# 04

# 복소수

복소수의 사칙연산

**예제 01**

**다음을 $a+bi$ 꼴로 나타내어라. (단, $a$, $b$는 실수이다.)**

(1) $2+i-(3+i)(1-2i)$

(2) $i(2i-1)-(i-2)i$

(3) $2+i+\dfrac{3+i}{1+i}$

(4) $\dfrac{1-2i}{2+i}+\dfrac{1}{i+1}$

**접근 방법**

복소수의 덧셈, 뺄셈은 허수단위 $i$를 문자처럼 생각하여 계산하고, 복소수의 곱셈은 $i^2=-1$임을 이용하여 계산합니다. 복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 계산합니다.

**Bible** 복소수의 사칙연산은 $i$를 문자처럼 생각하여 계산한다.

**상세 풀이**

(1) $2+i-(3+i)(1-2i)=2+i-(3-6i+i-2i^2)$

$=2+i-(5-5i)=-3+6i$

(2) $i(2i-1)-(i-2)i=2i^2-i-i^2+2i=i^2+i=-1+i$

(3) $2+i+\dfrac{3+i}{1+i}=2+i+\dfrac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2+i+\dfrac{3-3i+i-i^2}{1^2-i^2}$

$=2+i+\dfrac{4-2i}{2}=2+i+2-i=4$

(4) $\dfrac{1-2i}{2+i}=\dfrac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i-4i+2i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{-5i}{5}=-i$

$\dfrac{1}{i+1}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i}{1^2-i^2}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

이므로 $\dfrac{1-2i}{2+i}+\dfrac{1}{i+1}=-i+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

정답 ➡ (1) $-3+6i$ (2) $-1+i$ (3) $4$ (4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

**보충 설명**

$a$, $b$, $c$, $d$가 실수일 때, 복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈은 다음과 같이 계산합니다.

(1) 덧셈 : $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) 뺄셈 : $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) 곱셈 : $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 나눗셈 : $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)

풀이집 p.42

**숫자** 바꾸기

**01-1** 다음을 $a+bi$ 꼴로 나타내어라. (단, $a$, $b$는 실수이다.)

(1) $1+3i+(2+i)(i-2)$

(2) $(2+i)(1-i)-(i-1)$

(3) $(i-1)(1-2i)-\dfrac{5}{1+2i}$

(4) $\dfrac{3-i}{1+i}-\dfrac{5}{i-2}$



**표현** 바꾸기

**01-2** $\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3) $\alpha^3+\beta^3$

**개념** 넓히기 ★☆☆

**01-3** 복소수 $z=(1+i)a-3-2i$에 대하여 $z$가 순허수가 되도록 하는 실수 $a$의 값을 $x$, $z$가 실수가 되도록 하는 실수 $a$의 값을 $y$라고 할 때, $10x+y$의 값을 구하여라.

정답

**01-1** (1) $-4+3i$ (2) $4-2i$ (3) $5i$ (4) $3-i$

**01-2** (1) $6$ (2) $-\dfrac{2}{3}$ (3) $-10$

**01-3** 32

**예제 02**

**음수의 제곱근**

**다음을 $a+bi$ 꼴로 나타내어라. (단, $a$, $b$는 실수이다.)**

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{12}+\sqrt{-3}\sqrt{-12}$ (2) $\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}$

**접근 방법**

근호 안의 음수는 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ $(a>0)$임을 이용하여 간단히 정리합니다.

**Bible**

$a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

**상세 풀이**

$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$, $\sqrt{-12}=\sqrt{12}i=2\sqrt{3}i$이므로

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{12}+\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}i+\sqrt{3}i\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}i\cdot 2\sqrt{3}i$

$$=6i+6i+6i^2=-6+12i$$

(2) $\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+\dfrac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}$

$$=2i+\frac{2i}{i^2}+2=2$$

정답 ➡ (1) $-6+12i$ (2) $2$

**보충 설명**

$a$, $b$가 실수일 때, 다음이 성립합니다.

① ㉠ $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

㉡ $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq 0$)

② ㉠ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

㉡ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq 0$

풀이집 p.42

**숫자** 바꾸기

**02-1** 다음을 $a+bi$ 꼴로 나타내어라. (단, $a$, $b$는 실수이다.)

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-27}+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

(2) $\sqrt{-3}\sqrt{-27}-\dfrac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}}$

**표현** 바꾸기

**02-2** 다음 계산 과정에서 등호가 성립하지 <u>않는</u> 곳을 골라라.

(1) $1 \underset{㉠}{=} \sqrt{1} \underset{㉡}{=} \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \underset{㉢}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} \underset{㉣}{=} i\cdot i \underset{㉤}{=} -1$

(2) $i \underset{㉠}{=} \sqrt{-1} \underset{㉡}{=} \sqrt{\dfrac{1}{-1}} \underset{㉢}{=} \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \underset{㉣}{=} \dfrac{1}{i} \underset{㉤}{=} -i$

**개념** 넓히기 ★☆☆ ◆보충 설명

**02-3** 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-2|b|$를 간단히 하면? (단, $a\neq0$)

① $-a-b$ ② $a+b$ ③ $-a+3b$
④ $a-3b$ ⑤ $a+3b$

정답 **02-1** (1) $6i$ (2) $-12$ **02-2** (1) ㉢ (2) ㉢ **02-3** ②

## 예제 03

**복소수가 서로 같을 조건**

**다음 등식을 만족시키는 실수 $x$, $y$의 값을 각각 구하여라.**

(1) $(x-2)+(y+1)i=0$　　(2) $(x-y)+(2x+3y)i=3-4i$

**접근 방법**

두 복소수가 서로 같으면 두 복소수의 실수부분과 허수부분이 각각 같음을 이용하여 $x$, $y$의 값을 구합니다.

**Bible**

$a$, $b$, $c$, $d$가 실수일 때
(1) $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.
(2) $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.

**상세 풀이**

(1) $x$, $y$가 실수일 때, $x-2$, $y+1$도 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-2=0$, $y+1=0$

$\therefore x=2$, $y=-1$

(2) $x$, $y$가 실수일 때, $x-y$, $2x+3y$도 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=3$, $2x+3y=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-2$

정답 ➡ (1) $x=2$, $y=-1$　(2) $x=1$, $y=-2$

**보충 설명**

복소수가 서로 같을 조건을 이용하려면 복소수에 포함된 문자가 실수라는 조건이 반드시 필요합니다.
실수라는 조건이 없다면 (1)에서 $x-2=1$, $y+1=i$, 즉 $x=3$, $y=i-1$인 경우에도 등식이 성립하기 때문입니다.

풀이집 p.43

**숫자** 바꾸기

**03-1** 다음 등식을 만족시키는 실수 $x$, $y$의 값을 각각 구하여라.

(1) $(x-y+1)+(2x+y-4)i=0$ (2) $(x-y)+(2x+y)i=5-2i$

04

**표현** 바꾸기

**03-2** 두 실수 $x$, $y$가 등식 $(3-i)x+(1+3i)y=2+4i$를 만족시킬 때, $10x+5y$의 값을 구하여라.

**개념** 넓히기 ★☆☆

**03-3** 등식 $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1+i}=\dfrac{3}{i-\sqrt{2}}$을 만족시키는 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+y^2$의 값을 구하여라.

정답 **03-1** (1) $x=1$, $y=2$ (2) $x=1$, $y=-4$ **03-2** 9
**03-3** 6

결레복소수와 연산

**예제 04**

복소수 $z$와 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여

$$2z-i\overline{z}=2+2i$$

가 성립할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

**접근 방법**

$z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로 주어진 등식에 대입하여 식을 간단히 한 다음 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 $a$, $b$의 값을 각각 구합니다.

**Bible** 복소수 $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)의 켤레복소수는 $\overline{z}=a-bi$이다.

**상세 풀이**

$z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}2z-i\overline{z}&=2(a+bi)-i(a-bi)\\&=2a+2bi-ai+bi^2\\&=(2a-b)+(-a+2b)i\end{aligned}$$

따라서 $(2a-b)+(-a+2b)i=2+2i$이므로

$$2a-b=2,\ -a+2b=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=2$$

$$\therefore\ z=2+2i,\ \overline{z}=2-2i$$

$$\begin{aligned}\therefore\ z\overline{z}&=(2+2i)(2-2i)\\&=2^2-(2i)^2=8\end{aligned}$$

정답 ➡ 8

**보충 설명**

복소수 $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 $a-bi$를 $z$의 켤레복소수라 하고, 이것을 기호로 $\overline{z}$와 같이 나타냅니다.

복소수 $z$와 그 켤레복소수 $\overline{z}$ 사이에는 다음과 같은 성질이 성립합니다.

(1) $z+\overline{z}=2a$ (실수)　　(2) $z\overline{z}=a^2+b^2$ (실수)

(3) $z$가 실수이면 $\overline{z}=z$　　(4) $z$가 순허수이면 $\overline{z}=-z$

풀이집 p.44

숫자 바꾸기

**04-1** 복소수 $z$와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여

$$2z+i\overline{z}=1-i$$

가 성립할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.



표현 바꾸기

**04-2** 복소수 $z$와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z+\overline{z}=2$, $z\overline{z}=5$일 때, 복소수 $z$를 모두 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

**04-3** 복소수 $z$와 그 켤레복소수 $\overline{z}$가 다음 조건을 만족시킬 때, $z+\overline{z}$의 값을 구하여라.

(가) $z+1+2i$는 양의 실수이다.
(나) $z\overline{z}=20$

정답 **04-1** 2 **04-2** $1\pm2i$ **04-3** 8

복소수의 거듭제곱

## 예제 05

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(1+i)^4$ (2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$ (3) $i^{2021}+i^{2023}$

**접근 방법**

$i$의 거듭제곱은 $i$, $-1$, $-i$, $1$이 순서대로 반복됨을 이용합니다.

**Bible** $i^n$($n$은 자연수)의 값은 $n$을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 같다.

**상세 풀이**

(1) $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=4i^2=-4$$

(2) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8=i^8=(i^4)^2=1$$

(3) $i^{2021}=(i^4)^{505}\cdot i=i$

$i^{2023}=(i^4)^{505}\cdot i^3=i^3=-i$

$\therefore\ i^{2021}+i^{2023}=i+(-i)=0$

정답 ➡ (1) $-4$ (2) $1$ (3) $0$

**보충 설명**

복소수의 거듭제곱은 다음을 이용하여 계산합니다. (단, $n$은 자연수이다.)

(1) $i^n$의 합의 꼴은 $i+i^2+i^3+i^4=0$, $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=0$임을 이용합니다.

(2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴은 $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용합니다.

(3) $\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^n$ 꼴은 $\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2=\pm i$ (복부호동순)임을 이용합니다.

풀이집 p.44

숫자 바꾸기

**05-1** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(1-i)^8$　　(2) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{18}$　　(3) $i^{3011}+i^{3012}$



표현 바꾸기

**05-2** $n$이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$을 간단히 하면? (단, $n$은 자연수이다.)

① $-i$　　② $-1$　　③ $0$
④ $1$　　⑤ $i$

개념 넓히기 ★★☆

**05-3** 등식 $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}=1-i$를 만족시키는 $50$ 이하의 자연수 $n$의 개수를 구하여라.

정답 **05-1** (1) 16 (2) $-1$ (3) $1-i$　**05-2** ③
**05-3** 13