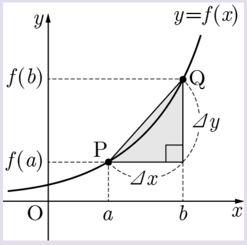
01 평균변화율과 미분계수

(1) 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이고 평균변화율은 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



(2) 미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

◪ 다음 함수에서 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

1. $f(x)=-x+2$

2. $f(x)=2x^2-3$

3. $f(x)=3x^3-1$

◪ x의 값이 [ ]와 같이 변할 때, 다음 함수의 평균변화율을 구하여라.

4. $f(x)=x^2$ [0에서 3까지]

5. $f(x)=x^2$ [1에서 5까지]

6. $f(x)=x^2$ [a에서 $a+h$까지]

7. $f(x)=-x^2+x$ [1에서 3까지]

8. $f(x)=x^2+x$ [a에서 $a+h$까지]

9. $f(x)=x^2-4x$ [-1에서 3까지]

10. $f(x)=3x^2-x$ [1에서 2까지]

11. $f(x)=x^3$ [a에서 $a+\Delta x$까지]

12. 함수 $f(x)=3x+1$에서 x의 값이 2에서 $2+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

13. 함수 $f(x)=3x+1$에서 x의 값이 2에서 $2+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

14. 함수 $f(x)=2x-3$에서 x의 값이 4에서 $4+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

15. $f(x)=x^2+3x$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 6일 때, 상수 a의 값

16. 함수 $f(x)=x^2+2x$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 6일 때, 상수 a의 값

17. 함수 $f(x)=x^2+2x-1$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 10일 때, 상수 a의 값

18. $f(x)=x^2-3x+4$에서 x의 값이 2에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 7일 때, 상수 a의 값

19. 함수 $f(x)=x^2-ax+2$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율이 3일 때, 상수 a의 값

◪ 미분계수의 정의를 이용하여 다음 함수의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

20. $f(x)=x+2$

21. $f(x)=2x+3$

22. $f(x)=3x^2$

23. $f(x)=x^2+2x$

24. $f(x)=-3x^3+6x+1$

◪ 미분계수의 정의를 이용하여 다음 함수의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

25. $f(x)=3x+2$

26. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

27. $f(x)=x^2-3x$

28. $f(x)=-x^2+2x$

◪ 다음 함수의 $x=a$에서의 미분계수가 4일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

29. $f(x)=x^2+2$

30. $f(x)=x^3+x+1$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 다음을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

31. 함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 x의 값이 1부터 2까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

32. 함수 $f(x)=x^2-x+1$에 대하여 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

33. 함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

34. 함수 $f(x)=x^3-1$에 대하여 x의 값이 1부터 4까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $1<a<4$)

35. 함수 $f(x)=x^3+x^2$에 대하여 x의 값이 a부터 1까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a\neq1$)

◪ 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

36. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{h}$

37. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+5h)-f(a)}{h}$

38. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}$

39. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+4h)-f(a-2h)}{h}$

◪ 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=1$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

40. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

41. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

42. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

43. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

◪ 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=-1$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

44. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

45. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$

46. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$

◪ 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=2$, $f'(2)=4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

47. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

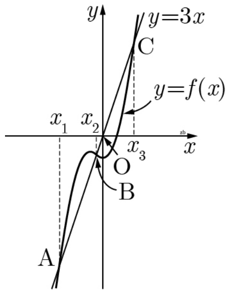
48. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-2}{x^3-8}$

49. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$

02 미분계수의 기하적 의미

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

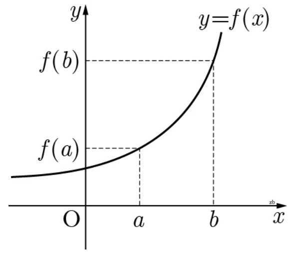
50. 함수 $f(x)=x^3+x^2-1$에 대하여 다음과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x$의 세 교점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$의 값을 구하여라.



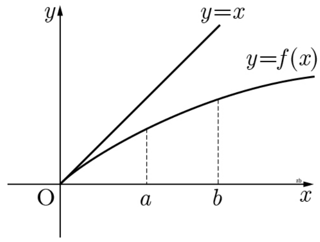
51. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,

$$A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ B=f'(a),\ C=f'(b)$$

의 크기를 비교하여라.



52. 다음은 $x \geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $0<a<b$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.



<보기>

ㄱ. $\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$　　ㄴ. $f(b)-f(a)>b-a$

ㄷ. $f'(a)>f'(b)$

◪ 다음 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

53. $f(x)=x^2$, 점 $(2, 4)$

54. $f(x)=2x^2$, 점 $(-1,\ 2)$

55. $f(x)=x^2-2$, 점 $(1, -1)$

56. $f(x)=2x^2+3$, **점** $(-1, 5)$

57. $f(x)=3x^2-4$, **점** $(1,\ -1)$

58. $f(x)=x^2+2x$, **점** $(1,\ 3)$

59. $f(x)=x^2+4x$, **점** $(1, 5)$

60. $f(x)=x^2-6x$, **점** $(3, -9)$

61. $f(x)=x^2-3x-2$, **점** $(3,\ -2)$

62. $f(x)=2x^2+x-5$, **점** $(2,\ 5)$

63. $f(x)=x^3+4$, **점** $(2,\ 12)$

03 미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역은 성립하지 않는다.

64. 다음은 함수 $f(x)=x|x|$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하는 과정이다. 다음 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 구하여라.

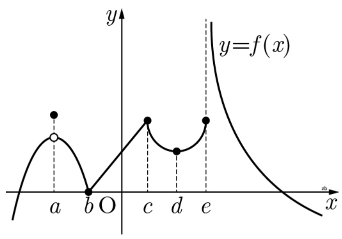
(i) $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ii) $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0,$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 $\boxed{\text{(나)}}$ 하다.

◪ **$y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.**



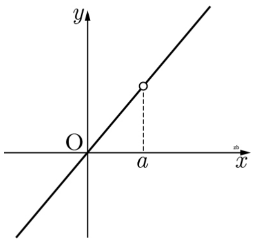
65. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 불연속인 x의 값을 모두 구하여라.

66. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 미분가능하지 않은 x의 값을 모두 구하여라.

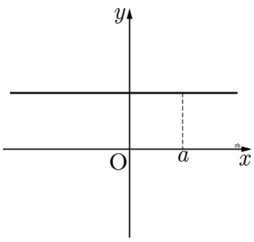
I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 그래프가 다음과 같은 함수 중 $x=a$에서 미분가능한 것에는 ○표, 미분가능하지 않은 것에는 ×표 하여라.

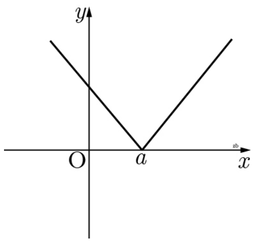
67. (　　)



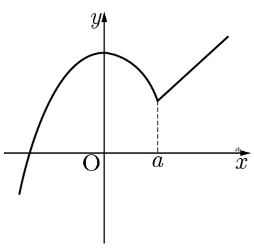
68. (　　)



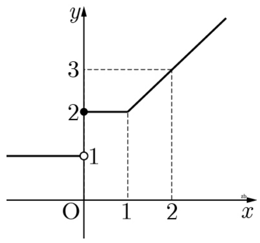
69. (　　)



70. (　　)



◪ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표 하여라.



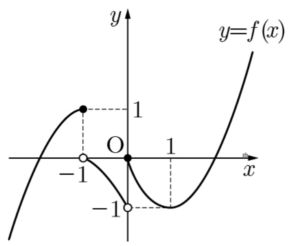
71. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (　　)

72. $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (　　)

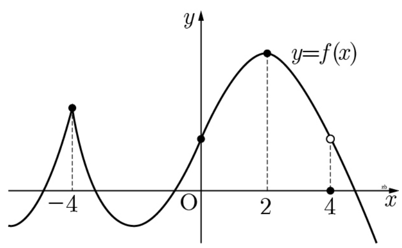
73. $x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (　　)

◪ $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 미분가능하지 않은 x의 값을 모두 구하여라.

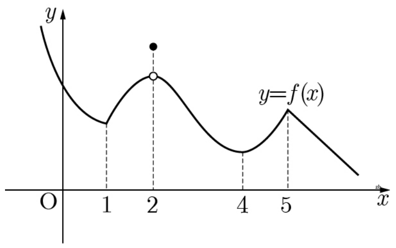
74.



75.



76.



◪ 다음 함수 $f(x)$에 대하여 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

77. $f(x)=|x|$

78. $f(x)=x+|x|$

79. $f(x)=x|x|$

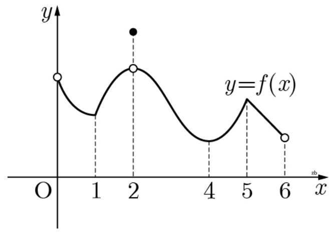
80. $f(x)=3x^2+|x|$

81. $f(x)=\begin{cases} x & (x \ge 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$

82. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$

83. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 1) \\ -x^2+2 & (x<1) \end{cases}$의 $x=1$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

84. $0<x<6$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.



<보기>

ㄱ. $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 2개이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점은 3개이다.

◪ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

85. $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x \ge 1) \\ ax+b & (x<1) \end{cases}$

86. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 1) \\ ax+b & (x<1) \end{cases}$

87. $f(x)=\begin{cases} ax-1 & (x \ge 1) \\ x^2-b & (x<1) \end{cases}$

88. $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x-1 & (x \le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$

89. $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & (x \le 1) \\ 2bx+1 & (x>1) \end{cases}$

90. $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & (x \le 1) \\ x^2+ax+b & (x>1) \end{cases}$

정답 및 해설

1) -1

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-3}{2}=-1$

2) 0

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{-1-(-1)}{2}=0$

3) 3

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{2-(-4)}{2}=3$

4) 3

$\Rightarrow$ 평균변화율은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 이므로

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{9}{3}=3$

5) 6

$\Rightarrow$ 평균변화율은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 이므로

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=\dfrac{24}{4}=6$

6) $2a+h$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

$=\dfrac{2ah+h^2}{h}=2a+h$

7) -3

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(-3^2+3)-(-1^2+1)}{2}$

$=\dfrac{-6-0}{2}=-3$

8) $2a+h+1$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$

$=\dfrac{(a+h)^2+(a+h)-(a^2+a)}{h}$

$=\dfrac{a^2+2ah+h^2+a+h-a^2-a}{h}=\dfrac{2ah+h^2+h}{h}$

$=2a+h+1$

9) -2

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$

$=\dfrac{(3^2-4\times 3)-\{(-1)^2-4\times(-1)\}}{4}=-2$

10) 8

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{(3\times 2^2-2)-(3\times 1^2-1)}{1}=8$

11) $3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\dfrac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}$

$=\dfrac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$

12) 3

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\{3(2+\Delta x)+1\}-7}{\Delta x}=\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=3$

13) 3

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{(2+\Delta x)-2}=\dfrac{\{3(2+\Delta x)+1\}-7}{\Delta x}$

$=\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=3$

14) 2

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\dfrac{\{2(4+\Delta x)-3\}-5}{\Delta x}$

$=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$

15) 2

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2+3a)-4}{a-1}$

$=\dfrac{(a+4)(a-1)}{a-1}=a+4$

즉, $a+4=6$이므로 $a=2$

16) 3

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2+2a)-(1^2+2\times 1)}{a-1}$

$=\dfrac{a^2+2a-3}{a-1}=\dfrac{(a+3)(a-1)}{a-1}=a+3$

즉, $a+3=6$에서 $a=3$

17) 7

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}$

$=\dfrac{(a^2+2a-1)-(1^2+2\times 1-1)}{a-1}$

$=\dfrac{a^2+2a-3}{a-1}=\dfrac{(a+3)(a-1)}{a-1}=a+3$

즉, $a+3=10$에서 $a=7$

18) 8

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(2)}{a-2}=\dfrac{(a^2-3a+4)-2}{a-2}$

$=\dfrac{a^2-3a+2}{a-2}=\dfrac{(a-2)(a-1)}{a-2}=a-1$

즉, $a-1=7$이므로 $a=8$

19) 3

⇨ $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=3$이므로

$\dfrac{16-4a+2-(4-2a+2)}{2}=-a+6=3 \quad \therefore a=3$

20) 1

⇨ $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)+2\}-3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

21) 2

⇨ $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{2(1+\Delta x)+3\}-(2\cdot 1+3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$

22) 6

⇨ $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{3(1+\Delta x)^2-3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(6+3\Delta x)=6$

23) 4

⇨ $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-(1^2+2\cdot 1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(4+\Delta x)=4$

24) -3

⇨ $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{-3(1+\Delta x)^3+6(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-3\Delta x-9(\Delta x)^2-3(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\{-3-9\Delta x-3(\Delta x)^2\}=-3$

25) 3

⇨ $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{3(2+\Delta x)+2\}-(3\times 2+2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=3$

26) -2

⇨ $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}(2+\Delta x)^2-\left(-\frac{1}{2}\times 2^2\right)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\dfrac{1}{2}\Delta x-2\right)=-2$

27) 1

⇨ $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\}-(2^2-3\times 2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(1+\Delta x)=1$

28) -2

⇨ $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{-(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)\}-(-2^2+2\times 2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(-2-\Delta x)=-2$

29) 2

⇨ $f'(a)=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x^2+2)-(a^2+2)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x+a)(x-a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}(x+a)=2a$

$2a=4$에서 $\qquad a=2$

30) 1

⇨ $f'(a)=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x^3+x+1)-(a^3+a+1)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-a)(x^2+ax+a^2+1)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}(x^2+ax+a^2+1)=3a^2+1$

$3a^2+1=4$에서 $\qquad a=1 \ (\because \ a>0)$

31) $\dfrac{3}{2}$

⇨ x의 값이 1부터 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{0-(-1)}{1}=1$

$x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$f'(a)=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{x^2-2x-a^2+2a}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-a)(x+a-2)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x \to a}(x+a-2)=2a-2$

따라서 $2a-2=1$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$

32) 1

⇨ x의 값이 1부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^2-a}{a-1}=a$

$x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)$은

$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x+1-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}x=1$

$\therefore a=1$

33) 2

⇨ x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{3a^2-2a}{a}=3a-2$

$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$은

$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(3x+1)=4$

따라서 $3a-2=4$이므로 $a=2$

34) $\sqrt{7}$

⇨ x의 값이 1부터 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{63}{3}=21$

또, $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2$

따라서 $3a^2=21$에서 $a^2=7$

$\therefore\ a=\sqrt{7}\ (\because\ 1<a<4)$

35) -3

⇨ x의 값이 a부터 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{2-a^3-a^2}{1-a}=a^2+2a+2$

또, $x=1$에서 미분계수는

$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+2x+2)=5$

따라서 $a^2+2a+2=5$에서

$a^2+2a-3=0$, $(a-1)(a+3)=0$

$\therefore\ a=-3\ (\because\ a\neq1)$

36) -6

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)$

$=f'(a)\times(-3)=-6$

37) 10

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\times5$

$=5f'(a)=5\cdot2=10$

38) 8

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)$

$=3f'(a)+f'(a)=4f'(a)=4\cdot2=8$

39) 12

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)-f(a-2h)+f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times4$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$=4f'(a)+2f'(a)$

$=6f'(a)=6\cdot2=12$

40) 2

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2$

$=f'(a)\times2=2$

41) -2

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$=f'(a)\times(-2)=-2$

42) 3

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)=3\times1=3$

43) 2

⇨ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=f'(a)+f'(a)$

$=2f'(a)=2\times1=2$

44) $-\frac{1}{2}$

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\frac{1}{2}=-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

45) -2

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=f'(1)\times2=(-1)\times2=-2$

46) $-\frac{1}{3}$

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\frac{1}{3}=(-1)\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

47) 1

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}$

$=f'(2)\times\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{4}=1$

48) $\frac{1}{3}$

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}$

$=f'(2)\times\frac{1}{12}=4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

49) 6

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$

$=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(2)}{x-2}$

$=2f'(2)-f(2)=2\cdot4-2=6$

50) 6

⇨ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$의 값은 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기와 같고, $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$의 값은 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=3+3=6$

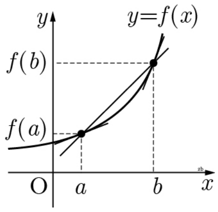
51) $B<A<C$

⇨ A는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 의미한다.

B는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 의미한다.

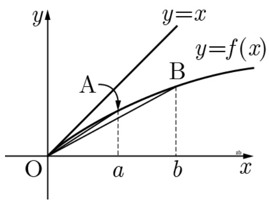
C는 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기를 의미한다.

따라서 그림에 의하여 $B<A<C$이다.



52) ㄷ

⇨ 두 점 A, B의 좌표를 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$라 하면



ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로 $\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$ (거짓)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

이때, $b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)<b-a$ (거짓)

ㄷ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)>f'(b)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

53) 4

⇨ 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$

54) -4
⇨ 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로
$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(-1+\Delta x)^2-2}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(-4+2\Delta x)=-4$

55) 2
⇨ 점 $(1,-1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로
$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-2\}-(1^2-2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$

56) -4
⇨ 점 $(-1,5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로
$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(-1+\Delta x)^2+3\}-\{2\cdot(-1)^2+3\}}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(-4+2\Delta x)=-4$

57) 6
⇨ 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로
$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)^2-4\}-(-1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(6+3\Delta x)=6$

58) 4
⇨ 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로
$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$

59) 6
⇨ 점 $(1,5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로
$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+4(1+\Delta x)\}-(1^2+4\cdot 1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6$

60) 0
⇨ 점 $(3,-9)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)$과 같으므로
$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-6(3+\Delta x)\}-(3^2-6\cdot 3)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$

61) 3
⇨ 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)$과 같으므로
$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-3(3+\Delta x)-2\}-(-2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(3+\Delta x)=3$

62) 9
⇨ 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로
$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-5\}-5}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(9+2\Delta x)=9$

63) 12
⇨ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 12)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로
$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^3+4\}-12}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\{12+6\Delta x+(\Delta x)^2\}=12$

64) (가) 연속 (나) 미분가능

65) $x=a,\ x=e$
⇨ 함수 $y=f(x)$가 $x=t$에서 연속이면

$f(t)=\lim_{x \to t} f(x)$를 만족한다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=a$와 $x=e$에서 불연속이다.

66) $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$

⇨ 함수 $y=f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$는 $x=t$에서 연속이고 $f'(t)$가 존재한다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$에서 미분가능하지 않다.

67) ×

⇨ $x=a$에서 연속이 아니므로 미분가능하지 않다.

68) ○

⇨ $x=a$에서 연속이고, $f'(a)=0$이므로 미분가능하다.

69) ×

⇨ $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

70) ×

⇨ $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

71) ×

⇨ $\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{0}{h} = 0$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

72) ×

⇨ $xf(x)=g(x)$라고 할 때,

$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hf(h)}{h} = \lim_{h \to 0} f(h)$

또, $\lim_{h \to 0+} f(h)=2 \neq \lim_{h \to 0-} f(h)=1$

이므로 $\lim_{h \to 0} f(h)$는 존재하지 않는다.

즉, $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

73) ○

⇨ $x^2 f(x)=k(x)$라고 할 때,

$\lim_{h \to 0} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} hf(h) = 0$

따라서 $x^2 f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

74) -1, 0

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$에서 미분가능하지 않다.

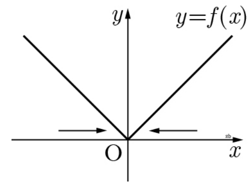
75) -4, 4

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=-4$, $x=4$에서 미분가능하지 않다.

76) 1, 2, 5

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=5$에서 미분가능하지 않다.

77) 연속이지만 미분가능하지 않다.

⇨ 

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0$, $f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

그런데

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$

이므로 $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분 가능하지 않다.

78) 연속이지만 미분가능하지 않다.

⇨ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x+|x|) = 0$, $f(0)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

따라서 함수 $f(x)=x+|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x+|x|}{x}$

$= \lim_{x \to 0+} \frac{x+x}{x} = 2$

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x+|x|}{x}$

$= \lim_{x \to 0-} \frac{x-x}{x} = 0$

이므로 $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=x+|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

79) 연속이고 미분가능하다.

⇨ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x|x| = 0$, $f(0)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

따라서 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0+} x = 0$

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0$

이므로 $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$이 존재한다.
따라서 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

80) 연속이지만 미분가능하지 않다.
⇨ $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(3x^2+|x|)=0$, $f(0)=0$이므로
$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 함수 $f(x)=3x^2+|x|$는 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to0+}(3x+1)=1$
$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{3x^2-x}{x}=\lim_{x\to0-}(3x-1)=-1$
이므로 $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)=3x^2+|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

81) 연속이고, 미분가능하지 않다.
⇨ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$
$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$
이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

82) 연속이고, 미분가능하다.
⇨ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2}{h}=0$
$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$이므로 $f'(0)=0$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

83) 연속이고 미분가능하지 않다.
⇨ (ⅰ) $f(1)=1$이고,
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x^2=1$,
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+2)=1$
이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=1$
$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
(ⅱ) $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$,
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\frac{(-x^2+2)-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$
이므로 $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

84) ㄱ
⇨ ㄱ. $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재한다. (참)
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=5$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다. (거짓)
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점은 $x=4$인 점 1개이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

85) $a=3$, $b=-2$
⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$에서 $\lim_{x\to1-}(ax+b)=\lim_{x\to1+}x^3$
$\therefore a+b=1$ $\cdots$ ㉠
또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$에서
$\lim_{x\to1-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^3-1}{x-1}$
$\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$
$\therefore a=3$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=-2$

86) $a=2$, $b=-1$
⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$는 $\lim_{x\to1+}x^2=\lim_{x\to1-}(ax+b)$
$\therefore a+b=1$ $\cdots$ ㉠
또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$,
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}a=a$
에서 $a=2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-1$

87) $a=2$, $b=0$
⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(ax-1)=a-1$,

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x^2-b)=1-b$

에서 $a-1=1-b$ $\quad\therefore\ a+b=2$ $\quad\cdots$ ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{ax-1-(a-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}a=a$

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x^2-b-(1-b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}(x+1)=2$

에서 $a=2$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=0$

88) $a=2,\ b=0$

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-x^2+4x-1)=2$,

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(ax+b)=a+b$

에서 $a+b=2$ $\quad\cdots$ ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{-x^2+4x-1-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{-(x-1)(x-3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\{-(x-3)\}=2$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{ax+b-(a+b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}a=a$

에서 $a=2$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=0$

89) $a=-1,\ b=-2$

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(ax^2+bx)=a+b$,

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(2bx+1)=2b+1$

에서 $a+b=2b+1$ $\quad\therefore\ a-b=1$ $\quad\cdots$ ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{(x-1)(ax+a+b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}(ax+a+b)=2a+b$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{2bx+1-(2b+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{2b(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}2b=2b$

에서 $2a+b=2b$ $\quad\therefore\ 2a-b=0$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=-2$

90) $a=2,\ b=2$

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(ax^2+3)=a+3$,

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$

에서 $a+3=1+a+b$ $\quad\therefore\ b=2$ $\quad\cdots$ ㉠

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{ax^2+3-(a+3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{a(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}a(x+1)=2a$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x^2+ax+b-(1+a+b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}(x+a+1)=a+2$

에서 $2a=a+2$ $\quad\therefore\ a=2$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=2$