● 2회차

01 ③	02 ③	03 ③	04 ①	05 ②
06 ④	07 ③	08 ⑤	09 ①	10 ⑤
11 ①	12 ⑤	13 ①	14 ④	15 ②
16 ③	17 ④			

[서술형 1] $\frac{2}{3}\pi$

[서술형 2] 5

[서술형 3] $\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$

01 사인법칙에 의하여 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}$

$\therefore b=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

02 조건 (가)에서

$a+b+c=8+4\sqrt{2}$ …… ㉠

또 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

위의 식을 (나)에 대입하면

$\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a+b+c}{2R}=1+\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{8+4\sqrt{2}}{2R}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{R}=1+\sqrt{2}$

$\therefore R=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

따라서 △ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

Lecture 사인법칙의 변형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

(1) $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

(2) $a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$

03 코사인법칙에 의하여

$b^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=4+9-12\cdot\dfrac{1}{2}$

$=13-6=7$

$\therefore b=\sqrt{7}$ ($\because b>0$)

04 평행사변형 ABCD의 넓이는

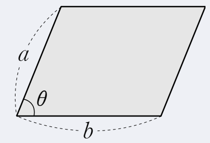
$\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}$

Lecture 사각형의 넓이

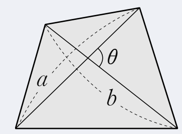
(1) 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 평행사변형의 넓이

⇨ $S=ab\sin\theta$



(2) 두 대각선의 길이가 a, b이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이

⇨ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$



05 $8=6\cdot1+2$이므로 $a_8=2$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=10$에서 $a+4d=10$ …… ㉠

$a_{12}=38$에서 $a+11d=38$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $d=4$

따라서 $a_n=-6+(n-1)\cdot4=4n-10$이므로

$a_{20}=4\cdot20-10=70$

07 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=13$에서 $a+2d=13$ …… ㉠

$a_{20}=-21$에서 $a+19d=-21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=17$, $d=-2$

$\therefore a_n=17+(n-1)\cdot(-2)=-2n+19$

$a_n<0$에서 $-2n+19<0$

$\therefore n>\dfrac{19}{2}=9.5$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.

따라서 S_n이 최대가 되는 n의 값은 9이다.

Lecture **조건을 만족시키는 등차수열**

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

(1) 처음으로 양수가 되는 항

⇨ $a+(n-1)d>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

(2) 처음으로 음수가 되는 항

⇨ $a+(n-1)d<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

08 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_n\geq 1000$에서 $2^{n+1}\geq 1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n+1\geq 10$ $\quad\therefore n\geq 9$

따라서 처음으로 1000 이상이 되는 항은 제9항이다.

09 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r\neq 0)$라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_3=8$에서 $\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=32$에서

$\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=32$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $8(r^3+1)=32$

$r^3+1=4$ $\quad\therefore r^3=3$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$S_9=\frac{a(r^9-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^3-1)\{(r^3)^2+r^3+1\}}{r-1}$$
$$=8\cdot(3^2+3+1)$$
$$=104$$

10 세 수 2, x, 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\dfrac{2+14}{2}=8$

세 수 3, y, 27이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$y^2=3\cdot 27=81$

$\therefore xy^2=8\cdot 81=648$

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2\cdot 4+(n-1)\cdot 3\}}{2}=\frac{n(3n+5)}{2}$$

$S_n=116$이므로 $\dfrac{n(3n+5)}{2}=116$

$3n^2+5n-232=0$

$(3n+29)(n-8)=0$

$\therefore n=8\ (\because n\geq 1)$

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}3=3\cdot 200=600$

13
$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k+2\sum_{k=1}^{5}b_k$$
$$=10+2\cdot 15$$
$$=40$$

14 수열 $1\cdot 2$, $3\cdot 4$, $5\cdot 6$, $\cdots$, $19\cdot 20$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)\cdot 2n=4n^2-2n$

$\therefore 1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+19\cdot 20$

$$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-2k)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$$
$$=1540-110$$
$$=1430$$

15 $a_1=S_1=1^2+2\cdot 1=3$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{21}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{21}\right)$

$=\dfrac{1}{7}$

16 $a_{n+1}-a_n=5$에서 $a_{n+1}=a_n+5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.

이때 첫째항이 4이므로

$a_n=4+(n-1)\cdot 5=5n-1$

$\therefore a_5=5\cdot 5-1=24$

17 (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\dfrac{k}{2k+1}$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$을 더하면

$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\dfrac{k}{2k+1}+\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\dfrac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\boxed{(나)\ \dfrac{k+1}{2k+3}}$

즉 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ (나) $\dfrac{k+1}{2k+3}$

따라서 $f(k)=\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $g(k)=\dfrac{k+1}{2k+3}$ 이므로

$\dfrac{g(4)}{5f(4)}=\dfrac{\frac{5}{11}}{5\cdot\frac{1}{99}}=9$

[서술형 1] $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A=6$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot \sin A=6$

$4\sqrt{3}\sin A=6$

$\therefore \sin A=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ❶

이때 $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$이므로 $A=\dfrac{2}{3}\pi$ ❷

채점 기준	배점
❶ $\sin A$의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ A의 크기를 구할 수 있다.	4점

[서술형 2] $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot 2-1=3$ ❶

$\therefore a_3=2a_2-1=2\cdot 3-1=5$ ❷

채점 기준	배점
❶ a_2의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a_3의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] 첫 번째 시행에서 잘라 낸 삼각형은 1개이고, 잘라 낸 삼각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{2}{2}=1$이므로 잘라 낸 종이의 넓이의 합 a_1은

$a_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

두 번째 시행에서 잘라 낸 삼각형은 3개이고, 잘라 낸 삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$이므로 잘라 낸 종이의 넓이의 합 a_2는

$$a_2=3\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sin 60^\circ\right\}$$
$$=3\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

세 번째 시행에서 잘라 낸 삼각형은 9개이고, 잘라 낸 삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$이므로 잘라 낸 종이의 넓이의 합 a_3은

$$a_3=9\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\sin 60^\circ\right\}$$
$$=9\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{64}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$\vdots$$

n번째 시행에서 잘라 낸 종이의 넓이의 합 a_n은

$$a_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

❶

따라서 구하는 넓이의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}$$
$$=\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$$

❷

채점 기준	배점
❶ n번째 시행에서 잘라 낸 종이의 넓이의 합을 구할 수 있다.	4점
❷ 10회 반복했을 때, 잘라 낸 종이의 넓이의 합을 구할 수 있다.	3점