단원 ISSUE

이 단원에서는 **이차방정식과 이차함수 및 이차함수의 최대, 최소를 묻는 문제**가 자주 출제됩니다. 주어진 이차함수를 그래프로 그리는 방법을 이해하도록 하며 복합적인 내용이 자주 출제되니 여러 유형을 반복적으로 학습하도록 합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. 직선 $y=mx+n$ (단, m, n은 상수)이 두 이차함수 $f(x)=x^2-2x+3$, $g(x)=-x^2+2x-2$의 그래프에 동시에 접할 때, $m+n$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

[스스로 확인하기]

2. 직선 $y=x-k+2$와 이차함수 $y=2x^2-x+3k$의 그래프가 한 점 $\mathrm{P}(a,b)$에서 접할 때, $a+b$의 값을 구하면? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{7}{4}$
③ $\frac{19}{8}$ ④ $\frac{5}{4}$
⑤ $\frac{23}{8}$

[스스로 확인하기]

3. 직선 $y=mx$가 곡선 $y=x^2+x+1$과 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y=x^2-x+1$과는 만나지 않도록 하는 정수 m의 값을 구하면?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 1
⑤ 2

[스스로 확인하기]

4. 이차함수 $y=x^2-ax+1$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때, $f(a)=a^2+2a-2$의 최솟값을 구하면?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 1
⑤ 2

[스스로 확인하기]

5. 이차함수 $y=x^2-2(k-2)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 정수 k의 값의 개수를 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

6. 이차함수 $y=2x^2-3x+2$의 그래프 위의 점 $(1,\ 1)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 방정식이 지나는 점의 좌표는?

① $(3,1)$ ② $(3,3)$
③ $(3,6)$ ④ $(3,7)$
⑤ $(3,8)$

[스스로 확인하기]

7. 이차함수 $y=x^2+8x-4k$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프는 x축과 만나지 않도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 마무리하기]

8. 이차함수 $y=-x^2+6x-5$의 그래프 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은? (단, $1<a<4$)

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[스스로 확인하기]

9. 직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 하자. $a+b=4$일 때, 빗변의 길이 c의 최솟값을 구하면?

① 1　② $2\sqrt{2}$　③ 3　④ $4\sqrt{2}$　⑤ 8

[스스로 마무리하기]

10. 길이가 40인 철사로 직사각형을 만들 때, 직사각형의 대각선의 길이의 최솟값을 구하면?

① 10　② $10\sqrt{2}$　③ 12　④ $15\sqrt{2}$　⑤ 20

[스스로 확인하기]

11. 두 함수 $f(x)=x^2-4x+6$, $g(x)=-x^2+4x-1$에 대하여 함수 $y=(f\circ g)(x)$는 $1\le x\le 4$에서 최댓값 M, 최솟값 m을 갖는다. $M+m$의 값은?

① 13　② 11　③ 10　④ 8　⑤ 7

[스스로 확인하기]

12. x에 대한 이차함수 $y=x^2-2px-p^2+2p+1$의 최솟값을 $f(p)$라 할 때, $f(p)$의 최댓값을 구하면?

① 4　② -1　③ $\frac{1}{2}$　④ $-\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[스스로 확인하기]

13. $-3\le x\le 0$에서 이차함수 $f(x)=x^2+2x+k$의 최솟값이 2일 때, $f(x)$의 최댓값과 상수 k의 값의 합을 구하면?

① -3　② 0　③ 3　④ 6　⑤ 9

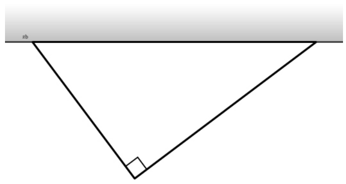
[스스로 확인하기]

14. $0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)=2x^2-4kx+2k^2+k-2$의 최솟값이 1이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[스스로 확인하기]

15. 길이가 $20\sqrt{2}\,\mathrm{m}$인 철망을 이용하여 그림과 같이 벽면을 빗변으로 하는 직각삼각형 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 이때 가축우리의 넓이의 최댓값은? (단, 빗변의 길이는 $20\,\mathrm{m}$이다.)

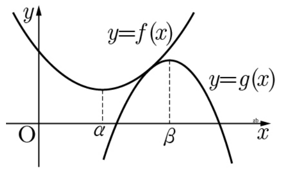


① $100\,\mathrm{m}^2$　② $100\sqrt{2}\,\mathrm{m}^2$　③ $150\,\mathrm{m}^2$　④ $150\sqrt{2}\,\mathrm{m}^2$　⑤ $200\,\mathrm{m}^2$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

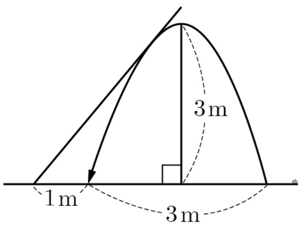
실전문제

16. x^2의 계수가 각각 $\frac{1}{3}$, -1이고 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 각각 α, β인 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 접한다. 접점의 x좌표는?



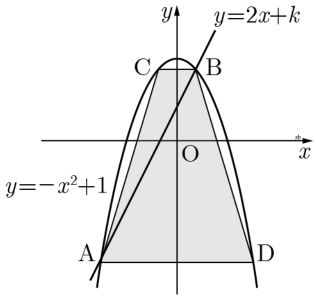
① $\frac{\alpha+3\beta}{4}$　② $\frac{3\alpha+\beta}{4}$
③ $\frac{\alpha+2\beta}{3}$　④ $\frac{2\alpha+\beta}{3}$
⑤ $\frac{\alpha+\beta}{2}$

17. 그림과 같이 어느 호수에 설치된 분수의 한 물줄기는 포물선 모양으로 나타나고, 이 물줄기의 시작 지점과 끝 지점 사이의 거리와 수면으로부터의 최고 높이는 모두 $3m$이다. 물줄기의 시작 지점으로부터 뒤쪽으로 $1m$ 떨어진 지점에서 쏘아 올린 레이저가 이 물줄기와 맞닿을 때, 레이저와 물줄기가 만나는 지점의 수면으로부터의 높이는? (단, 물줄기의 시작 지점과 끝 지점, 레이저는 한 직선 위에 있다.)



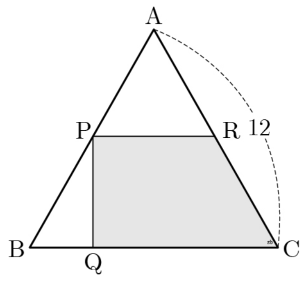
① $\frac{4}{3}m$　② $\frac{5}{3}m$
③ $2m$　④ $\frac{7}{3}m$
⑤ $\frac{8}{3}m$

18. 그림과 같이 $-2<k<1$인 실수 k에 대하여 이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 이 때, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y=-x^2+1$와 만나는 점을 D라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y=-x^2+1$와 만나는 점을 C라 하자. 사다리꼴 ADBC의 넓이가 12일 때, 상수 k의 값은?



① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{4}$

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 변 BC에 평행한 직선이 변 AC와 만나는 점을 R이라 하자. 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 꼭짓점 A와 꼭짓점 B가 아니다.)



① $12\sqrt{3}$　② $16\sqrt{3}$
③ $20\sqrt{3}$　④ $24\sqrt{3}$
⑤ $32\sqrt{3}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

20. $-1 \le x \le 2$ **일 때,**
함수 $y=\left(-x^2+2x\right)^2+4\left(-x^2+2x\right)+3$ **의 최댓값은?**

① -1 ② 0
③ 3 ④ 8
⑤ 15

21. **이차항의 계수가** 2**인 이차함수** $f(x)$**는 다음 조건을 만족시킨다.**
함수 $f(x)$**의 최솟값은?**

(가) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 3이다.
(나) 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $f(\alpha)+f(\beta)=4$이다.

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$
⑤ $\frac{9}{2}$

정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설] $x^2-2x+3=mx+n$

$x^2-(m+2)x+3-n=0$에서 접할 조건은

$x^2-(m+2)x+3-n=0$의 판별식 $D=0$이므로

$D=(m+2)^2-4(3-n)=0$

$m^2+4m+4n-8=0\cdots$ ㉠

$-x^2+2x-2=mx+n$

$x^2+(m-2)x+n+2=0$에서 접할 조건은

$x^2+(m-2)x+n+2=0$의 판별식 $D'=0$이므로

$D'=(m-2)^2-4(n+2)=0$

$m^2-4m-4n-4=0\cdots$ ㉡

㉠-㉡을 하면 $8m+8n-4=0$

$\therefore m+n=\frac{1}{2}$

2) [정답] ③

[해설] $2x^2-x+3k=x-k+2$의 판별식이 0이어야 하므로 $1^2-4(2k-1)=0$이고 $k=\frac{5}{8}$이다.

$k=\frac{5}{8}$를 이차방정식 $x^2-x+2k-1=0$에 대입하면 $x=a=\frac{1}{2}$이고 $x=\frac{1}{2}$을 $y=x-k+2$에 대입하면 $y=b=\frac{15}{8}$이다. 따라서 $a+b=\frac{19}{8}$이다.

3) [정답] ②

[해설] 직선 $y=mx$가 곡선 $y=x^2+x+1$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $x^2+x+1=mx$이 서로 다른 두 실근을 가져야한다.

$(1-m)^2-4>0$

$(m-1-2)(m-1+2)>0$

$(m-3)(m+1)>0$

$m<-1$ 또는 $m>3$이다. $\cdots$㉠

직선 $y=mx$가 곡선 $y=x^2-x+1$과는 만나지 않으므로 $x^2-x+1=mx$이 실근이 존재하지 않아야 한다.

$(m+1)^2-4<0$

$(m+1-2)(m+1+2)<0$

$(m-1)(m+3)<0$

$-3<m<1$ 이다. $\cdots$㉡

㉠과 ㉡의 공통부분은 $-3<m<-1$ 이다.

따라서 m은 -2이다.

4) [정답] ①

[해설] $y=x^2-ax+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 $x^2-ax+1=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.

$D=a^2-4<0$이고 $-2<a<2$ 이다.

$-2<a<2$ 에서

$f(a)=a^2+2a-2=(a+1)^2-3$의 최솟값은 -3이다.

5) [정답] ⑤

[해설] 이차함수 $y=x^2-2(k-2)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 $x^2-2(k-2)x+9=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-9<0$, $k^2-4k-5<0$이고

$(k-5)(k+1)<0$이므로 $-1<k<5$이다.

따라서 정수 k의 값의 개수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

6) [정답] ②

[해설] 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+1$이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=2x^2-3x+2$의 그래프와 접하므로 방정식 $2x^2-3x+2=a(x-1)+1$,

즉 $2x^2-(3+a)x+1+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=\{-(3+a)\}^2-8(1+a)=0$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$이므로 $a=1$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x$이고 $y=x$ 위의 점은 $(3,3)$이다.

7) [정답] ④

[해설] 이차함수 $y=x^2+8x-4k$의 그래프가 x축과 만나므로 방정식 $x^2+8x-4k=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=4^2+4k\geq 0$이고 $k\geq -4$이다.

또한 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $-2x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot k<0$이고 $k<-\frac{1}{8}$이다.

따라서 $-4\leq k<-\frac{1}{8}$이고 정수 k는 $-4,-3,-2,-1$의 4개이다.

8) [정답] ③

[해설] 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 점 C에서 이차함수 $y=-x^2+6x-5$의 그래프에 접할 때 삼각형 ABC의 넓이는 최대가 된다. 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-0}{4-1}=1$이므로 기울기가 1이고 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$라 하자.

방정식 $x^2-5x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-5)^2-4(k+5)=0$이고 $k=\frac{5}{4}$이다.

방정식 $x^2-5x+\frac{5}{4}+5=0$에서

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$4x^2-20x+25=0$, $(2x-5)^2=0$이므로 $x=\frac{5}{2}$이다. 따라서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$이다.

9) [정답] ②
[해설] a, b, c는 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 $c^2=a^2+b^2$이고, $a+b=4$, $a>0$, $b>0$이므로 $b=4-a\,(0<a<4)$를 $c^2=a^2+b^2$에 대입하여 정리하면 $c^2=a^2+(4-a)^2=2(a-2)^2+8$이다. c^2의 최솟값은 8이므로 빗변의 길이 c의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

10) [정답] ②
[해설] 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $20-x$이므로 직사각형의 대각선의 길이를 l이라 하면
$l^2=x^2+(20-x)^2=2x^2-40x+400$
$=2(x-10)^2+200$
이때 $0<x<20$이므로 $x=10$일 때 l^2의 최솟값은 200이다. 따라서 구하는 대각선의 길이의 최솟값은 $\sqrt{200}=10\sqrt{2}$이다.

11) [정답] ①
[해설] $g(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$
$1\le x\le 4$에서 $y=g(x)$는
$x=4$일 때 최소, $x=2$일 때 최대이다.
$\therefore -1\le g(x)\le 3$
$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)^2-4g(x)+6$
$=(g(x)-2)^2+2$
$-1\le g(x)\le 3$에서 $y=(f\circ g)(x)$는
$g(x)=2$일 때 최소, $g(x)=-1$일 때 최대이다.
$M=9+2=11$, $m=2$
$\therefore M+m=13$

12) [정답] ⑤
[해설] $y=x^2-2px-p^2+2p+1$
$=(x-p)^2-2p^2+2p+1$
주어진 이차함수는 $x=p$일 때,
최솟값 $-2p^2+2p+1$을 가진다.
$f(p)=-2p^2+2p+1=-2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$
따라서 $f(p)$의 최댓값은 $p=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{3}{2}$이다.

13) [정답] ⑤
[해설] $-3\le x\le 0$에서
$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$의 최솟값이 2이므로 $k-1=2$이고 $k=3$이다. 따라서 $-3\le x\le 0$에서 $f(x)=(x+1)^2+2$의 최댓값은 $x=-3$일 때 6이므로 최댓값과 k값의 합은 9이다.

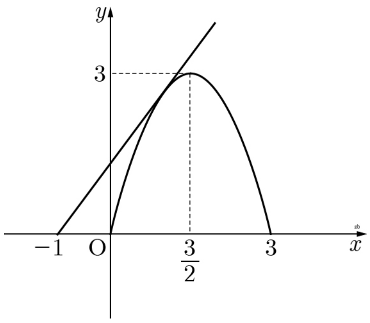
14) [정답] ①
[해설] $f(x)=2x^2-4kx+2k^2+k-2$
$=2(x-k)^2+k-2$
(i) $k<0$일 때, 최솟값 $f(0)=2k^2+k-2=1$이다.
$2k^2+k-3=0$
$(2k+3)(k-1)=0$이고 $k<0$이므로 $k=-\frac{3}{2}$이다.
(ii) $0\le k\le 2$일 때, 최솟값은 $f(k)=k-2=1$이고 $k=3$이다. 그런데 $0\le k\le 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $k>2$일 때, 최솟값은 $f(2)=6-7k+2k^2=1$이다.
$2k^2-7k+5=0$
$(2k-5)(k-1)=0$이고 $k>2$이므로 $k=\frac{5}{2}$이다.
따라서 모든 k의 값의 합은 $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$이다.

15) [정답] ①
[해설] 빗변이 아닌 한 변의 길이를 x라 하면 다른 한 변의 길이는 $20\sqrt{2}-x$이다.
가축우리의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}x(20\sqrt{2}-x)$
$=-\frac{1}{2}(x-10\sqrt{2})^2+100$
이므로 넓이의 최댓값은 $100\,\mathrm{m}^2$이다.

16) [정답] ①
[해설] 꼭짓점의 좌표가 주어졌으므로 두 함수 f, g는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$f(x)=\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+C$, $g(x)=-(x-\beta)^2+D$
(단, C, D는 상수)
두 함수의 그래프가 한 점에서 접하므로
접점의 x좌표를 $x=t$라고 하면
$\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+C=-(x-\beta)^2+D$에서
$\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2+C-D=\frac{4}{3}(x-t)^2=0$꼴 이다.
$\frac{4}{3}x^2-\left(\frac{2\alpha+6\beta}{3}\right)x+K=\frac{4}{3}(x-t)^2$ (K는 상수)
x의 계수를 비교하면 $-\frac{2\alpha+6\beta}{3}=\frac{4}{3}(-2t)$
$\therefore t=\frac{\alpha+3\beta}{4}$

17) [정답] ⑤
[해설] 그림과 같이 좌표평면을 세우면
물줄기가 나타내는 이차함수는
두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=ax(x-3)$이라 하자.



점 $\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$을 지나므로 $-\frac{9}{4}a=3,\quad a=-\frac{4}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{4}{3}x(x-3)$

레이저가 나타내는 직선의 방정식은

점 $(-1,\ 0)$을 지나므로 $y=b(x+1)$이라 하자.

$-\frac{4}{3}x(x-3)=b(x+1)$

$4x^2+(3b-12)x+3b=0$

$D=(3b-12)^2-48b=0$

$3b^2-40b+48=0$

$(3b-4)(b-12)=0$

$b=12$일 때, $4x^2+24x+36=0$

$(x+3)^2=0,\ x=-3$

성립하지 않는다.

$b=\frac{4}{3}$일 때, $4x^2-8x+4=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

따라서 구하고자 하는 높이는 $f(1)=\frac{8}{3}$이다.

18) [정답] ④

[해설] 두 교점의 좌표를 각각 $A(\alpha,\ 2\alpha+k)$, $B(\beta,\ 2\beta+k)$ $(\alpha<0,\quad \beta>0)$라 하면 방정식 $-x^2+1=2x+k$ 즉, $x^2+2x+k-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다.

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=k-1$

이때 $\overline{AD}=-2\alpha,\ \overline{CB}=2\beta$이고

사다리꼴 $ADBC$의 높이는 $(2\beta+k)-(2\alpha+k)=2\beta-2\alpha$이므로

사다리꼴 $ADBC$의 넓이는

$\frac{(2\beta-2\alpha)(2\beta-2\alpha)}{2}=12$

$(\beta-\alpha)^2=6$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6$

$4-4(k-1)=6\quad \therefore k=\frac{1}{2}$

19) [정답] ④

[해설] 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{BQ}=x$라 하면 $\overline{QC}=12-x$

$\overline{QH}=6-x$이므로 $\overline{PR}=2\overline{QH}=12-2x$

$\overline{BQ}:\overline{PQ}=\overline{BH}:\overline{AH}$이므로 $x:\overline{PQ}=6:6\sqrt{3}$

$\therefore \overline{PQ}=x\sqrt{3}$

사각형 $PQCR$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}(\overline{PR}+\overline{QC})\overline{PQ}=\frac{1}{2}(12-2x+12-x)x\sqrt{3}$

$=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2-8x)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-4)^2+24\sqrt{3}$

따라서 S의 최댓값은 $24\sqrt{3}$이다.

20) [정답] ④

[해설] $-x^2+2x=t$로 치환하면

$t=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $t=-(x-1)^2+1$은

$x=1$일 때 최대이고 최댓값은 1

$x=-1$일 때 최소이고 최솟값은 -3이다.

즉, t의 범위는 $-3\le t\le 1$이 된다.

이때 $y=t^2+4t+3=(t+2)^2-1$

$-3\le t\le 1$에서 함수 $y=(t+2)^2-1$은

$t=1$일 때 최대이고 최댓값은 8이다.

따라서 주어진 함수의 최댓값은 8이다.

21) [정답] ②

[해설] 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $p,\ q$라 하면 조건 (가)에서 근과 계수의 관계에 의하여 $p+q=3$이므로 상수 c에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=2x^2-6x+c$으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$이고 $f(\alpha)+f(\beta)=4$에서

$2\alpha^2+2\beta^2-6\alpha-6\beta+2c=4$에서

$2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-6(\alpha+\beta)+2c=4$

$2c=10\quad \therefore c=5$

$\therefore f(x)=2x^2-6x+5=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574