01 지수함수의 도함수

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x\ln a$

◪ 다음 함수를 미분하여라.

1. $y=2e^x$

2. $y=e^{3x}$

3. $y=3\times 2^x$

4. $y=3^x+5^{x+1}$

5. $y=5^x+e^{x-1}$

6. $y=e^{x+2}$

7. $y=3^{x-2}$

8. $y=2^{x+1}$

9. $y=2^x(x-4)$

10. $y=(x+1)e^x$

11. $y=x^2+e^x$

12. $y=2e^{x+2}$

13. $y=xe^x$

14. $y=4e^x-5^x$

15. $y=e^{2x}(x+x^2)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

16. $y=e^x+3x$

17. $y=2xe^x$

18. $y=3^x x$

19. $y=(x+2)e^{x+1}$

20. $y=x^2e^x$

21. $y=2x^3e^x$

22. $y=e^{x+\ln 2}$

23. $y=6^x(x-1)$

24. $y=(x^2+4)(e^x-1)$

25. $y=(x^2+1)e^x$

◪ 다음 극한값을 구하여라.

26. 함수 $f(x)=e^x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$의 값

27. 함수 $f(x)=2^x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1+3h)}{h}$의 값

28. 함수 $f(x)=2^x+x^3-3x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$의 값

29. 함수 $f(x)=e^x-2^x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(0)-f(0-2h)}{h}$의 값

30. 함수 $f(x)=2^{x+1}$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값

◪ 다음 값을 구하여라.

31. 함수 $f(x)=xe^x$에 대하여 $f'(3)$의 값

32. 함수 $f(x)=e^x+2^x$에 대하여 $f'(2)$의 값

33. 함수 $f(x)=e^{3(x+1)}$에 대하여 $f'(0)$의 값

34. 함수 $f(x)=(x^2+2)e^{3x}$에 대하여 $f'(0)$의 값

35. 함수 $f(x)=x^3+e^{2x}$에 대하여 $f'(1)$의 값

36. 함수 $f(x)=(x^2-x)\times 5^x$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값

37. 함수 $f(x)=xe^x\ (x>0)$에 대하여 $f'(1)$의 값

38. 함수 $f(x)=e^{-x}(x-2)$에 대하여 $f'(-1)$의 값

39. 함수 $f(x)=5^x$에 대하여 $f'(1)$의 값

40. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}e^x-3x^2$에 대하여 $f'(2)$의 값

41. 함수 $f(x)=3^{2x}$에 대하여, $f'(1)$의 값

42. 함수 $f(x)=3^x+x^2+1$에 대하여 $f'(-1)$의 값

43. 함수 $f(x)=3x\times 2^x$에 대하여 $f'(1)$의 값

44. 함수 $f(x)=e^x x+2^x$에 대하여 $f'(0)$의 값

45. 함수 $f(x)=(x^3+1)e^x$에 대하여 $f'(1)$의 값

46. 함수 $f(x)=5^x(2x^3-1)$에 대하여 $f'(0)$의 값

47. 함수 $y=x3^x$에 대하여 $f'(1)$의 값

48. 함수 $f(x)=e^x+2^x$에 대하여 $f'(2)$의 값

◪ 다음 물음에 답하여라.

49. 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{2^x+3^{x-1}-7}{x-2}=k$일 때, e^k의 값을 구하여라.

50. 함수 $f(x)=(x-a)e^x$에 대하여 $f'(1)=\frac{e}{2}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

51. 함수 $f(x)=x^2a^{x-1}\ (a>0)$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, a의 값을 구하여라.

52. 함수 $f(x)=ax^3e^x$이 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=10e^2$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하여라.

53. 함수 $f(x)=e^x(x^2+ax+b)$에 대하여 $f'(x)=x^2e^x$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

54. 함수 $f(x)=(x+a)\times2^{bx}$에 대하여 $f'(x)=\{1+(x-1)\ln4\}\times4^x$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 지수함수의 도함수와 미분가능성

◪ 다음 물음에 답하여라.

55. 함수 $f(x)=\begin{cases}axe^x & (x<1)\\ x+b & (x\ge1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

56. 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a & (x\le0)\\ b^x-1 & (x>0)\end{cases}$가 $x=0$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

57. 함수 $f(x)=\begin{cases}ae^{-x}-1 & (x<0)\\ x^2+bx+1 & (x\ge0)\end{cases}$이 $x=0$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

58. 함수 $f(x)=\begin{cases}(x-a)e^x & (x\ge2)\\ bx & (x<2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

59. 함수 $f(x)=\begin{cases}5^x+x^2 & (x<0)\\ x^2+ax+b & (x\ge0)\end{cases}$가 $x=0$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

60. 함수 $f(x)=\begin{cases} e^x & (x \le 1) \\ ax^2+bx & (x>1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

61. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^3-1 & (x>1) \\ e^{x-1}+b & (x \le 1) \end{cases}$이 모든 실수 x에 대하여 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하여라.

62. 함수 $f(x)=\begin{cases} ae^{-x} & (x \le 1) \\ x^2-bx+2 & (x>1) \end{cases}$이 모든 실수 x에 대하여 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $4ab$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) $y' = 2e^x$

2) $3e^{3x}$
⇨ $y = (e^3)^x$이므로
$y' = e^{3x}\ln e^3 = 3e^{3x}$

3) $y' = 3\ln 2 \times 2^x$
⇨ $y' = 3 \times 2^x \ln 2 = 3\ln 2 \times 2^x$

4) $y' = 3^x \ln 3 + 5^{x+1} \ln 5$

5) $y' = 5^x \ln 5 + e^{x-1}$

6) e^{x+2}
⇨ $y = e^2 \times e^x$이므로
$y' = e^2 \times (e^x)' = e^2 \times e^x = e^{x+2}$

7) $3^{x-2}\ln 3$
⇨ $y = \dfrac{1}{3^2} \times 3^x$이므로
$y' = \dfrac{1}{3^2} \times (3^x)' = \dfrac{1}{3^2} \times 3^x \times \ln 3 = 3^{x-2}\ln 3$

8) $2^{x+1}\ln 2$
⇨ $y = 2 \times 2^x$이므로
$y' = 2 \times (2^x)' = 2 \times 2^x \times \ln 2 = 2^{x+1}\ln 2$

9) $y' = 2^x\{(x-4)\ln 2 + 1\}$

10) $y' = (x+2)e^x$
⇨ $y' = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

11) $y' = 2x + e^x$

12) $y' = 2e^{x+2}$
⇨ $y = 2e^2 \times e^x$이므로 $y' = 2e^2 \times e^x = 2e^{x+2}$

13) $y' = (1+x)e^x$

14) $y' = 4e^x - 5^x \ln 5$

15) $y' = e^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$

16) $y' = e^x + 3$

17) $2(1+x)e^x$
⇨ 곱의 미분법에 의하여
$y' = (2x)'e^x + 2x(e^x)' = 2e^x + 2xe^x = 2(1+x)e^x$

18) $3^x(x\ln 3 + 1)$
⇨ 곱의 미분법에 의하여
$y' = (3^x)'x + 3^x(x)' = 3^x\ln 3 \times x + 3^x = 3^x(x\ln 3 + 1)$

19) $(x+3)e^{x+1}$
⇨ 곱의 미분법에 의하여
$y' = e(x+2)'e^x + e(x+2)(e^x)' = e \times e^x + e(x+2)e^x$
$= (x+3)e^{x+1}$

20) $y' = xe^x(x+2)$
⇨ $y' = (x^2e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'$
$= 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$

21) $y' = 2x^2e^x(x+3)$

22) $y' = 2e^x$
⇨ $y' = (e^{x+\ln 2})' = (e^x \cdot e^{\ln 2})' = 2e^x$

23) $y' = 6^x\{(x-1)\ln 6 + 1\}$

24) $y' = e^x(x^2 + 2x + 4) - 2x$
⇨ $y' = 2x(e^x - 1) + (x^2 + 4)e^x$
$= e^x(x^2 + 2x + 4) - 2x$

25) $y' = (x+1)^2 e^x$

26) $4e$
⇨ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h) - f(1) - \{f(1-2h) - f(1)\}}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2)$
$= 2f'(1) + 2f'(1) = 4f'(1)$
한편, $f(x) = e^x$에서 $f'(x) = e^x$이므로 구하는 극한값은 $4f'(1) = 4e$

27) $-8\ln 2$

28) $\dfrac{\ln 2}{2}$
⇨ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1)$
한편 $f'(x) = 2^x\ln 2 + 3x^2 - 3$이므로 구하는 극한값은 $f'(-1) = 2^{-1}\ln 2 + 3 \times (-1)^2 - 3 = \dfrac{\ln 2}{2}$

29) $2(1-\ln 2)$
⇨ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0) - f(0-2h)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0) - f(0-2h)}{2h} \times 2 = 2f'(0)$
한편 $f'(x) = e^x - 2^x\ln 2$이므로 구하는 극한값은 $2f'(0) = 2(1-\ln 2)$

30) $8\ln 2$
⇨ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$
$f'(x)=2^{x+1}\ln 2$이므로
$2f'(1)=2\times 2^2\times\ln 2=8\ln 2$

31) $4e^3$
⇨ $f'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$이므로 $f'(3)=4e^3$

32) $e^2+4\ln 2$
⇨ $f'(x)=e^x+2^x\ln 2$ $\quad\therefore\ f'(2)=e^2+4\ln 2$

33) $3e^3$

34) 6
⇨ $f'(x)=2xe^{3x}+(3x^2+6)e^{3x}$ 이므로 $f'(0)=6$ 이다.

35) $3+2e^2$
⇨ $f'(x)=3x^2+2e^{2x}$이므로 $f'(1)=3+2e^2$

36) $-\frac{\sqrt{5}}{4}\ln 5$
⇨ $f'(x)=(x^2-x)'\times 5^x+(x^2-x)\times(5^x)'$
$=(2x-1)\times 5^x+(x^2-x)\times 5^x\ln 5$
$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\times 5^{\frac{1}{2}}\ln 5=-\frac{\sqrt{5}}{4}\ln 5$

37) $2e$
⇨ $f'(x)=e^x+x\cdot e^x$이므로 $f'(1)=e+e=2e$

38) $4e$

39) $5\ln 5$
⇨ $f'(x)=5^x\ln 5$이므로 $f'(1)=5\ln 5$

40) $\frac{1}{2}e^2-12$
⇨ $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-6x$이므로
$f'(2)=\frac{1}{2}e^2-12$

41) $18\ln 3$

42) $\frac{\ln 3}{3}-2$
⇨ $f'(x)=3^x\ln 3+2x$이므로
$f'(-1)=3^{-1}\ln 3-2=\frac{\ln 3}{3}-2$

43) $6(1+\ln 2)$
⇨ $f'(x)=(3x)'\times 2^x+3x\times(2^x)'$
$=3\times 2^x+3x\times 2^x\ln 2=3\times 2^x(1+x\ln 2)$
$\therefore f'(1)=6(1+\ln 2)$

44) $1+\ln 2$
⇨ $f'(x)=e^x(1+x)+2^x\ln 2$이므로 $f'(0)=1+\ln 2$

45) $5e$
⇨ $f'(x)=(x^3+1)'e^x+(x^3+1)(e^x)'$
$=3x^2e^x+(x^3+1)e^x=(x^3+3x^2+1)e^x$
$\therefore f'(1)=5e$

46) $-\ln 5$
⇨ $f'(x)=5^x\cdot\ln 5\cdot(2x^3-1)+5^x\cdot 6x^2$
$f'(0)=1\cdot\ln 5\cdot(-1)=-\ln 5$

47) $3+3\ln 3$

48) $e^2+4\ln 2$
⇨ $f'(x)=e^x+2^x\ln 2$ $\quad\therefore\ f'(2)=e^2+4\ln 2$

49) 432
⇨ $f(x)=2^x+3^{x-1}$라 하면
$f(2)=2^2+3^{2-1}=4+3=7$이므로
주어진 식은
$\lim_{x\to 2}\frac{2^x+3^{x-1}-7}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이다.
따라서 함수 $f(x)$를 미분하여 $f'(2)$의 값을 구한다.
즉, $f'(x)=2^x\ln 2+3^{x-1}\ln 3$에서
$f'(2)=2^2\ln 2+3^{2-1}\ln 3=4\ln 2+3\ln 3=k$
따라서 구하는 값은
$e^k=e^{4\ln 2+3\ln 3}=e^{\ln(2^4\cdot 3^3)}=2^4\cdot 3^3=432$

50) $\frac{3}{2}$
⇨ $f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(x-a+1)e^x$이므로
$f'(1)=(2-a)e$
즉 $(2-a)e=\frac{e}{2}$이므로 $2-a=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ a=\frac{3}{2}$

51) e^2

52) $\frac{1}{2}$
⇨ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=10e^2=f'(2)$
$f'(x)=3ax^2e^x+ax^3e^x=(3+x)ax^2e^x$에서
$f'(2)=20ae^2=10e^2$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

53) $a=-2,\ b=2$
⇨ 곱의 미분법에서
$f'(x)=(e^x)'(x^2+ax+b)+e^x(x^2+ax+b)'$
$=e^x(x^2+ax+b)+e^x(2x+a)$
$=e^x\{x^2+(a+2)x+(a+b)\}$
$f'(x)=x^2e^x$이므로

$e^x\{x^2+(a+2)x+(a+b)\}=x^2e^x$ ⋯ ㉠
$e^x>0$이므로 ㉠의 양변을 e^x으로 나누면
$x^2+(a+2)x+(a+b)=x^2$
$a+2=0$, $a+b=0$이므로 $a=-2$, $b=2$

54) $a=-1$, $b=2$
⇨ 곱의 미분법에서
$f'(x)=(x+a)'\times 2^{bx}+(x+a)\times(2^{bx})'$
$=2^{bx}+(x+a)\times 2^{bx}\ln 2^b$
$=\{1+(x+a)\ln 2^b\}\times 2^{bx}$
$=\{1+(x-1)\ln 4\}\times 4^x$
이므로 $a=-1$이고 $2^b=4$에서 $b=2$이다.
$\therefore a=-1$, $b=2$

55) $a=\frac{1}{2e}$, $b=-\frac{1}{2}$
⇨ $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to 1+}(x+b)=\lim_{x\to 1-}axe^x=f(1)$에서
$1+b=ae$ $\quad\therefore b=ae-1$ ⋯ ㉠
또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로
$f'(x)=\begin{cases} ae^x+axe^x & (x<1) \\ 1 & (x>1)\end{cases}$
여기에서 $\lim_{x\to 1+}1=\lim_{x\to 1-}(ae^x+axe^x)=2ae$
$\therefore a=\frac{1}{2e}$ ⋯ ㉡
㉠,㉡에 의하여 $a=\frac{1}{2e}$, $b=-\frac{1}{2}$

56) e^2
⇨ $x=0$에서 연속이므로 $a=b^0-1=1-1=0$
$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<0) \\ b^x\ln b & (x>0)\end{cases}$
$x=0$에서 미분가능하므로 $2=\ln b$, $b=e^2$
$\therefore\ a+b=0+e^2=e^2$

57) 0
⇨ $x=0$에서 연속이므로 $a-1=1$ $\quad\therefore\ a=2$
$f'(x)=\begin{cases} -2e^{-x} & (x<0) \\ 2x+b & (x>0)\end{cases}$이고,
$x=0$에서 미분가능하므로
$-2=b$ $\quad\therefore\ b=-2$
$\therefore\ a+b=2-2=0$

58) $-4e^2$
⇨ 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.
따라서 $(2-a)e^2=2b$
$f'(x)=\begin{cases} e^x+(x-a)e^x & (x>2) \\ b & (x<2)\end{cases}$
$x=2$에서 미분 가능하므로
$e^2+(2-a)e^2=b$
주어진 두 식을 연립하여 a, b를 구하자.
$e^2+2b=b$ $\quad\therefore\ b=-e^2$, $a=4$
$\therefore\ ab=-4e^2$

59) $a=\ln 5$, $b=1$
⇨ $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 0-}(5^x+x^2)$에서
$b=5^0=1$ ⋯ ㉠
또, $f'(0)$의 값이 존재해야 하므로
$f'(x)=\begin{cases} 5^x\ln 5+2x & (x<0) \\ 2x+a & (x>0)\end{cases}$
여기에서 $\lim_{x\to 0+}(2x+a)=\lim_{x\to 0-}(5^x\ln 5+2x)$
$a=5^0\ln 5=\ln 5$ ⋯ ㉡
㉠,㉡에 의하여 $a=\ln 5$, $b=1$

60) e

61) -1
⇨ $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하고, $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1+}(ax^3-1)=\lim_{x\to 1-}(e^{x-1}+b)=f(1)$
$a-1=1+b$ $\quad\therefore\ b=a-2$ $\quad$⋯⋯ ①
$f'(x)=\begin{cases} 3ax^2 & (x>1) \\ e^{x-1} & (x<1)\end{cases}$에서 $f'(1)$이 존재하므로
$\lim_{x\to 1+}(3ax^2)=\lim_{x\to 1-}(e^{x-1})$
$3a=1$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{3}$
이 값을 ①식에 대입하면 $b=-\frac{5}{3}$
따라서 $2a+b=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=-1$

62) $5e$
⇨ 함수 $f(x)$가 미분가능하면 함수 $f(x)$는 연속이므로 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서
$ae^{-1}=3-b$ $\quad$⋯⋯㉠
$f'(x)=\begin{cases} -ae^{-x} & (x<1) \\ 2x-b & (x>1)\end{cases}$
$\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1-}-ae^{-x}=-ae^{-1}$
$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1+}(2x-b)=2-b$
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$-ae^{-1}=2-b$ $\quad$⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{e}{2}$, $b=\frac{5}{2}$
따라서 구하는 값은 $4ab=4\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{5}{2}=5e$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110