● 5회차

01 ③	02 ④	03 ④	04 ②	05 ①
06 ④	07 ④	08 ②	09 ②	10 ④
11 ③	12 ⑤	13 ②	14 ②	15 ①
16 ①	17 ①			

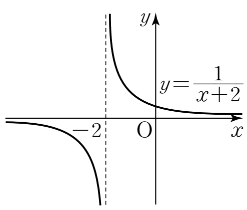
[서술형 1] 2
[서술형 2] -1
[서술형 3] (1) 0 (2) -9

01 $\lim_{x\to-1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to1+} f(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)=0+(-1)$

$=-1$

02 함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$

03 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$$=1$$

04 $$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\cdot\frac{f(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$$
$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$$

이때 $x-2=t$라 하면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^3-8}=\frac{1}{12}\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$$
$$=\frac{1}{12}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$
$$=\frac{1}{12}\cdot2$$
$$=\frac{1}{6}$$

05 $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\dfrac{1}{4}$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{3+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{a+3}$ …… ㉠

㉠을 $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}$에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a+3}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a+3})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+3})}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+3})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+3})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a+3}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{a+3}}$$

즉 $\dfrac{1}{2\sqrt{a+3}}=\dfrac{1}{4}$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{1+3}=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

> **Lecture** 극한값을 이용한 미정계수의 결정
>
> 미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때
>
> (1) (분모)$\to$ 0이고 극한값이 존재하면
> ⇨ (분자)$\to$ 0
>
> (2) (분자)$\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면
> ⇨ (분모)$\to$ 0

06 ㈎에서 함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 3인 이차함수이므로 $f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

(나)에서 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+ax+b}{x+1}=2$이고

$\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(3x^2+ax+b)=3-a+b=0$

$\therefore b=a-3$ ...... ㉠

㉠을 $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+ax+b}{x+1}$에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+ax+b}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+ax+a-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x-3+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(3x-3+a)$$
$$=-6+a$$

즉 $-6+a=2$이므로 $a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $b=8-3=5$

따라서 $f(x)=3x^2+8x+5$이므로

$f(-2)=12-16+5=1$

07 열린구간 $(-1, 3)$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

오답 피하기

열린구간 $(-1, 3)$에서 불연속인 점은 다음과 같다.

ㄴ. $x=0$에서 불연속

ㄷ. $x=0$, $x=2$에서 불연속

08 $x\neq-2$, $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-4}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$

$$\therefore f(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x-3)$$
$$=-5$$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-3)$$
$$=-1$$

$\therefore f(-2)+f(2)=-5+(-1)=-6$

Lecture 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

09 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(-2)f(-1)=-49\cdot(-15)>0$

② $f(-1)f(0)=-15\cdot1<0$이므로 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

③ $f(0)f(1)=1\cdot5>0$

④ $f(1)f(2)=5\cdot3>0$

⑤ $f(2)f(3)=3\cdot1>0$

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ②이다.

10 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{45-15}{2}=\frac{30}{2}=15$

이때 $f'(x)=4x+3$이므로 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=4a+3$

즉 $4a+3=15$이므로 $a=3$

11 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)-1\}=f(3)-1=0$ $\therefore f(3)=1$

이때 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

이므로 $f'(3)=2$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$=2f'(3)+f'(3)=3f'(3)$

$=3\cdot2=6$

12 $f'(x)=3x^2-4x+5$이므로

$f'(2)=12-8+5=9$

13 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=4$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)-5\}=f(3)-5=0$

$\therefore f(3)=5$

즉 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$이므로

$f'(3)=4$

또 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+5}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{g(x)+5\}=g(3)+5=0$

$\therefore g(3)=-5$

즉 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+5}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$이므로

$g'(3)=2$

이때 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$x=3$에서의 미분계수는

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=4\cdot(-5)+5\cdot2$

$=-10$

14 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(3)=2$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^3-27}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x^2+3x+9}$

$=\frac{1}{27}f'(3)$

$=\frac{1}{27}\cdot2$

$=\frac{2}{27}$

15 다항식 x^4-ax^2+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4-ax^2+b=(x-1)^2Q(x)+2x-1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+b=1$ $\quad\therefore a=b$ …… ㉡

㉠에서 $x^4-ax^2+b=(x^2-2x+1)Q(x)+2x-1$

이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3-2ax=(2x-2)Q(x)+(x^2-2x+1)Q'(x)+2$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4-2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

16 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$에서 $\lim_{x\to-1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}\{f(x)+1\}=f(-1)+1=0$

$\therefore f(-1)=-1$

이때

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x-1}$

$=-\frac{1}{2}f'(-1)$

이므로 $-\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f'(-1)=-1$

즉 구하는 접선의 방정식은 기울기가 -1이고 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$y-(-1)=-\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-x-2$

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로
$a+2b=-1+2\cdot(-2)=-5$

17 $f(x)=x^3-4x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3-4=-1$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-3=-\{x-(-1)\}$
$\therefore y=-x+2$
이 접선이 곡선 $y=x^2+ax+6$에 접하므로
$-x+2=x^2+ax+6$에서
$x^2+(a+1)x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(a+1)^2-4\cdot1\cdot4=0$
$a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$
$\therefore a=-5$ 또는 $a=3$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-5+3=-2$

[서술형 1] $f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면
$\lim_{x\to\infty} h(x)=5$, $f(x)=h(x)+2g(x)$
❶

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+2g(x)}{2f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6\{h(x)+2g(x)\}+2g(x)}{2\{h(x)+2g(x)\}+3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6h(x)+14g(x)}{2h(x)+7g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6\frac{h(x)}{g(x)}+14}{2\frac{h(x)}{g(x)}+7}=\frac{14}{7}=2$$
❷

채점 기준	배점
❶ $f(x)-2g(x)=h(x)$라 하고 주어진 조건을 변형할 수 있다.	2점
❷ $\lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+2g(x)}{2f(x)+3g(x)}$의 값을 구할 수 있다.	4점

[서술형 2] 함수 $y=f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로
❶

$$\lim_{x\to1-}(-x-1)(x^2+ax)=\lim_{x\to1+}(x+2)(x^2+ax)=f(1)g(1)$$
$-2(1+a)=3(1+a)$, $1+a=0$
$\therefore a=-1$
❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 조건을 말할 수 있다.	3점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] (1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)+0$
$\therefore f(0)=0$
❶

(2) $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$에 $y=h$를 대입하면
$f(x+h)=f(x)+f(h)+3xh$ ...... ㉠
이때 도함수 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h}\ (\because ㉠)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{3xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+3x\ (\because (1))=f'(0)+3x=3x+3$$
❷

$\therefore f'(-4)=-12+3=-9$
❸

채점 기준	배점
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	4점
❸ $f'(-4)$의 값을 구할 수 있다.	1점