



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시
1) 제작연월일 : 2022-01-10
2) 제작자 : 교육지대(주)
3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초
제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호
되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무
단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법
외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

단원 ISSUE

이 단원에서는 거듭제곱근을 지수로 나타내어 계산하는 문제, 지
수에 대한 조건이 주어진 경우 식의 값을 구하는 문제 등이 자주
출제되며 거듭제곱근과 지수법칙에 대한 이해를 바탕으로 한 반복
학습이 필요합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. 다음 중 옳은 것은?

- ① $(-3)^2$ 의 제곱근은 3이다.
- ② $\sqrt{16}$ 의 네제곱근은 $\sqrt{2}$ 이다.
- ③ $a > 0$ 을 만족할 때, a 의 n 제곱근이 음수이면 n 은 홀
수이다.
- ④ $a < 0$ 일 때, a 의 세제곱근은 존재한다.
- ⑤ 3^2 의 세제곱근은 2이다.

[스스로 확인하기]

2. $\sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt[3]{2^2}}} \times \sqrt[6]{\frac{8}{3}} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[3]{3}$ 을 만족할 때, 실수 a, b 에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

[스스로 확인하기]

3. -2^6 의 n 제곱근중에서 실수의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값을 구하면?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

[스스로 마무리하기]

4. 자연수 a 에 대해서 $\sqrt{\frac{a^3}{4}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}}} = 8$ 을 만족 하는 a 의 값을 구하면?

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

[스스로 확인하기]

5. $\sqrt[3]{\frac{2+2^2}{1+4^{-1}}} \times \sqrt[3]{\frac{4+4^2}{2^{-1}+2^{-2}}} = \sqrt[4]{2^a}$ 를 만족할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

[스스로 확인하기]

6. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 짝수 n 과 음이 아닌 실수 a 에 대해 a 의 n 제곱근은 항
상 2개다.
- ② n 이 홀수 일 때, -5 의 n 제곱근은 한 개 이다.
- ③ 양수 a 에 대해 a 의 n 제곱근이 항상 양의 값을 가지면
 n 은 홀수이다.
- ④ 실수 a 에 대해 $\sqrt[n]{a}$ 의 값이 음수가 될 수 있다.
- ⑤ 양수 a 와 자연수 n 에 대해 a 의 n 제곱근 중 항상 실수
가 존재한다.

[스스로 확인하기]

7. 어떤 지역의 대기오염 지수는 3년마다 반으로 감소한다고 한다. 2020년의 이 지역의 대기오염 지수가 100이었을 때, 2010년의 이 지역의 대기오염 지수는?

- ① $50\sqrt[3]{2^{10}}$ ② $100\sqrt[3]{2^5}$
 ③ $50\sqrt[10]{2^3}$ ④ $100\sqrt[3]{2^{10}}$
 ⑤ $50\sqrt[3]{2^5}$

[스스로 마무리하기]

8. $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{81}\right)^{12}}$ 과 $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{64}\right)^3}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n 의 값의 합을 구하면?

- ① -8 ② -10
 ③ -12 ④ -14
 ⑤ -16

[스스로 마무리하기]

9. 세 수 $A=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $B=2^3 \times 3$, $C=\sqrt[3]{6^2}$ 에 대해서 $A^2BC^a=\frac{27}{2}$ 를 만족하도록 하는 실수 a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2
 ③ 3 ④ 4
 ⑤ 5

[스스로 마무리하기]

10. 양수 a, b, c 에 대해 $a^{-4}=2$, $b^2=8$, $c^4=4^3$ 을 만족할 때, $abc=2^{\frac{q}{p}}$ 가 된다. 서로소인 자연수 p, q 에 대해 $p+q$ 의 값을 구하면?

- ① 11 ② 12
 ③ 13 ④ 14
 ⑤ 15

[스스로 확인하기]

11. $\begin{cases} a=y\sqrt{x} \\ b=\sqrt[3]{x^2y} \end{cases}$ 일 때, $x=a^pb^q$, $y=a^rb^s$ 이다. 실수 p, q, r, s 에 대해서 $p+q+r+s$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$
 ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$
 ⑤ $\frac{8}{3}$

[스스로 확인하기]

12. $a^{-3}=4$, $b^{-2}=8$, $c^4=9$ 를 만족시키는 세 양수 a, b, c 와 자연수 n 에 대해 $\left(\frac{ac}{b}\right)^n$ 가 자연수가 되기 위한 n 의 최솟값을 구하면?

- ① 3 ② 6
 ③ 9 ④ 12
 ⑤ 15

[스스로 마무리하기]

13. $\frac{3^{3x}-3^{-3x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{13}{3}$ 을 만족할 때, x 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$
 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$
 ⑤ 1

[스스로 확인하기]

14. $f(n)=2^{-n+1} \times 3^{2n}$, $g(n)=4^n \times 3^{n-1}$ 와 자연수 m 에 대해서 $f(n)g(n)=m^4$ 을 만족하는 두 번째로 작은 n 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 5
 ③ 7 ④ 9
 ⑤ 11

[스스로 확인하기]

15. 실수 a, b 에 대하여 $(a^{\sqrt{3}} + b^{-\sqrt{3}})(a^{2\sqrt{3}} + b^{-2\sqrt{3}})$
 $(a^{4\sqrt{3}} + b^{-4\sqrt{3}}) \times \dots$
 $\times (a^{2048\sqrt{3}} + b^{-2048\sqrt{3}})$ 와 같은 것은? (단, $ab \neq 1$)

- ① $\frac{a^{4096\sqrt{3}} - b^{4096\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} - b^{\sqrt{3}}}$ ② $\frac{a^{2048\sqrt{3}} - b^{-2048\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} - b^{-\sqrt{3}}}$
 ③ $\frac{a^{4096\sqrt{3}} + b^{4096\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{3}}}$ ④ $\frac{a^{4096\sqrt{3}} - b^{-4096\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} - b^{-\sqrt{3}}}$
 ⑤ $\frac{a^{4096\sqrt{3}} + b^{-4096\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{-\sqrt{3}}}$

[스스로 확인하기]

16. 초기 방사능물질의 양은 a 가 되고, 방사능의 물질은 지수함수적으로 감소한다고 한다. 방사능물질은 하루가 지나면 전날에 있었던 양의 $\frac{1}{4}$ 이 된다고 한다. 방사능물질이 방치되고 t 시간 이후 영수가 방사능을 처음 보았고, 8시간 이후에 방사능물질의 양이 초기방사능물질 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.75}$ 인 것을 확인하였다. t 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2
 ③ 3 ④ 4
 ⑤ 5

[스스로 확인하기]

17. $a = \sqrt{12}$, $b = \sqrt[3]{3}$ 일 때, $\sqrt[4]{24} = a^p b^q$ 가 된다. 실수 p, q 에 대해 $p+q$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$
 ⑤ $\frac{7}{8}$

[스스로 마무리하기]

18. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{2}{c}$ 일 때, $4^a = (3\sqrt{3})^b = x^c$ 을 만족하는 x 의 값을 구하면?

- ① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$
 ③ $7\sqrt{3}$ ④ $8\sqrt{3}$
 ⑤ $9\sqrt{3}$

실전문제

19. 실수 a 와 3 이상의 자연수 n 에 대하여 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$ 이라 하자. $f(9, 3) + f(8, 4) + f(7, 5) + \dots + f(12-k, k) = 21$ 이 되도록 하는 자연수 k 의 최솟값은?

- ① 23 ② 24
 ③ 25 ④ 26
 ⑤ 27

20. $a > 0, b > 0$ 일 때,
 $\sqrt[3]{a^2 b^4} \times \sqrt{\sqrt[3]{a^4 b^2}} \div \sqrt[6]{a^8 b^4} = a^p b^q$ 에서 상수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값은?

- ① -1 ② 0
 ③ 1 ④ 2
 ⑤ 3

21. 양수 a, b, c 에 대하여 $a^3 = 4, b^4 = 12, c^5 = 9$ 일 때, $\left(\frac{ac}{b}\right)^n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 30 ② 60
 ③ 90 ④ 120
 ⑤ 180



정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] ① 9의 제곱근은 ± 3 이다.② 4의 네제곱근은 $\pm \sqrt{2}$ 이다.③ 양수 a 의 n 제곱근이 음수가 나올 경우 n 은 짝수가 된다.⑤ 9의 세제곱근은 $\sqrt[3]{9}$ 이 된다.

2) [정답] ⑤

$$[\text{해설}] \sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{2^2}}} \times \sqrt[6]{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}} \times \frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{3} \text{ 이므로 } a+b=15 \text{ 를 만족한다.}$$

3) [정답] ①

[해설] 음수 a 에 대해서 n 의 제곱근 중에서 실수의 개수는 n 이 짝수 일 때는 0개가 되고, n 이 홀수 일 때는 1개가 된다.따라서 $f(2)=f(4)=0$, $f(3)=1$ 으로 답은 1이다.

4) [정답] ④

$$[\text{해설}] \sqrt{\frac{a^3}{4}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}}} = \frac{\sqrt{a^3}}{2} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{a}{2}$$

이 값이 8이 되므로 $a=16$ 이 된다.

5) [정답] ①

$$[\text{해설}] \sqrt[3]{\frac{2+2^2}{1+4^{-1}}} \times \sqrt[3]{\frac{4+4^2}{2^{-1}+2^{-2}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{4^2(2+2^2)}{4^2(1+4^{-1})}} \times \sqrt[3]{\frac{2^3(4+4^2)}{2^3(2^{-1}+2^{-2})}}$$

$$= \sqrt[3]{4^2} \times \sqrt[3]{2^3}$$

$$= \sqrt[3]{2^4} \times 2 = \sqrt[3]{2^7} \text{ 이므로 } a+b=10 \text{ 을 만족한다.}$$

6) [정답] ①

[해설] ① 음이 아닌 실수 a 가 0이면 a 의 n 제곱근은 0으로 한 개가 존재한다.

7) [정답] ④

[해설] 2020년의 대기오염 지수가 100이고 3년마다

반으로 감소하므로 1년마다 $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 배로 감소한다.따라서 2010년의 대기오염 지수를 A 라고 하면

$$A \times \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 100 \text{ 이고,}$$

$$A \times \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^{10} \times (\sqrt[3]{2})^{10} = 100 \times (\sqrt[3]{2})^{10}$$

$$\therefore A = 100 \sqrt[3]{2^{10}},$$

따라서 2010년의 대기오염 지수는 $100 \sqrt[3]{2^{10}}$ 이다.

8) [정답] ③

[해설] $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{81}\right)^{12}}$ 과 $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{64}\right)^3}$ 을 지수로 표현하면

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{12}{n}} \text{와 } 64^{-\frac{3}{n}} \text{이고 정리하면 } 3^{-\frac{48}{n}}, 2^{-\frac{18}{n}} \text{이다.}$$

두 수가 자연수가 되려면 정수 n 은 음의정수이어야 한다.그리고 n 의 절댓값은 48의 약수이고 동시에 18의 약수이어야 한다.따라서 n 의 절댓값은 48과 18의 공약수이다. $n=-1, -2, -3, -6$ 으로 4개의 값의 합은 -12 가 된다.

9) [정답] ③

[해설] 세 수 $A=\left(\frac{1}{2}\right)^3, B=2^3 \times 3, C=\sqrt[3]{6^2}$ 을

지수로 나타내면

$$A=2^{-3}, B=2^3 \times 3, C=2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \text{이다.}$$

$$A^2 B C^a = 2^{-6} \times 2^3 \times 3 \times (2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}})^a$$

$$= 2^{-3+\frac{2}{3}a} \times 3^{1+\frac{2}{3}a} = \frac{27}{2} = 2^{-1} \times 3^3 \text{을}$$

만족하므로 $a=3$ 이다.

10) [정답] ⑤

[해설] $a^{-4}=2$ 이므로 $a=2^{-\frac{1}{4}}$ 가 된다. 마찬가지로

$$b=2^{\frac{3}{2}}, c=2^{\frac{3}{2}} \text{가 되는 것을 확인 할 수 있다.}$$

$$\text{따라서 } abc = 2^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{11}{4}} \text{가 되고,}$$

$$p+q=4+11=15 \text{가 된다.}$$

11) [정답] ②

$$[\text{해설}] \begin{cases} a=y\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}y \\ b=\sqrt[3]{x^2y}=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \end{cases} \text{으로 표현이 가능하다.}$$

 $x=a^p b^q, y=a^r b^s$ 으로 두고 위의 식에 대입하면

$$\begin{cases} a=y\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}y=a^{\frac{p}{2}+r}b^{\frac{q}{2}+s} \\ b=\sqrt[3]{x^2y}=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}p+\frac{1}{3}r}b^{\frac{2}{3}q+\frac{1}{3}s} \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \frac{p}{2}+r=1, \frac{2}{3}p+\frac{1}{3}r=0 \text{을 만족하므로}$$

$$\text{두 식을 연립하면 } p=-\frac{2}{3}, r=\frac{4}{3} \text{가 된다.}$$

$$\text{마찬가지로 } \frac{q}{2}+s=0, \frac{2}{3}q+\frac{1}{3}s=1 \text{을 만족하고}$$

$$\text{두 식을 연립하면 } q=2, s=-1 \text{이 된다.}$$

$$\text{따라서 } p+q+r+s=\frac{5}{3} \text{가 된다.}$$

12) [정답] ②

[해설] $a^{-3}=4$ 이므로 $a=2^{-\frac{2}{3}}$ 가 된다.

같은 방법으로 $b=2^{-\frac{3}{2}}, c=3^{\frac{1}{2}}$ 가 된다.

$$\frac{ac}{b}=2^{-\frac{2}{3}-(-\frac{3}{2})}\times 3^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{1}{2}}\text{이므로}$$

$\left(\frac{ac}{b}\right)^n$ 가 자연수가 되려면 n 은 6의 배수이어야 한다. 따라서 n 의 최솟값은 6이 된다.

13) [정답] ④

[해설] $\frac{3^{3x}-3^{-3x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{13}{3}$ 에서 $3^x=t$ 로 두면

$$\frac{t^3-\frac{1}{t^3}}{t-\frac{1}{t}}=t^2+1+\frac{1}{t^2}=\frac{13}{3}\text{이므로 } t^2+\frac{1}{t^2}=\frac{10}{3}\text{이}$$

된다. $t^2=a$ 로 치환을 하면 $a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}$ 이므로

$a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$ 을 만족한다.

따라서 $t=3^x=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 또는 $t=3^x=\sqrt{3}$ 이므로

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

14) [정답] ③

[해설] $f(n)=2^{-n+1}\times 3^{2n}$, $g(n)=4^n\times 3^{n-1}$ 이므로
 $f(n)g(n)=2^{n+1}\times 3^{3n-1}$ 이다.

자연수 m 에 대해 $m^4=2^{n+1}\times 3^{3n-1}$ 을 만족하려면

$n+1$, $3n-1$ 은 4의 배수가 되어야 한다.

이를 만족하는 n 의 값은 3, 7, 11, ...이다.

15) [정답] ④

$$\begin{aligned} & [\text{해설}] (a^{\sqrt{3}}+b^{-\sqrt{3}})(a^{2\sqrt{3}}+b^{-2\sqrt{3}})(a^{4\sqrt{3}}+b^{-4\sqrt{3}}) \\ & \times \dots \times (a^{2048\sqrt{3}}+b^{-2048\sqrt{3}}) \\ & = \frac{(a^{\sqrt{3}}-b^{-\sqrt{3}})}{(a^{\sqrt{3}}-b^{-\sqrt{3}})} \times (a^{\sqrt{3}}+b^{-\sqrt{3}})(a^{2\sqrt{3}}+b^{-2\sqrt{3}}) \\ & \times (a^{4\sqrt{3}}+b^{-4\sqrt{3}}) \times \dots \times (a^{2048\sqrt{3}}+b^{-2048\sqrt{3}}) \\ & = \frac{1}{(a^{\sqrt{3}}-b^{-\sqrt{3}})} (a^{2\sqrt{3}}-b^{-2\sqrt{3}})(a^{2\sqrt{3}}+b^{-2\sqrt{3}}) \\ & \times (a^{4\sqrt{3}}+b^{-4\sqrt{3}}) \times \dots \times (a^{2048\sqrt{3}}+b^{-2048\sqrt{3}}) \\ & \vdots \\ & = \frac{(a^{2048\sqrt{3}}-b^{-2048\sqrt{3}})}{(a^{\sqrt{3}}-b^{-\sqrt{3}})} (a^{2048\sqrt{3}}+b^{-2048\sqrt{3}}) \\ & = \frac{a^{4096\sqrt{3}}-b^{-4096\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}-b^{-\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

16) [정답] ①

[해설] 방사능물질이 24시간 만에 $\frac{1}{4}$ 로 축소되므로

x 시간 이후의 방사능물질의 양은 $a\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{24}}$ 이다.

따라서 t 시간 이후에 영수가 본 방사능 물질의

양은 $a\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{24}}$ 이고,

그로부터 8시간 이후의 방사능물질의 양은

$a\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t+8}{24}}$ 임을 알 수 있다.

문제에서 $a\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t+8}{24}}=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0.75}=a\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{8}}$

이므로 $t=1$ 이다.

17) [정답] ①

[해설] $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}=2\times 3^{\frac{1}{2}}, b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$

$$\sqrt[4]{24}=(2^3\times 3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{1}{4}}\text{이고,}$$

$$a^pb^q=(2\times 3^{\frac{1}{2}})^p\times (3^{\frac{1}{3}})^q=2^p\times 3^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}q}\text{이므로}$$

$$p=\frac{3}{4}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{3}q=\frac{1}{4}\text{가 된다.}$$

따라서 $q=-\frac{3}{8}$ 이 되고 $p+q=\frac{3}{8}$ 이 된다.

18) [정답] ②

[해설] $4^a=(3\sqrt{3})^b=x^c=k$ 라고 하면

$$4=k^{\frac{1}{a}}, 27=k^{\frac{2}{b}}, x^2=k^{\frac{c}{2}}\text{이다.}$$

$$k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{2}{b}}=k^{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}=k^{\frac{c}{2}}\text{이므로}$$

$$4\times 27=x^2\text{이다.}$$

따라서 $x=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ 이다.

19) [정답] ③

[해설] $f(12-k, k)$ 에서 k 가 자연수이므로

$12-k$ 는 정수이다.

(i) $12-k$ 가 자연수인 경우 (단, $12-k\leq 9$)

k 가 홀수이면 $f(12-k, k)=1$

k 가 짝수이면 $f(12-k, k)=2$

(ii) $12-k=0$ 인 경우

$$f(0, 12)=1$$

(iii) $12-k<0$ 인 경우

k 가 홀수이면 $f(12-k, k)=1$

k 가 짝수이면 $f(12-k, k)=0$

(i), (ii)에 의해

$$f(9, 3)+f(8, 4)+\dots+f(1, 11)+f(0, 12)=14\text{이므로}$$

$$f(-1, 13)+f(-2, 14)+\dots+f(12-k, k)=7\text{이}$$

되도록 하는 k 를 구하면 된다.

이때, (iii)에 의해 가능한 k 의 값은 25, 26이므로
 k 의 최솟값은 25다.

20) [정답] ③

$$[\text{해설}] \sqrt[3]{a^2b^4}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4b^2}}\div\sqrt[6]{a^8b^4}$$

$$= \sqrt[3]{a^2b^4} \times \sqrt[3]{a^2b} \div \sqrt[3]{a^4b^2}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{a^2b^4 \times a^2b}{a^4b^2}} = \sqrt[3]{b^3} = b = a^pb^q$$

따라서 $p+q=0+1=1$

21) [정답] ②

[해설] $a^3=4$, $b^4=12$, $c^5=9$ 이고,

a , b , c 는 양수이다.

$$\therefore a=2^{\frac{2}{3}}, b=12^{\frac{1}{4}}=(2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}, c=3^{\frac{2}{5}}$$

$$\text{따라서 } \frac{ac}{b} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{3}{20}} \text{ 이고,}$$

자연수 n 에 대하여

$$\left(\frac{ac}{b}\right)^n = 2^{\frac{n}{6}} \times 3^{\frac{3n}{20}} \text{ 이 자연수이므로}$$

$$\frac{n}{6}, \frac{3n}{20} \text{ 이 모두 자연수이다.}$$

이때 $\frac{n}{6}=k$ (단, k 는 자연수)라 하면

$$\frac{3n}{20} = \frac{18}{20}k = \frac{9}{10}k \text{ 이므로}$$

$\frac{3n}{20}$ 이 자연수가 되기 위한 k 의 최솟값은 10이다.

따라서 $n=6k$ 이므로

자연수 n 의 최솟값은 60이다.