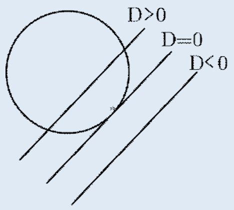
개념check

[원과 직선의 위치 관계]

원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는
이차방정식 $x^2+(mx+n)^2=r^2$
즉, $(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$의 판별식 D의 부호에 따라

- $D>0$ ⇔ 서로 다른 두 점에서 만난다.
- $D=0$ ⇔ 한 점에서 만난다.(접한다)
- $D<0$ ⇔ 만나지 않는다.



[기울기가 주어진 원의 접선의 방정식]

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

[원 위의 한 점에서의 접선의 방정식]

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$

기본문제

[예제]

1. **원 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$과 직선 $y=2x+k$이 한 점에서 만날 때, 가능한 모든 k의 값의 합은?**

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

[문제]

2. **원 $x^2+y^2=16$과 직선 $3x-y+a=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?**

① $a<4\sqrt{10}$　② $-2\sqrt{10}<a<2\sqrt{10}$　③ $-4\sqrt{10}<a$　④ $-4\sqrt{10}<a<4\sqrt{10}$　⑤ $-4<a<4$

[예제]

3. **원 $x^2+y^2=25$와 직선 $4x-3y+k=0$이 서로 접할 때, 양수 k의 값을 구하면?**

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

[문제]

4. **원 $x^2+y^2=5$와 직선 $x+2y=k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 개수는?**

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

[문제]

5. **원 $x^2+y^2=20$과 접하고 직선 $x-2y+4=0$과 수직인 직선이 $(0, b)$를 지날 때, 양수 b의 값을 구하면?**

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[문제]

6. **원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은?**

① $x+3y-10=0$　② $x-3y+10=0$　③ $3x+y+10=0$　④ $x-3y-10=0$　⑤ $3x+y-10=0$

[예제]

7. 점 $(0,5)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선 중 기울기가 양수인 접선의 방정식은?

① $y=-\frac{3}{4}x+5$　　② $y=\frac{4}{3}x+5$

③ $y=\frac{3}{4}x+5$　　④ $y=\frac{4}{3}x-5$

⑤ $y=-\frac{4}{3}x-5$

[문제]

8. 점 $(4,2)$에서 $x^2+y^2=4$에 그은 접선 중 기울기가 양수인 접선의 방정식은?

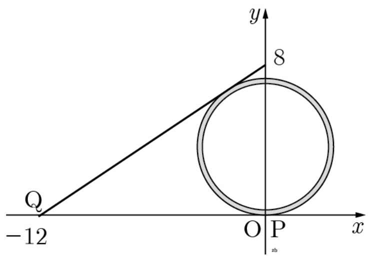
① $y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$　　② $y=-\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

③ $y=-\frac{3}{4}x-\frac{10}{3}$　　④ $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

⑤ $y=-\frac{3}{4}x-\frac{10}{3}$

[문제]

9. 다음 그림은 지름의 길이가 8인 원 모양의 구조물을 지면에 수직으로 세우기 위하여 구조물에 접하도록 지지대를 설치한 모습을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 구조물과 지지대가 지면과 만나는 지점을 각각 P, Q라고 하면 $\mathrm{P}(0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(-12,\ 0)$일 때, 지지대를 나타내는 직선의 방정식을 구하면? (단, 구조물과 지지대의 두께는 무시한다.)



① $y=\frac{1}{2}x+9$　　② $y=\frac{1}{3}x+9$

③ $y=\frac{2}{3}x+9$　　④ $y=0$

⑤ $y=\frac{3}{4}x+9$

평가문제

[중단원 마무리]

10. 원 $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$과 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, m의 범위를 구하면?

① $-\frac{1}{\sqrt{3}}<m<\frac{1}{\sqrt{3}}$　　② $m<-\frac{1}{\sqrt{3}}$

③ $\frac{1}{\sqrt{3}}<m$　　$-\frac{1}{\sqrt{3}}<m$

⑤ $m<\frac{1}{\sqrt{3}}$

[중단원 마무리]

11. 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(2,2\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은?

① $\sqrt{3}x-y-8=0$　　② $x+\sqrt{3}y+8=0$

③ $\sqrt{3}x-y+8=0$　　④ $x+\sqrt{3}y-8=0$

⑤ $\sqrt{3}x+y+8=0$

[중단원 마무리]

12. 점 $(-2,1)$을 지나는 직선이 원의 방정식 $(x-2)^2+(y+1)^2=20$에 접할 때, 직선의 방정식의 기울기를 구하면?

① 1　　② 2

③ 3　　④ 4

⑤ 5

[중단원 마무리]

13. 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=9$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 수직이등분선이 $(a,0)$을 지날 때, a의 값을 구하면?

① 1　　② 2

③ 3　　④ 4

⑤ 5

[중단원 마무리]

14. 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=16$ 위의 점과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리의 최댓값은?

① 2　　② 4

③ 6　　④ 8

⑤ 10

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[중단원 마무리]

15. 원 $x^2+y^2-4x-16=0$ 위의 점 $(4,4)$에서의 접선이 점 $(a,0)$을 지날 때, a의 값을 구하면?

① 10 ② 12
③ 14 ④ 16
⑤ 18

[중단원 마무리]

16. 점 $(0,3)$에서 원 $x^2+y^2-8x-10y+31=0$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하면?

① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

[중단원 마무리]

17. 두 직선 $y=-2x-9$, $y=-2x+1$에 동시에 접하고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?
(단, 원의 중심의 x좌표는 정수이다.)

① $(x+1)^2+(y-2)^2=5$
② $(x+1)^2+(y+2)^2=5$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=5$
④ $(x+2)^2+(y+1)^2=5$
⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

[중단원 마무리]

18. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ -4)$과 원 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $5+5\sqrt{5}$ ② $10+10\sqrt{5}$
③ $15+15\sqrt{5}$ ④ $20+20\sqrt{5}$
⑤ $25+25\sqrt{5}$

[대단원 마무리]

19. 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$와 직선 $3x+4y+5=0$이 만나는 점을 A, B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하면?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

[대단원 마무리]

20. 원 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 위의 점 A와 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=9$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{13}-2$ ② $2\sqrt{13}-4$
③ $2\sqrt{13}+2$ ④ $2\sqrt{13}+4$
⑤ $2\sqrt{13}+5$

[대단원 마무리]

21. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$과 직선 $3x+2y+k=0$이 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-12\le k\le 12$ ② $-13\le k\le 13$
③ $-14\le k\le 14$ ④ $-15\le k\le 15$
⑤ $-16\le k\le 16$

[대단원 마무리]

22. 점 $(0,3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$
③ $\dfrac{17\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{17\sqrt{3}}{3}$
⑤ $\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$

[대단원 마무리]

23. 점 $(a,0)$에서 원 $x^2+y^2=16$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 a의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$
③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$
⑤ $5\sqrt{2}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ③
[해설] 원의 중심인 $(-2,3)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3와 같아야 하므로
$\frac{|k-7|}{\sqrt{5}}=3$, $|k-7|=3\sqrt{5}$
$k=7+3\sqrt{5}$ 또는 $k=7-3\sqrt{5}$
따라서 k의 값의 합은 14

2) [정답] ④
[해설] 원의 중심인 원점과 직선 $3x-y+a=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 4보다 작아야 하므로
$\frac{|a|}{\sqrt{10}}<4$, $|a|<4\sqrt{10}$
$-4\sqrt{10}<a<4\sqrt{10}$

3) [정답] ⑤
[해설] 원의 중심인 $(0,0)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 5와 같아야 하므로
$\frac{|k|}{5}=5$, $|k|=25$
$k=25$ 또는 $k=-25$
따라서 $k>0$이므로 $k=25$

4) [정답] ⑤
[해설] 원의 중심인 원점과 직선 $x+2y=k$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로
$\frac{|-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|k|<5$
$-5<k<5$
따라서 정수 k는 총 9개

5) [정답] ⑤
[해설] $x-2y+4=0$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $x-2y+4=0$과 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$
원의 중심인 원점과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{5}$와 같아야 하므로
$\frac{|-k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, $|k|=10$
$k=10$ 또는 $k=-10$
그러므로 $2x+y-10=0$은 $(0,10)$을 지나고, $2x+y+10=0$은 $(0,-10)$을 지난다.
따라서 $b>0$이므로 $b=10$

6) [정답] ①
[해설] 원 위의 점 $(1,3)$에서의 접선의 방정식은
$x+3y=10$, 즉 $x+3y-10=0$

7) [정답] ②
[해설] 접점을 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=9$ …… ㉠
접선 ㉠은 점 $(0,5)$을 지나므로
$5y_1=9$, 즉 $y_1=\frac{9}{5}$
또 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=9$ …… ㉡
$y_1=\frac{9}{5}$을 ㉡에 대입하면
$x_1^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2=9$, 즉 $x_1^2-\frac{144}{25}=0$
$\left(x_1+\frac{12}{5}\right)\left(x_1-\frac{12}{5}\right)=0$,
$x_1=\frac{12}{5}$, $y_1=\frac{9}{5}$ 또는 $x_1=-\frac{12}{5}$, $y_1=\frac{9}{5}$
구하는 접선의 방정식은
$\frac{12}{5}x+\frac{9}{5}y=9$ 또는 $-\frac{12}{5}x+\frac{9}{5}y=9$
즉 $y=\frac{4}{3}x+5$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+5$
따라서 접선의 기울기는 양수이므로
$y=\frac{4}{3}x+5$

8) [정답] ④
[해설] 접점을 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=4$ …… ㉠
접선 ㉠은 점 $(4,2)$을 지나므로
$4x_1+2y_1=4$, 즉 $y_1=-2x_1+2$
또 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=4$ …… ㉡
$y_1=-2x_1+2$을 ㉡에 대입하면
$x_1^2+(-2x_1+2)^2=4$, 즉 $5x_1^2-8x_1=0$
$x_1(5x_1-8)=0$,
$x_1=0$, $y_1=2$ 또는 $x_1=\frac{8}{5}$, $y_1=-\frac{6}{5}$
구하는 접선의 방정식은
$2y=4$ 또는 $\frac{8}{5}x-\frac{6}{5}y=4$
즉 $y=2$ 또는 $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$
따라서 접선의 기울기는 양수이므로
$y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

9) [정답] ⑤
[해설] 지지대를 나타내는 직선의 방정식의 기울기를

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

m이라 하면 $(-12,0)$을 지나므로
직선의 방정식은 $y=m(x+12)$,
즉 $mx-y+12m=0$
원의 중심인 $(0,4)$과 직선 $mx-y+12m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 4와 같아야 하므로
$\frac{|12m-4|}{\sqrt{m^2+1}}=4$, $(12m-4)^2=16(m^2+1)$
$8m^2-6m=m(4m-3)=0$
$m=0$ 또는 $m=\frac{3}{4}$
그러므로 $y=0$ 또는 $\frac{3}{4}x-y+9=0$
따라서 $m>0$이므로 $y=\frac{3}{4}x+9$

10) [정답] ①
[해설] 원의 중심인 $(1,0)$과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\frac{1}{2}$보다 작아야 하므로
$\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}<\frac{1}{2}$, $2|m|<\sqrt{m^2+1}$, $3m^2<1$
따라서 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$

11) [정답] ④
[해설] 원 위의 점 $(2,2\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은
$2x+2\sqrt{3}y=16$, 즉 $x+\sqrt{3}y-8=0$

12) [정답] ②
[해설] 직선의 기울기를 m이라 하면 $(-2,1)$을 지나므로
$y-1=m(x+2)$, $mx-y+2m+1=0$
원의 중심인 $(2,-1)$과 직선 $mx-y+2m+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$와 같아야 하므로
$\frac{|4m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{5}$, $16m^2+16m+4=20(m^2+1)$
$4m^2-16m+16=4(m-2)^2=0$, $m=2$
따라서 직선의 기울기는 2

13) [정답] ②
[해설] 선분 AB의 수직이등분선은 $y=\frac{1}{2}x$와 수직이므로 기울기는 -2
한편 선분 AB의 수직이등분선은 원의 중심인 $(3,-2)$를 지나므로
$y+2=-2(x-3)$, $y=-2x+4$
그러므로 선분 AB의 수직이등분선이 방정식은 $y=-2x+4$이고 $(2,0)$을 지난다.
따라서 $a=2$

14) [정답] ③
[해설] 주어진 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 원의 중심에서 직선 사이의 거리와 원의 반지름의 합과 같다.
$(x-3)^2+(y-1)^2=16$의 중심인 $(3,1)$과 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리는
$\frac{|9-4+5|}{5}=2$
따라서 주어진 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $2+4=6$

15) [정답] ②
[해설] $x^2+y^2-4x-16=0$에서 $(x-2)^2+y^2=20$이므로 원의 중심은 $(2,0)$
그러므로 원 위의 점 $(4,4)$에서의 접선은 $(2,0)$, $(4,4)$를 지나는 직선과 수직이다.
이때 두 점 $(2,0)$, $(4,4)$을 잇는 직선은 $y=2x-4$이므로 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 접선은 $(4,4)$를 지난다.
따라서 접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+6$이고 $(12,0)$를 지나므로 $a=12$

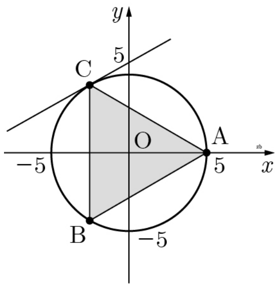
16) [정답] ①
[해설] 접선의 기울기를 m이라 하면 $(0,3)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y=mx+3$, $mx-y+3=0$
$x^2+y^2-8x-10y+31=0$에서
$(x-4)^2+(y-5)^2=10$이므로
$mx-y+3=0$과 원의 중심인 $(4,5)$ 사이의 거리는
$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$, $10(m^2+1)=16m^2-16m+4$
$6m^2-16m-6=2(m-3)(3m+1)=0$
그러므로 $m=3$ 또는 $m=-\frac{1}{3}$
따라서 기울기의 곱은 -1

17) [정답] ②
[해설] 두 직선 $y=-2x-9$, $y=-2x+1$가 서로 평행하므로 구하는 원은 중심이 직선 $y=-2x-4$ 위에 있다. 원의 중심의 좌표를 $(a,\ -2a-4)$라고 하자.
두 직선 $y=-2x-9$, $y=-2x+1$ 사이의 거리는 직선 $y=-2x-9$ 위의 점 $(0,\ -9)$과 직선 $y=-2x+1$, 즉 $2x+y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|2\times0+1\times(-9)-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$
즉 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이고 원이 원점을 지나므로
$\sqrt{a^2+(-2a-4)^2}=\sqrt{5}$, $5a^2+16a+11=0$
$(5a+11)(a+1)=0$, $a=-\frac{11}{5}$ 또는 $a=-1$
따라서 구하는 원의 방정식은

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$(x+1)^2+(y+2)^2=5$

18) [정답] ②
[해설] $\triangle$ABC의 넓이는 다음 그림과 같이 점 C에서의 원의 접선이 직선 AB와 평행할 때 최대이다.



직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\frac{5\sqrt{5}}{2}$

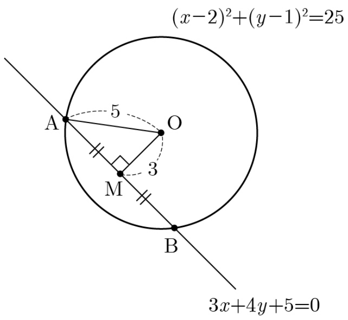
점 A$(5,\ 0)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5\sqrt{5}}{2}$, 즉 $x-2y+5\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\times5+2\times0+5\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=5+\sqrt{5}$

이때 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{(-3-5)^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{5}$이므로 $\triangle$ABC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times(5+\sqrt{5})=10+10\sqrt{5}$

19) [정답] ④
[해설]



선분 AB의 중점을 M이라 하면
원 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$의 중심인 $O(2,1)$과 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리

$\overline{OM}=\frac{15}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

한편 원의 반지름의 길이 $\overline{OA}=5$
그러므로 피타고라스 정리에 따라
$\overline{AM}^2+\overline{OM}^2=\overline{AO}^2$이므로 $\overline{AM}^2=16$
따라서 $\overline{AM}=4$이고 $\overline{AB}=8$

20) [정답] ②
[해설] 두 원 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$, $(x-3)^2+(y-2)^2=9$의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-3-3)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{13}$
두 원의 반지름이 각각 1, 3이므로
선분 AB의 길이의 최솟값은
$2\sqrt{13}-(1+3)=2\sqrt{13}-4$

21) [정답] ②
[해설] 원의 중심인 $(2,\ -3)$과 직선 $3x+2y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{13}$보다 작거나 같아야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{13}}\le\sqrt{13}$, $|k|\le13$

따라서 $-13\le k\le13$

22) [정답] ⑤
[해설] 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(0,3)$을 지나므로 $3y_1=4$, $y_1=\frac{4}{3}$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
${x_1}^2+{y_1}^2=4$

$y_1=\frac{4}{3}$을 위의 식에 대입하면

${x_1}^2+\frac{16}{9}=4$, $x_1=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$

따라서 접선의 방정식은 $\frac{2\sqrt{5}}{3}x+\frac{4}{3}y=4$

$\frac{2\sqrt{5}}{3}x-\frac{4}{3}y=-4$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}+\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)\times3=\frac{18\sqrt{5}}{5}$

23) [정답] ④
[해설] 점 $(a,0)$를 지나는 접선의 방정식을 $y=m(x-a)=mx-ma$라고 하면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx-ma$, 즉 $mx-y-ma=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 4와 같아야 하므로

$\frac{|-ma|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$, $|-ma|=4\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $(16-a^2)m^2+16=0$
이 m에 대한 이차방정식의 두 근의 곱이 -1이므로 $\frac{16}{16-a^2}=-1$, $a^2=32$

따라서 $a>0$이므로 $a=4\sqrt{2}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125