



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-13

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 역함수의 미분법미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때

(1) $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

(단, $f'(g(x)) \neq 0$) 또는 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (단, $\frac{dx}{dy} \neq 0$)

(2) $f(a) = b$, 즉 $g(b) = a$ 이면 $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$
(단, $f'(a) \neq 0$)

■ 역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

1. $y = \sqrt[5]{x}$

2. $y = \sqrt[4]{x-2}$

3. $y = \sqrt[3]{x-1}$

4. $y = \sqrt[4]{(x-2)^3}$

5. $y = \sqrt[3]{2x+6}$

6. $y = \sqrt[4]{4x-1}$

7. $x = y^3$

8. $x = \frac{y}{y^2+2}$

9. $x = 3y^2 - y + 2$

■ 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 알맞은 값을 구하여라.10. 함수 $f(x) = x^2 + 2x - 8$ ($x \geq -1$)의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'(16)$ 의 값11. 함수 $f(x) = x^3 + 3x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'(3)$ 의 값12. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'(3)$ 의 값

13. 함수 $f(x) = x^2 + 4x - 8$ ($x \geq -2$)의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'(4)$ 의 값

14. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(-3)$ 의 값

15. 함수 $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ ($x \neq 2$)의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $g'(3)$ 의 값

16. 함수 $f(x) = 2x\sqrt{1+x}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(2\sqrt{2})$ 의 값

17. 함수 $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(2)$ 의 값

18. 함수 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(3)$ 의 값

19. 함수 $f(x) = \cos x$ ($0 < x < \pi$)의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 의 값

20. $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \sin 2x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값

21. 함수 $f(x) = \tan x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(1)$ 의 값 (단, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

22. 함수 $f(x) = x + \sin x$ 의 역함수 $g(x)$ 라 할 때, $g'\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)$ 의 값

23. 함수 $f(x) = \tan 2x$ ($-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(-1)$ 의 값

24. 함수 $f(x) = 4^x - 2^x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(6)$ 의 값

25. 함수 $f(x) = e^x + \ln x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'(e)$ 의 값

26. 함수 $f(x) = (x-2)e^x$ (단, $x > 1$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(e^3)$ 의 값

■ 다음 물음에 답하여라.

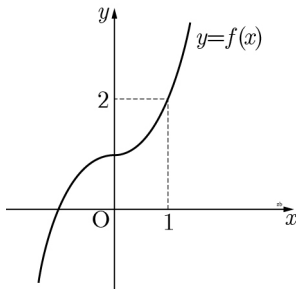
27. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 서로 역함수 관계에 있고 $f(2)=3$, $f'(2)=5$ 일 때, $g'(3)$ 의 값을 구하여라.

28. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = 3$$

을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$ 의 값을 구하여라.

29. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같고, $f'(1)=3f(1)$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $g'(2)$ 의 값을 구하여라.



30. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$ ($x>0$)의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^5, 5)$ 에서의 접선의 기울기를 구하여라.

31. 함수 $f(x)=\ln \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$ ($-1<x<1$)의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $f'\left(\frac{2}{3}\right)-g'(0)$ 의 값을 구하여라.

32. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \frac{1}{3}$ 을 만족하고 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 가 미분가능할 때, $g'(3)$ 의 값을 구하여라.

33. 함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\frac{1}{f'(1)} + \frac{1}{g'(1)}$ 의 값을 구하여라.

34. $f(x)=x\sqrt{1+x}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(\sqrt{2})+g'(\sqrt{2})$ 의 값을 구하여라.

35. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = 4$ 일 때, $f'(3)$ 의 값을 구하여라.

36. 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-2}{x-4} = \frac{1}{3}$ 을 만족할 때, $g(2)+g'(2)$ 의 값을 구하여라.

37. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+2}{x-3} = 4$ 일 때, $f(-2)+f'(-2)$ 의 값을 구하여라.

38. 함수 $f(x) = x^3 + 3x - 3$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - 1}{x - 1}$ 의 값을 구하여라.

39. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - g(x)}{x - 2} = -\frac{1}{4}$ 을 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값을 구하여라.

40. 함수 $f(x) = \ln(e^x + 1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 양수 a 에 대하여 $\frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{g'(a)}$ 의 값을 구하여라.

02 이계도함수

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 미분가능할 때, $f'(x)$ 의 도함수 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ 를 함수 $f(x)$ 의 이계도함수라 하고, 기호로 $f''(x)$, y'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ 로 나타낸다.

▣ 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

41. $y = x(x + 1)^2$

42. $y = 3x^4 + 5x^2 + 4$

43. $y = x^3 - 2x^2 + 5$

44. $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$

45. $y = (2x + 1)^3$

46. $y = \frac{1}{x^2 + 4}$

47. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

48. $y = x \sin x$

49. $y = \cos 2x$

50. $y = \sin^2 x$

51. $y = e^{4x - 1}$

52. $y = e^{-x} \cos x$

53. $y = e^x \cos 2x$

54. $y = x^3 e^{-x}$

55. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

56. $y = \ln x$

57. $y = x \ln x$

58. $y = x^2 \ln x$

59. $y = 2 \ln(\ln x) \quad (x > 1)$

■ 다음 값을 구하여라.

60. 함수 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ 에 대하여 $f''(1)$ 의 값

61. 함수 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 에 대하여 $f''(0)$ 의 값

62. 함수 $f(x) = e^x (\sin x + \cos x)$ 에 대하여 $f''(0)$ 의 값

63. 함수 $f(x) = 2e^{2x}$ 에 대하여 $f''(0)$ 의 값

64. 함수 $f(x) = \frac{\log_2 x}{x}$ 에 대하여 $f''(1)$ 의 값

65. 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{3}x + \cos \frac{\pi}{2}x$ 에 대하여 $f''(1)$ 의 값

66. 함수 $f(x) = \ln(\cos x)$ 에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값

67. 함수 $f(x) = \cos 2x - x^2$ 에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값

68. 함수 $f(x) = e^x \sin x$ 일 때, $f''(\pi)$ 의 값

■ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

69. 함수 $f(x) = e^{2x}$ 에 대하여 $f'(\ln 2) + f''(\ln 2)$ 의 값을 구하여라.

70. 함수 $f(x) = xe^x$ 에 대하여 $f(1) + f'(1) + f''(1)$ 의 값을 구하여라.

71. 함수 $f(x) = xe^{2x} + x \ln x$ 에 대하여 $f'(1) - f''(1)$ 의 값을 구하여라.

72. 함수 $f(x) = \cos 3x$ 에 대하여 $f(0) + f'(\frac{\pi}{2}) + f''(\pi)$ 의 값을 구하여라.

73. 함수 $f(x) = \sin x + \cos x$ 에 대하여 $f'(\frac{\pi}{3}) \cdot f''(\frac{\pi}{3})$ 의 값을 구하여라.

74. $f(x) = x \sin 2x$ 일 때, $f'(\frac{\pi}{4}) + f''(0)$ 의 값을 구하여라.

75. 함수 $f(x) = \tan x$ 에 대하여 $f'(\frac{\pi}{3}) + f''(\frac{\pi}{3})$ 의 값을 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

76. 함수 $f(x) = xe^{ax+2}$ 에 대하여 $f''(0) = 8e^2$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

77. $y = e^{-x} \cos 2x$ 에 대하여 등식 $y'' + ay' + 5y = 0$ 을 항상 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

78. 함수 $f(x) = e^{x^2+ax+1}$ 에 대하여 $f'(0) = 18e$ 가 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

79. $f(x) = ax^2 \sin x$, $f'(\pi) - \pi f''(\pi) = 9\pi^2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

80. 함수 $f(x) = 4\cos x - \sqrt{2} \cot x$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{4x - \pi}$ 의 값을 구하여라.

81. 함수 $f(x) = \sin(x^2 + x)$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(2x) - 1}{x}$ 의 값을 구하여라.

82. 함수 $f(x) = e^{-x} \sin x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - 1}{h}$ 의 값을 구하여라.

83. 함수 $f(x) = (ax + b) \cos x$ 가 $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ 를 만족할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

84. 함수 $f(x) = xe^{ax+b}$ 에 대하여, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.



정답 및 해설

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

⇒ 주어진 식의 양변을 5제곱하면 $y^5 = x$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 5y^4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{5y^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

⇒ $y = \sqrt[4]{x-2}$ 에서 $x = y^4 + 2$ 이므로 양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 4y^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x-2})^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

$$3) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

⇒ 주어진 식의 양변을 세 제곱하면

$$y^3 = x - 1 \text{이므로 } x = y^3 + 1$$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 3y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$4) \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x-2}}$$

⇒ 주어진 식의 양변을 4제곱하면

$$y^4 = (x-2)^3 \text{이므로 } x = y^{\frac{4}{3}} + 2$$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = \frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{3}{4y^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{y}} \\ &= \frac{3}{4\sqrt[12]{(x-2)^3}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x-2}} \end{aligned}$$

$$5) \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$$

⇒ $y = \sqrt[3]{2x+6}$ 에서 $x = \frac{1}{2}y^3 - 3$ 이므로 양변을 y 에

대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{3}{2}y^2} = \frac{2}{3(\sqrt[3]{2x+6})^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$$

$$6) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} \text{ (단, } x \neq \frac{1}{4} \text{)}$$

⇒ $y = \sqrt[4]{4x-1}$ 에서 $y^4 = 4x-1$ 이므로

$$x = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{4}$$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = y^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{y^3} = \frac{1}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} \text{ (단, } x \neq \frac{1}{4} \text{)}$$

$$7) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

⇒ $x = y^3$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 3y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$8) \frac{dy}{dx} = -\frac{(y^2+2)^2}{y^2-2}$$

⇒ 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y^2+2)-y \cdot 2y}{(y^2+2)^2} = \frac{-y^2+2}{(y^2+2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^2+2)^2}{y^2-2} \text{ (단, } y \neq \pm \sqrt{2} \text{)}$$

$$9) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6y-1} \text{ (단, } y \neq \frac{1}{6} \text{)}$$

⇒ 양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 6y-1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{6y-1} \text{ (단, } y \neq \frac{1}{6} \text{)}$$

$$10) \frac{1}{10}$$

⇒ $g(16) = a$ 라고 하면 $f(a) = 16$

$$\text{즉, } f(a) = a^2 + 2a - 8 = 16 \text{이므로}$$

$$a^2 + 2a - 24 = 0, (a-4)(a+6) = 0$$

$$\therefore a = 4 \text{ (} \because a \geq -1 \text{)}$$

따라서 $g(16) = 4$ 이고, $f'(x) = 2x + 2$ 이므로

$$\therefore g'(16) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{10}$$

$$11) \frac{1}{6}$$

⇒ $g(3) = a$ 라고 하면 $f(a) = 3$

$$\text{즉, } f(a) = a^3 + 3a - 1 = 3 \text{이므로}$$

$$a^3 + 3a - 4 = 0, (a-1)(a^2 + a + 4) = 0$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $g(3) = 1$ 이고, $f'(x) = 3x^2 + 3$ 이므로

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

$$12) 1$$

⇒ $g(3)=a$ 라 하면 $f(a)=3$ 이므로

$$a^3 - 3a^2 + 4a + 1 = 3$$

$$(a-1)(a^2 - 2a + 2) = 0 \quad \therefore a = 1$$

$f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 는

$x = y^3 - 3y^2 + 4y + 1$ 이라 할 때,

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 - 6y + 4$$

$$\text{따라서 } g'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2 - 6y + 4}, \quad g(3) = 1 \text{이므로}$$

$$g'(3) = \frac{1}{3-6+4} = 1$$

13) $\frac{1}{8}$

⇒ $g(4)=a$ 라고 하면 $f(a)=4$

$$\text{즉, } f(a) = a^2 + 4a - 8 = 4 \text{이므로}$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0, \quad (a+6)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \geq -2)$$

따라서 $g(4)=2$ 이고, $f'(x) = 2x + 4$ 이므로

$$\therefore g'(4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{8}$$

14) $\frac{1}{2}$

⇒ $g(-3)=a$ 라고 하면 $f(a)=-3$

$$f(a) = a^3 + 3a^2 + 5a = -3$$

$a^3 + 3a^2 + 5a + 3 = 0$ 에서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \text{이므로}$$

$$(a+1)(a^2 + 2a + 3) = 0$$

이 때, $a^2 + 2a + 3 > 0$ 이므로 $a = -1$

$$\text{즉, } g(-3) = -1 \text{이고 } f'(x) = 3x^2 + 6x + 5 \text{이므로}$$

$$f'(g(-3)) = f'(-1) = 2$$

$$\therefore g'(-3) = \frac{1}{f'(g(-3))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$$

15) 27

⇒ $f'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$ 이고, $f(29) = 3$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(29)} = 27$$

16) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

⇒ $f(k) = 2\sqrt{2}$ 라 하면 $2k\sqrt{1+k} = 2\sqrt{2}$

$$k^2(1+k) = 2, \quad (k-1)(k^2 + 2k + 2) = 0 \quad \therefore k = 1$$

$$\text{이때 } f'(x) = 2\sqrt{1+x} + \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$\therefore g'(2\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

17) 2

⇒ $g(2)=k$ 라 하면 $f(k)=2$

$$f(k) = \frac{3k+1}{k+1} = 2$$

$$3k+1 = 2k+2 \quad \therefore k = 1$$

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \text{이므로}$$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{f'(k)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

18) -3

⇒ $g(3)=k$ 라 하면 $f(k)=3$ 이므로

$$f(k) = \frac{2k+1}{k-1} = 3, \quad 2k+1 = 3k-3 \quad \therefore k = 4$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \text{이므로}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(4)} = -3$$

19) -2

⇒ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 역함수의 미분법에 의해

$$\therefore g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$f'(x) = -\sin x \text{이므로}$$

$$\therefore g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -2$$

20) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

⇒ $g\left(\frac{1}{2}\right) = a$ 라고 하면 $f(a) = \frac{1}{2}$

$$\text{즉, } f(a) = \sin 2a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12} \text{이고, } f'(x) = 2\cos 2x \text{이므로}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

21) $\frac{1}{2}$

⇒ $g(1)=a$ 라고 하면 $f(a)=1$

$$f(a) = \tan a = 1 \quad \therefore a = \frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{즉, } g(1) = \frac{\pi}{4} \text{이고 } f'(x) = \sec^2 x \text{이므로}$$

$$f'(g(1)) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$22) 4-2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f(k) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \Rightarrow k + \sin k = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \therefore k = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{이때 } f'(x) = 1 + \cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore g'\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{f'(k)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$23) \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{4} \quad \therefore x = -\frac{\pi}{8}$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 2\sec^2 2x \text{ 이므로}$$

$$g'(-1) = \frac{1}{f'(g(-1))} = \frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$24) \frac{1}{15\ln 2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 6 = 4^x - 2^x \text{를 만족하는 } x \text{는 } 2^x > 0 \text{이고} \\ (2^x - 3)(2^x + 2) = 0 \text{이므로 } 2^x = 3 \text{이고, } x = \log_2 3 \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\text{또한 } f'(x) = 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2 \text{이므로}$$

$$g'(6) = \frac{1}{f'(g(6))} = \frac{1}{f'(\log_2 3)} = \frac{1}{9\ln 4 - 3\ln 2} = \frac{1}{15\ln 2}$$

$$25) \frac{1}{e+1}$$

$$\Rightarrow g(e) = a \text{라고 하면 } f(a) = e$$

$$\text{즉, } f(a) = e^a + \ln a = e \quad \therefore a = 1$$

$$\text{따라서 } g(e) = 1 \text{이고, } f'(x) = e^x + \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$g'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e^1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{e+1}$$

$$26) \frac{1}{2e^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x, f(3) = e^3$$

$$\therefore g'(e^3) = \frac{1}{f'(g(e^3))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{2e^3}$$

$$27) \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow f(2) = 3 \text{이므로 } g(3) = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$$

$$28) \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - 2\} = 0 \text{이므로 } g(1) - 2 = 0$$

$$\therefore g(1) = 2$$

$$\text{또한 } g(1) = 2 \text{이므로 } f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 3$$

$$f(x) \text{의 역함수가 } g(x) \text{이므로 } g(f(x)) = x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{1}{g'(f(2))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{3}$$

$$29) \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow f(1) = 2 \text{이므로 } g(2) = 1 \text{이다.}$$

$$\text{또 } f'(1) = 3f(1) = 3 \cdot 2 = 6 \text{이므로}$$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

$$30) \frac{1}{2e^5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x + (x-4)e^x = e^x(x-3) \text{이므로}$$

곡선 $y = g(x)$ 의 점 $(e^5, 5)$ 에서 접선의 기울기는

$$g'(e^5) = \frac{1}{f'(g(e^5))} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{2e^5}$$

$$31) \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \{\ln(1+x) - \ln(1-x)\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{-1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}$$

한편, $g(0) = a$ 라고 하면 $f(a) = 0$ 이므로

$$\ln \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = 0, \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = 1 \quad \therefore a = 0$$

즉, $g(0) = 0$ 이므로

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{따라서 구하는 값은 } f'\left(\frac{2}{3}\right) - g'(0) = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$32) 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } x \rightarrow 2 \text{ 일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고,}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0 \text{ 에서 } f(2) = 3 \text{ 이므로}$$

$$g(3) = 2$$

한편 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(2)} = 3$$

33) 2

$$\Rightarrow f(k)=1 \text{ 이라 하면 } \ln(e^k-1)=1$$

$$e^k-1=e \quad \therefore k=\ln(e+1)$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{f'(1)} + \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{f'(1)} + f'(\ln(e+1))$$

$$= \frac{e-1}{e} + \frac{e^{\ln(e+1)}}{e^{\ln(e+1)}-1} = \frac{e-1}{e} + \frac{e+1}{e} = 2$$

34) $1 + \frac{2\sqrt{2}}{5}$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+x} = \sqrt{2} \quad \therefore x=1$$

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x) = \sqrt{1+x} + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\therefore g(\sqrt{2}) + \frac{1}{f'(1)} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

35) $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \text{주어진 극한에서 } g(1)=3, g'(1)=4$$

$$\therefore f'(3) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{4}$$

36) 7

$$\Rightarrow f(4)=2 \text{ 이고, 역함수 관계로 } g(2)=4 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{f'(4)} = 3$$

$$\therefore g(2) + g'(2) = 4 + 3 = 7$$

37) $\frac{13}{4}$

$$\Rightarrow \text{주어진 분수의 극한식이 수렴하고, 분모가 } 0 \text{ 으로 수렴하므로 분자도 마찬가지로 이다.}$$

함수가 미분가능하므로 연속함수이고,

연속함수이므로 함수값과 극한값이 같다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -2 \quad \therefore g(3) = -2$$

$$\text{주어진 극한식은 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = g'(3) = 4 \text{ 이다.}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계로 $f(-2)=3$ 이고,

$$f'(-2) = \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(-2) + f'(-2) = \frac{13}{4}$$

38) $\frac{37}{6}$

$$\Rightarrow \text{주어진 극한식을 정리하면 } f(1)=1 \text{ 이므로 역함수 관계에 의해 } g(1)=1 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1} = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \text{ 에서 } g'(1) = \frac{1}{f'(1)} \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 6, g'(1) = \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

따라서 주어진 극한 식의 값은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1} &= f'(1)g(1) + f(1)g'(1) \\ &= 6 + \frac{1}{6} = \frac{37}{6} \end{aligned}$$

39) 4

$$\Rightarrow \text{주어진 극한값에서 분모가 } 0 \text{ 에 수렴하면 분자도 } 0 \text{ 에 수렴하므로 } g(2)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2} = \frac{1}{4} \quad \therefore g'(2) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{g'(2)} = 4$$

40) 2

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad g(a)=b \text{ 라고 하자.}$$

$$f(b)=a, \ln(e^b+1)=a, e^b+1=e^a$$

$$\frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{f'(a)} + f'(b) = \frac{e^a+1}{e^a} + \frac{e^b}{e^b+1}$$

$$= \frac{e^a+1}{e^a} + \frac{e^a-1}{e^a} = \frac{2e^a}{e^a} = 2$$

41) $y'' = 6x + 4$

$$\Rightarrow y' = 1 \cdot (x+1)^2 + x \cdot 2(x+1)$$

$$= (x^2 + 2x + 1) + (2x^2 + 2x)$$

$$= 3x^2 + 4x + 1$$

$$y'' = 6x + 4$$

42) $y'' = 36x^2 + 10$

$$\Rightarrow \text{함수 } y = 3x^4 + 5x^2 + 4 \text{ 의 도함수는 } y' = 12x^3 + 10x$$

이고 이계도함수는 $y'' = 36x^2 + 10$ 이다.

43) $y'' = 6x - 4$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 - 4x \text{ 이므로 } y'' = 6x - 4$$

$$44) y'' = 6x - 4$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \text{ 이므로 } y'' = 6x - 4$$

$$45) y'' = 24(2x + 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= 3(2x+1)^2(2x+1)' \quad \text{이므로} \\ &= 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2 \\ y'' &= 6 \times 2(2x+1)(2x+1)' \\ &= 12(2x+1) \times 2 = 24(2x+1) \end{aligned}$$

$$46) y'' = \frac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \frac{-(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} \\ y'' &= \frac{(-2x)'(x^2+4)^2 - (-2x)\{(x^2+4)^2\}'}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+4)^2 + 2x \cdot 2(x^2+4) \cdot 2x}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{(x^2+4)\{-2(x^2+4) + 8x^2\}}{(x^2+4)^4} = \frac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

$$47) y'' = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \text{ 이므로} \\ y'' &= \frac{(-2x)'(x^2+1)^2 - (-2x) \times 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+1)^2 + 4x(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$48) y'' = 2\cos x - x \sin x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= 1 \times \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x \text{ 이므로} \\ y'' &= \cos x + \{1 \times \cos x + x \times (-\sin x)\} \\ &= 2\cos x - x \sin x \end{aligned}$$

$$49) y'' = -4\cos 2x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= -\sin 2x \times (2x)' = -2\sin 2x \text{ 이므로} \\ y'' &= -2\cos 2x \times (2x)' = -4\cos 2x \end{aligned}$$

$$50) y'' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x \\ y'' &= (2\sin x)' \cdot \cos x + 2\sin x \cdot (\cos x)' \\ &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

$$51) y'' = 16e^{4x-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= e^{4x-1}(4x-1)' = 4e^{4x-1} \text{ 이므로} \\ y'' &= 4e^{4x-1}(4x-1)' = 16e^{4x-1} \end{aligned}$$

$$52) y'' = 2e^{-x}\sin x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x) \\ y'' &= e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cos x) \\ &= 2e^{-x}\sin x \end{aligned}$$

$$53) y'' = -e^x(3\cos 2x + 4\sin 2x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= (e^x)' \cos 2x + e^x(\cos 2x)' \\ &= e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x = e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) \\ \text{이므로} \\ y'' &= (e^x)'(\cos 2x - 2\sin 2x) + e^x(\cos 2x - 2\sin 2x)' \\ &= e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) + e^x(-2\sin 2x - 4\cos 2x) \\ &= -e^x(3\cos 2x + 4\sin 2x) \end{aligned}$$

$$54) y'' = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= 3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} \times (-x)' = (3x^2 - x^3)e^{-x} \text{ 이므로} \\ y'' &= (3x^2 - x^3)'e^{-x} + (3x^2 - x^3)e^{-x} \times (-x)' \\ &= \{(6x - 3x^2) - (3x^2 - x^3)\}e^{-x} \\ &= (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x} \end{aligned}$$

$$55) y'' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y'' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$56) y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x} \text{ 이므로 } y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$57) y'' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 \text{ 이므로 } y'' = \frac{1}{x}$$

$$58) y'' = 2\ln x + 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2(\ln x)' \\ &= 2x \ln x + x \\ y'' &= (2x \ln x + x)' = (2x)' \ln x + 2x(\ln x)' + (x)' \\ &= 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3 \end{aligned}$$

$$59) y'' = -\frac{2(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= 2 \times \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{2}{x \ln x} \text{ 이므로} \\ y'' &= \frac{-2(x \ln x)'}{(x \ln x)^2} = -\frac{2(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$60) -\frac{9}{32}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= (\sqrt{3x+1})' = \frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3x+1)' \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \\ y'' &= \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \right)' \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (3x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (3x+1)' \end{aligned}$$

$$= -\frac{9}{4} \cdot (3x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(3x+1)\sqrt{3x+1}}$$

$$= -\frac{9}{4(3x+1)\sqrt{3x+1}}$$

$$y''_{x=1} = -\frac{9}{4(3 \cdot 1 + 1)\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = -\frac{9}{32}$$

61) 1

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x + e^{-x} \times (-x)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 이므로}$$

$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x} \times (-x)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore f''(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$$

62) 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} y'' &= 2(e^x)' \cos x + 2e^x(\cos x)' \\ &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x \\ &= 2e^x(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

$$\therefore f''(0) = 2$$

63) 8

$$\Rightarrow f'(x) = 4e^{2x}, f''(x) = 8e^{2x} \quad \therefore f''(0) = 8$$

64) $-\frac{3}{\ln 2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \left(\frac{\log_2 x}{x} \right)' = \frac{1}{x \ln 2} \cdot \frac{1}{x} + \log_2 x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (-2) \frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x \right) + \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x \ln 2} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \left(2 \log_2 x - \frac{3}{\ln 2} \right) \end{aligned}$$

$$y''_{x=1} = \frac{1}{1^3} \left(2 \log_2 1 - \frac{3}{\ln 2} \right) = -\frac{3}{\ln 2}$$

65) $-\frac{\sqrt{3}}{18} \pi^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \left(\sin \frac{\pi}{3} x + \cos \frac{\pi}{2} x \right)' \\ &= \cos \frac{\pi}{3} x \cdot \left(\frac{\pi}{3} x \right)' - \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} x \right)' \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} x - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} x - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x \right)' \\ &= -\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} x - \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{x=1} &= -\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{4} \cdot 0 = -\frac{\sqrt{3}}{18} \pi^2 \end{aligned}$$

66) -4

$$\Rightarrow y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \text{ 이므로}$$

$$y'' = -\sec^2 x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

67) -4

$$\Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x - 2x, f''(x) = -4\cos 2x - 2$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 - 2 = -4$$

68) $-2e^\pi$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x \end{aligned}$$

$$\therefore f''(\pi) = 2e^\pi \times (-1) = -2e^\pi$$

69) 24

$$\Rightarrow f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x} \text{ 이므로}$$

$$f'(\ln 2) = 2e^{2\ln 2} = 2e^{\ln 4} = 2 \cdot 4^{\ln e} = 8$$

$$f''(x) = (2e^{2x})' = 2(e^{2x})' = 4e^{2x} \text{ 이므로}$$

$$f''(\ln 2) = 4e^{2\ln 2} = 4e^{\ln 4} = 4 \cdot 4^{\ln e} = 16$$

$$\therefore f'(\ln 2) + f''(\ln 2) = 8 + 16 = 24$$

70) $6e$

$$\Rightarrow f'(x) = (1+x)e^x, f''(x) = (x+2)e^x \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f'(1) + f''(1) = e + 2e + 3e = 6e \text{ 이다.}$$

71) $-5e^2$

$$\Rightarrow f'(x) = (xe^{2x} + x \ln x)'$$

$$= 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= e^{2x}(1+2x) + \ln x + 1$$

이므로

$$f'(1) = e^{2 \cdot 1}(1+2 \cdot 1) + \ln 1 + 1 = 3e^2 + 1$$

$$f''(x) = 2e^{2x}(1+2x) + e^{2x} \cdot 2 + \frac{1}{x} = 2e^{2x}(2+2x) + \frac{1}{x}$$

이므로

$$f''(1) = 2e^{2 \cdot 1}(2+2 \cdot 1) + \frac{1}{1} = 8e^2 + 1$$

$$\therefore f'(1) - f''(1) = (3e^2 + 1) - (8e^2 + 1) = -5e^2$$

72) 13

$$\Rightarrow f'(x) = -3\sin 3x, f''(x) = -9\cos 3x$$

$$\therefore f(0) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''(\pi) = 1 + 3 + 9 = 13$$

73) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x \text{이므로} \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x \text{이므로} \\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right) \\ &= -\frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

74) 5

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= \sin 2x + 2x \cos 2x \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 \\ f''(x) &= 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x \sin 2x = 4\cos 2x - 4x \sin 2x \\ \therefore f''(0) &= 4\cos 0 = 4 \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + f''(0) &= 1 + 4 = 5\end{aligned}$$

75) $4 + 8\sqrt{3}$

76) 4

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= e^{ax+2} + axe^{ax+2} = (1+ax)e^{ax+2} \\ f''(x) &= ae^{ax+2} + a(1+ax)e^{ax+2} = (2a+a^2x)e^{ax+2} \\ \text{이때 } f''(0) &= 2ae^2 = 8e^2 \text{이여야 하므로} \\ 2a &= 8 \quad \therefore a = 4\end{aligned}$$

77) 2

$$\begin{aligned}\Rightarrow y' &= -e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x \\ &= -e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) \\ y'' &= e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) - e^{-x}(-2\sin 2x + 4\cos 2x) \\ &= e^{-x}(4\sin 2x - 3\cos 2x) \\ y'' + ay' + 5y &= 0 \text{에 } y', y'' \text{ 식을 대입하면} \\ e^{-x}(4\sin 2x - 3\cos 2x) &+ a\{-e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x)\} + 5e^{-x} \cos 2x = 0 \\ 2(2-a)e^{-x} \sin 2x + (2-a)e^{-x} \cos 2x &= 0 \\ (2-a)e^{-x}(2\sin 2x + \cos 2x) &= 0 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

78) 4

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= (2x+a)e^{x^2+ax+1} \\ f''(x) &= 2e^{x^2+ax+1} + (2x+a)^2 e^{x^2+ax+1} \\ \therefore f''(0) &= 2e + a^2 e = 18e \\ \text{따라서 만족하는 양수 } a &= 4 \text{이다.}\end{aligned}$$

79) 3

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= 2ax \sin x + ax^2 \cos x \text{이므로 } f'(\pi) = -a\pi^2 \\ f''(x) &= 2a \sin x + 2ax \cos x + 2ax \cos x - ax^2 \sin x \\ \therefore f''(\pi) &= -4a\pi\end{aligned}$$

따라서 $-a\pi^2 - \pi \cdot (-4a\pi) = 9\pi^2$ 이므로 $a = 3$

80) $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= -4\sin x + \sqrt{2} \csc^2 x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{4x - \pi} &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x) - f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f''(x) &= -4\cos x - 2\sqrt{2} \csc^2 x \cot x \\ \therefore \frac{1}{4} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{3}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

81) 4

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= (2x+1) \cdot \cos(x^2+x), \quad f'(0) = 1 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(2x)-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(2x)-f'(0)}{x-0} = 2f''(0) \\ \text{이때 } f''(x) &= 2\cos(x^2+x) - (2x+1)^2 \sin(x^2+x), \\ f''(0) &= 2 \text{이므로 주어진 극한의 값은 } 2f''(0) = 4 \text{이다.}\end{aligned}$$

82) -2

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= e^{-x}(-\sin x + \cos x) \quad \therefore f'(0) = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h)-1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h)-f'(0)}{h} = f''(0) \\ f''(x) &= -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(-\cos x - \sin x) \\ &= -2e^{-x} \cos x \\ \therefore f''(0) &= -2\end{aligned}$$

83) -1

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x) &= (ax+b)\cos x \\ f'(x) &= a\cos x + (ax+b)(-\sin x) \\ f'(0) &= 1 \text{이므로 } a = 1 \\ f''(x) &= -a\sin x + \{-a\sin x - (ax+b)\cos x\} \\ f''(0) &= 2 \text{이므로 } -b = 2 \quad \therefore b = -2 \\ \therefore a+b &= -1\end{aligned}$$

84) 1

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= (ax+1)e^{ax+b} \\ f'(0) &= e^b = 1 \text{이므로 } b = 0 \\ f''(x) &= ae^{ax+b}(ax+2) \text{에서 } f''(0) = 2 \text{이므로} \\ 2a &= 2 \quad \therefore a = 1 \\ \therefore a+b &= 1\end{aligned}$$