01 치환적분법

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

⇨ $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$

(1) $f(ax+b)$의 꼴 : $\int f(x)dx=F(x)+C$이면

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

(단, a, b는 상수, $a\neq 0$, C는 적분상수)

(2) $f(g(x))g'(x)$의 꼴 : $g(x)=t$로 놓으면

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

(3) $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 꼴 : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

(단, C는 적분상수)

◪ 다음 부정적분을 구하여라.

1. $\int (2x+1)^4dx$

2. $\int (x+1)^3dx$

3. $\int (4x+1)^3dx$

4. $\int (3x-1)^5dx$

5. $\int \sqrt{2x+3}\,dx$

6. $\int 6x(x^2-3)^5dx$

7. $\int 3x^2(x^3-1)^2dx$

8. $\int (2x+1)(x^2+x-1)^2dx$

9. $\int 2(x-1)(x^2-2x-4)dx$

10. $\int (x^3+x)(x^4+2x^2)^2dx$

11. $\int \cot x\,dx$

12. $\int \tan x dx$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

13. $\int \sin 2x dx$

14. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx$

15. $\int \sin^2 x \cos x dx$

16. $\int \sin x (1+\cos x)^2 dx$

17. $\int \cos^3 x \sin x dx$

18. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x - 1} dx$

19. $\int \sin x \cos^2 x dx$

20. $\int \tan x \sec^2 x dx$

21. $\int \cos^3 x \sin x dx$

22. $\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$

23. $\int (\cos 3x + \sin 2x) dx$

24. $\int \sec^2 (3x+1) dx$

25. $\int x \sqrt{2x-8} dx$

26. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} dx$

27. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

28. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

29. $\int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$

30. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

31. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx$

32. $\int 2xe^{x^2}dx$

33. $\int 3x^2e^{x^3}dx$

34. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

35. $\int 4x^3e^{x^4}dx$

36. $\int xe^{-x^2}dx$

37. $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

38. $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$

39. $\int \frac{1}{x\ln 2x}dx$

40. $\int (e^x-1)^3e^xdx$

41. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

42. $\int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx$

43. $\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx$

44. $\int \frac{\ln 3x}{x}dx$

45. $\int \frac{2x}{(x^2+5)^4}dx$

46. $\int \frac{4x-6}{(x^2-3x+5)^2}dx$

47. $\int \frac{3x^2+x}{(2x^3+x^2+1)^2}dx$

48. $\int \frac{1}{(3x+1)^2}dx$

49. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$

50. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$

◪ **다음 물음에 답하여라.**

51. **함수** $f(x)=\int (1-\sin x)^2\cos x dx$**에 대하여** $f(0)=0$**일 때,** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$**의 값을 구하여라.**

52. **함수** $f(x)=\int e^{\frac{1}{2}x}dx$**에 대하여** $f(0)=1$**일 때, 방정식** $f(x)=0$**의 해를 구하여라.**

53. **함수** $f(x)=\int e^{\sin x}\cos x\, dx$**에 대하여** $f(0)=2$**일 때,** $f(\frac{\pi}{2})$**의 값을 구하여라.**

54. $f(x)=\int \frac{(\ln x)^3+2(\ln x)^2+1}{x}dx$**에 대하여** $f(e)=1$**일 때,** $24f(e^2)$**의 값을 구하여라.**

55. **함수** $f(x)=\int 4xe^{x+2}dx$**에 대하여** $f(0)=2e^2$**일 때,** $f(1)$**의 값을 구하여라.**

56. 함수 $f(x)$가 $f(x)=\int \sin\sqrt{x}\,dx$, $f(0)=0$일 때, $f\left(\dfrac{\pi^2}{9}\right)$의 값을 구하여라.

57. 함수 $f(x)=\int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$에 대하여 $f(0)=\ln 2$일 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

◪ 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

58. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$, $f(0)=\log_3 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

59. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $f(0)=\ln 2$ 일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

60. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-4}$, $f(2)=\ln 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

02 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

적분

그대로

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

미분

그대로

◪ 다음 부정적분을 구하여라.

61. $\int x\sin x\,dx$

62. $\int x^2\cos x\,dx$

63. $\int xe^x dx$

64. $\int x\cos x\,dx$

65. $\int (2x-1)\sin 2x\,dx$

66. $\int (3x+2)\sin x\,dx$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

67. $\int x^2 \sin x dx$

68. $\int e^x \sin x\, dx$

69. $\int (x^2 - x)e^x\, dx$

70. $\int (x-1)e^{2x} dx$

71. $\int (x^2 - 3x)\cos x dx$

72. $\int e^{2x} \cos x dx$

73. $\int e^{-x} \cos x dx$

74. $\int x^2 e^{-x}\, dx$

75. $\int x e^{x+1} dx$

76. $\int (x+2)e^x dx$

77. $\int \ln x dx$

78. $\int x(\ln x)^2 dx$

79. $\int x \ln x dx$

80. $\int (\ln x)^2 dx$

81. $\int x \ln 2x\, dx$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

82. $\int 9x^2 \ln x dx$

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

83. 함수 $f(x)=\int (x^2+4x+1)\ln x dx$에 대하여 $f(1)=0$일 때, $f(e)$의 값을 구하여라.

84. 함수 $f(x)=\int xe^x dx$에 대하여 $f(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

85. 함수 $f(x)=\int x\sin 3x dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

86. 함수 $f(x)=\int e^x \cos x dx$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

87. 함수 $h(x)=\int e^x \cos x dx$에 대하여 $h(0)=\frac{1}{2}$일 때, $h(\pi)$의 값을 구하여라.

88. 함수 $f(x)=\int \ln x dx$에 대하여 $f(e)=0$일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

89. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $F(x)=xf(x)-x^2\sin x$, $f(0)=0$이 성립할 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

90. $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 할 때, $F(x)=xf(x)-x\ln x$, $f(1)=0$이 성립할 때, $f(e^2)$의 값을 구하여라.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

정답 및 해설

1) $\frac{1}{10}(2x+1)^5+C$

⇨ $2x+1=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int(2x+1)^4dx=\int t^4\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^4dt$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{10}t^5+C$$
$$=\frac{1}{10}(2x+1)^5+C$$

2) $\frac{1}{4}(x+1)^4+C$

⇨ $x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$

$$\int(x+1)^3dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(x+1)^4+C$$

3) $\frac{1}{16}(4x+1)^4+C$

⇨ $4x+1=t$로 놓으면 $4=\frac{dt}{dx}$

$$\int(4x+1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{4}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int t^3dt=\frac{1}{16}t^4+C$$
$$=\frac{1}{16}(4x+1)^4+C$$

4) $\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$

⇨ $(3x-1)'=3$이므로

$$\int(3x-1)^5dx=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}(3x-1)^6+C$$
$$=\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$$

5) $\frac{1}{3}(\sqrt{2x+3})^3+C$

⇨ $(2x+3)'=2$이므로

$$\int\sqrt{2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{2x+3})^3+C$$

6) $\frac{1}{2}(x^2-3)^6+C$

⇨ $x^2-3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore 2xdx=dt$

$$\therefore\int 6x(x^2-3)^5dx=\int 3t^5dt=3\times\frac{1}{6}t^6+C$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-3)^6+C$$

7) $\frac{1}{3}(x^3-1)^3+C$

⇨ $x^3-1=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$

$$\int 3x^2(x^3-1)^2dx=\int t^2dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(x^3-1)^3+C$$

8) $\frac{1}{3}(x^2+x-1)^3+C$

⇨ $x^2+x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+1=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore(2x+1)dx=dt$

$$\therefore\int(2x+1)(x^2+x-1)^2dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+x-1)^3+C$$

9) $\frac{1}{2}(x^2-2x-4)^2+C$

⇨ $x^2-2x-4=t$로 놓으면

$2x-2=2(x-1)=\frac{dt}{dx}$

$$\int 2(x-1)(x^2-2x-4)dx$$
$$=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-2x-4)^2+C$$

10) $\frac{1}{12}(x^4+2x^2)^3+C$

⇨ $x^4+2x^2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3+4x=\frac{dt}{dx}$

$\therefore(x^3+x)dx=\frac{1}{4}dt$

$$\therefore\int(x^3+x)(x^4+2x^2)^2dx=\frac{1}{4}\int t^2dt$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{12}(x^4+2x^2)^3+C$$

11) $\ln|\sin x|+C$

⇨ $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ 이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int\cot xdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$$
$$=\ln|\sin x|+C$$

12) $-\ln|\cos x|+C$

⇨ $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$
$= -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx$
$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$
$= -\ln|\cos x| + C$

13) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

⇨ $2x = t$로 놓으면 $2 = \frac{dt}{dx}$

$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin t dt$
$= -\frac{1}{2}\cos t + C$
$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

14) $\ln|x + \cos x| + C$
⇨ $(x + \cos x)' = 1 - \sin x$이므로
$\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int \frac{(x + \cos x)'}{x + \cos x} dx = \ln|x + \cos x| + C$

15) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

⇨ $\sin x = t$로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$이므로

$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$
$= \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

16) $-\frac{1}{3}(1 + \cos x)^3 + C$

⇨ $1 + \cos x = t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면
$-\sin x = \frac{dt}{dx}$ $\therefore \sin x dx = -dt$
$\therefore \int \sin x (1 + \cos x)^2 dx = \int t^2 \times (-dt) = -\int t^2 dt$
$= -\frac{1}{3}t^3 + C$
$= -\frac{1}{3}(1 + \cos x)^3 + C$

17) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

⇨ $\cos x = t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면
$-\sin x = \frac{dt}{dx}$ $\therefore \sin x dx = -dt$
$\therefore \int \cos^3 x \sin x dx = \int t^3 \times (-dt) = -\int t^3 dt$
$= -\frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

18) $\ln|\tan x - 1| + C$
⇨ $\tan x - 1 = t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$ $\therefore \sec^2 x dx = dt$
$\therefore \int \frac{\sec^2 x}{\tan x - 1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$
$= \ln|\tan x - 1| + C$

19) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

⇨ $\cos x = t$로 놓으면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$

$\int \sin x \cos^2 x dx = \int (-t^2) dt = -\frac{1}{3}t^3 + C$
$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

20) $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$

⇨ $\tan x = t$로 놓으면 $\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$

$\int \tan x \sec^2 dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C$
$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

21) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

⇨

$\cos x = t$라 하면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ $\therefore -\sin x dx = dt$
$\therefore$ (주어진 적분)
$= \int -t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

22) $-\ln(2 + \cos x) + C$
⇨ $(2 + \cos x)' = -\sin x$이고 $2 + \cos x > 0$이므로
$\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{2 + \cos x} dx$
$= -\int \frac{(2 + \cos x)'}{2 + \cos x} dx$
$= -\ln(2 + \cos x) + C$

23) $\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$
⇨ $(3x)' = 3$, $(2x)' = 2$이므로
$\int (\cos 3x + \sin 2x) dx = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos x 2x + C$

24) $\frac{1}{3}\tan(3x + 1) + C$
⇨ $(3x + 1)' = 3$이므로
$\int \sec^2(3x + 1) dx = \frac{1}{3}\tan(3x + 1) + C$

25) $\frac{1}{10}(\sqrt{2x - 8})^5 + \frac{4}{3}(\sqrt{2x - 8})^3 + C$

⇨ $\sqrt{2x - 8} = t$, 즉 $x = \frac{1}{2}(t^2 + 8)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = t$

$$\int x\sqrt{2x-8}\,dx=\int \frac{1}{2}(t^2+8)\cdot t^2dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}t^4+4t^2\right)dt$$
$$=\frac{1}{10}t^5+\frac{4}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{10}(\sqrt{2x-8})^5+\frac{4}{3}(\sqrt{2x-8})^3+C$$

26) $2\sqrt{x^2+3}+C$

⇨ $\sqrt{x^2+3}=t$로 놓으면 $x^2+3=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $2x=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore 2xdx=2tdt$

$$\therefore \int\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{1}{t}\times 2tdt=\int 2dt$$
$$=2t+C=2\sqrt{x^2+3}+C$$

27) $\frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3+C$

⇨ $\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x+1=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore dx=2tdt$

$$\therefore \int x\sqrt{x+1}\,dx=\int(t^2-1)t\times 2tdt$$
$$=\int(2t^4-2t^2)dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3+C$$

28) $\frac{2}{3}(\sqrt{x+2})^3-4\sqrt{x+2}+C$

⇨ $\sqrt{x+2}=t$로 놓으면 $x+2=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore dx=2tdt$

$$\therefore \int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{t^2-2}{t}\times 2tdt$$
$$=\int(2t^2-4)dt=\frac{2}{3}t^3-4t+C$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{x+2})^3-4\sqrt{x+2}+C$$

29) $6\sqrt{e^x+1}+C$

⇨ $\sqrt{e^x+1}=t$로 놓으면 $e^x+1=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $e^x=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore e^xdx=2tdt$

$$\therefore \int\frac{3e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{3}{t}\times 2tdt=\int 6dt$$
$$=6t+C=6\sqrt{e^x+1}+C$$

30) $\ln(x^2+1)+C$

⇨ $(x^2+1)'=2x$이고 $x^2+1>0$이므로

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$
$$=\ln(x^2+1)+C$$

31) $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+3|+C$

⇨ $(x^2+4x+3)'=2x+4$이므로

$$\int\frac{x+2}{x^2+4x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+3)'}{x^2+4x+3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+3|+C$$

32) $e^{x^2}+C$

⇨ $x^2=t$로 치환하자. $2xdx=dt$

$$\int e^tdt=e^t+C=e^{x^2}+C$$

33) $e^{x^3}+C$

⇨ $x^3=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 3x^2e^{x^3}dx=\int e^tdt=e^t+C=e^{x^3}+C$$

34) $\ln(1+e^x)+C$

⇨ $(1+e^x)'=e^x$이고 $1+e^x>0$이므로

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}dx=\ln(1+e^x)+C$$

35) $e^{x^4}+C$

⇨ $x^4=t$로 놓으면 $4x^3=\frac{dt}{dx}$

$$\int 4x^3e^{x^4}dx=\int e^tdt$$
$$=e^t+C=e^{x^4}+C$$

36) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

⇨ $-x^2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-2x=\frac{dt}{dx}$ $\therefore xdx=-\frac{1}{2}dt$

$$\therefore \int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^tdt=-\frac{1}{2}e^t+C$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

37) $\frac{2}{3}(\sqrt{e^x+1})^3+C$

⇨ $e^x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x=\frac{dt}{dx}$ $\therefore e^xdx=dt$

$$\therefore \int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$=\frac{2}{3}(\sqrt{e^x+1})^3+C$

38) $\ln|e^x+x|+C$

⇨ $\int\frac{e^x+1}{e^x+x}dx=\int\frac{(e^x+x)'}{e^x+x}dx$
$=\ln|e^x+x|+C$

39) $\ln|\ln 2x|+C$

⇨ $\int\frac{1}{x\ln 2x}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln 2x}dx$
$=\int\frac{(\ln 2x)'}{\ln 2x}dx$
$=\ln|\ln 2x|+C$

40) $\frac{1}{4}(e^x-1)^4+C$

⇨ $e^x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x=\frac{dt}{dx}\quad\therefore e^x dx=dt$

$\therefore\int(e^x-1)^3e^x dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$
$=\frac{1}{4}(e^x-1)^4+C$

41) $-\cos(\ln x)+C$

⇨ $\ln x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}\quad\therefore\frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int\sin t dt$
$=-\cos t+C$
$=-\cos(\ln x)+C$

42) $\frac{2}{3}(\sqrt{\ln x+1})^3+C$

⇨ $\ln x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}\quad\therefore\frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore\int\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx=\int\sqrt{t}\,dt$
$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$
$=\frac{2}{3}(\sqrt{\ln x+1})^3+C$

43) $\frac{1}{5}(\ln x)^5+C$

⇨ $\ln x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}\quad\therefore\frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore\int\frac{(\ln x)^4}{x}dx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$
$=\frac{1}{5}(\ln x)^5+C$

44) $\frac{1}{2}(\ln 3x)^2+C$

⇨ $\ln 3x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$\int\frac{\ln 3x}{x}dx=\int t dt=\frac{1}{2}t^2+C$
$=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2+C$

45) $-\frac{1}{3(x^2+5)^3}+C$

⇨ $x^2+5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=\frac{dt}{dx}\quad\therefore 2xdx=dt$

$\therefore\int\frac{2x}{(x^2+5)^4}dx=\int\frac{1}{t^4}dt=\int t^{-4}dt$
$=-\frac{1}{3}t^{-3}+C=-\frac{1}{3(x^2+5)^3}+C$

46) $-\frac{2}{x^2-3x+5}+C$

⇨ $x^2-3x+5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-3=\frac{dt}{dx}\quad\therefore(2x-3)dx=dt$

$\therefore\int\frac{4x-6}{(x^2-3x+5)^2}dx=2\int\frac{1}{t^2}dx=-\frac{2}{t}+C$
$=-\frac{2}{x^2-3x+5}+C$

47) $-\frac{1}{2(2x^3+x^2+1)}+C$

⇨ $2x^3+x^2+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+2x=\frac{dt}{dx}\quad\therefore(3x^2+x)dx=\frac{1}{2}dt$

$\therefore\int\frac{3x^2+x}{(2x^3+x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)+C$
$=-\frac{1}{2(2x^3+x^2+1)}+C$

48) $-\frac{1}{3(3x+1)}+C$

⇨ $3x+1=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\frac{1}{(3x+1)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\times\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^{-2}dt$
$=\frac{1}{3}\times(-t^{-1})+C=-\frac{1}{3t}+C$
$=-\frac{1}{3(3x+1)}+C$

49) $\ln(x^2-x+1)+C$

⇨ $(x^2-x+1)'=2x-1$이므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx$$
$$= \ln(x^2-x+1)+C(\because x^2-x+1>0)$$

50) $-\dfrac{1}{4(x^2+2x+2)^2}+C$

⇨ $x^2+2x+2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore (x+1)dx=\dfrac{1}{2}dt$

$$\therefore \int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{2}\int t^{-3}dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)+C$$
$$= -\frac{1}{4(x^2+2x+2)^2}+C$$

51) $\dfrac{1}{3}$

⇨ 함수 $f(x)=\int (1-\sin x)^2\cos x dx$에서

$1-\sin x=t$로 놓으면 $-\cos x=\dfrac{dt}{dx}$

$\int (1-\sin x)^2\cos x dx$

$=\int (-t^2)dt=-\dfrac{1}{3}t^3+C$

$=-\dfrac{1}{3}(1-\sin x)^3+C$

이때, $f(0)=0$이므로 $f(0)=-\dfrac{1}{3}+C=0$

$\therefore C=\dfrac{1}{3}$, $f(x)=-\dfrac{1}{3}(1-\sin x)^3+\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 값은

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}\left(1-\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

52) $-2\ln 2$

⇨ $f(x)=\int e^{\frac{1}{2}x}dx=2e^{\frac{1}{2}x}+C$

$f(0)=1$이므로

$2e^0+C=1$ $\quad\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=2e^{\frac{1}{2}x}-1$

$f(x)=0$에서 $2e^{\frac{1}{2}x}=1$

$e^{\frac{1}{2}x}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}x=-\ln 2$

$\therefore x=-2\ln 2$

53) $e+1$

⇨ $\sin x=t$라 하면 $\cos x dx=dt$이므로

$f(x)=\int e^{\sin x}\cos x dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C$

이때 $f(0)=1+C=2$이므로 $C=1$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^1+1$

54) 250

⇨ $f(x)=\int \dfrac{(\ln x)^3+2(\ln x)^2+1}{x}dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$\int \dfrac{(\ln x)^3+2(\ln x)^2+1}{x}dx$

$=\int (t^3+2t^2+1)dt=\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{2}{3}t^3+t+C$

$=\dfrac{1}{4}(\ln x)^4+\dfrac{2}{3}(\ln x)^3+\ln x+C$

$f(e)=1$이므로

$\dfrac{1}{4}(\ln e)^4+\dfrac{2}{3}(\ln e)^3+\ln e+C=1$

$\therefore C=-\dfrac{11}{12}$, $f(x)=\dfrac{1}{4}(\ln x)^4+\dfrac{2}{3}(\ln x)^3+\ln x-\dfrac{11}{12}$

$x=e^2$일 때, 함수 $f(x)$의 값은

$f(e^2)=\dfrac{1}{4}(\ln e^2)^4+\dfrac{2}{3}(\ln e^2)^3+\ln e^2-\dfrac{11}{12}=\dfrac{125}{12}$

따라서 구하는 값은

$24f(e^2)=24\cdot\dfrac{125}{12}=250$

55) $2e^3$

⇨ $f(x)=\int 4xe^{x^2+2}dx$에서

$x^2+2=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$

$\int 4xe^{x^2+2}dx=2\int e^t dt$

$=2e^t+C=2e^{x^2+2}+C$

이때, $f(0)=2e^2$이므로

$2e^2+C=2e^2$

$\therefore C=0$, $f(x)=2e^{x^2+2}$

따라서 구하는 값은

$f(1)=2e^{1+2}=2e^3$

56) $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

⇨ $\sqrt{x}=t$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$이므로

$f(x)=\int \sin\sqrt{x}\,dx$

$=\int 2t\sin t\,dt=[-2t\cos t]+\int 2\cos t\,dt$

$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi^2}{9}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

57) $\frac{1}{2}\ln(e+3)$

⇨ $(e^{2x}+3)'=2e^{2x}$이고 $e^{2x}+3>0$이므로

$f(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(e^{2x}+3)'}{e^{2x}+3}dx$

$=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)+C$

$f(0)=\ln 2$이므로

$\frac{1}{2}\ln 4+C=\ln 2+C=\ln 2$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(e+3)$

58) $2\log_3 2$

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{3^x}{3^x+1}dx$에서

$(3^x+1)'=3^x\ln 3$이므로

$\int\frac{3^x}{3^x+1}dx=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx$

$=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{(3^x+1)'}{3^x+1}dx$

$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln|3^x+1|+C$

$=\frac{\ln|3^x+1|}{\ln 3}+C$

이때, $f(0)=\log_3 2$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{\ln|3^x+1|}{\ln 3}$

따라서 구하는 값은

$f(1)=\frac{\ln|3^1+1|}{\ln 3}=\frac{\ln 4}{\ln 3}=2\log_3 2$

59) $2\ln 3$

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx$에서

$\int\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}dx=\int\frac{(2^x+1)'}{2^x+1}dx$

$=\ln|2^x+1|+C$

이때, $f(0)=\ln|2^0+1|+C=\ln 2$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\ln|2^x+1|$

따라서 구하는 값은

$f(3)=\ln|2^3+1|=2\ln 3$

60) $\ln 2$

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x-4}dx$에서

$(x^2+x-4)'=2x+1$이므로

$\int\frac{2x+1}{x^2+x-4}dx=\int\frac{(x^2+x-4)'}{x^2+x-4}dx$

$=\ln|x^2+x-4|+C$

이때, $f(2)=\ln 2$이므로

$\ln|2^2+2-4|+C=\ln 2\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\ln|x^2+x-4|$

따라서 구하는 값은

$f(1)=\ln|1^2+1-4|=\ln 2$

61) $-x\cos x+\sin x+C$

⇨ $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$\therefore\int x\sin x dx=x(-\cos x)-\int 1\times(-\cos x)dx$

$=-x\cos x+\int\cos x dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$

62) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

⇨ $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$이므로

$\int x^2\cos x dx=x^2\sin x-2\int x\sin x dx\cdots$ ㉠

한편, $\int x\sin x dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx$

$=-x\cos x+\sin x+C_1\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2\cos x dx$

$=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+C_1)$

$=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

63) xe^x-e^x+C

⇨ $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$\therefore\int xe^x dx=xe^x-\int 1\times e^x dx$

$=xe^x-e^x+C$

64) $x\sin x+\cos x+C$

⇨ $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$이므로

$\int x\cos x dx=x\sin x-\int 1\cdot\sin x dx$

$=x\sin x+\cos x+C$

65) $-\frac{1}{2}(2x-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$

⇨ $f(x)=2x-1$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\int(2x-1)\sin2x dx$

$=(2x-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)-\int2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx$

$=-\frac{1}{2}(2x-1)\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x+C$

66) $-(3x+2)\cos x+3\sin x+C$

⇨ $f(x)=3x+2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$\int(3x+2)\sin x dx$

$=(3x+2)\cdot(-\cos x)-\int3\cdot(-\cos x)dx$

$=-(3x+2)\cos x+3\sin x+C$

67) $(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

⇨ $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$

$\int x^2\sin x dx=-x^2\cos x+\int2x\cos x dx$

$=-x^2\cos x+\left\{2x\sin x-\int2\sin x dx\right\}$

$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

$=(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

68) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

⇨ $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$ 이므로

$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx\cdots$ ㉠

$\int e^x\cos x dx$ 에서

$u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x, v(x)=e^x$이므로

$\int e^x\cos x dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x dx\right)$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx$

$\therefore\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

69) $(x^2-3x+3)e^x+C$

⇨ $f(x)=x^2-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x-1$, $g(x)=e^x$이므로

$\int(x^2-x)e^x dx=(x^2-x)e^x-\int(2x-1)e^x dx\cdots$ ㉠

$\int(2x-1)e^x dx$에서

$u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$이므로

$\int(2x-1)e^x dx=(2x-1)e^x-\int2e^x dx$

$=(2x-3)e^x+C_1\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int(x^2-x)e^x dx=(x^2-x)e^x-\{(2x-3)e^x+C_1\}$

$=(x^2-3x+3)e^x+C$

70) $\frac{e^{2x}(2x-3)}{4}+C$

⇨ $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^{2x}$로 놓으면

$\int(x-1)e^{2x}dx=(x-1)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int1\cdot\frac{e^{2x}}{2}dx$

$=\frac{e^{2x}(x-1)}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C$

$=\frac{e^{2x}(2x-3)}{4}+C$

71) $(x^2-3x-2)\sin x+(2x-3)\cos x+C$

⇨ $f(x)=x^2-3x$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=2x-3$, $g(x)=\sin x$

$\int(x^2-3x)\cos x dx$

$=(x^2-3x)\sin x-\int(2x-3)\sin x dx$

$=(x^2-3x)\sin x-\left\{(2x-3)(-\cos x)-\int2(-\cos x)dx\right\}$

$=(x^2-3x)\sin x+(2x-3)\cos x-2\sin x+C$

$=(x^2-3x-2)\sin x+(2x-3)\cos x+C$

72) $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C$

⇨ $f(x)=e^{2x}$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g(x)=\sin x$

$\int e^{2x}\cos x dx=e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin x dx\cdots\cdots$ ㉠

한편 $\int e^{2x}\sin x dx$에서

$u=e^{2x}$, $v'=\sin x$라고 하면

$u'=2e^{2x}$, $v=-\cos x$ 이므로

$\int e^{2x}\sin x dx=-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x dx\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\int e^{2x}\cos x dx$

$=e^{2x}\sin x-2\left(-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x dx\right)$

$=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int e^{2x}\cos x dx$

$5\int e^{2x}\cos x dx=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x$

$\therefore\int e^{2x}\cos x dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C$

73) $\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$

⇨ $f(x)=e^{-x}$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=-e^{-x}$, $g(x)=\sin x$

$\int e^{-x}\cos x dx$

$=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x dx$

$=e^{-x}\sin x+\left(-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x dx\right)$

$2\int e^{-x}\cos x dx=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$

$\int e^{-x}\cos x dx=\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$

74) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

⇨ $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx \cdots$ ㉠

한편, $\int xe^{-x}dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1)$

$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

$=-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

75) $xe^{x+1}-e^{x+1}+C$

⇨ $f(x)=x$, $g'(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^{x+1}$이므로

$\int xe^{x+1}dx=xe^{x+1}-\int e^{x+1}dx=xe^{x+1}-e^{x+1}+C$

76) $(x+1)e^x+C$

⇨ $f(x)=x+2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$\int (x+2)e^xdx=(x+2)e^x-\int e^xdx$

$=(x+2)e^x-e^x+C$

$=(x+1)e^x+C$

77) $x\ln x-x+C$

⇨ $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore \int \ln x dx=\ln x\times x-\int \dfrac{1}{x}\times x dx=x\ln x-\int 1dx$

$=x\ln x-x+C$

78) $\dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+C$

⇨ $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$\int x(\ln x)^2dx=\dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int x\ln x dx \cdots$ ㉠

한편, $\int x\ln x dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$\int x\ln x dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int \dfrac{1}{2}x dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C_1 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x(\ln x)^2dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\left(\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C_1\right)$

$=\dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+C$

79) $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

⇨ $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

$\int x\ln x dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{2}x^2dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{2}\int x dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

80) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

⇨ $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $g(x)=x$

$\int (\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-\int \dfrac{2\ln x}{x}\cdot x dx$

$=x(\ln x)^2-2\int \ln x dx$

$=x(\ln x)^2-2\left\{x\ln x-\int 1dx\right\}$

$=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)+C$

$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

81) $\dfrac{1}{2}x^2\ln 2x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

⇨ $f(x)=\ln 2x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$\int x\ln 2x dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln 2x-\int \dfrac{1}{2}x^2\times\dfrac{1}{x}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\ln 2x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

82) $3x^3\ln x-x^3+C$

⇨

u: $\ln x$, u': $\dfrac{1}{x}$, v': $9x^2$, v: $3x^3$라 하면

(주어진 적분)$=3x^3\cdot\ln x-\int 3x^2dx$

$=3x^3\cdot\ln x-x^3+C$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

83) $\frac{2}{9}e^3+e^2+\frac{19}{9}$

⇨ $f(x)=\ln x,\ g'(x)=x^2+4x+1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ \ g(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+x$

$\int(x^2+4x+1)\ln x dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right)dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\int\cdot\left(\frac{1}{3}x^2+2x+1\right)dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\frac{1}{9}x^3-x^2-x+C$

이때, $f(1)=0$이므로

$\left(\frac{1}{3}\cdot1^3+2\cdot1^2+1\right)\cdot\ln1-\frac{1}{9}\cdot1^3-1^2-1+C=0$

$\therefore C=\frac{19}{9}$

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\frac{1}{9}x^3-x^2-x+\frac{19}{9}$

따라서 구하는 값은

$f(e)=\left(\frac{1}{3}e^3+2e^2+e\right)\cdot\ln e-\frac{1}{9}e^3-e^2-e+\frac{19}{9}$

$\quad=\frac{2}{9}e^3+e^2+\frac{19}{9}$

84) $2e^3$

⇨ 부분적분법에 의해

$f(x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

$f(1)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=xe^x-e^x$이므로 $f(3)=2e^3$이다.

85) $\frac{\pi}{3}+1$

⇨

$u:x,\ u':1,\ v':\sin3x,\ v:-\frac{1}{3}\cos3x$라 하면

$f(x)=-\frac{1}{3}x\cos3x+\frac{1}{3}\int\cos3xdx$

$\quad=-\frac{1}{3}x\cos3x+\frac{1}{9}\sin3x+C$

$f(0)=C=1$이므로 $f(\pi)=\frac{\pi}{3}+1$

86) $\frac{1}{2}$

⇨ $u=\cos x,\ v'=e^x$으로 놓으면

$u'=-\sin x,\ \ v=e^x$

$f(x)=\int e^x\cos xdx$

$\quad=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx$……㉠

$\int e^x\sin xdx$에서

$f=\sin x,\ g'=e^x$로 놓으면

$f'=\cos x,\ g=e^x$

$\int e^x\sin xdx=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\int e^x\cos xdx=e^x\cos x+\left(e^x\sin x-\int e^x\cos xdx\right)$

$\quad=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx$

$\int e^x\cos xdx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$

$f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$이고

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ 이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}+C=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2},\ \ C=0$

따라서 $f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)$이므로 $f(0)=\frac{1}{2}$

87) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\int e^x\cos x\,dx$ 에서

$f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$이므로

$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\cdots$ ㉠

$\int e^x\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$ 이므로

$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\left(e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\right)$

$\therefore h(x)=\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

$h(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\quad\therefore C=0$

따라서 $h(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$이므로

$h(\pi)=\frac{1}{2}e^\pi(\cos\pi+\sin\pi)=-\frac{1}{2}e^\pi$

88) -1

⇨ $f(x)=\int\ln xdx$에서

$u=\ln x,\ v'=1$로 놓으면 $u'=\frac{1}{x},\ \ v=x$

$f(x)=\int\ln xdx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx$

$\quad=x\ln x-x+C$

$f(e)=0$이므로

$f(e)=e\ln e-e+C=0,\ \ C=0$

따라서 $f(x)=x\ln x-x$이므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$f(1)=1 \cdot \ln 1-1=-1$

89) 2

⇨ $F'(x)=f(x)$

주어진 식의 양변을 미분하자.

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\sin x-x^2\cos x$

$f'(x)=2\sin x+x\cos x$

$f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)dx$

$\int(x\cos x)dx=x\sin x-\int\sin x dx$

$\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x+C$

$f(x)=-\cos x+x\sin x+C$

$f(0)=0 \qquad \therefore \ C=1$

$f(x)=-\cos x+x\sin x+1$

$\therefore \ f(\pi)=1+0+1=2$

90) 4

⇨ $F(x)=xf(x)-x\ln x$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-\ln x-1$

$F'(x)=f(x)$이므로

$xf'(x)=\ln x+1$,

$f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x} \quad (\because x\neq 0)$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)dx$

$\quad=\int\dfrac{\ln x}{x}dx+\int\dfrac{1}{x}dx$

이때, $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$에서 $u=\ln x$, $v'=\dfrac{1}{x}$로 놓으면

$u'=\dfrac{1}{x}$, $v=\ln x$

$\int\dfrac{\ln x}{x}dx=(\ln x)^2-\int\dfrac{\ln x}{x}dx$

$2\int\dfrac{\ln x}{x}dx=(\ln x)^2$

$\therefore \int\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{(\ln x)^2}{2}$

즉, $f(x)=\int\dfrac{\ln x}{x}dx+\int\dfrac{1}{x}dx$

$\quad=\dfrac{(\ln x)^2}{2}+\ln x+C$

$f(1)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}+\ln x$

따라서 구하는 값은

$f(e^2)=\dfrac{(\ln e^2)^2}{2}+\ln e^2=4$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110