2-2-1.접선의 방정식과 평균값 정리_천재(류희찬)

개념check

[접선의 방정식]

• 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

(1) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

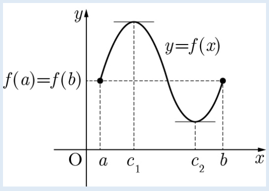
(2) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

[롤의 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

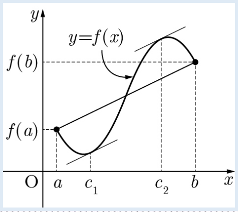


[평균값 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



기본문제

[예제]

1. 곡선 $y=x^2+x-2$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은?

① $y=-2x-4$ ② $y=-2x-2$
③ $y=-x-3$ ④ $y=-x-2$
⑤ $y=x-1$

[문제]

2. 다음 중 곡선 $y=x^3+x$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 방정식은? (단, a는 상수이다.)

① $y=x+1$ ② $y=x+2$
③ $y=2x$ ④ $y=2x+2$
⑤ $y=4x-2$

[예제]

3. 곡선 $y=x^2+2x+2$에 접하고 기울기가 4인 직선의 방정식을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[문제]

4. 곡선 $y=x^4+3$에 접하고 기울기가 4인 직선의 x절편은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[예제]

5. 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=x^2-4x+8$에 그은 접선 중 기울기가 양수인 접선의 방정식은?

① $y=x-2$ ② $y=2x-4$
③ $y=3x-6$ ④ $y=4x-8$
⑤ $y=5x-10$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

6. 점 $(0, 2)$에서 곡선 $y=-x^3$에 그은 접선의 방정식은?

① $y=-4x+2$
② $y=-3x+2$
③ $y=-2x+2$
④ $y=-x+2$
⑤ $y=x+2$

[예제]

7. 함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은?

① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

[문제]

8. 함수 $f(x)=x^3-4x+1$ 에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$
② $\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[예제]

9. 함수 $f(x)=-x^2+6x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[문제]

10. 함수 $f(x)=x^2+4x$에 대하여 닫힌구간 $[1,\ 7]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[예제]

11. 점 $(-1, 3)$을 지나는 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 4)$의 모든 x에서 $f'(x)=0$일 때, $f(0)$의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

평가문제

[스스로 확인하기]

12. 다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 알맞은 것을 고르면?

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-\boxed{\ (ㄱ)\ }=\boxed{\ (ㄴ)\ }(x-a)$$

① (ㄱ) : $f(a)$, (ㄴ) : $f(a)$
② (ㄱ) : $f(a)$, (ㄴ) : $f'(a)$
③ (ㄱ) : $f'(a)$, (ㄴ) : $f(a)$
④ (ㄱ) : $f'(a)$, (ㄴ) : $f'(a)$
⑤ (ㄱ) : $f'(a)$, (ㄴ) : a

[스스로 확인하기]

13. 곡선 $y=x^3+x$ 위의 점 $(2,\ 10)$에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편은?

① -20
② -18
③ -16
④ -14
⑤ -12

[스스로 확인하기]

14. 곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 A에서의 접선이 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$와 수직으로 만날 때, 점 A의 좌표는?

① $(-1, 0)$
② $(0, 0)$
③ $(1, 2)$
④ $(2, 6)$
⑤ $(3, 12)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 확인하기]

15. 곡선 $y=-x^2+1$에 접하고 직선 $y=4x+1$과 평행한 직선의 방정식의 y절편은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

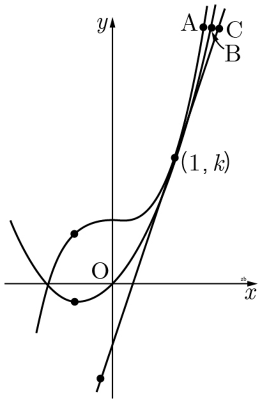
[스스로 확인하기]

16. 직선 $y=mx+5$가 곡선 $y=-x^2+4$에 접할 때, 양의 상수 m의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[스스로 확인하기]

17. 다음 그림은 좌표평면 위를 움직이는 세 점 A, B, C의 경로를 나타낸 것이다. 두 점 A, B의 경로는 각각 곡선 $y=x^3+ax+b$, $y=x^2+x$의 일부이고 점 C의 경로는 직선이다. A, B의 경로를 나타내는 두 곡선이 모두 점 $(1,\ k)$에서 C의 경로를 나타내는 직선과 접할 때, 상수 $a,\ b,\ k$에 대하여 $a+2b+k$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[스스로 확인하기]

18. 다음은 평균값 정리에 대한 설명이다. (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ) 안에 알맞은 것을 고르면?

> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 (ㄱ) 이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 (ㄴ) 하면
>
> $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ (ㄷ)
>
> 인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

① (ㄱ) : 연속, (ㄴ) : 미분가능, (ㄷ) : $f'(c)$

② (ㄱ) : 연속, (ㄴ) : 연속, (ㄷ) : $f'(c)$

③ (ㄱ) : 연속, (ㄴ) : 미분가능, (ㄷ) : $f(c)$

④ (ㄱ) : 미분가능, (ㄴ) : 연속, (ㄷ) : $f'(c)$

⑤ (ㄱ) : 미분가능, (ㄴ) : 미분가능, (ㄷ) : $f(c)$

[스스로 확인하기]

19. 함수 $f(x)=2x^2+2x$ 에 대하여 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\dfrac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[스스로 확인하기]

20. 함수 $f(x)=3x^3-a^2x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 3a]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값이 2일 때, 양수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[스스로 확인하기]

21. 함수 $f(x)=3x^2-6x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 확인하기]

22. 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 닫힌구간 $[1,\ a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값이 2일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

[스스로 확인하기]

23. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(5)$의 최댓값은?

(가) 점 $(1,\ 2)$을 지난다.
(나) x좌표가 1보다 크고 5보다 작은 곡선 위의 임의의 점에서의 접선의 기울기가 6 이하이다.

① 22 ② 23
③ 24 ④ 25
⑤ 26

[스스로 마무리하기]

24. 곡선 $y=x^3-2x+5$의 접선 중에서 직선 $y=x-1$과 평행한 두 접선 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2
③ $2\sqrt{2}$ ④ 4
⑤ $4\sqrt{2}$

[스스로 마무리하기]

25. 곡선 $y=x^3-x^2+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] $f(x)=x^2+x-2$라 하면 $f'(x)=2x+1$

곡선 $y=x^2+x-2$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=2\times(-1)+1=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=-\{x-(-1)\}$

즉 $y=-x-3$

2) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^3+x$라 하면 $f'(x)=3x^2+1$

또한, $a=1+1=2$

곡선 $y=x^3+x$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의

접선의 기울기는 $f'(1)=3+1=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=4(x-1)$

즉 $y=4x-2$

3) [정답] ④

[해설] $f(x)=x^2+2x+2$라 하면 $f'(x)=2x+2$

접점의 x좌표를 a라고 하면 $2a+2=4$

즉, $a=1$

곡선 $y=x^2+2x+2$ 위의 점 $(1,5)$에서의

접선의 방정식은 $y-5=4(x-1)$

즉, $y=4x+1$

따라서 y절편은 1

4) [정답] ③

[해설] $y'=4x^3$ 이므로 접점의 x좌표를 a라고 하면

$4a^3=4$, $a=1$이다.

따라서 곡선 위의 점은 $(1,4)$이고, 기울기는 4인 직선의 방정식은

$y-4=4(x-1)$

$y=4x$

따라서 직선의 x절편은 0이다.

5) [정답] ④

[해설] $f(x)=x^2-4x+8$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-4a+8)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-4$

따라서 접선의 방정식은

$y-(a^2-4a+8)=(2a-4)(x-a)$에서

$y=(2a-4)x-a^2+8$ ⋯㉠

이 접선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=4a-a^2$, $a(a-4)=0$

즉 $a=0$ 또는 $a=4$

a의 값을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-4x+8$ 또는 $y=4x-8$

기울기가 양수인 접선의 방정식은 $y=4x-8$

6) [정답] ②

[해설] $y'=-3x^2$이므로 곡선 위의 접점을

$(a,\ -a^3)$이라 하면 접선의 기울기는 $-3a^2$

따라서 접선의 방정식은

$y=-3a^2(x-a)-a^3$

$y=-3a^2x+2a^3$

이 직선이 점 $(0,2)$를 지나므로

$2a^3=2$

$a=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x+2$

7) [정답] ③

[해설] 함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 4)$에서 미분가능하다.

이때 $f(-1)=f(4)=4$이므로

$f'(c)=0$

인 c가 열린구간 $(-1,\ 4)$에

적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-3$이므로

$f'(c)=2c-3=0$

에서 $c=\dfrac{3}{2}$

8) [정답] ⑤

[해설] $f(0)=1$, $f(2)=1$이므로 열린구간 $(0,2)$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c가 존재한다.

$f'(c)=3c^2-4=0$

$c=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

9) [정답] ③

[해설] 함수 $f(x)=-x^2+6x$는 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 6)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(6)-f(0)}{6-0}=\dfrac{0-0}{6}=0=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(c)=-2c+6$이므로

$c=3$

10) [정답] ④

[해설] $f(1)=5$, $f(7)=49+28=77$

따라서 평균값 정리에 의해

$f'(c)=\dfrac{77-5}{7-1}=12$

$f'(x)=2x+4$

$2c+4=12$

$\therefore c=4$

11) [정답] ③

[해설] $-2<x\le 4$인 임의의 실수 x에 대하여

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2,\ x]$에서 연속이고 열

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

린구간 $(-2,\ x)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-2,\ x)$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 $f'(c)=0$이므로 $f(x)-f(-2)=0$
즉 $f(x)=f(-2)$
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 4]$에서 상수함수이다.
$f(-1)=3$이므로 $f(x)=3\ (-2\le x\le 4)$
$\therefore f(0)=3$

12) [정답] ②
[해설] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

13) [정답] ③
[해설] $y'=3x^2+1$이므로
$x=2$일 때의 접선의 기울기는 13
따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은
$y=13(x-2)+10$
$y=13x-16$
$\therefore$구하고자 하는 직선의 y절편은 -16

14) [정답] ③
[해설] 곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 (a,a^2+a)에서의 접선의 기울기는 $2a+1$이다.
이 접선이 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$와 수직으로 만나므로
$(2a+1)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$
$2a+1=3$
$a=1$
따라서 A 좌표는 $(1,2)$

15) [정답] ⑤
[해설] $y=-x^2+1$ 위의 점을 $(a,-a^2+1)$라 하자.
이 점에서의 접선의 기울기는 $-2a$이므로
$-2a=4$
$a=-2$
따라서 접점은 $(-2,\ -3)$이므로 접선의 방정식은
$y=4(x+2)-3$
$y=4x+5$
$\therefore y$절편은 5

16) [정답] ②
[해설] $y=-x^2+4$ 위의 점을 $(a,-a^2+4)$라 하자.
이 점에서의 접선의 기울기는 $-2a$이므로
접선의 방정식은
$y=-2a(x-a)-a^2+4$
$y=-2ax+a^2+4$
이 때, $a^2+4=5$이므로 $a=1$ 또는 $a=-1$
즉, 접선의 방정식은
$y=2x+5$ 또는 $y=-2x+5$
그런데 $m>0$이므로 $m=2$

17) [정답] ④
[해설] 곡선 $y=x^2+x$는 점 $(1,\ k)$를 지나므로
$k=2$
곡선 $y=x^3+ax+b$은 $(1,2)$를 지나므로
$2=1+a+b$
$a+b=1$ …㉠
두 곡선은 $x=1$에서 접선의 기울기가 동일하다.
따라서 $3+a=2+1$
즉, $a=0$
㉠에 대입하면 $b=1$
$\therefore a+2b+k=0+2+2=4$

18) [정답] ①
[해설] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고
열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

19) [정답] ③
[해설] $f(-2)=f(1)=4$이므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린구간 $(-2,1)$에서 존재한다.
$f'(c)=4c+2$이므로
$4c+2=0$
$\therefore c=-\dfrac{1}{2}$

20) [정답] ⑤
[해설] $f'(c)=9c^2-a^2=0$에서
$9c^2=a^2$
$c=2$이므로
$a^2=36$
$a>0$이므로 $a=6$

21) [정답] ④
[해설] $f(0)=0,\ f(1)=-3$ 이므로
평균값 정리에 따라
$\dfrac{-3-0}{1-0}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.
$f'(c)=6c-6=-3$
$c=\dfrac{1}{2}$

22) [정답] ②
[해설] $f(1)=2,\ f(a)=a^2+1$
$f'(c)=2c$ 이므로 평균값 정리에 의해
$2c=\dfrac{a^2+1-2}{a-1}=\dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1}=a+1$
그런데, $c=2$이므로 $a+1=4$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$\therefore a=3$

23) [정답] ⑤

[해설] 다항함수는 모든 실수 x에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$ …㉠

인 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에서 $f(1)=2$ …㉡

조건 (나)에서 $f'(c)\le 6$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{f(5)-2}{4}\le 6,\ f(5)-2\le 24$

즉 $f(5)\le 26$이므로 $f(5)$의 최댓값은 26이다.

24) [정답] ③

[해설] $y=x^3-2x+5$ 위의 한 점 $(a,\,a^3-2a+5)$에 대하여 $y'=3x^2-2$이므로

$x=a$일 때 접선의 기울기는 $3a^2-2$

이때 접선이 $y=x-1$과 평행하므로

$3a^2-2=1,\ 3a^2=3$

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점은 $(-1,6),\ (1,4)$이므로

접선의 방정식은 각각

$y=x+7,\ y=x+3$

$y=x+7$ 위의 점 $(0,\ 7)$에서 $x-y+3=0$까지의 거리는

$\dfrac{|-7+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ 두 직선 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$

25) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2x$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=1$

따라서 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 기울기가 -1이고 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+2$

$\mathrm{A}(2,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 2)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125