01 미분계수를 이용한 극한값의 계산

다항함수 $f(x)$에 대하여

① $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=c$ (c는 상수) ⇨ $f'(a)=c$

② $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=c$ (c는 상수)

⇨ $f(a)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=c$

⇨ $f'(a)=c$

◪ 함수 $f(x)$에 대하여 다음 값을 구하여라.

1. 함수 $f(x)=x^3+9x+2$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값

2. 함수 $f(x)=x^2+2x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}$의 값

3. 함수 $f(x)=x^2+5$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값

4. 함수 $f(x)=x^2+4x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{2h}$의 값

5. 함수 $f(x)=x^2-3x+4$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}$의 값

6. 함수 $f(x)=x^4+4x^2+1$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값

7. 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값

8. 함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=6$일 때, 상수 a의 값

9. 함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=3$일 때, 상수 a의 값

10. 함수 $f(x)=2x^3+ax+b$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-12}{x-1}=9$일 때, 두 상수 a, b의 값

11. 함수 $f(x)=x^2-6x+5$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=8$일 때, 상수 a의 값

12. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-1}{x-2}=2$일 때, $f'(2)+f(2)$의 값

13. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-3}{x^2-1}=\frac{1}{2}$일 때, $f(-1)+f'(-1)$의 값

14. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$일 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값

15. 함수 $f(x)$가 $f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값

16. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x+1)-2}{x^2-1}=4$일 때, $f'(2)+f(2)$의 값

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값

18. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-1}{x-2}=2$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$의 값

19. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+3h)-2}{h}=9$일 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-xf(1)}{x^2-1}$의 값

20. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=-1$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}$의 값

◪ 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 다음을 만족할 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

21. $f(0)=2,\ f'(1)=5,\ f'(-1)=-7$

22. $f(0)=-2,\ f'(1)=3,\ f'(-1)=-5$

23. $f(0)=3,\ f'(1)=-2,\ f'(-1)=-6$

24. $f(0)=-1,\ f'(-1)=-1,\ f'(2)=11$

25. $f(0)=3,\ f'(1)=-1,\ f'(-1)=3$

26. $f(0)=5,\ f'(1)=2,\ f'(-1)=6$

27. $f(1)=-6,\ f'(2)=-11,\ f'(-3)=19$

28. $f(2)=6,\ f'(0)=2,\ f'(1)=4$

29. $f(2)=13,\ f'(0)=1,\ f'(1)=5$

30. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=1,\ f'(0)=-5,\ f'(1)=1$을 만족할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

02 미분가능할 조건

다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \ge a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$가

$x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속

⇨ $\lim_{x\to a-} h(x)=g(a)$

② $f'(x)=\begin{cases} g'(x) & (x \ge a) \\ h'(x) & (x < a) \end{cases}$이고, 함수 $f(x)$는

$x=a$에서 미분가능

⇨ $\lim_{x\to a+} g'(x)=\lim_{x\to a-} h'(x)$

31. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 2) \\ ax+b & (x < 2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

32. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+2 & (x \ge 1) \\ 2x+b & (x < 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

33. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 1) \\ ax+b & (x < 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

34. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & (x \le 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

35. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

36. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & (x \le 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

37. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+2 & (x \ge 2) \\ 2x+b & (x < 2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

38. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x < 1) \\ bx^2+x+1 & (x \ge 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

39. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & (x \ge -1) \\ x^3+x^2+bx & (x < -1) \end{cases}$가 $x=-1$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

40. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x < 0) \\ a(x-1)^2+b & (x \ge 0) \end{cases}$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

41. 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+2 & (x<1) \\ x^3+ax^2+bx & (x\geq 1) \end{cases}$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

42. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & (x\geq 1) \\ -x^3-1 & (x<1) \end{cases}$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

43. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^3-x & (x\geq 2) \\ 4x^2+bx & (x<2) \end{cases}$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

44. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (x\geq 1) \\ 2x^2+1 & (x<1) \end{cases}$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

45. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+b & (x<a) \\ 2x & (x\geq a) \end{cases}$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

03 미분의 항등식에의 활용

$f(x)$와 $f'(x)$ 사이의 관계식이 주어진 경우
① $f(x)$와 $f'(x)$ 사이의 관계식을 만족시키는 함수 $f(x)$의 차수를 구한다.
② ①에서 구한 차수에 맞도록 함수 $f(x)$를 임의로 놓는다.
③ $f'(x)$를 구하여 주어진 관계식에 대입한다.

◪ 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x)$가 등식 $f'(x)\{f'(x)+1\}=6f(x)+4x^2-4$를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

46. $f(x)$의 차수를 구하여라.

47. $f(x)$를 구하여라.

◪ 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x)$가 등식 $f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2-5$를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

48. $f(x)$의 차수를 구하여라.

49. $f(x)$를 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

50. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(2x+1)f(x)-x^2f'(x)-1=0$을 만족하는 이차함수 $f(x)$를 구하여라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

51. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(2x+1)f'(x)-4f(x)+3=0$을 만족시킬 때, $f(x)$를 구하여라.

52. 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이다. 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)f'(x)-2f(x)-4=0$을 만족시킬 때, $f(x)$를 구하여라.

53. 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $x^2f'(x)-xf(x)=x^3$을 만족시킨다. $f'(2)=6$일 때, $f(x)$를 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

54. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)f'(x)=4x+6$을 만족시킬 때, $f(1)f(2)$의 값을 구하여라.

55. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)f'(x)=9x+12$를 만족할 때, $f(1)f(2)$의 값을 구하여라.

56. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 $f(x)f'(x)=2x^3+3x^2-5x-3$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

57. 함수 $f(x)=x^2+x$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)+af(x)+x=0$$

을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하여라.

58. 함수 $f(x)=x^3+x$가 모든 실수 x에 대하여 $af(x)=x\{f'(x)+b\}$를 만족시킬 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

59. 함수 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여 등식 $3f(x)=x\{f'(x)+2\}$가 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

60. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)-f(x)=f'(x+k)$를 만족시킬 때, 상수 k의 값을 구하여라.

04 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용

(1) 다항식 $f(x)$를 이차식 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 일차식 $ax+b$이다.

(2) 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어지면
$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$에서 $f(\alpha)=0$
$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$에서 $f'(\alpha)=0$

◪ 다음 물음에 답하여라.

61. 다항식 $x^8+x^5-2x^3-1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

62. 다항식 $x^{10}-x^5+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

63. 다항식 $x^{10}-3x+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(1)$의 값을 구하여라.

64. x^{10}을 $x(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(-1)$의 값을 구하여라.

65. 다항식 x^5+ax^2+bx+8이 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

66. 다항식 ax^3+x^2+bx-5가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

67. 다항식 $x^{20}+ax+19$가 $(x+b)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라. (단, $b>0$)

68. 다항식 x^8+ax+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x+5$일 때, $b-a$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

69. 다항식 $x^{100}-2x^3+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 할 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

70. 이차 이상의 다항식 $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, $2f(2)+3f'(2)$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) 12

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때, $f(x)=x^3+9x+2$이므로 $f'(x)=3x^2+9$

$\therefore f'(1)=3+9=12$

2) 4

⇨ $f(x)=x^2+2x$에서 $f(1)=3$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때, $f(x)=x^2+2x$이므로 $f'(x)=2x+2$

$\therefore f'(1)=2+2=4$

3) 2

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

이때, $f(x)=x^2+5$이므로 $f'(x)=2x$ $\therefore f'(1)=2$

4) 3

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$

이때, $f(x)=x^2+4x$에서 $f'(x)=2x+4$이므로

$f'(1)=2+4=6$

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot6=3$

5) 2

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(1)$

이때 $f(x)=x^2-3x+4$에서 $f'(x)=2x-3$이므로

$f'(1)=-1$

따라서 구하는 값은 $-2f'(1)=-2\times(-1)=2$

6) 24

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2=2f'(1)$

이때, $f(x)=x^4+4x^2+1$에서 $f'(x)=4x^3+8x$이므로

$f'(1)=4+8=12$

따라서 구하는 값은 $2f'(1)=2\cdot12=24$

7) 3

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}f'(1)$

이때, $f(x)=x^3-x$에서 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$f'(1)=3-1=2$

따라서 구하는 값은 $\frac{3}{2}f'(1)=\frac{3}{2}\cdot2=3$

8) 2

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이므로 $f'(1)=6$

이때, $f(x)=2x^2+ax$에서 $f'(x)=4x+a$이므로

$f'(1)=4+a=6$ $\therefore a=2$

9) -2

⇨ $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}f'(1)$

즉 $\frac{3}{2}f'(1)=3$이므로 $f'(1)=2$

이때 $f'(x)=4x+a$이므로

$4+a=2$ $\therefore a=-2$

10) $a=3$, $b=7$

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-12}{x-1}=9$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-12\}=0$이므로 $f(1)=12$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-12}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$

$f(x)=2x^3+ax+b$에서 $f'(x)=6x^2+a$

$f(1)=12$에서 $2+a+b=12$

$f'(1)=9$에서 $6+a=9$

$\therefore a=3$, $b=7$

11) 5

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+h)-f(a)\}-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$

이므로 $2f'(a)=8$ $\therefore f'(a)=4$

이때, $f(x)=x^2-6x+5$에서 $f'(x)=2x-6$이므로

$f'(a)=2a-6=4$

$\therefore a=5$

12) 3

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=2$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(2)=1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2$

$\therefore f'(2)+f(2)=2+1=3$

13) 2

⇨ $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(-1)=3$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}f'(1)$

이므로 $-\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f'(-1)=-1$

$\therefore f(-1)+f'(-1)=2$

14) 3

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)$

이므로 $\frac{1}{2}f'(1)=3$ $\therefore f'(1)=6$

$\therefore\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$

15) 14

⇨ $f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

이때, $f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$에서

$f(2+h)-f(2)=h^3+6h^2+14h$이므로

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{h^3+6h^2+14h}{h}=\lim_{h\to0}(h^2+6h+14)=14$

16) 10

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-2}{x^2-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x+1)-2\}=0$이므로 $f(2)=2$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때, $t\to2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t(t-2)}$

$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{2}f'(2)$

즉 $\frac{1}{2}f'(2)=4$이므로 $f'(2)=8$

$\therefore f'(2)+f(2)=8+2=10$

17) 28

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x+1)-8\}=0$이므로 $f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to2$일 때, $t\to3$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{(t+1)(t-3)}$

$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\cdot\frac{1}{t+1}=\frac{1}{4}f'(3)$

즉, $\frac{1}{4}f'(3)=5$ $\therefore f'(3)=20$

$\therefore f(3)+f'(3)=8+20=28$

18) 4

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=2$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(2)=1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=2$

$\therefore\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

$=2\cdot2=4$

19) $\frac{1}{2}$

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-2}{h}=9$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(1+3h)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3=3f'(1)$

이므로 $3f'(1)=9$ $\quad\therefore f'(1)=3$

$\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x)-xf(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-xf(1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}-\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{2}f(1)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

20) 14

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)$

이므로 $\frac{1}{2}f'(1)=-1$ $\therefore f'(1)=-2$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1-2h)-f(1)\}-\{f(1+5h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)-\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot5$

$=-2f'(1)-5f'(1)=-7f'(1)=-7\cdot(-2)=14$

21) $a=3$, $b=-1$, $c=2$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$

$f(0)=2$이므로

$c=2$

$f'(1)=5$에서

$2a+b=5$ …… ㉠

$f'(-1)=-7$에서

$-2a+b=-7$ …… ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a=3, b=-1, c=2$

22) $a=2$, $b=-1$, $c=-2$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(0)=-2$이므로 $c=-2$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=3$에서 $2a+b=3$ … ㉠

$f'(-1)=-5$에서 $-2a+b=-5$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore$ $a=2$, $b=-1$, $c=-2$

23) $a=1$, $b=-4$, $c=3$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(0)=3$이므로 $c=3$

$f'(x)=2ax+b$에서 $f'(1)=-2$, $f'(-1)=-6$이므로

$2a+b=-2$, $-2a+b=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore a=1$, $b=-4$, $c=3$

24) $a=2$, $b=3$, $c=-1$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$이므로

$f(0)=-1$에서 $c=-1$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-1)=-1$에서 $-2a+b=-1$ … ㉠

$f'(2)=11$에서 $4a+b=11$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore$ $a=2$, $b=3$, $c=-1$

25) $a=-1$, $b=1$, $c=3$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$이므로

$f(0)=3$에서 $c=3$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=-1$에서 $2a+b=-1$ … ㉠

$f'(-1)=3$에서 $-2a+b=3$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore$ $a=-1$, $b=1$, $c=3$

26) $a=-1$, $b=4$, $c=5$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$이므로

$f(0)=5$에서 $c=5$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2$에서 $2a+b=2$ … ㉠

$f'(-1)=6$에서 $-2a+b=6$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$\therefore$ $a=-1$, $b=4$, $c=5$

27) $a=-3$, $b=1$, $c=-4$

⇨ $f(1)=-6$에서 $a+b+c=-6$ … ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(2)=-11$에서 $4a+b=-11$ …㉡

$f'(3)=19$에서 $-6a+b=19$ …㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-3$, $b=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $c=-4$

28) $a=1$, $b=2$, $c=-2$

⇨ $f(2)=6$이므로 $4a+2b+c=6$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$에서

$f'(0)=2$이므로 $b=2$ …… ㉡

$f'(1)=4$이므로 $2a+b=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$

29) $a=2$, $b=1$, $c=3$

⇨ $f(2)=13$이므로 $4a+2b+c=13$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$에서

$f'(0)=1$이므로 $b=1$ …… ㉡

$f'(1)=5$이므로 $2a+b=5$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2$, $b=1$, $c=3$

30) 3

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면 $f(0)=c=1$

$f'(x)=2ax+b$에서 $f'(0)=b=-5$

$f'(1)=2a+b=1$이므로 $a=3$

$\therefore f(x)=3x^2-5x+1$ $\therefore f(2)=3$

31) $a=4$, $b=-4$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}(ax+b)=f(2)$

$\therefore 2a+b=4$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{4h+h^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0+}(4+h)=4$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0-}\dfrac{a(2+h)+b-(2a+b)}{h} = \lim_{h\to 0-}\dfrac{ah}{h}=a$

$\therefore a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4, b=-4$

32) $a=4$, $b=3$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$

$2+b=-1+a+2$ $\therefore a-b=1$ ……㉠

이때 $f'(x)=\begin{cases}-2x+a & (x\ge 1)\\ 2 & (x<1)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1-}f'(x)$

$-2+a=2$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

33) $a=2$, $b=-1$

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(ax+b)=f(1)$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\dfrac{(1+h)^2-1^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0+}(2+h)=2$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\dfrac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{ah}{h}=a$ $\therefore a=2$…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-1$

34) $a=4$, $b=-2$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$2=a+b$ ……㉠

$f'(x)=\begin{cases}4x & (x\le 1)\\ a & (x>1)\end{cases}$에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

35) $a=4$, $b=-3$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$2a+b=5$ ……㉠

이때 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x\le 2)\\ a & (x>2)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2+}f'(x)=\lim_{x\to 2-}f'(x)$

$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

36) $a=1$, $b=0$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

$a+b=1$ ……㉠

이때 $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\le 1)\\ a & (x>1)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1-}f'(x)$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$

37) $a=6$, $b=6$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$이므로 $4+b=-4+2a+2$

$\therefore 2a-b=6$ …… ㉠

이때, $f'(x)=\begin{cases}-2x+a & (x>2)\\ 2 & (x<2)\end{cases}$

이고 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2+}f'(x)=\lim_{x\to 2-}f'(x)$

즉, $-4+a=2$이므로 $a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $12-b=6$ $\therefore b=6$

$\therefore a=6, b=6$

38) $a=4$, $b=3$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)$에서

$b+1+1=1+a$ $\therefore a-b=1$ …㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{b(1+h)^2+(1+h)+1-b-1-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{bh^2+(2b+1)h}{h}=\lim_{h\to 0+}(bh+2b+1)=2b+1$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\dfrac{(1+h)^3+a(1+h)-1-a}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{h^3+3h^2+(3+a)h}{h}=\lim_{h\to 0-}(h^2+3h+3+a)=3+a$

에서 $2b+1=3+a$ $\therefore a-2b=-2$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

39) $a=2$, $b=-5$

⇨ 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$a+3=-1+1-b$ $\therefore a+b=-3$ …㉠

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x\ge -1)\\ 3x^2+2x+b & (x<-1)\end{cases}$에서

함수 $f'(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로
$-2a=3-2+b$ $\therefore 2a+b=-1$ …㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$

40) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$
⇨ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$이므로 $1=a+b$ …… ㉠
이때, $f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 2a(x-1) & (x>0)\end{cases}$
이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to 0+} f'(x)=\lim_{x\to 0-} f'(x)$
즉, $-2a=-1$이므로 $a=\frac{1}{2}$
$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $1=\frac{1}{2}+b$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

41) $a=-1$, $b=5$
⇨ (ⅰ) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$3+2=1+a+b$ $\therefore a+b=4$ ……㉠
(ⅱ) $f'(x)=\begin{cases}6x & (x<1)\\ 3x^2+2ax+b & (x\ge 1)\end{cases}$이고 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$x=1$일 때, $6=3+2a+b$ $\therefore 2a+b=3$ …㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

42) $a=-1$, $b=-1$
⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$
$-2=a+b$ ……㉠
이때 $f'(x)=\begin{cases}2ax+b & (x\ge 1)\\ -3x^2 & (x<1)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$2a+b=-3$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

43) $a=1$, $b=-5$
⇨ (ⅰ) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$f(2)=\lim_{x\to 2-} f(x)$
$8a-2=16+2b$, $8a-2b=18$ $\therefore 4a-b=9$ …㉠
(ⅱ) $f'(x)=\begin{cases}3ax^2-1 & (x\ge 2)\\ 8x+b & (x<2)\end{cases}$이고 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로
$12a-1=16+b$ $\therefore 12a-b=17$ …㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

44) $a=-1$, $b=3$
⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$
$3=a+b+1$ $\therefore a+b=2$ ……㉠
이때 $f'(x)=\begin{cases}3x^2+2ax+b & (x\ge 1)\\ 4x & (x<1)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)$
$3+2a+b=4$ $\therefore 2a+b=1$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

45) $a=1$, $b=1$
⇨ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로
$\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$
$a^2+b=2a$ $\therefore b=-a^2+2a$ ……㉠
이때 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2 & (x\ge a)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to a+} f'(x)=\lim_{x\to a-} f'(x)$
$2a=2$ $\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

46) 2차
⇨ $f(x)$를 n차 함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다.
이때, $n=1$이면 좌변은 상수함수이고 우변은 이차함수이므로 $n\ge 2$
따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$, 우변의 차수는 n이므로 $2n-2=n$ $\therefore n=2$

47) $f(x)=2x^2-2x+1$
⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 정수, $a\ne 0$)로 놓으면
$f'(x)=2ax+b$
$f'(x)\{f'(x)+1\}=6f(x)+4x^2-4$에서
$(2ax+b)(2ax+b+1)=6(ax^2+bx+c)+4x^2-4$
위의 식은 x에 대한 항등식이므로 계수를 비교하면
$4a^2=6a+4$, $4ab+2a=6b$, $b^2+b=6c-4$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$a=2, b=-2, c=1$ ($\because a,b,c$는 정수)
$\therefore f(x)=2x^2-2x+1$

48) 2차
⇨ $f(x)$를 n차 함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다. 이때, $n=1$이면 좌변은 상수함수이고 우변은 이차함수이므로 $n\ge 2$
따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$,
우변의 차수는 n이므로 $2n-2=n$
$\therefore n=2$
따라서 다항함수 $f(x)$의 차수는 2이다.

49) $f(x)=3x^2-3x+1$
⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수, $a\ne 0$)라 하면
$f'(x)=2ax+b$
$f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2-5$에서

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

$(2ax+b)(2ax+b+2)=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5$
$4a^2x^2+4(ab+a)x+b^2+2b$
$=4(2a+3)x^2+8bx+8c-5$
위 식은 x에 대한 항등식이므로
$a^2=2a+3$, $ab+a=2b$, $b^2+2b=8c-5$
위 세 식을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-3$, $c=1$ ($\because$ a, b, c는 정수)
$\therefore$ $f(x)=3x^2-3x+1$

50) $f(x)=2x^2-2x+1$
⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면 $f'(x)=2ax+b$이므로
$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면
$(2x+1)(ax^2+bx+c)-x^2(2ax+b)-1=0$
$\therefore (a+b)x^2+(b+2c)x+c-1=0$
이 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로
$a+b=0$, $b+2c=0$, $c-1=0$
이 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$, $c=1$
$\therefore f(x)=2x^2-2x+1$

51) $f(x)=x^2+x+1$
⇨ $f(x)=x^2+ax+b$라 하면
$f'(x)=2x+a$이므로 주어진 등식은
$(2x+1)(2x+a)-4(x^2+ax+b)+3=0$
$\therefore$ $-2(a-1)x+(a-4b+3)=0$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$a-1=0$, $a-4b+3=0$
따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $f(x)=x^2+x+1$

52) $f(x)=x^2+2x-1$
⇨ $f(x)=x^2+ax+b$라 하면
$f'(x)=2x+a$이므로 주어진 등식은
$(x+1)(2x+a)-2(x^2+ax+b)-4=0$
$\therefore (2-a)x+a-2b-4=0$
이식은 x에 대한 항등식이므로
$2-a=0$, $a-2b-4=0$
따라서 $a=2$, $b=-1$이므로
$f(x)=x^2+2x-1$

53) $f(x)=x^2+2x$
⇨ $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$라 하면
$f'(x)=2ax+b$이므로 주어진 등식은
$x^2(2ax+b)-x(ax^2+bx+c)=x^3$
$\therefore$ $(a-1)x^3-cx=0$
이 식은 x에 대한 항등식이므로 $a-1=0$, $c=0$
$\therefore$ $a=1$, $c=0$
한편, $f'(2)=6$에서 $4+b=6$이므로 $b=2$
$\therefore$ $f(x)=x^2+2x$

54) 35
⇨ $f(x)$를 n차 함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이므로 $f(x)f'(x)$는 $n+(n-1)=2n-1$에서 $(2n-1)$차 함수이다.
이때, $4x+6$은 일차식이므로 $2n-1=1$에서 $n=1$
즉, $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b(a\neq0)$이라 하면
$f(x)f'(x)=(ax+b)a=a^2x+ab=4x+6$
계수비교법에 의하여 $a^2=4$, $ab=6$
$\therefore$ $a=2$, $b=3$ 또는 $a=-2$, $b=-3$
따라서 $f(x)=2x+3$ 또는 $f(x)=-2x-3$이므로
$f(1)f(2)=35$

55) 70
⇨ $f(x)$를 n차식이라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차식이므로 좌변 $f(x)f'(x)$는 $n+(n-1)$차식이고, 우변 $9x+12$는 1차식이므로
$n+(n-1)=1$ $\therefore n=1$
즉, $f(x)$는 일차식이므로 $f(x)=ax+b(a\neq0)$로 놓으면 $f(x)f'(x)=(ax+b)a=a^2x+ab=9x+12$
위의 식은 x에 대한 항등식이므로 계수를 비교하면
$a=3$, $b=4$ 또는 $a=-3$, $b=-4$
따라서 $f(x)=3x+4$ 또는 $f(x)=-3x-4$이므로
$f(1)f(2)=70$

56) 3
⇨ $f(x)$를 n차 함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이므로 $f(x)f'(x)$는 $n+(n-1)=2n-1$에서 $(2n-1)$차 함수이다. 이때, $2x^3+3x^2-5x-3$은 삼차식이므로
$2n-1=3$에서 $n=2$
즉, $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면
$f'(x)=2x+a$이고 주어진 등식은
$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3+3x^2-5x-3$에서
$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3+3x^2-5x-3$
계수비교법에 의하여 $3a=3$, $a^2+2b=-5$, $ab=-3$
따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $f(x)=x^2+x-3$
$\therefore$ $f(2)=2^2+2-3=3$

57) -2
⇨ $f(x)=x^2+x$에서 $f'(x)=2x+1$이므로 주어진 등식은 $x(2x+1)+a(x^2+x)+x=0$
$\therefore$ $(a+2)x^2+(a+2)x=0$
위의 식은 x에 대한 항등식이므로 $a+2=0$
$\therefore$ $a=-2$

58) 5
⇨ $f(x)=x^3+x$에서 $f'(x)=3x^2+1$이므로 주어진 등식은 $a(x^3+x)=x(3x^2+1+b)$
$\therefore$ $(a-3)x^3+(a-b-1)x=0$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$a-3=0$, $a-b-1=0$
따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $a+b=5$

59) $a=1,\ b=0$

⇨ $f'(x)=3x^2+a$이므로

$3f(x)=x\{f'(x)+2\}$에서

$3(x^3+ax+b)=x\{(3x^2+a)+2\}$

$3x^3+3ax+3b=3x^3+(a+2)x$

$(2a-2)x+3b=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 3b=0\quad \therefore a=1, b=0$

60) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로 주어진 등식은

$a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2a(x+k)+b$

$2ax+a+b=2ax+2ak+b\qquad \therefore\ a=2ak$

그런데 $a\neq0$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

61) $-9x-8$

⇨ $x^8+x^5-2x^3-1$을 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^8+x^5-2x^3-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+b=1$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7+5x^4-6x^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

……㉢

㉢의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=-9$

$a=-9$를 ㉡에 대입하면 $b=-8$

따라서 구하는 나머지는 $-9x-8$

62) $5x-4$

⇨ $x^{10}-x^5+1$을 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $ax+b$라고 하면

$x^{10}-x^5+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b=1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-5x^4=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

…… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $10-5=a\quad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면 $b=-4$

따라서 구하는 나머지는 $5x-4$

63) -1

⇨ $x^{10}-3x+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라고 하면

$x^{10}-3x+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b=-1$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-3=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ ……㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=7$

$a=7$을 ㉡에 대입하면 $b=-8$

따라서 $R(x)=7x-8$이므로 $R(1)=7-8=-1$

64) 17

⇨ x^{10}을 $x(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$라고 하면

$x^{10}=x(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $c=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a+b+c\ \ \therefore a+b=1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=(x-1)^2Q(x)+2x(x-1)Q(x)+x(x-1)^2Q'(x)$
$+2ax+b$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $10=2a+b$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=9,\ b=-8$

따라서 $R(x)=9x^2-8x$이므로 $R(-1)=9+8=17$

65) $a=-30,\ b=40$

⇨ x^5+ax^2+bx+8을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^5+ax^2+bx+8=(x-2)^2Q(x)$ …… ㉠

로 놓고 $x=2$를 대입하면

$32+4a+2b+8=0\ \ \therefore 2a+b+20=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+2ax+b=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$

$x=2$를 대입하면

$80+4a+b=0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a=-30,\ b=40$

66) $a=3,\ b=-7$

⇨ ax^3+x^2+bx-5를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$ax^3+x^2+bx-5=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-a+1-b-5=0$

$\therefore a+b=-4$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3ax^2+2x+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3a-2+b=0\ \ \therefore 3a+b=2$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $a=3,\ b=-7$

67) $a=20,\ b=1$

⇨ $x^{20}+ax+19$를 $(x+b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{20}+ax+19=(x+b)^2Q(x)$ … ㉠

㉠의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$b^{20}-ab+19=0$ … ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$20x^{19}+a=2(x+b)Q(x)+(x+b)^2Q'(x)$ … ㉢

㉢의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$-20b^{19}+a=0\qquad \therefore\ a=20b^{19}$ … ㉣

이것을 ㉡에 대입하면 $b^{20}-20b^{20}+19=0,\ b^{20}=1$

$\therefore\ b=1\ (\because\ b>0),\ a=20\ (\because\ ㉣)$

68) 17

⇨ x^8+ax+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^8+ax+b=(x-1)^2Q(x)+3x+5$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b=7$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+3$

양변에 $x=1$을 대입하면 $a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면 $b=12$

$\therefore\ b-a=12-(-5)=17$

69) 185

⇨ $x^{100}-2x^3+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^{100}-2x^3+4=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3=a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$100x^{99}-6x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$94=a$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a=94, b=-91$

$\therefore a-b=94-(-91)=185$

70) 0

⇨ 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x-2)^2Q(x)$ … ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$ … ㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=0$

$\therefore\ 2f(2)+3f'(2)=0$