2-2-1.접선의 방정식과 평균값 정리_지학사(홍성복)

개념check

[접선의 방정식]

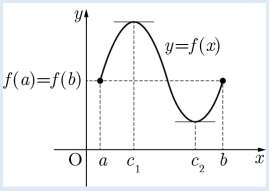
• 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.
(1) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
(2) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

[롤의 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

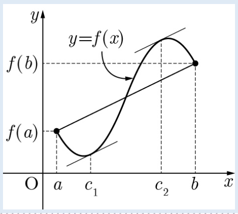


[평균값 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



기본문제

[예제]

1. 곡선 $y=x^2-2x$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은?

① $y=-x$ ② $y=-1$
③ $y=x-2$ ④ $y=2x-3$
⑤ $y=3x-4$

[문제]

2. 곡선 $y=x^3-3$ 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 방정식은?

① $y=11x-17$ ② $y=12x-19$
③ $y=13x-21$ ④ $y=14x-23$
⑤ $y=15x-25$

[예제]

3. 곡선 $y=x^2+x-1$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은?

① $y=3x-4$ ② $y=3x-3$
③ $y=3x-2$ ④ $y=3x-1$
⑤ $y=3x$

[문제]

4. 곡선 $y=x^3+2x+2$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은?

① $y=2x+2$ ② $y=2x+3$
③ $y=2x+4$ ④ $y=2x+5$
⑤ $y=2x+6$

[예제]

5. 원점에서 곡선 $y=x^2+4$에 그은 접선 중 기울기가 음수인 직선의 방정식은?

① $y=-x$ ② $y=-2x$
③ $y=-3x$ ④ $y=-4x$
⑤ $y=-5x$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

6. 점 $(0,\ -3)$에서 곡선 $y=x^2-x-2$에 그은 접선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은?

① $y=x-3$ ② $y=2x-3$
③ $y=3x-3$ ④ $y=4x-3$
⑤ $y=5x-3$

[예제]

7. 함수 $f(x)=x^2-3x+1$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$
③ 1 ④ $\frac{3}{2}$
⑤ 2

[문제]

8. 함수 $f(x)=x^3-6x^2$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[예제]

9. 함수 $f(x)=-x^2+2x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[문제]

10. 함수 $f(x)=x^3-x+1$에 대하여 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1
③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0
⑤ $\frac{1}{2}$

평가문제

[중단원 학습 점검]

11. 곡선 $y=x^3-3x$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은?

① $y=6x-10$ ② $y=7x-12$
③ $y=8x-14$ ④ $y=9x-16$
⑤ $y=10x-18$

[중단원 학습 점검]

12. 함수 $f(x)=x^3+6x+1$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① 0 ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
⑤ 1

[대단원 학습 점검]

13. 곡선 $y=x^3+2$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 10)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라고 할 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① -68 ② -66
③ -64 ④ -62
⑤ -60

[대단원 학습 점검]

14. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=x+1$일 때, 곡선 $y=\{f(x)\}^2$ 위의 x좌표가 2인 점에서의 접선의 방정식은?

① $y=2x+5$ ② $y=4x+1$
③ $y=6x-3$ ④ $y=8x-7$
⑤ $y=10x-11$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

유사문제

15. 함수 $f(x)=x^2-2x+1$에 대하여 구간 $[0,2]$에서 롤의 정리를 만족하는 상수 c의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

16. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+4$에 대하여 구간 $[0,2]$에서 평균값 정리를 만족하는 상수 c의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$

③ 1 ④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{5}{3}$

17. 곡선 $f(x)=x^2+4x-5$ 위의 점 $(2,7)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 0

③ 1 ④ 2

⑤ 3

18. 함수 $f(x)=x^3-12x-2$에 대하여 닫힌구간 $[-3,3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하면?

① -3 ② -2

③ 2 ④ 3

⑤ 4

19. 곡선 $y=x^3-6x^2+12x-3$ 위의 점 $(1,4)$에서의 접선의 방정식은?

① $y=3x+4$ ② $y=3x+1$

③ $y=x+4$ ④ $y=x+1$

⑤ $y=x$

20. 곡선 $y=-2x^2+5x$에 접하고 기울기가 -3인 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면? (단, a, b는 상수)

① 1 ② 2

③ 3 ④ 4

⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 $f'(x)=2x-2$이므로
점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=0$
점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 0이므로
구하는 접선의 방정식은
$y-(-1)=0\times(x-1)$
즉, $y=-1$

2) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
이므로 점 $(2,5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=12$
점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 12이므로
구하는 접선의 방정식은
$y-5=12(x-2)$
즉, $y=12x-19$

3) [정답] ③

[해설] 접점의 좌표를 $(a,\ a^2+a-1)$이라고 하자.
$f(x)=x^2+x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x+1$이므로
이 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+1$
이때 접선의 기울기가 3이므로
$2a+1=3,\ a=1$
따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=3(x-1)$
즉, $y=3x-2$

4) [정답] ①

[해설] 접점의 좌표를 (a, a^3+2a+2)라고 하자.
$f'(x)=3x^2+2$이므로
이 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2+2$
이때 접선의 기울기가 2이므로 $3a^2+2=2$
$a=0$
따라서 접점의 좌표는 $(0, 2)$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=2(x-0)$
즉, $y=2x+2$

5) [정답] ④

[해설] 접점의 좌표를 $(a,\ a^2+4)$라고 하자.
$f(x)=x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로 이 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$
접선의 방정식은 $y-(a^2+4)=2a(x-a)$
즉, $y=2ax-a^2+4$
이 접선이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0=-a^2+4$
즉, $a=-2$ 또는 $a=2$
접선의 기울기가 음수이므로 $a=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=-4x$

6) [정답] ①

[해설] 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-a-2)$라고 하자.
$f(x)=x^2-x-2$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$이므로
이 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-1$
접선의 방정식은 $y-(a^2-a-2)=(2a-1)(x-a)$
즉, $y=(2a-1)x-a^2-2$
이 접선이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로
$-3=-a^2-2$
즉, $a=1$ 또는 $a=-1$
접선의 기울기가 양수이므로 $a=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=x-3\ (\because 2a-1>0)$

7) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)=x^2-3x+1$은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하며
$f(0)=f(3)=1$이다.
그러므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 존재한다.
이때 $f'(x)=2x-3$이므로
$f'(c)=2c-3=0$
$\therefore\ c=\dfrac{3}{2}$

8) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)=x^3-6x^2$은 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하며
$f(0)=f(6)=0$이다.
그러므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 6)$에 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-12x$이므로
$f'(c)=3c(c-4)=0$
$\therefore\ c=4\ (\because 0<c<6)$

9) [정답] ③

[해설] 함수 $f(x)=-x^2+2x$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(0,\ 4)$에서 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+2$이므로
$\dfrac{-8-0}{4-0}=-2c+2$, 즉 $c=2$

10) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-x+1$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-2, 1)$에서

적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$\frac{1-(-5)}{1-(-2)}=3c^2-1$

$3c^2-1=2$

즉 $c=-1$ ($\because -2<c<1$)

11) [정답] ④

[해설] $f(x)=x^3-3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-3$이므로 곡선 위의 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-3=9$

따라서 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=9(x-2)$

$\therefore y=9x-16$

12) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)=x^3+6x+1$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0, 1)$에서

적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0)=1$, $f(1)=8$, $f'(x)=3x^2+6$이므로

$7=3c^2+6$

$c^2=\frac{1}{3}$이므로 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<c<1$)

13) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3+2$라 하면

$f'(x)=3x^2$이므로 곡선 위의 점 (2, 10)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12$

접선의 방정식은 $y-10=12(x-2)$

$y=12x-14$

이 접선과 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3+2=12x-14$에서

$x^3-12x+16=0$

$(x-2)^2(x+4)=0$

$x=2$ 또는 $x=-4$

즉, 점 B의 좌표는 $(-4, -62)$

$\therefore$ 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은 -66

14) [정답] ③

[해설] 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (2, 3)를 지나고 그 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f(2)=3$, $f'(2)=1$

$g(x)=\{f(x)\}^2$으로 놓으면

$g'(x)=2f(x)f'(x)$

이때 x의 좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=2f(2)f'(2)=6$

또, x좌표가 2인 점의 y좌표는

$g(2)=\{f(2)\}^2=9$

이므로 $y=\{f(x)\}^2$ 위의 점 (2, 9)에서의 접선의 방정식은 $y-9=6(x-2)$

$\therefore y=6x-3$

15) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)=x^2-2x+1$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=1$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(c)=2c-2=0$

$\therefore c=1$

16) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x)=x^3-4x^2+4$는 닫힌 구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,2)$에서 미분가능하므로

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$

인 c가 구간 $(0,2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-8x$이므로 $\frac{(8-16+4)-4}{2-0}=3c^2-8c$

$3c^2-8c+4=0$, $(3c-2)(c-2)=0$

그런데 $0<c<2$이므로 $c=\frac{2}{3}$

17) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^2+4x-5$에서 $f'(x)=2x+4$

$f'(2)=4+4=8$

즉 점 $(2,7)$에서의 접선의 방정식은

$y-7=8(x-2)$ $\quad\therefore y=8x-9$

따라서 $a=8$, $b=-9$이므로

$a+b=8-9=-1$

18) [정답] ①

[해설] 평균값 정리에 의해

$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=-3=f'(c)$

이때 $f'(x)=3x^2-12$이므로

$f'(c)=-3$에서 $3c^2-12=-3$

$3c^2=9$, $c^2=3$ $\quad\therefore c=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \alpha\beta=-3$

19) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+12$이므로 $f'(1)=3$

따라서 구하려는 접선의 방정식은

$y=3(x-1)+4$ $\quad\therefore y=3x+1$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

20) [정답] ⑤

[해설] 함수 $f(x)=-2x^2+5x$에서 $f'(x)=-4x+5$

이때 접점의 x좌표를 k라 하면

$-4k+5=-3$, $4k=8$ $\therefore k=2$

$\therefore f(2)=2$

즉 점 $(2,2)$에서의 접선의 방정식은

$y=-3(x-2)+2=-3x+8$

따라서 $a=-3$, $b=8$이므로

$a+b=5$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125