



◇「콘텐츠산업 진흥법」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2020-03-10

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

개념check

[지수방정식의 풀이]

• 지수방정식: 지수에 미지수가 있는 방정식

• 지수방정식의 풀이

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (\text{단, } a > 0, a \neq 1)$$

(2) 지수가 같은 경우

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} (a > 0, b > 0) \Leftrightarrow a = b \text{ 또는 } f(x) = 0$$

(3) a^x 꼴이 반복되는 경우 $a^x = t (t > 0)$ 로 치환 후 t 에 대한 방정식을 푼다.

(4) 밑에도 미지수가 있는 경우

$$x^{f(x)} = x^{g(x)} (x > 0) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ 또는 } x = 1$$

[지수부등식의 풀이]

• 지수부등식: 지수에 미지수가 있는 부등식

• 지수부등식의 풀이

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \text{ 꼴로 변형한 후}$$

① $a > 1$ 일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ ② $0 < a < 1$ 일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (2) a^x 꼴이 반복되는 경우 $a^x = t (t > 0)$ 로 치환 후 t 에 대한 부등식을 푼다.

기본문제

[예제]

1. $8^{2x+1} = \left(\frac{1}{64}\right)^{x-3}$ 의 근을 구한 것은?

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{3}{5}$

⑤ $\frac{5}{6}$

[문제]

2. $7^{x+3} = \left(\frac{1}{343}\right)^{2x-8}$ 의 근을 구한 것은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

[예제]

3. $2^{x+3} \leq 4^{2x} < 8^{x+2}$ 에서 정수 x 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

[문제]

4. $4^{3x+2} \geq 16^{2x} \geq 64^{x-2}$ 의 근 중 정수 x 의 개수를 구한 것은?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

[예제]

5. 방사성 동위 원소 중 가장 안정적인 ^{14}C 는 5730년마다 그 양이 반으로 줄어든다고 한다. 어느 유적지의 벽화를 조사했더니 ^{14}C 가 2.5 g 남아 있었다. 처음 ^{14}C 의 양이 160 g 이었다면 이 벽화는 몇 년 전의 것인지 구한 것은?

① 11460년 전

② 17190년 전

③ 22920년 전

④ 28650년 전

⑤ 34380년 전

[문제]

6. 어느 펀드 상품에 A 원을 투자할 때, t 년 후의 이익금은 $A\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{3}}$ 원이 된다고 한다. 처음 투자 금액이 270만 원이고 t 년 후의 이익금이 640만 원일 때, t 의 값을 구한 것은?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 15

[문제]

7. 어떤 방향제는 개봉한 지 t 시간 후에 처음 양의 $\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^t$ 만큼 기화되어 향기를 내는데, 기화되는 양이 처음 양의 $\frac{1}{256}$ 보다 적으면 사람이 더 이상 향기를 느끼지 못한다고 한다. 이 방향제의 향기가 지속되는 시간을 구한 것은?
- ① 60시간 ② 70시간
③ 80시간 ④ 90시간
⑤ 100시간

평가문제

[중단원 마무리하기]

8. $\left(\frac{5}{2}\right)^{4x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+3}$ 의 두 근의 합은?
- ① 4 ② 2
③ 0 ④ -2
⑤ -4

[중단원 마무리하기]

9. $9^{x-5} \geq 27^{\frac{3x+4}{3}}$ 을 풀면 $x \leq a$ 라고 할 때, a 의 값을 구한 것은?
- ① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

[중단원 마무리하기]

10. x 에 대한 방정식 $|4^x - 64| = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k 의 개수를 구한 것은?
- ① 61개 ② 62개
③ 63개 ④ 64개
⑤ 65개

[중단원 마무리하기]

11. 어느 공장에서 생산되는 보조 배터리의 초기 불량률은 6.4%이었다. 매주 불량률을 절반으로 감소시킬 때, 보조 배터리의 불량률이 x 주 후 처음으로 0.01% 이하가 된다. 정수 x 의 최솟값은?
- ① 7 ② 8
③ 9 ④ 10
⑤ 11

[대단원 평가하기]

12. 직선 $f(x) = x^2 - 5x + 3$ 와 $g(x) = x - 2$ 가 다음 그림과 같을 때, 등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2f(x)} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-g(x)}$ 의 해는?
- ① $x > 2$ ② $x > 5$
③ $x > 5$ 또는 $x < 1$ ④ $1 < x < 5$
⑤ $x < 2$

유사문제

13. 방정식 $2^x = \frac{1}{32}$ 의 해는?
- ① -5 ② -3
③ -1 ④ 3
⑤ 5

14. 부등식 $4^x \leq 5 \cdot 2^{x+1} - 16$ 의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?
- ① 4 ② 6
③ 8 ④ 10
⑤ 12

15. 부등식 $3^{2x} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-2}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개
 ③ 3개 ④ 4개
 ⑤ 5개

16. $3^x - 2 \times 3^{\frac{x}{2}-1} - \frac{8}{3} \leq 0$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개
 ③ 2개 ④ 3개
 ⑤ 4개

17. x 에 대한 부등식 $2^{x+2} \leq 4\sqrt{2}$ 의 범위는?

- ① $x \leq -\frac{1}{4}$ ② $x \geq -\frac{1}{4}$
 ③ $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ ④ $x \leq -\frac{1}{2}$
 ⑤ $x \leq \frac{1}{2}$

18. 방정식 $2 \cdot a^{2x} - 12 \cdot a^x + 16 = 0$ 의 두 근의 합이 6일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$
 ③ $\sqrt{3}$ ④ 2
 ⑤ 3



정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-3} = 8^{2x+1}$ 이므로

$$2^{-6x+18} = 2^{6x+3}, \quad -6x+18 = 6x+3$$

$$\text{따라서 } x = \frac{5}{4}$$

2) [정답] ③

[해설] $7^{x+3} = \left(\frac{1}{343}\right)^{2x-8}$ 이므로

$$7^{x+3} = 7^{-6x+24}, \quad x+3 = -6x+24$$

$$\text{따라서 } x = 3$$

3) [정답] ⑤

[해설] $2^{x+3} \leq 4^{2x} < 8^{x+2}$ 의 밑을 2로 통일시키면

$$2^{x+3} \leq 2^{4x} < 2^{3x+6}, \quad x+3 \leq 4x < 3x+6 \text{이다.}$$

따라서 $1 \leq x < 6$, x 는 5개다.

4) [정답] ④

[해설] $4^{3x+2} \geq 16^{2x} \geq 64^{x-2}$ 의 밑을 2로 통일하면,

$$2^{6x+4} \geq 2^{8x} \geq 2^{6x-12}$$

$$6x+4 \geq 8x \geq 6x-12$$

즉, $2 \geq x \geq -6$ 정수 x 의 개수는 9개이다.

5) [정답] ⑤

[해설] ^{14}C 의 반감기가 5730년이므로 이 벽화의 x 년후에 남아 있는 ^{14}C 의 양은 처음 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$

이 된다.

이 벽화의 처음 ^{14}C 의 양이 160 g이므로 x 년 후에 남아 있는 ^{14}C 의 양은

$$\left\{160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}\right\} \text{ g이고}$$

현재 남아 있는 ^{14}C 의 양이 2.5 g이므로

$$160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} = 2.5$$

이 식을 정리하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} = \frac{2.5}{160}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같으므로 $\frac{x}{5730} = 6$ 에서

$$x = 34380$$

따라서 34380년 전의 벽화라 할 수 있다.

6) [정답] ③

[해설] $270\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{3}} = 640$ 이므로, 약분하여 정리하면

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{3}} = \frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad t = 9 \text{이다.}$$

7) [정답] ③

[해설] 처음 양을 A 라고 하면, $A\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^t < \frac{1}{256}A$ 일

때 향기를 느끼지 못한다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^t \geq \frac{1}{256}$$

부등식을 풀면 $2^{-\frac{t}{10}} \geq 2^{-8}$ 이고, 정리하면

$$-\frac{t}{10} \geq -8, \quad t \leq 80 \text{이다.}$$

8) [정답] ⑤

[해설] $\left(\frac{5}{2}\right)^{4x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+3}$ 에서 밑을 $\frac{2}{5}$ 로 통일하면,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-4x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+3} \text{ 따라서 } x^2+3 = -4x \text{이다.}$$

 $x^2+4x+3=0$ 에서 근과 계수와의 관계에 의하여 두 근의 합은 -4 이다.

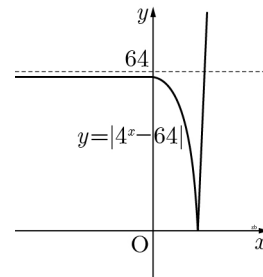
9) [정답] ②

[해설] $9^{x-5} \geq 27^{\frac{3x+4}{3}}$ 에서 밑을 3으로 통일하면,

$$3^{2x-10} \geq 3^{9x+4} \text{이므로 } 2x-10 \geq 9x+4$$

$$-14 \geq 7x, \quad x \leq -2 \text{ 따라서 } a = -2$$

10) [정답] ③

[해설] 함수 $y = |4^x - 64|$ 의 그래프는 다음과 같다.따라서 $y = |4^x - 64|$ 와 $y = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지는 경우는 $0 < k < 64$ 일 때로, k 의 개수는 63개다.

11) [정답] ④

[해설] x 주 후에는 불량률이 $6.4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 가 되므로 $6.4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 0.01$ 을 만족하는 x 의 최솟값을 구하면 된다.

$$6.4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 0.01 \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{640}$$

 $2^x > 640$ 이므로, 정수 x 의 최솟값은 10이다.

12) [정답] ④

[해설] $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2f(x)} = 4^{f(x)} < 4^{g(x)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-g(x)}$ 에서밑이 1보다 크므로 $f(x) < g(x)$

$$x^2 - 5x + 3 < x - 2$$

$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) < 0, \quad 1 < x < 5$$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 x 의 범위는
 $1 < x < 5$

13) [정답] ①

[해설] $2^x = 2^{-5}$

$$x = -5$$

14) [정답] ①

[해설] $2^{2x} \leq 5 \times 2 \times 2^x - 16$

$$2^{2x} \leq 10 \times 2^x - 16$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 치환하자.}$$

$$t^2 \leq 10t - 16$$

$$t^2 - 10t + 16 \leq 0$$

$$(t-8)(t-2) \leq 0$$

$$2 \leq t \leq 8$$

$$2 \leq 2^x \leq 8$$

$$2 \leq 2^x \leq 2^3$$

$$1 \leq x \leq 3$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3$$

$$\alpha + \beta = 1 + 3 = 4$$

15) [정답] ④

[해설] $3^{2x} \leq 3^{-2(x^2-2)}$

$$2x \leq -2x^2 + 4$$

$$2x^2 + 2x - 4 \leq 0$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 1$$

정수 x 의 개수는 4개

16) [정답] ②

[해설] $3^x - \frac{2}{3}3^{\frac{x}{2}} - \frac{8}{3} \leq 0$

$$3^{\frac{x}{2}} = t \quad (t > 0) \text{로 치환하자.}$$

$$t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{8}{3} \leq 0, \quad (t-2)\left(t + \frac{4}{3}\right) \leq 0$$

$$-\frac{4}{3} \leq t \leq 2, \quad \text{즉 } 0 < t \leq 2$$

$$0 < 3^{\frac{x}{2}} \leq 2$$

따라서 만족시키는 자연수 x 는 1, 한 개다.

17) [정답] ⑤

[해설] $2^{x+2} \leq 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}}$

$$x+2 \leq \frac{5}{2}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

18) [정답] ②

[해설] $2 \cdot a^{2x} - 12 \cdot a^x + 16 = 0$ 의 두 근을

α, β 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해

$$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta} = 8 \text{이고, } \alpha + \beta = 6 \text{이므로}$$

$$a^6 = 8, \quad (a^2)^3 = 2^3, \quad a^2 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$