단원 ISSUE

이 단원에서는 **도형의 평행이동과 대칭이동을 묻는 문제**가 자주 출제됩니다.
계산력도 중요하지만 이 단원은 주어진 그래프를 문제에서 요구하는 상황에 맞게 이동시키는 문제가 자주 출제되므로 평행이동과 대칭이동에 관한 정확한 개념 이해가 필수적으로 요구됩니다.
또한, 이를 응용하여 거리의 최솟값을 묻는 문제가 자주 출제되므로 관련 유형을 중점적으로 학습합니다.

평가문제

[중단원 마무리]

1. 원 $x^2+(y-2)^2=9$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동하였더니 직선 $4x-3y+3=0$과 접하였다. 이때 음수 a의 값을 구하면?

① -5 ② -4
③ -3 ④ -2
⑤ -1

[중단원 마무리]

2. 좌표평면에서 점 $(1,4)$를 점 $(-2,a)$로 옮기는 평행이동에 의하여, 원 $x^2+y^2+8x-6y+21=0$은 원 $x^2+y^2+bx-18y+c=0$으로 옮겨진다. 세 실수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하면?

① 128 ② 130
③ 145 ④ 150
⑤ 156

[중단원 마무리]

3. 원 $x^2+y^2=2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-2a$만큼 평행이동하면 직선 $3x+4y+5=0$에 의하여 원의 넓이가 이등분된다. 이때 상수 a의 값을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리]

4. 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 직선 $y=2x+3$과 y축 위에서 수직으로 만난다. 이때 $b-a$의 값을 구하면? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리]

5. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+4x-6y+8=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 원 $x^2+y^2=c$를 얻었다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리]

6. 점 $(a,-1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2-2x+by+b^2-15=0$의 중심과 일치하였다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 마무리]

7. 직선 $x-y+2=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8일 때, m의 값을 구하면? (단, $m>1$이다.)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[중단원 마무리]

8. 직선 $x+2y-3=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 기울기를 m, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 기울기를 n이라 할 때, $m+n$의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{2}$
② $-\frac{3}{2}$
③ -1
④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{2}$

[중단원 마무리]

9. 점 $P(a,\ b)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 Q, R, S라 할 때, 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 4이다. 이때 $|ab|$의 값을 구하면?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[중단원 마무리]

10. 직선 $y=\frac{1}{2}ax-1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선과 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 서로 수직일 때, 양수 a의 값을 구하면?

① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

[중단원 마무리]

11. 원 $x^2+y^2-2x+8y-8=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였더니 중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 5인 원이 되었다. 이때 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하면?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[대단원 마무리]

12. 직선 $y=-x$ 위의 점 P와 두 점 $A(4,\ 10)$, $B(2,\ 1)$에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 $P(a,\ b)$라 하고, 그 때의 최솟값을 c라 할 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11
② 12
③ 13
④ 14
⑤ 15

[중단원 마무리]

13. 직선 $y=2x$ 위의 점 $P(a,\ b)$ $(a>0)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2라 하자. 삼각형 PP_1P_2의 넓이가 8일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① $\sqrt{5}$
② $2\sqrt{3}$
③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$
⑤ $5\sqrt{3}$

[대단원 마무리]

14. 직선 $3x-4y+a=0$을 x축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+(y-2)^2=9$에 접할 때, 양수 a의 값을 구하면?

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

[중단원 마무리]

15. 두 점 $A(1,3)$, $B(4,-1)$과 직선 $y=-x$ 위의 움직이는 점 P에 대하여 $\triangle PAB$의 둘레의 길이의 최솟값을 구하면?

① 11
② 12
③ 13
④ 14
⑤ 15

[중단원 마무리]

16. 좌표평면 위의 점 $P(3,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_1, 점 P_1을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2, 점 P_2를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P_3, $\cdots$이라 하자. 이와 같이 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 과정을 계속하여 반복할 때, 점 P_{2014}의 좌표를 구하면?

① $(3,\ 2)$ ② $(-3,\ 2)$
③ $(-3,\ -2)$ ④ $(3,\ -2)$
⑤ $(2,\ 3)$

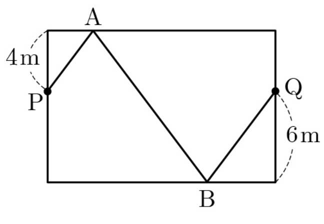
[대단원 마무리]

17. 원 $(x-p)^2+(y+q)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원이 x축과 y축에 동시에 접할 때, 두 양수 $(p,\ q)$에 대하여 $p+q$의 값을 구하면?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 마무리]

18. 가로의 길이가 15, 세로의 길이가 10인 직사각형의 두 변 위에 점 P, Q가 있다. 다른 두 변 위를 각각 움직이는 점 A, B에 대하여 $\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BQ}$의 최솟값을 구하면?



① 5 ② 10
③ 12 ④ 16
⑤ 25

[중단원 마무리]

19. 직선 $2x-y+k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후에 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, 상수 k의 값을 구하면?

① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

[중단원 마무리]

20. 원 $x^2+y^2+2x-3=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원이 x축에 의하여 잘린 현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$
③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$
⑤ $5\sqrt{2}$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ③

[해설] 원 $x^2+(y-2)^2=9$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$이다.
이 원이 직선 $4x-3y+3=0$과 접하므로 원의 중심 $(a,\ 2)$에서 직선까지의 거리 d와 원의 반지름의 길이는 같다.
$d=\dfrac{|4a-6+3|}{\sqrt{16+9}}=3$
$|4a-3|=15,\ 4a-3=\pm15$
$a=\dfrac{9}{2}$ 또는 $a=-3$이다.
따라서 음수 a의 값은 -3이다.

2) [정답] ④

[해설] 점 $(1,4)$를 점 $(-2,a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 좌표평면 위의 점은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $a-4$만큼 옮겨진다.
$x^2+y^2+8x-6y+21=0$에서
$(x+4)^2+(y-3)^2=4$ …㉠
$x^2+y^2+bx-18y+c=0$에서
$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+(y-9)^2=81-c+\dfrac{b^2}{4}$ …㉡
㉠의 원의 중심 $(-4,3)$이 평행이동에 의하여 ㉡의 원의 중심 $\left(-\dfrac{b}{2},9\right)$로 옮겨지므로 $a=10$, $b=14$이다.
평행이동을 하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $4=81-c+\dfrac{196}{4}$에서 $c=126$이다.
따라서 $a+b+c=150$이다.

3) [정답] ①

[해설] 원 $x^2+y^2=2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-2a$만큼 평행이동하면
$(x-a)^2+(y+2a)^2=2$ …㉠
직선 $3x+4y+5=0$이 원 ㉠의 넓이를 이등분되므로 이 직선은 원의 중심 $(a,-2a)$를 지난다.
따라서 $3a-8a+5=0$이므로 $a=1$이다.

4) [정답] ②

[해설] $y=2x+3$과 y축 위에서 수직으로 만나는 직선은 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$, y절편이 3인 직선이므로
$y=-\dfrac{1}{2}x+3$이다.
이때 $y=a(x+1)+b+2=-\dfrac{1}{2}x+3$이므로
$a=-\dfrac{1}{2}$, $a+b+2=3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$이다.
따라서 $b-a=2$이다.

5) [정답] ④

[해설] $x^2+y^2+4x-6y+8=0$을 변형하면
$(x+2)^2+(y-3)^2=5$
이때 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=5$
이것이 $x^2+y^2=c$와 일치하므로
$a=2,\ b=-3,\ c=5$이고 $a+b+c=4$이다.

6) [정답] ③

[해설] 점 $(a,-1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점은 $(a+2,-2)$
$x^2+y^2-2x+by+b^2-15=0$ 에서
$(x-1)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=16-\dfrac{3b^2}{4}$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $\left(1,-\dfrac{b}{2}\right)$ 이다.
따라서 $a+2=1,\ -2=-\dfrac{b}{2}$ 이므로
$a=-1,\ b=4$ 이고 $a+b=3$ 이다.

7) [정답] ⑤

[해설] 직선 $x-y+2=0$을 평행이동한 직선의 방정식은 $(x-m)-(y+1)+2=0$이고 $y=x+1-m$이다. 직선 $y=x+1-m$의 x절편은 $m-1$, y절편은 $1-m$이고 $m>1$이므로 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\dfrac{1}{2}(m-1)^2=8,\ (m-1)^2=16$
$m-1=\pm4$이다.
따라서 $m>1$이므로 $m=5$이다.

8) [정답] ②

[해설] 직선 $x+2y-3=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$이므로 $m=\dfrac{1}{2}$이다. 직선 $x+2y-3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=-2x+3$이므로 $n=-2$이다. 따라서 $m+n=-\dfrac{3}{2}$이다.

9) [정답] ①

[해설] $Q(a,\ -b)$, $R(-a,\ b)$, $S(-a,\ -b)$이고, $\square PQRS=4$이므로 $2|a|\cdot2|b|=4$이고 $|ab|=1$이다.

10) [정답] ①

[해설] 직선 $y=\dfrac{1}{2}ax-1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}ax-1$이다. …㉠
직선 $y=\dfrac{1}{2}ax-1$을 원점에 대하여 대칭이동한

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}ax+1$이다. …㉡

이때, 두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$-\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a=-1$, $a^2=4$이고 $a>0$이므로 $a=2$ 이다.

11) [정답] ②

[해설] 원 $x^2+y^2-2x+8y-8=0$에서

$(x-1)^2+(y+4)^2=25$

이 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $(x-3)^2+(y+5)^2=25$,

이 원을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $(x-5)^2+(y+3)^2=25$이다.

이 원은 중심이 $(5,\ -3)$이고, 반지름의 길이가 5이므로 $a=5$, $b=-3$이다.

따라서 $a+b=5+(-3)=2$이다.

12) [정답] ③

[해설] 점 P가 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 점 $B(2,\ 1)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $B'(-1,\ -2)$이고 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\overline{AP}+\overline{B'P}$의 값이 최소일 때는 점 P가 $\overline{AB'}$ 위의 점일 때이므로 $\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같으므로 $c=\overline{AB'}=\sqrt{(4+1)^2+(10+2)^2}=13$이다.

또 점 $P(a,\ b)$는 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 대입하면 $b=-a$이고 $a+b=0$이다.

따라서 $a+b+c=13$이다.

13) [정답] ③

[해설] 점 $P(a,\ b)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 $(a,-b)$, $(-a,b)$이다. $\triangle PP_1P_2=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2ab$

이때 $\triangle PP_1P_2$의 넓이는 8이므로

$2ab=8$이고 $ab=4$이다. …㉠

이때 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 $b=2a$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2=2$이고 $a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$이다.

$a=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $b=2\sqrt{2}$

따라서 $a+b=3\sqrt{2}$이다.

14) [정답] ⑤

[해설] 직선 $3x-4y+a=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $3x+4y+a=0$이다.

이 직선이 원 $x^2+(y-2)^2=9$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다.

$\frac{|8+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$에서 $|8+a|=15$, $8+a=\pm 15$이다.

따라서 $a=7$이다.

15) [정답] ②

[해설] 점 $B(4,-1)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은 $B'(1,-4)$이다.

이때, $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 세 점 A,P,B'이 일직선 위에 있을 때 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값이 최소가 된다.

이때 $\triangle PAB$의 둘레의 길이도 최소가 되므로

$\overline{AB'}=\sqrt{(1-1)^2+(-4-3)^2}=7$

$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25}=5$

따라서 $\triangle PAB$의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{AB'}+\overline{AB}=7+5=12$이다.

16) [정답] ②

[해설] 점 $P(3,2)$를 y축에 대하여 대칭이동하면 $P_1(-3,2)$

점 $P_1(-3,2)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $P_2(-3,-2)$

점 $P_2(-3,-2)$를 원점에 대하여 대칭이동하면 $P_3(3,2)$

즉, 점 P를 y축, x축, 원점에 대하여 이 순서로 대칭이동하면 자기 자신으로 돌아온다.

따라서 $2014=3\cdot 671+1$이므로 대칭이동하는 과정을 2013번 반복하면 이동한 후의 점의 좌표는 $(3,2)$이고, 2014번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-3,2)$이다.

17) [정답] ③

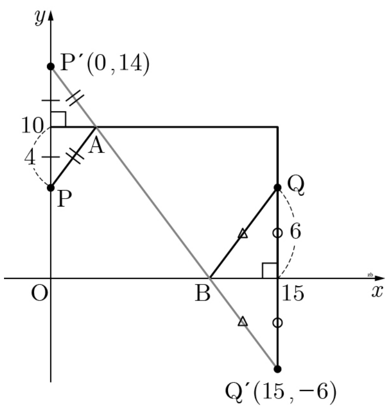
[해설] 원 $(x-p)^2+(y+q)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-p)^2+(y-q)^2=4$이다.

이 원을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-p)^2+(y-1-q)^2=4$이다. 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 $|p|=|1+q|=2$이고 $p>0$, $q>0$이므로 $p=2$, $q=1$이다.

따라서 $p+q=3$이다.

18) [정답] ⑤

[해설] 점 B와 점 P가 있는 변을 각각 x축, y축으로 하여 직사각형을 좌표 평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 점 P를 점 A가 있는 변에 대하여 대칭이동한 점을 P', 점 Q를 점 B가 있는 변에 대하여 대칭이동한 점을 Q'이라 하면 $\overline{P'Q'}$의 길이가 구하는 최솟값이다.

$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\sqrt{15^2+(-6-14)^2}=25$

따라서 최솟값은 25이다.

19) [정답] ②

[해설] 직선 $2x-y+k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x-2y-k=0$이다.

이 직선을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $x-2y-k-1=0$이다. …㉠

직선 ㉠이 점$(-1,\ 0)$을 지나므로

$-1-k-1=0$이고 $k=-2$이다.

20) [정답] ②

[해설] $x^2+y^2+2x-3=0$에서 $(x+1)^2+y^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동하면

$(x-1)^2+y^2=4$

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면

$x^2+(y+1)^2=4$ …㉠

원 ㉠이 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 점 A, B의 x좌표는 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$x^2+1=4$, $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}$

$A(-\sqrt{3},\ 0)$, $B(\sqrt{3},\ 0)$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574