08

연립방정식

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.		1st	2nd
필수유형 01	일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식	☐	☐
필수유형 02	두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식	☐	☐
필수유형 03	x, y에 대한 대칭식인 연립방정식	☐	☐
필수유형 04	연립이차방정식의 해의 조건	☐	☐
필수유형 05	연립이차방정식의 활용	☐	☐
필수유형 06	공통근	☐	☐
발전유형 07	부정방정식	☐	☐

필수유형 01 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x^2+y^2=19 \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

풍쌤 POINT

$\begin{cases} (\text{일차방정식}) \\ (\text{이차방정식}) \end{cases}$ 꼴이면 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입해!

풀이

(1) STEP1 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 풀기

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=19 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2-x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2x^2+(2-x)^2=19$

$3x^2-4x-15=0$, $(3x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=3$

STEP2 연립방정식의 해 구하기

이것을 ㉢에 대입하면 $y=\dfrac{11}{3}$ 또는 $y=-1$ ❶

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{11}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

❶ $x=-\dfrac{5}{3}$를 ㉢에 대입하면 $y=2-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{11}{3}$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

(2) STEP1 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 풀기

$\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(y-1)^2+y^2=5$

$y^2-y-2=0$, $(y+1)(y-2)=0$　　$\therefore y=-1$ 또는 $y=2$

STEP2 연립방정식의 해 구하기

이것을 ㉢에 대입하면 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{11}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

풍쌤 강의 NOTE

일차방정식을 한 문자에 대하여 정리할 때는 대입할 이차방정식의 형태에 따라 계산이 간단해지는 문자에 대하여 정리한다.

01-1 유사

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

01-2 유사

연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x^2+y^2=19 \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하여라.

01-3 변형

기출

연립방정식 $\begin{cases} x=y+5 \\ x^2-2y^2=50 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

01-4 변형

연립방정식 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2-xy+2y=4 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라고 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

01-5 변형

연립방정식 $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x^2+y^2-xy=12 \end{cases}$ 를 만족시키는 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하여라.

01-6 실력

기출

x, y에 대한 두 연립방정식

$$\begin{cases} 3x+y=a \\ 2x+2y=1 \end{cases}, \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x-y=b \end{cases}$$

의 해가 일치할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

필수유형 02 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x^2+2y-5x=4 \\ 2x^2-5y+3x=9 \end{cases}$

풍쌤 POINT

$\begin{cases} (\text{이차방정식}) \\ (\text{이차방정식}) \end{cases}$ 꼴이면 ➡ (i) 두 식 중 인수분해가 되는 식을 인수분해해!
(ii) 두 식이 모두 인수분해가 되지 않으면 이차항이나 상수항을 소거해!

풀이

(1) STEP1 인수분해가 되는 이차방정식을 인수분해하기

$\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ❶

㉠에서 $(x-y)(x+3y)=0$　　$\therefore x=y$ 또는 $x=-3y$

STEP2 인수분해하여 얻은 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 풀기

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+y^2=40$, $y^2=20$

$\therefore x=\pm2\sqrt{5}$, $y=\pm2\sqrt{5}$ (복부호 동순)

(ii) $x=-3y$를 ㉡에 대입하면 $(-3y)^2+y^2=40$, $y^2=4$

$\therefore x=\mp6$, $y=\pm2$ (복부호 동순)

$\therefore \begin{cases} x=2\sqrt{5} \\ y=25 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{5} \\ y=-2\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$

❶ 이차방정식 중 주로 상수항이 없는 이차방정식이 인수분해된다.

(2) STEP1 이차항 소거하기

$\begin{cases} 3x^2+2y-5x=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5y+3x=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times2-$㉡$\times3$을 하면

$19y-19x=-19$　　$\therefore y=x-1$ ❷　　$\cdots\cdots$ ㉢

STEP2 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 풀기

㉢을 ㉠에 대입하면 $3x^2+2(x-1)-5x=4$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이것을 ㉢에 대입하면 $y=-2$ 또는 $y=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

❷ 이차항을 소거하여 얻은 일차방정식을 이차방정식에 대입하면 두 이차방정식의 연립이차방정식이 일차방정식과 이차방정식의 연립이차방정식으로 바뀐다.

답 (1) $\begin{cases} x=2\sqrt{5} \\ y=2\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{5} \\ y=-2\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

풍쌤 강의 NOTE

인수분해가 되지 않는 연립이차방정식의 풀이

(1) 이차항을 소거 ➡ (일차식)$=0$ 꼴로 만든 후 푼다.

(2) 상수항을 소거 ➡ 이차방정식을 만들고 이를 인수분해하여 푼다.

02-1 유사

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2+2y^2=24 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 \\ 2x^2+y^2=36 \end{cases}$

02-2 유사

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 4x^2-9xy+5y^2=6 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-y^2+2x+y=8 \\ 2x^2-2y^2+x+y=9 \end{cases}$

02-3 변형 기출

연립방정식 $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

02-4 변형

연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+y^2=9 \\ x^2-xy-2y^2=0 \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$라고 할 때, $a+b$의 최댓값을 구하여라.

02-5 변형

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2y=1 \\ x^2+y^2+x+y=2 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값을 구하여라.

02-6 실력

연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2+3x+1=0 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

필수유형 03 x, y에 대한 대칭식인 연립방정식

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} xy+x+y=-5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

풍쌤 POINT

x, y에 대한 대칭식인 연립방정식은

❶ $x+y$, xy의 값을 구해!

❷ $x+y$, xy의 값을 이용하여 x, y가 근인 이차방정식을 만들어 풀어!

풀이

(1) $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a=4 \\ a^2-2b=10 \end{cases}$❶ $\quad \therefore a=4,\ b=3$

$a=4$, $b=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로❷

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} b+a=-5 \\ a^2-b=7 \end{cases}$❸ $\quad \therefore a=-2,\ b=-3$ 또는 $a=1,\ b=-6$

(ⅰ) $a=-2$, $b=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

(ⅱ) $a=1$, $b=-6$, 즉 $x+y=1$, $xy=-6$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-3)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

❶ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=a^2-2b$

❷ α, β를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$\Leftrightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

❸ x^2+xy+y^2
$=(x+y)^2-xy$
$=a^2-b$

풍쌤 강의 NOTE

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은 a, b에 대한 연립방정식으로 변형해서 풀 수 있다.

03-1 유사

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

03-2 변형

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}$을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

03-3 변형

연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=-1 \\ x^2-2xy+y^2=1 \end{cases}$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

03-4 변형

연립방정식 $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$을 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하여라.

03-5 변형

연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=9 \\ x^2y+xy^2=20 \end{cases}$을 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하여라.

03-6 실력

연립방정식 $\begin{cases} xy=8 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$라고 할 때, 이차방정식 $bx^2+ax-1=0$의 두 근의 합을 구하여라. (단, $a<b$)

필수유형 04 연립이차방정식의 해의 조건

다음 물음에 답하여라.

(1) 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=18 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

(2) 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a+1 \\ xy=a^2+2 \end{cases}$ 가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

풍쌤 POINT

연립이차방정식의 해가

① 모두 실근이면 ➡ 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D\geq 0$

② 오직 한 쌍이면 ➡ 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D=0$

③ 실근이 존재하지 않으면 ➡ 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D<0$

풀이

(1) STEP1 일차방정식을 이차방정식에 대입한 후 정리하기

$\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+a$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(-x+a)^2=18$

$\therefore 2x^2-2ax+a^2-18=0$

STEP2 주어진 해의 조건을 만족시키는 a의 값 구하기

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로

이차방정식 $2x^2-2ax+a^2-18=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-2(a^2-18)=0$ ❶

$a^2=36 \qquad \therefore a=6 \ (\because a>0)$

(2) STEP1 주어진 조건을 만족시키는 이차방정식 구하기

$\begin{cases} x+y=2a+1 \\ xy=a^2+2 \end{cases}$ 를 만족시키는 실수 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(2a+1)t+a^2+2=0$의 두 근이다. ❷

STEP2 해의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(2a+1)\}^2-4(a^2+2)\geq 0$

$4a-7\geq 0 \qquad \therefore a\geq \dfrac{7}{4}$

❶ 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 x의 값도 1개, y의 값도 1개이다. 즉, x에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D=0$이다.

❷ 두 실수 x, y의 합과 곱이 주어졌으므로 x, y를 두 근으로 하는 이차방정식을 세울 수 있다.

답 (1) 6 (2) $a\geq \dfrac{7}{4}$

풍쌤 강의 NOTE

연립이차방정식의 해의 조건은 연립하여 얻은 이차방정식의 해의 조건과 같음을 이해하고 이차방정식의 판별식을 이용하여 문제를 해결한다.

04-1 유사

다음 물음에 답하여라.

(1) 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

(2) 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a-16 \\ xy=a^2+4 \end{cases}$가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

04-2 변형

기출

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2-2y=k \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가질 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하여라.

(단, k는 실수이다.)

04-3 변형

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2(a-2) \\ xy=a^2+2a \end{cases}$가 실근을 갖도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

04-4 변형

연립방정식 $\begin{cases} x^2+2x-2y=0 \\ x+y=a \end{cases}$가 실근을 갖지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

04-5 변형

연립방정식 $\begin{cases} x+y=6 \\ x+y+xy=3k-1 \end{cases}$이 실근을 갖도록 하는 양의 정수 k의 개수를 구하여라.

04-6 변형

연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ 2x^2+x-y^2=5-2k^2 \end{cases}$이 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하여라.

필수유형 05 연립이차방정식의 활용

직사각형 모양의 꽃밭이 있다. 꽃밭의 둘레의 길이가 10 m이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{13}$ m일 때, 이 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이의 차를 구하여라.

풍쌤 POINT

연립이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결해.

미지수 정하기 ➡ 연립방정식 세우기 ➡ 연립방정식 풀기 ➡ 답 구하기

풀이

STEP1 미지수 정하기

꽃밭의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m로 놓자.

STEP2 연립방정식 세우기

둘레의 길이가 10 m이므로

$2(x+y)=10$ ❶

$\therefore x+y=5$ ······ ㉠

대각선의 길이가 $\sqrt{13}$ m이므로

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}$

$\therefore x^2+y^2=13$ ······ ㉡

STEP3 연립방정식 풀기

㉠에서 $y=5-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(5-x)^2=13$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2$일 때 $y=3$, $x=3$일 때 $y=2$

STEP4 답 구하기

따라서 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는

$3-2=1$(m)

❶ (직사각형의 둘레의 길이)
=(가로의 길이)×2
+(세로의 길이)×2
=2×{(가로의 길이
+세로의 길이)}

답 1 m

풍쌤 강의 NOTE

연립이차방정식의 활용 문제는 문제에서 구하는 것에 대한 공식이나 정보를 먼저 파악한 후 필요한 값을 각각 미지수 x, y로 놓고 주어진 조건에 따라 연립방정식을 세우면 쉽게 해결할 수 있다. 이때 연립방정식을 풀어 구한 미지수의 값 중 문제의 조건에 맞는 것만 택해야 함에 유의한다.

05-1 유사

직사각형 모양의 꽃밭이 있다. 꽃밭의 둘레의 길이가 12 m이고, 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}\text{ m}$일 때, 이 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이의 차를 구하여라.

05-2 변형

대각선의 길이가 10 m인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로의 길이를 1 m 줄이고, 세로의 길이를 2 m 늘이면 땅의 넓이는 처음 땅의 넓이보다 8 m^2만큼 넓어진다고 하다. 처음 땅의 넓이를 구하여라.

05-3 변형

넓이가 $25\pi\text{ cm}^2$인 원에 내접하는 직각삼각형이 있다. 이 직각삼각형의 둘레의 길이가 24 cm일 때, 빗변이 아닌 두 변의 길이의 차를 구하여라.

05-4 변형

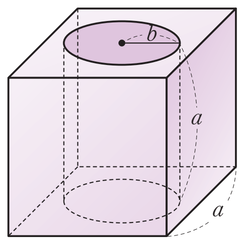
반지름의 길이가 서로 다른 두 원 O_1, O_2에서 두 원의 둘레의 길이의 합은 12π이고, 넓이의 합은 20π라고 한다. 이때 두 원의 반지름의 길이의 차를 구하여라.

05-5 변형

두 자리의 정수가 있다. 각 자리의 숫자의 제곱의 합은 73이고, 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾼 정수와 처음 정수의 합은 121이라고 한다. 처음 정수를 구하여라.

(단, 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자보다 크다.)

05-6 실력 기출



오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체 모양의 입체도형이 있다. 이 입체도형에서 밑면에 반지름의 길이가 b이고 높이가 a인 원기둥 모양의 구멍을 뚫었다. 남아 있는 입체도형의 겉넓이가 $216+16\pi$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $15(a-b)$의 값을 구하여라. (단, $a>2b$)

필수유형 06 공통근

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 이차방정식 $x^2+kx-2=0$, $x^2+2x-k=0$이 공통근을 가질 때, 실수 k의 값을 모두 구하여라.

(2) 두 이차방정식 $x^2-(k+4)x+8k=0$, $x^2+(k-2)x-8k=0$이 0이 아닌 공통근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

두 방정식의 공통근은

❶ 두 방정식의 공통근을 α라 하고, $x=\alpha$를 주어진 방정식에 각각 대입해!

❷ α에 대한 두 방정식을 연립하여 최고차항 또는 상수항을 소거해!

❸ ❷에서 얻은 방정식의 해 중에서 공통근 α를 구해!

풀이

(1) STEP1 두 이차방정식의 공통근 α에 대한 연립방정식 세우기

두 이차방정식의 공통근을 α라고 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha-2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+2\alpha-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

STEP2 실수 k의 값 구하기

㉠$-$㉡을 하면❶ $(k-2)\alpha+k-2=0$

$(k-2)(\alpha+1)=0 \qquad \therefore k=2$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $k=2$일 때, 두 이차방정식이 모두 $x^2+2x-2=0$으로 일치하므로 공통근을 갖는다.❷

(ii) $\alpha=-1$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$1-k-2=0 \qquad \therefore k=-1$

(i), (ii)에서 $k=2$ 또는 $k=-1$

(2) STEP1 두 이차방정식의 공통근 α에 대한 연립방정식 세우기

두 이차방정식의 공통근을 α라고 하면

$$\begin{cases} \alpha^2-(k+4)\alpha+8k=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(k-2)\alpha-8k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

STEP2 실수 k의 값 구하기

㉠$+$㉡을 하면❸ $2\alpha^2-6\alpha=0$

$\alpha(\alpha-3)=0 \qquad \therefore \alpha=3\ (\because \alpha\neq0)$

$\alpha=3$을 ㉠에 대입하면

$9-(k+4)\times3+8k=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{5}$

❶ 최고차항을 소거한다.

❷ $x^2+2x-2=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=1^2+2=3>0$

이므로 서로 다른 두 근을 가진다. 따라서 공통근은 2개이다.

❸ 상수항을 소거한다.

답 (1) $k=2$ 또는 $k=-1$ (2) $\frac{3}{5}$

풍쌤 강의 NOTE

최고차항 또는 상수항을 소거하는 경우에는 소거하여 얻은 방정식은 보통 인수분해가 되거나 한 문자에 대한 방정식으로 표현되므로 경우에 따라 적절하게 선택하여 소거한다.

06-1 유사

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 이차방정식

$$x^2+(k+2)x-3=0,\ x^2-x+k=0$$

이 공통근을 가질 때, 실수 k의 값을 모두 구하여라.

(2) 두 이차방정식

$$x^2+3(k-1)x-7k=0,$$
$$x^2-(3k+1)x+7k=0$$

이 0이 아닌 공통근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하여라.

06-2 변형

두 이차방정식

$$2x^2+2mx-1=0,\ 2x^2+mx+m-1=0$$

이 오직 하나의 공통근 α를 가질 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라. (단, m은 실수이다.)

06-3 변형

x에 대한 두 이차방정식

$$3x^2+(2k-1)x+k=0,$$
$$3x^2-(k+1)x+4k=0$$

이 오직 하나의 공통근 α를 가질 때, $k\alpha$의 값을 구하여라.

06-4 변형

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-2x-3=0,$$
$$x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=0$$

이 공통근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

06-5 변형

x에 대한 서로 다른 두 이차방정식

$$x^2+a^2x+b^2-2a=0,\ x^2-2ax+a^2+b^2=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

06-6 실력

x에 대한 서로 다른 두 삼차방정식

$$x^3+ax^2+bx+1=0,\ x^3+bx^2+ax+1=0$$

이 오직 하나의 공통근을 갖고 $ab=-6$일 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

발전유형 07 부정방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 방정식 $xy+2x-y-7=0$을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하여라.

(2) 방정식 $x^2+4xy+5y^2-6y+9=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

- 정수 조건이 있는 부정방정식
  ➡ (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한 후 약수와 배수의 성질을 이용!
- 실수 조건이 있는 부정방정식
  ➡ ① 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$
  ② x가 실수이면 x에 대한 이차방정식의 판별식 $D\geq0$

풀이

(1) STEP1 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 정리하기

$xy+2x-y-7=0$에서

$x(y+2)-y=7$, $x(y+2)-(y+2)=5$ ❶

$\therefore (x-1)(y+2)=5$

STEP2 x, y가 정수임을 이용하여 x, y의 값 구하기

이때 x, y가 정수이므로 $x-1$, $y+2$도 정수이고 $x-1$, $y+2$의 곱이 5인 경우는 다음 표와 같다.

$x-1$	-5	-1	1	5
$y+2$	-1	-5	5	1

$\therefore x=-4$, $y=-3$ 또는 $x=0$, $y=-7$
또는 $x=2$, $y=3$ 또는 $x=6$, $y=-1$

❶ $y+2$를 공통인수로 만들기 위해 양변에서 각각 2를 뺀다.

(2) STEP1 주어진 방정식을 A^2+B^2 꼴로 정리하기

$x^2+4xy+5y^2-6y+9=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-6y+9=0$ ❷

$\therefore (x+2y)^2+(y-3)^2=0$

STEP2 x, y가 실수임을 이용하여 x, y의 값 구하기

이때 x, y가 실수이므로 $(\text{실수})^2\geq0$

즉, 주어진 방정식이 성립하려면

$x+2y=0$, $y-3=0$ $\quad \therefore x=-6$, $y=3$

❷ $5y^2=4y^2+y^2$

답 (1) $x=-4$, $y=-3$ 또는 $x=0$, $y=-7$ 또는 $x=2$, $y=3$ 또는 $x=6$, $y=-1$
(2) $x=-6$, $y=3$

풍쌤 강의 NOTE

방정식의 개수보다 미지수의 개수가 많으면 근이 무수히 많아서 정할 수 없지만
근이 정수 또는 실수라는 조건이 주어지면 그 근을 구할 수 있다.

07-1 유사

다음 물음에 답하여라.

(1) 방정식 $xy+2x+2y+3=0$을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하여라.

(2) 방정식 $x^2-4xy+5y^2+2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

07-2 변형

방정식 $xy-2x+y-8=0$을 만족시키는 양의 정수 x, y의 값을 구하여라.

07-3 변형

방정식 $ab=a^2+b+3$을 만족시키는 양의 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하여라.

07-4 변형

x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+k+2=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

07-5 변형

방정식 $3x^2+y^2+2xy-8y+24=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

07-6 실력 기출

두 자연수 a, b $(a<b)$와 모든 실수 x에 대하여 등식

$$(x^2-x)(x^2-x+3)+k(x^2-x)+8 =(x^2-x+a)(x^2-x+b)$$

를 만족시키는 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

실전 연습 문제

01

기출

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2-y=2 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

02

연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+3xy+y^2=-1 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $3\alpha-\beta$의 값은? (단, $|\alpha|<|\beta|$)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

03

x, y에 대한 두 연립방정식

$$\begin{cases} x+y=7 \\ ax-y=1 \end{cases}, \begin{cases} x-y=b \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

의 공통인 해가 존재할 때, 자연수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

04

연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 최댓값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

05

기출

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ 4x^2+y^2=4xy \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

06 서술형

연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy=12 \\ xy-y^2=4 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

07

연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3y-2x=9 \\ x^2+y-3x=-1 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 최댓값은?

① 45 ② 54 ③ 63
④ 72 ⑤ 81

08

기출

연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=6 \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 \end{cases}$을 만족시키는 양수 x, y에 대하여 $20xy$의 값을 구하여라.

09

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=-8 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 할 때, $M-m$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

10

연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=7 \\ x^2y+xy^2=12 \end{cases}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은? (단, $x>y$)

① 10 ② 8 ③ 6
④ 4 ⑤ 2

11 서술형

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a+4 \\ xy=3a^2+4 \end{cases}$가 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라.

12

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ 2x^2+y^2=b \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 실수 a, b에 대하여 $4a+3b$의 최솟값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

13

길이가 160 cm인 철사를 잘라서 한 변의 길이가 각각 a cm, b cm $(a>b)$인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 1000 cm^2일 때, a의 값을 구하여라.

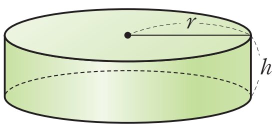
(단, 철사는 모두 사용하고 굵기는 무시한다.)

14

기출

다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥 모양의 용기에 대하여 $r+2h=8$, $r^2-2h^2=8$일 때, 이 용기의 부피는?

(단, 용기의 두께는 무시한다.)



① 16π ② 20π ③ 24π
④ 28π ⑤ 32π

15 서술형

x에 대한 두 이차방정식

$$2x^2+(2k-1)x+k=0,$$
$$2x^2-(k+1)x+4k=0$$

이 오직 한 개의 공통근 α를 가질 때, $6k+\alpha$의 값을 구하여라. (단, k는 실수이다.)

16

두 이차방정식

$$px^2+x+1=0,\ x^2+px+1=0$$

이 공통인 실근을 가질 때, 실수 p의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

17

x에 대한 이차방정식 $x^2-mx+m+5=0$의 두 근이 모두 음의 정수일 때, 상수 m의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

18

방정식 $x^2y^2+x^2+4y^2-6xy+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값은?

① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ 2
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 1

상위권 도약 문제

01

실수 x, y에 대하여 $<x, y>=\begin{cases} x & (x \geq y) \\ -y & (x<y) \end{cases}$라고 하자. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x-4y^2=<x, y> \\ x-y+5=<x, y> \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하여라.

02

연립방정식 $\begin{cases} (x-y)^2+xy=1 \\ (x-y)^2+3xy=3 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

03

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} (x+1)(y+1)=k \\ (x-2)(y-2)=k \end{cases}$가 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하여라.

04

기출

x^2-8x+1이 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하여라.

05

$\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3, 내접원의 반지름의 길이가 1일 때, 직각삼각형 ABC의 세 변 중 가장 짧은 변의 길이를 구하여라.

06

두 이차방정식 $x^2+px+q=0$, $x^2+qx+p=0$이 오직 한 개의 공통근을 갖고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $1:3$일 때, 상수 p, q에 대하여 $64(p^2-q^2)$의 값을 구하여라. (단, $p>q$)

07

방정식 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{9}$를 만족시키는 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

08

기출

x에 대한 삼차방정식 $ax^3+2bx^2+4bx+8a=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 갖는다. 두 정수 a, b가 $|a|\le 50$, $|b|\le 50$일 때, 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.