2x(x+3) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-3$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^0 (-2x^2 - 6x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^0 = -(18 - 27) = 9 \end{aligned}$$

9) $\frac{32}{3}$

⇒ 곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 4x = 0 \text{에서 } -x(x-4) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

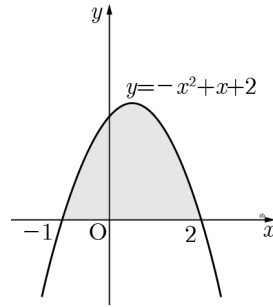
$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

10) $\frac{9}{2}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2) = 0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$



구간 $[-1, 2]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

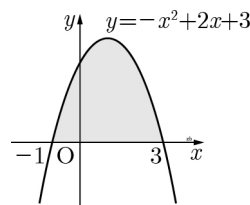
11) $\frac{32}{3}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$-(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[-1, 3]$ 에서 $y \geq 0$



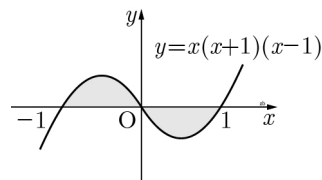
따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 \\ &= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

12) $\frac{1}{2}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x(x+1)(x-1) = 0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



구간 $[-1, 0]$ 에서 $y \geq 0$ 이고, 구간 $[0, 1]$ 에서 $y \leq 0$
이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

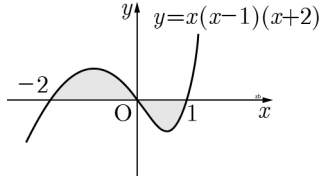
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |x(x+1)(x-1)| dx \\ &= \int_{-1}^0 x(x+1)(x-1) dx + \int_0^1 \{-x(x+1)(x-1)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

13) $\frac{37}{12}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 $x(x-1)(x+2)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



구간 $[-2, 0]$ 에서 $y \geq 0$ 이고 구간 $[0, 1]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-2}^1 |x(x-1)(x+2)| dx$$

$$= \int_{-2}^0 x(x-1)(x+2) dx + \int_0^1 \{-x(x-1)(x+2)\} dx$$

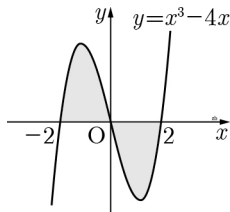
$$= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1$$

$$= -\left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{37}{12}$$

14) 8

⇒ 곡선 $y = x^3 - 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 4x = 0$ 에서 $x(x+2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$



따라서 구하는 넓이는

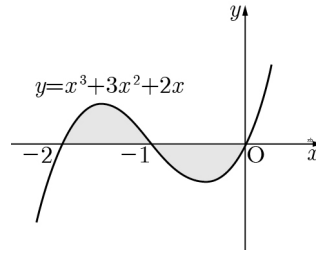
$$\int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2$$

$$= 4 + 4 = 8$$

15) $\frac{1}{2}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2) = 0$ 에서 $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$



구간 $[-2, -1]$ 에서 $y \geq 0$ 이고 $[-1, 0]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로

$$\int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x) dx - \int_{-1}^0 (x^3 + 3x^2 + 2x) dx$$

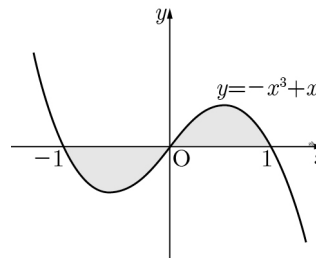
$$= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x) dx + \int_0^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 \right]_0^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) - (4 - 8 + 4) + \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) = \frac{1}{2}$$

16) $\frac{1}{2}$

⇒ 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^3 + x = -x(x+1)(x-1) = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$



구간 $[-1, 0]$ 에서 $y \leq 0$ 이고 구간 $[0, 1]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

$$-\int_{-1}^0 (-x^3 + x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

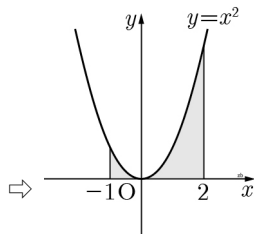
$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

17) $\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 x^2(x+2) dx = \int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2) dx$$

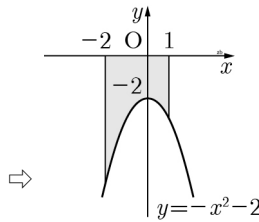
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^0 = -\left(4 - \frac{16}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

18) 3



$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = 3$$

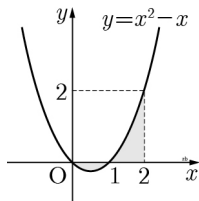
19) 9



$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \{ -(-x^2 - 2) \} dx &= \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{7}{3} - \left(-\frac{20}{3} \right) = 9 \end{aligned}$$

20) 1

$\Rightarrow y = x^2 - x$ 의 그래프는 다음과 같다.

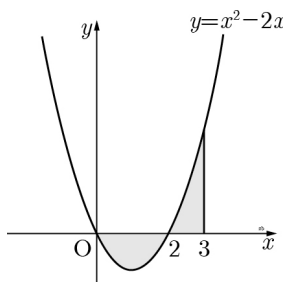


따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^2 - x| dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

21) $\frac{8}{3}$

$\Rightarrow y = x^2 - 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

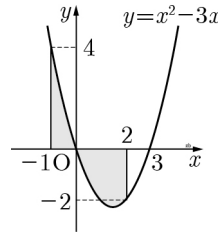


따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= -\left(\frac{8}{3} - 4 \right) + (9 - 4) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

22) $\frac{31}{6}$

$\Rightarrow y = x^2 - 3x$ 의 그래프는 다음과 같다.

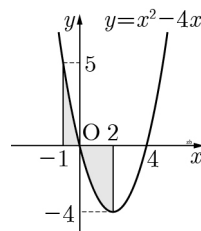


따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |x^2 - 3x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) + \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

23) $\frac{23}{3}$

$\Rightarrow y = x^2 - 4x$ 의 그래프는 다음과 같다.

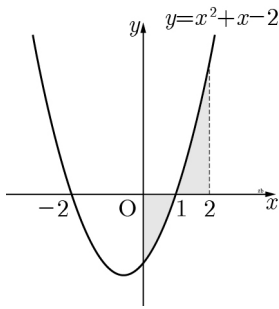


따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |x^2 - 4x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(-\frac{1}{3} - 2 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

24) 3

$\Rightarrow y = x^2 + x - 2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

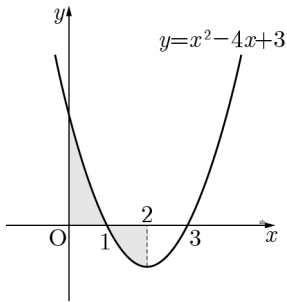


따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^1 (x^2 + x - 2) dx + \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = 3 \end{aligned}$$

25) 2

$\Rightarrow y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

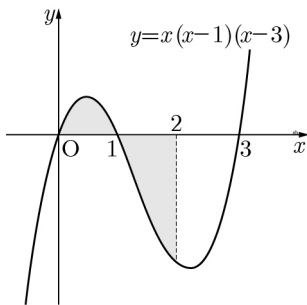


따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) + \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) = 2 \end{aligned}$$

26) $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow y = x(x-1)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



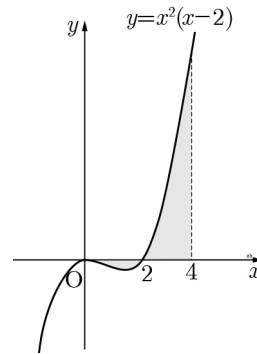
따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx - \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(4 - \frac{32}{3} + 6\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

27) 24

$\Rightarrow y = x^2(x-2) = x^3 - 2x^2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^2 (x^3 - 2x^2) dx + \int_2^4 (x^3 - 2x^2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_2^4 \\ &= -\left(4 - \frac{16}{3}\right) + \left(64 - \frac{128}{3}\right) - \left(4 - \frac{16}{3}\right) = 24 \end{aligned}$$

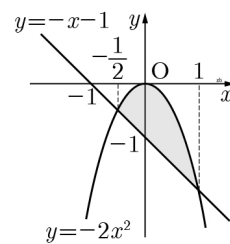
28) $\frac{9}{8}$

\Rightarrow 곡선 $y = -2x^2$ 과 직선 $y = -x - 1$ 의 교점의 x 좌표는 $-2x^2 = -x - 1$ 에서

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$



따라서 구하는 넓이는

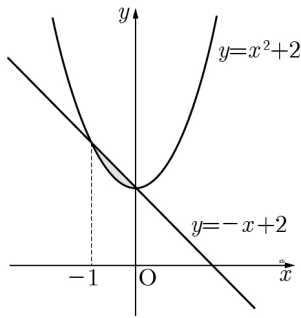
$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{1}{2}}^1 \{-2x^2 - (-x - 1)\} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{5}{6} - \left(-\frac{7}{24}\right) = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

29) $\frac{1}{6}$

\Rightarrow 교점의 x 좌표는 $x^2 + 2 = -x + 2$ 에서

$$x^2+x=0, \quad x(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

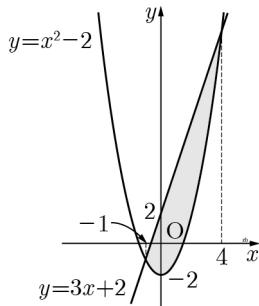
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(-x+2) - (x^2+2)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x-x^2) dx \\ &= \int_0^{-1} (x+x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{-1} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

30) $\frac{125}{6}$

\Rightarrow 곡선 $y=x^2-2$ 와 직선 $y=3x+2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-2=3x+2$ 에서

$$x^2-3x-4=0, \quad (x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^4 \{(3x+2) - (x^2-2)\} dx \\ &= \int_{-1}^4 (-x^2+3x+4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^4 \\ &= \frac{56}{3} - \left(-\frac{13}{6} \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

31) $\frac{125}{6}$

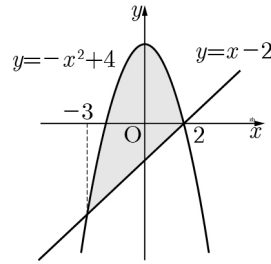
\Rightarrow 곡선 $y=-x^2+4$ 와 직선 $y=x-2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$y = (-x^2+4) - (x-2) = -x^2-x+6$$

의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
교점의 x 좌표는

$$-x^2-x+6 = -(x+3)(x-2) = 0 \text{에서}$$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=2$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

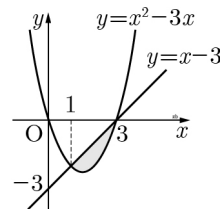
$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^2 \{(-x^2+4) - (x-2)\} dx \\ &= \int_{-3}^2 (-x^2-x+6) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-3}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) \\ &= \frac{22}{3} + \frac{27}{2} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

32) $\frac{4}{3}$

\Rightarrow 곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=x-3$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-3x = x-3 \text{에서 } x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$



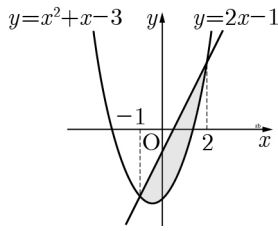
이때, 구간 $[1, 3]$ 에서 $x-3 \geq x^2-3x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(x-3) - (x^2-3x)\} dx \\ &= \int_1^3 (-x^2+4x-3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= (-9+18-9) - \left(-\frac{1}{3}+2-3 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

33) $\frac{9}{2}$

\Rightarrow 곡선 $y=x^2+x-3$ 과 직선 $y=2x-1$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2+x-3=2x-1$ 에서 $x^2-x-2=0$

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

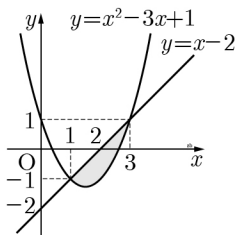


이때, 구간 $[-1, 2]$ 에서 $2x-1 \geq x^2+x-3$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(2x-1) - (x^2+x-3)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^2+x+2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

34) $\frac{4}{3}$

\Rightarrow 곡선 $y = x^2 - 3x + 1$ 과 직선 $y = x - 2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 3x + 1 = x - 2$ 에서 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 1$ 또는 $x = 3$



이때, 구간 $[1, 3]$ 에서 $x-2 \geq x^2-3x+1$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(x-2) - (x^2-3x+1)\} dx \\ &= \int_1^3 (-x^2+4x-3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= (-9+18-9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

35) $\frac{8}{3}$

\Rightarrow 곡선 $y = 2x^2 - x + 1$ 과 직선 $y = 3x + 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는
 $y = (2x^2 - x + 1) - (3x + 1) = 2x^2 - 4x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y = 2x^2 - 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $2x^2 - 4x = 0$ 에서

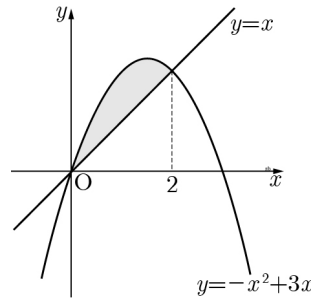
$$2x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \{(3x+1) - (2x^2-x+1)\} dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2+4x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

36) $\frac{4}{3}$

\Rightarrow 교점의 x 좌표는 $-x^2+3x=x$ 에서 $x(x-2)=0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$



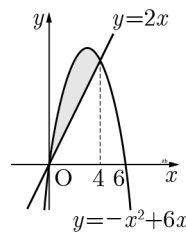
따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-x^2+3x) - x\} dx \\ &= \int_0^2 (-x^2+2x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

37) $\frac{32}{3}$

\Rightarrow 곡선 $y = -x^2 + 6x$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x &= 2x \text{에서 } x^2 - 4x = 0, x(x-4) = 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 4 \end{aligned}$$



이때, 구간 $[0, 4]$ 에서 $-x^2+6x \geq 2x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (-x^2+6x-2x) dx \\ &= \int_0^4 (-x^2+4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

38) $\frac{9}{2}$

\Rightarrow 곡선 $y = -x^2 + 7x$ 와 직선 $y = 2x + 4$ 로 둘러싸인

도형의

넓이는

$$y = (-x^2 + 7x) - (2x + 4) = -x^2 + 5x - 4 \text{의 그래프}$$

와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

교점의 x 좌표는 $-x^2 + 5x - 4 = -(x-1)(x-4) = 0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=4$ 이므로 구하는 도형의 넓이 S 는

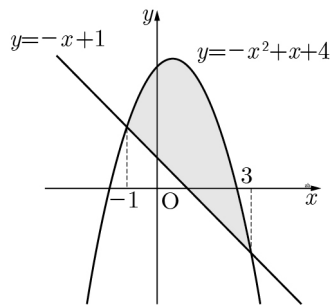
$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \{(-x^2 + 7x) - (2x + 4)\} dx \\ &= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

39) $\frac{32}{3}$

\Rightarrow 교점의 x 좌표는 $-x^2 + x + 4 = -x + 1$ 에서

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$



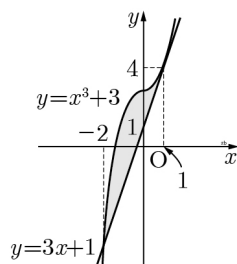
따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \{(-x^2 + x + 4) - (-x + 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

40) $\frac{27}{4}$

\Rightarrow 곡선 $y = x^3 + 3$ 과 직선 $y = 3x + 1$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3 + 3 = 3x + 1$ 에서 $x^3 - 3x + 2 = 0$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2$$



이때, 구간 $[-2, 1]$ 에서 $x^3 + 3 \geq 3x + 1$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(x^3 + 3) - (3x + 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

41) 2

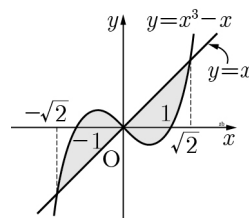
\Rightarrow 곡선 $y = x^3 - x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - x = x \text{에서}$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-\sqrt{2}}^0 \{(x^3 - x) - x\} dx + \int_0^{\sqrt{2}} \{x - (x^3 - x)\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 - 2x) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

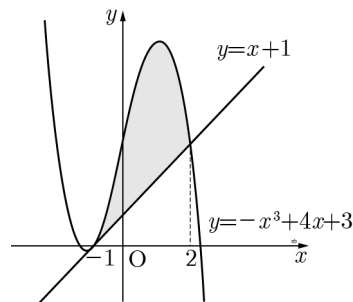
42) $\frac{27}{4}$

\Rightarrow 곡선 $y = -x^3 + 4x + 3$ 과 직선 $y = x + 1$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^3 + 4x + 3 = x + 1$ 에서

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$



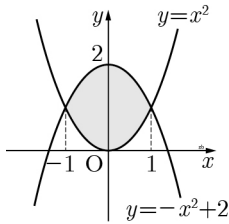
따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^2 \{(-x^3 + 4x + 3) - (x + 1)\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\
 &= (-4 + 6 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right) = \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

43) $\frac{8}{3}$

⇒ 두 곡선 $y = x^2$, $y = -x^2 + 2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 = -x^2 + 2$ 에서
 $2x^2 - 2 = 0$, $2(x+1)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$

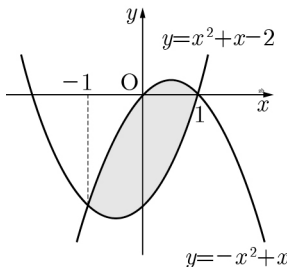


따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \{(-x^2 + 2) - x^2\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = 4 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\
 &= 4 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

44) $\frac{8}{3}$

⇒ 두 곡선 $y = -x^2 + x$, $y = x^2 + x - 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는
 $y = (-x^2 + x) - (x^2 + x - 2) = -2x^2 + 2$
 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
 교점의 x 좌표는 $-2x^2 + 2 = -2(x+1)(x-1) = 0$ 에서
 $x = -1$ 또는 $x = 1$

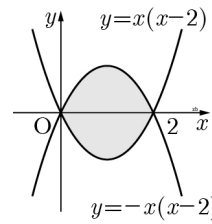


따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^1 \{(-x^2 + x) - (x^2 + x - 2)\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = 2 \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx \\
 &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = 2 \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

45) $\frac{8}{3}$

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x(x-2) = -x(x-2)$ 에서
 $2x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0$ 또는 $x = 2$



이때, 구간 $[0, 2]$ 에서 $-x(x-2) \geq x(x-2)$ 이므로
 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \{-x(x-2) - x(x-2)\} dx \\
 &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

46) $\frac{8}{3}$

⇒ 두 곡선 $y = x^2 - 3x$, $y = -x^2 + 5x - 6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$y = (-x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 3x) = -2x^2 + 8x - 6$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
 교점의 x 좌표는

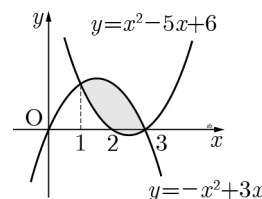
$-2x^2 + 8x - 6 = -2(x-1)(x-3) = 0$ 에서
 $x = 1$ 또는 $x = 3$ 이므로 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^3 \{(-x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 3x)\} dx \\
 &= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right]_1^3 \\
 &= (-18 + 36 - 18) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 6 \right) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

47) $\frac{8}{3}$

⇒ 두 곡선 $y = x^2 - 5x + 6$, $y = -x^2 + 3x$ 의 교점의 x 좌표는

$x^2 - 5x + 6 = -x^2 + 3x$ 에서
 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 3$



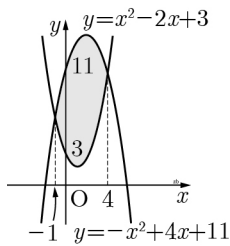
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\} dx \\ &= \int_1^3 (-2x^2+8x-6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3 \\ &= 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

48) $\frac{125}{3}$

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^2-2x+3 &= -x^2+4x+11 \text{ 에서 } x^2-3x-4=0 \\ (x+1)(x-4) &= 0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$



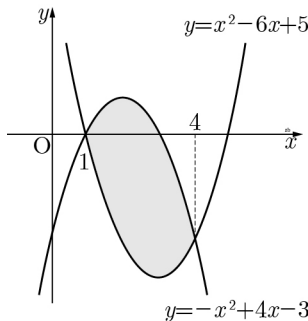
이때, 구간 $[-1, 4]$ 에서 $-x^2+4x+11 \geq x^2-2x+3$
이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 \{(-x^2+4x+11)-(x^2-2x+3)\} dx \\ &= \int_{-1}^4 (-2x^2+6x+8) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x\right]_{-1}^4 \\ &= \left(-\frac{128}{3}+48+32\right) - \left(-\frac{2}{3}+3+8\right) = \frac{125}{3} \end{aligned}$$

49) 9

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2+4x-3 &= x^2-6x+5, \quad 2(x-1)(x-4)=0 \\ \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

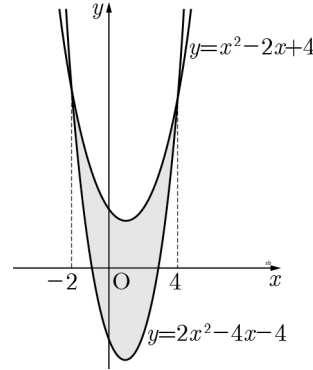
$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \{(-x^2+4x-3)-(x^2-6x+5)\} dx \\ &= \int_1^4 (-2x^2+10x-8) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{128}{3}+80-32\right) - \left(-\frac{2}{3}+5-8\right) = 9 \end{aligned}$$

50) 36

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} 2x^2-4x-4 &= x^2-2x+4, \quad (x+2)(x-4)=0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$



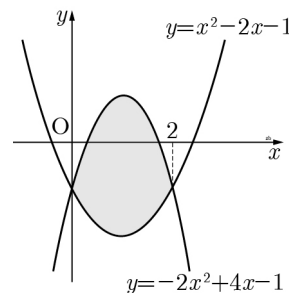
따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^4 \{(x^2-2x+4)-(2x^2-4x-4)\} dx \\ &= \int_{-2}^4 (-x^2+2x+8) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^4 \\ &= \left(-\frac{64}{3}+16+32\right) - \left(\frac{8}{3}+4-16\right) = 36 \end{aligned}$$

51) 4

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^2-2x-1 &= -2x^2+4x-1, \quad 3x(x-2)=0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-2x^2+4x-1)-(x^2-2x-1)\} dx \\ &= \int_0^2 (-3x^2+6x) dx \\ &= [-x^3+3x^2]_0^2 = 4 \end{aligned}$$

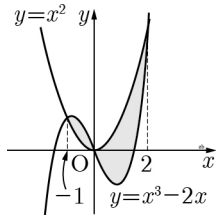
52) $\frac{37}{12}$

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x^3-2x=x^2$ 에서

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$



이때, 구간 $[-1, 0]$ 에서 $x^3 - 2x \geq x^2$ 이고 구간 $[0, 2]$ 에서 $x^2 \geq x^3 - 2x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

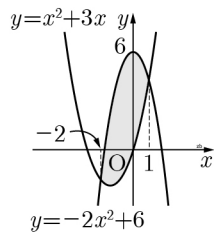
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(x^3 - 2x) - x^2\} dx + \int_0^2 \{x^2 - (x^3 - 2x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

53) $\frac{27}{2}$

\Rightarrow 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + 3x = -2x^2 + 6 \text{에서 } x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2$$



이때, 구간 $[-2, 1]$ 에서 $-2x^2 + 6 \geq x^2 + 3x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

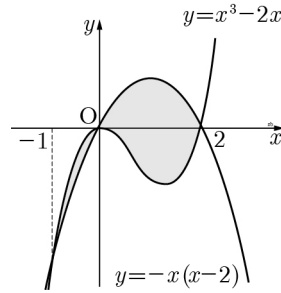
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(-2x^2 + 6) - (x^2 + 3x)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-3x^2 - 3x + 6) dx \\ &= \left[-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(-1 - \frac{3}{2} + 6\right) - (8 - 6 - 12) = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

54) $\frac{37}{12}$

\Rightarrow 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 2x^2 = -x^2 + 2x, \quad x(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(x^3 - 2x^2) - (-x^2 + 2x)\} dx \\ &\quad + \int_0^2 \{(-x^2 + 2x) - (x^3 - 2x^2)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

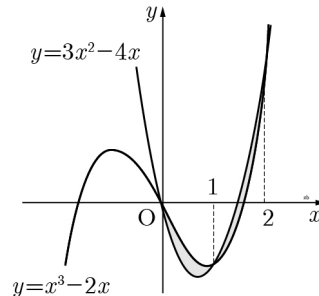
55) $\frac{1}{2}$

\Rightarrow 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 2x = 3x^2 - 4x$ 에서

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$



이때, 구간 $[0, 1]$ 에서 $x^3 - 2x \geq 3x^2 - 4x$ 이고 구간 $[1, 2]$ 에서 $3x^2 - 4x \geq x^3 - 2x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

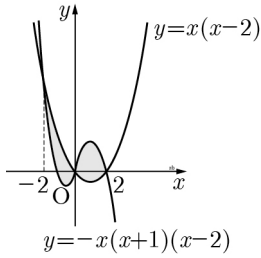
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(x^3 - 2x) - (3x^2 - 4x)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{(3x^2 - 4x) - (x^3 - 2x)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

56) 8

\Rightarrow 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x(x-2) = -x(x+1)(x-2) \text{에서 } x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$



이때, 구간 $[-2, 0]$ 에서 $x(x-2) \geq -x(x+1)(x-2)$
이고 구간 $[0, 2]$ 에서
 $x(x-2) \leq -x(x+1)(x-2)$ 이므로 구하는 도형
의 넓이를 S 라 하면

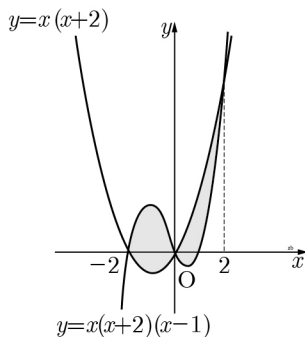
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \{x(x-2) + x(x+1)(x-2)\} dx \\ &+ \int_0^2 \{-x(x+1)(x-2) - x(x-2)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= -(4-8) + (-4+8) = 8 \end{aligned}$$

57) 8

⇒ 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x(x+2) = x(x+2)(x-1), \quad x(x+2)(2-x) = 0$$

$$\therefore x = -2, x = 0, x = 2$$

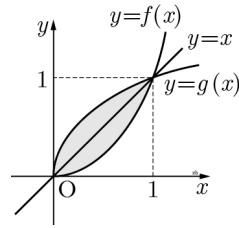


따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \{x(x+2)(x-1) - x(x+2)\} dx \\ &+ \int_0^2 \{x(x+2) - x(x+2)(x-1)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= -(4-8) + (-4+8) = 8 \end{aligned}$$

58) $\frac{1}{3}$

⇒ 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S 라 하면 S 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는
 $x^2 = x$ 에서 $x(x-1) = 0$

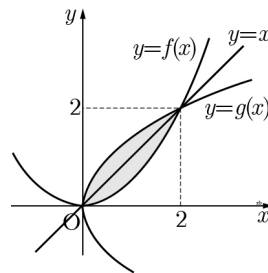
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

59) $\frac{4}{3}$

⇒ 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S 라고 하면 S 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x^2 = x \text{에서 } x(x-2) = 0$$

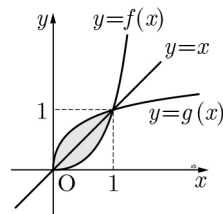
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = 2 \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

60) $\frac{1}{2}$

⇒ 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S 라 하면 S 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 = x \text{에서 } x(x-1)(x+1) = 0$$

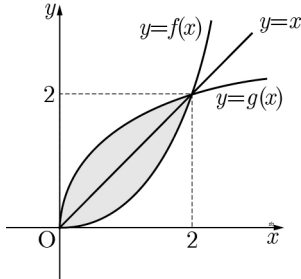
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \quad (\because x \geq 0)$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

61) 2

⇒ 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S 라고 하면 S 는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{1}{4}x^3 = x$ 에서 $x(x+2)(x-2) = 0$

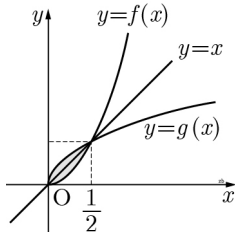
∴ $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because x \geq 0$)

따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = 2 \int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^3 \right) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}x^4 \right]_0^2 = 2$$

62) $\frac{1}{24}$

⇒ 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S 라 하면 S 는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x = x \text{에서}$$

$$\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x = 0, \quad x(2x+1)(2x-1) = 0$$

∴ $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ($\because x \geq 0$)

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

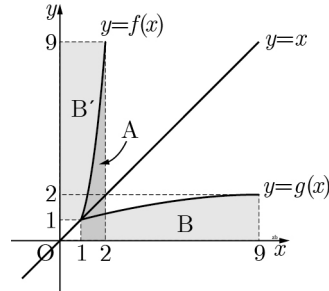
$$S = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ x - \left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x \right) \right\} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x \right) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$$

63) $\frac{51}{4}$

⇒ 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 다음 그림에서 $\int_1^9 g(x)dx$ 의 값은 색칠된 부분 B 의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 부분 B' 의 넓이와 같다.



$$\therefore \int_1^9 g(x)dx = (B \text{의 넓이}) = (B' \text{의 넓이})$$

$$= 2 \cdot 9 - 1 \cdot 1 - (A \text{의 넓이})$$

$$= 18 - 1 - \int_1^2 f(x)dx$$

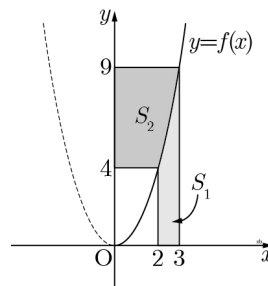
$$= 17 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2$$

$$= 17 - (4 + 2 - 2) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{51}{4}$$

64) 19

⇒ $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$)에서 $f(2) = 4$, $f(3) = 9$

이때, $\int_2^3 f(x)dx = S_1$, $\int_4^9 g(x)dx = S_2$ 라 하면

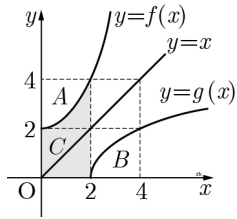


$$\therefore \int_2^3 f(x)dx + \int_4^9 g(x)dx$$

$$= S_1 + S_2 = 3 \times 9 - 2 \times 4 = 19$$

65) 8

⇒ 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ($x \geq 0$)의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



그림에서

$(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 g(x) dx$$

$$= (C \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이})$$

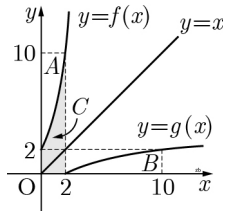
$$= (C \text{의 넓이}) + (A \text{의 넓이})$$

$$= 2 \times 4 = 8$$

66) 20

\Rightarrow 함수 $f(x) = x^3 + 2$ ($x \geq 0$)의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



그림에서 $(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_2^{10} g(x) dx$$

$$= (C \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이})$$

$$= (C \text{의 넓이}) + (A \text{의 넓이})$$

$$= 2 \times 10 = 20$$