



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-13

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

**01** / 함수의 증가와 감소**1.함수의 증가와 감소:** 함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수  $x_1, x_2$ 에 대하여(1)  $x_1 < x_2$ 일 때  $f(x_1) < f(x_2)$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다.(2)  $x_1 < x_2$ 일 때  $f(x_1) > f(x_2)$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.**2. 함수의 증가와 감소의 판정**함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든  $x$ 에 대하여(1)  $f'(x) > 0$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.(2)  $f'(x) < 0$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

■ 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

1.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

2.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

3.  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

4.  $f(x) = x\sqrt{x+1} \quad (x > -1)$

5.  $f(x) = x \ln x$

6.  $f(x) = x - \ln x$

7.  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

8.  $f(x) = e^x - x$

9.  $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x \quad (0 < x < 2\pi)$

10.  $f(x) = \sin x - \cos x \quad (0 < x < \pi)$

11.  $f(x) = \tan x - 2x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

## 02 / 함수의 극대와 극소

1. 함수의 극대와 극소: 함수  $f(x)$ 에서  $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여

(1) 함수  $f(x)$ 가 증가상태에서 감소상태로 변하면  $x=a$ 에서 극대라 하고,  $f(a)$ 를 극댓값이라 한다.

(2) 함수  $f(x)$ 는 감소상태에서 증가상태로 변하면  $x=a$ 에서 극소라 하고,  $f(a)$ 를 극솟값이라 한다.

(3) 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

2. 도함수의 극대와 극소 판정: 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(a)=0$ 일 때,  $x=a$ 의 좌우에서

(1)  $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대이다.

(2)  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극소이다.

▣ 다음 함수의 극값을 구하여라.

12.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

13.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

14.  $f(x) = x + \frac{4}{x}$

15.  $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

16.  $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

17.  $f(x) = xe^{2x}$

18.  $f(x) = x - e^x$

19.  $f(x) = \frac{e^x}{x} \quad (x > 0)$

20.  $f(x) = x \ln x$

21.  $f(x) = e^x \cos x$  (단,  $0 \leq x \leq 2\pi$ )

22.  $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

23.  $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

▣ 다음 물음에 답하여라.

24. 함수  $f(x) = 2\ln x + \ln(6-x)$ 의 극댓값을 구하여라.

25. 함수  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ 가  $x=\alpha$ 에서 극대이고  $x=\beta$ 에서 극소일 때,  $\alpha-2\beta$ 의 값을 구하여라.

26. 함수  $f(x) = (x^2-x)e^{2x}$ 의 극댓값과 극솟값의 곱을 구하여라.

27. 함수  $f(x) = e^{2x} + 2ke^x + 2x$ 의 극댓값과 극솟값의 합이  $-38$ 일 때, 실수  $k$ 의 값을 구하여라.

28. 함수  $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ 는  $x=a$ 에서 극댓값  $\frac{1}{4}$ 을 갖고,  $x=b$ 에서 극솟값  $k$ 를 갖는다. 이때, 세 상수  $a, b, k$ 에 대하여  $a+b-12k$ 의 값을 구하여라.

29. 함수  $f(x) = e^x + 9e^{-x}$ 이  $x=a$ 에서 극솟값  $b$ 를 가질 때,  $ab$ 의 값을 구하여라.

30. 함수  $f(x) = x^2e^{-x}$ 이  $x=a$ 에서 극댓값  $M$ 을 갖는다고 할 때,  $aM$ 의 값을 구하여라.

31. 함수  $f(x) = xe^{ax+b}$ 이  $x=-1$ 에서 극솟값  $-\frac{1}{e}$ 가 될 때, 상수  $a+b$ 의 값을 구하여라.

32. 함수  $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$ 는  $x=3$ 에서 극값  $-1$ 을 갖는다. 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+2b$ 의 값을 구하여라.

33. 함수  $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$ 가  $x=-1$ 에서 극댓값  $4$ 를 가질 때, 상수  $a, b$ 에 대하여  $2a+b$ 의 값을 구하여라.

34. 함수  $f(x) = \frac{ax^2+bx+3}{x+2}$ 가  $x=-1$ 에서 극댓값 2를 가질 때, 상수  $a+b$ 의 값을 구하여라.

35. 함수  $f(x) = \ln 2x + \frac{a}{x} - 3x$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때,  $a$ 의 값의 범위가  $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때,  $24(\beta - \alpha)$ 의 값을 구하여라.

36. 함수  $f(x) = e^x(x^2 - 2x + a)$ 의 극솟값을  $m$ , 극댓값을  $M$ 이라 하자.  $x=a$ 에서 극댓값  $M$ 을 가질 때,  $mM$ 의 값을 구하여라.

37. 함수  $f(x) = a \sin x + b \cos x$  ( $0 < x < \pi$ )는  $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값  $\sqrt{2}$ 를 가진다. 이때, 상수  $a, b$ 의 값을 구하여라.

38. 함수  $f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ 는  $x=1, x=-1$ 에서 극값을 갖는다. 이때 상수  $a, b$ 의 값을 구하여라.

39. 함수  $f(x) = ax^2 + bx + \ln x$  ( $x > 0$ )가  $x=1$ 에서 극솟값  $-4$ 를 가진다. 이때, 상수  $a, b$ 의 값을 구하여라.

## 04

## 이계도함수의 극대와 극소 판정

이계도함수를 갖는 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(a) = 0$ 일 때

(1)  $f''(a) < 0$ 이면  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대이다.

(2)  $f''(a) > 0$ 이면  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극소이다.

■ 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 극값을 구하여라.

40.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

41.  $f(x) = x + \frac{4}{x}$

42.  $f(x) = e^x + e^{-x}$

43.  $f(x) = xe^{-x}$

44.  $f(x) = x^2e^x$

45.  $f(x) = x^2 e^{-x}$

46.  $f(x) = x^2 \ln x$

47.  $f(x) = x + \cos 2x \quad (0 < x < \pi)$

48.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

49.  $f(x) = \ln x + x^2 - 3x$

50.  $f(x) = x \ln x \quad (x > 0)$

■ 이계도함수를 이용하여 다음 물음에 답하여라.

51. 열린구간  $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수  $f(x) = \frac{\cos x}{e^{2x}}$

가  $x=a$ 에서 극댓값을 가질 때,  $\cos a$ 의 값을 구하여라.

52. 함수  $f(x) = e^x + 9e^{-x} + a$ 의 극솟값이 2일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하여라.

53. 함수  $f(x) = x + 2\cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ 의 극댓값을  $p$ , 극솟값을  $q$ 라고 할 때,  $p-q$ 의 값을 구하여라.

54.  $f(x) = x - \sqrt{x-1}$ 의 극값을  $\frac{q}{p}$  ( $p, q$ 는 서로소)라고 할 때,  $|p+q|$ 의 값을 구하여라.

## 05 극값을 가질 조건

■ 다음 물음에 답하여라.

55. 함수  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (2\ln a)x^2 + x + 3$ 이 극값을 갖지 않을 때,  $a$ 의 값의 범위를 구하여라.

56. 함수  $f(x) = a \sin x + 2\cos x + 3x + 1$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 정수  $a$ 의 개수를 구하여라.

57. 함수  $f(x) = ax + \cos 2x$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 양수  $a$ 의 최솟값을 구하여라.

58. 함수  $f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + k)$ 이 극값을 가질 때, 상수  $k$ 의 값의 범위를 구하여라.

59. 함수  $f(x) = \frac{k}{x} - 4x$ 이 극값을 가질 때, 상수  $k$ 의 값의 범위를 구하여라

60. 함수  $f(x) = 2x^2 + \frac{k}{x} - 12\ln x$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 정수  $k$ 의 개수를 구하여라.

61. 함수  $f(x) = (x-a)e^{x^2}$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 상수  $a$ 의 값 중 가장 큰 정수를 구하여라.

62. 함수  $f(x) = \sin x + ax + 1$ 이 극값을 가질 때, 상수  $a$ 의 값의 범위를 구하여라.

63. 함수  $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - x$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수  $a$ 의 값의 범위를 구하여라.

64. 함수  $y = e^{2x} + 4ae^x + 8x$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수  $a$ 의 값의 범위를 구하여라.



## 정답 및 해설

- 1) 구간  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1]$ 에서 감소,  
구간  $[1, \infty)$ 에서 증가

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} \text{에서 } x \neq 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^3 - 1 = 0, (x-1)(x^2+x+1) = 0 \\ \therefore x = 1$$

$x$	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1]$ 에서 감소하고, 구간  $[1, \infty)$ 에서 증가한다.

- 2) 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 증가, 구간  $[0, \infty)$ 에서 감소

$x$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3} \text{에서 } f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 증가하고, 구간  $[0, \infty)$ 에서 감소한다.

- 3) 구간  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 에서 감소,

구간  $[-\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 증가

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+x+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2x+1 = 0 \therefore x = -\frac{1}{2}$$

$x$	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 에서 감소하고, 구간  $[-\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 증가한다.

- 4) 구간  $(-1, -\frac{2}{3}]$ 에서 감소,

구간  $[-\frac{2}{3}, \infty)$ 에서 증가

$$\Rightarrow f(x) = x\sqrt{x+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 3x+2 = 0 \therefore x = -\frac{2}{3}$$

$x$	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-1, -\frac{2}{3}]$ 에서 감소하고, 구간  $[-\frac{2}{3}, \infty)$ 에서 증가한다.

- 5) 구간  $(0, \frac{1}{e}]$ 에서 감소, 구간  $[\frac{1}{e}, \infty)$ 에서 증가

$$\Rightarrow f(x) = x \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고 } f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x + 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{e}$$

$x$	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(0, \frac{1}{e}]$ 에서 감소하고, 구간  $[\frac{1}{e}, \infty)$ 에서 증가한다.

- 6) 구간  $(0, 1]$ 에서 감소, 구간  $[1, \infty)$ 에서 증가

$$\Rightarrow f(x) = x - \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 1 - \frac{1}{x} = 0 \therefore x = 1$$

$x$	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(0, 1]$ 에서 감소하고, 구간  $[1, \infty)$ 에서 증가한다.

- 7) 구간  $(-\infty, -1]$ 에서 증가,  
구간  $[-1, 0)$ ,  $(0, \infty)$ 에서 감소

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{-x}}{x} \text{에서 } x \neq 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x+1 = 0 \therefore x = -1$$

$x$	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-		-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, -1]$ 에서 증가하고, 구간  $[-1, 0)$ ,  $(0, \infty)$ 에서 감소한다.

- 8) 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 감소, 구간  $[0, \infty)$ 에서 증가

$$\Rightarrow f(x) = e^x - x \text{에서 } f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x - 1 = 0 \therefore x = 0$$

$x$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 감소하고, 구간  $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

9) 구간  $(0, \frac{\pi}{6}]$ ,  $[\frac{5}{6}\pi, 2\pi)$ 에서 증가,

구간  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + \cos x \text{에서 } f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$x$	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(0, \frac{\pi}{6}]$ ,  $[\frac{5}{6}\pi, 2\pi)$ 에서 증가하고, 구간  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소한다.

10) 구간  $(0, \frac{3}{4}\pi]$ 에서 증가, 구간  $[\frac{3}{4}\pi, \pi)$ 에서 감소

$$\Rightarrow f(x) = \sin x - \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = -\sin x$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$x$	0	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	$\pi$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(0, \frac{3}{4}\pi]$ 에서 증가하고, 구간  $[\frac{3}{4}\pi, \pi)$ 에서 감소한다.

11) 구간  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ ,  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가,

구간  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 에서 감소

$$\Rightarrow f(x) = \tan x - 2x \text{에서 } f'(x) = \sec^2 x - 2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sec^2 x = 2, \sec x = \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} \quad (\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ ,  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

에서 증가하고, 구간  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 에서 감소한다.

12) 극댓값:  $\frac{1}{2}$ , 극솟값:  $-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2 = 1$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

따라서 함수  $f(x)$ 의 극댓값은  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 극솟값은  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ 이다.

13) 극솟값  $-\frac{1}{6}$ , 극댓값  $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{함수 } f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+3) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

$f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -3$ 에서 극솟값  $-\frac{1}{6}$ ,

$x = 1$ 에서 극댓값  $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

14) 극댓값: -4, 극솟값: 4

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{-4}{x^2} \text{이므로 그래프의 개형을 표로 나타}$$

내면 다음과 같다.

$x$	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$

따라서  $x = -2$ 일 때, 극댓값 -4,  $x = 2$ 일 때 극솟값 4이다.

15) 극댓값:  $\frac{3}{2}$ , 극솟값:  $-\frac{3}{2}$



$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} \text{ 이므로}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x=1 \text{ 또는 } x=-1$$

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$

$x=-1$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호는 음에서 양으로 변하므로 극솟값,  $x=1$ 의 좌우에서는 양에서 음으로 변하므로 극댓값을 갖는다.

$$\text{즉, 극댓값은 } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ 극솟값은 } f(-1) = -\frac{3}{2}$$

16) 극솟값:  $\sqrt{3}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+3} \text{ 에서 } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

따라서 함수  $f(x)$ 의 극솟값은  $f(0) = \sqrt{3}$ 이다.

$x$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

17) 극솟값:  $-\frac{1}{2e}$

$$\Rightarrow f(x) = xe^{2x} \text{ 에서}$$

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (2x+1)e^{2x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2x+1=0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

$x$	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 의 극솟값은  $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$ 이다.

18) 극댓값  $-1$

$$\Rightarrow \text{함수 } f(x) = x - e^x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 1 - e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극댓값  $-1$ 을 갖는다.

19) 극솟값:  $e$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

$x$	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 일 때 극소이고 극솟값은  $f(1) = e$

20) 극솟값:  $-\frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \text{함수 } f(x) = x \ln x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{1}{e}$$

$f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{1}{e}$ 에서 극솟값  $-\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

21) 극댓값:  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ , 극솟값:  $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = -e^x (\sin x - \cos x) \\ = -\sqrt{2} e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

$x$	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$	$\nearrow$	$e^{2\pi}$

따라서  $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ,  $x = \frac{5}{4}\pi$ 에서

극솟값  $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$ 을 갖는다.

22) 극댓값:  $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ , 극솟값:  $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + 2\cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

$x$	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗	$2\pi$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{2}{3}\pi$ 일 때 극대이고

극댓값은  $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ ,  $x = \frac{4}{3}\pi$ 일 때 극소

이고, 극솟값은  $f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

23) 극댓값:  $\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 극솟값:  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0$ ,  $\cos x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$  또는  $x = \frac{5}{3}\pi$

$f(x)$ 의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{3}\pi$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 극댓값은  $f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,

극솟값은  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

24)  $5\ln 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{-1}{6-x} = \frac{12-3x}{x(6-x)}$ 이므로

$x = 4$ 일 때 극댓값을 갖는다.

그러므로  $f(4) = 2\ln 4 + \ln 2 = 5\ln 2$ 이다.

25) 5

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2}$ 이고,

$f'(x) = 0$ 인  $x = -1$  또는  $x = 3$ 이다.

$x$	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-

따라서  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1$ 이므로  $\alpha - 2\beta = 5$ 이다.

26)  $-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f'(x) = e^{2x}(2x^2-1)$ 이므로  $f'(x) = 0$ 인

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  또는  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

극댓값과 극솟값은 각각

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{\sqrt{2}}$ ,

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\sqrt{2}}$

$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$

27) -6

$\Rightarrow f(x) = e^{2x} + 2ke^x + 2x$ ,  $f'(x) = 2e^{2x} + 2ke^x + 2$

$f'(x) = 0$ 이 되는 두 실근  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하면

$e^\alpha + e^\beta = -k$ 이므로  $-k > 0$ 이므로  $k < 0$ 이다.

$e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta} = 1$ 이고,  $\alpha + \beta = 0$

$f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(\alpha) + f(\beta) = e^{2\alpha} + 2ke^\alpha + 2\alpha + e^{2\beta} + 2ke^\beta + 2\beta$   
 $= (e^\alpha + e^\beta)^2 - 2e^\alpha \cdot e^\beta + 2k(e^\alpha + e^\beta)$   
 $+ 2\alpha + 2\beta$

$= (-k)^2 - 2 + 2k(-k) = -k^2 - 2$

$-k^2 - 2 = -38$ ,  $k^2 = 36$   $\therefore k = -6$  ( $\because k < 0$ )

28) 3

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ 에서  $f'(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = -2$  또는  $x = 2$

$x$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{3}\pi$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 극댓값  $\frac{1}{4}$ 을 갖고,

$x = -2$ 에서 극솟값  $-\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

$\therefore a = 2$ ,  $b = -2$ ,  $k = -\frac{1}{4}$

따라서 구하는 값은

$a + b - 12k = 2 + (-2) - 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 3$

29)  $6\ln 3$

$\Rightarrow f'(x) = e^x - 9e^{-x}$

$f'(x) = 0$ ,  $(e^x)^2 - 9 = 0$   $\therefore x = \ln 3$

따라서 극솟값은  $f(\ln 3) = e^{\ln 3} + 9e^{-\ln 3} = 6$ 이다.

$\therefore ab = 6\ln 3$

30)  $\frac{8}{e^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$

$f'(x) = 0$ 인  $x = 0$  또는  $x = 2$

$f(x)$ 는  $x = 2$ 일 때, 극댓값  $M = f(2) = \frac{4}{e^2}$ 을 가

지므로  $aM = 2 \times \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}$

31) 1

$\Rightarrow f(x) = xe^{ax+b}$ 이므로

$f'(x) = e^{ax+b} + axe^{ax+b} = (1+ax)e^{ax+b}$

이 때,  $x = -1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$\begin{aligned} f'(-1) &= (1-a)e^{-a+b} = 0 & \therefore a &= 1 \\ f(-1) &= -e^{-1+b} = -e^{-1} & \therefore b &= 0 \\ \therefore a+b &= 1 \end{aligned}$$

32) 13

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

이고, 함수  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 극값  $-1$ 을 가지므로

$$f(3) = \frac{9+3a+b}{2} = -1 \text{에서 } 3a+b = -11 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f'(3) = \frac{9-6-a-b}{4} = 0 \text{에서 } a+b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ ,  $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면  $a = -7$ ,  $b = 10$

따라서 구하는 값은

$$a+2b = (-7) + 2 \cdot 10 = 13$$

33) 9

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(-2+a)(-2) - (1-a+b)}{4} = 0$$

$$4-2a-1+a-b=0$$

$$-a-b=-3, \quad a+b=3$$

$$f(-1) = \frac{1-a+b}{-2} = 4$$

$$1-a+b=-8, \quad -a+b=-9$$

$$\therefore b=-3, \quad a=6$$

$$\therefore 2a+b = 12-3=9$$

34) -1

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2ax+b)(x+2) - (ax^2+bx+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(-1)=0, \quad f(-1)=2 \text{이므로}$$

$$(-2a+b) - (a-b+3) = 0, \quad a-b+3=2$$

$$-3a+2b-3=0, \quad a-b=-1$$

$$a=-1, \quad b=0 \quad \therefore a+b=-1$$

35) 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \left( \ln 2 + \ln x + \frac{a}{x} - 3x \right)' = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} - 3 \\ &= \frac{-3x^2+x-a}{x^2} \end{aligned}$$

이고 함수  $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식  $-3x^2+x-a=0$ 이  $x>0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식  $-3x^2+x-a=0$ 의 판별식을  $D$ 라

$$\text{고 하면 } D = 1-12a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{12}$$

(ii) 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{1}{3} > 0$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{3} > 0 \quad \therefore a > 0$$

(i), (ii)에서  $a$ 의 값의 범위는  $0 < a < \frac{1}{12}$ 이므로

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{12}$$

따라서 구하는 값은

$$24(\beta - \alpha) = 24\left(\frac{1}{12} - 0\right) = 2$$

36) -12

$$\Rightarrow f'(x) = e^x(x^2-2x+a) + e^x(2x-2) = e^x(x^2+a-2)$$

$x=a$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(a) = e^a(a^2+a-2) = 0, \quad a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

$$(i) \quad a=1 \text{일 때, } f'(x) = e^x(x^2-1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1$$

$f(x)$ 의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

극댓값  $f(a) = M = f(-1)$ 이지만,  $a \neq -1$ 이므로 성립하지 않는다.

$$(i) \quad a=-2 \text{일 때, } f'(x) = e^x(x^2-4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$f(x)$ 의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

극댓값  $f(a) = M = f(-2)$ 이고,  $a = -2$ 이므로 성립

따라서  $f(x) = e^x(x^2-2x-2)$ 이므로

$$M = f(-2) = 6e^{-2}, \quad m = f(2) = -2e^2$$

$$\therefore mM = -12$$

37)  $a=1, b=1$ 

$$\Rightarrow f'(x) = a \cos x - b \sin x$$

함수  $f(x)$ 가  $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값  $\sqrt{2}$ 를 가지므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{에서 } \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = \sqrt{2}$$

$$\therefore a+b=2 \cdots \textcircled{1}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{에서 } \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0$$

$$\therefore a-b=0 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  $a=1, b=1$

38)  $a=2, b=1$ 

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x}(2x+a-x^2-ax-b) \text{이므로}$$

$$f'(1) = \frac{1}{e}(2+a-1-a-b) = \frac{1}{e}(1-b) = 0 \text{이므로}$$

$$b=1$$

$$f'(-1) = e(-2+a-1+a-1) = e(2a-4) = 0 \text{이므로}$$

$$a=2$$

$$39) a=3, b=-7$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b + \frac{1}{x}$$

$x=1$ 에서 극솟값  $-4$ 를 가지므로

$$f(1) = -4, f'(1) = 0$$

$$f(1) = -4 \text{에서 } a+b+\ln 1 = -4$$

$$\therefore a+b = -4 \dots \textcircled{A}$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 2a+b+1 = 0$$

$$\therefore 2a+b = -1 \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a=3, b=-7$$

$$40) \text{극댓값: } -2, \text{극솟값: } 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x} \text{에서 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2 = 1$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

이때  $f''(-1) = -2 < 0, f''(1) = 2 > 0$ 이므로 함수

$f(x)$ 의 극댓값은  $f(-1) = -2$ , 극솟값은  $f(1) = 2$ 이다.

$$41) \text{극댓값 } -4, \text{극솟값 } 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$f''(x) = \frac{8}{x^3} \text{이므로}$$

$$(i) x = -2 \text{일 때, } f''(-2) = -1 < 0$$

$$(ii) x = 2 \text{일 때, } f''(2) = 1 > 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는

$x = -2$ 에서 극댓값  $f(-2) = -4$ 를 갖고

$x = 2$ 에서 극솟값  $f(2) = 4$ 를 갖는다.

$$42) \text{극솟값: } 2$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x + e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x}, f''(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = e^{-x} \therefore x = 0$$

이때  $f''(0) = 2 > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 극솟값은  $f(0) = 2$ 이다.

$$43) x=1 \text{일 때, 극댓값 } \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x), f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

따라서  $f'(1) = 0$ 이므로  $f(1) = \frac{1}{e}$ 로 극값을 가지며

$f''(1) < 0$ 이므로 극댓값을 갖는다.

$$44) \text{극댓값 } \frac{4}{e^2}, \text{극솟값 } 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x(x+2)e^x = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

$$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x \text{이므로}$$

$$(i) x = -2 \text{일 때, } f''(-2) = -2e^{-2} < 0$$

$$(ii) x = 0 \text{일 때, } f''(0) = 2 > 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는

$$x = -2 \text{에서 극댓값 } f(-2) = \frac{4}{e^2} \text{을 갖고}$$

$$x = 0 \text{에서 극솟값 } f(0) = 0 \text{을 갖는다.}$$

$$45) \text{극솟값: } 0, \text{극댓값: } 4e^{-2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x)$$

$$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

$$f'(x) = -x(x-2)e^{-x} = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$f''(0) = 2 > 0, f''(2) = -2e^{-2} < 0$$

따라서  $x = 0$ 일 때 극소이고 극솟값은  $f(0) = 0$

$x = 2$ 일 때 극대이고 극댓값은  $f(2) = 4e^{-2}$

$$46) \text{극솟값: } -\frac{1}{2e}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \times \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2 \ln x + 1 = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

이때  $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 극솟값

은  $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ 이다.

$$47) \text{극댓값: } \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{극솟값: } \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \cos 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = 1 - 2 \sin 2x, f''(x) = -4 \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < 2x < 2\pi)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{5}{12}\pi$$

$$\text{이때 } f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2\sqrt{3} < 0, f''\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0 \text{이}$$

므로 함수  $f(x)$ 의 극댓값은  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

극솟값은  $f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

48) 극댓값  $\frac{1}{e}$ 

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서 } x = e$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \text{이므로}$$

$$f''(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=e$ 에서 극댓값  $f(e) = \frac{1}{e}$ 을 갖는다.

49) 극댓값  $-\ln 2 - \frac{5}{4}$ , 극솟값  $-2$ 

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{1 + 2x^2 - 3x}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x} = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \text{이므로}$$

$$(i) x = \frac{1}{2} \text{일 때, } f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 = -2 < 0$$

$$(ii) x = 1 \text{일 때, } f''(1) = -\frac{1}{1^2} + 2 = 1 > 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는

$$x = \frac{1}{2} \text{에서 극댓값 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{5}{4} \text{를 갖고,}$$

$$x = 1 \text{에서 극솟값 } f(1) = -2 \text{를 갖는다.}$$

50) 극솟값:  $-\frac{1}{e}$ 

$$\Rightarrow f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{e}$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$$

따라서  $x = \frac{1}{e}$ 일 때, 극소이고 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

51)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cos x}{e^{2x}} \text{에서 } f'(x) = -\frac{\sin x + 2\cos x}{e^{2x}} \text{이고,}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{를 구하면 } e^{2x} \neq 0 \text{이고,}$$

$$\sin x + 2\cos x = 0, \sqrt{5} \sin(x + \alpha) = 0$$

$$\therefore x = n\pi - \alpha \left( \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

열린구간  $(0, 2\pi)$ 에서 만족하는

$$x = \pi - \alpha \text{ 또는 } x = 2\pi - \alpha$$

$$f''(x) = \frac{4\sin x + 3\cos x}{e^{2x}} \text{일 때,}$$

$$f''(\pi - \alpha) > 0, f''(2\pi - \alpha) < 0 \text{이므로}$$

$f(x)$ 는  $x = 2\pi - \alpha$ 에서 극댓값을 가진다.

$$\text{따라서 } \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{이다.}$$

52)  $-4$ 

$$\Rightarrow f'(x) = e^x - 9e^{-x}, f''(x) = e^x + 9e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = 9e^{-x}$$

$$\text{양변에 } e^x \text{을 곱하면 } e^{2x} = 9, \text{ 즉 } (e^x)^2 = 9$$

$$\text{즉, } e^x = 3 (\because e^x > 0) \text{이므로 } x = \ln 3$$

$$\text{그런데 } f''(\ln 3) = e^{\ln 3} + 9e^{-\ln 3} = 3 + 3 = 6 > 0 \text{이므로}$$

$x = \ln 3$ 에서 함수  $f(x)$ 는 극솟값을 가진다.

$$f(\ln 3) = 2 \text{이므로}$$

$$e^{\ln 3} + 9e^{-\ln 3} + a = 2, 3 + 3 + a = 2 \therefore a = -4$$

53)  $-\frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ 

$$\Rightarrow f(x) = x + 2\cos x \text{이므로 } f'(x) = 1 - 2\sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

$$f''(x) = -2\cos x \text{이므로}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} < 0$$

$$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2\cos \frac{5}{6}\pi = \sqrt{3} > 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 의 극댓값은  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , 극솟값은

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) \text{이다.}$$

$$\therefore p - q = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{5}{6}\pi + 2\cos \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right) - \left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

54) 7

$$\Rightarrow f(x) = x - \sqrt{x-1} \text{에서 } x-1 \geq 0 \text{이므로 } x \geq 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0, 2\sqrt{x-1} = 1, 4(x-1) = 1$$

$$\therefore x = \frac{5}{4}$$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}} \text{이므로}$$

로

$$x = \frac{5}{4} \text{일 때, } f''\left(\frac{5}{4}\right) = 2 > 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{5}{4}$ 에서

극솟값  $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{3}{4}$ 을 갖는다.

$$\therefore p=4, q=3$$

$$\therefore |p+q| = |4+3| = 7$$

$$55) e^{-\frac{1}{2}} \leq a \leq e^{\frac{1}{2}}$$

⇒ 함수  $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면  $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않아야 하므로  $f'(x) \geq 0$  또는  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$f'(x) = x^2 + (4\ln a)x + 1$ 이고 방정식  $f'(x) = 0$ 이 중근이나 허근을 가져야 하므로  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\ln a)^2 - 1 \leq 0$$

$$(2\ln a + 1)(2\ln a - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \ln a \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore e^{-\frac{1}{2}} \leq a \leq e^{\frac{1}{2}}$$

$$56) 5$$

⇒ 극값을 갖지 않으려면 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$  또는  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x) = a \cos x - 2 \sin x + 3$$

$$= \sqrt{a^2 + 4} \cos(x + \alpha) + 3$$

$\sqrt{a^2 + 4} > 0$ 이고,  $-1 < \cos(x + \alpha) < 1$ 이므로

$$-\sqrt{a^2 + 4} + 3 < f'(x) < \sqrt{a^2 + 4} + 3$$

따라서  $f'(x) \leq 0$ 은 성립하지 않고

$$f'(x) \geq 0 \text{ 이려면 } 3 - \sqrt{a^2 + 4} \geq 0$$

$$3 \geq \sqrt{a^2 + 4} \text{ 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 + 4 \leq 9, a^2 \leq 5 \quad \therefore -\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$$

따라서 만족하는 정수  $a$ 는  $-2, -1, 0, 1, 2$ 로 5개이다.

$$57) 2$$

⇒ 극값을 갖지 않는 함수가 되려면 양수  $a$ 에 대하여 모든 실수에서  $f'(x) \geq 0$ 이므로

$$\text{즉 } f'(x) = a - 2 \sin 2x \geq 0 \text{가 항상 성립해야 하므로 } a \geq 2$$

따라서 양수  $a$ 의 최솟값은 2이다.

$$58) k < \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 3x + k) + e^{-x}(2x - 3) \\ = e^{-x}(-x^2 + 5x - k - 3)$$

$e^{-x} > 0$ 이므로  $f'(x) = 0$ 이려면

$$x^2 - 5x + k + 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

함수  $f(x)$ 가 극값을 가지려면  $\textcircled{1}$ 의 실근이 존재하고, 그  $x$ 의 값의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다. 즉,  $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 실근을 가져야

하므로  $\textcircled{1}$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = (-5)^2 - 4(k+3) > 0 \quad \therefore k < \frac{13}{4}$$

$$59) k < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{k}{x^2} - 4 = -\frac{4x^2 + k}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 이려면 } 4x^2 + k = 0 \cdots \textcircled{1}$$

함수  $f(x)$ 가 극값을 가지려면  $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.  $\textcircled{1}$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = -16k > 0 \quad \therefore k < 0$$

$$60) 15$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x - \frac{k}{x^2} - \frac{12}{x} = \frac{4x^3 - 12x - k}{x^2}$$

$f(x)$ 가 극댓값과 극솟값이 모두 존재하려면 방정식  $4x^3 - 12x - k = 0$ 이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$g(x) = 4x^3 - 12x - k$ 라 놓으면 삼차함수  $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 부호가 서로 달라야 한다.

$$g'(x) = 12x^2 - 12 \text{ 이므로 } g'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = -1$$

$$g(1)g(-1) < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$(-8-k)(8-k) < 0, (k-8)(k+8) < 0$$

$$\therefore -8 < k < 8$$

따라서 만족하는 정수  $k$ 는  $-7, -6, \dots, 6, 7$ 로 15개이다.

$$61) 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x^2} + (x-a)2xe^{x^2} = e^{x^2}(2x^2 - 2ax + 1)$$

$f(x)$ 가 극값을 갖지 않기 위해서

$2x^2 - 2ax + 1 = 0$ 이 중근 혹은 허근을 가져야 한다.

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2 \leq 0, (a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) \leq 0$$

$$-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

따라서 가장 큰 정수는 1이다.

$$62) -1 \leq a \leq 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x + a = 0$$

즉  $\cos x = -a$ 를 만족하는  $a$ 의 범위는

$$-1 \leq \cos x = -a \leq 1 \text{ 이므로 } -1 \leq a \leq 1 \text{ 이다.}$$

$$63) 0 < a < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - a\frac{1}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + x - a}{x^2}$$

극댓값과 극솟값을 모두 가지기 위해서

$$-x^2 + x - a = 0$$

$$x^2 - x + a = 0 \text{ 이}$$

$x > 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$(i) D = 1 - 4a > 0 \quad \therefore \frac{1}{4} > a$$

(ii) (두 근의 합) $=1 > 0$

(iii) (두 근의 곱) $=a > 0$

(i)~(iii)에서  $0 < a < \frac{1}{4}$  이다.

64)  $a < -2$

$$\Rightarrow y' = 2e^{2x} + 4ae^x + 8$$

$e^x = t (t > 0)$ 로 치환하자.  $y' = 2t^2 + 4at + 8$

$2t^2 + 4at + 8 = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 주어진 함수가 극댓값과 극솟값을 모두 가진다.

$$t^2 + 2at + 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 4 > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

이때,  $a > 2$ 일 때  $t < 0$ 이 될 수 있으므로 조건에 맞지 않는다.

따라서 상수  $a$ 의 값의 범위는  $a < -2$ 이다.