I

이차곡선

정답과 해설 292쪽

지도서 100쪽 / 교과서 42쪽 문제 1

이차곡선의 기울기가 m인 접선의 방정식

이차곡선에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 접선의 방정식을 $y=mx+n$으로 놓고, 이를 이차곡선의 방정식에 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식의 판별식이 $D=0$임을 이용하여 구할 수 있다.

따라서 이차곡선에 접하고 기울기가 $m(m\neq 0)$인 접선의 방정식은 다음과 같다.

❶ 포물선 $y^2=4px$ ⇨ $y=mx+\dfrac{p}{m}$

$x^2=4py$ ⇨ $y=mx-pm^2$

❷ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ⇨ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

❸ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ⇨ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2>b^2$)

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ ⇨ $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$ (단, $b^2>a^2m^2$)

예 (1) 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 4인 접선의 방정식은 $m=4$, $p=2$이므로

$y=4x+\dfrac{2}{4}$, 즉 $y=4x+\dfrac{1}{2}$

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은 $m=3$, $a=4$, $b=5$이므로

$y=3x\pm\sqrt{16\times 9+25}$, 즉 $y=3x\pm 13$

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은 $m=2$, $a=4$, $b=5$이므로

$y=2x\pm\sqrt{16\times 4-25}$, 즉 $y=2x\pm\sqrt{39}$

1 포물선 $x^2=12y$에 접하고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 접선의 방정식을 구하시오.

2 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$에 접하고 기울기가 $-\dfrac{1}{4}$인 접선의 방정식을 구하시오.

활동지 함께 생각하는 탐구

____학년 ____반 ____번 이름 __________

정답과 해설 292쪽

이차곡선 그리기

지도서 93쪽 교과서 35쪽

탐구 목표 **컴퓨터 프로그램 GeoGebra를 이용하여 그려지는 도형이 무엇인지 알아보자.**

1 두 점 A$(4,\ 0)$, B$(-4,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 항상 10으로 일정한 점을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 좌표평면 위에 나타내 보자.

1-1 그려지는 곡선이 어떤 도형인지 말하고, 그 까닭을 설명해 보자.

1-2 그려지는 도형의 방정식을 구해 보자.

2 두 점 A$(5,\ 0)$, B$(-5,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 항상 12로 일정한 점을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 좌표평면 위에 나타내 보자.

2-1 그려지는 곡선이 어떤 도형인지 말하고, 그 까닭을 설명해 보자.

2-2 그려지는 도형의 방정식을 구해 보자.

활동지 함께 생각하는 탐구

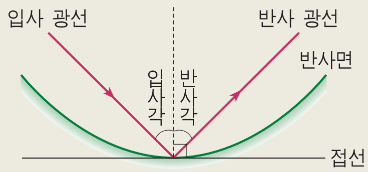
____학년 ____반 ____번 이름 __________

반사의 법칙을 이용하여 초점의 좌표 구하기

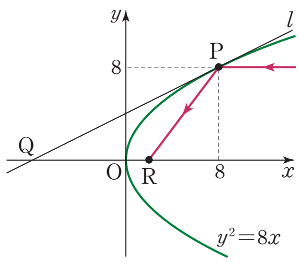
지도서 107쪽 교과서 49쪽

탐구 목표 **반사의 법칙을 이용하여 포물선의 내부에서 축에 평행하게 입사된 빛은 반사되어 항상 초점을 지나게 됨을 알아보자.**

오른쪽 그림과 같이 곡선으로 이루어진 반사면 위의 한 점에서 빛이 반사될 때, 입사각과 반사각은 그 크기가 항상 같다. 이를 반사의 법칙이라고 한다.



1 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(8,\ 8)$에서의 접선을 l, 직선 l과 x축이 만나는점을 Q라고 하자. 이때 x축에 평행하게 입사되어 점 P에서 포물선에 반사된 빛이 x축과 만나는 점을 R라고 하자.

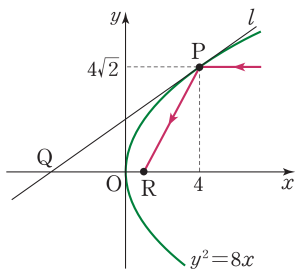


1-1 직선 l의 방정식과 점 Q의 좌표를 각각 구해 보자.

1-2 반사의 법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PR}}$임을 설명해 보고, 점 R의 좌표를 구해 보자.

1-3 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표를 구하고, 점 R의 좌표와 비교해 보자.

2 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 4\sqrt{2})$에서의 접선을 l, 직선 l과 x축이 만나는 점을 Q라고 하자. 이때 x축에 평행하게 입사되어 점 P에서 포물선에 반사된 빛이 x축과 만나는 점을 R라고 하자.



2-1 직선 l의 방정식과 점 Q의 좌표를 각각 구해 보자.

2-2 반사의 법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PR}}$임을 설명해 보고, 점 R의 좌표를 구해 보자.

2-3 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표를 구하고, 점 R의 좌표와 비교해 보자.

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

정답과 해설 293~297쪽

1-1. 포물선의 방정식

지도서 75쪽 교과서 17쪽

1 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 F$(0,\ 6)$이고 준선이 $y=-6$인 포물선

(2) 초점이 F$(0,\ -3)$이고 준선이 $y=3$인 포물선

(3) 초점이 F$(3,\ 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선

(4) 초점이 F$(-5,\ 0)$이고 준선이 $x=5$인 포물선

2 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $x^2=9y$　　(2) $x^2=-2y$

(3) $y^2=14x$　　(4) $y^2=-18x$

3 다음 포물선을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) $x^2=-7y$　　(2) $y^2=5x$

4 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $x^2-2x-3y-11=0$　　(2) $y^2+4y-4x+16=0$

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

1-2. 타원의 방정식

지도서 83쪽 교과서 25쪽

1 다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{F}'\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$으로부터의 거리의 합이 5인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 6)$, $\mathrm{F}'(0,\ -6)$으로부터의 거리의 합이 13인 타원

2 다음 타원의 초점의 좌표와 장축 및 단축의 길이를 각각 구하시오.

(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$

(2) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{24}=1$

3 다음 타원을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 타원의 방정식을 구하고, 평행이동한 타원의 초점의 좌표를 구하시오.

(1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

(2) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{49}=1$

4 다음 타원의 초점의 좌표와 장축 및 단축의 길이를 각각 구하시오.

(1) $x^2-6x+4y^2+16y-11=0$

(2) $4x^2+8x+y^2-4y-8=0$

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

1-3. 쌍곡선의 방정식

지도서 92쪽 교과서 34쪽

1 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 6)$, $\mathrm{F}'(0,\ -6)$으로부터의 거리의 차가 10인 쌍곡선

2 다음 쌍곡선의 초점의 좌표와 주축의 길이 및 점근선의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{39}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=-1$

3 다음 쌍곡선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식을 구하고, 평행이동한 쌍곡선의 초점의 좌표를 구하시오.

(1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{33}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

4 다음 쌍곡선의 초점의 좌표와 주축의 길이를 각각 구하시오.

(1) $3x^2-18x-y^2+2y+14=0$ (2) $x^2-y^2+2x-6y+1=0$

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 ________

2-1. 이차곡선과 직선의 위치 관계

지도서 99쪽 교과서 41쪽

1 다음 이차곡선과 직선 $y=3x+2$의 위치 관계를 조사하시오.

(1) $y^2=12x$ (2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (3) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{14}=1$

2 포물선 $x^2-16y=0$과 직선 $y=ax-1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

3 타원 $\dfrac{x^2}{a}+y^2=1$과 직선 $y=2x+3$이 한 점에서 만나도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

4 쌍곡선 $3x^2-2y^2+6=0$과 직선 $y=x+k$가 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

형성 평가

____학년 ____반 ____번 이름 __________

2-2. 이차곡선의 접선

지도서 106쪽 교과서 48쪽

1 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2=8x$에 접하고, 기울기가 4인 직선

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 접하고, 직선 $y=2x$와 평행한 직선

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$에 접하고, 직선 $y=-\dfrac{1}{3}x+9$와 수직인 직선

2 다음 이차곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2=-2x$ 위의 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$에서의 접선

(2) 포물선 $x^2=-y$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선

(3) 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선

(4) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-y^2=-1$ 위의 점 $(-6,\ 2)$에서의 접선

3 타원 위의 점 $\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 타원의 방정식을 구하시오.

4 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(5,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

중단원 수준별 문제

기본

01 초점이 $\mathrm{F}(-4,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 점 $(k,\ 12)$를 지날 때, k의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

02 포물선 $(y-2)^2=4(x+3)$의 초점의 좌표가 $(a,\ b)$이고 준선의 방정식이 $x=c$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

03 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 두 초점 A, B에 대하여 점 A를 지나고 기울기가 양수인 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 할 때, 삼각형 BPQ의 둘레의 길이는?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

04 타원 $\dfrac{(x-4)^2}{30}+\dfrac{(y-7)^2}{21}=1$의 두 초점을 A, B라고 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

05 쌍곡선 $ax^2-y^2=b$ 위의 임의의 점 P와 두 점 $\mathrm{F'}(-2,\ 0)$, $\mathrm{F}(2,\ 0)$에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=2$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

06 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 주축의 길이가 12이고 두 점근선의 기울기가 각각 2, -2일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수)

① 39 ② 41 ③ 43
④ 45 ⑤ 47

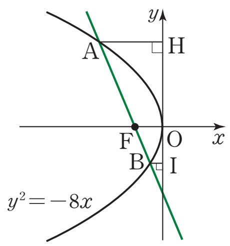
정답과 해설 297쪽

표준

07 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 $\overline{PF}=8$일 때, $a+b^2$의 값은?

① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

08 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=-8x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자. $\overline{AH}=4$, $\overline{BI}=1$일 때, 선분 AB의 길이는?



① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

09 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점을 F′, F라고 하자. $\overline{PF'}+\overline{PF}=14$를 만족시키는 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형의 방정식이 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

10 타원 $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$의 두 초점 A, B와 타원 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}\times\overline{BP}$의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

11 두 초점이 $F'(-5, 0)$, $F(5, 0)$이고 단축의 길이가 $4\sqrt{6}$인 타원과 직선 $x=5$의 두 교점을 A, B라고 할 때, 삼각형 ABF′의 넓이는?

① $\frac{220}{7}$ ② $\frac{225}{7}$ ③ $\frac{230}{7}$
④ $\frac{235}{7}$ ⑤ $\frac{240}{7}$

12 쌍곡선 $4x^2-y^2-24x+16=0$의 두 초점을 A, B라고 할 때, 점 $P(0, 4)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

I 이차곡선

정답과 해설 299쪽

심화

13 포물선 $y^2=-20x$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심이 이 포물선의 초점 F일 때, $\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

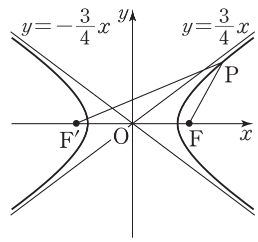
14 어떤 도형 위의 점 $P(x, y)$에서 점 $A(3, 1)$과 직선 $x=6$에 이르는 거리의 비가 1 : 2라고 한다. 이 도형의 두 초점 사이의 거리는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$의 한 초점을 중심으로 하고 쌍곡선의 점근선에 접하는 원의 넓이가 $k\pi$이다. 상수 k의 값은?

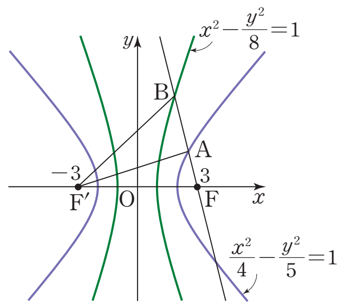
① 16 ② 25 ③ 36
④ 49 ⑤ 64

16 오른쪽 그림은 $10\le c\le 20$인 실수 c에 대하여 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이고, 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{4}x$인 쌍곡선이다. 이 쌍곡선 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 삼각형 $PF'F$의 둘레의 길이가 90일 때, 선분 PF의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은?



① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ⑤ 48

17 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 A와 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 B에 대하여 직선 AB가 항상 점 $F(3, 0)$을 지난다고 한다. 점 $F'(-3, 0)$에 대하여 삼각형 $F'AB$의 둘레의 길이가 16일 때, 선분 BF의 길이는?



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

중단원 수준별 문제

정답과 해설 300쪽

기본

01 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선과 평행하고 점 $(3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

(단, a, b는 상수)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

02 포물선 $x^2=-2y$ 위의 점 $(4,\ -8)$에서의 접선에 수직이고 포물선의 초점을 지나는 직선의 x절편은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선에 수직이고 점 $(-4,\ 5)$를 지나는 직선의 y절편은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

04 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 x절편이 4일 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

05 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선에 수직이면서 이 점을 지나는 직선의 y절편은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 쌍곡선 $x^2-y^2=7$ 위의 점 $(4,\ 3)$에서의 접선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 원점 O에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

표준

07 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=-12x$ 위의 점 P$(-3,\ -6)$에서의 접선과 x축과의 교점을 Q라고 할 때, 삼각형 PQF의 넓이는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

08 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=2x+k$가 만날 때, 실수 k의 최댓값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

09 초점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 준선의 방정식이 $x=-\frac{1}{2}$인 포물선과 직선 $y=ax+4a-1$이 한 점에서 만나도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

10 타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 A$(3,\ -1)$에서의 접선과 이 타원 위의 임의의 점 P 사이의 거리의 최댓값은?

① $4\sqrt{2}$ ② 8 ③ $6\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 10

11 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(6,\ 10)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, b^2-a^2의 값은?
(단, a, b는 상수)

① 40 ② 48 ③ 56
④ 64 ⑤ 72

12 쌍곡선 $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 P$(a,\ b)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 8일 때, 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 40 ② 50 ③ 60
④ 70 ⑤ 80

정답과 해설 301쪽

심화

13 점 $(a,\ 3)$에서 포물선 $y^2=-8x$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이의 최솟값은?
(단, a, b는 모두 양수이고, 점 O는 원점이다.)

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

15 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$에 접할 때, 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, $a\neq0$)

① $\sqrt{6}$ ② 4 ③ $2\sqrt{6}$
④ $3\sqrt{6}$ ⑤ 8

16 점 $(0,\ 10)$에서 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$에 그은 접선의 기울기를 k라고 할 때, k^2의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 12 ⑤ 16

17 직선 $y=x-2$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접할 때, 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? (단, $b\neq0$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

18 점 $(3,\ 1)$에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

중단원 서술형 문제

다음은 각 문항에 대한 풀이 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (1~3)

1 포물선

$y^2-6y-12x-51=0$

의 초점의 좌표가 (a, b), 준선의 방정식이 $x=c$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. [8점]

> 포물선 $y^2-6y-12x-51=0$을 변형하면
> $(y-3)^2=12(x+5)$
> 이 포물선은 포물선 $y^2=12x$를 x축의 방향으로 $\boxed{(가)}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{(나)}$만큼 평행이동한 것이다.
> 그런데 포물선 $y^2=12x$의 초점의 좌표는 $(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\boxed{(다)}$,
> 준선의 방정식은 $\boxed{(라)}$이다.
> 따라서 $a+b+c=\boxed{(마)}$이다.

2 타원 $9x^2+5y^2=90$과 두 초점을 공유하고 장축의 길이가 10인 타원의 방정식을 구하시오. [10점]

> 타원 $9x^2+5y^2=90$을 변형하면
> $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{18}=1$
> 이 타원의 두 초점의 좌표는 $\boxed{(가)}$, $\boxed{(나)}$이고, $\boxed{(가)}$, $\boxed{(나)}$를 두 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원의 방정식을
> $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라고 하면
> $\boxed{(다)}=10$이므로 $b^2-a^2=\boxed{(라)}$
> 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\boxed{(마)}$이다.

3 두 점 $F(4, 0)$, $G(-4, 0)$에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PG}|=6$을 만족시키는 점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 존재한다. 이때 두 양수 a, b에 대하여 $a+b^2$의 값을 구하시오. [10점]

> 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점은 $F(4, 0)$, $G(-4, 0)$이므로 $a^2+b^2=\boxed{(가)}$이고,
> $|\overline{PF}-\overline{PG}|=6$이므로 $\boxed{(나)}=6$이다.
> 따라서 $a=\boxed{(다)}$, $b^2=\boxed{(라)}$이므로
> $a+b^2=\boxed{(마)}$이다.

정답과 해설 303쪽

* 다음은 단계형 서술형 문제이다. 단계에 따라 정답과 풀이 과정을 쓰시오. (4~5)

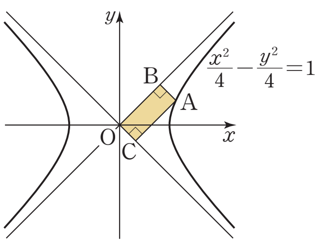
4 초점의 좌표가 (4, 2)이고, 준선의 방정식이 $x=-2$인 포물선의 방정식이 $y^2+ax+by+c=0$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

[단계 1] 초점의 좌표가 (3, 0)이고 준선의 방정식이 $x=-3$인 포물선의 방정식을 구하시오. [3점]

[단계 2] 초점이 (3, 0)에서 (4, 2)로, 준선이 $x=-3$에서 $x=-2$로 모두 옮겨지기 위해서는 어떻게 평행이동해야 하는지 말하시오. [2점]

[단계 3] $a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

5 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 A에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 B, C라고 할 때, 원점 O에 대하여 사각형 ABOC의 넓이를 구하시오.



[단계 1] 쌍곡선의 두 점근선의 방정식을 구하시오. [2점]

[단계 2] 쌍곡선 위의 점을 A(a, b)라 하고, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 a, b의 식으로 나타내시오. [3점]

[단계 3] 사각형 ABOC의 넓이를 구하시오. [3점]

* 다음은 수준별 선택형 서술형 문제이다. 수준 1, 수준 2, 수준 3 중 한 문제를 선택하여 정답과 풀이 과정을 쓰시오.

6-수준 1

y축 위의 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이가 10이고, 단축의 길이가 8일 때, 선분 FF′의 길이를 구하시오. [6점]

6-수준 2

점 P(3, 1)을 지나고 직선 $x=1$에 접하는 원의 중심 Q가 항상 포물선 $(y-q)^2=k(x-p)$ 위에 존재할 때, $p+q+k$의 값을 구하시오. [8점]

6-수준 3

타원 $7x^2+16y^2=112$와 초점을 공유하고 주축의 길이가 4인 쌍곡선의 방정식이 $a^2x^2-b^2y^2=a^2b^2$일 때, $2a^2-b^2$의 값을 구하시오. [10점]

중단원 서술형 문제

※ 다음은 각 문항에 대한 풀이 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (1~3)

1 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=-x+k$의 위치 관계를 조사하시오. [8점]

> $y=-x+k$를 $y^2=12x$에 대입하여 정리하면
> $x^2-2(k+6)x+k^2=0$
> 이 이차방정식의 판별식은
> $\frac{D}{4}=(k+6)^2-k^2=\boxed{(가)}$
> ❶ $\frac{D}{4}\boxed{(나)}0$, 즉 $k\boxed{(나)}-3$일 때,
> 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ❷ $\frac{D}{4}\boxed{(다)}0$, 즉 $k\boxed{(다)}-3$일 때,
> 한 점에서 접한다.
> ❸ $\frac{D}{4}\boxed{(라)}0$, 즉 $k\boxed{(라)}-3$일 때,
> 만나지 않는다.

2 타원 $4x^2+y^2=4$와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계를 조사하시오. [8점]

> $y=2x+k$를 $4x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면
> $8x^2+4kx+k^2-4=0$
> 이 이차방정식의 판별식은
> $\frac{D}{4}=-4k^2+32$
> ❶ $\frac{D}{4}>0$, 즉 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$일 때, $\boxed{(가)}$
> ❷ $\frac{D}{4}=0$, 즉 $k=\pm2\sqrt{2}$일 때, $\boxed{(나)}$
> ❸ $\frac{D}{4}<0$, 즉 $k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$일 때,
> $\boxed{(다)}$

3 쌍곡선 $x^2-y^2=3$과 직선 $y=2x+k$가 만나지 않도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [8점]

> $y=2x+k$를 $x^2-y^2=3$에 대입하여 정리하면
> $3x^2+4kx+\boxed{(가)}=0$이다.
> 이 이차방정식의 판별식은
> $\frac{D}{4}=\boxed{(나)}$
> 쌍곡선과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로 $\boxed{(나)}<0$에서 실수 k의 값의 범위는 $\boxed{(다)}$이다.
> 따라서 이를 만족하는 정수 k의 개수는 5이다.

정답과 해설 305쪽

* 다음은 단계형 서술형 문제이다. 단계에 따라 정답과 풀이 과정을 쓰시오. (4~5)

4 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ -4\sqrt{2})$에서의 접선이 포물선 $y^2=kx$의 초점을 지난다고 한다. 상수 k의 값을 구하시오.

[단계 1] 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ -4\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식을 구하시오. [2점]

[단계 2] 위 직선의 x절편을 구하시오. [2점]

[단계 3] 위 [단계 2]를 이용하여 포물선 $y^2=kx$의 상수 k의 값을 구하시오. [2점]

5 직선 $y=3x-2$에 평행하고 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$에 접하는 두 직선 사이의 거리를 구하시오.

[단계 1] 직선 $y=3x-2$에 평행한 직선의 방정식을 $y=ax+k$라고 할 때, a의 값을 구하시오. [2점]

[단계 2] 위 직선이 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$에 접하는 k의 값을 구하시오. [3점]

[단계 3] 두 직선 사이의 거리를 구하시오. [3점]

* 다음은 수준별 선택형 서술형 문제이다. 수준 1, 수준 2, 수준 3 중 한 문제를 선택하여 정답과 풀이 과정을 쓰시오.

6-수준 1

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 1)$에서의 접선의 x절편이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, a^2b^2의 값을 구하시오. [6점]

6-수준 2

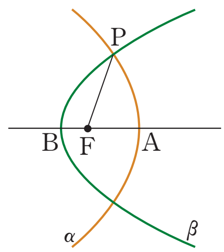
점 $(-3,\ 4)$에서 포물선 $y^2=-4x$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [8점]

6-수준 3

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(6,\ -4)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, 타원의 두 초점 사이의 거리를 구하시오. [10점]

대단원 평가 문제

01 오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 축으로 하고 초점이 F로 일치하는 두 포물선 α, β가 점 P에서 만난다. $\overline{\mathrm{AF}}=6$, $\overline{\mathrm{BF}}=4$일 때, 선분 PF의 길이는?

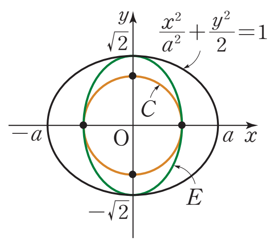


① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

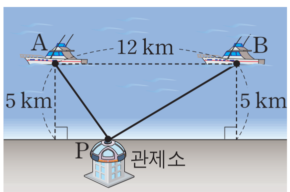
02 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$, $\mathrm{C}(e,\ f)$의 무게중심의 좌표가 $(6,\ 4)$이다. $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}$의 값을 구하시오.

03 두 타원이 점 F를 한 초점으로 공유하고, 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 타원의 장축의 길이가 각각 12, 18이고, 두 타원의 나머지 초점을 각각 G, R라고 할 때, $|\overline{\mathrm{AG}}-\overline{\mathrm{AR}}|+|\overline{\mathrm{BG}}-\overline{\mathrm{BR}}|$의 값을 구하시오.

04 오른쪽 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1\,(a^2>2)$의 단축을 장축으로 하고, 이 타원의 두 초점을 이은 선분을 단축으로 하는 타원 E가 있다. 중심이 원점이고, 타원 E의 단축을 지름으로 하는 원 C가 타원 E의 두 초점을 지날 때, a^2의 값을 구하시오.



05 오른쪽 그림과 같이 두 선박 A, B는 각각 직선 모양으로 이루어진 해변으로부터 5 km 떨어진 해상 위에 있고, 두 선박 A, B 사이의 거리는 12 km이다. 해변 위의 지상관제소 P에서 두 선박 A, B까지의 거리의 차가 8 km일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 거리를 구하시오.



정답과 해설 306쪽

06 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$이 점 F(5, 0)을 지나는 직선과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. 점 G(−5, 0)에 대하여 삼각형 GAB의 둘레의 길이가 20일 때 선분 BF의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 두 점 F, G를 초점으로 하는 타원 $\frac{4x^2}{13}+\frac{4y^2}{9}=1$과 쌍곡선 $4x^2-\frac{4y^2}{3}=1$이 한 점 P에서 만날 때, $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PG}}$의 값을 구하시오.

08 y축을 준선으로 하고 초점이 x축 위에 있는 두 포물선이 y축에 대하여 서로 대칭이고, 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리가 2이다. 두 포물선에 동시에 접하고 기울기가 양수인 직선을 그을 때, 두 접점 사이의 거리를 구하시오.

09 점 (2, 1)에서 타원 $x^2+4y^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 P, Q라고 할 때, 직선 PQ의 방정식은?

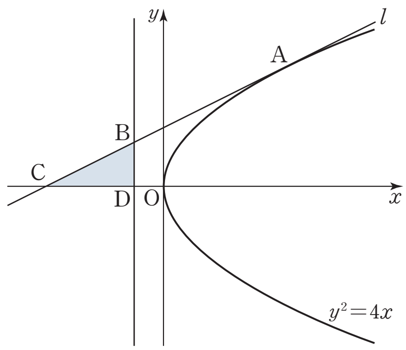
① $x-2y=1$ ② $x+2y=4$ ③ $2x-4y=1$
④ $2x+4y=1$ ⑤ $3x-6y=1$

10 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$이 한 점 P$(2\sqrt{5}, 1)$에서 만나고, 점 P에서 각각의 이차곡선에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

정답률 80 % 이상

[2016학년도 수능 B형 9번 / 정답률 95 %]

01 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l과 포물선의 준선이 만나는 점을 B, 직선 l과 x축이 만나는 점을 C, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이는? [3점]



① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

[2017년 9월 가형 9번 / 정답률 93 %]

02 다음 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

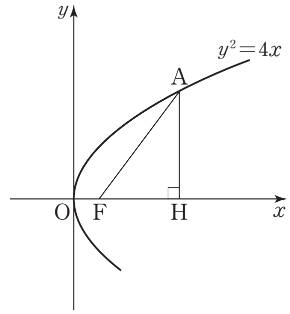
> (가) 두 초점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이다.
> (나) 두 점근선이 서로 수직이다.

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$

④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

[2017년 10월 가형 8번 / 정답률 92 %]

03 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{AF}}=5$일 때, 삼각형 AFH의 넓이는? [3점]



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7

④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

[2014년 6월 B형 12번 / 정답률 90 %]

04 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 이 쌍곡선의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 할 때, 삼각형 FAB의 넓이는? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

정답과 해설 308쪽

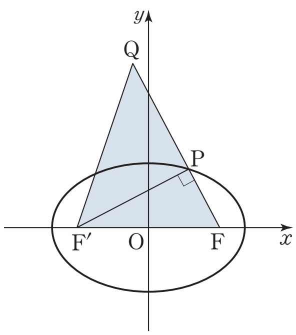
[2012년 6월 가형 5번 / 정답률 90 %]

05 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점은 타원 $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이다. a^2+b^2의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[2015학년도 수능 B형 27번 / 정답률 87 %]

06 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{FPF'}=90°$가 되도록 제1사분면에서 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$이 되도록 잡는다. 삼각형 QF′F의 넓이를 구하시오. [4점]



정답률 79～60 %

[2017학년도 수능 가형 28번 / 정답률 79 %]

07 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

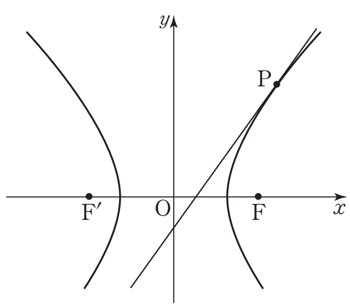
> (가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=30$, $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le20$이다.
> (나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]

[2013년 9월 B형 26번 / 정답률 79 %]

08 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 F′F를 $2:1$로 내분할 때, k^2의 값을 구하시오.

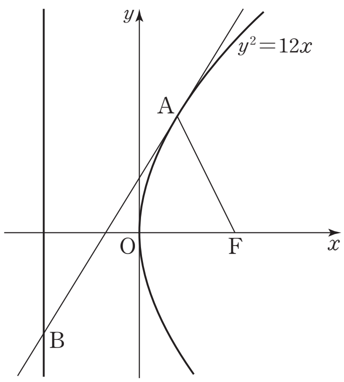
(단, a, b는 상수이다.) [4점]



정답과 해설 310쪽

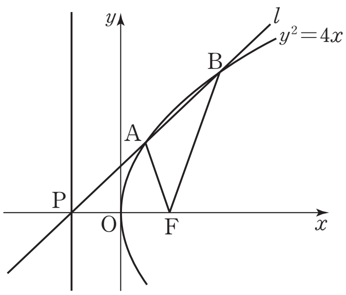
[2017년 7월 가형 28번 / 정답률 74 %]

09 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$가 있다. 포물선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점을 B라 하자. $\overline{AB}=2\overline{AF}$일 때, $\overline{AB}\times\overline{AF}$의 값을 구하시오. [4점]



[2012년 6월 가형 20번 / 정답률 73 %]

10 포물선 $y^2=4x$의 초점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{FA}:\overline{FB}=1:2$일 때, 직선 l의 기울기는? [4점]



① $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$　② $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　③ $\dfrac{4}{5}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

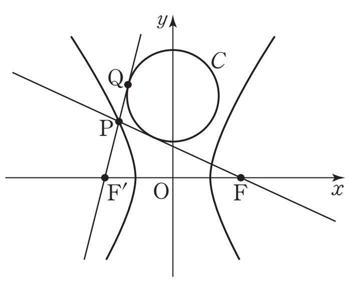
[2016년 7월 가형 28번 / 정답률 64 %]

11 두 양수 m, p에 대하여 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=m(x-4)$가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 B, 직선 $y=m(x-4)$와 y축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{AF}+\overline{BF}$의 값을 구하시오. [4점]

정답률 60 % 미만

[2018학년도 수능 가형 27번 / 정답률 59 %]

12 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{F'P}<\overline{FP}$) [4점]



I 이차곡선

탐구 학습

p. 216

1 포물선 $x^2=12y$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은 $m=\frac{1}{2}$, $p=3$이므로

$$y=\frac{1}{2}x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \text{즉}\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 접선의 방정식은 $m=-\frac{1}{4}$, $a=4$, $b=3$이므로

$$y=-\frac{1}{4}x\pm\sqrt{9-16\times\frac{1}{16}},\ \text{즉}$$

$$y=-\frac{1}{4}x\pm2\sqrt{2}$$

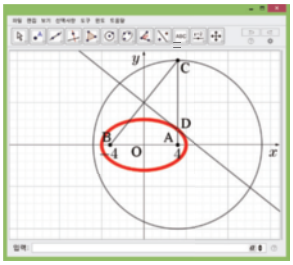
답 $y=-\frac{1}{4}x+2\sqrt{2}$ 또는 $y=-\frac{1}{4}x-2\sqrt{2}$

활동지 함께 생각하는 탐구

p. 217~218

1 이차곡선

1



1-1 $\triangle$DBC는 이등변삼각형이므로 $\overline{BD}=\overline{CD}$이다.
이때 원의 반지름인 선분 AC의 길이가 10이므로

$$\overline{AD}+\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AC}=10$$

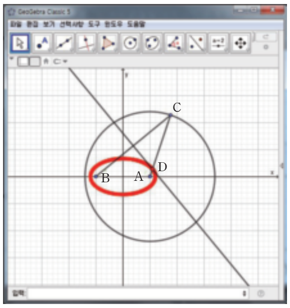
따라서 그려진 곡선 위의 점 D는 두 점 A, B로부터의 거리의 합이 항상 10으로 일정한 점이므로 그려진 곡선은 타원이다.

1-2 두 점 A(4, 0), B(-4, 0)으로부터의 거리의 합이 10인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면, 두 점 A, B가 초점이므로 $c=4$이고 $2a=10$에서 $a=5$

$$\therefore b^2=a^2-c^2=25-16=9$$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$이다.

2



2-1 $\triangle$DBC는 이등변삼각형이므로 $\overline{BD}=\overline{CD}$이다.
이때 원의 반지름인 선분 AC의 길이가 12이므로

$$\overline{AD}+\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AC}=12$$

따라서 그려진 곡선 위의 점 D는 두 점 A, B로부터의 거리의 합이 항상 12로 일정한 점이므로 그려진 곡선은 타원이다.

2-2 두 점 A(5, 0), B(-5, 0)으로부터의 거리의 합이 12인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면, 두 점 A, B가 초점이므로 $c=5$이고 $2a=12$에서 $a=6$

$$\therefore b^2=a^2-c^2=36-25=11$$

따라서 구하는 곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$이다.

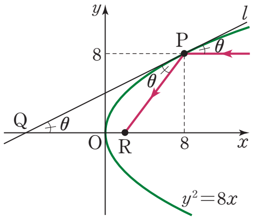
2 이차곡선과 직선

1-1 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P(8, 8)에서의 접선 l의 방정식은

$$8y=4(x+8),\ \text{즉}\ y=\frac{1}{2}x+4$$

이때 점 Q는 직선 l의 x절편이므로 점 Q의 좌표는 $(-8,\ 0)$이다.

1-2 오른쪽 그림과 같이 $\angle RPQ=\theta$라고 하면 입사각과 반사각의 크기는 같으므로 $\angle PQR=\theta$이다. 따라서 $\triangle PQR$는 이등변삼각형이므로 $\overline{QR}=\overline{PR}$이다.



이때 점 R의 x좌표를 a라고 하면

$(8-a)^2+8^2=(8+a)^2$에서 $a=2$

따라서 점 R의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

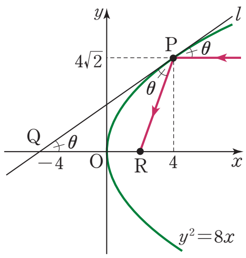
1-3 $y^2=8x=4\times2\times x$이므로 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 이 점은 점 R의 좌표와 같다.

2-1 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $P(4,\ 4\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$$4\sqrt{2}y=4(x+4),\ 즉\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$$

이때 점 Q는 직선 l의 x절편이므로 점 Q의 좌표는 $(-4,\ 0)$이다.

2-2 오른쪽 그림과 같이 $\angle RPQ=\theta$라고 하면 입사각과 반사각의 크기는 같으므로 $\angle PQR=\theta$이다. 따라서 $\triangle PQR$는 이등변삼각형이므로 $\overline{QR}=\overline{PR}$이다. 이때 점 R의 x좌표를 a라고 하면



$(4-a)^2+(4\sqrt{2})^2=(4+a)^2$에서 $a=2$

따라서 점 R의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

2-3 $y^2=8x=4\times2\times x$이므로 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 이 점은 점 R의 좌표와 같다.

형성 평가

p. 219~223

1-1. 포물선의 방정식

1 (1) 초점이 $F(0,\ 6)$이고 준선이 $y=-6$인 포물선의 방정식은 $x^2=4\times6y$, 즉 $\boldsymbol{x^2=24y}$

(2) 초점이 $F(0,\ -3)$이고 준선이 $y=3$인 포물선의 방정식은 $x^2=4\times(-3)y$, 즉 $\boldsymbol{x^2=-12y}$

(3) 초점이 $F(3,\ 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선의 방정식은 $y^2=4\times3x$, 즉 $\boldsymbol{y^2=12x}$

(4) 초점이 $F(-5,\ 0)$이고 준선이 $x=5$인 포물선의 방정식은 $y^2=4\times(-5)x$, 즉 $\boldsymbol{y^2=-20x}$

2 (1) $x^2=9y=4\times\frac{9}{4}y$이므로 **초점의 좌표는 $\boldsymbol{\left(0,\ \frac{9}{4}\right)}$, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{y=-\frac{9}{4}}$**이다.

(2) $x^2=-2y=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)y$이므로 **초점의 좌표는 $\boldsymbol{\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)}$, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}}$**이다.

(3) $y^2=14x=4\times\frac{7}{2}x$이므로 **초점의 좌표는 $\boldsymbol{\left(\frac{7}{2},\ 0\right)}$, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{x=-\frac{7}{2}}$**이다.

(4) $y^2=-18x=4\times\left(-\frac{9}{2}\right)x$이므로 **초점의 좌표는 $\boldsymbol{\left(-\frac{9}{2},\ 0\right)}$, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{x=\frac{9}{2}}$**이다.

3 (1) $x^2=-7y$를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면

$\boldsymbol{(x+5)^2=-7(y-9)}$

(2) $y^2=5x$를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면

$\boldsymbol{(y-9)^2=5(x+5)}$

4 (1) $x^2-2x-3y-11=0$을 변형하면

$(x-1)^2=3(y+4)$

이 포물선은 포물선 $x^2=3y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=3y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$, 준선의

방정식은 $y=-\frac{3}{4}$이므로 주어진 포물선의 **초점의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{13}{4}\right)$, 준선의 방정식은 $y=-\frac{19}{4}$**이다.

(2) $y^2+4y-4x+16=0$을 변형하면

$(y+2)^2=4(x-3)$

이 포물선은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 주어진 포물선의 **초점의 좌표는 $(4,\ -2)$, 준선의 방정식은 $x=2$**이다.

1-2. 타원의 방정식

1 (1) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

이라고 하면 $c=\frac{3}{2}$이고 $2a=5$에서 $a=\frac{5}{2}$이므로

$b^2=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=4$

따라서 타원의 방정식은 $\boldsymbol{\frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1}$이다.

(2) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

이라고 하면 $c=6$이고 $2b=13$에서 $b=\frac{13}{2}$이므로

$a^2=\frac{169}{4}-36=\frac{25}{4}$

따라서 타원의 방정식은 $\boldsymbol{\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{169}=1}$이다.

2 (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$에서 $a^2=16,\ b^2=10$이므로

$c^2=a^2-b^2=16-10=6$

따라서 주어진 타원의 **초점의 좌표**는

$\boldsymbol{(\sqrt{6},\ 0),\ (-\sqrt{6},\ 0)}$

장축의 길이는 $2a=\boldsymbol{8}$, **단축의 길이**는 $2b=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$이다.

(2) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{24}=1$에서 $a^2=12,\ b^2=24$이므로

$c^2=b^2-a^2=24-12=12$

따라서 주어진 타원의 **초점의 좌표**는

$\boldsymbol{(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ -2\sqrt{3})}$

장축의 길이는 $2b=\boldsymbol{4\sqrt{6}}$, **단축의 길이**는 $2a=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$이다.

3 (1) 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$에서 $c^2=64-39=25$이므로 초점의 좌표는 $(5,\ 0),\ (-5,\ 0)$이다.

이 타원을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 구하는 방정식은

$$\boldsymbol{\frac{(x+3)^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{39}=1}$$

이고, **초점의 좌표는 $(2,\ 1),\ (-8,\ 1)$**이다.

(2) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{49}=1$에서 $c^2=49-13=36$이므로 초점의 좌표는 $(0,\ 6),\ (0,\ -6)$이다.

이 타원을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 구하는 방정식은

$$\boldsymbol{\frac{(x+3)^2}{13}+\frac{(y-1)^2}{49}=1}$$

이고, **초점의 좌표는 $(-3,\ 7),\ (-3,\ -5)$**이다.

4 (1) $x^2-6x+4y^2+16y-11=0$을 변형하면

$$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는

$(3\sqrt{3},\ 0),\ (-3\sqrt{3},\ 0)$이므로 주어진 타원의 **초점의 좌표는**

$\boldsymbol{(3\sqrt{3}+3,\ -2),\ (-3\sqrt{3}+3,\ -2)}$

장축의 길이는 $2\times6=\boldsymbol{12}$, **단축의 길이**는 $2\times3=\boldsymbol{6}$이다.

(2) $4x^2+8x+y^2-4y-8=0$을 변형하면

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표는

$(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ -2\sqrt{3})$이므로 주어진 타원의 **초점의 좌표는**

$\boldsymbol{(-1,\ 2+2\sqrt{3}),\ (-1,\ 2-2\sqrt{3})}$

장축의 길이는 $2\times4=\boldsymbol{8}$, **단축의 길이**는 $2\times2=\boldsymbol{4}$이다.

1-3. 쌍곡선의 방정식

1 (1) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

이라고 하면 $c=4$이고 $2a=4$에서 $a=2$이므로

$b^2=16-4=12$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1}$이다.

(2) 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라고 하면 $c=6$이고

$2b=10$에서 $b=5$이므로

$a^2=36-25=11$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\boldsymbol{\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{25}=-1}$이다.

2 (1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$에서 $a^2=25,\ b^2=39$이므로

$c^2=a^2+b^2=25+39=64$

따라서 주어진 쌍곡선의 **초점의 좌표**는

$\mathbf{(8,\ 0),\ (-8,\ 0)}$

주축의 길이는 $2a=\mathbf{10}$이다.

또, **점근선의 방정식**은 $\boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{39}}{5}x}$이다.

(2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=-1$에서 $a^2=20,\ b^2=16$이므로

$c^2=a^2+b^2=20+16=36$

따라서 주어진 쌍곡선의 **초점의 좌표**는

$\mathbf{(0,\ 6),\ (0,\ -6)}$

주축의 길이는 $2b=\mathbf{8}$이다.

또, **점근선의 방정식**은 $y=\pm\frac{4}{2\sqrt{5}}x$, 즉

$\boldsymbol{y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x}$이다.

3 (1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{33}=1$에서 $c^2=16+33=49$이므로

초점의 좌표는 $(7,\ 0),\ (-7,\ 0)$이다.

이 쌍곡선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 구하는 방정식은

$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{33}=1}$$

이고, **초점의 좌표**는 $\mathbf{(5,\ 4),\ (-9,\ 4)}$이다.

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1$에서 $c^2=21+4=25$이므로

초점의 좌표는 $(0,\ 5),\ (0,\ -5)$이다.

이 쌍곡선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 구하는 방정식은

$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{21}-\frac{(y-4)^2}{4}=-1}$$

이고, **초점의 좌표**는 $\mathbf{(-2,\ 9),\ (-2,\ -1)}$이다.

4 (1) $3x^2-18x-y^2+2y+14=0$을 변형하면

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표는

$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 **초점의 좌표는**

$\mathbf{(7,\ 1),\ (-1,\ 1)}$

주축의 길이는 $2\times2=\mathbf{4}$이다.

(2) $x^2-y^2+2x-6y+1=0$을 변형하면

$$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{9}=-1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=-1$의 초점의 좌표는

$(0,\ 3\sqrt{2}),\ (0,\ -3\sqrt{2})$이므로 주어진 쌍곡선의 **초점의 좌표는**

$\mathbf{(-1,\ -3+3\sqrt{2}),\ (-1,\ -3-3\sqrt{2})}$

주축의 길이는 $2\times3=\mathbf{6}$이다.

2-1. 이차곡선과 직선의 위치 관계

1 (1) $y=3x+2$를 $y^2=12x$에 대입하여 정리하면

$(3x+2)^2=12x,\ 9x^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식은

$D=-36<0$

이므로 주어진 포물선과 직선은 **만나지 않는다.**

I 이차곡선

(2) $y=3x+2$를 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$, 즉 $x^2+2y^2=4$에 대입하여 정리하면

$x^2+2(3x+2)^2=4$, $19x^2+24x+4=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=12^2-19\times4=68>0$

이므로 주어진 타원과 직선은 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

(3) $y=3x+2$를 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{14}=1$, 즉 $7x^2-y^2=14$에 대입하여 정리하면

$7x^2-(3x+2)^2=14$, $x^2+6x+9=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=3^2-9=0$

이므로 주어진 쌍곡선과 직선은 **한 점에서 접한다.**

2 $y=ax-1$을 $x^2-16y=0$에 대입하여 정리하면

$x^2-16(ax-1)=0$, $x^2-16ax+16=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(-8a)^2-16=16(4a^2-1)$

그런데 포물선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$4a^2-1>0$, $(2a+1)(2a-1)>0$

$\therefore$ $\boldsymbol{a<-\frac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{a>\frac{1}{2}}$

3 $y=2x+3$을 $\frac{x^2}{a}+y^2=1$, 즉 $x^2+ay^2=a$에 대입하여 정리하면

$x^2+a(2x+3)^2=a$, $(4a+1)x^2+12ax+8a=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(6a)^2-8a(4a+1)=4a^2-8a$

그런데 타원과 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$4a^2-8a=4a(a-2)=0$

따라서 구하는 양수 a의 값은 **2**이다.

4 $y=x+k$를 $3x^2-2y^2+6=0$에 대입하여 정리하면

$3x^2-2(x+k)^2+6=0$, $x^2-4kx-2k^2+6=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(-2k^2+6)=6k^2-6$

그런데 쌍곡선과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$6k^2-6<0$, $6(k-1)(k+1)<0$

$\therefore$ $\boldsymbol{-1<k<1}$

2-2. 이차곡선의 접선

1 (1) 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 4인 직선을 $y=4x+k$라고 하자.

$y=4x+k$를 $y^2=8x$에 대입하여 정리하면

$(4x+k)^2=8x$, $16x^2+8(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식이

$\frac{D}{4}=4^2\times(k-1)^2-16k^2=-32k+16=0$

이어야 하므로 $k=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y=4x+\frac{1}{2}}$이다.

(2) 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하고 직선 $y=2x$와 평행한 직선의 기울기는 2이므로 이 직선의 방정식을 $y=2x+k$라고 하자.

$y=2x+k$를 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, 즉 $x^2+2y^2=8$에 대입하여 정리하면

$x^2+2(2x+k)^2=8$, $9x^2+8kx+2k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식이

$\frac{D}{4}=(4k)^2-9(2k^2-8)=-2k^2+72=0$

이어야 하므로 $k=\pm6$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=2x+6}$ **또는** $\boldsymbol{y=2x-6}$이다.

(3) 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$에 접하고 직선 $y=-\frac{1}{3}x+9$와 수직인 직선의 기울기는 3이므로 이 직선의 방정식을 $y=3x+k$라고 하자.

$y=3x+k$를 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$, 즉 $x^2-8y^2=8$에 대입하여 정리하면

$x^2-8(3x+k)^2=8$, $71x^2+48kx+8k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식이

$\frac{D}{4}=(24k)^2-71(8k^2+8)=8(k^2-71)=0$

이어야 하므로 $k=\pm\sqrt{71}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=3x+\sqrt{71}}$ **또는** $\boldsymbol{y=3x-\sqrt{71}}$이다.

2 (1) 포물선 $y^2=-2x$ 위의 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 방정식은

$1\times y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 즉 $\boldsymbol{y=-x+\frac{1}{2}}$

(2) 포물선 $x^2=-y$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$1\times x=-\frac{1}{2}(y-1)$, 즉 $\boldsymbol{y=-2x+1}$

(3) 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{-x}{4}+\frac{3y}{12}=1$, 즉 $\boldsymbol{y=x+4}$

(4) 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-y^2=-1$ 위의 점 $(-6,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{-6x}{12}-2y=-1$, 즉 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}$

3 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하자.

점 $\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이 타원 위의 점이므로

$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$ ……①

또, 점 $\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{-x}{a^2}+\frac{\sqrt{3}y}{2b^2}=1$

이므로 그 기울기는

$\frac{2b^2}{\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $3a^2=4b^2$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$a^2=2,\ b^2=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\boldsymbol{\frac{x^2}{2}+\frac{2y^2}{3}=1}$이다.

4 점 $(5,\ 2)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$ ……①

또, 점 $(5,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{5x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}=1$

이므로 그 기울기는

$\frac{5b^2}{2a^2}=2$에서 $4a^2=5b^2$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$a^2=20,\ b^2=16$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\boldsymbol{\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1}$이다.

중단원 수준별 문제

1 이차곡선 p. 224~226

01 ①	02 ②	03 ③	04 ②	05 ③
06 ④	07 ④	08 ⑤	09 ①	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ⑤	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ③			

01 초점이 $F(-4,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점이 포물선의 방정식은 $y^2=4\times(-4)x$, 즉 $y^2=-16x$이다.

이 포물선이 점 $(k,\ 12)$를 지나므로

$12^2=-16k$ $\quad\therefore k=-9$

02 포물선 $(y-2)^2=4(x+3)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

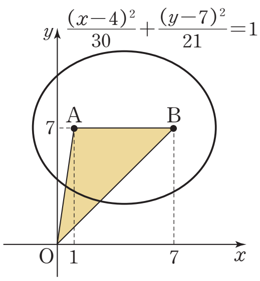
$(1-3,\ 0+2)$, 즉 $(-2,\ 2)$

준선의 방정식은 $x=-4$

$\therefore a+b+c=-2+2+(-4)=-4$

03 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점을 $A(-c,\ 0)$, $B(c,\ 0)$이라고 하면 $c^2=16-12=4$이므로 $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 0)$이다.
타원의 정의에 의해
$\overline{PA}+\overline{PB}=8$, $\overline{QA}+\overline{QB}=8$
이므로 $\triangle BPQ$의 둘레의 길이는
$$\begin{aligned}\overline{BP}+\overline{BQ}+\overline{PQ}&=\overline{BP}+\overline{BQ}+\overline{PA}+\overline{AQ}\\&=\overline{BP}+\overline{PA}+\overline{BQ}+\overline{AQ}\\&=8+8=16\end{aligned}$$

04 타원 $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{21}=1$의 두 초점을 $F'(-c,\ 0)$, $F(c,\ 0)$이라고 하면 $c^2=30-21=9$이므로 $F'(-3,\ 0)$, $F(3,\ 0)$이다.
주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{21}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동시킨 것이므로 두 점 A, B는 $A(1,\ 7)$, $B(7,\ 7)$이다.
따라서 $\triangle OAB$의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times6\times7=21$$



05 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|=2$이므로 쌍곡선의 정의에 의해 두 점 $F'(-2,\ 0)$, $F(2,\ 0)$은 초점이고 주축의 길이는 2이다.
이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1$이라고 하면
$p=1$이고, $p^2+q^2=2^2$이므로 $q^2=4-1=3$
이 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$, 즉 $3x^2-y^2=3$이다.
따라서 $a=b=3$이므로 $a+b=6$

06 주축의 길이가 12이므로 $2b=12$에서 $b=6$
또, 점근선의 기울기는 $\pm\frac{b}{a}$이므로
$b=2a$ 또는 $b=-2a$에서
$a=3$ 또는 $a=-3$
$\therefore\ a^2+b^2=9+36=45$

07 포물선 $y^2=12x$의 초점은 $F(3,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-3$이다.
점 $P(a,\ b)$에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H(-3,\ b)$이다.
포물선의 정의에 의해
$\overline{PF}=\overline{PH}=a+3=8$, $a=5$
또, 점 $P(a,\ b)$가 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로
$b^2=12a=12\times5=60$
$\therefore\ a+b^2=65$

08 포물선 $y^2=-8x$의 초점은 $F(-2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=2$이다.
두 점 A, B에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 각각 H′, I′이라고 하면 포물선의 정의에 의해
$\overline{AF}=\overline{AH'}$, $\overline{BF}=\overline{BI'}$
$\overline{AH'}=\overline{AH}+2$, $\overline{BI'}=\overline{BI}+2$이므로
$$\begin{aligned}\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}&=\overline{AH}+2+\overline{BI}+2\\&=4+2+1+2=9\end{aligned}$$

09 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점을 $F'(-c,\ 0)$, $F(c,\ 0)$라고 하면 $c^2=10-3=7$이므로
$F'(-\sqrt{7},\ 0)$, $F(\sqrt{7},\ 0)$
$\overline{PF'}+\overline{PF}=14$이므로 $2a=14$, $a=7$
또, $b^2=a^2-c^2=7^2-(\sqrt{7})^2=42$이므로
$a^2+b^2=49+42=91$

10 타원 $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$의 장축의 길이는 $2\times6=12$이므로
타원의 정의에 의해 $\overline{PA}+\overline{PB}=12$
이때 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여
$$\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}\geq\overline{PA}\times\overline{PB},\ 6\geq\overline{PA}\times\overline{PB}$$
따라서 $\overline{AP}\times\overline{BP}$의 최댓값은 6이다.

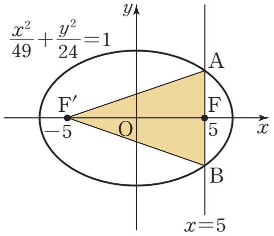
11 두 초점이 $F'(-5,\ 0)$, $F(5,\ 0)$인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면 단축의 길이가 $4\sqrt{6}$이므로
$2b=4\sqrt{6}$에서 $b=2\sqrt{6}$
$a^2=(2\sqrt{6})^2+25=49$
따라서 주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$이다.

직선 $x=5$와의 두 교점을 $\mathrm{A}(5,\ k)$, $\mathrm{B}(5,\ -k)$라고 하면

$$\frac{5^2}{49}+\frac{k^2}{24}=1,\ k^2=\frac{24^2}{49}$$

이므로

$$\mathrm{A}\left(5,\ \frac{24}{7}\right),\ \mathrm{B}\left(5,\ -\frac{24}{7}\right)$$



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{48}{7}$, $\overline{\mathrm{F'F}}=10$

이므로 △ABF′의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{48}{7}\times 10=\frac{240}{7}$$

12 $4x^2-y^2-24x+16=0$을 변형하면

$$\frac{(x-3)^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

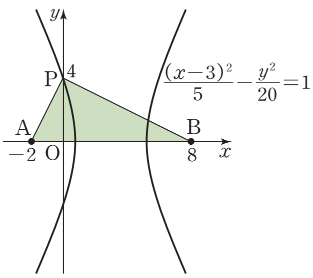
쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ 의 초점의 좌표는

$(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(-2,\ 0)$, $(8,\ 0)$

이다.



따라서 △PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 10\times 4=20$$

13 포물선 $y^2=-20x$의 초점은 점 $\mathrm{F}(-5,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=5$이다.

△ABC의 세 꼭짓점을 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라고 하면 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

포물선의 정의에 의해

$$\overline{\mathrm{AF}}=5-x_1,\ \overline{\mathrm{BF}}=5-x_2,\ \overline{\mathrm{CF}}=5-x_3$$

이고, △ABC의 무게중심이 초점 F이므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-5,\ x_1+x_2+x_3=-15$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}$$
$$=15-(x_1+x_2+x_3)=15+15=30$$

14 점 P에서 직선 $x=6$ 위에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$$\overline{\mathrm{PH}}=|x-6|,\ \overline{\mathrm{PA}}^2=(x-3)^2+(y-1)^2$$

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PH}}=1:2$에서 $\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{PA}}$이므로

$$(x-6)^2=4(x-3)^2+4(y-1)^2$$

위 식을 전개하여 정리하면

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점은 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이므로 두 초점 사이의 거리는 $2c=2$이다.

그런데 타원의 두 초점 사이의 거리는 평행이동하여도 변하지 않으므로 구하는 두 초점 사이의 거리는 2이다.

15 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$의 초점의 좌표는

$c^2=16+64=80$에서 $c=4\sqrt{5}$이므로

$$(4\sqrt{5},\ 0),\ (-4\sqrt{5},\ 0)$$

이고, 점근선의 방정식은 $y=\pm 2x$이다.

주어진 쌍곡선의 한 초점을 중심으로 하고 쌍곡선의 점근선에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하자.

점 $(4\sqrt{5},\ 0)$에서 점근선 $y=-2x$, 즉 $2x+y=0$에 이르는 거리는 반지름의 길이 r와 같으므로

$$r=\frac{|2\times 4\sqrt{5}+0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=8$$

따라서 구하는 원의 넓이는 64π이므로

$$k=64$$

16 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{4}x$이므로 양수 k에 대하여

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{(4k)^2}-\frac{y^2}{(3k)^2}=1$이라고 하자.

이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\times 4k=8k$이고,

초점은 $\mathrm{F}(5k,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-5k,\ 0)$이므로 $c=5k$이다.

$10\le c\le 20$에서 $10\le 5k\le 20$, $2\le k\le 4$

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8k,\ \overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+8k$$

한편, △PF′F의 둘레의 길이가 90이므로

$$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PF}}+8k)+10k+\overline{\mathrm{PF}}$$
$$=2\overline{\mathrm{PF}}+18k=90$$

$$\overline{\mathrm{PF}}+9k=45,\ \overline{\mathrm{PF}}=45-9k$$

그런데 $2\le k\le 4$에서 $18\le 9k\le 36$이므로

$9\le\overline{PF}\le 27$

따라서 선분 PF의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은

$27+9=36$

17 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 주축의 길이는 4이고,

$c^2=4+5=9$에서 $c=3$이므로 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이다.

또, 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$의 주축의 길이는 2이고,

$c^2=1+8=9$에서 $c=3$이므로 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이다.

따라서 두 점 F, F′은 두 쌍곡선의 공통 초점이다.

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{F'A}-\overline{FA}=4$, $\overline{F'B}-\overline{FB}=2$

한편, $\triangle F'AB$의 둘레의 길이가 16이므로

$$\begin{aligned}\overline{F'A}+\overline{AB}+\overline{F'B}&=\overline{F'A}+\overline{FB}-\overline{FA}+\overline{F'B}\\&=\overline{F'A}-\overline{FA}+\overline{F'B}-\overline{FB}+2\overline{FB}\\&=4+2+2\overline{FB}\\&=6+2\overline{FB}=16\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{FB}=5$

2 이차곡선과 직선 p. 227~229

01 ⑤	02 ②	03 ③	04 ①	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ①	09 ②	10 ①
11 ④	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 ⑤	17 ④	18 ④		

01 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2(x+9)$, 즉 $y=\frac{1}{3}(x+9)$

따라서 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1}{3}(x-3)$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+4$

$\therefore\ \frac{b}{a}=4\times 3=12$

02 포물선 $x^2=-2y$ 위의 점 $(4,\ -8)$에서의 접선의 방정식은 $4x=-(y-8)$, 즉 $y=-4x+8$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이고 포물선

$x^2=-2y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 직선

의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$이다.

따라서 x절편은 2이다.

03 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식

은 $\frac{2x}{12}+\frac{4y}{24}=1$, 즉 $y=-x+6$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 기울기가 1이고 점 $(-4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=x+4$, 즉 $y=x+9$

따라서 y절편은 9이다.

04 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정

식은 $\frac{ax}{4}+\frac{by}{3}=1$이고 이 직선이 $(4,\ 0)$을 지나므로

$\frac{4a}{4}=1$, $a=1$

또, 점 $P(1,\ b)$가 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}+\frac{b^2}{3}=1$ $\quad\therefore\ b^2=\frac{9}{4}$

그런데 b는 양수이므로 $b=\frac{3}{2}$이다.

$\therefore\ a+b=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

05 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선의 방정

식은 $\frac{4x}{12}-\frac{y}{3}=1$, 즉 $y=x-3$

이 직선에 수직인 직선은 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-(x-4)$, 즉 $y=-x+5$

따라서 y절편은 5이다.

06 쌍곡선 $x^2-y^2=7$ 위의 점 (4, 3)에서의 접선의 방정식은 $4x-3y=7$이고, 두 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다.

(i) 두 직선 $4x-3y=7$, $y=x$의 교점은 P(7, 7)

(ii) 두 직선 $4x-3y=7$, $y=-x$의 교점은 Q(1, −1)

이때 두 점근선은 서로 수직이므로 직각삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times7\sqrt{2}\times\sqrt{2}=7$$

07 포물선 $y^2=-12x$의 초점은 $F(-3, 0)$이고, 점 $P(-3, -6)$에서의 접선의 방정식은

$-6y=-6(x-3)$, 즉 $y=x-3$

이 직선과 x축과의 교점 Q의 좌표는 (3, 0)이다.

이때 △PQF는 직각삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{FP}\times\overline{FQ}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$$

08 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=2x+k$를 연립하여 풀면

$(2x+k)^2=12x$, $4x^2+4(k-3)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식이

$$\frac{D}{4}=4(k-3)^2-4k^2=-24k+36\geq0$$

이어야 하므로

$$k\leq\frac{3}{2}$$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

09 초점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고 준선의 방정식이 $x=-\frac{1}{2}$인 포물선의 방정식은 $y^2=2x$

이 포물선과 직선 $y=ax+4a-1$이 한 점에서 만나므로 접점을 $P(p, q)$라고 하면

$q^2=2p$ ······①

또, 점 P에서의 접선의 방정식은

$qy=x+p$, 즉 $y=\frac{1}{q}x+\frac{p}{q}$ ······②

①을 ②에 대입하면

$$y=\frac{1}{q}x+\frac{q}{2}$$

이 직선이 $y=ax+4a-1$과 같으므로

$$a=\frac{1}{q},\ \frac{q}{2}=4a-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\frac{1}{2a}=4a-1,\ 8a^2-2a-1=0$$

$(2a-1)(4a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

10 타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 A(3, −1)에서의 접선의 방정식은

$3x+3(-y)=12$, 즉 $y=x-4$

타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 P와 직선 $y=x-4$ 사이의 거리의 최댓값은 직선 $y=x-4$와 평행하고 타원에 접하는 직선과 직선 $y=x-4$ 사이의 거리와 같다.

이때 접점을 B라고 하면 점 B는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 B(−3, 1)이다.

따라서 점 B(−3, 1)과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$

11 점 (6, 10)이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{36}{a^2}-\frac{100}{b^2}=1$ ······①

또, 점 (6, 10)에서의 접선의 방정식은 $\frac{6x}{a^2}-\frac{10y}{b^2}=1$이므로 그 기울기는

$\frac{3b^2}{5a^2}=3$에서 $b^2=5a^2$ ······②

①, ②를 연립하여 풀면

$a^2=16$, $b^2=80$

$\therefore b^2-a^2=80-16=64$

12 쌍곡선 $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{40}-\frac{by}{24}=1$이므로 x축, y축과의 교점의 좌표는 각각 $\left(\frac{40}{a}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{24}{b}\right)$이다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 $P(a, b)$에서의

접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{40}{a}\times\frac{24}{b}=8$, $ab=60$

13 포물선 $y^2=-8x$ 위의 접점을 (p, q)라고 하면

$q^2=-8p$ ……①

또, 접선의 방정식은

$qy=-4(x+p)$, 즉 $y=-\frac{4}{q}(x+p)$ ……②

이때 직선 ②가 점 $(a, 3)$을 지나므로

$3q=-4(a+p)$ ……③

①, ③을 연립하여 풀면

$3q=-4\left(a-\frac{q^2}{8}\right)$, $q^2-6q-8a=0$

이 이차방정식의 두 근을 q_1, q_2라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$q_1\times q_2=-8a$ ……④

또, 두 접선의 기울기는 각각 $-\frac{4}{q_1}$, $-\frac{4}{q_2}$이고 서로 수직이므로

$\left(-\frac{4}{q_1}\right)\times\left(-\frac{4}{q_2}\right)=-1$, $q_1\times q_2=-16$

④에서 $-8a=-16$ $\quad\therefore a=2$

14 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{25}+\frac{by}{16}=1$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\left(\frac{25}{a}, 0\right)$, $\left(0, \frac{16}{b}\right)$이다.

이때 △OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times\frac{25}{a}\times\frac{16}{b}=\frac{200}{ab}$

그런데 점 (a, b)는 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}=1$

$a>0$, $b>0$에서 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{25}\times\frac{b^2}{16}}$

$1\geq 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{400}}$, $ab\leq 10$

$\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{10}$, $\frac{200}{ab}\geq 20$

따라서 △OPQ의 넓이의 최솟값은 20이다.

15 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 접점의 좌표를 (p, q)라고 하면

접선의 방정식은

$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{2}=1$, $y=-\frac{2p}{qa^2}x+\frac{2}{q}$

이 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$와 일치하므로

$\frac{2}{q}=2$에서 $q=1$

$-\frac{2p}{qa^2}=\frac{1}{2}$에서 $a^2=-4p$ ……①

또, 점 (p, q)가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{2}=1$ ……②

①을 ②에 대입하여 풀면

$-\frac{p}{4}+\frac{1}{2}=1$, $p=-2$ $\quad\therefore a^2=8$

따라서 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$의 두 초점의 좌표를

$(-c, 0)$, $(c, 0)$이라고 하면

$c^2=8-2=6$, $c=\sqrt{6}$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$2c=2\sqrt{6}$

16 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 접점의 좌표를 (a, b)라고 하면

접선의 방정식은

$\frac{ax}{6}+\frac{by}{4}=1$, $y=-\frac{2a}{3b}x+\frac{4}{b}$

이 직선이 점 $(0, 10)$을 지나므로

$\frac{4}{b}=10$, $b=\frac{2}{5}$

또, 점 (a, b)가 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{b^2}{4}=1$ ……①

①에 $b=\dfrac{2}{5}$를 대입하면

$\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{1}{25}=1$, $a^2=\dfrac{144}{25}$, $a=\pm\dfrac{12}{5}$

따라서 접선의 기울기는 $-\dfrac{2a}{3b}$이므로

$k^2=\dfrac{4a^2}{9b^2}=\dfrac{4}{9}\times 36=16$

17 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 접점의 좌표를 $(p,\ q)$라고 하면 접선의 방정식은

$\dfrac{px}{10}-\dfrac{qy}{b^2}=1$, $y=\dfrac{pb^2}{10q}x-\dfrac{b^2}{q}$

이 직선이 직선 $y=x-2$와 일치하므로

$\dfrac{pb^2}{10q}=1$, $-\dfrac{b^2}{q}=-2$

$p=5$, $b^2=2q$ ……①

또, 점 $(p,\ q)$가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{p^2}{10}-\dfrac{q^2}{b^2}=1$ ……②

①을 ②에 대입하여 풀면

$\dfrac{25}{10}-\dfrac{q^2}{2q}=1$, $q=3$ $\quad\therefore b^2=6$

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$의 두 초점의 좌표를 $(-c,\ 0)$, $(c,\ 0)$이라고 하면

$c^2=10+6=16$, $c=4$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$2c=8$

18 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$ 위의 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 접선의 방정식은

$\dfrac{ax}{4}-by=-1$

이 직선이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$\dfrac{3a}{4}-b=-1$ ……①

또, 점 $(a,\ b)$가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$ 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{4}-b^2=-1$, $a^2-4b^2=-4$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$a^2-4\left(\dfrac{3a}{4}+1\right)^2=-4$, $-\dfrac{5}{4}a^2-6a=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-\dfrac{24}{5}$

(i) $a=0$이면 $b=1$

(ii) $a=-\dfrac{24}{5}$이면 $b=-\dfrac{13}{5}$

따라서 두 점 $(0,\ 1)$, $\left(-\dfrac{24}{5},\ -\dfrac{13}{5}\right)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\dfrac{24}{5}\right)^2+\left(\dfrac{18}{5}\right)^2}=\sqrt{36}=6$

중단원 서술형 문제

1 이차곡선

p. 230~231

1 (가) -5 (나) 3 (다) $(-2,\ 3)$
(라) $x=-8$ (마) -7

2 (가) $(0,\ -2\sqrt{2})$ 또는 $(0,\ 2\sqrt{2})$
(나) $(0,\ 2\sqrt{2})$ 또는 $(0,\ -2\sqrt{2})$ (다) $2b$
(라) 8 (마) $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{25}=1$

3 (가) 16 (나) $2a$ (다) 3 (라) 7
(마) 10

4 [단계 1]
초점의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-3$인 포물선의 방정식은 $y^2=12x$이다.
[단계 2]
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 된다.
[단계 3]
위와 같이 평행이동하면 주어진 포물선의 방정식은
$(y-2)^2=12(x-1)$

위 식을 전개하면

$y^2-4y+4=12x-12,\ y^2-12x-4y+16=0$

따라서 $a=-12,\ b=-4,\ c=16$이므로

$a+b+c=0$

5 [단계 1]

쌍곡선의 두 점근선의 방정식은 $y=\pm x$, 즉 $x-y=0$, $x+y=0$이다.

[단계 2]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 A의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}=1 \qquad \therefore\ a^2-b^2=4$

또, 점 $(a,\ b)$에서 두 점 B, C 사이의 거리는 각각

$\overline{\text{AB}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}},\ \overline{\text{AC}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2}}$

[단계 3]

따라서 직사각형 ABOC의 넓이는

$\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{AC}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\times\frac{|a+b|}{\sqrt{2}}=\frac{|a^2-b^2|}{2}$

이때 $a^2-b^2=4$이므로 구하는 넓이는 2이다.

6 수준 1

㉮ 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 y축 위에 있으므로

장축의 길이는 $2b=10$, 단축의 길이는 $2a=8$에서

$a=4,\ b=5$

㉯ 두 초점을 $\text{F}(0,\ c),\ \text{F}'(0,\ -c)$라고 하면

$c^2=b^2-a^2=25-16=9,\ c=3$

㉰ $\therefore\ \overline{\text{FF}'}=6$

채점 기준	배점
㉮ $a,\ b$의 값 구하기	2점
㉯ c의 값 구하기	2점
㉰ $\overline{\text{FF}'}$의 길이 구하기	2점

수준 2

㉮ 원의 중심을 $\text{Q}(a,\ b)$라 하고, 점 Q에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 R라고 하면 $\text{R}(1,\ b)$이다.

점 P, R는 원 위의 점이므로

$\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{QR}}$, 즉 $\overline{\text{PQ}}^2=\overline{\text{QR}}^2$

이때 $\overline{\text{PQ}}^2=(a-3)^2+(b-1)^2,\ \overline{\text{QR}}^2=|a-1|^2$이므로

$(a-3)^2+(b-1)^2=|a-1|^2$

$(b-1)^2=4a-8=4(a-2)$ ……①

㉯ 또, 중심 $\text{Q}(a,\ b)$가 포물선 $(y-q)^2=k(x-p)$ 위의 점이므로

$(b-q)^2=k(a-p)$

㉰ ①에서 $q=1,\ k=4,\ p=2$이므로

$p+q+k=7$

채점 기준	배점
㉮ 점 Q의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 $a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	3점
㉯ 점 Q가 포물선 위의 점임을 이용하여 관계식 구하기	4점
㉰ $p+q+k$의 값 구하기	1점

[다른 풀이]

점 $\text{P}(3,\ 1)$을 지나고 직선 $x=1$에 접하는 원의 중심 $\text{Q}(x,\ y)$의 자취는 점 P를 초점으로 하고, 직선 $x=1$을 준선으로 하는 포물선이다.

한편, 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식이 $x=-1$인 포물선의 방정식은 $y^2=4x$이고, 이 포물선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동 시키면

$(y-1)^2=4(x-2)$

이때 이 포물선의 초점은 $\text{P}(3,\ 1)$, 준선의 방정식은 $x=1$이다.

따라서 $q=1,\ k=4,\ p=2$이므로 $p+q+k=7$이다.

수준 3

㉮ 타원 $7x^2+16y^2=112$를 변형하면

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

이때 $c^2=16-7=9$이므로 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$이다.

㉯ 쌍곡선 $a^2x^2-b^2y^2=a^2b^2$를 변형하면

$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로 $b=2$

또, 타원과 쌍곡선의 초점이 일치하므로

$c^2=b^2+a^2=9,\ a^2=5$

㉰ $\therefore\ 2a^2-b^2=10-4=6$

채점 기준	배점
㉮ 초점의 좌표 구하기	4점
㉯ $a,\ b$의 값 구하기	4점
㉰ $2a^2-b^2$의 값 구하기	2점

2 이차곡선과 직선 p. 232~233

1 (가) $12k+36$ (나) $>$ (다) $=$ (라) $<$

2 (가) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(나) 한 점에서 접한다.
(다) 만나지 않는다.

3 (가) k^2+3 (나) k^2-9 (다) $-3<k<3$

4 [단계 1]
포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $P(4,\ -4\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$$-4\sqrt{2}y=4(x+4),\ \text{즉}\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+4)$$

[단계 2]
위 직선의 x절편은 -4이다.
[단계 3]
포물선 $y^2=kx$의 초점의 좌표가 $(-4,\ 0)$이므로
$k=4\times(-4)=-16$

5 [단계 1]
직선 $y=3x-2$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로
$a=3$이다.
[단계 2]
이 직선을 $y=3x+k$라고 하면 직선 $y=3x+k$가 타원
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$, 즉 $13x^2+4y^2=52$에 접하므로

$$13x^2+4(3x+k)^2=52$$
$$49x^2+24kx+4k^2-52=0$$

이 이차방정식의 판별식이

$$\frac{D}{4}=(12k)^2-49(4k^2-52)=-52(k^2-49)=0$$

이어야 하므로
$k^2=49,\ k=\pm7$
따라서 두 접선의 방정식은 $y=3x+7,\ y=3x-7$이다.
[단계 3]
두 직선 사이의 거리는 직선 $y=3x+7$ 위의 점 $(0,\ 7)$과 직선 $3x-y-7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-7-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{14\sqrt{10}}{10}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$$

6 수준 1

㉮ 점 $P(\sqrt{2},\ 1)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

㉯ 또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(\sqrt{2},\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1$$

㉰ 이 직선의 x절편이 $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$이므로 $\frac{a^2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $a^2=1$
이를 ①에 대입하면 $b^2=1$
$\therefore a^2b^2=1$

채점 기준	배점
㉮ 점 P가 쌍곡선 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	2점
㉯ 점 P에서의 접선의 방정식 구하기	2점
㉰ a^2b^2의 값 구하기	2점

수준 2

㉮ 포물선 $y^2=-4x$ 위의 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 접선의 방정식은
$by=-2(x+a)$
㉯ 이 접선이 점 $(-3,\ 4)$를 지나므로
$4b=-2(-3+a)$, 즉 $2b=-a+3$ $\cdots\cdots ①$
㉰ 또, 점 $(a,\ b)$는 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점이므로
$b^2=-4a$ $\cdots\cdots ②$
①, ②를 연립하여 풀면

$$\frac{(-a+3)^2}{4}=-4a,\ a^2-6a+9=-16a$$
$$a^2+10a+9=0,\ (a+1)(a+9)=0$$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-9$
㉱ 따라서 $a=-1$일 때 $b=2$, $a=-9$일 때 $b=6$이므로 접점의 좌표는
$(-1,\ 2),\ (-9,\ 6)$
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

채점 기준	배점
㉮ 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식 구하기	2점
㉯ ㉮를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	2점
㉰ a의 값 구하기	2점
㉱ $\overline{AB}$의 길이 구하기	2점

수준 3

㉮ 점 $(6,\ -4)$가 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{36}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

㉯ 또, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(6,\ -4)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{6x}{a^2}-\dfrac{4y}{b^2}=1$

㉰ 이 직선의 기울기가 $\dfrac{3b^2}{2a^2}$이므로 $\dfrac{3b^2}{2a^2}=2$에서

$$3b^2=4a^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$a^2=48,\ b^2=64$

㉱ 따라서 타원 $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{64}=1$의 두 초점의 좌표를 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$라고 하면

$c^2=64-48=16,\ c=4$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$2c=8$

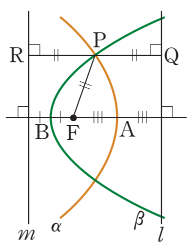
채점 기준	배점
㉮ 주어진 점이 타원 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	3점
㉯ 타원 위의 점에서의 접선의 방정식 구하기	3점
㉰ a^2, b^2의 값 각각 구하기	2점
㉱ 두 초점 사이의 거리 구하기	2점

대단원 평가 문제

p. 234~235

01 ⑤	02 27	03 12	04 3	05 18 km
06 ④	07 3	08 $4\sqrt{2}$	09 ④	10 20

01 오른쪽 그림과 같이 두 포물선 α, β의 준선을 각각 l, m이라고 하자.



점 P에서 준선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{PF}=\overline{PQ}=\overline{PR}$

한편, $\overline{AF}=6$, $\overline{BF}=4$이므로

$\overline{QR}=2(\overline{AF}+\overline{BF})=2\times10=20$

$\therefore\ \overline{PF}=\dfrac{1}{2}\overline{QR}=\dfrac{1}{2}\times20=10$

02 포물선 $y^2=12x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

△ABC의 무게중심의 x좌표가 6이므로

$\dfrac{a+c+e}{3}=6,\ a+c+e=18$

포물선의 정의에 의하여 세 점 A, B, C에서 준선 $x=-3$까지의 거리 $a+3$, $c+3$, $e+3$은 각각 $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$와 같으므로

$\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=a+c+e+9=18+9=27$

03 두 초점이 F, G인 타원의 장축의 길이가 12이므로 타원의 정의에 의해

$$\overline{AF}+\overline{AG}=\overline{BF}+\overline{BG}=12 \qquad \cdots\cdots①$$

또, 두 초점이 F, R인 타원의 장축의 길이가 18이므로 타원의 정의에 의해

$$\overline{AF}+\overline{AR}=\overline{BF}+\overline{BR}=18 \qquad \cdots\cdots②$$

①−②를 하면

$|\overline{AG}-\overline{AR}|=6,\ |\overline{BG}-\overline{BR}|=6$

$\therefore\ |\overline{AG}-\overline{AR}|+|\overline{BG}-\overline{BR}|=12$

04 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$의 두 초점의 좌표를 $(-c,\ 0)$, $(c,\ 0)$이라고 하면 $c^2=a^2-2$

따라서 타원 E의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2-2}+\dfrac{y^2}{2}=1$

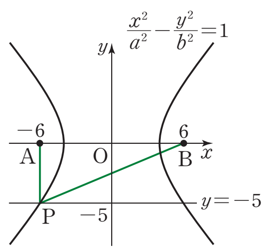
이 타원 E의 두 초점의 좌표를 $(0,\ d)$, $(0,\ -d)$라고 하면

$d^2=2-(a^2-2)=4-a^2$

한편, 원 C가 타원 E의 단축의 두 꼭짓점과 두 초점을 모두 지나므로 $c^2=d^2$, 즉 $a^2-2=d^2$

$a^2-2=4-a^2 \qquad \therefore\ a^2=3$

05 오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고, 선분 AB의 중점을 원점으로 하는 좌표평면을 그려 보자.



두 점 A, B에서 거리의 차가 8인 점 P의 자취는 쌍곡선이므로 이 쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$)이라고 하자.

쌍곡선의 정의에 의해 $2a=8$, $a=4$

또, 두 초점이 A$(-6, 0)$, B$(6, 0)$이므로

$6^2=a^2+b^2$, $36=16+b^2$ $\quad\therefore b^2=20$

즉, 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$이다.

두 점 A, B는 해변에서 5 km 위치에 있으므로 해변의 방정식은 $y=-5$이다.

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$과 직선 $y=-5$의 교점이 바로 지상관제소 위치인 점 P이므로

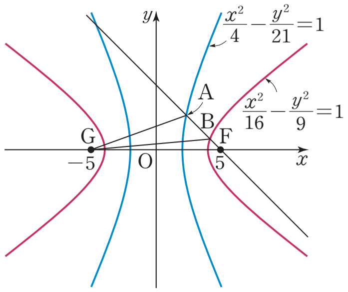
$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(-5)^2}{20}=1$ $\quad\therefore x=\pm 6$

즉, 점 P의 좌표는 $(6, -5)$ 또는 $(-6, -5)$이다.

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=5+\sqrt{12^2+5^2}=18$ (km)

06 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$에서 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{AG}-\overline{AF}=8$ ······①



또, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$에서 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{BG}-\overline{BF}=4$ ······②

①+②를 하면

$(\overline{AG}+\overline{BG})-(\overline{AF}+\overline{BF})=12$ ······③

한편, △GAB의 둘레의 길이가 20이므로

$\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{BG}+(\overline{BF}-\overline{AF})$

$=20$ ······④

④−③을 하면

$2\overline{BF}=8$, $\overline{BF}=4$

07 타원 $\dfrac{4x^2}{13}+\dfrac{4y^2}{9}=1$, 즉 $\dfrac{x^2}{\frac{13}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$의 정의에 의해

$\overline{PF}+\overline{PG}=2\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\sqrt{13}$이므로

$(\overline{PF}+\overline{PG})^2=13$ ······①

쌍곡선 $4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$, 즉 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$의 정의에 의해

$|\overline{PF}-\overline{PG}|=2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1$이므로

$(\overline{PF}-\overline{PG})^2=1$ ······②

①−②를 하면

$4\overline{PF}\times\overline{PG}=12$ $\quad\therefore \overline{PF}\times\overline{PG}=3$

08 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리가 2이고, 준선의 방정식이 $x=0$이므로 두 초점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이다.

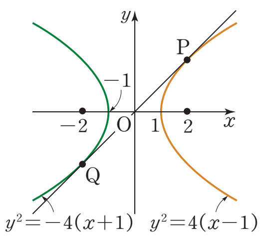
이때 초점의 좌표가 $(2, 0)$인 포물선의 방정식은

$y^2=4(x-1)$

또, 초점의 좌표가 $(-2, 0)$인 포물선의 방정식은

$y^2=-4(x+1)$

이때 두 포물선에 동시에 접하고 기울기가 양수인 직선과 두 포물선과의 접점을 각각 P, Q라고 하면 두 접점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로 접선의 방정식을



$y=ax(a>0)$로 놓자.

포물선 $y^2=4(x-1)$과 직선 $y=ax$가 서로 접하므로

$a^2x^2=4x-4$, $a^2x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식이

$\dfrac{D}{4}=4-4a^2=0$

이어야 하므로

$a^2=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

또, $a=1$일 때 $x=2$, $y=2$이므로 접점 P의 좌표는 $(2, 2)$이다.

마찬가지 방법으로 포물선 $y^2=-4(x+1)$와 직선 $y=x$의 접점 Q의 좌표는 $(-2, -2)$이다.

따라서 두 접점 P, Q 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

09 타원 $x^2+4y^2=1$ 위의 두 점 P, Q의 좌표를 (a, b), (c, d)라고 하면 접선의 방정식은 각각

$ax+4by=1$, $cx+4dy=1$

이때 위의 두 직선은 모두 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$2a+4b=1,\ 2c+4d=1$

즉, 두 점 $P(a,\ b)$, $Q(c,\ d)$는 직선 $2x+4y=1$ 위의 점이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $2x+4y=1$이다.

10 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(2\sqrt{5},\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{2\sqrt{5}x}{a^2}-\dfrac{y}{b^2}=1$

또, 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $P(2\sqrt{5},\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{2\sqrt{5}x}{25}+\dfrac{y}{5}=1$

위의 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{(2\sqrt{5})^2}{25a^2}-\frac{1}{5b^2}=0,\ \frac{4}{5a^2}-\frac{1}{5b^2}=0$$

$a^2=4b^2$ ……①

한편, 점 $P(2\sqrt{5},\ 1)$이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{(2\sqrt{5})^2}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$b^2=4,\ a^2=16 \quad \therefore a^2+b^2=20$

대단원 기출 모의고사

p. 236~238

01 ③	02 ④	03 ①	04 ②	05 ④
06 12	07 12	08 15	09 32	10 ⑤
11 14	12 116			

01 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$, 즉 l: $y=\dfrac{1}{2}x+2$

준선의 방정식이 $x=-1$이므로 직선 l과 준선이 만나는 점 B의 y좌표는

$$y=\frac{1}{2}\times(-1)+2=\frac{3}{2}$$

$$\therefore B\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$$

직선 l과 x축이 만나는 점 C는

$C(-4,\ 0)$

준선과 x축이 만나는 점 D는

$D(-1,\ 0)$

따라서 $\overline{CD}=3$, $\overline{BD}=\dfrac{3}{2}$이므로 △BCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

02 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라고 하면 조건 ㈎에서 두 초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=25$ ……①

조건 ㈏에서 두 점근선이 서로 수직이므로

$\dfrac{b}{a}\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-1$

$\therefore a^2=b^2$ ……②

②를 ①에 대입하면

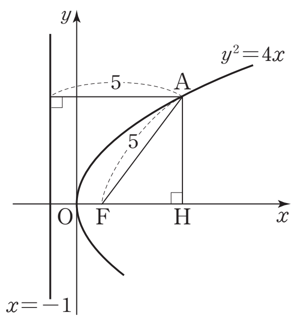
$$2a^2=25,\ a^2=\frac{25}{2}$$

$$\therefore a=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ (\because a>0)$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$2a=5\sqrt{2}$

03 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $F(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=5$이고

$\overline{FH}=4-1=3$

이므로 직각삼각형 AFH에서

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 △AFH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{FH}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$$

04 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 위의 점 A(4, 1)에서의 접선의 방정식은

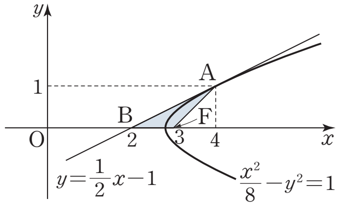
$\frac{4x}{8}-y=1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-1$

이 접선이 x축과 만나는 점 B의 x좌표는 $0=\frac{1}{2}x-1$에서 $x=2$이므로 점 B(2, 0)이다.

또, 쌍곡선의 초점 F의 좌표를 $(c, 0)(c>0)$이라고 하면

$c^2=8+1=9 \qquad \therefore c=3$

$\therefore$ F(3, 0)



따라서 △FAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3-2)\times1=\frac{1}{2}$

05 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점의 좌표는 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이다.

타원 $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이므로 $13>b^2>0$이다.

이때 $a^2=13-b^2$이므로 $a^2+b^2=13$

06 $\overline{\mathrm{FP}}=a$, $\overline{\mathrm{F'P}}=b$라고 하면 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이가 $2\times3=6$이므로 타원의 정의에 의하여

$a+b=6 \qquad \cdots\cdots①$

또, 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 F, F′ 사이의 거리는 $2\times\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$이고 $\angle\mathrm{FPF'}=90°$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20 \qquad \cdots\cdots②$

이때 ①에서 $b=6-a$이므로 이를 ②에 대입하면

$a^2+(6-a)^2=20$, $2a^2-12a+16=0$

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

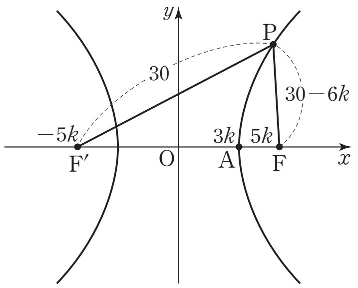
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

그런데 $a<b$이므로 $a=2$, $b=4$

따라서 $\overline{\mathrm{F'P}}=4$, $\overline{\mathrm{FQ}}=6$이므로 △QF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FQ}}\times\overline{\mathrm{F'P}}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

07 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$이라고 하면 이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이므로 $a=3k$, $b=4k$ $(k>0)$로 놓을 수 있다.



꼭짓점 A의 x좌표는 $3k$이고

$c=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$

이때 주축의 길이가 $6k$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=6k$

$\overline{\mathrm{PF}}\le20<30=\overline{\mathrm{PF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6k$에서

$\overline{\mathrm{PF}}=30-6k$

$16\le\overline{\mathrm{PF}}\le20$에서 $16\le30-6k\le20$

$-14\le-6k\le-10 \qquad \therefore \frac{5}{3}\le k\le\frac{7}{3}$

또, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FO}}-\overline{\mathrm{AO}}=5k-3k=2k$이고 $\overline{\mathrm{AF}}$의 길이가 자연수이므로 $\frac{10}{3}\le2k\le\frac{14}{3}$를 만족시키는 자연수 $2k$의 값은

$2k=4 \qquad \therefore k=2$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $6k=12$이다.

08 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F(3, 0), F′(−3, 0)이므로

$a^2+b^2=9 \qquad \cdots\cdots①$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4, k)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots②$

이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 ②에서 $y=0$일 때이므로

$$\frac{4x}{a^2}=1 \qquad \therefore x=\frac{a^2}{4}$$

이때 접선 ②와 x축과의 교점 $\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$이 선분 F′F를 2 : 1로 내분하므로

$$\frac{2\times 3+1\times(-3)}{2+1}=\frac{a^2}{4}, \ 1=\frac{a^2}{4}$$

$\therefore a^2=4$

$a^2=4$를 ①에 대입하면

$4+b^2=9 \qquad \therefore b^2=5$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이고, 점 P$(4, k)$는 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{4}-\frac{k^2}{5}=1, \ \frac{k^2}{5}=3$$

$\therefore k^2=15$

참고 **수직선 위의 선분의 내분점과 외분점**

수직선 위의 두 점 A(x_1), B(x_2)에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 하면

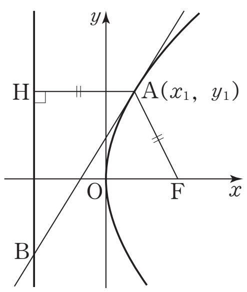
$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right), \mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right) \text{ (단, } m\neq n)$$

09 접점 A의 좌표를 (x_1, y_1), 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}, \ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}$

이므로

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2$



점 A에서의 접선의 기울기는 $\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$이고 △ABH에서

$$\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

따라서 포물선 위의 점 A(x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=6(x+x_1), \text{ 즉 } y=\frac{6}{y_1}x+\frac{6x_1}{y_1}$$

이므로

$$\frac{6}{y_1}=\sqrt{3} \qquad \therefore y_1=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

또, 점 (x_1, y_1)은 포물선 위의 점이므로

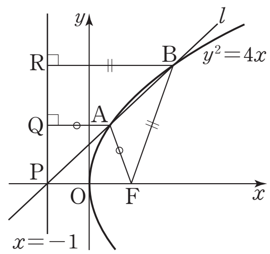
$y_1^{\ 2}=12x_1, \ (2\sqrt{3})^2=12x_1 \qquad \therefore x_1=1$

이때 포물선 $y^2=12x$의 준선의 방정식이 $x=-3$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=x_1+3=4, \ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}=8$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}=8\times 4=32$

10 포물선 $y^2=4x$에서 초점은 F$(1, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이다.



두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{FA}}, \ \overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{FB}}$

$\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}=1:2$에서 $\overline{\mathrm{FB}}=2\overline{\mathrm{FA}}$이므로

$\overline{\mathrm{RB}}=2\overline{\mathrm{QA}}$

따라서 $\overline{\mathrm{QA}}=k$라고 하면 $\overline{\mathrm{RB}}=2k$이다.

이때 점 A의 x좌표는 $k-1$이므로 점 A의 y좌표는 $y^2=4(k-1)$에서

$y=2\sqrt{k-1} \ (\because y>0)$

$\therefore \mathrm{A}(k-1, 2\sqrt{k-1})$

또, 점 B의 x좌표는 $2k-1$이므로 점 B의 y좌표는 $y^2=4(2k-1)$에서

$y=2\sqrt{2k-1} \ (\because y>0)$

$\therefore \mathrm{B}(2k-1, 2\sqrt{2k-1})$

세 점 A, B, P는 모두 직선 l 위의 점이므로

(직선 l의 기울기)=(직선 AP의 기울기)

=(직선 BP의 기울기)

(직선 AP의 기울기)$=\frac{2\sqrt{k-1}}{k-1-(-1)}=\frac{2\sqrt{k-1}}{k}$

(직선 BP의 기울기)$=\frac{2\sqrt{2k-1}}{2k-1-(-1)}=\frac{\sqrt{2k-1}}{k}$

즉, $\frac{2\sqrt{k-1}}{k}=\frac{\sqrt{2k-1}}{k}$에서

$2\sqrt{k-1}=\sqrt{2k-1}$ ($\because$ $k\neq 0$)

양변을 제곱하면

$4(k-1)=2k-1$

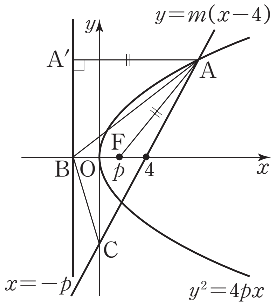
$2k=3$ $\quad\therefore$ $k=\frac{3}{2}$

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}-1}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

11 $B(-p,\ 0)$, $C(0,\ -4m)$이고, $A(\alpha,\ m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라고 하면 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{\alpha-p}{3},\ \frac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{\alpha-p}{3},\ \frac{m\alpha-8m}{3}\right)$



이 점이 초점 $F(p,\ 0)$과 일치하므로

$\frac{\alpha-p}{3}=p$, $\frac{m\alpha-8m}{3}=0$

$\therefore$ $\alpha=4p$, $(\alpha-8)m=0$

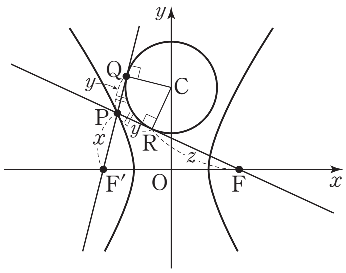
이때 $m>0$이므로 $\alpha=8$, $p=2$

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A′이라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'}=2+8=10$, $\overline{BF}=2\overline{OF}=4$

$\therefore$ $\overline{AF}+\overline{BF}=10+4=14$

12 원 C의 중심을 $C(0,\ a)$라 하고, 원과 직선 PF의 교점을 R라고 하자.



$\overline{PF'}=x$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=y$, $\overline{RF}=z$라고 하면

$\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$이므로

$x+y=5\sqrt{2}$ ……①

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF}-\overline{PF'}=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

이므로

$(y+z)-x=4\sqrt{2}$ ……②

$\triangle CQF'$과 $\triangle CRF$에서

$\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{CF'}=\overline{CF}$, $\angle CQF'=\angle CRF=90°$

이므로 두 삼각형은 합동이다. 즉,

$\overline{QF'}=\overline{RF}$

$\therefore$ $x+y=z$ ……③

①, ②, ③에서

$x=3\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$, $z=5\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2=(y+z)^2+x^2$

$=(7\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=116$