01 로그의 여러 가지 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때

(1) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ (단, $b \neq 1$)

(2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수, $m \neq 0$)

(3) $a^{\log_a b} = b$

(4) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c \neq 1$)

◪ 다음 식을 간단히 하여라.

1. $\log_{7^2} 7^3$

2. $81^{\log_9 4}$

3. $\log_9 3\sqrt{3}$

4. $27^{\log_3 2}$

5. $\log_{81} 27$

6. $5^{\log_5 4}$

7. $2^{\log_2 10}$

8. $\log_8 2\sqrt{2}$

9. $\log_{5^3} 5^4$

10. $27^{\log_3 5}$

11. $3^{\log_3 10}$

12. $3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{7} + \log_{\frac{1}{3}} 5}$

13. $2^{\log_2 9 - \log_2 3}$

14. $3^{\log_3 15 + \log_{\frac{1}{3}} 7}$

15. $5^{\log_5 \frac{1}{4} + \log_{\sqrt{5}} 2\sqrt{2}}$

16. $8^{\log_2 \sqrt{18} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \frac{4}{3}\log_2 3}$

17. $2^{\log_4 9}$

18. $125^{\log_{25} 9}$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

19. $\log_{\frac{1}{2}} 10+\log_{\frac{1}{4}} 25$

20. $\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_7 \frac{1}{7}$

21. $\log_4 2+\log_{16} 2$

22. $\log_8 81+\log_4 3$

23. $\sqrt[3]{(-2)^6}+7^{\log_5 3 \cdot \log_7 5}$

24. $\log_3 \sqrt[3]{16}+\log_9 \sqrt{8}$

25. $2\log_6 3+\frac{1}{\log_4 6}-\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{27}+5^{\log_5 4}$

26. $\log_5 3\times(\log_3 \sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}} 125)$

27. $(\log_2 3+\log_8 3)\times(\log_3 2+\log_9 2)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

28. $2^{a+b}=5,\ 3^{a-b}=4$일 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하여라.

29. $4^a=125,\ 16^b=27$일 때, $5^{\frac{b}{a}}$의 값을 구하여라.

30. $3^{a+b}=4,\ 2^{a-b}=5$일 때, $3^{a^2-b^2}$의 값

31. $27^a=8,\ 3^b=49$일 때, $2^{\frac{b}{a}}$의 값을 구하여라.

32. $5^a=2,\ 5^b=3$일 때, $2^{\frac{b}{a}}$의 값을 구하여라.

33. $36^a=2,\ 36^b=3$일 때, $12^{\frac{1+a-b}{1-b}}$의 값을 구하여라.

34. $16^a=9,\ 8^b=125$일 때, $3^{\frac{b}{2a}}$의 값을 구하여라.

35. $18^a=2,\ 18^b=3$일 때, $9^{\frac{2a}{b}}$의 값을 구하여라.

◪ $\log_7 2=a,\ \log_7 3=b$일 때, 다음을 $a,\ b$로 나타내어라.

36. $\log_4 \sqrt{18}$

37. $\log_6 72$

38. $\log_7 \dfrac{27}{16}$

39. $\log_7 12$

◪ $\log_{10} 2=a,\ \log_{10} 3=b$일 때, 다음을 $a,\ b$로 나타내어라.

40. $\log_6 9$

41. $\log_3 16$

42. $\log_{10} \dfrac{4}{27}$

43. $\log_{10} 12$

◪ 다음 조건을 만족하는 1이 아닌 양수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 다음 값을 구하여라.

44. $\log_7 \sqrt{8}+\log_{49}\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{2}\log_7 \sqrt[3]{20}=a\log_7 b$일 때, b^a의 값을 구하여라.

45. $a^2b^3=1$일 때, $\log_a a^3b^5$의 값

46. $\log_{a^2} 9=\log_b 27$일 때, $\log_{ab} a^2$의 값을 구하여라.

47. $abc=1$일 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a+\log_a c+\log_c b+\log_b a$의 값을 구하여라.

48. 1이 아닌 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a=b^2=c^3$일 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값을 구하여라.

49. $ab=27,\ \log_3 \dfrac{b}{a}=5$일 때, $4\log_3 a+9\log_3 b$의 값을 구하여라.

50. $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} a+2\log_4 b+3\log_8 c+4\log_4 \sqrt{d}=1$일 때, $\left[\left\{\left(3^a\right)^b\right\}^c\right]^d$의 값을 구하여라.

02 로그의 정수부분과 소수부분

정수 n에 대하여 $a^n < M < a^{n+1}(a>0,\ a \neq 1)$일 때
$\log_a a^n < \log_a M < \log_a a^{n+1}$
$\therefore\ n < \log_a M < n+1$
⇨ $\log_a M$의 정수부분은 n, 소수부분은 $\log_a M - n$이다.

◪ 다음 로그의 정수 부분과 소수 부분을 구하여라.

51. $\log_2 3$

52. $\log_2 7$

53. $\log_2 9$

54. $\log_3 91$

55. $\log_5 324$

56. $\log_8 65$

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

57. $\log_2 7$의 정수 부분을 a, 소수부분을 b라고 할 때, $3^a + 2^b$의 값

58. $\log_2 5$의 정수 부분을 a, 소수부분을 b라 할 때, $\dfrac{2^{-a}+2^{-b}}{2^a+2^b}$의 값

59. $\log_3 51$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a-3^b$의 값을 구하여라.

60. $\log_2 13$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 a, b라 할 때, $2^{-a}+2^b$의 값

61. $\log_2 40$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a-2^b$의 값을 구하여라.

62. $\log_3 12$의 정수부분을 a, 소수부분을 b라 할 때, $\dfrac{3^a+3^b}{3^{-a}+3^{-b}}$의 값을 구하여라.

63. $\log_3 12$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, 3^a+3^b의 값을 구하여라.

64. $\log_3 7$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, ab의 값을 구하여라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

03 두 근이 로그로 주어진 이차방정식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $a\neq 0$)에서
(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}$인 근과 계수와의 관계를 이용하여 값을 구한다.

◪ 다음을 구하여라.

65. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\log_2 3$, 1일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값

66. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값

67. 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값

68. 이차방정식 $x^2+4x-12=0$의 두 근이 α, β일 때, $\log_3(\alpha^{-1}+\beta^{-1})$의 값

69. 이차방정식 $x^2-8x+2=0$의 두 근이 α, β일 때, $\log_2(\alpha^{-1}+\beta^{-1})$의 값

70. 이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값

71. 이차방정식 $x^2-5x+1=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값

72. 이차방정식 $x^2-18x+2=0$의 두 근이 α, β일 때, $\log_3(\alpha^{-1}+\beta^{-1})$의 값

73. 1이 아닌 서로 다른 양수 a, b, x에 대하여 $\log_a x=2$, $\log_b x=3$일 때, $\log_{ab} x$의 값

74. 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 $\log a$, $\log b$일 때, $\log_a b^4+\log_b a^4$의 값

75. 이차방정식 $x^2-10x+2=0$의 두 근이 $\log a$, $\log b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값

정답 및 해설

1) $\frac{3}{2}$

⇨ $\log_{7^2} 7^3 = \frac{3}{2}\log_7 7 = \frac{3}{2}$

2) 16

⇨ $81^{\log_9 4} = 4^{\log_9 81} = 4^{\log_9 9^2} = 4^{2\log_9 9} = 4^2 = 16$

3) $\frac{3}{4}$

⇨ $\log_9 3\sqrt{3} = \log_{3^2} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2}\log_3 3 = \frac{3}{4}$

4) 8

⇨ $27^{\log_3 2} = 2^{\log_3 27} = 2^{\log_3 3^3} = 2^{3\log_3 3} = 2^3 = 8$

5) $\frac{3}{4}$

⇨ $\log_{81} 27 = \log_{3^4} 3^3 = \frac{3}{4}\log_3 3 = \frac{3}{4}$

6) 4

⇨ $5^{\log_5 4} = 4^{\log_5 5} = 4^1 = 4$

7) 10

⇨ $2^{\log_2 10} = 10^{\log_2 2} = 10$

8) $\frac{1}{2}$

⇨ $\log_8 2\sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3}\log_2 2 = \frac{1}{2}$

9) $\frac{4}{3}$

⇨ $\log_{5^3} 5^4 = \frac{4}{3}\log_5 5 = \frac{4}{3}$

10) 125

⇨ $27^{\log_3 5} = 5^{\log_3 27} = 5^{3\log_3 3} = 5^3 = 125$

11) 10

⇨ $3^{\log_3 10} = 10^{\log_3 3} = 10$

12) $\frac{7}{5}$

⇨ 지수 부분을 먼저 간단히 하면

$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{7} + \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 7^{\frac{1}{2}} + \log_{3^{-1}} 5$

$= \log_3 7 - \log_3 5 = \log_3 \frac{7}{5}$

$\therefore\ 3^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7} + \log_{\frac{1}{3}} 5} = 3^{\log_3 \frac{7}{5}} = \frac{7}{5}$

13) 3

⇨ $2^{\log_2 9 - \log_2 3} = 2^{\log_2 \frac{9}{3}} = 2^{\log_2 3} = 3^{\log_2 2} = 3$

14) $\frac{15}{7}$

⇨ $3^{\log_3 15 + \log_{\frac{1}{3}} 7} = 3^{\log_3 15 - \log_3 7} = 3^{\log_3 \frac{15}{7}} = \frac{15}{7}$

15) 2

⇨ $5^{\log_5 \frac{1}{4} + \log_{\sqrt{5}} 2\sqrt{2}} = 5^{-2\log_5 2 + 3\log_5 2} = 5^{\log_5 2} = 2$

16) $2\sqrt{2}$

⇨ 지수부분을 계산하면

$\log_2 \sqrt{18} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \frac{4}{3}\log_2 3$

$= \log_2 \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 식은 $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 이다.

17) 3

⇨ $2^{\log_4 9} = 9^{\log_4 2} = 9^{\frac{1}{2}\log_2 2} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

18) 27

⇨ $125^{\log_{25} 9} = 9^{\log_{25} 125} = 9^{\frac{3}{2}\log_5 5} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

19) $-1-2\log_2 5$

⇨ $\log_{\frac{1}{2}} 10 + \log_{\frac{1}{4}} 25 = \log_{2^{-1}} 10 + \log_{2^{-2}} 5^2$

$= -\log_2 (2\times 5) + \frac{2}{-2}\log_2 5$

$= -(\log_2 2 + \log_2 5) - \log_2 5$

$= -1 - 2\log_2 5$

20) -2

⇨ $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_7 \frac{1}{7} = -1 - 1 = -2$

21) $\frac{3}{4}$

⇨ $\log_4 2 + \log_{16} 2 = \log_{2^2} 2 + \log_{2^4} 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

22) $\frac{11}{6}\log_2 3$

⇨ $\log_8 81 + \log_4 3 = \log_{2^3} 3^4 + \log_{2^2} 3$

$= \frac{4}{3}\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{11}{6}\log_2 3$

23) 7

⇨ $\sqrt[3]{(-2)^6}+7^{\log_5 3\cdot\log_7 5}=2^2+7^{\frac{\log_7 3}{\log_7 5}\cdot\log_7 5}$

$=4+7^{\log_7 3}=4+3=7$

24) $\frac{25}{12}\log_3 2$

⇨

$\log_3\sqrt[3]{16}+\log_9\sqrt{8}=\log_3\sqrt[3]{2^4}+\log_{3^2}\sqrt{2^3}$

$=\log_3 2^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}\log_3 2^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{4}{3}\log_3 2+\frac{3}{4}\log_3 2=\frac{25}{12}\log_3 2$

25) 7

⇨ $2\log_6 3+\frac{1}{\log_4 6}-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{27}+5^{\log_5 4}$

$=\log_6 3^2+\log_6 4+\log_3 3+4$

$=\log_6 36+1+4=2+1+4=7$

26) 2

⇨ $\log_5 3\times(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125)$

$=\log_5 3\times\left(\frac{1}{2}\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5\right)$

$=\log_5 3\times 2\log_3 5=2$

27) 2

⇨ $(\log_2 3+\log_8 3)\times(\log_3 2+\log_9 2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\times\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=\left(\frac{4}{3}\log_2 3\right)\times\left(\frac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$

28) 25

⇨ $a+b=\log_2 5,\ a-b=\log_3 4$이므로

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_2 5\cdot\log_3 4$

$=\log_2 5\cdot\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}=2\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=2\log_3 5$

$\therefore\ 3^{a^2-b^2}=3^{2\log_3 5}=3^{\log_3 25}=25$

29) $\sqrt{3}$

⇨ $a=\log_4 125=\log_{2^2}5^3=\frac{3}{2}\log_2 5,$

$b=\log_{16}27=\log_{2^4}3^3=\frac{3}{4}\log_2 3$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{4}\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_2 5}=\frac{1}{2}\log_5 3$

$\therefore\ 5^{\frac{b}{a}}=5^{\frac{1}{2}\log_5 3}=5^{\log_5\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

30) 25

⇨ $a+b=\log_3 4,\ a-b=\log_2 5$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_3 4\times\log_2 5$

$=2\log_3 2\times\log_2 5$

$=2\log_3 2\times\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=2\log_3 5$

$\therefore\ 3^{a^2-b^2}=3^{2\log_3 5}=5^2=25$

31) 49

⇨ $a=\log_{27}8=\log_{3^3}2^3=\log_3 2,$

$b=\log_3 49=\log_3 7^2=2\log_3 7$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{2\log_3 7}{\log_3 2}=2\log_2 7$

$\therefore\ 2^{\frac{b}{a}}=2^{2\log_2 7}=2^{\log_2 49}=49$

32) 3

⇨ $a=\log_5 2,\ b=\log_5 3$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\log_2 3\qquad\therefore\ 2^{\frac{b}{a}}=2^{\log_2 3}=3$

33) 24

⇨ $a=\log_{36}2,\ b=\log_{36}3$이므로

$\frac{1+a-b}{1-b}=\frac{\log_{36}36+\log_{36}2-\log_{36}3}{\log_{36}36-\log_{36}3}$

$=\frac{\log_{36}\frac{36\times 2}{3}}{\log_{36}\frac{36}{3}}=\frac{\log_{36}24}{\log_{36}12}=\log_{12}24$

$\therefore\ 12^{\frac{1+a-b}{1-b}}=12^{\log_{12}24}=24$

34) 5

⇨ $16^a=9,\ 8^b=125$에서 $a=\log_{16}9,\ b=\log_8 125$이므로 $a=\log_{2^4}3^2=\frac{1}{2}\log_2 3\qquad\therefore\ 2a=\log_2 3$

$b=\log_{2^3}5^3=\log_2 5$

따라서 $\frac{b}{2a}=\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_3 5$이므로

$3^{\frac{b}{2a}}=3^{\log_3 5}=5^{\log_3 3}=5$

35) 16

⇨ $18^a=2,\ 18^b=3$에서 $a=\log_{18}2,\ b=\log_{18}3$이므로

$\frac{2a}{b}=\frac{2\log_{18}2}{\log_{18}3}=2\log_3 2$

$\therefore\ 9^{\frac{2a}{b}}=9^{2\log_3 2}=9^{\log_3 4}=4^{\log_3 9}=4^{\log_3 3^2}=4^2=16$

36) $\frac{a+2b}{4a}$

⇨ $\log_4 \sqrt{18} = \dfrac{\log_7 \sqrt{18}}{\log_7 4} = \dfrac{\log_7 (2\times 3^2)^{\frac{1}{2}}}{\log_7 2^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}(\log_7 2 + 2\log_7 3)}{2\log_7 2} = \dfrac{a+2b}{4a}$

37) $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

⇨ $\log_6 72 = \dfrac{\log_7 72}{\log_7 6} = \dfrac{\log_7 (2^3\times 3^2)}{\log_7 (2\times 3)}$

$= \dfrac{3\log_7 2 + 2\log_7 3}{\log_7 2 + \log_7 3} = \dfrac{3a+2b}{a+b}$

38) $3b-4a$

⇨ $\log_7 \dfrac{27}{16} = \log_7 \dfrac{3^3}{2^4} = \log_7 3^3 - \log_7 2^4$

$= 3\log_7 3 - 4\log_7 2 = 3b-4a$

39) $2a+b$

⇨ $\log_7 12 = \log_7 (2^2\times 3) = \log_7 2^2 + \log_7 3$

$= 2\log_7 2 + \log_7 3 = 2a+b$

40) $\dfrac{2b}{a+b}$

⇨ $\log_6 9 = \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 6} = \dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10}(2\cdot 3)}$

$= \dfrac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} = \dfrac{2b}{a+b}$

41) $\dfrac{4a}{b}$

⇨ $\log_3 16 = \dfrac{\log_{10} 16}{\log_{10} 3} = \dfrac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3} = \dfrac{4\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \dfrac{4a}{b}$

42) $2a-3b$

⇨ $\log_{10} \dfrac{4}{27} = \log_{10} \dfrac{2^2}{3^3} = 2\log_{10} 2 - 3\log_{10} 3 = 2a-3b$

43) $2a+b$

⇨ $\log_{10} 12 = \log_{10}(2^2\cdot 3) = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2a+b$

44) 4

⇨ $\log_7 \sqrt{8} + \log_{49} \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{2}\log_7 \sqrt[3]{20}$

$= \log_7 \sqrt{2^3} + \log_{7^2} 10^{-1} + \dfrac{3}{2}\log_7 (2^2\times 5)^{\frac{1}{3}}$

$= \log_7 2^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}(\log_7 2 + \log_7 5) + \dfrac{1}{2}(2\log_7 2 + \log_7 5)$

$= \dfrac{3}{2}\log_7 2 - \dfrac{1}{2}\log_7 2 - \dfrac{1}{2}\log_7 5 + \log_7 2 + \dfrac{1}{2}\log_7 5$

$= 2\log_7 2$

$a\log_7 b = 2\log_7 2$에서 $\log_7 b^a = \log_7 2^2$이므로

$b^a = 2^2 = 4$

45) $-\dfrac{1}{3}$

⇨ $a^2b^3 = 1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^2b^3 = \log_a 1$

$\log_a a^2 + \log_a b^3 = 0$

$2 + 3\log_a b = 0 \qquad \therefore \log_a b = -\dfrac{2}{3}$

$\therefore \log_a a^3b^5 = \log_a a^3 + \log_a b^5 = 3 + 5\log_a b$

$= 3 + 5\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$

46) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $\log_{a^2} 9 = \log_{a^2} 3^2 = \log_a 3 = \log_{a^3} 3^3$이므로

$\log_{a^3} 27 = \log_b 27 \qquad \therefore b = a^3$

$\therefore \log_{ab} a^2 = \log_{a^4} a^2 = \dfrac{2}{4}\log_a a = \dfrac{1}{2}$

47) -3

⇨ $\log_a b + \log_b c + \log_c a + \log_a c + \log_c b + \log_b a$

$= (\log_a b + \log_a c) + (\log_b c + \log_b a) + (\log_c a + \log_c b)$

$= \log_a bc + \log_b ca + \log_c ab$

$= \log_a \dfrac{1}{a} + \log_b \dfrac{1}{b} + \log_c \dfrac{1}{c} \quad (\because abc = 1)$

$= \log_a a^{-1} + \log_b b^{-1} + \log_c c^{-1}$

$= (-1) + (-1) + (-1) = -3$

48) $\dfrac{25}{6}$

⇨ $b = a^{\frac{1}{2}},\ c = b^{\frac{2}{3}},\ a = c^3$이므로

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_a a^{\frac{1}{2}} + \log_b b^{\frac{2}{3}} + \log_c c^3$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + 3 = \dfrac{25}{6}$

49) 32

⇨ $ab = 27$에서 $\log_3 ab = \log_3 27$이므로

$\log_3 a + \log_3 b = \log_3 3^3 = 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_3 \dfrac{b}{a} = \log_3 b - \log_3 a = 5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\log_3 a = -1$, $\log_3 b = 4$

$\therefore 4\log_3 a + 9\log_3 b = 4\times(-1) + 9\times 4$

$= -4 + 36 = 32$

50) 9

⇨ $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} a = \log_2 a$, $2\log_4 b = \log_2 b$,

$3\log_8 c = \log_2 c$, $4\log_4 \sqrt{d} = \log_2 d$이므로

$\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} a + 2\log_4 b + 3\log_8 c + 4\log_4 \sqrt{d}$

$=\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c+\log_2 d$

$=\log_2 abcd=1$

$\therefore\ abcd=2$

$\therefore\ \left[\{(3^a)^b\}^c\right]^d=3^{abcd}=3^2=9$

51) 정수 부분 : 1, 소수 부분 : $\log_2 3-1$

⇨ $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$이므로 $1<\log_2 3<2$

따라서 $\log_2 3$의 정수 부분은 1,

소수 부분은 $\log_2 3-1$

52) 정수 부분 : 2, 소수부분 $\log_2 7-2$

53) 정수 부분 : 3, 소수 부분 : $\log_2 9-3$

⇨ $\log_2 8<\log_2 9<\log_2 16$이므로 $3<\log_2 9<4$

따라서 $\log_2 9$의 정수 부분은 3,

소수 부분은 $\log_2 9-3$

54) 정수 부분 : 4, 소수 부분 : $\log_3 91-4$

⇨ $\log_3 81<\log_3 91<\log_3 243$이므로 $4<\log_3 91<5$

따라서 $\log_3 91$의 정수 부분은 4,

소수 부분은 $\log_3 91-4$

55) 정수 부분 : 3, 소수 부분 : $\log_5 324-3$

⇨ $\log_5 125<\log_5 324<\log_5 625$이므로

$3<\log_5 324<4$

따라서 $\log_5 324$의 정수 부분은 3,

소수 부분은 $\log_5 324-3$

56) 정수 부분 : 2, 소수 부분 : $\log_8 65-2$

⇨ $\log_8 64<\log_8 65<\log_8 512$이므로 $2<\log_8 65<3$

따라서 $\log_8 65$의 정수 부분은 2,

소수 부분은 $\log_8 65-2$

57) $\dfrac{43}{4}$

58) $\dfrac{1}{5}$

59) $\dfrac{10}{9}$

⇨ $\log_3 27<\log_3 51<\log_3 81$이므로 $3<\log_3 51<4$

따라서 $\log_3 51$의 정수 부분은 3,

소수 부분은 $\log_3 51-3$

$\therefore\ a=3,\ b=\log_3 51-3$

$\therefore\ a-3^b=3-3^{\log_3 51-3}=3-3^{\log_3 51}\cdot 3^{-3}$

$=3-\dfrac{51^{\log_3 3}}{3^3}=3-\dfrac{51}{27}=\dfrac{10}{9}$

60) $\dfrac{7}{4}$

⇨ $\log_2 8<\log_2 13<\log_2 16,\ 3<\log_2 13<4$

$\therefore [\log_2 13]=3$

$\therefore a=3,\ b=\log_2 13-3=\log_2\dfrac{13}{8}$

$\therefore 2^{-a}+2^b=2^{-3}+2^{\log_2\frac{13}{8}}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{13}{8}=\dfrac{7}{4}$

61) $\dfrac{15}{4}$

⇨ $\log_2 32<\log_2 40<\log_2 64$이므로 $5<\log_2 40<6$

따라서 $\log_2 40$의 정수 부분은 5, 소수 부분은

$\log_2 40-5$

$\therefore\ a=5,\ b=\log_2 40-5$

$\therefore\ a-2^b=5-2^{\log_2 40-5}=5-2^{\log_2 40}\cdot 2^{-5}$

$=5-\dfrac{40^{\log_2 2}}{2^5}=5-\dfrac{40}{32}=\dfrac{15}{4}$

62) 12

⇨ $\log_3 3^2<\log_3 12<\log_3 3^3$

$2<\log_3 12<3$

$\therefore a=2,\ b=\log_3 12-2=\log_3 12-\log_3 9=\log_3\dfrac{4}{3}$

$$\frac{3^a+3^b}{3^{-a}+3^{-b}}=\frac{3^2+3^{\log_3\frac{4}{3}}}{3^{-2}+3^{-\log_3\frac{4}{3}}}=\frac{9+\frac{4}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{3}{4}}=12$$

63) $\dfrac{31}{3}$

⇨ $\log_3 9<\log_3 12<\log_3 27$이므로 $2<\log_3 12<3$

따라서 $\log_3 12$의 정수 부분은 2,

소수 부분은 $\log_3 12-2$이다.

즉, $a=2,\ b=\log_3 12-2$

$\therefore\ 3^a+3^b=3^2+3^{\log_3 12-2}=9+3^{\log_3 12}\cdot 3^{-2}$

$=9+\dfrac{12}{9}=\dfrac{31}{3}$

64) $\log_3\dfrac{7}{3}$

65) -1

⇨ 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 3+1=\log_2 3+\log_2 2=\log_2 6=-a$

$\therefore\ a=-\log_2 6$

$(\log_2 3)\times 1=\log_2 3=b$

$\therefore\ a+b\ =-\log_2 6+\log_2 3=\log_2 6^{-1}+\log_2 3$

$=\log_2\dfrac{3}{6}=\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

66) 7

⇨ 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2 a+\log_2 b=3,\ \log_2 a\cdot\log_2 b=1$

$\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{3^2-2\times1}{1}=7$

67) 6

⇨ $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2 a+\log_2 b=4$, $\log_2 a\cdot\log_2 b=2$

$\log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{4^2-2\times2}{2}=6$

68) -1

⇨ 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-12$

$\therefore\ \log_3(\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_3\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=\log_3\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_3\dfrac{-4}{-12}=\log_3\dfrac{1}{3}$

$=\log_3 3^{-1}=-1$

69) 2

⇨ 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=2$

$\therefore\ \log_2(\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=\log_2\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_2\dfrac{8}{2}=\log_2 2^2=2$

70) 1

⇨ 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=3$, $\log_2 a\times\log_2 b=3$

$\therefore\ \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\dfrac{3^2-2\times3}{3}=1$

71) 23

⇨ 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=5$, $\log_2 a\times\log_2 b=1$

$\therefore\ \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\dfrac{5^2-2\times1}{1}=23$

72) 2

⇨ 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=18$, $\alpha\beta=2$

$\therefore\ \log_3(\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_3\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=\log_3\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_3\dfrac{18}{2}=\log_3 3^2=2$

73) $\dfrac{6}{5}$

⇨ $\log_a x=2$에서 $\dfrac{1}{\log_x a}=2$이므로 $\log_x a=\dfrac{1}{2}$

$\log_b x=3$에서 $\dfrac{1}{\log_x b}=3$이므로 $\log_x b=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \log_{ab} x=\dfrac{1}{\log_x ab}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\dfrac{5}{6}}=\dfrac{6}{5}$

74) 56

⇨ 근과 계수와의 관계에 의해

$\log a+\log b=4$, $\log a\cdot\log b=1$

$\therefore \log_a b^4+\log_b a^4=4\log_a b+4\log_b a$

$=4\left(\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}\right)=4\cdot\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}$

$=4\cdot\dfrac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}$

$=4(16-2)=56$

75) 48

⇨ 근과 계수와의 관계에 의해

$\log a+\log b=10$, $\log a\cdot\log b=2$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}$

$=\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}$

$=\dfrac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{2}=\dfrac{100-4}{2}=48$