개념check

[수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치가 x_0일 때,

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

기본문제

[예제]

1. 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=2t+1$일 때, $t=3$에서 점 P의 위치는? (단, $t\ge 0$)

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

[문제]

2. x좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4t-3t^2$일 때, $t=2$에서 점 P의 위치는? (단, $t\ge 0$)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[예제]

3. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=-3t^2+6t$일 때, $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, $t\ge 0$)

① 23 ② 24
③ 25 ④ 26
⑤ 27

[문제]

4. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=-t^2+4t$일 때, $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, $t\ge 0$)

① $\frac{22}{3}$ ② 8
③ $\frac{26}{3}$ ④ $\frac{28}{3}$
⑤ 10

[예제]

5. 지면으로부터 2 m높이의 단상에서 30 m/s의 속도로 지면과 수직으로 던진 공의 t초 후의 속도가 $v(t)=30-10t$ (m/s)이다. 공을 던진 지 4초가 지났을 때 지면으로부터의 높이는? (단, $0\le t\le 6$)

① 41(m) ② 42(m)
③ 43(m) ④ 44(m)
⑤ 45(m)

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

6. **지면으로부터 $20\,\mathrm{m}$의 높이에서 $20\,\mathrm{m/s}$의 속도로 지면과 수직으로 던진 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=20-10t\,(\mathrm{m/s})$이다. 물체가 최고 높이에 도달하였을 때 지면으로부터의 높이는?**

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

[문제]

7. **다음은 달리는 자동차에 관한 두 학생의 대화이다.**

- 영희: 이 자동차는 $24\,\mathrm{m/s}$의 속도로 달리고 있어.
- 철수: 제동을 건 후 t초 후의 속도는 $v(t)=24-12t\,(\mathrm{m/s})$라고 해.

이 자동차가 제동을 건 후 정지할 때까지 달린 거리는?

① $23(\mathrm{m})$　② $24(\mathrm{m})$　③ $25(\mathrm{m})$　④ $26(\mathrm{m})$　⑤ $27(\mathrm{m})$

평가문제

[스스로 확인하기]

8. **다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?**

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치를 x_0이라 할 때

* 시각 t에서 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^t \boxed{\text{(ㄱ)}}\,dt$$

* 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \boxed{\text{(ㄴ)}}\,dt$$

① (ㄱ) : $v(t)$, (ㄴ) : $v(t)$
② (ㄱ) : $v(t)$, (ㄴ) : $|v(t)|$
③ (ㄱ) : $|v(t)|$, (ㄴ) : $v(t)$
④ (ㄱ) : $|v(t)|$, (ㄴ) : $v(t)+x_0$
⑤ (ㄱ) : $|v(t)|$, (ㄴ) : $|v(t)|$

[스스로 확인하기]

9. **원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4t-t^2$일 때, 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는? (단, $t\geq 0$)**

① 4　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{14}{3}$　④ 5　⑤ $\frac{16}{3}$

[스스로 확인하기]

10. **지면에서 $29.4\,\mathrm{m/s}$의 속도로 지면과 수직으로 던진 공의 t초 후의 속도가**

$$v(t)=29.4-9.8t\ (\mathrm{m/s})$$

일 때, 공을 던진 후 4초 동안 공이 움직인 거리는? (단, $0<t<6$)

① 46　② 47　③ 48　④ 49　⑤ 50

[스스로 확인하기]

11. **원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면 $v(t)=-2t+6$을 만족한다. 이때, $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는?**

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[스스로 확인하기]

12. **지면으로부터 수직으로 날아오르는 드론이 있다. 이 드론이 지면을 출발한 후 t초일 때의 속도를 $v(t)\ \mathrm{m/s}$라 하면**

$$v(t)=\begin{cases}12t & (0\leq t\leq 5)\\ 90-6t & (5<t\leq 15)\end{cases}$$

라 한다. $t=10$일 때, 이 드론이 지면으로부터 떠 있는 높이(m)는?

① 300　② 325　③ 350　④ 375　⑤ 400

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 마무리하기]

13. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면 $v(t)=|t-3|-1$이다. 점 P가 출발한 후 두 번째로 운동 방향을 바꿀 때까지 위치의 변화량은?

① 0　　② 1
③ 2　　④ 3
⑤ 4

[스스로 마무리하기]

14. 도로 위를 서 있는 자동차가 출발하여 $2\,\mathrm{km}$를 달리는 동안은 시각 t분에서의 속도가 $\frac{1}{4}t\ \mathrm{km/min}$이었고, 그 이후로는 속도가 일정하였다. 자동차가 출발한 후 5분 동안 달린 거리는?

① $1(\mathrm{km})$　　② $2(\mathrm{km})$
③ $3(\mathrm{km})$　　④ $4(\mathrm{km})$
⑤ $5(\mathrm{km})$

정답 및 해설

1) [정답] ②
[해설] $t=0$에서의 위치가 $x=0$이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는
$$\int_0^3 (2t+1)\,dt=\left[t^2+t\right]_0^3=12$$

2) [정답] ①
[해설] $t=0$에서의 위치가 $x=1$이므로 $t=2$에서 점 P의 위치는
$$1+\int_0^2 (4t-3t^2)\,dt=1+\left[2t^2-t^3\right]_0^2=1$$

3) [정답] ②
[해설] $v(t)=-3t^2+6t=-3t(t-2)$이므로
$0\le t\le 2$일 때 $v(t)\ge 0$
$2\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$
따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는
$$\int_0^4 |-3t^2+6t|dt$$
$$=\int_0^2 (-3t^2+6t)\,dt+\int_2^4 (3t^2-6t)\,dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^4=4-0+16+4=24$$

4) [정답] ①
[해설] 닫힌구간 $[1, 3]$에서 $v(t)>0$이므로
점 P가 움직인 거리는
$$\int_1^3 |-t^2+4t|\,dt=\int_1^3 (-t^2+4t)dt$$
$$=\left[-\frac{t^3}{3}+2t^2\right]_1^3=9-\frac{5}{3}=\frac{22}{3}$$

5) [정답] ②
[해설] 공을 던진 지 4초가 지났을 때
지면으로부터의 높이는
$$2+\int_0^4 (30-10t)\,dt$$
$$=2+\left[30t-5t^2\right]_0^4$$
$$=42\,(\mathrm{m})$$

6) [정답] ④
[해설] $v(t)=20-10t=0$에서 $t=2$
물체를 수직으로 던진 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로, 지면으로부터의 높이는
$$20+\int_0^2 (20-10t)dt$$
$$=20+\left[20t-5t^2\right]_0^2=40$$

7) [정답] ②
[해설] 정지할 때까지 걸린 시간은 $v(t)=24-12t=0$에 의해 $t=2$이다.
이 때까지 자동차가 달린 거리는
$$\int_0^2 (24-12t)dt=\left[24t-6t^2\right]_0^2=24\,(\mathrm{m})$$

8) [정답] ②
[해설] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치를 x_0이라 할 때
* 시각 t에서 점 P의 위치 x는
$$x=x_0+\int_a^t v(t)\,dt$$
* 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는
$$s=\int_a^b |v(t)|\,dt$$

9) [정답] ⑤
[해설] $t=0$일 때, $x=0$이므로
시각 $t=2$에서 점 P의 위치는
$$\int_0^2 (4t-t^2)dt=\left[2t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

10) [정답] ④
[해설] $v(t)=29.4-9.8t=0$에서 $t=3$
공을 던진 후 3초 후에 물체가 최고 높이에 도달한다.
따라서 구하고자 하는 공이 움직인 거리는
$$\int_0^4 |29.4-9.8t|dt$$
$$=\int_0^3 (29.4-9.8t)dt+\int_3^4 (-29.4+9.8t)dt$$
$$=\left[29.4t-4.9t^2\right]_0^3+\left[-29.4t+4.9t^2\right]_3^4=49$$

11) [정답] ⑤
[해설] $v(t)=0$에서 $t=3$
닫힌구간 $[0, 3]$에서 $v(t)\ge 0$
닫힌구간 $[3, 4]$에서 $v(t)\le 0$
따라서 점 P가 움직인 거리는
$$\int_0^4 |-2t+6|\,dt$$
$$=\int_0^3 (-2t+6)dt+\int_3^4 (2t-6)dt$$
$$=\left[-t^2+6t\right]_0^3+\left[t^2-6t\right]_3^4=10$$

12) [정답] ④
[해설] $\int_0^{10} v(t)\,dt$
$$=\int_0^5 12t\,dt+\int_5^{10} (90-6t)\,dt$$
$$=\left[6t^2\right]_0^5+\left[90t-3t^2\right]_5^{10}=150+(600-375)=375$$

13) [정답] ②

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[해설] $v(t)=\begin{cases}2-t & (t<3)\\ t-4 & (t\geq 3)\end{cases}$이므로

점 P가 처음으로 방향을 바꿀 때는 $t=2$일 때이고, 두 번째로 방향을 바꿀 때는 $t=4$일 때이다.

따라서 구하는 위치의 변화량은

$$\int_0^4 v(t)dt$$

$$=\int_0^4 (|t-3|-1)\,dt$$

$$=\int_0^3 (2-t)dt+\int_3^4 (t-4)dt$$

$$=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_3^4=1$$

14) [정답] ③

[해설] 자동차가 출발하여 2km를 달리는데 걸린 시간을 a분이라 하면

$\int_0^a \frac{1}{4}tdt=2$이므로

$\left[\frac{1}{8}t^2\right]_0^a=2$, $\frac{1}{8}a^2=2$

이때 $a>0$이므로 $a=4$(분)

$t=4$일 때의 속도는 $v(4)=\frac{1}{4}\times 4=1(\mathrm{km/min})$

따라서 5분동안 달린 거리는

$$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^4 \frac{1}{4}t\,dt+\int_4^5 1dt$$

$=2+1=3(\mathrm{km})$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125