고1-1 기말고사 밀착문제 선별문항 수학(상) 신사고

1. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-81=0$

(2) $2x^4-3x^2+1=0$

(3) $x^4+12x^2+27=0$

(4) $(x^2-x)^2-4(x^2-x)+3=0$

2. 방정식 $x^4+5x^2-14=0$의 두 실근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

3. 방정식 $x^4-5x^3+2x^2-5x+1=0$을 푸시오.

4. 방정식 $x^3-x^2-2kx+2k=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하시오. (풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

5. 방정식 $2x^3+ax^2+2x-8=0$의 한 근이 i일 때, 실수 a의 값과 나머지 두 근을 구하시오.

6. 방정식 $x^3+ax^2+bx-6=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 다음을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) a, b의 값

(2) 나머지 두 근

7. 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}$

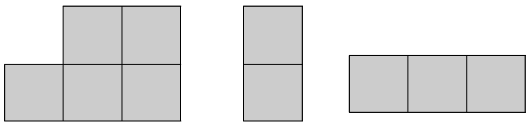
(2) $\dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}$

8. 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, $2\omega^3+5\omega^2+4\omega=a\omega+b$이다. 실수 a, b의 값을 구하시오.

9. 밑면의 반지름의 길이가 $4\,\text{cm}$, 높이가 $6\,\text{cm}$인 원기둥 모양의 컵이 있다. 밑면의 반지름의 길이와 높이가 이 컵보다 각각 $x\,\text{cm}$씩 긴 컵의 부피가 처음 컵의 부피의 3배일 때, x의 값을 구하시오.

10. $n\geq 4$일 때, 원 위에 있는 n개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형과 사각형의 개수의 합은 $\dfrac{n}{24}(n^3-2n^2-n+2)$이다. 예를 들어 원 위에 있는 4개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형은 1개, 사각형은 4개이므로 삼각형과 사각형의 개수의 합은 5이다. 삼각형과 사각형의 개수의 합이 35가 되려면 원 위에 있는 점은 몇 개이어야 하는지 구하시오.

11. 다음 그림은 한 모서리의 길이가 x인 정육면체 모양의 쌓기나무 5개를 이용하여 만든 입체도형을 정면과 옆 그리고 위에서 본 모습을 나타낸 것이다. 이 입체도형의 겉넓이를 S, 부피를 V라고 할 때, $S-45=V$가 되도록 하는 자연수 x의 값을 구하시오. (풀이 과정을 자세히 쓰시오.)



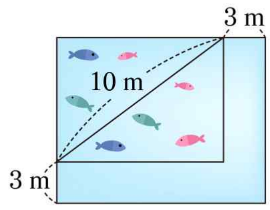
[정면] [옆] [위]

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ 2x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 최댓값을 구하시오.

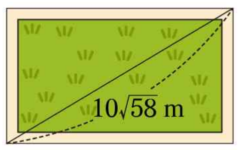
13. 연립방정식 $\begin{cases} x+6y=k \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 실수 k의 값을 모두 구하시오.

14. 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=5 \\ x+y=9 \end{cases}$의 해가 연립방정식 $\begin{cases} x-y=b \\ x^2+y^2=41 \end{cases}$을 만족시킨다고 할 때, 실수 a, b를 구하시오. (단, $b<0$)

15. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 $10\,\mathrm{m}$인 직사각형 모양의 낚시터가 있다. 이 낚시터의 가로, 세로의 길이를 각각 $3\,\mathrm{m}$씩 확장한 낚시터의 넓이는 처음 낚시터의 넓이보다 $51\,\mathrm{m}^2$만큼 넓다고 한다. 처음 낚시터의 넓이를 구하시오.
(풀이 과정을 자세히 쓰시오.)



16. 다음 그림과 같이 넓이가 $2100\,\mathrm{m}^2$인 직사각형 모양의 잔디밭이 있다. 이 잔디밭의 대각선의 길이가 $10\sqrt{58}\,\mathrm{m}$일 때, 이 잔디밭의 가로, 세로의 길이를 구하시오. (단, 가로의 길이가 세로의 길이보다 더 길다.)



17. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-a<5x+a+4 \\ 2x-2\le 8 \end{cases}$의 해가 $-4<x\le b$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

18. 어느 스키 캠프장에서 학생들에게 숙소를 배정하려고 한다. 한 방에 6명씩 배정하면 4명의 학생이 남고, 한 방에 8명씩 배정하면 2개의 방이 남는다고 한다. 이 캠프장의 방의 개수가 될 수 있는 가장 큰 수를 구하시오.

19. 다음 부등식을 푸시오.
(1) $|x+1|+|x-1|<5$
(2) $|5x-2|-|x|\geq 6$

20. 부등식 $2|x-3|+|x+7|\leq 11$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

21. 부등식 $|3x-a|<8$의 해가 $-5<x<b$일 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

22. 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $2<x<3$일 때, 다음에 답하시오. (단, a, b는 실수이다.)
(1) a, b의 값을 구하시오.
(2) 이차부등식 $x^2-bx-a\geq 0$의 해를 구하시오.

23. 이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $-3<x<5$일 때, 부등식 $f(2x-1)>0$의 해를 구하시오.
(풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

24. 다음 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하시오.
(1) $x^2-2kx-k>0$
(2) $x^2+(k+1)x+k\geq 0$

25. 모든 실수 x에 대하여 성립하는 부등식을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

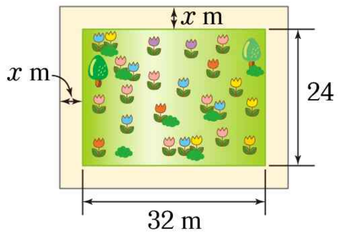
ㄱ. $x^2+x\geq -2$　　ㄴ. $x^2-4x<-4$
ㄷ. $-x^2+3x\geq 5$　　ㄹ. $x^2-3x>-3$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

26. 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

27. 이차부등식 $x^2+(a-1)x+a-1\leq 0$이 해를 갖지 않도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

28. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $32\,\mathrm{m}$, $24\,\mathrm{m}$인 직사각형 모양의 꽃밭의 둘레에 폭이 $x\,\mathrm{m}$로 일정한 길을 만들려고 한다. 길의 넓이가 $512\,\mathrm{m}^2$ 이하가 되도록 양수 x의 값의 범위를 구하시오.



29. $b<c<a$인 실수 a, b, c에 대하여 연립부등식 $\begin{cases} x^2-(a+b)x+ab<0 \\ x^2+(b+c)x+bc \geq 0 \end{cases}$의 해가 $-3<x\leq 2$ 또는 $3\leq x<5$일 때, 이차부등식 $x^2+acx+3(a+c)<0$의 해를 구하시오.

30. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-13x+36 \leq 0 \\ x^2-(a+1)x+a \leq 0 \end{cases}$의 정수인 해가 1개뿐일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

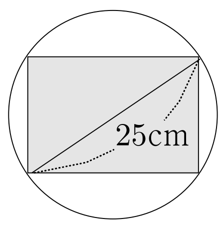
31. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+2<x^2+2x+a\leq 3x^2+4$가 성립하도록 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

32. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x \leq 0 \\ x^2+7x-1 \geq 6x+5 \end{cases}$의 해와 이차부등식 $ax^2-7x+b\leq 0$의 해가 서로 같을 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

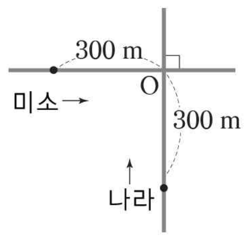
33. 세 변의 길이가 각각 $x-2$, x, $x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 x의 값을 모두 구하시오.

34. 어느 현수막 공장에는 가로의 길이가 같은 직사각형 모양의 두 종류의 현수막 A, B가 있다. 현수막 A의 세로의 길이는 가로의 길이보다 $20\,\mathrm{cm}$만큼 짧고, 현수막 B의 세로의 길이는 가로의 길이보다 $40\,\mathrm{cm}$만큼 길다고 한다. A의 넓이는 $3500\,\mathrm{cm}^2$ 이하, B의 넓이는 $4500\,\mathrm{cm}^2$ 이상이라고 할 때, 두 현수막의 가로의 길이의 범위를 구하시오.

35. 다음 그림과 같이 지름의 길이가 $25\,\mathrm{cm}$인 원에 내접하는 직사각형이 있다. 직사각형의 둘레의 길이는 $70\,\mathrm{cm}$일 때, 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하시오.
(단, 가로의 길이가 세로의 길이보다 더 길다.)



36. 다음 그림과 같이 지점 O에서 수직으로 만나는 직선 도로가 있다. 서로 다른 도로에 있는 미소와 나라가 지점 O에서 각각 300m 떨어진 곳에서 1분에 30m, 90m의 일정한 속력으로 지점 O를 향하여 직진하였다. 두 사람이 동시에 출발할 때, 두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 출발한 지 몇 분 후인지 구하시오.

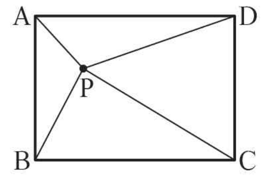


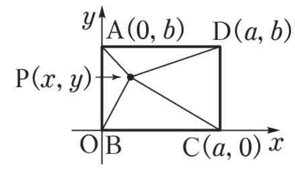
37. 두 점 A$(4,\ -3)$, B$(a,\ 3)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱을 구하시오.

38. 두 점 A$(6,\ 1)$, B$(8,\ 3)$에서 같은 거리에 있고 y축 위에 있는 점 Q의 좌표를 구하시오.

39. 세 점 A$(-1,\ 2)$, B$(3,\ 0)$, C$(1,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표와 외접원의 반지름의 길이를 구하시오.(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

40. 다음은 직사각형 ABCD와 점 P가 한 평면 위에 있을 때, $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립함을 보여주는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 식을 구하시오.



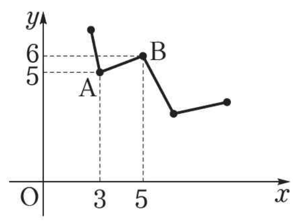
> 다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.
>
> 
>
>
> 이때 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A$(0,\ b)$, C$(a,\ 0)$, D$(a,\ b)$라 하고
> 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면
> $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\boxed{(가)}$
> $\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$
> $=\{\boxed{(나)}\}+\{(x-a)^2+y^2\}$
> 따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립한다.

41. 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(-1,\ 4)$와 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하시오.
(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

42. 세 점 A$(1,\ 0)$, B$(-1,\ 9)$, C$(3,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 직각삼각형임을 설명하시오.

43. 세 점 $A(-1,\ -1)$, $B(2,\ 1)$, $C(a,\ -10)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형일 때, a의 값을 구하시오.

44. 카시오페이아 자리는 W 모양을 이루는 5개의 별이다. 다음 그림과 같이 카시오페이아 자리를 좌표평면 위에 점으로 나타낼 때, 선분 AB를 $5:6$으로 외분하는 점의 좌표를 구하시오.



45. 두 점 $A(3,\ -4)$, $B(7,\ 3)$을 잇는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 직선 $y=2x-a$ 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

46. $0<t<1$일 때, 두 점 $A(-2,\ -6)$, $B(3,\ 5)$를 잇는 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제1사분면 위에 있도록 하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오.(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

47. 두 점 $A(-3,\ a)$, $B(b,\ -1)$을 잇는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(-9,\ 1)$일 때, a, b의 값을 구하시오.

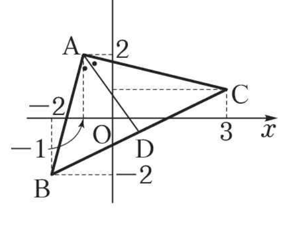
48. 두 점 $A(-5,\ 3)$, $B(4,\ 7)$을 잇는 직선 AB 위에 있고 $\overline{AB}=3\overline{BC}$를 만족시키는 점 C의 좌표를 모두 구하시오.

49. 두 점 $A(-1,\ 6)$, $B(4,\ 1)$을 잇는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 P와 $2:3$으로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하시오.

50. 세 점 $A(3,\ 7)$, $B(-1,\ 3)$, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 $G(2,\ 3)$일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

51. 세 점 $A(2,\ 4)$, $B(-3,\ 2)$, $C(1,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표를 구하시오.

52. 다음 그림과 같이 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(-2,\ -2)$, $C(3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC가 만나는 점 D의 좌표를 구하시오.



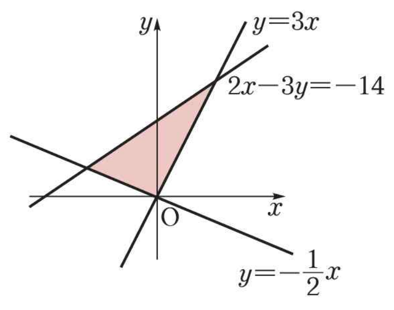
53. 두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 7)$을 지나는 직선이 점 $(a,\ a-1)$을 지날 때, a의 값을 구하시오.

54. $a \neq 0$, $b \neq 0$일 때, x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식이 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$임을 설명하시오.

55. 일차방정식 $(2+k)x+(k-3)y-(5k+5)=0$이 나타내는 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하시오.

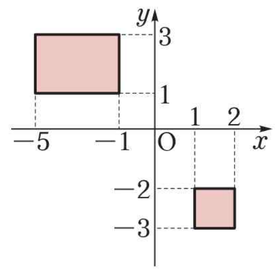
56. 두 직선 $3x-2y-4=0$, $2x-y+5=0$의 교점과 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

57. 다음 그림과 같이 세 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $2x-3y=-14$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

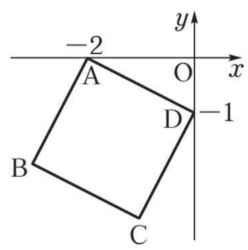


58. 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ -7)$, $\mathrm{B}(a,\ 2)$, $\mathrm{C}(5,\ 13-a)$가 한 직선 위에 있을 때, 이 직선의 방정식을 구하시오. (단, a는 한 자리 자연수이다.)

59. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.



60. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 다음을 구하시오. (단, 두 점 B, C는 제4사분면 위의 점이다.)



(1) 직선 AB의 방정식
(2) 직선 BC의 방정식

61. 두 직선 $2x-7y+3=0$, $x-ay-4=0$이 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

62. 다음 <보기> 중 직선 $3x-y-4=0$과 평행한 직선과 수직인 직선을 각각 고르시오.

<보기>

ㄱ. $6x-2y+7=0$
ㄴ. $3x+y-5=0$
ㄷ. $x+3y-6=0$
ㄹ. $4x-3y=0$

63. 직선 $ax-y+3=0$이 직선 $2x-y+5=0$과 수직이고, 직선 $(3-b)x+4y-3=0$과 평행할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

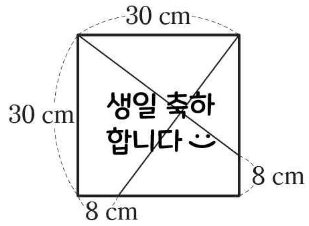
64. 세 직선 $x-2y+5=0$, $3x-y=0$, $2x+my-8=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 상수 m의 값을 모두 구하시오.

65. 점 A$(2,\ 5)$에서 직선 $y=-x+5$에 내린 수선의 발의 좌표를 구하시오.
(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

66. 두 점 A$(1,\ -2)$, B$(3,\ 4)$를 지나는 직선에 수직이고 y절편이 3인 직선의 x절편을 구하시오.
(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

67. 두 점 A$(-1,\ -1)$, B$(3,\ -9)$를 잇는 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하시오.

68. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 30cm인 정사각형 모양의 케이크를 직선으로 두 번 잘랐다. 잘랐을 때 생긴 두 직선이 서로 수직임을 설명하시오. (단, 자른 자국의 폭은 무시한다.)



69. y절편이 3이고 점 $(2,\ -1)$에서의 거리가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

70. 직선 $x-2y+4=0$과의 거리가 $2\sqrt{5}$이고 y축 위에 있는 점의 좌표를 모두 구하시오.
(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

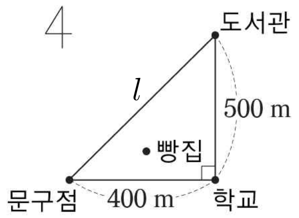
71. 세 점 A$(-3,\ 1)$, B$(0,\ -4)$, C$(1,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하려고 한다. 물음에 답하시오.
(1) 선분 BC의 길이를 구하시오.
(2) 직선 BC의 방정식을 구하시오.
(3) 점 A와 직선 BC 사이의 거리를 구하시오.
(4) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

72. 평행한 두 직선 $x-3y=0$, $2x-6y+1=0$ 사이의 거리를 구하시오.

73. 두 직선 $3x-y=0$, $x+3y-5=0$으로부터 같은 거리에 있는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

74. 다음 그림과 같이 학교에서 서쪽으로 400m 떨어진 지점에 문구점, 북쪽으로 500m 떨어진 지점에 도서관이 있고, 문구점과 도서관 사이에는 직선 도로 l이 있다. 이때 학교에서 서쪽으로 230m, 북쪽으로 110m 떨어진 지점에 빵집이 생긴다고 한다. 빵집과 직선 도로 l을 연결하는 새로운 도로를 최단 거리로 만들 때, 새로운 도로의 길이를 구하시오.

4



75. 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 7)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

76. 원 $(x-2)^2+y^2=9$와 직선 $y=2x+1$이 만나는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하시오.
(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

77. 두 점 $(-4,\ 2)$, $(6,\ 8)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구하시오.

78. 방정식 $x^2+y^2+4x-2y+k=0$이 원을 나타내도록 하는 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

79. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 위의 점과 직선 $3x+2y-9=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

80. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 A와 원 $x^2+y^2-10x-24y+165=0$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값을 구하시오.

81. 중심이 점 $(1,\ 3)$이고 직선 $2x-y+6=0$에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

82. 두 직선 $y=3x-8$, $y=3x+12$에 동시에 접하고 점 $(-2,\ 4)$를 지나는 원의 방정식을 모두 구하시오.

83. 원 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$과 직선 $x-ky+3=0$이 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

84. 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=mx-4$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 m의 값 또는 범위를 정하시오.
(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.

85. 원 $x^2+y^2=100$ 위의 두 점 A(0, 10), B(−8, 6)과 원 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하시오.

86. 두 원 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$과 $x^2+y^2-8x+2y+8=0$의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

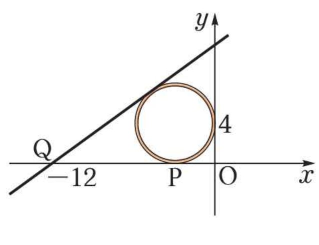
87. 다음 직선의 방정식을 구하시오.
(1) 원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 3인 직선
(2) 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 직선 $3x+y+5=0$에 수직인 직선

88. 다음 접선의 방정식을 구하시오.
(1) 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-3,\ 2)$에서의 접선
(2) 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $(-3,\ 0)$에서의 접선

89. 원 $x^2+y^2-2x+8y-8=0$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선이 점 $(6,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

90. 점 $(1,\ 7)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

91. 다음 그림은 지름의 길이가 8인 원에 막대를 접하도록 놓은 모습을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 원과 막대가 지면과 만나는 지점을 각각 P, Q라고 하면 P(−4, 0), Q(−12, 0)일 때, 막대를 나타내는 직선의 방정식을 구하시오.



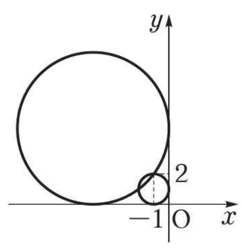
92. 점 $(-4,\ -2)$에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

93. 점 $(5,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$에 그은 두 접선의 기울기의 합을 구하시오.

94. 점 $(0,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

95. 점 $(a,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 음수 a의 값을 구하시오.
(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

96. 다음 그림과 같이 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원이 있다. 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하시오.



97. 원 $x^2+y^2=40$ 위의 점 $(-2,\ 6)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+2x-6y+k=0$과 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

1. [정답] (1) $x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$

(2) $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\pm1$

(3) $x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm3i$

(4) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

2. [정답] 4
[해설]
$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2+5X-14=0$
$(X+7)(X-2)=0$
$X=-7$ 또는 $X=2$, 즉 $x^2=-7$ 또는 $x^2=2$
$\therefore\ x=\pm\sqrt{7}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$
따라서 α, β는 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이므로 $\alpha^2+\beta^2=4$

3. [정답] $x=\pm i$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
[해설]
$x^4-5x^3+2x^2-5x+1=0$에서
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$
$x+\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $t^2-5t=0$
$t^2-5t=0$에서 $t(t-5)=0$
$\therefore\ t=0$ 또는 $t=5$
(ⅰ) $t=0$일 때
$x+\dfrac{1}{x}=0$이므로 $x^2+1=0$
$x^2=-1\quad\therefore\ x=\pm i$
(ⅱ) $t=5$일 때
$x+\dfrac{1}{x}=5$이므로 $x^2-5x+1=0\quad\therefore\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$x=\pm i$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

4. [정답] -1
[해설]
$x^3-x^2-2kx+2k=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x^2-2k)=0$ ……(가)
이때 이차방정식 $x^2-2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 $k<0$ ……(나)
따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. ……(다)

단계	채점 요소	배점률
(가)	인수분해를 바르게 하기	20%
(나)	k의 값의 범위 구하기	60%
(다)	정수 k의 최댓값 구하기	20%

5. [정답] $a=-8$, 나머지 두 근 : 4, $-i$

6. [정답] (1) $a=-5$, $b=8$ (2) 3, $1-i$
[해설]
(1) $x=1+i$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$(b-8)+(2+2a+b)i=0$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$b-8=0$, $2+2a+b=0$
$\therefore\ a=-5$, $b=8$
(2) $x^3-5x^2+8x-6=0$에서
$(x-3)(x^2-2x+2)=0$
$\therefore\ x=3$ 또는 $x=1\pm i$
따라서 나머지 두 근은 3, $1+i$이다.

7. [정답] (1) 1 (2) 1
[해설]
(1) $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 w, $\overline{w}$는 $x^2-x+1=0$의 두 허근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$w+\overline{w}=1$, $w\overline{w}=1$
$\therefore\ \dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}=1$

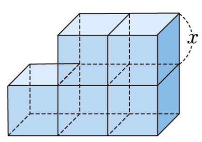
(2) $\dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}=\dfrac{2+(w+\overline{w})}{1+(w+\overline{w})+w\overline{w}}$
$=\dfrac{2+1}{1+1+1}=1$

8. [정답] $a=9$, $b=-7$
[해설]
$\omega^3=-1$, $\omega^2-w+1=0$이므로
$2\omega^3+5\omega^2+4\omega=-2+5(\omega-1)+4\omega=9\omega-7$
$\therefore\ a=9$, $b=-7$

9. [정답] 2

10. [정답] 6개
[해설]
$\dfrac{n}{24}(n^3-2n^2-n+2)=35$에서
$n^4-2n^3-n^2+2n-840=0$
$(n+5)(n-6)(n^2-n+28)=0$
그런데 n은 자연수이므로 $n=6$
따라서 원 위의 6개의 점이 있어야 한다.

11. [정답] 3
[해설]
구하는 입체도형은 다음 그림과 같다.



$S=20x^2$, $V=5x^3$이므로 $S-$

$20x^2-45=5x^3$

$x^3-4x^2-9=0$

$(x-3)(x^2-x-3)=0$ ……(가)

그런데 x는 자연수이므로 $x=3$ ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	x에 대한 식 구하기	80%
(나)	x의 값 구하기	20%

12. [정답] 6

[해설]

$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $(x+2y)(2x-y)=0$

$\therefore\ x=-2y$ 또는 $y=2x$

(ⅰ) $x=-2y$일 때

$x=-2y$를 ㉠에 대입하면

$4y^2+y^2=20 \quad \therefore\ y=\pm2$

$y=2$일 때 $x=-4$, $y=-2$일 때 $x=4$

(ⅱ) $y=2x$일 때

$y=2x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+4x^2=20 \quad \therefore\ x=\pm2$

$x=2$일 때 $y=4$, $x=-2$일 때 $y=-4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha+\beta$의 최댓값은 $2+4=6$

13. [정답] $\pm3\sqrt{37}$

[해설]

$\begin{cases} x+6y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=k-6y$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$37y^2-12ky+k^2-9=0$이 y에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식 D가 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-6k)^2-37\times(k^2-9)=0$

$\therefore\ k=\pm3\sqrt{37}$

14. [정답] $a=\frac{5}{2}$, $b=-1$

[해설]

$x+y=9$에서 $y=9-x$ ……㉠

㉠을 $x^2+y^2=41$에 대입하면

$x=4$ 또는 $x=5$

(ⅰ) $x=4$일 때

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $y=5$

(ⅱ) $x=5$일 때

$x=5$를 ㉠에 대입하면 $y=4$

이때 $x-y=b$에서 $b<0$이므로

$x=4$, $y=5$

$\therefore\ b=4-5=-1$

또 $x=4$, $y=5$를 $ax-y=5$에 대입하여 풀면 $a=\frac{5}{2}$

15. [정답] 48 m^2

[해설]

처음 낚시터의 가로, 세로의 길이를 각각 xm, ym라고 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+3)(y+3)=xy+51 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ……(가)

㉡에서 $y=14-x$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100$

$x^2-14x+48=0$

$\therefore\ x=6$ 또는 $x=8$

(ⅰ) $x=6$일 때

$x=6$을 ㉢에 대입하면 $y=8$

(ⅱ) $x=8$일 때

$x=8$을 ㉢에 대입하면 $y=6$ ……(나)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 넓이는 48 m^2이다. ……(다)

단계	채점 요소	배점률
(가)	연립이차방정식 세우기	30%
(나)	(ⅰ), (ⅱ)의 경우 바르게 구하기	60%
(다)	처음 낚시터의 넓이 구하기	10%

16. [정답] 가로의 길이 : 70m, 세로의 길이 : 30m

[해설]

잔디밭의 가로, 세로의 길이를 각각 xm, ym라고 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=5800 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=2100 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡에서

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=10000$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$x+y=100$, $y=100-x$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(100-x)^2=5800$

$x^2-100x+2100=0$

$\therefore\ x=30$ 또는 $x=70$

(ⅰ) $x=30$일 때

$x=30$을 ㉢에 대입하면 $y=70$

(ⅱ) $x=70$일 때

$x=70$을 ㉡에 대입하면 $y=30$

$x>y$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=70$, $y=30$

따라서 잔디밭 가로, 세로의 길이는 각각 70m, 30m이다.

17. [정답] 7

[해설]

$3x-a<5x+a+4$에서 $x>-a-2$ ……㉠

$2x-2\le8$에서 $x\le5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $-4<x\le b$이므로

$a=2$, $b=5$

$\therefore\ a+b=7$

18. [정답] 13
[해설]
방의 개수를 x라고 하면 학생 수는 $6x+4$이므로
$8(x-3)+1 \le 6x+4 \le 8(x-3)+8$
$8(x-3)+1 \le 6x+4$에서 $x \le \frac{27}{2}$ ……㉠
$6x+4 \le 8(x-3)+8$에서 $x \ge 10$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $10 \le x \le \frac{27}{2}$이므로 방의 최대 개수는 13이다.

19. [정답] (1) $-\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$ (2) $x \le -1$ 또는 $x \ge 2$

20. [정답] 2개
[해설]
(ⅰ) $x < -7$일 때
$x \ge -4$
그런데 $x < -7$이므로 해는 없다.
(ⅱ) $-7 \le x < 3$일 때
$x \ge 2$
그런데 $-7 \le x < 3$이므로 $2 \le x < 3$
(ⅲ) $x \ge 3$일 때
$x \le \frac{10}{3}$
그런데 $x \ge 3$이므로 $3 \le x \le \frac{10}{3}$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 부등식의 해는 $2 \le x \le \frac{10}{3}$
따라서 정수 x는 2, 3의 2개다.

21. [정답] $a=-7$, $b=\frac{1}{3}$
[해설]
$|3x-a| < 8$에서 $-8 < 3x-a < 8$
$-8 < 3x-a$에서 $x > \frac{a-8}{3}$ ……㉠
$3x-a < 8$에서 $x < \frac{a+8}{3}$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분이 $-5 < x < b$이므로
$\frac{a-8}{3}=-5$, $\frac{a+8}{3}=b$
$\therefore$ $a=-7$, $b=\frac{1}{3}$

22. [정답] (1) $a=-5$, $b=6$ (2) $x \le 1$ 또는 $x \ge 5$
[해설]
(1) $(x-2)(x-3) < 0$, 즉 $x^2-5x+6 < 0$이 $x^2+ax+b < 0$과 같으므로 $a=-5$, $b=6$
(2) $x^2-6x+5 \ge 0$에서
$(x-1)(x-5) \ge 0$
$\therefore$ $x \le 1$ 또는 $x \ge 5$

23. [정답] $x < -1$ 또는 $x > 3$
[해설]
$f(x)=a(x+3)(x-5)(a>0)$라고 하면 ……(가)
$f(2x-1)=a(2x-1+3)(2x-1-5)$
$=a(2x+2)(2x-6)$ ……(나)
따라서 부등식 $4a(x+1)(x-3) > 0$에서
$(x+1)(x-3) > 0$
$\therefore$ $x < -1$ 또는 $x > 3$ ……(다)

단계	채점 요소	배점률
(가)	$f(x)$의 식 구하기	40%
(나)	$f(2x-1)$의 식 구하기	30%
(다)	$f(2x-1) > 0$의 해 구하기	30%

24. [정답] (1) $-1 < k < 0$ (2) $k=1$

25. [정답] ③
[해설]
ㄱ. $x^2+x+2 \ge 0$이므로 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식 D는 $D=1^2-4\times1\times2=-7<0$
따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
ㄴ. $x^2-4x+4<0$이므로 이차방정식 $x^2-4x+4=0$의 판별식 D는 $D=(-4)^2-4\times1\times4=0$
따라서 해는 없다.
ㄷ. $x^2-3x+5 \le 0$이므로 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 판별식 D는 $D=(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$
따라서 해는 없다.
ㄹ. $x^2-3x+3>0$이므로 이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 판별식 D는 $D=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$
따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
이상에서 구하는 부등식은 ㄱ, ㄹ이다.

26. [정답] $-1 < k < 2$

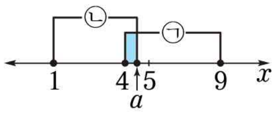
27. [정답] 4
[해설]
주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a-1)x+a-1=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 하므로
$D=(a-1)^2-4\times(a-1)<0$
$(a-1)(a-5)<0$
$\therefore$ $1 < a < 5$
따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

28. [정답] $0 < x \le 4$

29. [정답] $1 < x < 9$
[해설]
$x^2-(a+b)x+ab<0$에서 $(x-a)(x-b)<0$
$b < x < a$ ……㉠
$x^2+(b+c)x+bc \ge 0$에서 $(x$

$x \le -c$ 또는 $x \ge -b$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분이 $-3 < x \le 2$ 또는 $3 \le x < 5$이므로
$a=5,\ b=-3,\ c=-2$
$x^2+acx+3(a+c)<0$에서
$x^2-10x+9<0$
$(x-1)(x-9)<0$
$\therefore\ 1<x<9$

30. [정답] $4 \le a < 5$
[해설]
$x^2-13x+36 \le 0$에서
$4 \le x \le 9$ ……㉠
$x^2-(a+1)x+a \le 0$에서
$(x-1)(x-a) \le 0$ ……㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수가 1개뿐이려면 $4 \le a < 5$



31. [정답] $\dfrac{5}{2} < a \le \dfrac{7}{2}$
[해설]
$-x^2+2<x^2+2x+a$가 항상 성립하려면 이차방정식
$2x^2+2x+a-2=0$의 판별식 D_1이 $D_1<0$이어야 하므로
$D_1=2^2-4\times2\times(a-2)<0$
$\therefore\ a>\dfrac{5}{2}$ ……㉠
$x^2+2x+a \le 3x^2+4$가 항상 성립하려면 이차방정식
$2x^2-2x+4-a=0$의 판별식 D_2가 $D_2 \le 0$이어야 하므로
$D_2=(-2)^2-4\times2\times(4-a) \le 0$
$\therefore\ a \le \dfrac{7}{2}$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $\dfrac{5}{2}<a \le \dfrac{7}{2}$

32. [정답] $a=1,\ b=10$
[해설]
$x^2-5x \le 0$에서 $0 \le x \le 5$ ……㉠
$x^2+7x-1 \ge 6x+5$에서
$x \le -3$ 또는 $x \ge 2$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $2 \le x \le 5$
$ax^2-7x+b \le 0$의 해가 $2 \le x \le 5$이므로
이 부등식이 $a(x-2)(x-5) \le 0$, 즉
$ax^2-7ax+10a \le 0$과 같아야 한다.
따라서 $-7a=-7,\ 10a=b$이므로 $a=1,\ b=10$

33. [정답] 5, 6, 7

34. [정답] 50 cm 이상 70 cm 이하
[해설]
두 현수막의 가로의 길이를 x cm라고 하면 A의 세로의 길이는 $(x-20)$ cm이므로
$x(x-20) \le 3500$
$\therefore\ -50 \le x \le 70$
그런데 $x>20$이므로 $20<x \le 70$ ……㉠
B의 세로의 길이는 $(x+40)$ cm이므로
$x(x+40) \ge 4500$
$\therefore\ x \le -90$ 또는 $x \ge 50$
그런데 $x>0$이므로 $x \ge 50$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $50 \le x \le 70$이므로 가로의 길이의 범위는 50 cm 이상 70 cm 이하이다.

35. [정답] 가로의 길이 : 20 cm, 세로의 길이 : 15 cm
[해설]
직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라고 하면
$\begin{cases} x+y=35 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=625 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=35-x$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x=15$ 또는 $x=20$
(ⅰ) $x=15$일 때
$x=15$를 ㉢에 대입하면 $y=20$
(ⅱ) $x=20$일 때
$x=20$을 ㉢에 대입하면 $y=15$
$x>y$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=20,\ y=15$
따라서 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 20 cm, 15 cm이다.

36. [정답] 4분 후
[해설]
지점 O를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하면
출발한 지 t분 후의 미소와 나라의 위치는 각각
$(-300+30t,\ 0)$, $(0,\ -300+90t)$로 나타낼 수 있으므로
두 사람 사이의 거리는
$\sqrt{(-300+30t)^2+(-300+90t)^2}$
$=\sqrt{9000(t-4)^2+36000}$
따라서 두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 출발한 지 4분 후이다.

37. [정답] 12
[해설]
$\overline{AB}=2\sqrt{10}$에서 $\overline{AB}^2=40$이므로
$(a-4)^2+(3+3)^2=40,\ a^2-8a+12=0$
$(a-2)(a-6)=0 \qquad \therefore\ a=2$ 또는 $a=6$
따라서 모든 a의 값의 곱은 12이다.

38. [정답] $(0,\ 9)$

39. [정답] 외심의 좌표 : $(2,\ 3)$,
외접원의 반지름의 길이 : $\sqrt{10}$
[해설]
$\triangle ABC$의 외심을 $P(x,\ y)$라고 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ ……(가)

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $2x-y=1$ ……㉠

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서 $-x+3y=7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$ ……(나)

따라서 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는 $(2,\ 3)$이고 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{BP}=\sqrt{(3-2)^2+3^2}=\sqrt{10}$ ……(다)

단계	채점 요소	배점률
(가)	$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$임 알기	30%
(나)	x, y의 값 구하기	50%
(다)	외심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	20%

40. [정답] (가) : $\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$,
(나) : $x^2+(y-b)^2$

41. [정답] $\dfrac{11}{2}$

[해설]

$P(0,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2^2+(3-y)^2+(-1)^2+(4-y)^2$

$=2y^2-14y+30$ ……(가)

$=2\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $\dfrac{11}{2}$이다. ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 식 세우기	80%
(나)	$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값 구하기	20%

42. [정답] 풀이 참조

[해설]

$\overline{AB}=\sqrt{85}$, $\overline{BC}=\sqrt{17}$, $\overline{CA}=2\sqrt{17}$이므로

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

43. [정답] 5

[해설]

$(a-2)^2+(-10-1)^2$

$=\{(2+1)^2+(1+1)^2\}+\{(a+1)^2+(-10+1)^2\}$

$-6a=-30$ $\quad\therefore\ a=5$

44. [정답] $(-7,\ 0)$

45. [정답] 13

[해설]

$\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는 $(15,\ 17)$

이 점이 직선 $y=2x-a$ 위에 있으므로 $a=13$

46. [정답] $\dfrac{6}{11}<t<1$

[해설]

$\overline{AB}$를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$(5t-2,\ 11t-6)$

이 점이 제1사분면 위에 있으려면

$5t-2>0$, $11t-6>0$에서

$t>\dfrac{6}{11}$ ……(가)

이때 $0<t<1$이므로 $\dfrac{6}{11}<t<1$ ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	제1사분면 위에 있을 때 t의 범위 구하기	70%
(나)	조건을 만족하는 t의 범위 구하기	30%

47. [정답] $a=-2$, $b=-5$

[해설]

$\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는 $(3b+6,\ -3-2a)$

따라서 $3b+6=-9$, $-3-2a=1$이므로

$a=-2$, $b=-5$

48. [정답] $\left(1,\ \dfrac{17}{3}\right)$, $\left(7,\ \dfrac{25}{3}\right)$

[해설]

$\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

즉 점 C는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점 또는 $4:1$로 외분하는 점이므로

점 C의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{17}{3}\right)$, $\left(7,\ \dfrac{25}{3}\right)$

49. [정답] $13\sqrt{2}$

[해설]

$P(2,\ 3)$, $Q(-11,\ 16)$이므로 $\overline{PQ}=13\sqrt{2}$

50. [정답] $(4,\ -1)$

[해설]

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$G(2,\ 3)$이므로 $\dfrac{3-1+a}{3}=2$, $\dfrac{7+3+b}{3}=3$

$a=4$, $b=-1$

따라서 점 C의 좌표는 $(4,\ -1)$이다.

51. [정답] $\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$

[해설]

$D\left(-\dfrac{1}{2},\ 3\right)$, $E(-1,\ 0)$, $F\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$이므로

$\triangle$DEF의 무게중심의 좌표는 $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$

52. [정답] $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
[해설]
각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
이때 $\overline{AB}=\sqrt{17}$, $\overline{AC}=\sqrt{17}$이므로
점 D는 $\overline{BC}$를 $1:1$로 내분한다.
즉, 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이므로
점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

53. [정답] -6
[해설]
두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{7-0}{0-(-3)}(x+3) \quad \therefore\ y=\frac{7}{3}x+7$
이 직선이 점 $(a,\ a-1)$을 지나므로
$a-1=\frac{7}{3}a+7 \quad \therefore\ a=-6$

54. [정답] 풀이 참조
[해설]
x절편이 a이고 y절편이 b인 직선은 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나므로 직선의 방정식은 $y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$,
$\frac{b}{a}x+y=b$
$b\neq 0$이므로 양변을 b로 나누면 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

55. [정답] $(4,\ 1)$
[해설]
$(2+k)x+(k-3)y-(5k+5)=0$에서
$(2x-3y-5)+k(x+y-5)=0$
이 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선
$2x-3y-5=0$, $x+y-5=0$의 교점 $(4,\ 1)$을 지난다.

56. [정답] $y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$
[해설]
두 직선 $3x-2y-4=0$, $2x-y+5=0$의 교점의 좌표는 $(-14,\ -23)$
따라서 두 점 $(-14,\ -23)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-2=\frac{2+23}{1+14}(x-1)$
$\therefore\ y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$

57. [정답] 14
[해설]
직선 $2x-3y=-14$와 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{2}x$의 교점을 각각 A, B라고 하면 $A(2,\ 6)$, $B(-4,\ 2)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(2-6)^2}=2\sqrt{13}$
두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{2}x$의 교점 $O(0,\ 0)$과 직선 $2x-3y=-14$ 사이의 거리는
$\frac{|14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}$이므로
구하는 넓이는
$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}\times\frac{14}{\sqrt{13}}=14$

58. [정답] $y=3x-4$
[해설]
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면
두 직선 AB, BC의 기울기가 같아야 하므로
$\frac{2-(-7)}{a-(-1)}=\frac{(13-a)-2}{5-a}$,
$a^2-19a+34=0$, $(a-2)(a-17)=0$
이때 a는 한 자리 자연수이므로 $a=2$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-2=\frac{2-(-7)}{2-(-1)}(x-2) \quad \therefore\ y=3x-4$

59. [정답] $y=-x-1$
[해설]
구하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점 $(-3,\ 2)$와 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$를 지나야 하므로 $y=-x-1$

60. [정답] (1) $y=2x+4$ (2) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
[해설]
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 F라고 하면
$\triangle AOD\equiv\triangle BEA\equiv\triangle DFC$이므로
$B(-3,\ -2)$, $C(-1,\ -3)$
(1) $y=\frac{-2-0}{-3-(-2)}(x+2) \quad \therefore\ y=2x+4$
(2) $y-(-3)=\frac{-2-(-3)}{-3-(-1)}(x+1) \quad \therefore$
$y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

61. [정답] $\frac{7}{2}$

62. [정답] 평행 : ㄱ, 수직 : ㄷ

63. [정답] $\frac{1}{2}$

[해설]

$a\times 2=-1$, $a=-\dfrac{3-b}{4}$이므로

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$ $\therefore$ $a+b=\dfrac{1}{2}$

64. [정답] $m=-4$, $m=-\dfrac{2}{3}$, $m=2$

[해설]

(ⅰ) 어느 두 직선이 서로 평행할 때,

직선 $2x+my-8=0$의 기울기가

$-\dfrac{2}{m}$이므로 $-\dfrac{2}{m}=\dfrac{1}{2}$ 또는 $-\dfrac{2}{m}=3$

$\therefore$ $m=-4$ 또는 $m=-\dfrac{2}{3}$

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

직선 $2x+my-8=0$이 두 직선 $x-2y+5=0$, $3x-y=0$의 교점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로

$2+3m-8=0$ $\therefore$ $m=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=-4$, $m=-\dfrac{2}{3}$, $m=2$

65. [정답] $(1,\ 4)$

[해설]

점 $A(2,\ 5)$에서 직선 $y=-x+5$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직선 AH의 기울기는 1이므로 직선 AH의 방정식은 $y=x+3$ ……(가)

두 직선 $y=-x+5$, $y=x+3$의 교점이 수선의 발이므로 그 좌표는 $(1,\ 4)$이다. ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	직선 AH의 방정식 구하기	50%
(나)	수선의 발의 좌표 구하기	50%

66. [정답] 9

[해설]

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{4-(-2)}{3-1}=3$이므로

직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이다. ……(가)

기울기가 $-\dfrac{1}{3}$이고 y절편이 3인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{3}x+3$ ……(나)

따라서 이 직선의 x절편은 9이다. ……(다)

단계	채점 요소	배점률
(가)	직선 AB에 수직인 직선의 기울기 구하기	40%
(나)	직선의 방정식 구하기	30%
(다)	x절편 구하기	30%

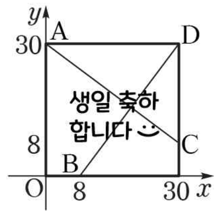
67. [정답] $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{2}$

68. [정답] 풀이 참조

[해설]

다음 그림에서 두 직선 AC, BD의 기울기는 각각

$\dfrac{8-30}{30-0}=-\dfrac{11}{15}$, $\dfrac{30-0}{30-8}=\dfrac{15}{11}$



이므로 두 직선 AC, BD의 기울기의 곱은

$-\dfrac{11}{15}\times\dfrac{15}{11}=-1$

따라서 두 직선 AC, BD는 서로 수직이다.

즉, 잘랐을 때 생긴 두 직선은 서로 수직이다.

69. [정답] $y=-\dfrac{3}{4}x+3$

70. [정답] $(0,\ -3)$, $(0,\ 7)$

[해설]

y축 위의 점의 좌표를 $(0,\ a)$라고 하면

$\dfrac{|1\times 0-2\times a+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$, $|-2a+4|=10$

$\therefore$ $a=-3$ 또는 $a=7$ ……(가)

따라서 구하는 점의 좌표는

$(0,\ -3)$, $(0,\ 7)$ ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	a의 값 구하기	80%
(나)	구하는 점의 좌표 구하기	20%

71. [정답] (1) $\sqrt{37}$ (2) $6x-y-4=0$ (3) $\dfrac{23\sqrt{37}}{37}$

(4) $\dfrac{23}{2}$

72. [정답] $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$

73. [정답] $2x-4y+5=0$, $4x+2y-5=0$

[해설]

$\dfrac{|3x-y|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x+3y-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}$에서

$|3x-y|=|x+3y-5|$

$\therefore$ $2x-4y+5=0$, $4x+2y-5=0$

74. [정답] $10\sqrt{41}$ m

75. [정답] $(x-1)^2+(y-5)^2$

76. [정답] $y=-\frac{1}{2}x+1$

[해설]

$\overline{AB}$의 수직이등분선은 원 $(x-2)^2+y^2=9$의 중심 $(2,\ 0)$을 지나고

기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. ……(가)

$y-0=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+1$ ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	수직이등분선의 방정식의 기울기 구하기	60%
(나)	수직이등분선의 방정식 구하기	40%

77. [정답] 6

[해설]

두 점 $(-4,\ 2)$, $(6,\ 8)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 5)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{34}$이므로

원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-5)^2=34$

$y=0$을 위의 식에 대입하면 $(x-1)^2=9$

$x-1=-3$ 또는 $x-1=3$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는 $4-(-2)=6$

78. [정답] $k<5$

79. [정답] 최댓값 : $2+\sqrt{13}$, 최솟값 : $\sqrt{13}-2$

[해설]

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $3x+2y-9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times(-2)+2\times1-9|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

구하는 거리의 최댓값은 $2+\sqrt{13}$, 최솟값은 $\sqrt{13}-2$이다.

80. [정답] 10

[해설]

$x^2+y^2-10x-24y+165=0$에서

$(x-5)^2+(y-12)^2=4$이므로

두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(5,\ 12)$ 사이의 거리는

$\sqrt{5^2+12^2}=13$

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $13-(2+1)=10$

81. [정답] $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

[해설]

원의 방정식을 $(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$이라고 하면 이 원과 직선 $2x-y+6=0$이 접하므로

$\frac{|2\times1-3+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=r$ $\quad\therefore\ r=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

82. [정답] $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=10$, $(x-1)^2+(y-5)^2=10$

[해설]

두 직선 $y=3x-8$, $y=3x+12$가 서로 평행하므로 구하는 원은 중심은 직선 $y=3x+2$ 위에 있다.

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 3a+2)$라고 하면

두 직선 $y=3x-8$, $y=3x+12$ 사이의 거리는 직선 $y=3x-8$ 위의 점 $(0,\ -8)$과 직선 $y=3x+12$, 즉 $3x-y+12=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3\times0-1\times(-8)+12|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2\sqrt{10}$

즉, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이고 원이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로

$\sqrt{(a+2)^2+(3a-2)^2}=\sqrt{10}$, $10a^2-8a-2=0$

$(10a+2)(a-1)=0$ $\quad\therefore\ a=-\frac{1}{5}$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=10$, $(x-1)^2+(y-5)^2=10$

83. [정답] $k\geq0$

[해설]

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

이 원과 직선 $x-ky+3=0$이 만나야 하므로

$\frac{|-1-k\times2+3|}{\sqrt{1^2+(-k)^2}}\leq2$,

$|-2k+2|\leq2\sqrt{(1+k^2)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $-8k\leq0$

$\therefore\ k\geq0$

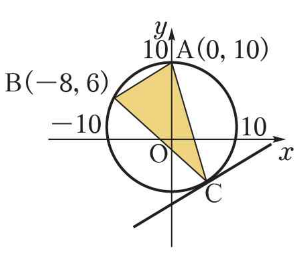
84. [정답] (1) $m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

(2) $m=\pm\sqrt{7}$ (3) $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$

85. [정답] $40+20\sqrt{5}$

[해설]

△ABC의 넓이는 다음 그림과 같이 점 C에서의 원의 접선이 직선 AB와 평행할 때 최대이다.



직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의

방정식은 $y=\frac{1}{2}x-5\sqrt{5}$

점 A(0, 10)과 직선 $y=\frac{1}{2}x-5\sqrt{5}$, 즉

$x-2y-10\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\times0-2\times10-10\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=10+4\sqrt{5}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-8-0)^2+(6-10)^2}=4\sqrt{5}$ 이므로

△ABC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times(10+4\sqrt{5})=40+20\sqrt{5}$

86. [정답] $y=-3x+11$

[해설]

$x^2+y^2-6x-4y+12=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

$x^2+y^2-8x+2y+8=0$에서 $(x-4)^2+(y+1)^2=9$

두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은

두 원의 중심 (3, 2), (4, −1)을 모두 지나야 하므로 그 방정식은

$y-2=\frac{2-(-1)}{3-4}(x-3)$ $\therefore\ y=-3x+11$

87. [정답] (1) $y=3x\pm4\sqrt{5}$ (2) $y=\frac{1}{3}x\pm\frac{10}{3}$

88. [정답] (1) $-3x+2y=13$ (2) $x=-3$

89. [정답] 6

[해설]

$x^2+y^2-2x+8y-8=0$에서 $(x-1)^2+(y+4)^2=25$

이 원 위의 점 (−2, 0)에서의 접선은 점 (−2, 0)과 원의 중심 (1, −4)를 지나는 직선에 수직이므로 접선의

기울기를 m이라고 하면 $m\times\frac{-4-0}{1-(-2)}=-1$ $\therefore$

$m=\frac{3}{4}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

이 직선이 점 $(6,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$

90. [정답] $2x-y+5=0,\ 11x+2y-25=0$

91. [정답] $y=\frac{4}{3}x+16$

92. [정답] $x+3y+10=0,\ 3x-y+10=0$

93. [정답] -4

[해설]

$x^2+y^2-6x-4y+12=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

점 (5, −1)를 지나는 접선의 방정식을

$y+1=m(x-5)$라고 하면

원의 중심 (3, 2)와 직선 $y+1=m(x-5)$,

즉 $mx-y-5m-1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의

길이인 1과 같아야 하므로 $\frac{|m\times3-1\times2-5m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

따라서 구하는 기울기의 합은 $-\frac{12}{3}=-4$

94. [정답] $\frac{16}{3}\sqrt{3}$

[해설]

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 (0, 4)를 지나므로

$4y_1=4$ $\therefore\ y_1=1$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$

$y_1=1$을 위의 식에 대입하면

${x_1}^2+1=4$ $\therefore\ x_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x+y=4,\ -\sqrt{3}x+y=4$이므로

구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\times4=\frac{16}{3}\sqrt{3}$

95. [정답] $-\sqrt{2}$

[해설]

점 $(a,\ 0)$을 지나는 접선의 방정식을 $y=m(x-a)$라고 하면

원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=m(x-a)$, 즉

$mx-y-am=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\frac{|-am|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |am|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a^2-1)m^2-1=0$ ……(가)

m에 대한 이차방정식의 두 근의 곱이 -1이므로

$\frac{-1}{a^2-1}=-1,\ a^2-1=1,\ a<0$이므로

$a=-\sqrt{2}$ ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	m에 대한 식 세우기	70%
(나)	a의 값 구하기	30%

96. [정답] $4\sqrt{2}$

[해설]

원의 방정식을 $(x-a)^2+(y+a$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로 $(-1-a)^2+(2+a)^2=a^2$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=-5$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이므로
중심 사이의 거리는 $\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

97. [정답] 0
[해설]
원 $x^2+y^2=40$ 위의 점 $(-2,\ 6)$에서의 접선의 방정식은
$-2x+6y=40,\ x-3y+20=0$
원 $x^2+y^2+2x-6y+k=0$, 즉
$(x+1)^2+(y-3)^2=10-k$와
직선 $x-3y+20=0$이 접하므로

$\dfrac{|-1-3\times3+20|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10-k}$ ……(가)

$\sqrt{10}=\sqrt{10-k}\qquad\therefore\ k=0$ ……(나)

단계	채점 요소	배점률
(가)	점과 직선 사이의 거리의 식 세우기	80%
(나)	k의 값 구하기	20%