01 삼차방정식의 근과 계수와의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$
$(a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

◪ **삼차방정식 $x^3-3x^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.**

1. $\alpha+\beta+\gamma$

2. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

3. $\alpha\beta\gamma$

◪ **삼차방정식 $3x^3+6x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.**

4. $\alpha+\beta+\gamma$

5. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

6. $\alpha\beta\gamma$

◪ **삼차방정식 $2x^3-4x^2+5x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.**

7. $\alpha+\beta+\gamma$

8. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

9. $\alpha\beta\gamma$

10. $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

◪ **삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.**

11. $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

12. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

13. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

14. $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

15. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

16. $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$

◪ 삼차방정식 $x^3+3x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

17. $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

18. $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

◪ 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x-8=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

19. $\alpha+\beta+\gamma$

20. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

21. $\alpha\beta\gamma$

22. $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

23. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

24. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

25. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

◪ 삼차방정식 $x^3+4x^2+3x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

26. $\alpha+\beta+\gamma$

27. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

28. $\alpha\beta\gamma$

29. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

30. $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

31. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

32. 삼차방정식 $x^3-x^2-3x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$의 값을 구하여라.

02 삼차방정식의 작성

x^3의 계수가 1이고 세 근이 α, β, γ인 삼차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$
$\Leftrightarrow x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

◪ 다음 세 수를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 꼴로 나타내어라.

33. $2, 3, -4$

34. $0, 1, -3$

35. $-1, -3, -4$

36. $-1, 2, 4$

37. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 6$

38. $2, 5, 4$

39. $0, 1, -2$

40. $-1, -3, -5$

41. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

◪ 다음 삼차방정식을 구하여라.

42. 세 수 -3, $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식

43. 세 수 $1, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식

44. 삼차방정식 $x^3-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식

◪ 삼차방정식 $x^3+2x^2+4x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, x^3의 계수가 1이고 다음을 세 근으로 하는 삼차방정식을 구하여라.

45. $-\alpha, -\beta, -\gamma$

46. $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$

47. $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$

48. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$

49. $2\alpha-1, 2\beta-1, 2\gamma-1$

◪ 삼차방정식 $x^3+2x^2-x-3=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, x^3의 계수가 1이고 다음을 세 근으로 하는 삼차방정식을 구하여라.

50. $\alpha+1,\beta+1,\gamma+1$

51. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$

◪ 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, 다음을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식을 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 꼴로 나타내어라.

52. $-\alpha,-\beta,-\gamma$

53. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$

◪ 삼차방정식 $x^3-3x^2+x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, 다음을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식을 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 꼴로 나타내어라.

54. $-\alpha,-\beta,-\gamma$

55. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$

03 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

(1) $a,\ b,\ c,\ d$가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, $p,\ q$는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) $a,\ b,\ c,\ d$가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, $p,\ q$는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

◪ 다음 삼차방정식에 대하여 a,b,α의 값을 구하여라.

56. 삼차방정식 $x^3-ax+b=0$의 두 근이 $-2,1+\sqrt{2}$이다.

57. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 두 근이 $3,1+i$이다.

58. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-6=0$의 한 근이 $\frac{2}{1-i}$이고 나머지 두 근 중 실근을 α라고 한다.

◪ 다음을 만족시키는 실수 a,b의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

59. 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$이다.

60. 삼차방정식 $x^3+ax^2+6x-b=0$의 한 근이 $1-i$이다.

61. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이다.

◪ 다음을 만족시키는 유리수 a,b의 값을 구하여라.

62. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이다.

63. 삼차방정식 $x^3+ax^2-2x+b=0$의 한 근이 $3+\sqrt{5}$이다.

64. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+2=0$의 한 근이 $1-\sqrt{3}$이다.

◪ 주어진 삼차방정식의 한 근이 다음과 같을 때, 실수 a,b의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

65. $x^3+x^2+ax-b=0$의 한 근이 $2+i$

66. $x^3-x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-i$

67. $x^3-x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$

68. $x^3-6x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$

69. $x^3+ax^2+bx+4=0$의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$

70. $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$

71. $x^3+ax^2+bx+5=0$의 한 근이 $2-i$

72. $x^3+ax^2+bx-10=0$의 한 근이 $1-2i$

정답 및 해설

1) $\alpha+\beta+\gamma=3$

2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

3) $\alpha\beta\gamma=-1$

4) $\alpha+\beta+\gamma=0$

5) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

6) $\alpha\beta\gamma=\frac{1}{3}$

7) $\alpha+\beta+\gamma=2$

8) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{5}{2}$

9) $\alpha\beta\gamma=1$

10) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{5}{2}$

11) 1

⇨ $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$
$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$
$=1+2+3+(-5)=1$

12) -2

⇨ $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=-5$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=2^2-2\cdot3=-2$

13) -25

⇨ $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=-5$
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$
$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$
$=2\cdot(-2-3)+3\cdot(-5)=-25$

14) 29

⇨ $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=-5$
$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
$=3^2-2\cdot(-5)\cdot2=29$

15) $-\frac{3}{5}$

⇨ $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=-5$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{3}{5}$

16) $-\frac{2}{5}$

⇨ $x^3-2x^2+3x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=-5$
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{2}{5}$

17) -2

⇨ $x^3+3x-2=0$에서 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=2$
$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$
$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$
$=2-3+0-1=-2$

18) 9

⇨ $x^3+3x-2=0$에서 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=2$
$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
$=3^2-2\cdot2\cdot0=9$

19) 2

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=-(-2)=2$

20) 4

⇨ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$

21) 8

⇨ $\alpha\beta\gamma=-(-8)=8$

22) 5

⇨ $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$
$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$
$=8-4+2-1=5$

23) -4

⇨ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=2^2-2\cdot4=-4$

24) 0

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=2$이므로
$\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$
$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$
$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=8-4\cdot2+2\cdot4-8=0$

25) $\frac{1}{2}$

⇨ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

26) -4

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=-4$

27) 3

⇨ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

28) 5

⇨ $\alpha\beta\gamma=-(-5)=5$

29) $\frac{3}{5}$

⇨ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{5}$

30) -3

⇨ $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$
$=(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)(\gamma-1)$
$=\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma-\alpha\beta+\alpha+\beta-1$
$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$
$=5-3-4-1=-3$

31) 10

⇨ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(-4)^2-2\cdot3$
$=16-6=10$

32) -1

⇨ $x^3-x^2-3x+2=0$의 세 근이 α,β,γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-2$
$\therefore(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-1+(-3)-(-2)=-1$
[다른 풀이]
$x^3-x^2-3x+2=0$의 세 근이 α,β,γ이므로
$x^3-x^2-3x+2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1-1-3+2=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$\therefore(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=-1$

33) $x^3-x^2-14x+24=0$

⇨ (세 근의 합)$=2+3+(-4)=1$
(두 근끼리의 곱의 합)$=2\cdot3+3\cdot(-4)+(-4)\cdot2$
$=-14$
(세 근의 곱)$=2\cdot3\cdot(-4)=-24$
따라서 구하는 방정식은
$x^3-x^2-14x+24=0$

34) $x^3+2x^2-3x=0$

⇨ (세 근의 합)$=0+1-3=-2$
(두 근끼리의 곱의 합)$=0\cdot1+1\cdot(-3)-3\cdot0=-3$
(세 근의 곱)$=0\cdot1\cdot(-3)=0$
$\therefore x^3+2x^2-3x=0$

35) $x^3+8x^2+19x+12=0$

⇨ (세 근의 합)$=-1-3-4=-8$
(두 근끼리의 곱의 합)$=-1\cdot(-3)-3\cdot(-4)-4\cdot(-1)$
$=19$
(세 근의 곱)$=-1\cdot(-3)\cdot(-4)=-12$
$\therefore x^3+8x^2+19x+12=0$

36) $x^3-5x^2+2x+8=0$

⇨ (세 근의 합)$=-1+2+4=5$
(두 근끼리의 곱의 합)$=-1\cdot2+2\cdot4+4\cdot(-1)=2$
(세 근의 곱)$=-1\cdot2\cdot4=-8$
$\therefore x^3-5x^2+2x+8=0$

37) $x^3-6x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0$

⇨ (세 근의 합)$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+6=6$
(두 근끼리의 곱의 합)$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot6+6\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$
(세 근의 곱)$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot6=-\frac{3}{2}$
$\therefore x^3-6x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0$

38) $x^3-11x^2+38x-40=0$

⇨ $x^3-(2+5+4)x^2+(10+20+8)x-2\cdot5\cdot4=0$
$\therefore x^3-11x^2+38x-40=0$

39) $x^3+x^2-2x=0$

⇨ $x^3-(0+1-2)x^2+(0-2+0)x-0\cdot1\cdot(-2)=0$
$\therefore x^3+x^2-2x=0$

40) $x^3+9x^2+23x+15=0$

⇨
$x^3-(-1-3-5)x^2+(3+15+5)x-(-1)(-3)(-5)=0$
$\therefore x^3+9x^2+23x+15=0$

41) $x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}=0$

⇨ $x^3-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)x$
$-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$
$\therefore x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}=0$

42) $x^3+x^2-x+15=0$

⇨ x^3의 계수가 1이고 근이 $-3, 1+2i, 1-2i$인 삼차방정식은
$x^3-\{-3+(1+2i)+(1-2i)\}x^2$
$+\{(-3)\cdot(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\cdot(-3)\}x$
$-(-3)\cdot(1+2i)(1-2i)=0$
$\therefore x^3+x^2-x+15=0$

43) $x^3-7x^2+13x-7=0$

⇨ x^3의 계수가 1이고 근이 $1, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$인 삼차방정식은

$x^3-\{1+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x^2$
$+\{1\cdot(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\cdot 1\}x$
$-1\cdot(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3-7x^2+13x-7=0$

44) $x^3-2x+1=0$

⇨ $x^3-2x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2, \alpha\beta\gamma=1$
이때, $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$이므로
$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=-\gamma-\alpha-\beta$
$=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$
$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$
$=(-\gamma)\cdot(-\alpha)+(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)$
$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$
$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$
$=-\alpha\beta\gamma=-1$
$\therefore x^3-2x+1=0$

45) $x^3-2x^2+4x+2=0$

⇨ $x^3+2x^2+4x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=2$
$(-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=2$
$(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)+(-\gamma)\cdot(-\alpha)$
$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$
$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-2$
$\therefore x^3-2x^2+4x+2=0$

46) $x^3-x^2+3x-5=0$

⇨ $x^3+2x^2+4x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=2$
$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3$
$=-2+3=1$
$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)+(\beta\gamma+\beta+\gamma+1)+(\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=4+2\cdot(-2)+3=3$
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=2+4+(-2)+1=5$
$\therefore x^3-x^2+3x-5=0$

47) $x^3-4x^2-4x-4=0$

⇨ $x^3+2x^2+4x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=2$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$
$\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
$=2\cdot(-2)=-4$
$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=2^2=4$
$\therefore x^3-4x^2-4x-4=0$

48) $x^3-2x^2-x-\frac{1}{2}=0$

⇨ $x^3+2x^2+4x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=2$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{2}=2$
$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{2}=-1$
$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}$
$\therefore x^3-2x^2-x-\frac{1}{2}=0$

49) $x^3+7x^2+27x+5=0$

⇨ $x^3+2x^2+4x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=2$
$(2\alpha-1)+(2\beta-1)+(2\gamma-1)=2(\alpha+\beta+\gamma)-3$
$=2\cdot(-2)-3=-7$
$(2\alpha-1)(2\beta-1)+(2\beta-1)(2\gamma-1)+(2\gamma-1)(2\alpha-1)$
$=(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1)+(4\beta\gamma-2\beta-2\gamma+1)$
$+(4\gamma\alpha-2\gamma-2\alpha+1)$
$=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-4(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=4\cdot 4-4\cdot(-2)+3=27$
$(2\alpha-1)(2\beta-1)(2\gamma-1)$
$=8\alpha\beta\gamma-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)-1$
$=8\cdot 2-4\cdot 4+2\cdot(-2)-1=-5$
$\therefore x^3+7x^2+27x+5=0$

50) $x^3-x^2-2x-1=0$

⇨ $x^3+2x^2-x-3=0$에서 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1, \alpha\beta\gamma=3$
$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3$
$=-2+3=1$
$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)+(\beta\gamma+\beta+\gamma+1)(\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=-1+2\cdot(-2)+3=-2$
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=3+(-1)+(-2)+1=1$
$\therefore x^3-x^2-2x-1=0$

51) $x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

⇨ $x^3+2x^2-x-3=0$에서 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1, \alpha\beta\gamma=3$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{3}$

$\therefore x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

52) $x^3-3x^2-2x+1=0$

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$

$x^3-(-\alpha-\beta-\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-(-\alpha\beta\gamma)=0$

$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma=0$

$\therefore x^3-3x^2-2x+1=0$

53) $x^3+2x^2-3x-1=0$

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$

$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-2$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-3$

$x^3+2x^2-3x-1=0$

54) $x^3+3x^2+x+1=0$

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma=0$

$\therefore x^3+3x^2+x+1=0$

55) $x^3-x^2+3x-1=0$

⇨ $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=1$

$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=3$

$\therefore x^3-x^2+3x-1=0$

56) $a=5, b=-2$

⇨ 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$ 가 근이면 $1-\sqrt{2}$ 도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-2(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(-2)$

,

$-b=-2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$\therefore a=5, b=-2$

57) $a=8, b=-6$

⇨ 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $3, 1+i, 1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=3(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot 3$,

$-b=3(1+i)(1-i)$

$\therefore a=8, b=-6$

58) $a=-5$, $b=8$, $\alpha=3$

⇨ 계수가 모두 실수이므로 $\frac{2}{1-i}=1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 또, 나머지 한 근이 α이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha(1+i)(1-i)=6, 2\alpha=6$ $\therefore \alpha=3$

따라서 세 근이 $3, 1+i, 1-i$이므로

$-a=3+(1+i)+(1-i)$에서 $a=-5$

$b=3(1+i)+(1+i)(1-i)+3(1-i)$에서 $b=8$

59) $a=4, b=-2$

⇨ 계수가 모두 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+(1+i)+(1-i)=3$ $\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 $1, 1+i, 1-i$이므로

$a=1\cdot(1+i)+(1+i)(1-i)+1\cdot(1-i)$에서

$a=4$

$-b=1\cdot(1+i)(1-i)$에서

$b=-2$

60) $a=-4, b=4$

⇨ 계수가 모두 실수이므로 $1-i$가 근이면 $1+i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha(1-i)+(1-i)(1+i)+\alpha(1+i)=6$

$2\alpha+2=6$ $\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 $2, 1-i, 1+i$이므로

$-a=2+(1-i)+(1+i)$에서

$a=-4$

$b=2(1-i)(1+i)$에서

$b=4$

61) $a=-3, b=5$

⇨ 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$가 근이면 $1-\sqrt{2}i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3, 3\alpha=3$ $\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 $1, 1+\sqrt{2}i, 1-\sqrt{2}i$이므로

$-a=1+(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)$에서

$a=-3$

$b=1\cdot(1+\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+1\cdot(1-\sqrt{2}i)$ 에서

$b=5$

62) $a=5, b=3$

⇨ 계수가 모두 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면

$1-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라고 하면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=5$ $\therefore \alpha=3$

따라서 세 근이 $3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$이므로

$a=3(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+3(1-\sqrt{2})$에서
$a=5$
$-b=3(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$에서 $b=3$

63) $a=-5, b=4$
⇨ 계수가 모두 유리수이므로 $3+\sqrt{5}$가 근이면 $3-\sqrt{5}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha(3+\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})+\alpha(3-\sqrt{5})=-2$,
$6\alpha+4=-2 \quad \therefore \alpha=-1$
따라서 세 근이 $-1, 3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}$이므로
$-a=-1+(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})$에서 $a=-5$
$-b=-1\cdot(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$에서 $b=4$

64) $a=-3, b=0$
⇨ 계수가 모두 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$이 근이면 $1+\sqrt{3}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=-2$, $-2\alpha=-2 \quad \therefore \alpha=1$
따라서 세 근이 $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$이므로
$-a=1+(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})$에서 $a=-3$
$b=1\cdot(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})+1\cdot(1+\sqrt{3})$
에서 $b=0$

65) $a=-15, b=-25$
⇨ 계수가 모두 실수이므로 $2+i$가 근이면 $2-i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+(2+i)+(2-i)=-1 \quad \therefore \alpha=-5$
따라서 세 근이 $-5, 2+i, 2-i$이므로
$a=-5(2+i)+(2+i)(2-i)-5(2-i)$에서 $a=-15$
$b=-5(2+i)(2-i)$에서 $b=-25$

66) $a=1, b=-1$
⇨ 계수가 실수이고, 한 근이 $-i$이므로 다른 한 근은 i이다.
나머지 한 근을 α라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$(-i)+i+\alpha=1 \quad \therefore \alpha=1$
$(-i)\cdot i+(-i)\cdot 1+i\cdot 1=a \quad \therefore a=1$
$(-i)\cdot i\cdot 1=-b \quad \therefore b=-1$

67) $a=0, b=2$
⇨ 계수가 모두 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+(1+i)+(1-i)=1 \quad \therefore \alpha=-1$
따라서 세 근이 $-1, 1+i, 1-i$이므로
$a=-1\cdot(1+i)+(1+i)(1-i)-1\cdot(1-i)$에서 $a=0$
$-b=-1\cdot(1+i)(1-i)$에서 $b=2$

68) $a=10, b=-8$
⇨ 계수가 실수이고, 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.
나머지 한 근을 α라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$(1+i)+(1-i)+\alpha=6 \quad \therefore \alpha=4$
$(1+i)(1-i)+(1+i)\cdot 4+(1-i)\cdot 4=a \quad \therefore a=10$
$(1+i)(1-i)\cdot 4=-b \quad \therefore b=-8$

69) $a=-1, b=2$
⇨ 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{3}i$가 근이면 $1-\sqrt{3}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4 \quad \therefore \alpha=-1$
따라서 세 근이 $-1, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i$이므로
$-a=-1+(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)$에서 $a=-1$
$b=-1\cdot(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)-1\cdot(1-\sqrt{3}i)$
에서 $b=2$

70) $a=9, b=-5$
⇨ 계수가 실수이고, 한 근이 $2+i$이므로
다른 한 근은 $2-i$이다.
나머지 한 근을 α라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$(2+i)+(2-i)+\alpha=5 \quad \therefore \alpha=1$
$(2+i)(2-i)+(2+i)\cdot 1+(2-i)\cdot 1=a \quad \therefore a=9$
$(2+i)(2-i)\cdot 1=-b \quad \therefore b=-5$

71) $a=-3, b=1$
⇨ 세 근을 각각 $2-i, 2+i, \alpha$라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$(2-i)(2+i)\cdot\alpha=-5 \quad \therefore \alpha=-1$
$(2-i)+(2+i)+(-1)=-a \quad \therefore a=-3$
$(2-i)(2+i)+(2-i)(-1)+(2+i)(-1)=b \quad \therefore b=1$

72) $a=-4, b=9$
⇨ 세 근을 각각 $1-2i, 1+2i, \alpha$라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$(1-2i)(1+2i)\cdot\alpha=10 \quad \therefore \alpha=2$
$(1-2i)+(1+2i)+2=-a \quad \therefore a=-4$
$(1-2i)(1+2i)+2(1-2i)+2(1+2i)=b \quad \therefore b=9$