



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-02-18

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 중복순열

- (1) 중복순열 : 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 순열을 중복순열이라 한다.
- (2) 중복순열의 수 : 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복순열의 수를 ${}_n\Pi_r$ 와 같이 나타낸다.
- (3) ${}_n\Pi_r = n \times n \times n \times \cdots \times n = n^r$

■ 다음 값을 구하여라.

1. ${}_3\Pi_3$

2. ${}_4\Pi_0$

3. ${}_5\Pi_0$

4. ${}_7\Pi_1$

5. ${}_3\Pi_2$

6. ${}_2\Pi_4$

7. ${}_2\Pi_3$

8. ${}_2\Pi_5$

9. ${}_3\Pi_5$

10. ${}_4\Pi_2$

11. ${}_6\Pi_1$

12. ${}_7\Pi_2$

■ 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r 의 값을 구하여라.

13. ${}_n\Pi_3 = 64$

14. ${}_3\Pi_r = 81$

15. ${}_2\Pi_r = 128$

16. ${}_n\Pi_3 = 125$

17. ${}_n\Pi_5 = 243$

18. ${}_4P_3 + {}_n\Pi_3 = 88$

19. $4 \cdot {}_n\Pi_2 = 5 \cdot {}_5P_2$

▣ 다음을 중복순열 기호로 나타내어라.

20. A, B, C 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

21. 사과, 배, 자몽 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

22. a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

23. 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

▣ 다음 경우의 수를 구하여라.

24. 세 명의 학생이 ○, × 문제에 답할 때 나올 수 있는 경우의 수

25. 3명의 학생이 특별활동 시간에 방송반, 서예반, 문예반, 컴퓨터반 중 한 반에 가입하는 경우의 수

26. 서로 다른 4개의 물건을 세 상자 A, B, C 에 넣는 경우의 수 (단, 빈 상자가 있을 수 있다.)

27. 다섯 명의 학생이 ○, × 문제에 답할 때 나올 수 있는 경우의 수

28. 3명의 학생이 방과 후 수업으로 개설된 요가, 자전거, 수학, 영어 수업 중에서 한 가지를 택하는 경우의 수

29. ○, ×로 답하는 5개의 문제에 임의로 답을 하는 모든 경우의 수

30. 3장의 편지를 A, B, C, D 네 봉투 중 어느 하나를 선택하여 넣는 경우의 수

31. 3명의 학생이 A, B, C 세 모둠 중 어느 하나를 선택하는 경우의 수

32. 3명의 학생이 A, B, C, D 네 팀 중 어느 하나를 선택하는 경우의 수

33. 2가지 부호 \cdot 와 $-$ 에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 일렬로 배열하여 만들 수 있는 신호의 개수

34. 네 가지 부호 ●, ◆, ■, ▲를 중복 사용하여 5자리의 부호를 만드는 경우의 수

35. 빨간색, 파란색, 보라색의 3가지 깃발이 있을 때, 이 깃발을 한 개씩 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수

36. 4명의 친구 A, B, C, D 가 3개의 숙소 201호, 202호, 203호에 투숙하는 경우의 수 (단, 빈 방이 있을 수 있다.)

37. 4명의 유권자가 2명의 후보 중에서 한 명의 후보에게 각각 투표하는 경우의 수 (단, 투표지에는 유권자의 이름이 공개되고, 무효표는 없는 것으로 한다.)

02 중복순열을 이용하는 경우의 수

- (1) 자연수의 개수 : n 개의 서로 다른 숫자에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 r 자리의 자연수의 개수는
- ① 0을 포함하지 않는 경우 $\Rightarrow {}_n\Pi_r = n^r$
 - ② 0을 포함하는 경우 \Rightarrow 최고자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 수이고 나머지 자리의 숫자는 중복순열의 수를 이용하여 계산한다.
- (2) 함수의 개수 : 두 집합 X, Y 에 대하여 $n(X)=r, n(Y)=n$ 일 때, X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_n\Pi_r = n^r$ 이다.

■ 다음 경우의 수를 구하여라.

38. 중복을 허락하여 두 개의 숫자 7, 9로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수
39. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수
40. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수
41. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수
42. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수
43. 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수
44. 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 짝수의 개수
45. 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 자리 자연수를 만들 때, 200보다 큰 자연수의 개수
46. 중복을 허락하여 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5로 네 자리 자연수를 만들 때, 2000보다 큰 자연수의 개수
47. 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 3200보다 큰 자연수의 개수
48. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 0, 1, 2로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수
49. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 0, 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수
50. 중복을 허락하여 세 개의 숫자 0, 1, 2로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수
51. 중복을 허락하여 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수
52. 중복을 허락하여 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

53. 중복을 허락하여 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중에서 짝수의 개수

54. 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 정수 중 4의 배수의 개수

▣ 다음 경우의 수를 구하여라.

55. 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수

56. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수

57. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수

58. 두 집합 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{p, q, r\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수

59. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수

60. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수

61. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 를 정의역, Y 를 공역으로 하는 함수의 개수

62. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수

63. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 $f(3) = b$ 인 함수의 개수

64. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수

65. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 $f(a) = 2$ 인 함수의 개수

66. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $Y = \{0, 1, 2\}$ 로의 함수 f 중에서 치역이 $\{1, 2\}$ 인 함수 f 의 개수

67. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 A 로 가는 함수 f 중에서 $f(1) + f(2) = 3$ 을 만족하는 함수 f 의 개수

68. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서 집합 $Y = \{a, b, c\}$ 로의 함수 중에서 공역과 치역이 같은 함수의 개수

69. 두 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중에서 치역이 Y 인 함수의 개수



정답 및 해설

1) 27

$$\Rightarrow {}_3P_3 = 3^3 = 27$$

2) 1

$$\Rightarrow {}_4P_0 = 4^0 = 1$$

3) 1

$$\Rightarrow {}_5P_0 = 5^0 = 1$$

4) 7

$$\Rightarrow {}_7P_1 = 7^1 = 7$$

5) 9

$$\Rightarrow {}_3P_2 = 3^2 = 9$$

6) 16

$$\Rightarrow {}_2P_4 = 2^4 = 16$$

7) 8

$$\Rightarrow {}_2P_3 = 2^3 = 8$$

8) 32

$$\Rightarrow {}_2P_5 = 2^5 = 32$$

9) 243

$$\Rightarrow {}_3P_5 = 3^5 = 243$$

10) 16

$$\Rightarrow {}_4P_2 = 4^2 = 16$$

11) 6

$$\Rightarrow {}_6P_1 = 6^1 = 6$$

12) 49

$$\Rightarrow {}_7P_2 = 7^2 = 49$$

13) 4

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}_nP_3 &= 64 \text{ 이므로 } n^3 = 64 \\ \therefore n &= 4 \end{aligned}$$

14) 4

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}_3P_r &= 81 \text{ 이므로 } 3^r = 81 \\ \therefore r &= 4 \end{aligned}$$

15) 7

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}_2P_r &= 128 \text{ 이므로 } 2^r = 128 \\ \therefore r &= 7 \end{aligned}$$

16) 5

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}_nP_3 &= 125 \text{ 이므로 } n^3 = 125 \\ \therefore n &= 5 \end{aligned}$$

17) 3

18) 4

19) 5

20) ${}_3P_2$ 21) ${}_3P_4$ 22) ${}_4P_2$ 23) ${}_3P_3$

24) 8

\Rightarrow 서로 다른 ○, ×에 대하여 세 사람이 각자 답할 수 있으므로 이것은 2개 중 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_2P_3 = 2^3 = 8 \text{ 가 지 다.}$$

25) 64

\Rightarrow 서로 다른 4개의 반에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4P_3 = 4^3 = 64 \text{ 가 지 다.}$$

26) 81

\Rightarrow 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수이다.

$$\text{따라서 } {}_3P_4 = 3^4 = 81 \text{ 가 지 다.}$$

27) 32

$$\Rightarrow {}_2P_5 = 2^5 = 32 \text{ 가 지}$$

28) 64

29) 32

\Rightarrow 구하는 경우의 수는 ○, ×의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수이므로

$${}_2P_5 = 2^5 = 32$$

30) 64

$$\Rightarrow {}_4P_3 = 4^3 = 64 \text{ 가 지}$$

31) 27

\Rightarrow A, B, C 세 모둠 중 세 명의 학생들이 각각 선택할 모둠 세 개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3^3 = 27$ 가 지 다.

32) 64

$$\Rightarrow {}_4P_3 = 4^3 = 64 \text{ 가 지}$$

33) 32

\Rightarrow 2가지 부호가 중복이 가능하므로

구하는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$$\therefore {}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

34) 1024

35) 81

⇒ 3가지 깃발이 중복이 가능하므로 구하는 신호의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$$\therefore {}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

36) 81

⇒ 서로 다른 3개의 방에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

37) 16

⇒ 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

38) 4

⇒ 중복을 허락하여 두 개의 숫자 7, 9 중 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$ 가지

39) 9

⇒ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9\text{가지}$$

40) 27

⇒ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$ 가지

41) 81

⇒ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 4개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$ 가지

42) 243

⇒ 중복을 허락하여 세 개의 숫자 1, 2, 3 중 5개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$ 가지

43) 64

⇒ 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

44) 250

⇒ 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4의 2가지
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는

경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$2 \times 125 = 250$$

45) 48

46) 500

47) 112

⇒ 3200보다 큰 수는

32□□, 33□□, 34□□, 4□□□의 꼴이다.

(i) 32□□, 33□□, 34□□의 꼴인 자연수의 개수
각각의 경우에 대하여 십의 자리와 일의 자리에는 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$3 \times {}_4\Pi_2 = 3 \times 4^2 = 48$$

(ii) 4□□□의 꼴인 자연수의 개수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(i),(ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$$48 + 64 = 112$$

48) 6

⇒ 십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지,
일의 자리에는 0, 1, 2 중 어느 하나가 올 수 있으므로 3가지다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$ 가지다.

49) 18

⇒ 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지,
나머지 두 자리에는 0, 1, 2 중 중복을 허락하여 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9\text{가지다.}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 9 = 18$ 가지다.

50) 54

⇒ 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지,
나머지 세 자리에는 0, 1, 2 중 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27\text{가지다.}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 27 = 54$ 가지다.

51) 48

⇒ 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 3가지,
나머지 두 자리에는 0, 1, 2, 3 중 중복을 허락하여 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16\text{가지다.}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 16 = 48$ 가지다.

52) 500

⇒ 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 4가지,
나머지 세 자리에는 0, 1, 2, 3, 4 중 중복을
허락하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로
 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$ 가지다.
따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 125 = 500$ 가지다.

53) 1500

54) 160

55) 9

⇒ 집합 X 의 각 원소는 a, b, c 중 어느 하나에
대응되면 되고 이는 3개 중 중복을 허락하여 2개를
뽑아 나열하는 것과 같다. 따라서 함수의 개수는
 ${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$ 이다.

56) 81

⇒ ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

57) 64

⇒ ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

58) 81

⇒ 함수의 개수는 Y 의 3개의 원소 p, q, r 에서
중복을 허용하여 4개를 택하여 X 의 4개의 원소
 a, b, c, d 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

59) 64

⇒ 함수의 개수는 Y 의 4개의 원소 a, b, c, d 에서
중복을 허용하여 3개를 택하여 X 의 3개의 원소
1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

60) 243

⇒ ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

61) 625

⇒ $f(1)$ 이 될 수 있는 값은 공역 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의
원소 중 하나이다. 따라서 5가지가 가능하다.
 $f(2), f(3), f(4)$ 또한 마찬가지로 5가지가 가능하다.
이는 결국 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허용해서 4개를 골라
나열하는 경우의 수이므로
 ${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$ 개의 함수가 가능하다.

62) 125

⇒ X 에서 Y 로의 함수의 개수는 $5^3 = 125$ 개다.

63) 64

⇒ $f(3) = b$ 이므로 3에 b 를 대응시키면
 Y 의 4개의 원소 a, b, c, d 에서 중복을 허용하여
3개를 택하여 X 의 3개의 원소 1, 2, 4에
대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

64) 60

⇒ 일대일함수의 개수는 Y 의 5개의 원소
 a, b, c, d, e 에서 서로 다른 3개를 택하여
 X 의 3개의 원소 1, 2, 3에 대응시키는
경우의 수와 같으므로
 ${}_5P_3 = 60$

65) 16

66) 14

⇒ X 에서 $\{1, 2\}$ 로의 함수의 개수는
 ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$ 개다.

이때, 정의역의 모든 원소가 1 또는 2로 대응되는
경우는 제외되어야 한다.
따라서 구하는 함수의 개수는 $16 - 2 = 14$ 개다.

67) 250

⇒ (i) $f(1) = 1, f(2) = 2$ 인 경우, ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$ 개
(ii) $f(1) = 2, f(2) = 1$ 인 경우, ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$ 개
따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는
 $125 + 125 = 250$ 개다.

68) 540

⇒ X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 ${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$

이때 치역이 $\{x, y\}$ 또는 $\{y, z\}$ 또는 $\{z, x\}$ 인
함수의 개수는 $3 \cdot ({}_2\Pi_6 - 2) = 3 \cdot 62 = 186$

또, 치역이 $\{x\}$ 또는 $\{y\}$ 또는 $\{z\}$ 인 함수의 개수는
3이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는
 $729 - (186 + 3) = 540$

69) 540

⇒ X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 Y 의 원소 1, 2, 3의 3개에서 6개를 택하는
중복순열의 수와 같으므로
 $m = {}_3\Pi_6 = 729$

(i) 치역의 원소가 2개인 경우

치역이 $\{1, 2\}$ 인 함수의 개수는 치역의 원소 1, 2의
2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수에서 치역이
 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 인 함수의 개수를 빼면 되므로
 ${}_2\Pi_6 - 2 = 2^6 - 2 = 62$

치역이 $\{1, 3\}$ 또는 $\{2, 3\}$ 인 함수의 개수도 각각
62개 이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는
 $62 \times 3 = 186$ 이다.

(ii) 치역의 원소가 1개인 경우

치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 또는 $\{3\}$ 인 함수의 개수는
3

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는
 $729 - (186 + 3) = 540$ 이다.