04 복소수

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	복소수의 사칙연산	☐	☐
필수유형 02	복소수가 실수 또는 순허수가 되는 조건	☐	☐
필수유형 03	복소수가 서로 같을 조건	☐	☐
필수유형 04	켤레복소수의 성질	☐	☐
필수유형 05	복소수의 성질을 이용하여 식의 값 구하기	☐	☐
필수유형 06	등식을 만족시키는 복소수 구하기	☐	☐
필수유형 07	i의 거듭제곱	☐	☐
발전유형 08	음수의 제곱근	☐	☐

필수유형 01 복소수의 사칙연산

다음을 계산하여라.

(1) $(2-3i)^2$

(2) $(i-2)(1-2i)$

(3) $(1+2i)(2-3i)+\dfrac{1+i}{1-i}$

(4) $\dfrac{2i}{2+i}-\dfrac{1-i}{i}$

풍쌤 POINT

복소수의 사칙연산은 허수단위 i를 문자로 생각하고 다항식의 사칙연산과 같은 방법으로 계산해!

풀이

(1) $(2-3i)^2=4-12i+9i^2$ ❶

$=4-12i-9$

$=(4-9)-12i$

$=-5-12i$

❶ i^2이 있으면 $i^2=-1$로 고친다.

(2) $(i-2)(1-2i)=i-2i^2-2+4i$

$=i+2-2+4i$

$=5i$

(3) $(1+2i)(2-3i)+\dfrac{1+i}{1-i}$

$=2-3i+4i-6i^2+\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$ ❷

$=2-3i+4i+6+\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}$

$=(2+6)+(-3i+4i)+\dfrac{2i}{2}$

$=8+i+i$

$=8+2i$

❷ 분모에 $a+bi$ (a, b는 실수)가 있을 때는 분모, 분자에 각각 $a-bi$를 곱한다.

(4) $\dfrac{2i}{2+i}-\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{2i(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\dfrac{(1-i)i}{i^2}$ ❸

$=\dfrac{4i-2i^2}{4-i^2}+i-i^2$

$=\dfrac{4i+2}{5}+i+1$

$=\left(\dfrac{2}{5}+1\right)+\left(\dfrac{4}{5}+1\right)i$

$=\dfrac{7}{5}+\dfrac{9}{5}i$

❸ 분모에 순허수가 있을 때는 i를 분모와 분자에 각각 곱한다.

답 (1) $-5-12i$ (2) $5i$ (3) $8+2i$ (4) $\dfrac{7}{5}+\dfrac{9}{5}i$

풍쌤 강의 NOTE

- 복소수의 덧셈과 뺄셈은 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.
- 복소수와 그 켤레복소수의 곱은 실수이므로 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 각각 곱하여 계산하면 분모가 실수가 된다.

01-1 유사

다음을 계산하여라.

(1) $(3+2i)+(2-i)$

(2) $3(2-i)+2(3+2i)$

(3) $(1-i)(-2+i)-(2+i)(1-i)$

(4) $(2+3i)^2-(1-2i)^2$

01-2 유사

다음을 계산하여라.

(1) $\dfrac{1+7i}{2-i}$

(2) $\dfrac{3}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$

(3) $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$

01-3 변형

$3-5i-\dfrac{2-i}{1-3i}+\dfrac{1-2i}{1-i}-2+2i$를 계산하여 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

01-4 변형

$(3+2i)(2-i)+(5-i)(-2-3i)$의 실수부분을 a, 허수부분을 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

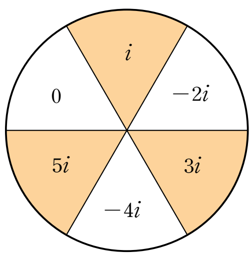
01-5 변형

임의의 두 복소수 α, β에 대하여 연산 $\oplus$를 $\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta+\alpha\beta$라고 정의할 때, $(2+i)\oplus(-1+i)$의 값을 구하여라.

01-6 실력 기출

복소수 0, i, $-2i$, $3i$, $-4i$, $5i$가 적힌 다트판에 3개의 다트를 던져 맞히는 게임이 있다. 3개의 다트를 모두 다트판에 맞혔을 때, 얻을 수 있는 세 복소수를 a, b, c라고 하자. a^2-bc의 최솟값을 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, 경계에 맞는 경우는 없다.)



필수유형 02 복소수가 실수 또는 순허수가 되는 조건

다음 물음에 답하여라.

(1) 복소수 $(1+i)x^2+(3-i)x+2-2i$가 실수일 때, 실수 x의 값을 모두 구하여라.

(2) 복소수 $x^2+(1+2xi)(-1+2i)+4$가 순허수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

(3) 복소수 $z=(x^2-3x+2)+(x-2)i$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

주어진 복소수를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한 후, 실수 또는 순허수가 되는 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 만들자!

풀이

(1) $(\text{주어진 식})=x^2+x^2i+3x-xi+2-2i$
$=(x^2+3x+2)+(x^2-x-2)i$

이 복소수가 실수이므로❶ $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 x의 값은 -1, 2이다.

(2) $(\text{주어진 식})=x^2-1+2i-2xi-4x+4$
$=(x^2-4x+3)+(-2x+2)i$

이 복소수가 순허수이므로❷

$x^2-4x+3=0$, $-2x+2\neq0$

(i) $x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

(ii) $-2x+2\neq0$에서 $x\neq1$

(i), (ii)에 의하여 $x=3$

(3) z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로❸

$x^2-3x+2=0$, $x-2\neq0$

(i) $x^2-3x-2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ii) $x-2\neq0$에서 $x\neq2$

(i), (ii)에 의하여 $x=1$

❶ 복소수가 실수이면 (허수부분)$=0$

❷ 복소수가 순허수이면 (실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq0$

❸ $z=a+bi$일 때 $z^2=(a^2-b^2)+2abi$이므로 z^2이 음의 실수이면 $a^2-b^2<0$, $2ab=0$ 즉, $a=0$, $b\neq0$이므로 $z=bi$ (순허수) 꼴이어야 한다.

답 (1) -1, 2 (2) 3 (3) 1

풍쌤 강의 NOTE

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① $z=a+bi$가 실수이면 ➡ $b=0$, 즉 $z=a$ (실수)

② $z=a+bi$가 순허수이면 ➡ $a=0$, $b\neq0$, 즉 $z=bi$ (순허수)

③ z^2이 실수이면 ➡ z는 실수 $(b=0)$ 또는 순허수 $(a=0, b\neq0)$

④ z^2이 양의 실수이면 ➡ z는 0이 아닌 실수 $(b=0)$

⑤ z^2이 음의 실수이면 ➡ z는 순허수 $(a=0, b\neq0)$

02-1 유사

복소수 $z=(1+i)x^2-xi-9-6i$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 복소수 z가 실수일 때, 실수 x의 값을 모두 구하여라.

(2) 복소수 z가 순허수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

02-2 유사

복소수 $z=(x^2-5x+6)+(x^2-4)i$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라.

02-3 변형

복소수 $z=(x+3i)(-2+i)$에 대하여 z^2이 양의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라.

02-4 변형

복소수 $z=2i(a-3i)^2$이 실수가 되도록 하는 양수 a의 값을 m, 그때의 z의 값을 n이라고 할 때, $m+n$의 값을 구하여라.

02-5 변형

복소수 $z=(a+2i)(-1+ai)+(-2+ai)$에 대하여 $z^2<0$이 되도록 하는 실수 a의 값을 구하여라.

02-6 실력

복소수 $z=x^2+(i+4)x+3+3i$에 대하여 z^2과 $z-2i$가 모두 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라.

필수유형 03 복소수가 서로 같을 조건

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $(2x-y)+(x-y)i=1-i$

(2) $(1+i)x+(1-i)y=4+2i$

(3) $\dfrac{2x}{1+i}+\dfrac{4y}{1-i}=3+i$

풍쌤 POINT

주어진 등식의 좌변을 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 연립방정식을 만들자!

복소수가 서로 같을 조건: $a+bi=c+di$이면 $\underbrace{a=c}_{\text{실수부분끼리 같다.}}$, $\underbrace{b=d}_{\text{허수부분끼리 같다.}}$ (단, a, b, c, d는 실수)

풀이

(1) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여❶

$2x-y=1$, $x-y=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

❶ $2x-y$, $x-y$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 $a+bi$ 꼴로 정리하면

$(1+i)x+(1-i)y=(x+y)+(x-y)i$

이므로 $(x+y)+(x-y)i=4+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=4$, $x-y=2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

(3) 주어진 등식의 좌변의 분모를 실수화하여 $a+bi$ 꼴로 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{2x}{1+i}+\frac{4y}{1-i}&=\frac{2x(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\frac{4y(1+i)}{(1-i)(1+i)}❷\\&=\frac{2x-2xi}{2}+\frac{4y+4yi}{2}\\&=x-xi+2y+2yi\\&=(x+2y)+(-x+2y)i\end{aligned}$$

❷ 분모에 복소수가 있을 때는 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱한다.

이므로 $(x+2y)+(-x+2y)i=3+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=3$, $-x+2y=1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

답 (1) $x=2$, $y=3$ (2) $x=3$, $y=1$ (3) $x=1$, $y=1$

풍쌤 강의 NOTE

복소수 $a+bi$와 복소수 $c+di$가 서로 같다면 실수부분 a와 c가 서로 같고 허수부분 b와 d가 서로 같다. (단, 복소수가 서로 같을 조건은 a, b, c, d가 모두 실수일 때 성립한다.)

03-1 유사

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $\left(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}y-\frac{1}{2}\right)i=0$

(2) $(x+y)+(x-y)i=8-2i$

(3) $(2-3i)x-(1-i)y=3-2i$

(4) $\frac{2x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}=-1+6i$

03-2 유사

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하여라.

(1) $(3-x)+(2+x)i=4+yi$

(2) $(2x-y)+(x-2y)=1-2i$

(3) $(2+i)x-(3-4i)y=2-10i$

(4) $\frac{x}{3+i}-\frac{2y}{-1+3i}=2-3i$

03-3 유사

두 실수 x, y가 등식 $(x+i)^2+(2+3i)^2=y+20i$를 만족시킬 때, $x+y$의 값을 구하여라.

03-4 변형

등식 $(2+i)^2x+(3-2i)^2y=2-16i$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하여라.

03-5 변형

$f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $f(2+i)=0$일 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이다.)

03-6 실력

기출

$xy<0$인 두 실수 x, y가 등식

$$|x-y|+(x-1)i=3-2i$$

를 만족시킬 때, $x+y$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

필수유형 04 켤레복소수의 성질

복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $z\overline{z}$는 실수이다.

② z가 순허수이면 $\overline{z}$도 순허수이다.

③ $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$은 허수이다. (단, $z\neq0$)

④ $z=-\overline{z}$이면 z는 순허수이다.

⑤ $z=\overline{z}$이면 z는 실수이다.

풍쌤 POINT

$z=a+bi$로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로 z, $\overline{z}$를 주어진 식에 대입하여 각 보기가 참 또는 거짓이 되는지 확인해 봐!

풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\overline{z}=a-bi$

① $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ❶

즉, $z\overline{z}$는 실수이다.

② z가 순허수이면 $z=bi$이므로

$\overline{z}=-bi$ ❷

즉, $\overline{z}$도 순허수이다.

③ $$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$$

$$=\frac{a-bi+a+bi}{a^2+b^2}=\frac{2a}{a^2+b^2}$$

즉, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$은 실수이다.

④ $z=-\overline{z}$이면 $a+bi=-(a-bi)$이므로

$2a=0 \qquad \therefore a=0$

즉, $z=bi$이므로 z는 순허수이다.

⑤ $z=\overline{z}$이면 $a+bi=a-bi$

$2bi=0 \qquad \therefore b=0$

즉, $z=a$이므로 z는 실수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

❶ (허수부분)$=0$이므로 실수이다.

❷ (실수부분)$=0$이므로 순허수이다.

답 ③

풍쌤 강의 NOTE

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 할 때

① $b=0$이면 $z=a$이므로 z는 실수이다.

② $a=0$이면 $z=bi$이므로 z는 순허수이다.

04-1 유사

복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $z-\overline{z}$는 실수이다.

② $\overline{z}^2$은 순허수이다.

③ $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$은 실수이다.

④ $\overline{z}$가 순허수이면 $\frac{1}{z}$은 실수이다.

⑤ $z\overline{z}=0$이면 z는 순허수이다.

04-2 변형

0이 아닌 복소수 z에 대하여 항상 실수인 것만을 |보기|에서 있는 대로 골라라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

|보기|

ㄱ. $z+\overline{z}$ ㄴ. $\frac{2}{z}-\frac{2}{\overline{z}}$

ㄷ. $z^2+\overline{z}^2$ ㄹ. $(z+2)(\overline{z+2})$

04-3 변형

복소수 $z=(1+i)a-3a+4-i$에 대하여 $z=\overline{z}$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하여라.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

04-4 변형

0이 아닌 복소수 $z=(2-i)x^2-4xi-4i-8$이 $z+\overline{z}=0$을 만족시킬 때, 실수 x의 값을 구하여라.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

04-5 변형 기출

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 복소수 z를 $z=a+bi$라고 할 때, $\frac{z}{\overline{z}}$의 실수부분이 0이 되게 하는 모든 복소수 z의 개수를 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

04-6 변형

복소수 z에 대하여 $\frac{z}{z+1}$가 실수일 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $z=0$ ② $z+\overline{z}=0$ ③ $z-\overline{z}=0$

④ $z\overline{z}<0$ ⑤ $\frac{1}{z}=1$

필수유형 05 복소수의 성질을 이용하여 식의 값 구하기

$\alpha=2-i$, $\beta=-1+3i$일 때, 다음 값을 구하여라. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

(1) $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha\beta}+\alpha\beta$

풍쌤 POINT

복소수와 그 켤레복소수로 이루어진 식의 값을 구할 때는 먼저 식을 간단히 해야 해!

식 간단히 하기 ➡ $\alpha+\beta$, $\overline{\alpha+\beta}$의 값 구하기 ➡ 대입하기

풀이

(1) STEP 1 켤레복소수의 성질을 이용하여 식 간단히 하기

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}&=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})^{❶}\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\end{aligned}$$

STEP 2 $\alpha+\beta$, $\overline{\alpha+\beta}$의 값 구하기

$\alpha+\beta=(2-i)+(-1+3i)=1+2i$

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{1+2i}=1-2i$

STEP 3 $\alpha+\beta$, $\overline{\alpha+\beta}$의 값을 대입하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\\&=(1+2i)(1-2i)\\&=1+4=5\end{aligned}$$

❶ 복소수에서도 실수에서의 인수분해 공식을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.

(2) STEP 1 켤레복소수의 성질을 이용하여 식 간단히 하기

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha\beta}+\alpha\beta&=\beta(\overline{\alpha}+\alpha)-\overline{\beta}(\overline{\alpha}+\alpha)\\&=(\beta-\overline{\beta})(\overline{\alpha}+\alpha)\end{aligned}$$

STEP 2 $\beta-\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}+\alpha$의 값 구하기

$\beta-\overline{\beta}=(-1+3i)-(-1-3i)=6i$

$\overline{\alpha}+\alpha=(2+i)+(2-i)=4$

STEP 3 $\beta-\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}+\alpha$의 값을 대입하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha\beta}+\alpha\beta&=(\beta-\overline{\beta})(\overline{\alpha}+\alpha)\\&=6i\times4=24i\end{aligned}$$

답 (1) 5 (2) $24i$

풍쌤 강의 NOTE

- 위의 문제에서 켤레복소수의 성질 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$임이 기억나지 않으면 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$를 각각 구하여 더해도 되므로 당황하지 않도록 한다.
- 식에 켤레복소수가 포함되어 있으면 켤레복소수의 성질을 이용할 때, 계산이 훨씬 간단해질 수 있으므로 켤레복소수의 성질을 꼭 기억하도록 한다.

05-1 유사

$\alpha=-2+i$, $\beta=1-2i$일 때, 다음 값을 구하여라.

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

(1) $\overline{\alpha}\alpha+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$

(2) $\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$

05-2 변형

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=4-2i$가 성립할 때, $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하여라.

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

05-3 변형 기출

두 복소수 $\alpha=3+i$, $\beta=1-2i$에 대하여 $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$의 값을 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

05-4 변형

두 복소수 α, β에 대하여

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=3-2i$, $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=2+5i$

일 때, $(\alpha-2)(\beta+2)$의 값을 구하여라.

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

05-5 변형

두 복소수 α, β에 대하여 $\overline{\alpha\beta}=1$, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2i$일 때, $\beta+\dfrac{1}{\beta}$의 값을 구하여라.

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

05-6 실력

$x=2-3i$일 때, $x^3-4x^2+11x+4$의 값을 구하여라.

필수유형 06 등식을 만족시키는 복소수 구하기

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음을 만족시키는 복소수 z를 구하여라.

(1) $2z+(2+i)\overline{z}=9+2i$

(2) $\dfrac{z}{1+i}+\dfrac{\overline{z}}{1-2i}=\dfrac{1-i}{2}$

풍쌤 POINT

등식에 복소수 z와 $\overline{z}$가 있으면 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$로 놓고 식에 대입하면 돼!

$z=a+bi$로 놓기 ➡ 식에 대입 ➡ 복소수가 서로 같을 조건 이용

풀이

(1) STEP1 $z=a+bi$로 놓고 주어진 식에 대입하기

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}2z+(2+i)\overline{z}&=2(a+bi)+(2+i)(a-bi)\\&=2a+2bi+(2a-2bi+ai-bi^2)\\&=(4a+b)+ai\end{aligned}$$

STEP2 복소수가 서로 같을 조건 이용하기

$(4a+b)+ai=9+2i$에서

$4a+b=9$, $a=2$❶ $\quad\therefore b=1$

$\therefore z=2+i$

❶ 복소수가 서로 같을 조건
a, b, c, d가 실수일 때
$a+bi=c+di$이면
$a=c$, $b=d$

(2) STEP1 $z=a+bi$로 놓고 주어진 식에 대입하기

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}\frac{z}{1+i}+\frac{\overline{z}}{1-2i}&=\frac{a+bi}{1+i}+\frac{a-bi}{1-2i}\\&=\frac{(a+bi)(1-i)}{2}+\frac{(a-bi)(1+2i)}{5}\text{❷}\\&=\frac{a-ai+bi-bi^2}{2}+\frac{a+2ai-bi-2bi^2}{5}\\&=\frac{(7a+9b)+(-a+3b)i}{10}\end{aligned}$$

❷ 분모에 복소수가 있을 때는 분모의 켤레복소수를 분모와 분자에 각각 곱한다.
$(1+i)(1-i)=1-i^2=2$
$(1-2i)(1+2i)=1-4i^2=5$

STEP2 복소수가 서로 같을 조건 이용하기

$\dfrac{(7a+9b)+(-a+3b)i}{10}=\dfrac{1-i}{2}$에서

$\dfrac{7a+9b}{10}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-a+3b}{10}=-\dfrac{1}{2}$

$7a+9b=5$, $-a+3b=-5$

$\therefore a=2$, $b=-1$

$\therefore z=2-i$

답 (1) $2+i$ (2) $2-i$

풍쌤 강의 NOTE

복소수 z가 포함된 등식이 주어지면 $z=a+bi$로 놓고 식에 대입하여 정리하면 복소수가 서로 같을 조건을 이용하는 문제로 바뀐다.

06-1 유사

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음을 만족시키는 복소수 z를 구하여라.

(1) $(-1+2i)z-2i\overline{z}=5-i$

(2) $\frac{2z}{2-i}+\frac{\overline{z}}{3+i}=-3-4i$

06-2 변형

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z+\overline{z}=4$, $z\overline{z}=13$이 성립할 때, 복소수 z를 모두 구하여라.

06-3 변형

등식 $(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}=14$를 만족시키는 복소수 z만을 |보기|에서 있는 대로 골라라.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

|보기|

ㄱ. $2-i$　　ㄴ. $1-3i$　　ㄷ. $5+i$

06-4 변형

두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $z_1\overline{z_1}=3$, $z_2\overline{z_2}=3$이고 $z_1+z_2=3+9i$일 때, $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$의 값을 구하여라.

(단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

06-5 변형

기출

등식 $z^2=3+4i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

06-6 실력

$\frac{z+i}{z}=\overline{\left(\frac{z-i}{z}\right)}$를 만족시키는 순허수가 아닌 복소수 z에 대하여 $\frac{z}{\overline{z}}$의 값을 구하여라.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

필수유형 07 i의 거듭제곱

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{29}+i^{30}$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{30}}$

(3) $(1+i)^{12}$

(4) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{52}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{52}$

풍쌤 POINT

복소수의 거듭제곱 문제는 답이 간단하게 나오게 되어 있어. $i^4=1$임을 알고 지수법칙을 이용하여 i의 지수를 모두 4 이하로 변형하여 계산을 해 봐!

풀이

(1) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$❶이므로

$$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{29}+i^{30}$$
$$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$$
$$+i^{24}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{28}(i+i^2)$$
$$=i^{28}(i+i^2)=(i^4)^7\times(i-1)=-1+i$$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{30}}$$
$$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots+\frac{1}{i^{24}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$$
$$+\frac{1}{i^{28}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}\right)$$
$$=\frac{1}{i^{28}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}\right)❷=\frac{1}{(i^4)^7}\times(-i-1)=-1-i$$

(3) $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$$(1+i)^{12}=\{(1+i)^2\}^6$$
$$=(2i)^6=2^6\times i^6❸=-64$$

(4) $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$이므로

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{52}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{52}=\frac{\{(1+i)^2\}^{26}}{(\sqrt{2})^{52}}+\frac{\{(1-i)^2\}^{26}}{(\sqrt{2})^{52}}$$
$$=\frac{(2i)^{26}}{2^{26}}+\frac{(-2i)^{26}}{2^{26}}$$
$$=i^{26}+i^{26}=2\times(i^4)^6\times i^2=-2$$

답 (1) $-1+i$ (2) $-1-i$ (3) -64 (4) -2

❶ 자연수 k에 대하여 $i^{4k-3}=i$, $i^{4k-2}=-1$, $i^{4k-1}=-i$, $i^{4k}=1$이고 $i^{4k-3}+i^{4k-2}+i^{4k-1}+i^{4k}=0$ 이므로 항을 4개씩 묶어 해결한다.

❷ $\frac{1}{i}=\frac{i}{i\times i}=\frac{i}{i^2}=-i$

❸ $i^6=i^4\times i^2$
$=1\times(-1)$
$=-1$

풍쌤 강의 NOTE

복소수의 거듭제곱을 계산할 때, 다음이 자주 사용된다.

① $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$, $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$

② $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

07-1 유사

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{90}+i^{91}$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{100}}$

(3) $(1+i)^{16}+(1-i)^{16}$

(4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}$

07-2 변형

기출

$i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5=a+bi$일 때, $3a+2b$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$이고 a, b는 실수이다.)

07-3 변형

$z=\frac{1-i}{1+i}$일 때, $1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots+z^{49}+z^{50}$의 값을 구하여라.

07-4 변형

$z=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{21}}$일 때, $2z^2-\frac{2}{\overline{z}}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

07-5 변형

복소수 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$이 실수가 되는 10보다 작은 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라.

07-6 실력

복소수 $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 $z^{2023}+\frac{1}{z^{2023}}$의 값을 구하여라.

발전유형 08 음수의 제곱근

다음 물음에 답하여라.

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+2\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$를 계산하여라.

(2) 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}$을 간단히 하여라. (단, $ab\neq0$)

(3) 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$을 간단히 하여라.

풍쌤 POINT 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 문자를 포함한 식을 계산할 때는 그 문자의 부호를 잘 파악해야 해!

풀이

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+2\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i+2\sqrt{8}i+\dfrac{\sqrt{32}i}{\sqrt{8}i}$

$=\sqrt{16}i^2+2\sqrt{8}i+\sqrt{4}$

$=-4+4\sqrt{2}i+2$

$=-2+4\sqrt{2}i$

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로

$a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

그런데 $ab\neq0$이므로

$a<0$, $b<0$

$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}=|a|+|b|+|a+b|$ ❶

$=-a-b-(a+b)$

$=-2a-2b$

❶ $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$

(3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로

$a>0$, $b<0$

$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|+|b|+|a-b|$ ❷

$=a-b+a-b$

$=2a-2b$

❷ $a>0$, $b<0$이므로 $a-b>0$

답 (1) $-2+4\sqrt{2}i$ (2) $-2a-2b$ (3) $2a-2b$

풍쌤 강의 NOTE

- a, b가 실수일 때
  (1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b=0$
  (2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq0$
- (1)의 성질을 이용하면 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=-\sqrt{16}=-4$와 같이 계산할 수 있다.

08-1 유사

$\sqrt{3}\sqrt{-3}+\sqrt{-27}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$을 계산하여라.

08-2 유사

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, $\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{a^2}-\sqrt{(-a-b)^2}$을 간단히 하여라.

08-3 변형

다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{-5}\sqrt{-7}=-\sqrt{35}$　② $\sqrt{-5}\sqrt{7}=\sqrt{-35}$

③ $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{7}}=-\sqrt{\frac{5}{7}}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-7}}=-\sqrt{-\frac{5}{7}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{7}{5}}$

08-4 변형

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{b}\sqrt{c}=-\sqrt{bc}$일 때,

$\sqrt{a^2}-\sqrt{c^2}+\sqrt{(b+c)^2}-\sqrt{(a-c)^2}$을 간단히 하여라.

08-5 변형 기출

0이 아닌 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$
>
> (나) $|a+b|+|a+c-1|=0$

세 수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$

④ $b<c<a$　⑤ $c<a<b$

08-6 실력

$2<x<4$일 때,

$\sqrt{x-4}\times\sqrt{4-x}-\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x-4}}\times\sqrt{\frac{x-4}{4-x}}+\sqrt{x}\times\sqrt{-x}$

를 $a+bi$ (a, b는 실수) 꼴로 나타내려고 한다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

실전 연습 문제

01

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-9}=3i$

② $-2i$는 순허수이다.

③ 제곱하여 -3이 되는 수는 $\sqrt{3}i$ 또는 $-\sqrt{3}i$이다.

④ -5의 허수부분은 0이다.

⑤ 실수 a, b에 대하여 $a+bi$가 실수이면 $a\neq0$, $b=0$이다.

02

기출

두 복소수 $\alpha=\frac{1+i}{2i}$, $\beta=\frac{1-i}{2i}$에 대하여 $(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 6　② 10　③ 14　④ 18　⑤ 22

03

기출

x가 양수일 때,

$$z=(1+i)x^2+(3-3i)x-8-10i$$

가 실수가 되도록 하는 x의 값을 a, 이때의 z의 값을 b라고 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

04 서술형

두 실수 x, y가 등식 $x^2+y^2i-3x-5yi+2-6i=0$을 만족시킬 때, $x+y$의 값이 될 수 있는 것을 모두 구하여라.

05

0이 아닌 복소수 z에 대하여 항상 실수인 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

|보기|

ㄱ. $z-\bar{z}$　ㄴ. $(z+1)(\overline{z+1})$

ㄷ. $z^3-(\bar{z})^3$　ㄹ. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ　④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

06 서술형

두 실수 a, b에 대하여 등식

$$a(\overline{1-2i})+b(1-i)^2=2$$

가 성립할 때, ab의 값을 구하여라.

07 서술형

복소수 $w=1-2i$에 대하여 $z=\dfrac{w-1}{2w+3i}$일 때, $\dfrac{z}{\overline{z}}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

08 기출

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 $iz=\overline{z}$일 때, 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

|보기|

ㄱ. $z+\overline{z}=-2b$

ㄴ. $i\overline{z}=-z$

ㄷ. $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09

$\alpha\overline{\beta}$가 실수가 아닐 때, 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$는 순허수임을 보여라.

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

10 기출

0이 아닌 복소수 $z=(i-2)x^2-3xi-4i+32$가 $z+\overline{z}=0$을 만족시킬 때, 실수 x의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -4 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 4

11

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $(1-2i)z+(1+2i)\overline{z}=6$을 만족시키는 복소수 z의 개수를 구하여라.

12 서술형

복소수 z가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

(가) $(2-3i)+z$는 양의 실수이다.
(나) $z\overline{z}=18$

13

기출

등식

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$
$=a+bi$

를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 $4(a+b)^2$의 값을 구하여라.

14

100 이하의 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=-1$을 만족시키는 n의 개수를 구하여라.

15

두 실수 a, b에 대하여

$\sqrt{-5}\sqrt{5}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{-3}}i+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-3}}=a+bi$일 때, ab의 값은?

① 14 ② 17 ③ 20
④ 23 ⑤ 26

16

0이 아닌 두 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이고, $x^2+5x-(2y+7)i=14+3i$일 때, xy의 값은?

① 5 ② 15 ③ 25
④ 35 ⑤ 45

17 서술형

등식 $\sqrt{-3}\sqrt{x-2}=-\sqrt{6-3x}$를 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하여라.

18

기출

등식 $(a+b+3)x+ab-1=0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$의 값은?

(단, a, b는 실수이다.)

① -5 ② -2 ③ 1
④ 4 ⑤ 7

상위권 도약 문제

01

두 복소수 α, β가 $\alpha^2=i$, $\beta^2=-i$를 만족시킬 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $\alpha\beta$는 순허수이다.

ㄴ. $\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}=1$

ㄷ. $(\alpha+\beta)^4=2i$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

02

기출

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 z^2-z가 실수일 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

|보기|

ㄱ. $\overline{z^2-z}$는 실수이다.

ㄴ. $z+\overline{z}=1$

ㄷ. $z\overline{z}>\frac{1}{4}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03

자연수 x에 대하여 복소수 z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $z=2(x+1)+(x+4)i$

(나) $z^2+(\overline{z})^2$은 음수이다.

이때 자연수 x의 값을 구하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

04

$a=4-\sqrt{5}$일 때, $\sqrt{a-2}\sqrt{a-2}+\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{a-2}}+i$의 값을 구하여라.

05

복소수 $z=a-i$에 대하여 $\dfrac{z}{\overline{z}}$가 실수일 때,

$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{50}$의 값을 구하여라.

(단, a는 실수이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

06

기출

등식 $\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}=1-i$가 성립하도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

07

기출

다음 그림과 같이 숫자가 표시되는 화면과 A, B 두 개의 버튼으로 구성된 장치가 있다.

A버튼을 누르면 화면에 표시된 수와 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$를 곱한 결과가, B버튼을 누르면 화면에 표시된 수와 $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$를 곱한 결과가 화면에 나타난다. 화면에 표시된 수가 1일 때, A 또는 B버튼을 여러 번 눌렀더니 다시 1이 나타났다. 버튼을 누른 횟수의 최솟값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7