01 점에 대한 대칭이동

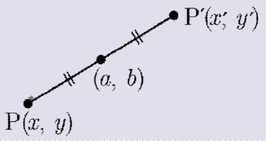
(1) 점 $P(x,y)$를 점 (a,b)에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',y')$이라 하면 점 (a,b)는 선분 PP'의 중점

(2) 점 $P(x,y)$를 점 (a,b)에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',y')$이라 하면

$a=\dfrac{x+x'}{2}$, $b=\dfrac{y+y'}{2}$이므로

$x'=2a-x$, $y'=2b-y$

$\therefore P'(2a-x, 2b-y)$



◪ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

1. $A(2,-5), B(0,1)$

2. $A(2,2), B(0,-4)$

3. $A(-6,0), B(2,6)$

4. $A(-2,-4), B(6,2)$

5. $A(-3,-5), B(7,5)$

6. $A(8,-4), B(-4,4)$

7. $A(4,3), B(-6,9)$

8. $A(-2,-5), B(4,3)$

◪ 다음 점 P를 점 M에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표를 구하여라.

9. $P(2,5), M(1,-2)$

10. $P(-1,-2), M(-3,4)$

11. $P(4,1), M(1,5)$

12. $P(-2,-3), M(1,1)$

13. $P(-3,-5), M(2,-2)$

14. $P(0,-1), M(-1,3)$

15. $P(2,-7), M(0,1)$

16. $P(-4,0), M(1,-1)$

◪ 직선 l을 점 P에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

17. $l: x-y-5=0, P(1,-1)$

18. $l: x-y+10=0, P(2,-5)$

19. $l: x+2y-8=0, P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

20. $l: 2x+y-1=0, P(-1,3)$

21. $l: 2x-y+1=0, P(-1,2)$

22. $l: 3x+y+3=0, P(-3,0)$

23. $l: 3x+4y+5=0, P(6,-4)$

24. $l: 4x-2y-5=0, P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

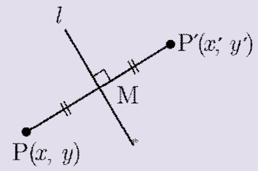
25. 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$를 점 $(2,-3)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

02 직선 $y=mx+n$에 대한 대칭이동

점 $P(x,y)$를 직선 l: $y=mx+n$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',y')$이라 하면

(1) 중점 조건: $\overline{PP'}$의 중점 M이 직선 l 위의 점이다.

(2) 수직 조건: $\overline{PP'} \perp l$ ➔ (기울기의 곱)$=-1$



◪ 다음 점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표를 구하여라.

26. $P(3,0)$, $l: y=2x-1$

27. $P(2,1), l: y=-x+1$

28. $P(1,2), l: y=3x+2$

29. $P(3,2), l: y=2x+1$

30. $P: (-1,-2), l: -x+2y+1=0$

31. $P(-1,4), l: x-3y-2=0$

◪ 다음 원 O를 직선 l에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

32. $O: x^2+y^2-4x+6y+9=0$, $l: y=x-2$

33. $O: x^2+y^2+2x-4=0$, $l: 2x-y+1=0$

34. $O: x^2+y^2+2x-10y+20=0$, $l: 3x-4y-2=0$

◪ 다음을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하여라.

35. 직선 $y=2x+1$에 대하여 점 $P(3, a)$와 점 $Q(b, 4)$가 서로 대칭이다.

36. 직선 $2x+y=5$에 대하여 점 $P(4, a)$와 점 $Q(b, 0)$이 서로 대칭이다.

37. 직선 $3x+y+4=0$에 대하여 점 $P(a, 3)$와 점 $Q(-1, b)$이 서로 대칭이다.

38. 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=25$를 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2=25$가 된다.

39. 원 $x^2+y^2-6x-2y+9=0$을 직선 $4x-2y=5$에 대하여 대칭이동하면 점 $(2, a)$를 지난다.

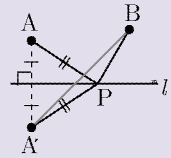
03 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값

직선 l을 기준으로 같은 쪽에 두 점 A, B가 있고, 점 P가 직선 l 위를 움직일 때,

점 A를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

➔ $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP} \geq \overline{A'B}$

즉 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$이다.



◪ 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 다음을 구하여라.

40. $A(1, 2), B(8, 3)$

(1) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A'의 좌표

(2) x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

41. $A(0, 3), B(-4, 5)$

(1) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A'의 좌표

(2) x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

42. $A(-1, 1), B(2, 3)$

(1) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A'의 좌표

(2) x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

43. $A(2, 1), B(4, 4)$

(1) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A'의 좌표

(2) x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

◪ 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 다음을 구하여라.

44. $A(-1,1), B(3,2)$

(1) 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점 A'의 좌표

(2) y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

45. $A(-3,2), B(-4,5)$

(1) 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점

(2) y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

46. $A(2,0), B(-3,3)$

(1) 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점

(2) y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

47. $A(1,2), B(4,3)$

(1) 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점

(2) y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값

◪ 좌표평면 위의 두 점 A, B와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

48. $A(2,3), B(5,9)$

49. $A(1,2), B(6,7)$

50. $A(-4,3), B(-2,1)$

51. $A(-2,4), B(-1,0)$

52. $A(0,2), B(-4,1)$

53. $A(-3,3), B(2,4)$

◪ 두 점 $A(1,2), B(3,4)$와 다음과 같은 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하여라.

54. 점 P가 x축 위를 움직일 때

55. 점 P가 y축 위를 움직일 때

56. 점 P가 직선 $y=x$ 위를 움직일 때

◪ 두 점 $A(-1,3), B(-5,1)$과 다음과 같은 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하여라.

57. 점 P가 x축 위를 움직일 때

58. 점 P가 y축 위를 움직일 때

59. 점 P가 직선 $y=x$ 위를 움직일 때

◪ 다음 두 점 A, B와 x축 위의 한 점 P, y축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구하여라.

60. $A(1,1), B(2,4)$

61. $A(2,1), B(5,3)$

62. $A(3,1), B(4,2)$

63. $A(3,5), B(2,7)$

64. $A(4,2), B(2,6)$

65. $A(4,3), B(2,5)$

◪ **다음 두 점 A, B와 y축 위의 한 점 P, x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구하여라.**

66. $A(3,3), B(2,1)$

67. $A(-4,7), B(-2,3)$

68. $A(-3,-1), B(-2,3)$

69. $A(4,1), B(1,3)$

70. $A(1,-1), B(-2,5)$

71. $A(-3,0), B(4,1)$

정답 및 해설

1) $P(1,-2)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{2+0}{2}=1,\ y=\frac{-5+1}{2}=-2$
$\therefore P(1,-2)$

2) $P(1,-1)$
두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{2+0}{2}=1,\ y=\frac{2-4}{2}=-1\quad \therefore P(1,-1)$

3) $P(-2,3)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{-6+2}{2}=-2,\ y=\frac{0+6}{2}=3\quad \therefore P(-2,3)$

4) $P(2,-1)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{-2+6}{2}=2,\ y=\frac{-4+2}{2}=-1\quad \therefore P(2,-1)$

5) $P(2,0)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{-3+7}{2}=2,\ y=\frac{-5+5}{2}=0$
$\therefore P(2,0)$

6) $P(2,0)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{8-4}{2}=2,\ y=\frac{-4+4}{2}=0$
$\therefore P(2,0)$

7) $P(-1,6)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 $P(x,y)$라 하면
$x=\frac{4-6}{2}=-1, y=\frac{3+9}{2}=6\quad \therefore P(-1,6)$

8) $P(1,-1)$
⇨ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면
점 P는 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다.
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$x=\frac{-2+4}{2}=1,\ y=\frac{-5+3}{2}=-1$
$\therefore P(1,-1)$

9) $(0,-9)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(1,-2)$는 두 점 $P(2,5), Q(x,y)$의
중점이므로 $\frac{2+x}{2}=1,\ \frac{5+y}{2}=-2$
따라서 $x=0,\ y=-9$이므로
점 Q의 좌표는 $(0,-9)$이다.

10) $(-5,10)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(-3,4)$은 두 점 $P(-1,-2), Q(x,y)$의 중점이므로
$\frac{-1+x}{2}=-3, \frac{-2+y}{2}=4$
따라서 $x=-5, y=10$이므로 점 Q의 좌표는 $(-5,10)$이다.

11) $(-2,9)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(1,5)$는 두 점 $P(4,1), Q(x,y)$의 중점이므로
$\frac{4+x}{2}=1, \frac{1+y}{2}=5$
따라서 $x=-2, y=9$이므로 점 Q의 좌표는 $(-2,9)$이다.

12) $(4,5)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(1,1)$는 두 점 $P(-2,-3), Q(x,y)$의
중점이므로 $\frac{-2+x}{2}=1,\ \frac{-3+y}{2}=1$
따라서 $x=4,\ y=5$이므로
점 Q의 좌표는 $(4,5)$이다.

13) $(7,1)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(2,-2)$은 두 점 $P(-3,-5), Q(x,y)$의 중점이므로
$\frac{-3+x}{2}=2, \frac{-5+y}{2}=-2$
따라서 $x=7, y=1$이므로 점 Q의 좌표는 $(7,1)$이다.

14) $(-2,7)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(-1,3)$는 두 점 $P(0,-1), Q(x,y)$의 중점이므로
$\frac{0+x}{2}=-1, \frac{-1+y}{2}=3$
따라서 $x=-2, y=7$이므로 점 Q의 좌표는 $(-2,7)$이다.

15) $(-2,9)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(0,1)$은 두 점 $P(2,-7)$, $Q(x,y)$의 중점이므로
$\frac{2+x}{2}=0$, $\frac{-7+y}{2}=1$
따라서 $x=-2$, $y=9$이므로 점 Q의 좌표는 $(-2,9)$이다.

16) $(6,-2)$
⇨ 점 $Q(x,y)$라 하면 점 $M(1,-1)$는 두 점 $P(-4,0)$, $Q(x,y)$의 중점이므로
$\frac{-4+x}{2}=1$, $\frac{0+y}{2}=-1$
따라서 $x=6$, $y=-2$이므로 점 Q의 좌표는 $(6,-2)$이다.

17) $x-y+1=0$
⇨ x 대신 $2\cdot1-x=2-x$, y 대신 $2\cdot(-1)-y=-2-y$를 직선 l에 대입하면
$(2-x)-(-2-y)-5=0$
$2-x+2+y-5=0$
$\therefore x-y+1=0$

18) $x-y-24=0$
⇨ x 대신 $2\cdot2-x=4-x$, y 대신 $2\cdot(-5)-y=-10-y$를 직선 l에 대입하면
$(4-x)-(-10-y)+10=0$
$4-x+10+y+10=0$
$\therefore x-y-24=0$

19) $x+2y-1=0$
⇨ x 대신 $2\cdot\frac{1}{2}-x=1-x$, y 대신 $2\cdot2-y=4-y$를 직선 l에 대입하면
$(1-x)+2(4-y)-8=0$
$1-x+8-2y-8=0$
$\therefore x+2y-1=0$

20) $2x+y-1=0$
⇨ x 대신 $2\cdot(-1)-x=-2-x$, y 대신 $2\cdot3-y=6-y$를 직선 l에 대입하면
$2(-2-x)+(6-y)-1=0$
$-4-2x+6-y-1=0$
$\therefore 2x+y-1=0$

21) $2x-y+7=0$
⇨ x 대신 $2\cdot(-1)-x=-2-x$, y 대신 $2\cdot2-y=4-y$를 직선 l에 대입하면
$2(-2-x)-(4-y)+1=0$
$-4-2x-4+y+1=0$
$\therefore 2x-y+7=0$

22) $3x+y+15=0$
⇨ x 대신 $2\cdot(-3)-x=-6-x$, y 대신 $2\cdot0-y=-y$를 직선 l에 대입하면
$3(-6-x)+(-y)+3=0$
$-18-3x-y+3=0$
$\therefore 3x+y+15=0$

23) $3x+4y-9=0$
⇨ x 대신 $2\cdot6-x=12-x$, y 대신 $2\cdot(-4)-y=-8-y$를 직선 l에 대입하면
$3(12-x)+4(-8-y)+5=0$
$36-3x-32-4y+5=0$
$\therefore 3x+4y-9=0$

24) $4x-2y+11=0$
⇨ x 대신 $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-x=-1-x$, y 대신 $2\cdot\frac{1}{2}-y=1-y$를 직선 l에 대입하면
$4(-1-x)-2(1-y)-5=0$
$-4-4x-2+2y-5=0$
$\therefore 4x-2y+11=0$

25) $(x-3)^2+(y+8)^2=4$
⇨ 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(1,2)$를 점 $(2,-3)$에 대하여 대칭이동한 점을 (x,y)라 하면 점 $(2,-3)$은 두 점 $(1,2)$와 (x,y)의 중점이므로
$\frac{1+x}{2}=2$, $\frac{2+y}{2}=-3$ $\therefore x=3, y=-8$
따라서 중심이 $(3,-8)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+8)^2=4$

26) $Q(-1,2)$
⇨ 점Q의 좌표를 (a,b)라 하면 두 점 $P(3,0)$, $Q(a,b)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로
$\frac{b}{2}=2\cdot\frac{3+a}{2}-1$ $\therefore 2a-b=-4\cdots㉠$
직선PQ와 직선 $y=2x-1$은 서로 수직이므로
$\frac{b-0}{a-3}\cdot2=-1$ $\therefore a+2b=3$ $\cdots㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(-1,2)$이다.

27) $Q(0,-1)$
⇨ 점Q의 좌표를 (a,b)라 하면 두 점 $P(2,1)$, $Q(a,b)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$가 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로
$\frac{1+b}{2}=-\frac{2+a}{2}+1$ $\therefore a+b=-1\cdots㉠$
또, 직선PQ와 직선 $y=-x+1$은 서로 수직이므로

$\frac{b-1}{a-2}\cdot(-1)=-1 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=-1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,-1)$이다.

28) $Q\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

⇨ $Q(a,b)$라고 하면 두 점 P, Q의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$가 직선 $y=3x+2$을 지나므로

$\frac{b+2}{2}=3\cdot\frac{a+1}{2}+2$

$\therefore 3a-b+5=0 \quad \cdots$㉠

두 점 P, Q를 지나는 직선이 직선 $y=3x+2$에 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+3b-7=0 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-\frac{4}{5}, b=\frac{13}{5}$

$\therefore Q\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

29) $Q(-1,4)$

⇨ $Q(a,b)$라고 하면 두 점 P, Q의 중점 $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x+1$을 지나므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{3+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b+6=0 \quad \cdots$㉠

두 점 P, Q를 지나는 직선이 직선 $y=2x+1$에 수직이므로

$\frac{b-2}{a-3}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b-7=0 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-1, b=4$

$\therefore Q(-1,4)$

30) $Q\left(-\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

⇨ $Q(a,b)$라고 하면 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$가 직선 l 위의 점이므로

$-1\cdot\frac{a-1}{2}+2\cdot\frac{b-2}{2}+1=0$

$\therefore a-2b+1=0 \quad \cdots$㉠

두 점 P, Q를 지나는 직선이 직선 l에 수직이므로

$\frac{b-(-2)}{a-(-1)}=-2$

$\therefore 2a+b+4=0 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-\frac{9}{5}, b=-\frac{2}{5}$

$\therefore Q\left(-\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

31) $Q(2,-5)$

⇨ 점 Q의 좌표를 (a,b)라 하면 두 점 $P(-1,4), Q(a,b)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$가 직선 $x-3y-2=0$ 위의 점이므로

$\frac{-1+a}{2}-3\cdot\frac{4+b}{2}-2=0 \quad \therefore a-3b=17 \cdots$㉠

또, 직선 PQ와 직선 $x-3y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$는 서로 수직이므로

$\frac{b-4}{a+1}\cdot\frac{1}{3}=-1 \quad \therefore 3a+b=1 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=-5$

따라서 점 Q의 좌표는 $(2,-5)$이다.

32) $(x+1)^2+y^2=4$

⇨ $x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=4$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2,-3)$, 반지름의 길이는 2이다.

원의 중심을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a,b)라 하면 두 점 $(2,-3)$, (a,b)의 중점 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$\frac{-3+b}{2}=\frac{2+a}{2}-2 \quad \therefore a-b=-1 \cdots$㉠

또, 두 점을 지나는 직선이 직선 $y=x-2$와 수직이므로

$\frac{b-(-3)}{a-2}\cdot 1=-1 \quad \therefore a+b=-1 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=0$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1,0)$이다.

중심이 $(-1,0)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x+1)^2+y^2=4$

33) $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+\frac{2}{5}\right)^2=5$

⇨ $x^2+y^2+2x-4=0$에서

$(x+1)^2+y^2=5$

원의 중심 $(-1,0)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a,b)라 하면 두 점 $(-1,0), (a,b)$의 중점

$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$가 직선 $2x-y+1=0$ 위의 점이므로

$2\cdot\frac{-1+a}{2}-\frac{b}{2}+1=0 \quad \therefore 2a-b=0 \quad \cdots$㉠

또, 두 점을 지나는 직선과 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$은 서로 수직이므로

$\frac{b-0}{a-(-1)}\cdot 2=-1 \quad \therefore a+2b=-1 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{5}, b=-\frac{2}{5}$

따라서 중심이 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$이고 반지름의 길이가

$\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은 $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+\frac{2}{5}\right)^2=5$

34) $(x-5)^2+(y+3)^2=6$
⇨ $x^2+y^2+2x-10y+20=0$에서
$(x+1)^2+(y-5)^2=6$
원의 중심 $(-1,5)$를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a,b)라 하면 두 점 $(-1,5)$, (a,b)의 중점
$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$가 직선 $3x-4y-2=0$ 위의 점이므로
$3\cdot\frac{-1+a}{2}-4\cdot\frac{5+b}{2}-2=0$ $\therefore 3a-4b=27$ …㉠
또, 두 점을 지나는 직선과 직선 $3x-4y-2=0$
즉, $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$은 서로 수직이므로
$\frac{b-5}{a-(-1)}\cdot\frac{3}{4}=-1$ $\therefore 4a+3b=11$ …㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=-3$
따라서 중심이 $(5,-3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 원의 방정식은 $(x-5)^2+(y+3)^2=6$

35) $a=2, b=-1$
⇨ 두 점 $P(3,a), Q(b,4)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{3+b}{2}, \frac{a+4}{2}\right)$가 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로
$\frac{a+4}{2}=2\cdot\frac{3+b}{2}+1$ $\therefore a-2b=4$ ……㉠
또, 직선 PQ와 직선 $y=2x+1$은 서로 수직이므로
$\frac{4-a}{b-3}\cdot 2=-1$ $\therefore 2a-b=5$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

36) $a=2, b=0$
⇨ 두 점 $P(4,a), Q(b,0)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{4+b}{2}, \frac{a+0}{2}\right)$이 직선 $2x+y=5$ 위의 점이므로
$2\cdot\frac{4+b}{2}+\frac{a}{2}=5$ $\therefore a+2b=2$ ……㉠
또, 직선 PQ와 직선 $2x+y=5$, 즉 $y=-2x+5$는 서로 수직이므로
$\frac{0-a}{b-4}\cdot(-2)=-1$ $\therefore 2a+b=4$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=0$

37) $a=-4$, $b=4$
⇨ 두 점 $P(a,3)$, $Q(-1,b)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{a+(-1)}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$이 직선 $3x+y+4=0$ 위의 점이므로
$3\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{3+b}{2}+4=0$ $\therefore 3a+b+8=0$ …㉠
또 직선 PQ와 직선 $3x+y+4=0$, 즉 $y=-3x-4$는 서로 수직이므로
$\frac{b-3}{-1-a}\cdot(-3)=-1$ $\therefore a+3b=8$ …㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=4$

38) $a=2, b=5$
⇨ 두 원의 중심 $(-4,2), (0,0)$을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $(-2,1)$이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로
$1=-2a+b$ $\therefore 2a-b=-1$……㉠
또, 두 점을 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$는 서로 수직이므로
$\frac{0-2}{0-(-4)}\cdot a=-1$ $\therefore a=2$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=2, b=5$

39) $a=2$
⇨ $x^2+y^2-6x-2y+9=0$에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$
원의 중심 $(3,1)$을 직선 $4x-2y=5$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (m,n)라 하면 두 점 $(3,1), (m,n)$의 중점
$\left(\frac{3+m}{2}, \frac{1+n}{2}\right)$가 직선 $4x-2y=5$ 위의 점이므로
$4\cdot\frac{3+m}{2}-2\cdot\frac{1+n}{2}=5$ $\therefore 2m-n=0$……㉠
또, 두 점을 지나는 직선이 직선 $4x-2y=5$
즉, $y=2x-\frac{5}{2}$와 수직이므로
$\frac{n-1}{m-3}\cdot 2=-1$ $\therefore m+2n=5$……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=1, n=2$
따라서 중심이 $(1,2)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
이 원이 점 $(2,a)$를 지나므로
$(2-1)^2+(a-2)^2=1$ $\therefore a=2$

40) (1) $A'(1,-2)$ (2) $\sqrt{74}$
⇨ (1) 점 $A(1,2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(1,-2)$이다.
(2) $\triangle AOP\equiv\triangle A'OP$
$\therefore \overline{AP}=\overline{A'P}$
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$
즉, 점 P가 선분 $A'B$와 x축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(8-1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{74}$

41) (1) $A'(0,-3)$ (2) $4\sqrt{5}$
⇨ (1) 점 $A(0,3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(0,-3)$이다.
(2) $\triangle AOP\equiv\triangle A'OP$
$\therefore \overline{AP}=\overline{A'P}$
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 x축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(-4-0)^2+(5+3)^2}=4\sqrt{5}$

42) (1) $A'(-1,-1)$ (2) 5

⇨ (1) 점 $A(-1,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$A'(-1,-1)$이다.

(2) $\triangle AOP \equiv \triangle A'OP$

$\therefore \overline{AP}=\overline{A'P}$

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq \overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 x축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$

43) (1) $A'(2,-1)$ (2) $\sqrt{29}$

⇨ (1) 점 $A(2,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(2,-1)$이다.

(2) $\triangle AOP \equiv \triangle A'OP$

$\therefore \overline{AP}=\overline{A'P}$

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq \overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 x축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(4-2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{29}$

44) (1) $A'(1,1)$ (2) $\sqrt{5}$

⇨ (1) 점 $A(-1,1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(1,1)$이다.

(2) $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq \overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 y축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

45) (1) $A'(3,2)$ (2) $\sqrt{58}$

⇨ (1) 점 $A(-3,2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(3,2)$이다.

(2) $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq \overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 y축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(-4-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{58}$

46) (1) $A'(-2,0)$ (2) $\sqrt{10}$

⇨ (1) 점 $A(2,0)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(-2,0)$이다.

(2) $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq \overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 y축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(-3+2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

47) (1) $A'(-1,2)$ (2) $\sqrt{26}$

⇨ (1) 점 $A(1,2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(-1,2)$이다.

(2) $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq \overline{A'B}$

즉, 점 P가 선분 $A'B$와 y축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(4+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{26}$

48) $\sqrt{53}$

⇨ 점 $(5,9)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(9,5)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(9-2)^2+(5-3)^2}\\&=\sqrt{53}\end{aligned}$$

49) $2\sqrt{13}$

⇨ 점 $B(6,7)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(7,6)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(7-1)^2+(6-2)^2}\\&=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

50) $5\sqrt{2}$

⇨ 점 $B(-2,1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(1,-2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(1+4)^2+(-2-3)^2}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

51) $\sqrt{29}$

⇨ 점 $B(-1,0)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(0,-1)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(0+2)^2+(-1-4)^2}\\&=\sqrt{29}\end{aligned}$$

52) $\sqrt{37}$

⇨ 점 $B(-4,1)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(1,-4)$

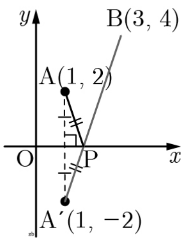
$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(1-0)^2+(-4-2)^2}\\&=\sqrt{37}\end{aligned}$$

53) $5\sqrt{2}$

⇨ 점 $B(2,4)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(4,2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq \overline{AB'}\\&=\sqrt{(4+3)^2+(2-3)^2}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

54) $2\sqrt{10}$

⇨ 

점 $A(1,2)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(1,-2)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$\overline{AP}=\overline{A'P'}$ 이므로

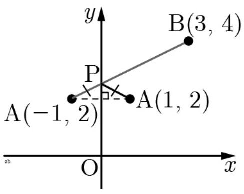
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}$

$=2\sqrt{10}$

55) $2\sqrt{5}$

⇨ 

점 $A(1,2)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(-1,2)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

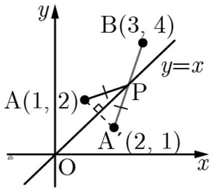
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2}$

$=2\sqrt{5}$

56) $\sqrt{10}$

⇨ 

점 $A(1,2)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(2,1)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

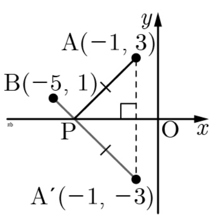
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{10}$

57) $4\sqrt{2}$

⇨ 

점 $A(-1,3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$A'(-1,-3)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

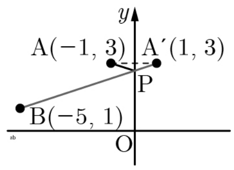
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(-5+1)^2+(1+3)^2}$

$=4\sqrt{2}$

58) $2\sqrt{10}$

⇨ 

점 $A(-1,3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$A'(1,3)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

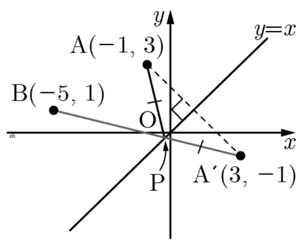
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(-5-1)^2+(1-3)^2}$

$=2\sqrt{10}$

59) $2\sqrt{17}$

⇨ 

점 $A(-1,3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(3,-1)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(-5-3)^2+(1+1)^2}$

$=2\sqrt{17}$

60) $\sqrt{34}$

⇨ 점 $A(1,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 $B(2,4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$A'(1,-1), B'(-2,4)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}$

$=\sqrt{(-2-1)^2+(4+1)^2}$

$=\sqrt{34}$

61) $\sqrt{65}$

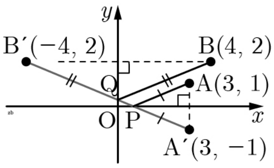
⇨ 점 $A(2,1)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(2,-1)$, 점 $B(5,3)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $B'(-5,3)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-5-2)^2+(3+1)^2}$
$=\sqrt{65}$

62) $\sqrt{58}$

⇨ 점 $A(3,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 $B(4,2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



$A'(3,-1), B'(-4,2)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-4-3)^2+(2+1)^2}$
$=\sqrt{58}$

63) 13

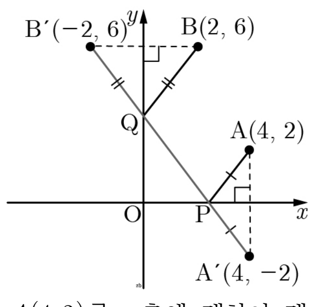
⇨ 점 $A(3,5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 A', 점 $B(2,7)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$A'(3,-5), B'(-2,7)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-2-3)^2+(7+5)^2}$
$=13$

64) 10

⇨ 

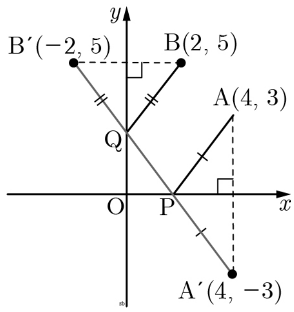
점 $A(4,2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 A', 점 $B(2,6)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$A'(4,-2), B'(-2,6)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-2-4)^2+(6+2)^2}$
$=10$

65) 10

⇨ 

점 $A(4,3)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 $B(2,5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$A'(4,-3), B'(-2,5)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

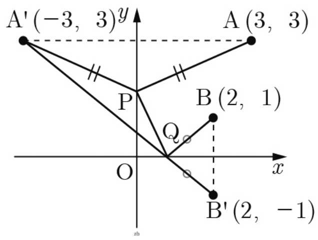
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-2-4)^2+(5+3)^2}$
$=10$

66) $\sqrt{41}$

⇨ A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A', B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면,

$A'(-3,3), B'(2,-1)$

다음 그림에서



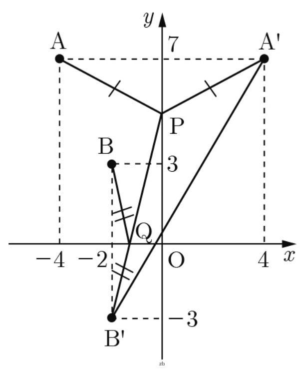
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(-1-3)^2}$
$=\sqrt{41}$

67) $2\sqrt{34}$

⇨ A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A', B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면,

$A'(4,7), B'(-2,-3)$

다음 그림에서



$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-2-4)^2+(-3-7)^2}$
$=2\sqrt{34}$

68) $\sqrt{29}$
⇨ A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A',
B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면,
$A'(3,-1), B'(-2,-3)$
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-2-3)^2+(-3+1)^2}$
$=\sqrt{29}$

69) $\sqrt{41}$
⇨ A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A',
B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면,
$A'(-4,1), B'(1,-3)$
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{(1+4)^2+(-3-1)^2}$
$=\sqrt{41}$

70) $\sqrt{17}$
⇨ A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A',
B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면,
$A'(-1,-1), B'(-2,-5)$
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{(-2+1)^2+(-5+1)^2}$
$=\sqrt{17}$

71) $\sqrt{2}$
⇨ B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면,
$A'(3,0), B'(4,-1)$
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{(4-3)^2+(-1-0)^2}$
$=\sqrt{2}$