(1)속도와 거리

01 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치가 x_0일 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

◪ 수직선 위에서 좌표가 3인 점을 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-3t+2$일 때, 다음을 구하여라.

1. 시각 t일 때의 점 P의 위치

2. $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량

3. $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리

◪ 좌표가 2인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-4t+3$일 때, 다음을 구하여라.

4. $t=0$에서 $t=1$까지 점 P의 위치의 변화량

5. $t=2$에서 점 P의 위치

6. $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리

◪ 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-2t$일 때, 다음을 구하여라.

7. $t=4$에서 점 P의 위치

8. $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량

9. $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리

◪ 좌표가 5인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=2t-1$일 때, 다음을 구하여라.

10. $t=2$에서 점 P의 위치

11. $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

12. $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

◪ 지면으로부터 $55m$의 높이에서 똑바로 위로 던진 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=50-10t\,(m/s)$라 할 때, 다음을 구하여라.

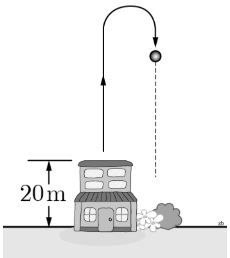
13. 6초 후 지면으로부터 물체까지의 높이

14. 최고점에 도달하였을 때 지면으로부터 물체까지의 높이

15. 지면에 떨어지는 순간의 물체의 속도

16. 던진 후 2초부터 8초까지 물체가 움직인 거리

◪ 지상 $20m$의 높이의 건물 옥상에서 $49m/s$의 속도로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=49-9.8t\,(m/s)$라 할 때, 다음을 구하여라.



17. 1초 후 지면으로부터 물체까지의 높이

18. 최고점에 도달하였을 때 지면으로부터 물체까지의 높이

19. 쏘아 올린 후 2초부터 8초까지 물체가 움직인 거리

◪ 지면으로부터 $1.4m$의 높이에서 처음 속도 $14m/s$로 똑바로 위로 던진 야구공의 t초 후의 속도가 $v(t)=-9.8t+14\,(m/s)$라 할 때, 다음을 구하여라.

20. 1초 후 지면으로부터 공까지의 높이

21. 최고점에 도달하였을 때 지면으로부터 물체까지의 높이

22. 공이 지면에 떨어지는 시각

◪ 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 주어진 시각 t의 범위가 다음과 같을 때, 점 P의 위치의 변화량을 구하여라.

23. $v(t)=t^2-2t,\ t=0$에서 $t=2$까지

24. $v(t)=t^2-2t,\ t=0$에서 $t=3$까지

25. $v(t)=5t-t^2,\ t=0$에서 $t=1$까지

26. $v(t)=5t-t^2,\ t=1$에서 $t=6$까지

27. $v(t)=t^2-3t,\ t=0$에서 $t=3$까지

28. $v(t)=t^2-3t,\ t=0$에서 $t=4$까지

◪ 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 주어진 시각 t의 범위가 다음과 같을 때, 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

29. $v(t)=t^2-2t$, $t=0$에서 $t=2$까지

30. $v(t)=t^2-2t$, $t=0$에서 $t=3$까지

31. $v(t)=5t-t^2$, $t=0$에서 $t=1$까지

32. $v(t)=5t-t^2$, $t=1$에서 $t=6$까지

33. $v(t)=t^2-3t$, $t=0$에서 $t=3$까지

34. $v(t)=t^2-3t$, $t=0$에서 $t=4$까지

◪ 점 A를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같을 때, 시각 $t=3$에서 점 P의 위치를 구하여라.

35. $\mathrm{A}(4)$, $v(t)=t^2-2t$

36. $\mathrm{A}(0)$, $v(t)=5t-t^2$

37. $\mathrm{A}(20)$, $v(t)=t^2-6t$

◪ 다음 물음에 답하여라.

38. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도가 $v(t)=8-4t$일 때, 점 P가 움직이는 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 좌표를 구하여라.

39. A지점을 통과한 지 t초 후의 어떤 물체의 속도는 $3+2t\,(\mathrm{m}/\text{초})$이다. 이 물체가 A지점에서 $28\,\mathrm{m}$ 떨어진 B지점에 도달할 때까지 걸린 시간(초)를 구하여라.

40. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $f(t)=t^3-3t^2-9t+2$이다. 시각 $t=0$부터 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

41. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 출발한 지 t초 후의 점 P의 속도 v와 점 Q의 속도 u는 $v=3t(4-t)$, $u=2t$라고 한다. 출발 후 P, Q가 다시 만나는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

42. 두 개의 동점 P, Q가 동시에 출발하여 직선 위를 같은 방향으로 움직인다. t초 후의 속도가 각각 $7t(4-t)$, $2t(3-t)(6-t)$로 주어진다면, 움직이기 시작하여 점 P와 Q가 두 번째 만나는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

43. 직선 철로 위를 초속 $20m$로 달리고 있는 기차가 제동을 건지 t초 후의 속도는 $v(t)=-2t+20(m/초)$라고 한다. 제동을 건 후 기차가 정지할 때까지 달린 거리를 구하여라.

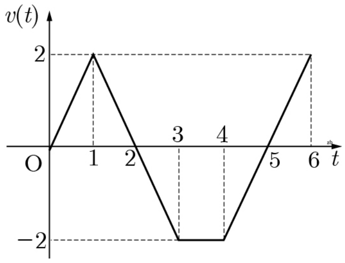
44. 직선 철로 위를 초속 $60m$의 속도로 달리는 기차가 제동을 건지 t초 후의 속도는 $v(t)=60-3t(m/초)$라고 한다. 제동을 건 후 기차가 정지할 때까지 달린 거리를 구하여라.

45. 직선 철로 위를 초속 $30m$의 속도로 달리는 전동차가 제동을 건지 t초 후의 속도는 $v(t)=30-2t(m/초)$라고 한다. 제동을 건 후 전동차가 정지할 때까지 달린 거리를 구하여라.

46. 고속열차가 출발하여 $3km$를 달리는 동안은 출발 후 시각 t분에서의 속력이 $v(t)=\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t(km/분)$이고, 그 이후로는 속력이 일정하다. 출발 후 5분 동안 이 열차가 달린 거리를 구하여라.

47. 직선의 철로 위를 움직이는 기차의 시각 t에서의 위치가 $x=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$이다. $t=0$일 때의 운동 방향과 반대 방향으로 기차가 움직인 거리를 구하여라.

◪ 다음 그림은 원점을 출발하여 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 나타낸 그래프이다. 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표 하여라.

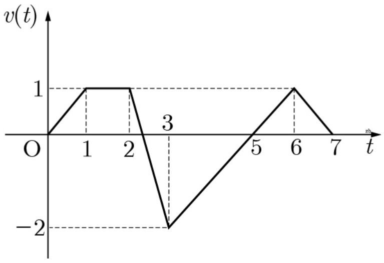


48. 출발 후 2초에서 점 P의 위치는 원점이다. ( )

49. 출발 후 1초와 3초 사이에서 움직이는 방향이 바뀐다. ( )

50. 점 P는 출발한 후 6초 동안 움직이면서 운동 방향을 2번 바꿨다. ( )

◪ 다음 그림은 원점을 출발하여 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 나타낸 그래프이다. 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표 하여라.

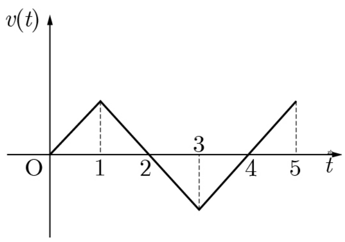


51. 점 P가 움직이는 방향은 출발 후 $t=7$일 때까지 두 번 바뀐다. ( )

52. $t=3$일 때 속력이 가장 크다. ( )

53. $t=7$일 때 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다. ( )

◪ 다음 그림은 원점을 출발하여 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 나타낸 그래프이다. 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표 하여라.



54. $t=3$일 때, 점 P의 위치는 $\int_0^3 |v(t)|dt$이다. ( )

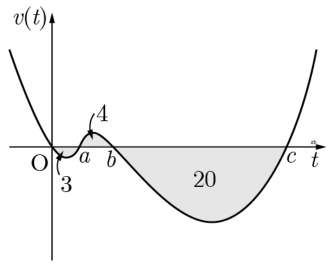
55. $0 \le t \le 5$일 때 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^5 |v(t)|dt$이다. ( )

56. 점 P는 $t=1$에서 운동 방향을 바꾼다. ( )

57. 점 P는 출발하여 $t=5$일 때까지 세 번 정지한다. ( )

58. $\int_0^2 v(t)dt = \int_2^4 \{-v(t)\}dt$이면 점 P의 $t=4$에서의 위치는 원점이다. ( )

◪ 수직선 위에서 좌표가 5인 점을 출발하여 움직이는 어떤 물체의 시각 t일 때의 속도 $v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다. 색칠한 세 부분의 넓이가 차례로 3, 4, 20일 때, 다음을 구하여라.



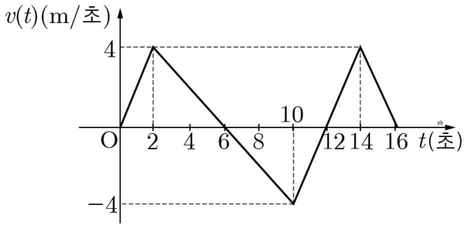
59. $t=0$에서 $t=c$까지 이 물체의 위치의 변화량

60. $t=0$에서 $t=c$까지 이 물체의 이동 거리

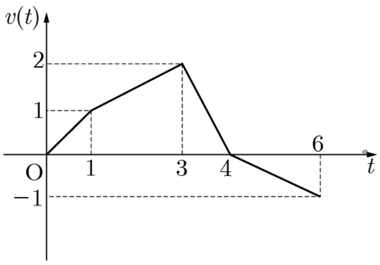
61. $t=a,\ t=b,\ t=c$일 때의 이 물체의 위치

◪ 다음 물음에 답하여라.

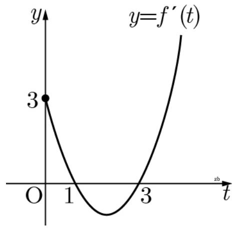
62. 어떤 물체가 수직선 위를 $t=0$에서 원점을 출발하여 $t=16$까지 다음 그림과 같은 속도 $v(t)(m/초)$로 달리고 있다. 이 물체가 다시 원점을 통과하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.



63. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=6$까지 움직인 거리를 구하여라.



64. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$에 대하여 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프는 그림과 같다.



점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 거리를 d라고 할 때, $12d$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) $\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t+3$

⇨ 시각 $t=0$일 때의 점 P의 위치가 $x=3$이므로 시각 t일 때의 물체의 위치 x는

$x=3+\int_0^t (t^2-3t+2)dt=3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^t$

$=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t+3$

2) $\frac{2}{3}$

⇨ 점 P의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이므로

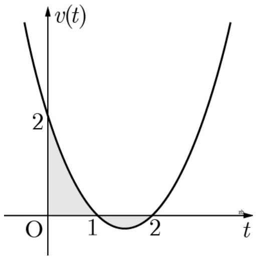
$\int_0^2 (t^2-3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2=\frac{2}{3}$

3) 1

⇨ $v(t)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$이므로

구간 $[0,1]$에서 $v(t)\geq 0$

구간 $[1,2]$에서 $v(t)\leq 0$



따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2 |t^2-3t+2|dt$

$=\int_0^1 (t^2-3t+2)dt+\int_1^2 (-t^2+3t-2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2=1$

4) $\frac{4}{3}$

⇨ $t=0$에서 $t=1$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$

5) $\frac{8}{3}$

⇨ 좌표가 2인 점을 출발하므로 $t=2$에서 점 P의 위치는

$2+\int_0^2 v(t)dt=2+\int_0^2 (t^2-4t+3)dt$

$=2+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^2$

$=2+\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=\frac{8}{3}$

6) $\frac{8}{3}$

⇨ $1\leq t\leq 3$에서 $v(t)\leq 0$, $t\geq 3$에서 $v(t)\geq 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^4 |v(t)|dt$

$=\int_1^4 |t^2-4t+3|dt$

$=\int_1^3 (-t^2+4t-3)dt+\int_3^4 (t^2-4t+3)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

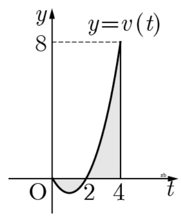
7) $\frac{16}{3}$

⇨ $0+\int_0^4 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^4=\frac{16}{3}$

8) $-\frac{2}{3}$

⇨ $\int_1^2 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^2=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

9) 8

⇨ 

$\int_0^4 |t^2-2t|\,dt$

$=\int_0^2 (-t^2+2t)\,dt+\int_2^4 (t^2-2t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$

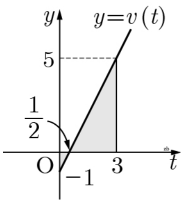
10) 7

⇨ $5+\int_0^2 (2t-1)\,dt=5+\left[t^2-t\right]_0^2=5+2=7$

11) 6

⇨ $\int_0^3 (2t-1)\,dt = [t^2 - t]_0^3 = 6$

12) $\frac{13}{2}$

⇨ 

$\int_0^3 |2t-1|\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^3 (2t-1)\,dt$

$= [-t^2+t]_0^{\frac{1}{2}} + [t^2 - t]_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$

13) $175m$

⇨ t초 후의 높이를 $h(t)$라고 하면

$h(t) = 55 + \int_0^t (50-10t)dt$

$= -5t^2 + 50t + 55$

따라서 구하는 높이는

$h(6) = -5 \cdot 6^2 + 50 \cdot 6 + 55 = 175(m)$

14) $180m$

⇨ 최고점에 도달할 때 속도 $v(t) = 0$이므로

$v(t) = 50 - 10t = 0$에서 $t = 5$

즉, 5초 후에 최고점에 도달한다.

따라서 최고점에 도달하였을 때 물체의 높이는

$h(5) = -5 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5 + 55 = 180(m)$

15) $-60m/s$

⇨ 지면에 떨어지는 순간의 물체의 높이 $h(t) = 0$이므로

$-5t^2 + 50t + 55 = 0$에서 $t = -1$ 또는 $t = 11$

이때, $t > 0$이므로 지면에 떨어지는 순간의 시각 t는 $t = 11$

따라서 $t = 11$일 때의 속도는

$v(11) = 50 - 10 \cdot 11 = -60(m/s)$

16) $90m$

⇨ $t = 5$에서 최고점에 도달하므로 던진 후 2초부터 8초까지 움직인 거리는

$\int_2^8 |50-10t|\,dt$

$= \int_2^5 (50-10t)dt + \int_5^8 (-50+10t)dt$

$= [50t - 5t^2]_2^5 + [-50t + 5t^2]_5^8 = 90(m)$

17) $64.1m$

⇨ t초 후의 높이를 $h(t)$라고 하면

$h(t) = 20 + \int_0^t (49 - 9.8t)dt$

$= -4.9t^2 + 49t + 20$

따라서 구하는 높이는

$h(1) = -4.9 + 49 + 20 = 64.1\,(m)$

18) $142.5\,m$

⇨ 최고점에 도달할 때 속도 $v(t) = 0$이므로

$v(t) = 49 - 9.8t = 0$에서 $t = 5$

즉 5초 후에 최고점에 도달한다.

따라서 최고점에 도달하였을 때 물체의 높이는

$h(5) = -4.9 \times 5^2 + 49 \times 5 + 20 = 142.5\,(m)$

19) $88.2\,m$

⇨ $t = 5$에서 최고점에 도달하므로 쏘아 올린 후 2초부터 8초까지 움직인 거리는

$\int_2^8 |49 - 9.8t|\,dt$

$= \int_2^5 (49 - 9.8t)dt + \int_5^8 (-49 + 9.8t)dt$

$= [49t - 4.9t^2]_2^5 + [-49t + 4.9t^2]_5^8$

$= 44.1 + 44.1 = 88.2\,(m)$

20) $10.5\,m$

⇨ t초 후의 높이를 $h(t)$라고 하면

$h(t) = 1.4 + \int_0^t (-9.8t + 14)dt$

$= -4.9t^2 + 14t + 1.4$

따라서 구하는 높이는

$h(1) = -4.9 + 14 + 1.4 = 10.5\,(m)$

21) $11.4\,m$

⇨ 최고점에 도달할 때 속도 $v(t) = 0$이므로

$v(t) = -9.8t + 14 = 0$에서 $t = \frac{10}{7}$

즉 $\frac{10}{7}$초 후에 최고점에 도달한다.

따라서 최고점에 도달하였을 때 공의 높이는

$h\left(\frac{10}{7}\right) = -\frac{49}{10} \times \left(\frac{10}{7}\right)^2 + 14 \times \frac{10}{7} + 1.4$

$= 11.4\,(m)$

22) $\frac{10+\sqrt{114}}{7}$초

⇨ 시각 t초일 때 야구공의 지면으로부터의 높이 hm는

$h = 1.4 + \int_0^t (-9.8t + 14)dt$

$= 1.4 + [-4.9t^2 + 14t]_0^t = -4.9t^2 + 14t + 1.4$

이고, 지면에 닿는 순간의 높이는 $h = 0$이므로

$-4.9t^2 + 14t + 1.4 = 0$, 즉 $7t^2 - 20t - 2 = 0$

$t > 0$이므로 $t = \frac{10+\sqrt{114}}{7}$

따라서 야구공이 운동장 지면에 닿을 때까지 걸리는 시간은 $\frac{10+\sqrt{114}}{7}$초이다.

23) $-\frac{4}{3}$

⇨ $\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (t^2-2t)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^2 = \frac{1}{3}\times 2^3 - 2^2$

$= -\frac{4}{3}$

24) 0

⇨ $\int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (t^2-2t)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^3 = 9-9=0$

25) $\frac{13}{6}$

⇨ $\int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 (5t-t^2)dt$

$= \left[\frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$

26) $\frac{95}{6}$

⇨ $\int_1^6 v(t)dt = \int_1^6 (5t-t^2)dt$

$= \left[\frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^6$

$= (90-72) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right) = 18 - \frac{13}{6} = \frac{95}{6}$

27) $-\frac{9}{2}$

⇨ $\int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (t^2-3t)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right]_0^3 = \frac{1}{3}\times 3^3 - \frac{3}{2}\times 3^2 = -\frac{9}{2}$

28) $-\frac{8}{3}$

⇨ $\int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 (t^2-3t)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 24 = -\frac{8}{3}$

29) $\frac{4}{3}$

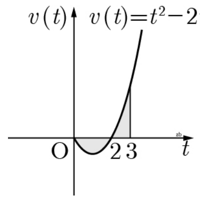
⇨ $v(t) = t^2-2t = t(t-2)$이므로 구간 $[0, 2]$에서 $v(t) \le 0$이다.
따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s = \int_0^2 |t^2-2t|dt = \int_0^2 (-t^2+2t)dt$

$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$

30) $\frac{8}{3}$

⇨ $v(t) = t^2-2t = t(t-2)$이므로 구간 $[0, 2]$에서 $v(t) \le 0$이고 구간 $[2, 3]$에서 $v(t) \ge 0$이다.



따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s = \int_0^3 |t^2-2t|dt$

$= \int_0^2 (-t^2+2t)dt + \int_2^3 (t^2-2t)dt$

$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_2^3 = \frac{8}{3}$

31) $\frac{13}{6}$

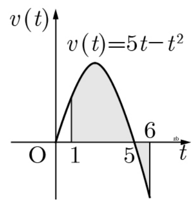
⇨ $v(t) = 5t-t^2 = t(5-t)$이므로 구간 $[0, 1]$에서 $v(t) \ge 0$이다.
따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s = \int_0^1 |5t-t^2|dt = \int_0^1 (5t-t^2)dt$

$= \left[\frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$

32) $\frac{43}{2}$

⇨ $v(t) = 5t-t^2 = t(5-t)$이므로 구간 $[1, 5]$에서 $v(t) \ge 0$이고 구간 $[5, 6]$에서 $v(t) \le 0$이다.



따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s = \int_1^6 |5t-t^2|dt$

$= \int_1^5 (5t-t^2)dt + \int_5^6 (-5t+t^2)dt$

$= \left[\frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^5 + \left[-\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_5^6$

$= \frac{43}{2}$

33) $\frac{9}{2}$

⇨ $v(t)=t^2-3t=t(t-3)$이므로 구간 $[0,\ 3]$에서 $v(t) \le 0$이다.

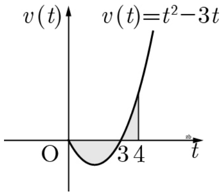
따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^3 |t^2-3t|dt=\int_0^3(-t^2+3t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$$

34) $\frac{19}{3}$

⇨ $v(t)=t^2-3t=t(t-3)$이므로 구간 $[0,\ 3]$에서 $v(t) \le 0$이고 구간 $[3,\ 4]$에서 $v(t) \ge 0$이다.



따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^4 |t^2-3t|dt$$

$$=\int_0^3(-t^2+3t)dt+\int_3^4(t^2-3t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^4$$

$$=\frac{19}{3}$$

35) 4

⇨ 시각 $t=0$에서 위치가 4이므로 $t=3$에서 점 P의 위치를 x라 하면

$$x=4+\int_0^3(t^2-2t)dt=4+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^3$$

$$=4+\frac{1}{3}\times 3^3-3^2=4$$

36) $\frac{27}{2}$

⇨ 시각 $t=0$에서 위치가 0이므로 $t=3$에서 점 P의 위치를 x라 하면

$$x=0+\int_0^3(5t-t^2)dt=\left[\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3$$

$$=\frac{5}{2}\times 3^2-\frac{1}{3}\times 3^3=\frac{27}{2}$$

37) 2

⇨ 시각 $t=0$에서 위치가 20이므로 $t=3$에서 점 P의 위치를 x라 하면

$$x=20+\int_0^3(t^2-6t)dt=20+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_0^3$$

$$=20+\frac{1}{3}\times 3^3-3\times 3^2=2$$

38) 8

⇨ $v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로 $8-4t=0$

$\therefore\ t=2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 좌표는

$$0+\int_0^2(8-4t)dt=\left[8t-2t^2\right]_0^2=8$$

39) 4

⇨ x초 후에 어떤 물체가 A지점에서 28 m 떨어진 B 지점에 도달한다고 하면

$\int_0^x(3+2t)dt=28$에서 $\left[3t+t^2\right]_0^x=28$

$3x+x^2=28,\ x^2+3x-28=0$

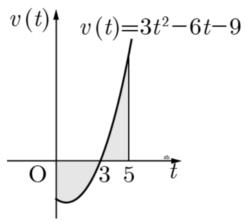
$(x+7)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=4$

40) 59

⇨ 시각 t에서의 점 P의 위치가 $f(t)=t^3-3t^2-9t+2$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$

이때, 구간 $[0,\ 3]$에서 $v(t) \le 0$이고 구간 $[3,\ 5]$에서 $v(t) \ge 0$이므로



점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^5|v(t)|dt$$

$$=\int_0^5|3t^2-6t-9|dt$$

$$=\int_0^3(-3t^2+6t+9)dt+\int_3^5(3t^2-6t-9)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2+9t\right]_0^3+\left[t^3-3t^2-9t\right]_3^5$$

$$=27+32=59$$

41) 5초 후

⇨ t초 후에 P, Q가 만난다는 것은 t초 후에 두 점 P, Q의 위치가 같아진다는 것을 뜻한다. t초 후 두 점 P, Q의 위치는 각각 $\int_0^t 3t(4-t)dt$, $\int_0^t 2t\,dt$이므로

$$\int_0^t(12t-3t^2)dt=\int_0^t 2t\,dt$$

$6t^2-t^3=t^2,\ -t^2(t-5)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=5$

따라서 5초 후에 두 점 P, Q는 다시 만나게 된다.

42) 6초 후

⇨ 두 점 P, Q가 t초 후 같은 위치에 있어야 하므로

$\int_0^t 7t(4-t)dt = \int_0^t 2t(3-t)(6-t)dt$

$\int_0^t (2t^3-11t^2+8t)dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{11}{3}t^3 + 4t^2\right]_0^t$

$= \frac{1}{6}t^2(3t-4)(t-6) = 0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=6$

따라서 움직이기 시작하여 두 번째 만나는 것은 6초 후이다.

43) $100m$

⇨ 기차가 정지하는 시각은 $v(t) = -2t+20 = 0$에서 $t=10$이다.

기차가 10초 동안 움직인 거리는

$\int_0^{10} |v(t)|dt = \int_0^{10}(-2t+20)dt$

$= [-t^2+20t]_0^{10} = 100(m)$

44) $600m$

⇨ 기차가 정지하는 시각은 $v(t) = 60-3t = 0$에서 $t=20$

기차가 20초 동안 움직인 거리는

$\int_0^{20}|v(t)|dt = \int_0^{20}(60-3t)dt$

$= \left[60t - \frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} = 600(m)$

45) $225m$

⇨ $v(t) = 30-2t = 0$에서 $t=15$

전동차가 15초 동안 움직인 거리는

$\int_0^{15}|30-2t|dt = \int_0^{15}(30-2t)dt$

$= [30t-t^2]_0^{15} = 225(m)$

46) $15km$

⇨ $3km$를 달리는 동안, 출발 후 t분 후의 위치 $s(t)$는

$s(t) = \int_0^t\left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\right)dt = \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2$

따라서 속력이 일정해지는 시각은 $\frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 = 3$

$(t-2)(t^2+3t+6) = 0 \quad \therefore t = 2$(분)

또, 그 때의 일정한 속도는 $v(2) = 4(km/\text{분})$

따라서 5분 동안 이 열차가 달린 거리는

$3+4\times 3 = 15(km)$

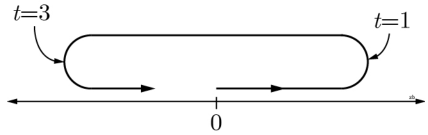
47) $\frac{4}{3}$

⇨ $v(t) = \frac{dx}{dt} = t^2-4t+3$

$v(t)=0$이면 $t=1$ 또는 $t=3$

$v(t)<0$이면 $1<t<3$

$v(t)>0$이면 $t<1$ 또는 $t>3$이므로, 물체의 운동은 다음 그림과 같다.



따라서 $t=0$에서의 운동 방향과 반대 방향으로 이동한 거리는

$\int_1^3|t^2-4t+3|dt = \int_1^3(-t^2+4t-3)dt$

$= \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3 = \frac{4}{3}$

48) ×

⇨ 원점을 출발한 후 2초까지 수직선의 양의 방향으로 움직이므로 출발 후 2초에서 점 P의 위치는 원점이 아니다.

49) ○

⇨ $0<t<2$, $5<t<6$일 때, $v(t)>0$이므로 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직이고, $2<t<5$일 때, $v(t)<0$이므로 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.

50) ○

⇨ $v(t)$의 부호가 바뀌는 시각은 $t=2$와 $t=5$일 때이므로 6초 동안 움직이면서 운동 방향을 2번 바꿨다.

51) ○

⇨ 점 P의 진행 방향은 $t=\frac{7}{3}$, $t=5$일 때 바뀐다.

52) ○

⇨ $|v(t)|$의 값이 가장 큰 것은 $t=3$일 때이다.

53) ×

⇨ $t=7$일 때 점 P의 위치는 $\int_0^7 v(t)dt = 0$이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 놓여 있다.

54) ×

⇨ 원점에서 출발하였으므로 $t=3$일 때 점 P의 위치는

$\int_0^3 v(t)dt$이고 실제 움직인 거리가 $\int_0^3|v(t)|dt$이다.

55) ○

⇨ $0\le t\le 5$에서 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^5|v(t)|dt$이다.

56) ×

⇨ $t=2$, $t=4$에서 속도가 0이고 $t=2$, $t=4$의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌므로 운동 방향이 바뀐다.

57) ×

⇨ 점 P는 $t=2$, $t=4$에서 정지하므로 $0 \le t \le 5$에서 두 번 정지한다.

58) ○

⇨ $\int_0^2 v(t)dt = \int_2^4 \{-v(t)\}dt$이면

$\int_0^2 v(t)dt + \int_2^4 v(t)dt = \int_0^4 v(t)dt = 0$이므로

점 P의 $t=4$에서의 위치는 원점이다.

59) -19

⇨ $\int_0^c v(t)dt = -3+4-20 = -19$

60) 27

⇨ $\int_0^c |v(t)|dt = 3+4+20 = 27$

61) $t=a$일 때, 2, $t=b$일 때, 6, $t=c$일 때, -14

⇨ $t=a$일 때의 위치는 $5+\int_0^a v(t)dt = 5-3 = 2$

$t=b$일 때의 위치는 $5+\int_0^b v(t)dt = 5-3+4 = 6$

$t=c$일 때의 위치는

$5+\int_0^c v(t)dt = 5-3+4-20 = -14$

62) 12초

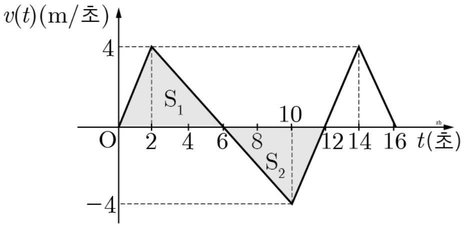
⇨ t초일 때의 물체의 위치를 $x(t)$라고 하면

$v(t) = x'(t)$

$x(t) = \int_0^t v(t)dt + x(0)$

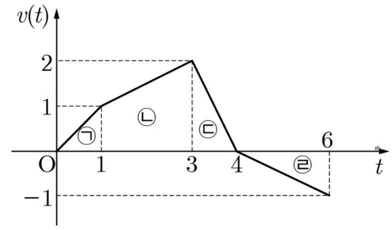
$= \int_0^t v(t)dt$ ($\because$ 원점 출발)

따라서 물체가 다시 원점을 통과하는 때는 위쪽의 넓이 S_1과 아래쪽의 넓이 S_2가 같게 되는 때이므로 $t=12$(초)일 때이다.



63) $\frac{11}{2}$

⇨



점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$\int_0^6 |v(t)|dt = ㉠+㉡+㉢+㉣$

$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$

$= \frac{1}{2}+3+1+1 = \frac{11}{2}$

64) 16

⇨ 주어진 그림에서 이차함수 $f'(t)$는 $t=1$, $t=3$에서 t축과 만나고 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f'(t) = (t-1)(t-3)$

함수 $f'(t)$에 대하여 $t=1$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌고, $t=3$의 좌우에서 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 구간은 $1 \le t \le 3$이다.

$\therefore d = \int_1^3 |f'(t)|dt = \int_1^3 \{-f'(t)\}dt$

$= \int_1^3 \{-(t-1)(t-3)\}dt = \int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$

$= \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3 = \frac{4}{3}$

$\therefore 12d = 12\cdot\frac{4}{3} = 16$