01 곡선의 오목과 볼록

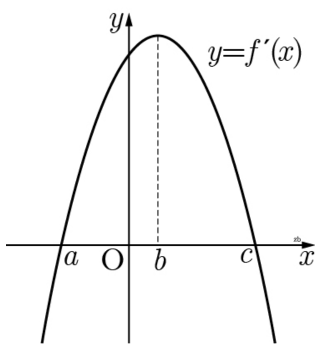
어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에서

(1) 곡선 부분이 $\overline{\mathrm{PQ}}$보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 (또는 위로 오목)하다.

(2) 곡선 부분이 $\overline{\mathrm{PQ}}$보다 항상 위에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록 (또는 아래로 오목)하다.

(3) 오목과 볼록의 판정: 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

◪ **삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)$에 대한 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.**



1. 구간 (a, c)에서 위로 볼록하다. ( )

2. 구간 (a, b)에서 아래로 볼록하다. ( )

◪ **다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하여라.**

3. $y=x^3-6x^2+1$

4. $y=-x^4+2x^3-3$

5. $y=x+2\sin x \ (0<x<2\pi)$

6. $y=\ln(x^2+1)$

7. $y=(x^2-x)e^x$

8. $y=x+2\sin x \ (0<x<2\pi)$

9. $y=xe^x$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

10. $y=x^2+\frac{1}{x}$

11. $y=\frac{1}{3}x^3-4x$

12. $y=x^4-2x^3+4x-5$

◪ 다음 물음에 답하여라.

13. 곡선 $y=2x+\cos x \ (0<x<2\pi)$의 아래로 볼록한 구간을 구하여라.

14. 곡선 $y=x^2\ln x$가 위로 볼록한 구간을 구하여라.

15. 함수 $f(x)=\sin x\cos x \ (0\le x\le\pi)$의 그래프에서 위로 볼록한 구간을 구하여라.

16. 함수 $f(x)=e^x(x^2+4x+2)$의 그래프의 모양이 위로 볼록한 구간을 구하여라.

02 변곡점

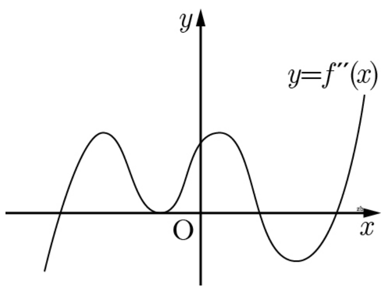
1. 변곡점: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 한다.

2. 변곡점의 판정

함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다

◪ 다음 물음에 답하여라.

17. 다항함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수를 구하여라.



◪ 다음 곡선의 변곡점의 좌표를 구하여라.

18. $y=x^3-3x^2+x-1$

19. $y=x^3-6x^2+10x-3$

20. $y=x^4-6x^2+6$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

21. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

22. $y=x^3-4x$

23. $y=xe^x$

24. $y=xe^x-2e^x$

25. $y=e^x-e^{-x}+2$

26. $y=x^2-2x\ln x$

27. $y=e^x\sin x\ \ (0<x<\pi)$

28. $y=\sin x+\cos x\ \ (0<x<2\pi)$

29. $y=x+\sin x\ \ (0<x<2\pi)$

30. $y=x+\cos x\ \ (0<x<\pi)$

31. $y=\ln(x^2+9)$

32. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

◪ **다음 곡선의 두 변곡점 사이의 거리를 구하여라.**

33. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

34. $f(x)=\ln(x^2+2)^2$

35. $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$

36. $f(x)=2\ln(x^2+1)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 물음에 답하여라.

37. 함수 $f(x)=x+2\cos x\,(0\le x\le 2\pi)$의 변곡점들의 x좌표의 총합을 구하여라.

38. 곡선 $y=(\ln ax)^2$의 변곡점이 직선 $y=ex$ 위에 있을 때, a의 값을 구하여라.

39. 곡선 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$의 변곡점을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+a$라고 할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

40. 곡선 $y=\ln(x^2+2)$의 변곡점의 개수를 a, 극값의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

41. 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+c$의 그래프에서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 18이고, 점 $(-1,0)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

42. 곡선 $y=3xe^{-2x}$의 변곡점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

43. 함수 $f(x)=ax^3+bx^2$에 대하여 점 $(1,\,1)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점일 때, $f(-2)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

44. 곡선 $y=ax^2+x+2\sin x$가 열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 변곡점을 가지기 위한 상수 a의 값의 범위를 $\alpha<a<\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

45. $y=xe^{-x}$의 변곡점에서 그은 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $g(1)$의 값을 구하여라.

46. 함수 $f(x)=ax^2+bx-\ln x$가 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극솟값을 갖고 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하여라.

47. 곡선 $y=3x^4+ax^3+x^2+1$이 변곡점을 갖지 않을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

48. 곡선 $y=ax^2-x+3\cos x$가 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 변곡점을 가지기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

49. 함수 $f(x)=ax^2+bx+\ln x$는 $x=1$에서 극대이고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 3일 때, 극솟값 m이라 할 때, $2m$의 값을 구하여라.

50. 곡선 $y=\frac{1}{2}x^4-4x^3+9x^2-3$의 두 변곡점을 각각 P, Q라 하고, 점 $\mathrm{R}(-1,\ -1)$일 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구하여라.

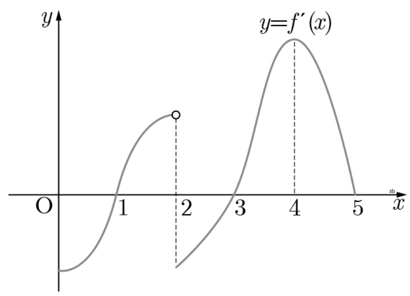
51. 곡선 $y=\ln(x^2+1)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, 점 $(a,\ \ln(a^2+1))$와 이 곡선의 모든 변곡점을 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이를 구하여라.

52. $x>0$일 때, 함수 $f(x)=(\ln x)^2-4\ln x$의 그래프에 대하여 이 함수가 극소인 점을 A라 하고, 변곡점에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

03 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음을 조사하여 그린다.
① 함수의 정의역과 치역
② 좌표축과의 교점
③ 그래프의 대칭성과 주기
④ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
⑥ $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

◪ 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 다음과 같고, $f'(1)=f'(3)=f'(5)=0$, $f''(4)=0$이다. 다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.



53. 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 a의 개수는 2이다. (　　)

54. 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다. (　　)

55. 열린구간 $(2,\ 4)$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이다. (　　)

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

56. $f(x)=x^4-2x^2+1$

57. $f(x)=x^4-4x^3$

58. $f(x)=x-\sqrt{x}$

59. $f(x)=\ln x^2$

60. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

61. $f(x)=x-2\sin x \ (0\le x\le 2\pi)$

62. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

63. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$

64. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$

65. $f(x)=x-\sqrt{3x}$

66. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

67. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

68. $f(x)=\ln(x^2+1)$

69. $f(x)=e^{-x^2}$

70. $f(x)=(1-x)e^x$

71. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

72. $f(x)=x\ln x$

73. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

74. $f(x)=x-\sin x \ (-\pi \le x \le \pi)$

75. $f(x)=x+2\cos x \ (0 \le x \le 2\pi)$

76. $f(x)=x+\sin x \ (0 \le x \le 2\pi)$

77. $f(x)=xe^x$

78. $f(x)=x-x\ln x$

정답 및 해설

1) ×

⇨ 구간 (a, b)에서 $f''(x) > 0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 (b, c)에서 $f''(x) < 0$이므로 위로 볼록하다.(×)

2) ○

⇨ 구간 (a, b)에서 $f''(x) > 0$이므로 아래로 볼록하다.(○)

3) 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 위로 볼록,
구간 $(2,\ \infty)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$이라고 하면
$f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12$
$f''(x) = 0$에서 $x = 2$
이때,
$x < 2$이면 $f''(x) < 0$, $x > 2$이면 $f''(x) > 0$
따라서 곡선 $y = f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(2,\ \infty)$에서 아래로 볼록하다.

4) 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(1,\ \infty)$에서 위로 볼록,
구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 3$이라고 하면
$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$,
$f''(x) = -12x^2 + 12x = -12x(x-1)$
$f''(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$
이때, $x < 0$ 또는 $x > 1$이면 $f''(x) < 0$,
$0 < x < 1$이면 $f''(x) > 0$
따라서 곡선 $y = f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(1,\ \infty)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다.

5) 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록,
구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = x + 2\sin x$라고 하면
$f'(x) = 1 + 2\cos x$,
$f''(x) = -2\sin x$
$f''(x) = 0$에서 $x = \pi\ (\because 0 < x < 2\pi)$
이때, $0 < x < \pi$이면 $f''(x) < 0$,
$\pi < x < 2\pi$이면 $f''(x) > 0$
따라서 곡선 $y = f(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하고, 구간$(\pi,\ 2\pi)$에서 아래로 볼록하다.

6) 구간 $(-\infty,\ -1)$ 또는 $(1,\ \infty)$에서 위로 볼록, 구간 $(-1,\ 1)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = \ln(x^2 + 1)$이라 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1},$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
이때 $x < -1$ 또는 $x > 1$에서 $f''(x) < 0$,
$-1 < x < 1$에서 $f''(x) > 0$이다.
따라서 곡선 $y = f(x)$는 열린구간 $(-\infty, -1)$ 또는 $(1, \infty)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(-1, 1)$에서 아래로 볼록하다.

7) 구간 $(-3, 0)$에서 위로 볼록
구간 $(-\infty, -3)$ 또는 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = (x^2 - x)e^x$이라 하면
$f'(x) = (2x-1)e^x + (x^2-x)e^x = (x^2+x-1)e^x$,

$$f''(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x-1)e^x = (x^2+3x)e^x = x(x+3)e^x$$

$f''(x) = 0$에서 $x = -3$ 또는 $x = 0$
이때 $-3 < x < 0$에서 $f''(x) < 0$,
$x < -3$ 또는 $x > 0$에서 $f''(x) > 0$이다.
따라서 곡선 $y = f(x)$는 열린구간 $(-3, 0)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(-\infty, -3)$ 또는 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

8) 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록
구간 $(\pi, 2\pi)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = x + 2\sin x$라 하면
$f'(x) = 1 + 2\cos x$, $f''(x) = -2\sin x$
$f''(x) = 0$에서 $x = \pi(\because 0 < x < 2\pi)$
이때 $0 < x < \pi$에서 $f''(x) < 0$, $\pi < x < 2\pi$에서 $f''(x) > 0$이다.
따라서 곡선 $y = f(x)$는 열린구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(\pi, 2\pi)$에서 아래로 볼록하다.

9) 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 위로 볼록,
구간 $(-2,\ \infty)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = xe^x$이라고 하면
$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,
$f''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$
$f''(x) = 0$에서 $x = -2$
이때,
$x < -2$이면 $f''(x) < 0$, $x > -2$이면 $f''(x) > 0$
따라서 곡선 $y = f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(-2,\ \infty)$에서 아래로 볼록하다.

10) 구간 $(-1, 0)$에서 위로 볼록
구간 $(-\infty, -1)$ 또는 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$이라 하면

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2},$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3} = \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$$

$f''(x) = 0$에서 $x + 1 = 0$ $\therefore x = -1$
이때 $-1 < x < 0$에서 $f''(x) < 0$,
$x < -1$ 또는 $x > 0$에서 $f''(x) > 0$이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(-1,0)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(-\infty,-1)$ 또는 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록하다.

11) 구간 $(-\infty,0)$에서 위로 볼록
열린구간 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록

⇨ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$라 하면
$f'(x)=x^2-4$, $f''(x)=2x$
$f''(x)=0$에서 $x=0$
이때 $x<0$에서 $f''(x)<0$, $x>0$에서 $f''(x)>0$이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(-\infty,0)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록하다.

12) 구간 $(-\infty,0)$ 또는 $(1,\infty)$에서 아래로 볼록, 구간 $(0,1)$에서 위로 볼록

⇨ $f(x)=x^4-2x^3+4x-5$라 하면
$f'(x)=4x^3-6x^2+4$,
$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
이때 $x<0$ 또는 $x>1$에서 $f''(x)>0$,
$0<x<1$에서 $f''(x)<0$이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(-\infty,0)$ 또는 $(1,\infty)$에서 아래로 볼록하고, 열린구간 $(0,1)$에서 위로 볼록하다.

13) $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$

⇨ 아래로 볼록한 구간은 $y''>0$이니
$y''=-\cos x$
$-\cos x>0$, $\cos x<0$
따라서 아래로 볼록한 구간은 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$이다.

14) $\left(0,\ e^{-\frac{3}{2}}\right)$

⇨ 위로 볼록인 곡선이 되려면
이계도함수 $y''<0$이므로
$y'=x(2\ln x+1)$, $y''=2\ln x+3<0$
$\therefore\ 0<x<e^{-\frac{3}{2}}$

15) $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

⇨ $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$
$$\begin{aligned}f''(x)&=2\cos x(-\sin x)-2\sin x(\cos x)\\&=-4\sin x\cos x\\&=-2\sin 2x\end{aligned}$$
위로 볼록한 구간이므로 $f''(x)<0$일 때
$-2\sin 2x<0$, $\sin 2x>0$
$0<2x<\pi \qquad \therefore\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

16) $(-6,\ -2)$

⇨ $f'(x)=e^x(x^2+4x+2)+e^x(2x+4)$
$=e^x(x^2+6x+6)$
$f'(x)=0 \qquad \therefore\ x=-3\pm\sqrt{3}$
$f''(x)=e^x(x^2+6x+6)+e^x(2x+6)$
$=e^x(x^2+8x+12)$
$f''(x)=0 \qquad \therefore\ x=-6$ 또는 $x=-2$
따라서 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	$-3-\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗		↘		↘

$-6<x<-2$에서 $f''(x)<0$이고 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 위로 볼록하다.

17) 3개

⇨ $f''(x)=0$를 만족하는 해의 좌우에서 부호가 바뀌면 그 점에서 변곡점이 나타난다. 이를 만족하는 해는 3개이다.

18) $(1,-2)$

⇨ $f(x)=x^3-3x^2+x-1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-6x+1$, $f''(x)=6x-6=6(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=1$
이때 $x<1$에서 $f''(x)<0$, $x>1$에서 $f''(x)>0$이다.
따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1,-2)$이다.

19) $(2,\ 1)$

⇨ $f(x)=x^3-6x^2+10x-3$이라고 하면
$f'(x)=3x^2-12x+10$, $f''(x)=6x-12$
$f''(x)=0$에서 $x=2$
이때, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면
$x<2$이면 $f''(x)<0$, $x>2$이면 $f''(x)>0$
이므로 점 $(2,\ 1)$은 곡선 $y=x^3-6x^2+10x-3$의 변곡점이다.

20) $(-1,1),(1,1)$

⇨ $f(x)=x^4-6x^2+6$이라 하면 $f'(x)=4x^3-12x$,
$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)=12(x+1)(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
이때 $x<-1$ 또는 $x>1$에서 $f''(x)>0$,
$-1<x<1$에서 $f''(x)<0$이다.
따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,1),(1,1)$이다.

21) $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

⇨ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$,

$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$에서

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때 $x<-\sqrt{3}$ 또는 $0<x<\sqrt{3}$에서 $f''(x)<0$,

$-\sqrt{3}<x<0$ 또는 $x>\sqrt{3}$에서 $f''(x)>0$이다.

따라서 $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$이다.

22) $(0,0)$

⇨ $f(x)=x^3-4x$라 하면

$f'(x)=3x^2-4$, $f''(x)=6x$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<0$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고

$x>0$이면 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

$f(0)=0$이므로 변곡점의 좌표는 $(0,0)$이다.

23) $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

⇨ $f(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$,

$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(x+2)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

이때 $x<-2$에서 $f''(x)<0$,

$x>-2$에서 $f''(x)>0$이다.

따라서 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

24) $(0, -2)$

⇨ $y'=e^x+xe^x-2e^x=(x-1)e^x$

$y''=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$y''=0$, $xe^x=0$ $\quad\therefore x=0$

따라서 변곡점은 $(0, -2)$이다.

25) $(0,2)$

⇨ $f(x)=e^x-e^{-x}+2$라 하면

$f'(x)=e^x+e^{-x}$, $f''(x)=e^x-e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때 $x<0$에서 $f''(x)<0$, $x>0$에서 $f''(x)>0$이다.

따라서 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0,2)$이다.

26) $(1,1)$

⇨ $f(x)=x^2-2x\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2x-2\ln x-2$, $f''(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

이때 $0<x<1$에서 $f''(x)<0$, $x>1$에서 $f''(x)>0$이다.

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1,1)$이다.

27) $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

⇨ $f(x)=e^x\sin x$라고 하면

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $f''(x)=2e^x\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<\pi)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$이면 $f''(x)>0$,

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$이면 $f''(x)<0$

이므로 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, 즉 $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$은

$y=e^x\sin x$ $(0<x<\pi)$의 변곡점이다.

28) $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

⇨ $f(x)=\sin x+\cos x$라고 하면

$f'(x)=\cos x-\sin x$, $f''(x)=-\sin x-\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$

이때, $x=\frac{3}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<\frac{3}{4}\pi$이면 $f''(x)<0$

$x>\frac{3}{4}\pi$이면 $f''(x)>0$이므로

$\left(\frac{3}{4}\pi, f\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$은

곡선 $y=\sin x+\cos x$의 변곡점이다.

29) (π, π)

⇨ $f(x)=x+\sin x$라 하면

$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=\pi(\because 0<x<2\pi)$

이때, $x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<\pi$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고

$x>\pi$이면 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

$f(\pi)=\pi$이므로 변곡점의 좌표는 (π, π)이다.

30) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

⇨ $f(x)=x+\cos x$라 하면

$f'(x)=1-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}(\because 0<x<\pi)$

이때 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $f''(x)>0$이다.

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$이다.

31) $(-3, \ln 18)$, $(3, \ln 18)$

⇨ $f(x)=\ln(x^2+9)$라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+9}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+9)-2x(2x)}{(x^2+9)^2}=\frac{-2x^2+18}{(x^2+9)^2}$
$=\frac{-2(x+3)(x-3)}{(x^2+9)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

이때, $x=\pm 3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 $x<-3$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고 $-3<x<3$이면 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, $x>3$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

$f(-3)=\ln 18$, $f(3)=\ln 18$이므로 변곡점의 좌표는 $(-3, \ln 18)$과 $(3, \ln 18)$이다.

32) 없다.

⇨ $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$이라 하면

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$f''(x)=0$을 만족하는 x의 값은 없고, 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 변곡점은 없다.

33) 2

⇨ $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\frac{-2(x^2+3)^2+2x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$
$=\frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $x=-1$과 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는 2

34) $2\sqrt{2}$

⇨ $f(x)=\ln(x^2+2)^2=2\ln(x^2+2)$에서

$f'(x)=\frac{4x}{x^2+2}$

$f''(x)=\frac{4(x^2+2)-4x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{4(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$
$=\frac{4(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x^2+2)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

이때, $x=-\sqrt{2}$와 $x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(-\sqrt{2}, 4\ln 2)$, $(\sqrt{2}, 4\ln 2)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

35) $2\sqrt{5}$

⇨ $f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}$,

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$이므로

$f''(x)=0$을 만족하는 $x=\pm 1$이 변곡점이다.

따라서 두 변곡점은 $(1, 2+\ln 2), (-1, -2+\ln 2)$이므로 두 점사이의 거리는 $\sqrt{4+4^2}=2\sqrt{5}$이다.

36) 2

⇨ $f'(x)=\frac{2\cdot(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{4x}{x^2+1}$,

$f''(x)=\frac{4(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
$=\frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $x=-1$과 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(-1, 2\ln 2)$, $(1, 2\ln 2)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$1-(-1)=2$

37) 2π

⇨ $f'(x)=1-2\sin x$, $f''(x)=-2\cos x$

구간 $(0, 2\pi)$에서 $-2\cos x=0$을 만족하는 $x=\frac{\pi}{2}$와 $x=\frac{3\pi}{2}$이므로 이들의 합은 2π이다.

38) e^2

⇨ $f(x)=(\ln ax)^2$이라고 하면 $f'(x)=\frac{2\ln ax}{x}$,

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax\cdot 1}{x^2}=\frac{2-2\ln ax}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{e}{a}$

따라서 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a}, f\left(\frac{e}{a}\right)\right)=\left(\frac{e}{a}, 1\right)$이고, 변곡점은 직선 $y=ex$위에 있으므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$1=e\cdot\dfrac{e}{a}\qquad\therefore a=e^2$

39) 1

⇨ $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$이라고 하면

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(x)=2+\dfrac{2}{x^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

이때, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ f(-1))=(-1,\ 0)$

따라서 변곡점 $(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x+1\qquad\therefore a=1$

40) 3

⇨ $y'=\dfrac{2x}{x^2+2}$이고

$y''=\dfrac{2(x^2+2)-4x^2}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$이다.

따라서 $y''=0$을 만족하는 $x=\pm\sqrt{2}$이고

$y'=0$을 만족하는 $x=0$이므로 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ a+b=3$

41) $a=2,\ b=6,\ c=-4$

⇨ $f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 18이므로

$f'(1)=18\qquad\therefore 3a+2b=18\cdots$ ㉠

점 $(-1,0)$이 변곡점이므로

$f''(-1)=0\qquad\therefore -6a+2b=0\cdots$ ㉡

$f(-1)=0\qquad\therefore -a+b+c=0\cdots$ ㉢

㉠,㉡,㉢을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=6,\ c=-4$

42) $-\dfrac{3}{e^2}$

⇨ $f(x)=3xe^{-2x}$이라고 하면

$f'(x)=3\cdot e^{-2x}+3x\cdot(-2e^{-2x})=(3-6x)e^{-2x}$

$f''(x)=-6\cdot e^{-2x}+(3-6x)\cdot(-2e^{-2x})$

$=12(x-1)e^{-2x}$

이때, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1,\ f(1))$이고,

접선의 기울기는

$f'(1)=(3-6\cdot 1)e^{-2\cdot 1}=-3\cdot e^{-2}=-\dfrac{3}{e^2}$

43) 10

⇨ $f(x)$에 대하여 점 $(1,1)$이 변곡점이므로

$f(1)=a+b=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx$, $f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a+2b=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ f(-2)=-\dfrac{1}{2}(-2)^3+\dfrac{3}{2}(-2)^2=4+6=10$

44) 0

⇨ $y=ax^2+x+2\sin x$

$y'=2ax+1+2\cos x$

$y''=2a-2\sin x$

이때 변곡점을 가지려면 $2a-2\sin x=0$이어야 하므로 $2a=2\sin x$이고 $-2<2a=\sin x<2$이므로

$\therefore\ -1<a<1$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$

45) $3e^{-2}$

⇨ $y'=(1-x)e^{-x}$, $y''=(x-2)e^{-x}$

$x=2$일 때 변곡점 $(2,2e^{-2})$를 갖는다.

따라서 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y=-e^{-2}(x-2)+2e^{-2}=e^{-2}(-x+4)$이다.

$\therefore\ g(1)=3e^{-2}$

46) 2

⇨ $f'(x)=2ax+b-\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=2a+\dfrac{1}{x^2}$

$x=\dfrac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\therefore a+b-2=0\cdots$ ㉠

변곡점의 x의 좌표가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\therefore 2a+2=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1,b=3$

$f(x)=-x^2+3x-\ln x$이므로

$f'(x)=-2x+3-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2x^2+3x-1}{x}$

$=\dfrac{-(2x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=-2+\dfrac{1}{x^2}$에서 $f''(1)<0$

따라서 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=2$

47) $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

⇨ $f(x)=3x^4+ax^3+x^2+1$이라 하면

$f'(x)=12x^3+3ax^2+2x$, $f''(x)=36x^2+6ax+2$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하므로 $f''(x)\ge 0$ 또는 $f''(x)\le 0$이어야 한다. 즉 방정식 $f''(x)=0$이 중근이나 허근을 가져야 한다.

따라서 $f''(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(3a)^2-36\times 2\le 0,\ a^2-8\le 0$

$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\le 0$

$\therefore -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

48) $-\frac{3}{2} \le a < \frac{3}{2}$

⇨ $y' = 2ax - 1 - 3\sin x$이고

$y'' = 2a - 3\cos x = 0$이어야 하므로 $a = \frac{3}{2}\cos x$이다.

따라서 $0 < x < 2\pi$에서 $-1 \le \cos x < 1$이므로

$-\frac{3}{2} \le a = \frac{3}{2}\cos x < \frac{3}{2}$이다.

49) $4\ln 3 - 11$

⇨ $f'(x) = 2ax + b + \frac{1}{x}$, $f''(x) = 2a - \frac{1}{x^2}$

$f''(3) = 0$이므로 $2a - \frac{1}{9} = 0$ $\quad\therefore\ a = \frac{1}{18}$

$f'(1) = 0$이므로 $2a + b + 1 = 0$ $\quad\therefore\ b = -\frac{10}{9}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 10x + 9}{9x}$ $\quad\therefore\ x = 9$

따라서 $x = 9$에서 $f(x)$는 극솟값을 가진다.

$m = f(9) = -\frac{11}{2} + 2\ln 3$ $\quad\therefore 2m = -11 + 4\ln 3$

50) $(1,\ 4)$

⇨ $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 3$이라고 하면

$f'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

$f''(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x-1)(x-3)$

$f''(x) = 0$에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

이때, $x = 1$과 $x = 3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(3,\ \frac{21}{2}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+3-1}{3},\ \frac{\frac{5}{2}+\frac{21}{2}-1}{3}\right) = (1,\ 4)$

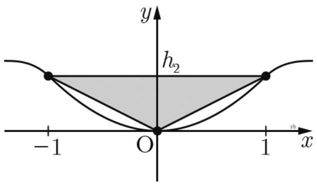
51) $\ln 2$

⇨ $y' = \frac{2x}{x^2+1}$

$x = 0$에서 극값을 가진다.

$y'' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$이므로 변곡점을 구하면

$x = \pm 1$에서 $y'' = 0$이고, 양쪽 부호가 모두 바뀌므로 변곡점은 $(1, \ln 2)$, $(-1, \ln 2)$이다.



세 점이 이루는 다각형은 그림과 같으므로

이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 = \ln 2$이다.

52) $\frac{5}{4}e^3 - \frac{5}{2}e^2$

⇨ $f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x - 2)$, $f''(x) = \frac{2}{x^2}(3 - \ln x)$

$f'(x) = 0$인 극소인 점 $A(e^2,\ -4)$이고,

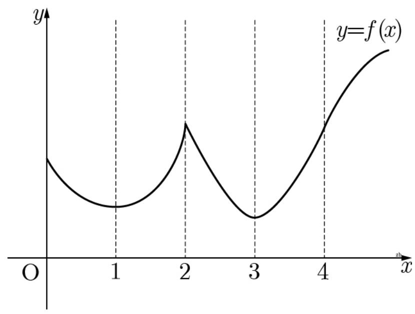
$f''(x) = 0$인 변곱점은 $(e^3,\ -3)$이므로 변곡점에서의 접선의 방정식은 $y = \frac{2}{e^3}(x - e^3) - 3$이므로

$\therefore$ $B\left(\frac{5}{2}e^3, 0\right)$, $C(0,\ -5)$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$= \frac{5}{4}e^3 - \frac{5}{2}e^2$

53) ×

⇨ 곡선 $y = f(x)$의 개형은 다음과 같다.



닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 극값은 3개다.

54) ○

⇨ 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 변곡점은 1개다.

55) ○

⇨ 열린구간 $(2,\ 4)$에서 곡선 $y = f(x)$는 아래로 볼록이다.

56) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$이라고 하면 $f(-x) = f(x)$이므로 y축에 대하여 대칭인 그래프이다.

$f(0) = 1$이므로 좌표축과의 교점은 $(0,\ 1)$이다.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$,

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

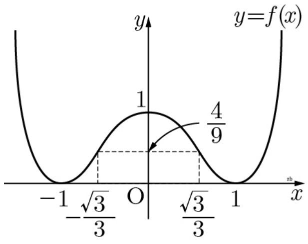
$f''(x) = 0$에서 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

y축에 대하여 대칭이므로 $x \ge 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	↘	$\frac{4}{9}$	↘	0	↗

따라서 함수 $y = x^4 - 2x^2 + 1$의 그래프는 그림과

같다.



57) $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

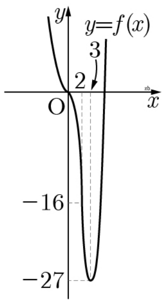
$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-16	↘	-27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



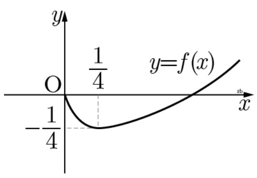
58) $x\geq 0$이고 $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{4}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



59) $x^2\neq 0$이므로 정의역은 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$이다.

$f(x)=\ln x^2$이라고 하면 $f(-x)=f(x)$이므로 y축에 대하여 대칭이다.

$x=0$에서 정의되지 않는 함수이므로 y축과 만나는 점은 없고, $x^2=1$일 때, $f(x)=0$이므로 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 x축과 만난다.

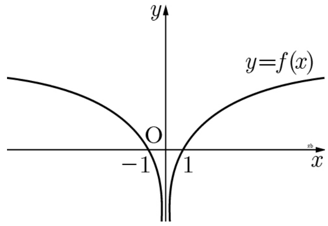
$f'(x)=\dfrac{2}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{2}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$,

$f''(0)=0$인 경우가 없다.

y축에 대하여 대칭이므로 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f''(x)$		$-$
$f(x)$		↗

따라서 함수 $y=\ln x^2$의 그래프는 그림과 같다.



60) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$라고 하면 $f(-x)=-f(x)$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(0)=0$이므로 좌표축과의 교점은 $(0,\ 0)$이다.

$f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $f''(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로

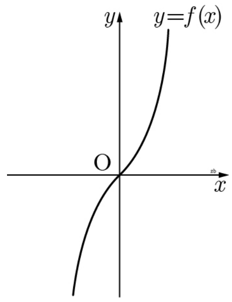
$f'(x)=0$을 만족하는 x는 존재하지 않고,

$f''(x)=0$에서 $x=0$

원점에 대하여 대칭이므로 $x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	↗

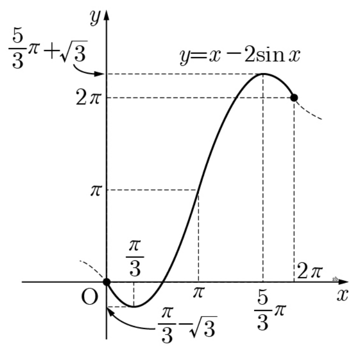
따라서 함수 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$의 그래프는 그림과 같다.



61) $f(x)=x-2\sin x\ \ (0\le x\le 2\pi)$라고 하면
$f'(x)=1-2\cos x$, $f''(x)=2\sin x$이므로
$f'(x)=0$에서 $\cos x=\dfrac{1}{2}$
$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$
$f''(x)=0$에서 $\sin x=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$
$0\le x\le 2\pi$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	0	↘	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π	↗	$\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	2π

따라서 함수 $y=x-2\sin x\ \ (0\le x\le 2\pi)$의 그래프는 그림과 같다.

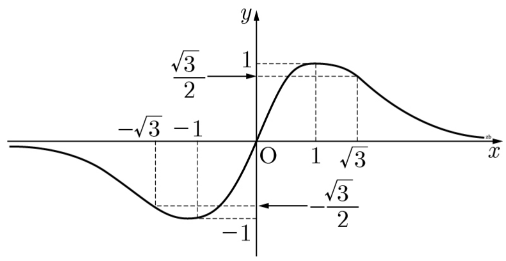


62) $x^2+1\ne 0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.
$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$라고 하면 $f(-x)=-f(x)$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
$f(0)=0$이므로 점 $(0,\ 0)$을 지난다.
$f'(x)=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$
$f''(x)=\dfrac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
$f''(x)=0$에서
$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$
원점에 대하여 대칭이므로 $x\ge 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 변곡점	↗	1 극대	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점	↘

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 그래프는 그림과 같다.



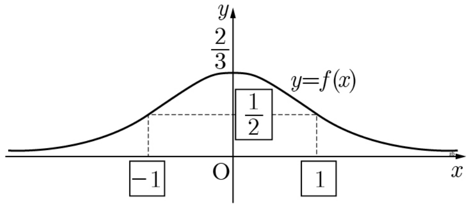
63) 정의역은 실수 전체의 집합이다.
$f(-x)=f(x)$이므로 곡선은 y축에 대하여 대칭이고, $f(0)=\dfrac{2}{3}$이므로 y절편은 $\dfrac{2}{3}$이고, $x^2+3>0$이므로 x축과 만나지 않는다.
$f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2+3)^2}$
$f''(x)=\dfrac{-4(x^2+3)^2+4x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$
$=\dfrac{-4(x^2+3)+16x^2}{(x^2+3)^3}$
$=\dfrac{12(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$
$f'(x)=0$에서 $x=0$, $f''(x)=0$에서 $x=\pm 1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $\dfrac{2}{3}$를 가지고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

이 때, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2+3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3}=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$의 그래프는 그림과 같다.



64) 정의역은 $x\ne 0$인 모든 실수의 집합이다.
$f(-x)=-f(x)$이므로 원점에 대하여 대칭이고,

$x \neq 0$, $x^2+2 \neq 0$이므로 좌표축과 만나지 않는다.

$f(x)=x+\dfrac{2}{x}$에서

$f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{4}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

$f''(x)\neq 0$이므로 변곡점은 없다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

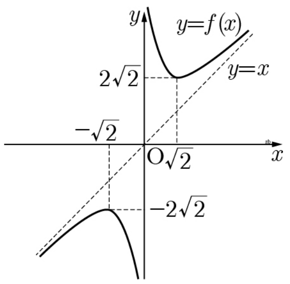
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극대, $x=\sqrt{2}$에서 극소이다.

$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}$이므로 점근선은

$x=0$, $y=x$

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$의 그래프는 그림과 같다.



65) 정의역은 $x \geq 0$인 모든 실수의 집합이고, 대칭성과 주기성은 없다.

$f(x)=0$에서 $\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{3})=0$

$x=0$ 또는 $x=3$이므로

x축과의 교점은 $(0,0),(3,0)$이다.

$f'(x)=1-\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

$f''(x)=\left\{-\dfrac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=\dfrac{3}{4}(3x)^{-\frac{3}{2}}\times 3$

$=\dfrac{3}{4x\sqrt{3x}}$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}=1 \quad \therefore x=\dfrac{3}{4}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 변곡점은 없다.

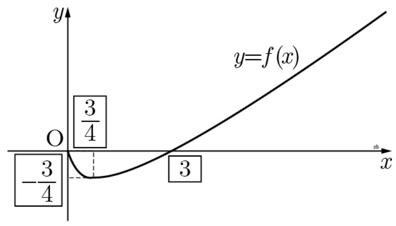
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

$f'(x)$는 $x=\dfrac{3}{4}$에서 극소이고,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 점근선은 없다.

따라서 함수 $f(x)=x-\sqrt{3x}$의 그래프는 그림과 같다.



66) $f'(x)=\dfrac{x^2+3-x\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$

$=-\dfrac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+3)^2-(-x^2+3)\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$

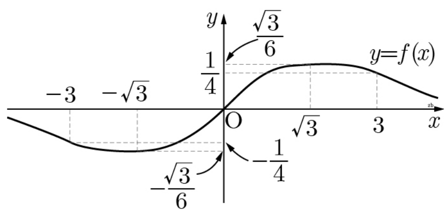
$=\dfrac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}=\dfrac{2x(x+3)(x-3)}{(x^2+3)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	↘	$\frac{1}{4}$

이때 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다. 따라서 함수$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



67) $x^2+1\neq 0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이고, $f(-x)=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f(0)=1$이므로 y축과의 교점은 $(0,\ 1)$이다.

$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$에서

$f'(x)=0$에서 $x=0$

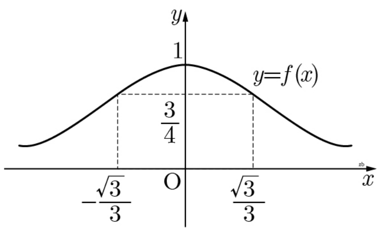
$f''(x)=0$에서 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\dfrac{3}{4}$ 변곡점	↗	1 극대	⤵	$\dfrac{3}{4}$ 변곡점	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$의 그래프는 그림과 같다.



68) $x^2+1>0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이고, $f(-x)=\ln(x^2+1)=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f(0)=0$이므로 y축과의 교점은 $(0,\ 0)$이다.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$,

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

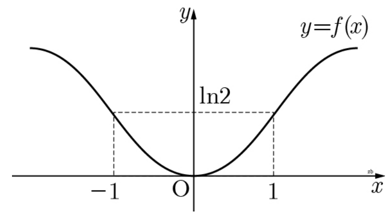
$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤵	$\ln 2$ 변곡점	↘	0 극소	⤴	$\ln 2$ 변곡점	↗

이 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)$의 그래프는 그림과 같다.



69) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

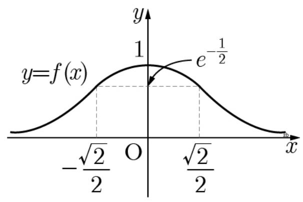
$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $2x^2-1=0$

$\therefore x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$e^{-\frac{1}{2}}$	↗	1	⤵	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘

이때 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



70) $f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

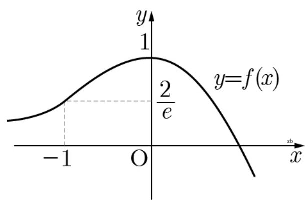
$f''(x)=-e^x-xe^x=(-1-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $-1-x=0$ $\therefore x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	⤴	$\dfrac{2}{e}$	↗	1	⤵

이때 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



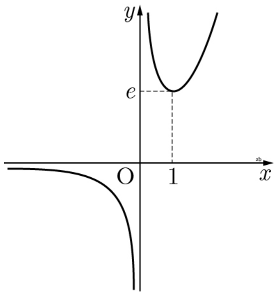
71) $f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$이고,

따라서 $x=1$에서 $y'=0$

$x=1$일 때, $y=e$
이를 증감표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	e	↗

$x\to 0+$일 때, $f(x)\to\infty$
$x\to 0-$일 때, $f(x)\to-\infty$
$x\to-\infty$일 때, $f(x)=0$이므로
그래프는 $x=0$을 점근선으로 가지고 다음과 같다.



72) $x>0$이고 $f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

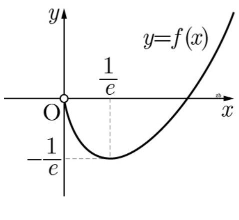
$f''(x)=\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$ $\therefore x=\dfrac{1}{e}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↳	$-\frac{1}{e}$	⤴

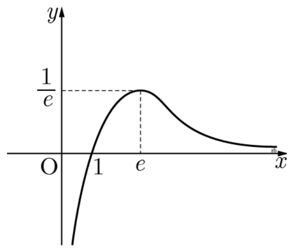
이때 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



73) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$
증감표로 나타내면

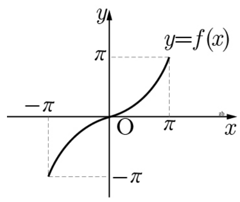
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘



74) $f'(x)=1-\cos x$
$f''(x)=\sin x$
$f'(x)=0$에서 $\cos x=1$ $\therefore x=0(\because -\pi\le x\le\pi)$
$f''(x)=0$에서 $\sin x=0$
$\therefore x=-\pi$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\pi$
$(\because -\pi\le x\le\pi)$

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\pi$	↱	0	⤴	π

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



75) 정의역은 $0\le x\le 2\pi$인 모든 실수의 집합이고, 대칭성과 주기성은 없다.
$f(0)=2$이므로 y절편은 2이다.
$f'(x)=1-2\sin x$, $f''(x)=-2\cos x$에서

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

함수의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

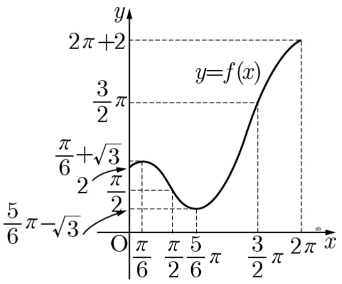
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↱	극대	⤵	변곡점	↳

x	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	극소	⤴	변곡점	↱	↱

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이고,

변곡점은 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

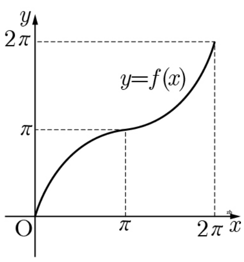
따라서 함수 $f(x)=x+2\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



76) 정의역은 $0 \le x \le 2\pi$인 모든 실수의 집합이고, $f(-x)=-f(x)$이므로 원점에 대하여 대칭이다.
$f(0)=0$이므로 곡선은 원점을 지난다.
$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$
$f'(x)=0$에서 $x=\pi$이지만, 그 좌우에서 $f'(x) \ge 0$이므로 극대, 극소인 점은 없다.
$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$이다.
증감표를 나타내면

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗	변곡점	↗	2π

변곡점은 (π, π)이고, 함수 $f(x)=x+\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



77) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 이 함수의 그래프는 대칭성과 주기성이 없다.
$f(0)=0$이므로 곡선은 원점을 지난다.
$f'(x)=e^x(1+x)$, $f''(x)=e^x(2+x)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$
$f''(x)=0$에서 $x=-2$
증감표로 나타내면

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗	0	↗

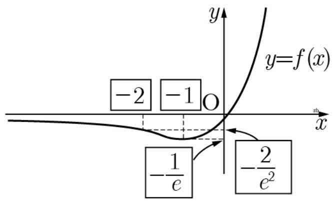
$f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, 극솟값은 $-\frac{1}{e}$이다.

변곡점은 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

이 때, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to\infty}(-te^{-t}) = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=0$,

$\lim_{x\to\infty} xe^x=\infty$이므로 $x<0$일 때, 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프는 그림과 같다.



78) 정의역은 $x>0$인 실수 전체의 집합이고, $f(e)=0$이므로 x축과의 교점은 $(e, 0)$이다.

$f'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$, $f''(x)=-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이고, $f''(x)<0$이므로 변곡점은 없다.
증감표로 나타내면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘	0	↘

$f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극댓값은 1이다
이때 $\lim_{x\to\infty}(x-x\ln x)=-\infty$이므로
함수 $f(x)=x-x\ln x$의 그래프는 그림과 같다.