01 이항정리

(1) 이항정리 : 자연수 n에 대하여

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

(2) 이항계수 : $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$을 이항계수라 한다.

(3) $(a+b)^n$의 전개식의 일반항 : ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

(4) $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식의 일반항 :

${}_p\mathrm{C}_r a^{p-r}b^r \times {}_q\mathrm{C}_s c^{q-s}d^s$

◪ **이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.**

1. $(a+b)^2$

2. $(a+b)^3$

3. $(x-2)^4$

4. $(x-2)^5$

5. $(x+y)^4$

6. $(x+y)^5$

7. $(2x+y)^5$

8. $(3a+2b)^4$

9. $(3a-b)^4$

10. $(2a+b)^6$

11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

12. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$

13. $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^3$

14. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$

15. $\left(a-\frac{2}{a}\right)^3$

16. $\left(3x-\frac{2}{x}\right)^5$

◪ 다음을 구하여라.

17. $(x+2)^4$의 전개식에서 x^3의 계수

18. $(x+y)^7$의 전개식에서 y^7의 계수

19. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항

20. $(2x-y)^4$의 전개식에서 xy^3의 계수

21. $(2x-3y)^4$의 전개식에서 xy^3의 계수

22. $(2x-y)^5$의 전개식에서 x^3y^2의 계수

23. $(x+y)^7$의 전개식에서 x^4y^3의 계수

24. $(x+y)^7$의 전개식에서 x^5y^2의 계수

25. $(a+b)^8$의 전개식에서 a^3b^5의 계수

◪ 다음을 구하여라.

26. $(x^2+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항

27. $(x+1)^4(x-2)^3$의 전개식에서 x^6의 계수

28. $(x+1)^5(x+2)^3$의 전개식에서 x^7의 계수

29. $(x-1)^3(x+3)^7$의 전개식에서 x^8의 계수

30. $(x+3)^5(y-2)^4$의 전개식에서 x^3y^2의 계수

31. $(x+1)^6(y-1)^5$의 전개식에서 x^4y^4의 계수

32. $(1+x)^3(2+x)^4$의 전개식에서 x의 계수

33. $(x+1)^3(2-x)^4$의 전개식에서 x의 계수

34. $(2+x^2)^2(1+2x)^5$의 전개식에서 x^2의 계수

◪ 다음을 구하여라.

35. $(x^2+1)^n$의 전개식에서 x^4의 계수가 36일 때, n의 값

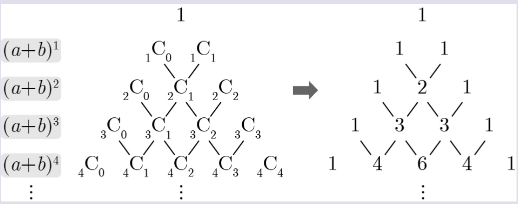
36. $(1+ax)^5$의 전개식에서 x^4의 계수가 80일 때, 양수 a의 값

37. $\left(ax^3-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 -90일 때, 양수 a의 값

38. $\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합

02 파스칼의 삼각형

(1) 파스칼의 삼각형 : 자연수 n의 값이 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ 일 때, $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 배열한 것



(2) 각 단계의 양 끝에 있는 수는 모두 1이므로 $_nC_0={}_nC_n=1$ (단, n은 자연수)

(3) 각 단계의 수의 배열이 좌우 대칭이므로 $_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, n은 자연수)

(4) 각 단계의 수는 그 위 단계의 이웃하는 두 수의 합과 같으므로 $_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ (단, $1\le r\le n-1$, n은 자연수)

◪ 다음을 $_nC_r$의 꼴로 나타내어라.

39. $_4C_3+{}_4C_4$

40. $_3C_2+{}_3C_3$

41. $_7C_2+{}_7C_3$

42. $_7C_4+{}_7C_5$

43. $_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2$

44. $_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_2$

45. $_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3$

46. $_2C_0+{}_2C_1+{}_4C_2+{}_4C_4$

47. $_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_2$

48. $_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1$

◪ 다음 식의 값을 구하여라.

49. $_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$

50. $_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3$

51. $_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

03 이항계수의 성질

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_0+{}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_n=2^n$ (단, n은 자연수)

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_0-{}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2-{}_{n}\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_{n}\mathrm{C}_n=0$
(단, n은 자연수)

(3) ${}_{n}\mathrm{C}_0+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_4+\cdots={}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_3+{}_{n}\mathrm{C}_5+\cdots=2^{n-1}$
(단, n은 자연수)

◪ 다음 값을 구하여라.

52. ${}_{3}\mathrm{C}_0+{}_{3}\mathrm{C}_1+{}_{3}\mathrm{C}_2+{}_{3}\mathrm{C}_3$

53. ${}_{4}\mathrm{C}_0+{}_{4}\mathrm{C}_1+{}_{4}\mathrm{C}_2+{}_{4}\mathrm{C}_3+{}_{4}\mathrm{C}_4$

54. ${}_{5}\mathrm{C}_0+{}_{5}\mathrm{C}_1+{}_{5}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{5}\mathrm{C}_5$

55. ${}_{8}\mathrm{C}_0+{}_{8}\mathrm{C}_1+{}_{8}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{8}\mathrm{C}_8$

56. ${}_{6}\mathrm{C}_1+{}_{6}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{6}\mathrm{C}_6$

57. ${}_{20}\mathrm{C}_1+{}_{20}\mathrm{C}_2+{}_{20}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}$

58. ${}_{7}\mathrm{C}_1+{}_{7}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_5+{}_{7}\mathrm{C}_7$

59. ${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

60. ${}_{9}\mathrm{C}_1+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{9}\mathrm{C}_9$

61. ${}_{9}\mathrm{C}_0-{}_{9}\mathrm{C}_1+{}_{9}\mathrm{C}_2-{}_{9}\mathrm{C}_3+\cdots-{}_{9}\mathrm{C}_9$

62. ${}_{10}\mathrm{C}_1-{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_3-{}_{10}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9$

63. ${}_{12}\mathrm{C}_0+{}_{12}\mathrm{C}_2+{}_{12}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_{12}$

64. ${}_{10}\mathrm{C}_1-{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_3-{}_{10}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9$

65. ${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_6+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

66. ${}_{10}\mathrm{C}_0-{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2-\cdots-{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

67. ${}_{15}\mathrm{C}_1-{}_{15}\mathrm{C}_2+{}_{15}\mathrm{C}_3-{}_{15}\mathrm{C}_4+\cdots-{}_{15}\mathrm{C}_{14}$

68. ${}_{99}\mathrm{C}_0+{}_{99}\mathrm{C}_1+{}_{99}\mathrm{C}_2+{}_{99}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{49}$

69. ${}_{49}\mathrm{C}_{25}+{}_{49}\mathrm{C}_{26}+{}_{49}\mathrm{C}_{27}+{}_{49}\mathrm{C}_{28}+\cdots+{}_{49}\mathrm{C}_{49}$

◪ 다음 식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

70. ${}_{3}\mathrm{C}_0+{}_{3}\mathrm{C}_1+{}_{4}\mathrm{C}_2+{}_{5}\mathrm{C}_3={}_{n}\mathrm{C}_3$

71. ${}_{4}\mathrm{C}_2+{}_{4}\mathrm{C}_1+{}_{5}\mathrm{C}_1+{}_{6}\mathrm{C}_1={}_{n}\mathrm{C}_2$

72. ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}=31$

73. ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=128$

74. ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=255$

75. $100<{}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}<200$

76. $500<{}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}<600$

77. $1000<{}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}<2000$

78. $1000<{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}<2000$

정답 및 해설

1) $a^2+2ab+b^2$

⇨ $(a+b)^2={}_2C_0a^2+{}_2C_1a^1b^1+{}_2C_2b^2=a^2+2ab+b^2$

2) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⇨ $(a+b)^3={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^{3-1}b^1+{}_3C_2a^{3-2}b^2+{}_3C_3b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

3) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

⇨ $(x-2)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-2)+{}_4C_2x^2(-2)^2$
$+{}_4C_3x(-2)^3+{}_4C_4(-2)^4$

$=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

4) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

⇨ $(x-2)^5$

$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-2)+{}_5C_2x^3(-2)^2+{}_5C_3x^2(-2)^3$
$+{}_5C_4x(-2)^4+{}_5C_5(-2)^5$

$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

5) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

⇨ $(x+y)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3y+{}_4C_2x^2y^2+{}_4C_3xy^3+{}_4C_4y^4$

$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

6) $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

⇨ $(x+y)^5$

$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4y+{}_5C_2x^3y^2+{}_5C_3x^2y^3+{}_5C_4xy^4+{}_5C_5y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

7) $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

⇨ $(2x+y)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4y+{}_5C_2(2x)^3y^2$
$+{}_5C_3(2x)^2y^3+{}_5C_4(2x)y^4+{}_5C_5y^5$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

8) $81a^4+216a^3b+216a^2b^2+96ab^3+16b^4$

⇨ $(3a+2b)^4$

$={}_4C_0(3a)^4+{}_4C_1(3a)^3(2b)+{}_4C_2(3a)^2(2b)^2$
$+{}_4C_3(3a)(2b)^3+{}_4C_4(2b)^4$

$=81a^4+216a^3b+216a^2b^2+96ab^3+16b^4$

9) $81a^4-108a^3b+54a^2b^2-12ab^3+b^4$

⇨ $(3a-b)^4$

$={}_4C_0(3a)^4+{}_4C_1(3a)^3(-b)+{}_4C_2(3a)^2(-b)^2$
$+{}_4C_3(3a)(-b)^3+{}_4C_4(-b)^4$

$=81a^4-108a^3b+54a^2b^2-12ab^3+b^4$

10) $64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4$
$+12ab^5+b^6$

⇨ $(2a+b)^6$

$={}_6C_0(2a)^6+{}_6C_1(2a)^5b+{}_6C_2(2a)^4b^2+{}_6C_3(2a)^3b^3$
$+{}_6C_4(2a)^2b^4+{}_6C_5(2a)b^5+{}_6C_6b^6$

$=64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4$
$+12ab^5+b^6$

11) $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

⇨ $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2={}_2C_0x^2+{}_2C_1x\times\dfrac{1}{x}+{}_2C_2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$

$=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

12) $x^3+6x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{8}{x^3}$

⇨

$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^3={}_3C_0x^3+{}_3C_1x^2\left(\dfrac{2}{x}\right)+{}_3C_2x\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+{}_3C_3\left(\dfrac{2}{x}\right)^3$

$=x^3+6x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{8}{x^3}$

13) $8x^3+12x+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^3}$

⇨ $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^3={}_3C_0(2x)^3+{}_3C_1(2x)^2\times\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$+{}_3C_2(2x)\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+{}_3C_3\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$

$=8x^3+12x+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^3}$

14) $x^4-4x^2+6-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$

⇨ $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)+{}_4C_2x^2\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2$
$+{}_4C_3x\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3+{}_4C_4\left(-\dfrac{1}{x}\right)^4$

$=x^4-4x^2+6-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$

15) $a^3-6a+\dfrac{12}{a}-\dfrac{8}{a^3}$

⇨ $\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^3$

$={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2\left(-\dfrac{2}{a}\right)+{}_3C_2a\left(-\dfrac{2}{a}\right)^2+{}_3C_3\left(-\dfrac{2}{a}\right)^3$

$=a^3-6a+\dfrac{12}{a}-\dfrac{8}{a^3}$

16) $243x^5-810x^3+1080x-\dfrac{720}{x}+\dfrac{240}{x^3}-\dfrac{32}{x^5}$

⇨ $\left(3x-\frac{2}{x}\right)^5$

$={}_5C_0(3x)^5+{}_5C_1(3x)^4\times\left(-\frac{2}{x}\right)+{}_5C_2(3x)^3\times\left(-\frac{2}{x}\right)^2$

$+{}_5C_3(3x)^2\times\left(-\frac{2}{x}\right)^3+{}_5C_4 3x\times\left(-\frac{2}{x}\right)^4+{}_5C_5\left(-\frac{2}{x}\right)^5$

$=243x^5-810x^3+1080x-\frac{720}{x}+\frac{240}{x^3}-\frac{32}{x^5}$

17) 8
⇨ $(x+2)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r x^{4-r}2^r={}_4C_r 2^r x^{4-r}$
x^3항은 $4-r=3$인 경우이므로 $r=1$
따라서 x^3의 계수는 ${}_4C_1 2^1=8$

18) 1
⇨ $(x+y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r x^{7-r}y^r$
y^7항은 $r=7$인 경우이므로
y^7의 계수는 ${}_7C_7=1$

19) -20
⇨ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-1)^r x^{6-2r}$
상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $r=3$
따라서 상수항은 ${}_6C_3\cdot(-1)^3=-20$

20) -8
⇨ $(2x-y)^4$의 전개식의 일반항 ${}_4C_r(2x)^{4-r}(-y)^r$에서
xy^3은 $r=3$일 때로 ${}_4C_3(2x)(-y)^3$이다.
따라서 xy^3의 계수는
$(-2)\times{}_4C_3=(-2)\times{}_4C_1=-8$이다.

21) -216
⇨ $(2x-3y)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r(2x)^{4-r}(-3y)^r={}_4C_r 2^{4-r}(-3)^r x^{4-r}y^r$
$x^{4-r}y^r=xy^3$에서 $r=3$
따라서 xy^3의 계수는 ${}_4C_3\cdot 2\cdot(-3)^3=-216$

22) 80
⇨ $(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(2x)^{5-r}(-y)^r={}_5C_r 2^{5-r}(-1)^r x^{5-r}y^r$
x^3y^2항은 $5-r=3$인 경우이므로 $r=2$
따라서 x^3y^2의 계수는
${}_5C_2 2^3(-1)^2=10\times8\times1=80$

23) 35
⇨ $(x+y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r x^{7-r}y^r$
x^4y^3항은 $7-r=4$인 경우이므로 $r=3$
따라서 x^4y^3의 계수는 ${}_7C_3=35$

24) 21
⇨ $(x+y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r x^{7-r}y^r$
x^5y^2항은 $7-r=5$인 경우이므로 $r=2$
따라서 x^5y^2의 계수는 ${}_7C_2=21$

25) 56
⇨ $(a+b)^8$의 전개식의 일반항 ${}_8C_r a^{8-r}b^r$에서 $r=5$일 때이므로 a^3b^5의 계수는
${}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$

26) 35
⇨ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r x^{6-2r}$
이때, $(x^2+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은 x^2과 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 $\frac{1}{x^2}$항, 1과 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 상수항이 곱해질 때 생긴다.
(ⅰ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 $\frac{1}{x^2}$항은 $6-2r=-2$, 즉 $r=4$일 때이므로 ${}_6C_4x^{-2}={}_6C_2x^{-2}=\frac{15}{x^2}$
(ⅱ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 상수항은 $6-2r=0$, 즉 $r=3$일 때이므로 ${}_6C_3=20$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)로부터 구하는 상수항은
$x^2\times\frac{15}{x^2}+1\times20=15+20=35$

27) -2
⇨ $(x+1)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r x^{4-r}$,
$(x-2)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_s x^{3-s}(-2)^s$이므로
$(x+1)^4(x-2)^3$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r x^{4-r}\times{}_3C_s x^{3-s}(-2)^s={}_4C_r\times{}_3C_s(-2)^s x^{7-r-s}$
이때, x^6항은 $7-r-s=6$, 즉 $r+s=1$일 때이다.
(ⅰ) $r=0$, $s=1$일 때 : ${}_4C_0\times{}_3C_1\times(-2)^1=-6$
(ⅱ) $r=1$, $s=0$일 때 : ${}_4C_1\times{}_3C_0\times(-2)^0=4$
따라서 x^6의 계수는 $-6+4=-2$이다.

28) 11
⇨ $(x+1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}1^r = {}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}$,

$(x+2)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3\mathrm{C}_s x^{3-s}2^s$이므로

$(x+1)^5(x+2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r \times {}_3\mathrm{C}_s 2^s x^{5-r}x^{3-s} = {}_5\mathrm{C}_r \times {}_3\mathrm{C}_s 2^s x^{8-r-s}$이다.

이때, x^7항은 $8-r-s=7$,

즉 $r+s=1$일 때이다.

(ⅰ) $r=1$, $s=0$일 때 : ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_0 \times 2^0 = 5$

(ⅱ) $r=0$, $s=1$일 때 : ${}_5\mathrm{C}_0 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times 2 = 6$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)로부터 x^7의 계수는 $5+6=11$이다.

29) 129

⇨ $(x-1)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3\mathrm{C}_r x^{3-r}(-1)^r$,

$(x+3)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7\mathrm{C}_s x^{7-s}3^s$이므로

$(x-1)^3(x+3)^7$의 전개식의 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r x^{3-r}(-1)^r \times {}_7\mathrm{C}_s x^{7-s}3^s = {}_3\mathrm{C}_r \times {}_7\mathrm{C}_s (-1)^r 3^s x^{10-r-s}$

이때, x^8항은 $10-r-s=8$, 즉 $r+s=2$일 때이다.

(ⅰ) $r=0$, $s=2$일 때 : ${}_3\mathrm{C}_0 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times (-1)^0 \times 3^2 = 189$

(ⅱ) $r=1$, $s=1$일 때 :

${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_1 \times (-1)^1 \times 3^1 = -63$

(ⅲ) $r=2$, $s=0$일 때 : ${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_0 \times (-1)^2 \times 3^0 = 3$

따라서 x^8의 계수는 $189-63+3=129$이다.

30) 2160

⇨ $(x+3)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}3^r$이고,

$(y-2)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4\mathrm{C}_s y^{4-s}(-2)^s$이므로

$(x+3)^5(y-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}3^r \times {}_4\mathrm{C}_s y^{4-s}(-2)^s$

$= {}_5\mathrm{C}_r \times {}_4\mathrm{C}_s \times 3^r(-2)^s x^{5-r}y^{4-s}$

이때, x^3y^2항은 $5-r=3$, $4-s=2$, 즉 $r=2$, $s=2$일 때이다.

따라서 구하는 x^3y^2의 계수는

${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 3^2 \times (-2)^2 = 2160$

31) -75

⇨ $(x+1)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}$이고,

$(y-1)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_s y^{5-s}(-1)^s$이므로

$(x+1)^6(y-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r} \times {}_5\mathrm{C}_s y^{5-s}(-1)^s$

$= {}_6\mathrm{C}_r \times {}_5\mathrm{C}_s (-1)^s x^{6-r}y^{5-s}$

이때, x^4y^4항은 $6-r=4$, $5-s=4$,

즉 $r=2$, $s=1$일 때이다.

따라서 구하는 x^4y^4의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times (-1)^1 = -75$

32) 80

⇨ $(1+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3\mathrm{C}_r x^r$

$(2+x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4\mathrm{C}_s 2^{4-s}x^s$

따라서 $(1+x)^3(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r \cdot {}_4\mathrm{C}_s 2^{4-s}x^{r+s}$

x항은 $r+s=1$ ($0 \le r \le 3$, $0 \le s \le 4$인 정수)일 때이므로

(ⅰ) $r=1$, $s=0$인 경우 48

(ⅱ) $r=0$, $s=1$인 경우 32

(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 x의 계수는 80이다.

33) 16

⇨ $(x+1)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3\mathrm{C}_r x^r$

$(2-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_s 2^{4-s}(-x)^s = {}_4\mathrm{C}_s 2^{4-s}(-1)^s x^s$

따라서 $(x+1)^3(2-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r x^r \cdot {}_4\mathrm{C}_s 2^{4-s}(-1)^s x^s = {}_3\mathrm{C}_r \cdot {}_4\mathrm{C}_s (-1)^s 2^{4-s}x^{r+s}$

x항은 $r+s=1$ ($0 \le r \le 3$, $0 \le s \le 4$인 정수)일 때이므로

(ⅰ) $r=1$, $s=0$인 경우

${}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_0 \cdot (-1)^0 \cdot 2^4 = 48$

(ⅱ) $r=0$, $s=1$인 경우

${}_3\mathrm{C}_0 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \cdot (-1)^1 \cdot 2^3 = -32$

(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 x의 계수는

$48+(-32)=16$

34) 164

⇨ $(2+x^2)^2$의 전개식의 일반항은

${}_2\mathrm{C}_r 2^{2-r}(x^2)^r = {}_2\mathrm{C}_r 2^{2-r}x^{2r}$

$(1+2x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_s (2x)^s = {}_5\mathrm{C}_s 2^s x^s$

따라서 $(2+x^2)^2(1+2x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_2\mathrm{C}_r 2^{2-r}x^{2r} \cdot {}_5\mathrm{C}_s 2^s x^s = {}_2\mathrm{C}_r \cdot {}_5\mathrm{C}_s 2^{2-r+s}x^{2r+s}$

x^2항은 $2r+s=2$ ($0 \le r \le 2$, $0 \le s \le 5$인 정수)일 때이므로

(ⅰ) $r=0$, $s=2$인 경우

${}_2\mathrm{C}_0 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot 2^4 = 160$

(ⅱ) $r=1$, $s=0$인 경우

${}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_0 \cdot 2 = 4$

(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 x^2의 계수는

$160+4=164$

35) 9

⇨ $(x^2+1)^n$의 전개식의 일반항은 $(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항과 같으므로

${}_n\mathrm{C}_r 1^{n-r}(x^2)^r = {}_n\mathrm{C}_r x^{2r}$

이때, x^4의 계수가 36이라 하므로

$2r=4$에서 $r=2$이고, ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_2 = 36$이다.

$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \rightarrow n(n-1) = 72 = 9 \times 8$

$\therefore n=9$

36) 2

⇨ $(1+ax)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(ax)^r={}_5C_r a^r x^r$

$x^r=x^4$에서 $r=4$

이때 x^4의 계수가 80이므로

${}_5C_4\cdot a^4=80$, $a^4=16$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$

37) 3

⇨ $\left(ax^3-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(ax^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r a^{5-r}x^{15-3r}(-1)^r x^{-r}$

$={}_5C_r(-1)^r a^{5-r}x^{15-4r}$

이때, x^3의 계수가 -90이라 하므로

$15-4r=3$에서 $r=3$

${}_5C_r(-1)^r a^{5-r}={}_5C_3(-1)^3a^2=-10a^2=-90$

$a^2=9$ $\therefore$ $a=3$ ($\because$ a는 양수)

38) 14

⇨ $\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항이

${}_{10}C_r x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{10}C_r x^{10-r}x^{-nr}={}_{10}C_r x^{10-r(n+1)}$

이때, 상수항이 존재하려면 $10-r(n+1)=0$이어야 한다. 즉, $10=r(n+1)$에서 r는 0부터 10까지의 값을 가질 수 있으므로 이를 만족하는 순서쌍 $(r,\ n)$은 $(1,\ 9)$, $(2,\ 4)$, $(5,\ 1)$이다.

따라서 구하는 n의 값의 합은 $9+4+1=14$

39) ${}_5C_4$

⇨ ${}_4C_3+{}_4C_4={}_5C_4$

40) ${}_4C_3$

⇨ ${}_3C_2+{}_3C_3={}_4C_3$

41) ${}_8C_3$

⇨ ${}_7C_2+{}_7C_3={}_8C_3$

42) ${}_8C_5$

⇨ ${}_7C_4+{}_7C_5={}_8C_5$

43) ${}_4C_2$

⇨ ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2={}_3C_1+{}_3C_2={}_4C_2$

44) ${}_8C_3$

⇨ ${}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_2={}_7C_3+{}_7C_2={}_8C_3$

45) ${}_5C_3$

⇨ ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3$

$={}_4C_2+{}_4C_3={}_5C_3$

46) ${}_5C_2$

⇨ $({}_2C_0+{}_2C_1)+{}_4C_2+{}_4C_4$

$={}_3C_1+{}_4C_2+{}_4C_4$

$={}_3C_1+{}_4C_2+{}_3C_0$

$=({}_3C_0+{}_3C_1)+{}_4C_2$

$={}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$

47) ${}_7C_3$

⇨ ${}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_2={}_6C_3+{}_6C_2={}_7C_3$

48) ${}_6C_2$

⇨

${}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1={}_5C_2+{}_5C_1={}_6C_2$

49) 69

⇨ $A={}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$라고 하면

${}_4C_0+A={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$

$={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$

$={}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$

$={}_7C_3+{}_7C_4={}_8C_4=70$

$\therefore A=70-{}_4C_0=69$

50) 35

⇨ ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3$

$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3$ $(\because {}_3C_3={}_4C_4)$

$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3$

$={}_6C_4+{}_6C_3={}_7C_4=35$

51) 165

⇨ ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$ $(\because {}_2C_0={}_3C_0)$

$={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

$\vdots$

$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8={}_{11}C_8=165$

52) 8

⇨ $(1+1)^3+2^3=8$

53) 16

⇨ ${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4=16$

54) 32

⇨ $(1+1)^5=2^5=32$

55) 256

⇨ ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$

56) 63

⇨ ${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6=2^6$이므로

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6=2^6-{}_6C_0=2^6-1=63$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

57) $2^{20}-2$

⇨ ${}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=2^{20}$이므로

${}_{20}C_1+{}_{20}C_2+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19}=2^{20}-{}_{20}C_0-{}_{20}C_{20}$

$=2^{20}-2$

58) 64

⇨ ${}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7=2^{7-1}=2^6=64$

59) 1024

⇨ ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}=1024$

60) 2^8

⇨ ${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2^9$이고,

${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots-{}_9C_9=0$이므로

위의 식에서 아래의 식을 빼면

$2({}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+\cdots+{}_9C_9)=2^9$

$\therefore\ {}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+\cdots+{}_9C_9=2^8$

61) 0

⇨ ${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-{}_9C_3+\cdots-{}_9C_9=0$

62) 2

⇨ ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-\cdots+{}_{10}C_{10}=0$에서

$1-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-\cdots-{}_{10}C_9+1=0$

$\therefore\ {}_{10}C_1-{}_{10}C_2+{}_{10}C_3-{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_9=2$

63) 2^{11}

⇨ ${}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}=2^{12}$ …… ㉠

${}_{12}C_0-{}_{12}C_1+{}_{12}C_2-\cdots+{}_{12}C_{12}=0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2({}_{12}C_0+{}_{12}C_2+{}_{12}C_4+\cdots+{}_{12}C_{12})=2^{12}$

$\therefore {}_{12}C_0+{}_{12}C_2+{}_{12}C_4+\cdots+{}_{12}C_{12}=2^{11}$

64) 2

⇨ ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-\cdots-{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=0$에서

${}_{10}C_0-({}_{10}C_1-{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9)+{}_{10}C_{10}=0$

$\therefore {}_{10}C_1-{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{10}C_0+{}_{10}C_{10}=1+1=2$

65) 512

⇨ ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$

$=2^{10-1}=2^9=512$

66) 0

⇨ $(1-1)^{10}=0$

67) 0

⇨ ${}_{15}C_0-{}_{15}C_1+{}_{15}C_2-{}_{15}C_3+\cdots+{}_{15}C_{14}-{}_{15}C_{15}=0$에서

$1-{}_{15}C_1+{}_{15}C_2-{}_{15}C_3+\cdots+{}_{15}C_{14}-1=0$

$\therefore\ {}_{15}C_1-{}_{15}C_2+{}_{15}C_3-{}_{15}C_4+\cdots-{}_{15}C_{14}=0$

68) 2^{98}

⇨ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{49}$

$={}_{99}C_{99}+{}_{99}C_{98}+{}_{99}C_{97}+{}_{99}C_{96}+\cdots+{}_{99}C_{50}$

이고, ${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{99}=2^{99}$이므로

$2({}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{49})=2^{99}$

$\therefore\ {}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{49}=2^{98}$

69) 2^{48}

⇨ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+{}_{49}C_{27}+{}_{49}C_{28}+\cdots+{}_{49}C_{49}$

$={}_{49}C_{24}+{}_{49}C_{23}+{}_{49}C_{22}+{}_{49}C_{21}+\cdots+{}_{49}C_0$

이고, ${}_{49}C_0+{}_{49}C_1+{}_{49}C_2+\cdots+{}_{49}C_{49}=2^{49}$이므로

$2({}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+{}_{49}C_{27}+{}_{49}C_{28}+\cdots+{}_{49}C_{49})=2^{49}$

$\therefore\ {}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+{}_{49}C_{27}+{}_{49}C_{28}+\cdots+{}_{49}C_{49}=2^{48}$

70) 6

⇨ ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$ ($\because\ {}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$)

$={}_5C_2+{}_5C_3$ ($\because\ {}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$)

$={}_6C_3$

$\therefore\ n=6$

71) 7

⇨ ${}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$

$={}_5C_2+{}_5C_1+{}_6C_1$ ($\because\ {}_4C_2+{}_4C_1={}_5C_2$)

$={}_6C_2+{}_6C_1$ ($\because\ {}_5C_2+{}_5C_1={}_6C_2$)

$={}_7C_2$

$\therefore\ n=7$

72) 5

⇨ ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

이므로 주어진 식의 양변에 ${}_nC_0=1$을 더하면

${}_nC_0+({}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4+{}_nC_5)=1+31=2^5$

$\therefore\ n=5$

73) 7

⇨ ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$2^n=128=2^7$ $\therefore n=7$

74) 8

⇨ ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이므로

$2^n-1=255$, $2^n=256=2^8$ $\therefore n=8$

75) 7

⇨ ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$

이므로 주어진 부등식은 $100<2^n<200$이다.

$2^7=128$, $2^8=256$이므로 $n=7$

76) 9

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$

이므로 주어진 부등식은 $500<2^{n}<600$이다.

$2^{9}=512,\ 2^{10}=1024$이므로 $n=9$

77) 10

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$

이므로 주어진 부등식은 $1000<2^{n}<2000$이다.

$2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$이므로 $n=10$

78) 10

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}-1$이므로

$1000<{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}<2000$에서

$1000<2^{n}-1<2000,\ 1001<2^{n}<2001$

이때 $2^{9}=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$이므로

$n=10$