06 이차방정식과 이차함수

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.		1st	2nd
필수유형 01	이차함수의 그래프	☐	☐
필수유형 02	이차함수의 그래프와 계수의 부호	☐	☐
필수유형 03	이차함수의 그래프와 x축의 교점 및 위치 관계	☐	☐
필수유형 04	이차함수의 그래프와 직선의 교점	☐	☐
필수유형 05	이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	☐	☐
필수유형 06	이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식	☐	☐
필수유형 07	이차함수의 최대 · 최소	☐	☐
필수유형 08	제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소	☐	☐
필수유형 09	공통부분이 있는 함수의 최대 · 최소	☐	☐
발전유형 10	조건을 만족시키는 이차식의 최댓값과 최솟값	☐	☐
필수유형 11	이차함수의 최대 · 최소의 활용	☐	☐

필수유형 01 이차함수의 그래프

다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식, y축과 만나는 점의 좌표를 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $y=x^2-6x+8$

(2) $y=-2x^2+8x-6$

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 다음을 구하면 그래프를 쉽게 그릴 수 있어.

① 꼭짓점의 좌표: (m, n)

② 축의 방정식: $x=m$

③ y축과 만나는 점의 좌표: $(0, c)$

풀이

(1) $y=x^2-6x+8$

$=(x^2-6x+9-9)+8$

$=(x-3)^2-1$

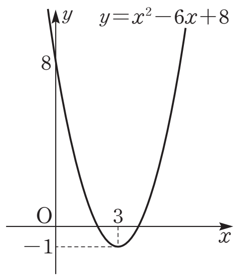
이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, -1)$,

축의 방정식은 $x=3$이고

y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 8)$ ❶

이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-6x+8$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



❶ y축과 만나는 점의 y좌표는 일반형 $y=ax^2+bx+c$ 꼴에 $x=0$을 대입한 것과 같다.

(2) $y=-2x^2+8x-6$

$=-2(x^2-4x+4-4)-6$ ❷

$=-2(x-2)^2+2$

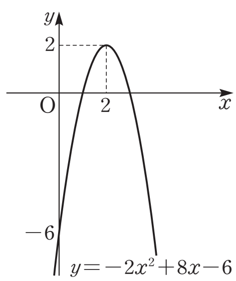
이때 꼭짓점의 좌표는 $(2, 2)$,

축의 방정식은 $x=2$이고,

y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -6)$ ❶

이다.

따라서 이차함수 $y=-2x^2+8x-6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



❷ 먼저 x^2의 계수를 묶어 낸다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

풍쌤 강의 NOTE

이차함수의 그래프는 주어진 식을 완전제곱식이 들어간 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 그린다.

01-1 유사

다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식, y축과 만나는 점의 좌표를 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $y=2x^2-8x+10$

(2) $y=-x^2+6x-9$

(3) $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5$

(4) $y=-2x^2-4x+1$

01-2 변형

이차함수 $y=2x^2+8x+a$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(b, 3)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

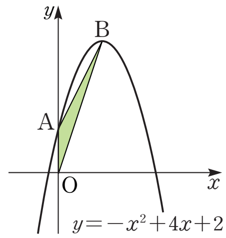
01-3 변형

이차함수 $y=3x^2+12x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 이차함수 $y=3x^2-18x+10$의 그래프와 일치한다. 이때 $m+n$의 값을 구하여라.

01-4 변형

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+4x+2$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 B라고 할 때, 삼각형 AOB의 넓이를 구하여라.

(단, O는 원점이다.)



01-5 변형

꼭짓점의 좌표가 $(2, 1)$이고, y축과 만나는 점의 y좌표가 9인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라고 할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

01-6 변형

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 세 점 $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(1, -6)$을 지날 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

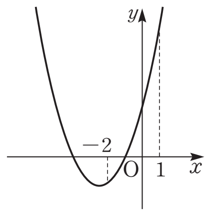
필수유형 02 이차함수의 그래프와 계수의 부호

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 값의 부호를 정하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

(1) a　　　(2) b

(3) c　　　(4) $a+b+c$

(5) $4a-2b+c$　　　(6) $a+2b+4c$



풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a의 부호는 그래프의 모양, b의 부호는 축의 위치, c의 부호는 y축과 만나는 점의 위치로 알 수 있어.

(4), (5), (6)과 같이 이차함수의 계수로 이루어진 식의 부호는 특정한 함숫값의 부호를 조사해!

풀이

$f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면

(1) 주어진 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

(2) 축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}<0 \qquad \therefore\ b>0$$ ❶

(3) y축과 만나는 점의 y좌표가 양수이므로 $c>0$

(4) $f(1)=a+b+c$이고,

그래프에서 $x=1$일 때, y의 값은 양수이므로

$a+b+c>0$

(5) $f(-2)=4a-2b+c$이고,

그래프에서 $x=-2$일 때, y의 값은 음수이므로

$4a-2b+c<0$

(6) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$이고,

그래프에서 $x=\frac{1}{2}$일 때, y의 값은 양수이므로

$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c>0$, $\frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore\ a+2b+4c>0$

❶ $y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

➡ 축이 y축의 왼쪽에 있으면

$-\frac{b}{2a}<0$이므로 $\frac{b}{2a}>0$

즉, a, b의 부호가 같다.

답 (1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $c>0$　(4) $a+b+c>0$

(5) $4a-2b+c<0$　(6) $a+2b+4c>0$

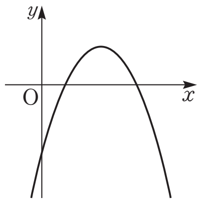
풍쌤 강의 NOTE

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

a의 부호		b의 부호		c의 부호	
그래프의 모양		축의 위치		y축과 만나는 점의 위치	
아래로 볼록($\smile$)	위로 볼록($\frown$)	축이 y축의 오른쪽	축이 y축의 왼쪽	x축의 위쪽	x축의 아래쪽
$a>0$	$a<0$	a, b는 서로 다른 부호	a, b는 서로 같은 부호	$c>0$	$c<0$

02-1 기본

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 부호를 정하여라.

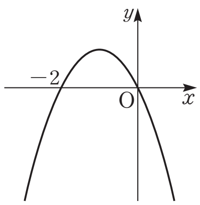


02-2 유사

기출

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 값의 부호를 정하여라.

(단, a, b, c는 상수이다.)



(1) a

(2) b

(3) c

(4) $a+b+c$

(5) $9a-3b+c$

(6) $a-2b+4c$

02-3 변형

$a>0$, $b<0$, $c<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2-bx-c$의 그래프에 대한 설명으로 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

|보기|

ㄱ. 그래프는 아래로 볼록하다.

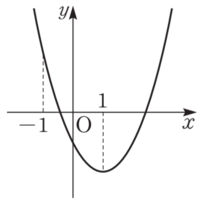
ㄴ. 그래프의 축은 y축의 오른쪽에 있다.

ㄷ. 그래프는 y축과 x축의 아래쪽에서 만난다.

02-4 변형

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

(단, a, b, c는 상수이다.)



|보기|

ㄱ. $ab<0$　　ㄴ. $ac>0$

ㄷ. $a+b+c<0$　　ㄹ. $a-b+c<0$

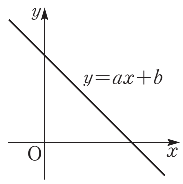
ㅁ. $a+3b+9c<0$

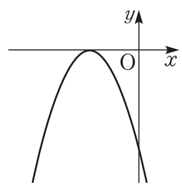
02-5 변형

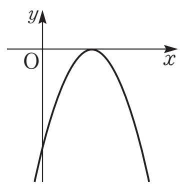
기출

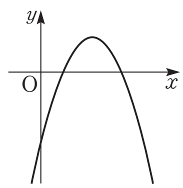
일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y=a(x+b)^2$의 그래프로 알맞은 것은?

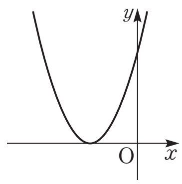
(단, a, b는 상수이다.)

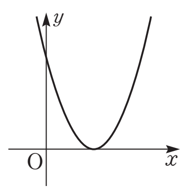


①


②


③


④


⑤


필수유형 03 이차함수의 그래프와 x축의 교점 및 위치 관계

다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=-x^2+mx+n$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -4, 6일 때, 상수 m, n의 값을 각각 구하여라.

(2) 이차함수 $y=x^2-2x-k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D의 값의 부호를 조사해.

① 서로 다른 두 점에서 만난다. ➡ $D>0$

② 한 점에서 만난다. (접한다.) ➡ $D=0$

③ 만나지 않는다. ➡ $D<0$

풀이

(1) STEP1 이차함수와 이차방정식의 관계 이해하기

이차함수 $y=-x^2+mx+n$의 그래프와 x축의 교점[1]의 x좌표가 -4, 6이므로 이차방정식 $-x^2+mx+n=0$의 두 근이 -4, 6이다.

STEP2 $m+n$의 값 구하기

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여[2]

$-4+6=-\dfrac{m}{-1}$ $\quad\therefore m=2$

$(-4)\times 6=\dfrac{n}{-1}$ $\quad\therefore n=24$

다른 풀이

STEP2 $x=-4$, 6을 대입하여 m, n의 값 구하기

이차방정식 $-x^2+mx+n=0$의 두 근이 -4, 6이므로

$x=-4$를 대입하면 $-16-4m+n=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=6$을 대입하면 $-36+6m+n=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=2$, $n=24$

(2) 이차함수 $y=x^2-2x-k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2x-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(-k)>0$, $\quad 1+k>0$ $\quad\therefore k>-1$

답 (1) $m=2$, $n=24$ $\quad$ (2) $k>-1$

[1] $y=-x^2+mx+n$
$=-(x+4)(x-6)$
임을 알 수 있다.

[2] 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

풍쌤 강의 NOTE

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D\geq 0$이어야 한다.

03-1 유사

이차함수 $y=2x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-\frac{1}{2}$, 1일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

03-2 유사

이차함수 $y=x^2+4x+2m-1$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

03-3 변형

이차함수 $y=-x^2+2(k-2)x-k^2$의 그래프가 x축과 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

03-4 변형

이차함수 $y=-x^2+mx+m^2-5$의 그래프가 x축과 접하도록 하는 상수 m의 값을 모두 구하여라.

03-5 변형

기출

이차함수 $y=x^2+2(a-4)x+a^2+a-1$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하여라.

03-6 실력

이차함수 $y=x^2-2ax+(a+4)k+b$의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

필수유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 교점

다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=2x^2-6x+8$의 그래프와 직선 $y=-2x+6$의 교점의 x좌표를 구하여라.

(2) 이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 교점의 x좌표가 1, 2일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는
➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근이야.

풀이

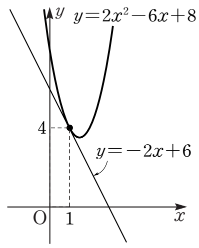
(1) 이차함수 $y=2x^2-6x+8$의 그래프와 직선 $y=-2x+6$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2-6x+8=-2x+6$, 즉

$x^2-2x+1=0$

의 실근과 같으므로

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

따라서 교점의 x좌표는 1이다.

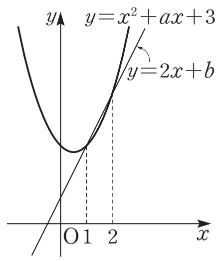


(2) STEP1 이차함수와 이차방정식의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+3=2x+b$, 즉

$x^2+(a-2)x+3-b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

의 실근과 같으므로 1, 2는 이차방정식 ㉠의 두 근이다.



STEP2 a, b의 값 구하기

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+2=-(a-2) \qquad \therefore a=-1$

$1\times2=3-b \qquad \therefore b=1$

다른 풀이

이차방정식 ㉠의 두 근이 1, 2이므로

$x=1$을 대입하면 $1+(a-2)+3-b=0$

$\therefore a-b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$x=2$를 대입하면 $4+2(a-2)+3-b=0$

$\therefore 2a-b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

답 (1) 1 (2) $a=-1$, $b=1$

풍쌤 강의 NOTE

이차함수의 그래프와 직선의 교점을 구하려면 두 식을 연립한 이차방정식의 두 근을 구하거나 근과 계수의 관계를 이용한다.

04-1 유사

다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 모두 구하여라.

(1) $y=-x^2+4x+2$, $y=2x+3$
(2) $y=2x^2-4x+5$, $y=x+2$
(3) $y=-4x^2-3x+1$, $y=3x+1$

04-2 유사

이차함수 $y=-x^2+ax+1$의 그래프와 직선 $y=3x+b$의 교점의 x좌표가 -3, 2일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

04-3 변형

이차함수 $y=2x^2-5x+a$의 그래프와 직선 $y=x+12$가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

04-4 변형

이차함수 $y=x^2-5x+5$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 2일 때, 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구하여라.

(단, k는 상수이다.)

04-5 변형

이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프는 직선 $y=ax+b$와 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 중 한 점의 x좌표가 $3-\sqrt{6}$일 때, 유리수 a, b의 값을 각각 구하여라.

04-6 실력 기출

원점을 지나고 기울기가 양수 m인 직선이 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프와 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라고 하자. 선분 AA′과 선분 BB′의 길이의 차가 16일 때, m의 값을 구하여라.

필수유형 05 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=2x^2-3x+4,\ y=2x+2$

(2) $y=4x^2-10x+7,\ y=6x-9$

(3) $y=-3x^2+5x-10,\ y=15x-1$

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식의 값의 부호를 조사해.

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

풀이

(1) 이차방정식 $2x^2-3x+4=2x+2$, 즉 $2x^2-5x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4\times2\times2=9>0$ ❶

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 2개이다.

❶ $2x^2-5x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $4x^2-10x+7=6x-9$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times4=0$ ❷

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 1개이다.

❷ $x^2-4x+4=0$은 중근을 갖는다.

(3) 이차방정식 $-3x^2+5x-10=15x-1$, 즉 $3x^2+10x+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=5^2-3\times9=-2<0$ ❸

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 없다.

❸ $3x^2+10x+9=0$은 허근을 갖는다.

답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

풍쌤 강의 NOTE

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하려면 두 식을 연립한 이차방정식의 판별식을 이용한다. 또한, 교점의 개수가 주어지거나 위치 관계가 주어진 경우에도 이차방정식의 판별식을 이용하여 해결한다.

05-1 유사

다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=-2x^2-2x+4$, $y=-3x+2$

(2) $y=3x^2-4x+1$, $y=2x-2$

(3) $y=-x^2+2x-5$, $y=x+1$

05-2 변형

이차함수 $y=x^2+5x+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하여라.

05-3 변형

이차함수 $y=x^2+kx$의 그래프와 직선 $y=3x-k$가 접할 때, 실수 k의 값을 모두 구하여라.

05-4 변형

이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 직선 $y=3x+1$이 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하여라.

05-5 변형

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2-3a+6$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

05-6 변형

이차함수 $y=-x^2-2kx-1$의 그래프가 직선 $y=2x+k^2-k-3$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

필수유형 06 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식

다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=x^2+5x+2$의 그래프에 접하고, 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 이차함수 $y=x^2+4x+5$의 그래프에 접하는 직선의 기울기를 구하여라.

풍쌤 POINT

• 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 a인 직선 ➡ $y=ax+b$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=ax+b$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용하여 b의 값을 구해.

• 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하고 점 $(p,\ q)$를 지나는 직선 ➡ $y=a(x-p)+q$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=a(x-p)+q$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용하여 a의 값을 구해.

풀이

(1) 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$❶라고 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2+5x+2$의 그래프에 접하므로

이차방정식 $x^2+5x+2=2x+k$, 즉 $x^2+3x+2-k=0$의

판별식을 D라고 하면

$D=3^2-4(2-k)=0$

$4k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x-\frac{1}{4}$

❶ $y=\underset{\text{기울기}}{2}x+\underset{y\text{절편}}{k}$

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x+1)+2$❷라고 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2+4x+5$의 그래프에 접하므로

이차방정식 $x^2+4x+5=a(x+1)+2$, 즉

$x^2+(4-a)x+3-a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(4-a)^2-4(3-a)=0$

$a^2-8a+16-12+4a=0,\ a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$

따라서 접하는 직선의 기울기는 2이다.

❷ $a(x+1)+2-y=0$은 a의 값의 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

답 (1) $y=2x-\frac{1}{4}$ (2) 2

풍쌤 강의 NOTE

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D=0$임을 이용한다.

06-1 유사

다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=x^2-x+3$의 그래프에 접하고, 기울기가 1인 직선의 방정식을 구하여라.

(2) 이차함수 $y=2x^2+2x+1$의 그래프에 접하고, 기울기가 -2인 직선의 방정식을 구하여라.

06-2 유사

점 $(-2, 1)$을 지나고, 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프에 접하는 두 직선의 기울기의 곱을 구하여라.

06-3 변형

이차함수 $y=x^2-2x+9$의 그래프에 접하고 직선 $2x-y+1=0$과 평행한 직선의 y절편을 구하여라.

06-4 변형

직선 $y=3x+1$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=-2x^2-x-5$의 그래프에 접하였다. 이때 k의 값을 구하여라.

06-5 변형

이차함수 $y=2x^2-3x+3$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

06-6 실력

기출

x에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 접할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

필수유형 07 이차함수의 최대 • 최소

다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=-x^2+6x+2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(2) 이차함수 $y=x^2+2x+k$의 최솟값이 5일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(3) 이차함수 $y=-3x^2+ax-39$가 $x=-4$일 때 최댓값 b를 갖는다. 이때 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

풍쌤 POINT

x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대·최소는 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 다음과 같이 구해.

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

풀이

(1) $y=-x^2+6x+2$ ❶

$=-(x^2-6x+9-9)+2$

$=-(x-3)^2+11$ ❷

따라서 주어진 이차함수는 $x=3$일 때 최댓값 11을 갖고, 최솟값은 없다.

(2) $y=x^2+2x+k$ ❸

$=(x^2+2x+1-1)+k$

$=(x+1)^2+k-1$

따라서 주어진 이차함수는 $x=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$k-1=5$ $\therefore k=6$

(3) 이차함수 $y=-3x^2+ax-39$가 $x=-4$일 때 최댓값 b ❹를 가지므로

$y=-3(x+4)^2+b$

$=-3(x^2+8x+16)+b$

$=-3x^2-24x-48+b$

이것이 $y=-3x^2+ax-39$와 같아야 하므로

$a=-24$, $-48+b=-39$ $\therefore b=9$

답 (1) 최댓값: 11, 최솟값: 없다. (2) 6 (3) $a=-24$, $b=9$

❶ x^2의 계수가 음수이면 그래프가 위로 볼록하므로 최솟값은 없고, 최댓값만 갖는다.

❷ 이차함수를 표준형으로 고쳤을 때, 꼭짓점의 y좌표가 최댓값 또는 최솟값이다.

❸ x^2의 계수가 양수이면 그래프가 아래로 볼록하므로 최댓값은 없고, 최솟값만 갖는다.

❹ 꼭짓점의 좌표가 $(-4, b)$이다.

풍쌤 강의 NOTE

x의 값의 범위가 실수 전체일 때

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 a의 부호에 따라 최댓값과 최솟값 중 하나만 갖는다.

(2) 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은 그래프의 꼭짓점의 y좌표이다.

07-1 유사

다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^2+10x+11$

(2) $y=-x^2-4x+1$

(3) $y=4x^2-8x+9$

(4) $y=-2x^2+20x-42$

07-2 유사 기출

이차함수 $y=-x^2-4x+k$의 최댓값이 20일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

07-3 유사 기출

이차함수 $y=ax^2+6x-2a+1$은 $x=1$일 때 최댓값 b를 갖는다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

07-4 변형

이차함수 $y=2x^2-8x-k+4$의 최솟값과 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+3k$의 최댓값이 같을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

07-5 변형

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=2$일 때 최솟값 -3을 갖는다. $f(0)=5$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

07-6 변형

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+2a+1$의 최솟값을 $g(a)$라고 할 때, $g(a)$의 최댓값을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

필수유형 08 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 • 최소

다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^2-6x+11$ $(0\le x\le 4)$

(2) $y=-x^2-4x-2$ $(-3\le x\le 1)$

(3) $y=2x^2-4x+5$ $(2\le x\le 3)$

풍쌤 POINT

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최대·최소는 꼭짓점의 x좌표 p가 주어진 범위에 포함되는지 확인하고 다음과 같이 구해.

① $\alpha\le p\le\beta$이면 $f(\alpha), f(\beta), f(p)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

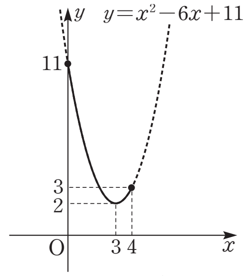
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

풀이

(1) $y=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

이므로 $0\le x\le 4$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

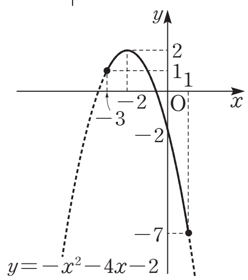
이때 꼭짓점의 x좌표 3이 $0\le x\le 4$에 포함되므로 주어진 이차함수는 $x=0$일 때 최댓값 11, $x=3$일 때 최솟값 2를 갖는다.



(2) $y=-x^2-4x-2=-(x+2)^2+2$

이므로 $-3\le x\le 1$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

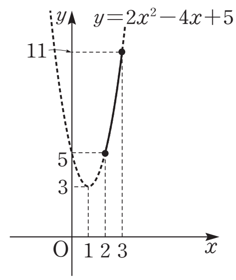
이때 꼭짓점의 x좌표 -2가 $-3\le x\le 1$에 포함되므로 주어진 이차함수는 $x=-2$일 때 최댓값 2, $x=1$일 때 최솟값 -7을 갖는다.



(3) $y=2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3$

이므로 $2\le x\le 3$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 꼭짓점의 x좌표 1이 $2\le x\le 3$에 포함되지 않으므로 주어진 이차함수는 $x=3$일 때 최댓값 11, $x=2$일 때 최솟값 5를 갖는다.



답 (1) 최댓값: 11, 최솟값: 2 (2) 최댓값: 2, 최솟값: -7 (3) 최댓값: 11, 최솟값: 5

풍쌤 강의 NOTE

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$이고, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 꼭짓점의 x좌표 p가 범위에 포함되면 $f(p)$의 값은 $a>0$일 때 최솟값, $a<0$일 때 최댓값이다.

08-1 유사

다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^2+8x+12\ (-5\le x\le -2)$

(2) $y=-x^2+4x-1\ (-1\le x\le 1)$

(3) $y=-2x^2-12x-12\ (-4\le x\le -1)$

08-2 변형

$-1\le x\le 1$에서 이차함수 $f(x)=-x^2+4x+k$의 최댓값이 -1일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

08-3 변형

$-2\le x\le 3$일 때, 이차함수 $f(x)=2x^2-4x+k$의 최솟값은 1이고 최댓값은 M이다. $k+M$의 값을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

08-4 변형

이차함수 $f(x)=ax^2-2ax+b$가 $-2\le x\le 2$에서 최댓값 5, 최솟값 -4를 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

08-5 변형

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 8일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

08-6 실력

기출

최고차항의 계수가 $a\ (a>0)$인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $y=4ax-10$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 5이다.
> (나) $1\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 -8이다.

$100a$의 값을 구하여라.

필수유형 09 공통부분이 있는 함수의 최대・최소

다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $y=(x^2+2x-2)^2+4(x^2+2x-2)+3$의 최솟값을 구하여라.

(2) $1\le x\le 3$에서 함수 $y=(x-2)^2-6(x-2)+8$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풍쌤 POINT

함수 $y=\{f(x)\}^2+af(x)+b$의 최댓값 또는 최솟값은

$f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기 → $y=t^2+at+b$를 표준형으로 변형하기 → t의 값의 범위에서 최댓값 또는 최솟값 구하기

풀이

(1) STEP1 $x^2+2x-2=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기

$x^2+2x-2=t$로 놓으면

$t=(x^2+2x+1-1)-2=(x+1)^2-3$ ❶

이므로 $t\ge -3$

STEP2 t의 값의 범위에서 함수의 최솟값 구하기

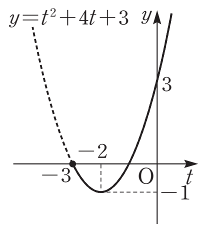
이때 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면

$y=(x^2+2x-2)^2+4(x^2+2x-2)+3$

$=t^2+4t+3$

$=(t+2)^2-1\ (t\ge -3)$

따라서 오른쪽 그림과 같이 주어진 함수는 $t=-2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



❶ x^2의 계수는 양수이고 꼭짓점의 x좌표가 -1이므로 t는 $x=-1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

(2) STEP1 $x-2=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기

$x-2=t$로 놓으면 $1\le x\le 3$이므로 $-1\le t\le 1$ ❷

STEP2 t의 값의 범위에서 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

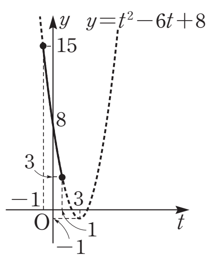
이때 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면

$y=(x-2)^2-6(x-2)+8$

$=t^2-6t+8$

$=(t-3)^2-1\ (-1\le t\le 1)$

따라서 오른쪽 그림과 같이 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최댓값 15, $t=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.



❷ $x=1$일 때 $t=1-2=-1$, $x=3$일 때 $t=3-2=1$ 이므로 $-1\le t\le 1$

답 (1) -1 (2) 최댓값: 15, 최솟값: 3

풍쌤 강의 NOTE

공통부분이 있는 함수의 최댓값과 최솟값을 구하려면 공통부분을 t로 치환한다.
이때 t의 값의 범위에 주의해야 한다.

09-1 유사

함수 $y=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-5$의 최솟값을 구하여라.

09-2 유사 기출

$-2\leq x\leq 1$에서 함수

$$y=(x^2+2x-1)^2-4(x^2+2x-1)+3$$

의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

09-3 변형

함수 $y=(x^2-2x)^2+2x^2-4x$가 $x=\alpha$일 때 최솟값 β를 갖는다. 이때 $\alpha-\beta$의 값을 구하여라.

09-4 변형

$1\leq x\leq 4$에서 함수

$$y=(x^2-6x+8)^2-4(x^2-6x+8)+k$$

의 최댓값이 1일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

09-5 변형 기출

실수 x에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+4x+6)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+10$$

의 최솟값을 구하여라.

09-6 실력

함수 $y=2(x^2+1)^2-6x^2+5$는 $x=\alpha$ $(\alpha>0)$일 때 최솟값 β를 갖는다고 한다. 이때 $\alpha^2+\beta$의 값을 구하여라.

발전유형 10 조건을 만족시키는 이차식의 최댓값과 최솟값

다음 물음에 답하여라.

(1) x, y가 실수일 때, $x^2+2y^2-4x+4y+9$의 최솟값을 구하여라.

(2) 두 실수 x, y가 $x+y=4$를 만족시킬 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하여라.

풍쌤 POINT

- x, y가 실수일 때, x, y에 대한 이차식의 최대·최소는
  ➡ 완전제곱식 꼴로 변형한 후 $(실수)^2 \geq 0$임을 이용하면 돼.
  (x에 대한 완전제곱식)+(y에 대한 완전제곱식)+(상수)
- x, y에 대한 등식이 조건으로 주어졌을 때의 이차식의 최대·최소는
  ➡ 조건식을 한 문자에 대하여 정리한 후 최솟값을 구하는 이차식에 대입하여 이차함수의 최대·최소를 이용하면 돼.

풀이

(1) STEP1 주어진 식을 완전제곱식 꼴로 변형하기

$x^2+2y^2-4x+4y+9$

$=(x^2-4x+4-4)+2(y^2+2y+1-1)+9$

$=(x-2)^2+2(y+1)^2+3$

STEP2 $(실수)^2 \geq 0$임을 이용하여 최솟값 구하기

이때 x, y는 실수이므로

$(x-2)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ ❶

따라서 주어진 식은 $x=2$, $y=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

❶ $x=2$, $y=-1$일 때에만 각각의 값은 0이 되고 그 이외의 값에서는 모두 0보다 크다.
$(x-2)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$

(2) STEP1 $x+y=4$를 한 문자에 대하여 정리하기

$x+y=4$에서 $y=-x+4$ ······ ㉠

STEP2 STEP1에서 정리한 식을 이차식에 대입하기

㉠을 x^2+y^2에 대입하면 ❷

$x^2+y^2=x^2+(-x+4)^2$

$=2x^2-8x+16$

$=2(x^2-4x+4-4)+16$

$=2(x-2)^2+8$

❷ x^2+y^2을 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

STEP3 최솟값 구하기

이때 x, y는 실수이고 $(x-2)^2 \geq 0$이므로

x^2+y^2은 $x=2$일 때 최솟값 8을 갖는다.

답 (1) 3 (2) 8

풍쌤 강의 NOTE

조건을 만족시키는 이차식의 최대·최소 문제는 이차식을 완전제곱식 꼴로 변형하여 문제를 해결한다.

10-1 유사

x, y가 실수일 때, $2x^2+4x+y^2-6y+5$의 최솟값을 구하여라.

10-2 유사

두 실수 x, y가 $2x+y=2$를 만족시킬 때, $-2x^2+y^2$의 최솟값을 구하여라.

10-3 변형

기출

두 실수 x, y에 대하여 $x^2+2y^2+8x+8y+100$은 $x=a$, $y=b$일 때, 최솟값 c를 갖는다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하여라.

10-4 변형

$x+y+3=0$ $(-3\le x\le 0)$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 x^2+2y^2의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

10-5 실력

두 실수 x, y가 $x-y^2=1$을 만족시킬 때, x^2+4y^2+2의 최솟값을 구하여라.

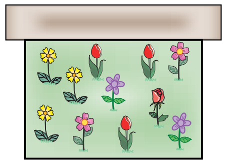
10-6 실력

기출

직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$이 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라고 하자. 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 점 A에서 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$을 따라 점 B까지 움직일 때, a^2+8b의 최솟값을 구하여라.

필수유형 11 이차함수의 최대 • 최소의 활용

길이가 16 m인 철망을 사용하여 오른쪽 그림과 같이 한 면이 벽면인 직사각형 모양의 꽃밭을 만들려고 한다. 이때 꽃밭의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 철망의 두께는 무시한다.)



풍쌤 POINT

이차함수의 최대 • 최소의 활용 문제는 다음과 같이 구해.

변수 x를 정하고, x의 값의 범위 구하기 ➡ 주어진 상황을 x에 대한 이차함수의 식으로 나타내기 ➡ 최댓값 또는 최솟값 구하기

풀이

STEP1 변수 x를 정하고, x의 값의 범위 구하기

꽃밭의 세로의 길이를 x m라고 하면 가로의 길이는 $(16-2x)$❶m이다.

이때 $x>0$, $16-2x>0$❷이므로

$0<x<8$

STEP2 꽃밭의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내기

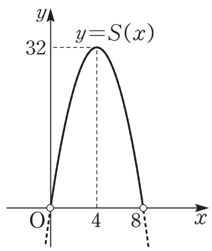
꽃밭의 넓이를 $S(x)$ m^2라고 하면

$$S(x)=x(16-2x)$$
$$=-2x^2+16x$$
$$=-2(x-4)^2+32$$

STEP3 제한된 범위에서 꽃밭의 넓이의 최댓값 구하기

이때 $0<x<8$이므로 $S(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 32를 갖는다.

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은 32 m^2이다.



❶ $x+$(가로의 길이)$+x=16$이므로 가로의 길이는 $16-2x$이다.

❷ 가로, 세로의 길이는 양수이다.

답 32 m^2

풍쌤 강의 NOTE

문제에서 주어진 조건들을 이용하여 식을 정확히 세운다.
이때 문자의 조건이나 변수의 범위를 확인하여 문제를 해결한다.
필요한 경우, 구한 답이 문자나 변수의 조건에 맞는지 확인한다.

11-1 유사

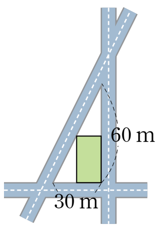
둘레의 길이가 60인 직사각형 중에서 넓이가 최대인 직사각형의 대각선의 길이를 구하여라.

11-2 변형

지면에서 30 m 높이에서 위로 똑바로 쏘아 올린 공의 t초 후의 지면으로부터의 높이를 h m라고 하면 $h=-5t^2+20t+30$이다. 이 공은 a초 후에 가장 높이 올라가고 이때의 지면에서부터의 높이가 b m라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

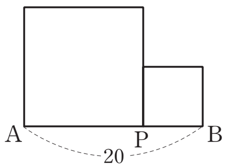
11-3 변형 기출

오른쪽 그림과 같이 도로로 둘러싸인 직각삼각형 모양의 땅에 직사각형 모양의 주차장을 만들려고 한다. 이 땅의 직각을 낀 두 변의 길이가 30 m, 60 m일 때, 주차장의 넓이의 최댓값을 구하여라.



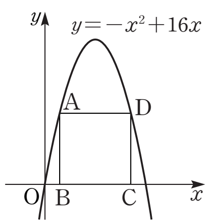
11-4 변형

길이가 20인 선분 AB를 오른쪽 그림과 같이 둘로 나누어 $\overline{AP}$, $\overline{PB}$를 각각 한 변으로 하는 정사각형을 만들려고 한다. 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 선분 AP의 길이를 구하여라.



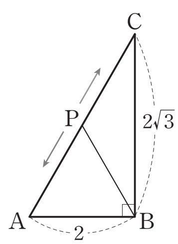
11-5 변형

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=-x^2+16x$에 접하고 한 변이 x축 위에 놓여 있는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



11-6 실력 기출

오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 직각삼각형 ABC에서 점 P가 변 AC 위를 움직일 때, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값을 구하여라.



실전 연습 문제

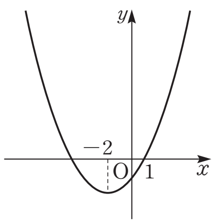
01

다음 이차함수 중 그 그래프가 모든 사분면을 지나는 것은?

① $y=2x^2+12x+19$ ② $y=-2x^2-1$
③ $y=x^2+2x-6$ ④ $y=-x^2+4x-2$
⑤ $y=x^2-4x+4$

02

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?
(단, a, b, c는 상수이다.)



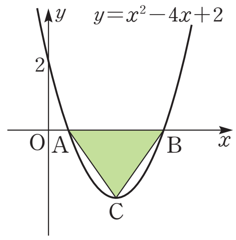
① $a<0$
② $b<0$
③ $c>0$
④ $4a-2b+c>0$
⑤ $a+b+c=0$

03 서술형 기출

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만난다. 한 점의 x좌표가 $1-2\sqrt{2}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

04

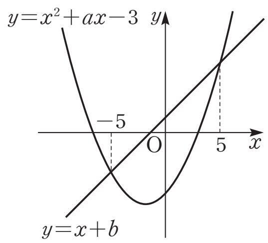
오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-4x+2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 꼭짓점을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

05 기출

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax-3$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라.
(단, a, b는 상수이다.)



06

이차함수 $f(x)=x^2+4x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점일 때, 점 Q의 좌표를 구하여라. (단, k는 상수이다.)

07

기출

직선 $y=-x+a$가 이차함수 $y=x^2+bx+3$의 그래프에 접하도록 하는 a의 최댓값은?

(단, a, b는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08

기출

이차함수 $y=-2x^2+5x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

09

기출

함수 $f(x)=x^2-x-5$와 $g(x)=x+3$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 방정식 $f(2x-k)=g(2x-k)$의 두 실근의 합이 3일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -3, 1이고, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값이 8일 때, abc의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

11

함수 $f(x)=2x^2+ax-3+a$의 최솟값을 $g(a)$라고 하자. $g(a)$가 최댓값을 가질 때의 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12 서술형

$-2\le x\le 0$에서 이차함수 $f(x)=ax^2-2ax+b$의 최댓값이 3, 최솟값이 1일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

13

기출

$-2\le x\le 2$에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-2x+a$의 최댓값과 최솟값의 합이 21일 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

14

기출

$0\le x\le 4$에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-6x+k$의 최댓값이 17일 때, 이차함수 $f(x)$의 최솟값을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

15 서술형

$-1\le x\le 2$에서 정의된 함수

$$y=(x^2-2x-1)^2-2(x^2-2x-1)+3$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

16

x, y가 실수이고 $2x^2+y^2-4x+6y+k+7$의 최솟값이 4일 때, 상수 k의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

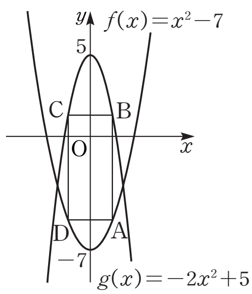
17

$x+y=3$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x\ge 0$, $y\ge 0$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

18

기출

두 이차함수 $f(x)=x^2-7$과 $g(x)=-2x^2+5$가 있다. 오른쪽 그림과 같이 네 점 $A(a, f(a))$, $B(a, g(a))$, $C(-a, g(-a))$, $D(-a, f(-a))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대가 되도록 하는 a의 값을 구하여라. (단, $0<a<2$)



01

기출

이차함수 $y=x^2+3x+2k+3$의 그래프가 제4사분면만을 지나지 않을 때, 상수 k의 값의 범위를 구하여라.

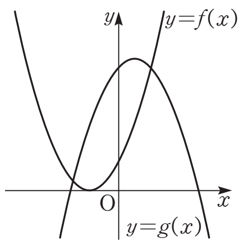
02

두 이차함수

$f(x)=x^2+ax+b,$

$g(x)=-x^2+cx+d$

에 대하여 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 제1사분면과 제2사분면에서 만난다. |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라. (단, a, b, c, d는 상수이다.)



|보기|

ㄱ. $a^2-4b=0$

ㄴ. $a^2-4d<0$

ㄷ. $(a-c)^2-8(b-d)>0$

03

직선 $y=2mx+m^2+2m+1$은 실수 m의 값에 관계없이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 접한다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04

기출

이차함수 $f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.
(나) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서만 만난다.

상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

05

두 양수 p, q에 대하여 이차함수 $f(x)=-x^2+px-q$가 다음 조건을 만족시킬 때, p^2+q^2의 값을 구하여라.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.
> (나) $-p\le x\le p$에서 $f(x)$의 최솟값은 -54이다.

06

기출

실수 x, y에 대하여

$$x^2-2xy+y^2-\sqrt{3}(x+y)+12=0$$

을 만족시킬 때, $x+y$의 최솟값을 구하여라.

07

다음은 어느 휴대폰 제조 회사에서 신제품 A의 가격을 정하기 위하여 시장 조사를 한 결과이다.

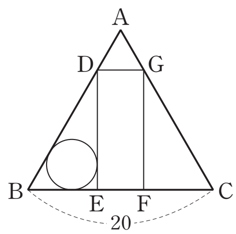
> (가) A의 가격을 100만 원으로 정하면 판매량은 2400대이다.
> (나) A의 가격을 만 원 인상할 때마다 판매량은 20대씩 줄어든다.

신제품 A를 판매하여 얻은 전체 판매 금액이 최대가 되도록 하는 신제품 A의 가격은 a만 원이다. a의 값을 구하여라. (단, A의 가격은 100만 원 이상이다.)

08

기출

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정삼각형 ABC에 대하여 변 AB 위의 점 D, 변 AC 위의 점 G, 변 BC 위의 두 점 E, F를 꼭짓점으로 하는 직사각형 DEFG가 있다. 직사각형 DEFG의 넓이가 최대일 때, 삼각형 DBE에 내접하는 원의 둘레의 길이는 $(p\sqrt{3}+q)\pi$이다. p^2+q^2의 값은?



(단, p, q는 유리수이다.)

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50