단원 ISSUE

이 단원에서는 **원의 방정식과 원과 직선의 위치관계, 접선의 방정식을 묻는 문제**가 주로 출제됩니다.
앞에서 학습한 직선의 방정식과 마찬가지로 원의 방정식을 구하는 공식 역시 여러 가지가 있으므로 주어진 문제에 따라 올바른 방정식을 세워 문제를 해결할 수 있도록 반복적인 학습이 필요합니다.
원과 직선의 위치관계 및 접선의 방정식도 마찬가지로 문제에서 요구하는 바를 정확히 파악하여 식을 세워나가는 것이 중요합니다. 또한, 종종 복잡한 계산을 요구하는 문제가 출제되므로 반복적인 연습을 통해 실수를 최소화하도록 합니다.

평가문제

[중단원 연습 문제]

1. 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있고 y축에 접하는 두 원이 점 $(4,\ 7)$을 지날 때, 두 원의 반지름의 길이의 합을 구하면?

① 18　② 21　③ 22　④ 24　⑤ 30

[중단원 연습 문제]

2. 중심이 직선 $x+3y+8=0$ $(x>0, y<0)$ 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 할 때, 상수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$의 값을 구하면?

① 16　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 30

[중단원 연습 문제]

3. 원 $x^2+y^2-2(a+1)x+2ay+3a^2-2=0$의 넓이가 최대일 때, 이 원의 중심의 좌표를 구하면? (단, a는 상수이다.)

① $(2,\ -1)$　② $(2,\ -3)$　③ $(3,\ -1)$　④ $(3,\ -3)$　⑤ $(3,\ -5)$

[소단원 확인 문제]

4. 중심이 같은 두 원 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$, $x^2+y^2+bx+cy-27=0$의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 할 때, $r_2=2r_1$이다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하면?

① 12　② 18　③ 20　④ 24　⑤ 30

[소단원 확인 문제]

5. 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ -6)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심의 좌표가 (a,b)이고 넓이가 c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하면?

① 60π　② 50π　③ 100π　④ -50π　⑤ -100π

[대단원 종합 문제]

6. 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 x축에 접하며 점 $(3,2)$를 지나는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 길이의 합을 구하면?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[소단원 확인 문제]

7. 다음 <보기> 중 원이 되는 방정식의 개수는?

<보기>
ㄱ. $x^2+y^2+6x+3=0$
ㄴ. $x^2+y^2+4y+4=0$
ㄷ. $x^2+y^2+x+2y+2=0$
ㄹ. $x^2+y^2-4x-2y+6=0$
ㅁ. $x^2+y^2+2x-4y-5=0$

① 1개 ② 2개
③ 3개 ④ 4개
⑤ 5개

[소단원 확인 문제]

8. 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있고 두 점 $(0,\ -4)$, $(4,\ 0)$을 지나는 원의 반지름을 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{5}$ ④ 3
⑤ $\sqrt{10}$

[소단원 확인 문제]

9. 세 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$, $\mathrm{Q}(4,\ 5)$, $\mathrm{R}(0,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$의 외접원의 넓이를 구하면?

① 4π ② 5π
③ 6π ④ 7π
⑤ 8π

[대단원 종합 문제]

10. 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(7,\ 0)$에서 만나고, y축과 두 점 $(0,\ 1+2\sqrt{2})$, $(0,\ 1-2\sqrt{2})$에서 만나도록 상수 a, b, r의 값을 정할 때, $a+b+r^2$의 값을 구하면?

① 20 ② 21
③ 22 ④ 23
⑤ 24

[중단원 연습 문제]

11. 중심이 $(3,\ -1)$이고 점 $(5,\ 1)$을 지나는 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라 할 때, 상수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

[중단원 연습 문제]

12. 다음 중 원 $x^2+y^2-3x-2y+1=0$과 넓이가 같은 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=1$
② $x^2+y^2-6x+2y-6=0$
③ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$
④ $(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$
⑤ $(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{9}{4}$

[중단원 연습 문제]

13. 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $x-y+2=0$이 만나서 생기는 현의 길이가 2일 때, 원의 반지름의 길이 r의 값을 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$ ④ 2
⑤ $\sqrt{5}$

[소단원 확인 문제]

14. 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(5,\ 4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값을 구하면?

① 3 ② $\sqrt{10}$
③ $\sqrt{11}$ ④ $2\sqrt{3}$
⑤ $\sqrt{13}$

[소단원 확인 문제]

15. 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$과 직선 $3x+4y+5=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양의 정수 r의 최솟값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[중단원 연습 문제]

16. 원 $x^2+y^2=4$와 $x+y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나는 실수 n의 값의 범위가 $\alpha<n<\beta$일 때, 상수 α, β의 곱 $\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 1　② -4　③ 5　④ -8　⑤ 12

[중단원 연습 문제]

17. 다음 중 옳은 것은?

① 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=-2x+5$이다.

② 원 $x^2+y^2=2$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y=x+2$이다.

③ 기울기가 3이고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{5}$이다.

④ 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ -1)$에서의 접선의 방정식은 $3x+y=10$이다.

⑤ 점 $(2,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식은 $x\pm\sqrt{3}y=2$이다.

[중단원 연습 문제]

18. 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-4)^2+(y-1)^2=1$과 직선 $x-y+k=0$의 교점의 개수를 각각 a, b라 할 때, $a+b=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합을 구하면?

① $-3-3\sqrt{2}$　② $-3-\sqrt{2}$　③ -3　④ $-3+\sqrt{2}$　⑤ $-3+3\sqrt{2}$

[중단원 연습 문제]

19. 두 점 $(0,\ -3)$, $(4,\ 1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이 직선 $y=x+k$와 만나지 않을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<7$　② $k>7$　③ $k<-7$ 또는 $k>1$　④ $-7<k<1$　⑤ $k<7$ 또는 $k>-1$

[중단원 연습 문제]

20. 원 $x^2+y^2-6y+7=0$ 위의 임의의 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$에 대하여 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최솟값과 최댓값의 곱을 구하면?

① 20　② 26　③ 30　④ 42　⑤ 48

[중단원 연습 문제]

21. 직선 l이 $x^2+y^2=1$에 접하고, $(x+2)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 모두 구하면?

① $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{2\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{2\sqrt{2}}{2}$

④ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{2\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{2\sqrt{2}}{2}$

⑤ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

[소단원 확인 문제]

22. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 두 점 $(2,-1)$, (a,b)에서의 접선이 서로 수직일 때, $\frac{b}{a}$의 값을 구하면? (단, $a\neq 0$)

① $\frac{1}{2}$　② 1
③ $\frac{3}{2}$　④ 2
⑤ 4

[소단원 확인 문제]

23. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 두 점 $(-1,\ 2)$, $(a,\ b)$에서의 접선이 서로 평행할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+3b$의 값을 구하면?

① -5　② -3
③ -2　④ -1
⑤ 0

[대단원 종합 문제]

24. 두 원 $x^2+y^2+6x+2y+1=0$, $x^2+y^2-2x-3=0$의 교점을 모두 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① $(1,0)$　② $\left(-\frac{7}{17},\frac{6}{17}\right)$
③ $\left(-\frac{7}{17},-\frac{6}{17}\right)$　④ $\left(\frac{7}{17},\frac{6}{17}\right)$
⑤ $\left(-\frac{6}{17},-\frac{7}{17}\right)$

[대단원 종합 문제]

25. 원 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$의 넓이와 네 직선 $x=0$, $x=6$, $y=-1$, $y=-5$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 x절편을 구하면?

① -1　② $-\frac{1}{2}$
③ 0　④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

[대단원 종합 문제]

26. 두 원
$x^2+y^2+4x+6y+9=0$, $x^2+y^2-8x-10y+32=0$
위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 10　② 16
③ 20　④ 22
⑤ 25

[대단원 종합 문제]

27. 점 $\mathrm{P}(2,\ a)$에서 원 $x^2+y^2=8$에 그은 두 접선이 서로 직교할 때, 양수 a의 값을 구하면?

① 2　② $2\sqrt{2}$
③ $2\sqrt{3}$　④ 4
⑤ 5

[대단원 종합 문제]

28. 원 $x^2+(y+1)^2=25$와 점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선이 만나서 생기는 현의 길이의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① 10　② 14
③ 18　④ 22
⑤ 27

[소단원 확인 문제]

29. 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=9$에 접하고 기울기가 2인 두 직선의 y절편의 곱을 구하면?

① -10　② -9
③ -7　④ -6
⑤ -5

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ a-1)$이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다. 그러므로 구하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a+1)^2=a^2$이다.
이 원이 점 $(4,\ 7)$을 지나므로
$(4-a)^2+(7-a+1)^2=a^2$, $a^2-24a+80=0$
$(a-4)(a-20)=0$이고 $a=4$ 또는 $a=20$이다.
따라서 반지름의 길이는 4 또는 20이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은 24이다.

2) [정답] ①
[해설] $x>0$, $y<0$이므로 중심은 제4사분면에 있고 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 중심을 $(a,\ -a)$ $(a>0)$라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$이다.
그런데 중심 $(a,\ -a)$가 직선 $x+3y+8=0$ 위에 있으므로 $a-3a+8=0$이고 $a=4$이다.
이때 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+4)^2=16$, $x^2+y^2-8x+8y+16=0$
이다. 따라서 $A=-8$, $B=8$, $C=16$이므로 $A+B+C=16$이다.

3) [정답] ①
[해설] 주어진 원의 방정식을 변형하면
$\{x-(a+1)\}^2+(y+a)^2=-a^2+2a+3$이므로 반지름의 길이 $\sqrt{-a^2+2a+3}=\sqrt{-(a-1)^2+4}$가 최대일 때 원의 넓이가 최대이다. 따라서 $a=1$일 때, 원의 넓이가 최대이고, 이때 원의 중심의 좌표는 $(2,-1)$이다.

4) [정답] ④
[해설] $x^2+y^2-4x+2y+a=0$에서
$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$이므로 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이다.
중심이 $(2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 r_2인 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y+1)^2={r_2}^2$
즉, $x^2+y^2-4x+2y+5-{r_2}^2=0$이므로
$b=-4$, $c=2$, $-27=5-{r_2}^2$이다.
$-27=5-{r_2}^2$에서 ${r_2}^2=32$이고 $r_2=4\sqrt{2}$이다.
$r_2=2r_1=4\sqrt{2}$이므로 $r_1=2\sqrt{2}$이고
$5-a={r_1}^2=8$이므로 $a=-3$이다.
따라서 $abc=-3\cdot(-4)\cdot 2=24$이다.

5) [정답] ⑤
[해설] 점 A, B를 이은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 원의 중심이므로 $\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{2-6}{2}\right)=(2,\ -2)$에서 원의 중심은 $(2,\ -2)$이다.
$\therefore a=2$, $b=-2$
또, 점 A와 원의 중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같으므로 $r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이고 원의 넓이는 $c=25\pi$이다.
따라서 $abc=2\times(-2)\times 25\pi=-100\pi$이다.

6) [정답] ③
[해설] 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 원의 중심은 $(a,a+1)$라 할 때, x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a+1|$이다.
그리고 $(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$이 점 $(3,2)$를 지나므로 $(3-a)^2+(1-a)^2=(a+1)^2$,
$a^2-6a+9+a^2-2a+1=a^2+2a+1$,
$a^2-10a+9=0$, $(a-1)(a-9)=0$
$\therefore a=1,\ a=9$
따라서 두 원의 반지름의 길이는 2, 10이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은 12이다.

7) [정답] ②
[해설] ㄱ. $(x+3)^2+y^2=6$은 원이다.
ㄴ. $x^2+(y+2)^2=0$
ㄷ. $(x+\dfrac{1}{2})^2+(y+1)^2=-\dfrac{3}{4}$
ㄹ. $(x-2)^2+(y-1)^2=-1$
ㅁ. $(x+1)^2+(y-2)^2=10$은 원이다.
따라서 원의 방정식은 ㄱ, ㅁ의 2개이다.

8) [정답] ⑤
[해설] 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-2)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$이다. 이 원이 두 점 $(0,\ -4)$, $(4,\ 0)$을 지나므로
$a^2+(-a-2)^2=r^2$, $(4-a)^2+(-a+2)^2=r^2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $r^2=10$이다.
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

9) [정답] ②
[해설] 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하면 이 원이 세 점 $(1,\ 2)$, $(4,\ 5)$, $(0,\ 3)$을 지나므로
$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ 4a+5b+c=-41 \\ 3b+c=-9 \end{cases}$$
$\therefore a=-4$, $b=-8$, $c=15$
따라서 △PQR의 외접원의 방정식은
$x^2+y^2-4x-8y+15=0$, $(x-2)^2+(y-4)^2=5$이다. 따라서 외접원의 넓이는 5π이다.

10) [정답] ②
[해설] x축과 만나는 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이 원의 중심을 지나므로 $a=\dfrac{-1+7}{2}=3$이

다. 또, y축과 만나는 두 점을 이은 선분의 수직 이등분선이 원의 중심을 지나므로

$b=\dfrac{1+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}}{2}=1$이다.

이때 중심 $(3,\ 1)$과 점 $(7,\ 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$r^2=(7-3)^2+(0-1)^2=17$이고 $a+b+r^2=21$이다.

11) [정답] ③

[해설] 중심 $(3,\ -1)$과 원 위의 점 $(5,\ 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이다.

즉, 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+1)^2=8$이다.

이 원이 x축과 만나는 점의 좌표는 $y=0$일 때이므로 $(x-3)^2+1^2=8$, $(x-3)^2=7$

$x-3=\pm\sqrt{7}$, $x=3\pm\sqrt{7}$이다.

따라서 $\alpha=3+\sqrt{7}$, $\beta=3-\sqrt{7}$이므로

$\alpha+\beta=6$이다.

12) [정답] ⑤

[해설] $x^2+y^2-3x-2y+1=0$에서

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{4}$이다. 이때 주어진 원은 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{2}$이다. 따라서 반지름의 길이가 같으면 원의 넓이가 같으므로 주어진 원과 넓이가 같은 원은 ⑤이다.

13) [정답] ③

[해설] 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고 원과 직선의 두 교점을 A, B라고 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=1$, $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|\ 2\ |}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$이다.

직각삼각형 OAH에서

$r=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$이다.

14) [정답] ②

[해설] 원의 중심을 C라 하고, 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$라고 하면 사각형 $\mathrm{AT_1CT_2}$는 정사각형이다. 이때 $\overline{\mathrm{CA}}=2\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{CT_1}}:\overline{\mathrm{CA}}=1:\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CT_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{10}$이다.

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

15) [정답] ③

[해설] 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|3\cdot3+4\cdot2+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{22}{5}$이다. 원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>\dfrac{22}{5}$이다.

따라서 양의 정수 r의 최솟값은 5이다.

16) [정답] ④

[해설] $x+y=n$ 즉, $y=-x+n$을 $x^2+y^2=4$에 대입하면 $x^2+(-x+n)^2=4$, $2x^2-2nx+n^2-4=0$이다. 이때 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 이 이차방정식의 판별식 $\mathrm{D}>0$이어야 한다.

$\dfrac{\mathrm{D}}{4}=n^2-2(n^2-4)=8-n^2>0$

따라서 $-2\sqrt{2}<n<2\sqrt{2}$이고

$\alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=2\sqrt{2}$이므로 $\alpha\beta=-8$이다.

17) [정답] ⑤

[해설] ① 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x+5$이다.

② 원 $x^2+y^2=2$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y=x\pm2$이다.

③ 기울기가 3이고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{10}$이다.

④ 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ -1)$에서의 접선의 방정식은 $3x-y=10$이다.

⑤ 점 $(2,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식은 $x\pm\sqrt{3}y=2$이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

18) [정답] ②

[해설] (i) $a=1$, $b=2$일 때

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $x-y+k=0$이 접하므로 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$는 반지름 2와 같다.

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=2$, $|k|=2\sqrt{2}$, $k=\pm2\sqrt{2}$

원 $(x-4)^2+(y-1)^2=1$과 직선 $x-y+k=0$는 서로 다른 두 점에서 만나므로

원의 중심 $(4,1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리 $\dfrac{|4-1+k|}{\sqrt{2}}$는 반지름 1보다 작다.

$\dfrac{|3+k|}{\sqrt{2}}<1$, $|3+k|<\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}-3<k<\sqrt{2}-3$

따라서 $k=-2\sqrt{2}$이다.

(ii) $a=2$, $b=1$일 때

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $x-y+k=0$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 원의 중심 $(0,0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$는 반지름 2보다 작다.

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<2$, $|k|<2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

원 $(x-4)^2+(y-1)^2=1$과 직선 $x-y+k=0$는 서로 접하므로 원의 중심 $(4,1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리 $\dfrac{|4-1+k|}{\sqrt{2}}$는 반지름 1과 같다.

$\dfrac{|3+k|}{\sqrt{2}}=1$, $|3+k|=\sqrt{2}$

$k=\pm\sqrt{2}-3$

따라서 $k=\sqrt{2}-3$이다.

(i), (ii)에서 $k=-2\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}-3$이므로 k값의 합은 $-3-\sqrt{2}$이다.

19) [정답] ③

[해설] 두 점 $(0,-3)$, $(4,1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{2},\ \dfrac{-3+1}{2}\right)=(2,-1)$이고, 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{4^2+(1+3)^2}}{2}=2\sqrt{2}$이다.

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3+k|}{\sqrt{2}}$이다. 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면 $\dfrac{|3+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|3+k|>4$에서

$3+k<-4$ 또는 $3+k>4$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>1$

20) [정답] ⑤

[해설] $x^2+y^2-6y+7=0$에서 $x^2+(y-3)^2=2$

주어진 원은 중심의 좌표가 $\mathrm{C}(0,3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.

두 점 $\mathrm{A}(0,-1)$, $\mathrm{B}(4,3)$을 지나는 직선 AB의 방정식은 $y-(-1)=\dfrac{3-(-1)}{4-0}(x-0)$

$\therefore y=x-1$

따라서 원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이다.

(i) $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이가 최대일 때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 임의의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이다.

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=12$이다.

(ii) $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이가 최소일 때 원 위의 임의의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$이다.

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$이다.

(i), (ii)에서 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최솟값과 최댓값의 곱은 $12\times 4=48$이다.

21) [정답] ②

[해설] 직선 l이 원 $(x+2)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 $(x+2)^2+y^2=1$의 중심 $(-2,\ 0)$을 지난다. 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은 $y=m(x+2)$이고 $mx-y+2m=0$이다. 원 $x^2+y^2=1$와 직선 l이 접하려면 $\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|2m|=\sqrt{m^2+1}$

$3m^2=1\quad\therefore m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

22) [정답] ④

[해설] 점 $(2,-1)$에서의 접선의 방정식은 $2x-y=5$

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=5$

두 직선이 서로 수직이므로 $2a-b=0$이다.

따라서 $b=2a$이고 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{a}=2$이다.

23) [정답] ①

[해설] 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $-x+2y=5$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$이다.

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=5$, $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{5}{b}$이다.

두 직선이 서로 평행하므로

$\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{5}{2}\neq\dfrac{5}{b}$

$b=-2a$, $b\neq 2$이다. ⋯㉠

한편, 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로 $a^2+b^2=5$이다. ⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+4a^2=5$, $a^2=1$, $a=\pm 1$이다.

$b\neq 2$이므로 $a=1$, $b=-2\quad\therefore a+3b=-5$

24) [정답] ③

[해설] 두 원의 교점을 모두 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 두 원의 공통인 현을 지름으로 한다. 따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 두 원의 공통인 현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점의 좌표이다. 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+6x+2y+1-(x^2+y^2-2x-3)=0$

$4x+y+2=0$이다. ⋯㉠

$x^2+y^2+6x+2y+1=0$에서 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$

$x^2+y^2-2x-3=0$에서 $(x-1)^2+y^2=4$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-3,\ -1)$, $(1,\ 0)$이므로 두 원의 중심을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{1+3}(x+1)$, $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$이다. …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{7}{17}$, $y=-\frac{6}{17}$이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{7}{17},\ -\frac{6}{17}\right)$이다.

25) [정답] ④

[해설] $x^2+y^2+4x-6y+4=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=9$

네 직선 $x=0$, $x=6$, $y=-1$, $y=-5$로 둘러싸인 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{6}{2},\ \frac{-1-5}{2}\right)=(3,\ -3)$이다.

따라서 원의 넓이와 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 점 $(-2,\ 3)$, $(3,\ -3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y=-\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}$이고

x절편은 $\frac{1}{2}$이다.

26) [정답] ③

[해설] $x^2+y^2+4x+6y+9=0$에서

$(x+2)^2+(y+3)^2=4$

$x^2+y^2-8x-10y+32=0$에서

$(x-4)^2+(y-5)^2=9$

두 원의 중심을 각각 C, C$'$이라 하면

$C(-2,-3)$ $C'(4,5)$이므로

$\overline{CC'}=\sqrt{(4+2)^2+(5+3)^2}=10$이다.

선분 PQ의 길이의 최댓값은 $10+2+3=15$이고,

최솟값은 $10-2-3=5$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $15+5=20$이다.

27) [정답] ③

[해설] 점 $P(2,\ a)$를 지나고 원에 접하는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-a=m(x-2)$이고 $mx-y-2m+a=0$이다.

이 직선이 원 $x^2+y^2=8$에 접하므로

$\frac{|-2m+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{8}$, $|-2m+a|=\sqrt{8(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$4m^2-4am+a^2=8m^2+8$,

$4m^2+4am+8-a^2=0$이다.

이 이차방정식의 두 근은 두 접선의 기울기이고, 두 접선은 서로 직교하므로 기울기의 곱이 -1이어야 한다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8-a^2}{4}=-1$이고 $a=\pm 2\sqrt{3}$이다.

따라서 a는 양수이므로 $a=2\sqrt{3}$이다.

28) [정답] ③

[해설] 주어진 원과 점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 교점을 각각 P, Q라 하고, 원의 중심 $C(0,\ -1)$에서 점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PQ}=2\overline{PH}=2\sqrt{5^2-\overline{CH}^2}$이다.

(ⅰ) 현의 길이가 최소가 되려면 $\overline{CH}$의 길이가 최대일 때이다. 이때 $\overline{CH}$의 최대 길이는 3이므로 현의 길이 $\overline{PQ}$의 최솟값은

$\overline{PQ}=2\sqrt{5^2-3^2}=8$이다.

(ⅱ) 현의 길이가 최대인 것은 지름의 길이와 같은 경우이므로 현의 길이의 최댓값은 10이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 현의 길이의 최솟값과 최댓값의 합은 $8+10=18$이다.

29) [정답] ②

[해설] 접선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}$이다. 원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}=3$, $|k-6|=3\sqrt{5}$ $\quad\therefore k=6\pm 3\sqrt{5}$

따라서 구하는 y절편의 곱은

$(6+3\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})=-9$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574