2021년 삼계고 수학1 1학기 기말

DATE	
NAME	
GRADE	

1. 삼각형 ABC에서 $B=75^\circ$, $C=45^\circ$, $a=18$일 때, c의 값은? [4.4점]

① $6\sqrt{6}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{7}$

2. 삼각형 ABC에서 $a=3, b=6, C=120^\circ$일 때, c의 값은? [4.4점]

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

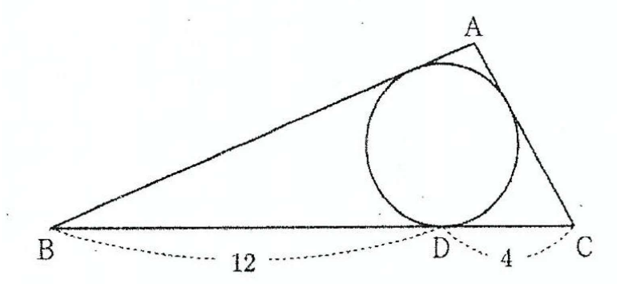
3. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $7, 8, 9$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.6점]

① $9\sqrt{5}$ ② $10\sqrt{6}$ ③ $11\sqrt{5}$ ④ $11\sqrt{6}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

4. 길이가 각각 $6, a, b$인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 $a+b=12$일 때, ab의 값은? [4.7점]

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

5. 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BC}=12$, $\overline{DC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4.8점]



① $18\sqrt{3}$ ② 24 ③ $24\sqrt{3}$ ④ 28 ⑤ $28\sqrt{3}$

6. $\angle A=120^\circ$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 AD의 길이는? [4.7점]

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

7. 첫째항부터 제 5항까지의 합이 50, 첫째항부터 제 10항까지의 합이 200인 등차수열의 첫째항과 공차의 합은? [4.3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

8. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|$라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=24$
(나) $S_n=T_n$을 만족하는 모든 자연수 n의 합은 55이다.

$T_{15}-S_{15}$의 값은? [5.0점]

① 310 ② 320 ③ 330 ④ 340 ⑤ 350

9. 등비수열 $3, -6, 12, -24, 48, \cdots$의 일반항 a_n은? [4.1점]

① $2\times2^{n-1}$ ② $2\times3^{n-1}$ ③ $3\times(-3)^{n-1}$
④ $3\times(-2)^{n-1}$ ⑤ $3\times2^{n-1}$

10. 빛이 어느 공장에서 생산한 유리를 통과하면 그 양이 일정한 비율로 줄어든다고 한다. 이 유리를 8장 통과한 후 빛의 양이 처음 빛의 양보다 36% 줄어들었다고 할 때, 이 유리를 4장 통과한 후 빛의 양은 처음 빛의 양보다 $r\%$ 줄어들었다. 이때 r의 값은? [4.3점]

① 10 ② 20 ③ 40 ④ 60 ⑤ 80

11. 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 a_n의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{5}\frac{S_n}{a_n}$의 값은? [4.6점]

① 179 ② 180 ③ $\frac{361}{2}$ ④ $\frac{363}{2}$ ⑤ 182

12. 연이율이 2%이고 1년마다 복리로 매년 초에 100만원씩 10년동안 적립할 때, 10년째 말의 적립금의 원리합계는?
(단, $1.02^{10}=1.22$로 계산한다.) [4.5점]

① 1020만원 ② 1100만원 ③ 1120만원
④ 1122만원 ⑤ 1125만원

13. 다음은 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$a_1=S_1=\boxed{\quad(가)\quad}\cdots①$ $a_n=S_n-S_{n-1}$ $=n^2+2n-\{\boxed{\quad(나)\quad}\}=\boxed{\quad(다)\quad}(n=2,3,4,\cdots)\cdots②$ ①은 ②에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n은 $a_n=\boxed{\quad(다)\quad}$이다.

(가)에 알맞은 수를 k, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, $f(k)\times g(k)$의 값은? [4.5점]

① 15 ② 35 ③ 49 ④ 56 ⑤ 135

14. $\sum_{k=1}^{10}a_k=30$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=12$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k-4)$의 값은? [4.0점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. $\sum_{k=1}^{5}(k^3+k^2)$의 값은? [4.1점]

① 270 ② 275 ③ 280 ④ 285 ⑤ 290

16. 일반항이 $a_n=n^2+n$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 5항까지의 합은? [4.2점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

17. 함수 $y=x^2-6x+9$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 함수 $y=x-1$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 B_n이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{10}\overline{A_nB_n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4.8점]

① 106 ② 108 ③ 110 ④ 112 ⑤ 114

18. $a_1=-2$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}\ (n=1,2,3,\cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 5항은? [4.2점]

① $-\frac{7}{6}$ ② $-\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $-\frac{6}{7}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

19. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$ (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $a_2 + a_8$의 값은? [4.9점]

① -134 ② -73 ③ 73 ④ 92 ⑤ 134

20. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 4$이고 다음 조건을 만족시킨다.

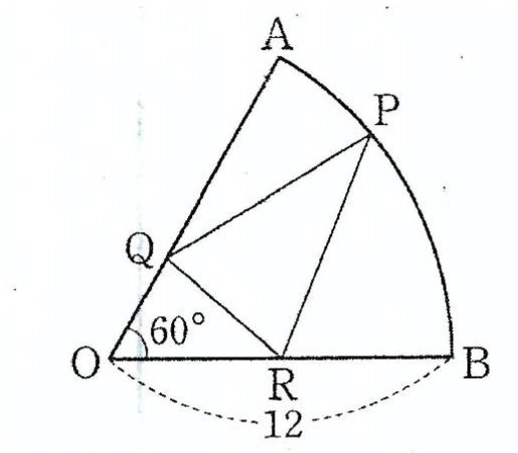
(가) $n = 1, 2, 3$에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 5 & (a_n \geq 0) \\ -3a_n + p & (a_n < 0) \end{cases}$ 이다. (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4} = a_n$이다.

$\sum_{k=1}^{14} a_k = 63$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은? [4.9점]

① -42 ② -31 ③ -23 ④ -15 ⑤ -8

[논술형1] 모든 자연수 n에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$가 성립함을 증명하는 과정을 논술하시오. [4.0점]

[논술형2] 그림과 같이 중심각이 60°, 반지름의 길이가 12인 부채꼴 OAB위의 세 점 P, Q, R는 각각 호 AB, 선분 OA, 선분 OB위를 움직인다. 이 때 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값을 구하고 그 과정을 논술하시오. [6.0점]



1) ①

2) ⑤

3) ⑤

4) ⑤

5) ③

6) ②

7) ⑤

8) ③

9) ④

10) ②

11) ①

12) ④

13) ④

14) ③

15) ③

16) ⑤

17) ②

18) ②

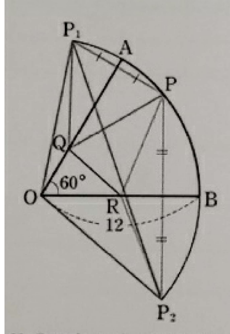
19) ①

20) ④

21) [논술형1]

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2=1$이므로
주어진 등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$
양변에 $(k+1)^3$을 더하면 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$
$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$
따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

22) [논술형2]



부채꼴의 호 AB를 연장한 원주 위에
점 P의 선분 OA, 선분 OB에 대한 대칭점을 각각
P_1, P_2라고 하면
$\overline{PQ}=\overline{P_1Q}$, $\overline{PR}=\overline{P_2R}$이므로
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P_1Q}+\overline{QR}+\overline{P_2R}\ge\overline{P_1P_2}$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은
$\overline{P_1P_2}$와 같다.

부채꼴의 호의 길이와와 중심각의 크기는 비례하므로
각 P_1OP_2의 크기는 $2\times 60°=120°$ 이고
위의 삼각형 OP_1P_2에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{P_1P_2}^2=12^2+12^2-2\times 12\times 12\times\cos 120°=144+144+144=3\times 144$
따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3\times 144}=12\sqrt{3}$