01 세 직선의 위치관계

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.
(1) 세 직선이 모두 평행할 때
⇨ 세 직선의 기울기가 모두 같다.
⇨ 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나눈다.
(2) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
⇨ 두 직선의 기울기는 같고, 다른 한 직선의 기울기는 다르다.
⇨ 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나눈다.
(3) 세 직선이 한 점에서 만날 때
⇨ 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지난다.
⇨ 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나눈다.

◪ **다음 세 직선 l_1, l_2, l_3에 대하여 l_1과 l_2가 서로 수직이고 l_1과 l_3이 서로 평행할 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.**

1. $l_1 : 2x+y+1=0$, $l_2 : x+ay-2=0$, $l_3 : bx+(a+1)y-4=0$

2. l_1: $ax+y+3=0$, l_2: $2x+by-1=0$
l_3: $(b+3)x-y+2=0$

3. $l_1 : x-3y+2=0$, $l_2 : x+ay=0$,
$l_3 : ax+by-5=0$

4. $l_1 : 2x-y+1=0$, $l_2 : 2x+ay+1=0$,
$l_3 : ax+by+1=0$

◪ **다음 세 직선 l_1, l_2, l_3에 대하여 l_1과 l_2가 서로 수직이고 l_1과 l_3이 서로 평행할 때, 상수 a^2+b^2의 값을 구하여라.**

5. l_1: $x-ay+3=0$, l_2: $4x+by+7=0$
l_3: $2x-2(b-3)y+1=0$

6. $l_1 : ax-y+2=0$, $l_2 : bx-3y-4=0$,
$l_3 : (4-b)x-y+3=0$

7. $l_1 : x+ay+1=0$, $l_2 : 3x+by+1=0$,
$l_3 : x+(2-b)y-1=0$

8. l_1: $y=ax+1$, l_2: $bx+3y+8=0$
l_3: $y=(4-b)x-1$

9. $l_1 : x+ay+1=0$, $l_2 : 2x-by+1=0$,
$l_3 : x-(b-3)y-1=0$

◪ 다음 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

10. $y=-x+6,\ y=3x-2,\ y=kx$

11. $y=-x, y=kx+2, y=x-2$

12. $x-y+1=0,\ 2x+y-4=0,\ kx+y-5=0$

13. $y-x=0,\ x+y-2=0,\ 5x-ky-15=0$

14. $x-y=0,\ x+y-2=0,\ 3x-ky-3=0$

15. $x-y-1=0,\ 3x+y-7=0,\ kx+2y+1=0$

16. $x-y+2=0,\ 3x+y+1=0,\ kx-y+3=0$

17. $x-y+1=0,\ 2x-y-1=0,\ kx-y-11=0$

18. $x+2y=0, x-y+3=0, kx+y+k+1=0$

19. $x+y-3=0,\ x-2y+3=0,\ 2x-ky+1=0$

◪ 다음 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하여라.

20. $4x+y+6=0,\ x+y-3=0,\ ax+y+1=0$

21. $x+y=0,\ x-y-2=0,\ 5x+ay-15=0$

22. $2x+y+1=0,\ x-2y+3=0,\ ax-y-3=0$

23. $2x+y+3=0,\ 2x-y-7=0,\ ax-3y-5=0$

24. $x-2y+5=0\ , x+y-4=0\ , x-ay+8=0$

02 두 직선의 교점을 지나는 방정식

(1) 방정식 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선이다.

(2) 한 점에서 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

⇨ $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$(단, k는 실수)

◪ **다음 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P의 좌표를 구하여라.**

25. $(x+y+2)+k(3x+y-4)=0$

26. $(4x+5y+1)+k(2x+3y-1)=0$

27. $x-y-1+k(x+2y-4)=0$

28. $(2k+1)x+(-k+1)y-2k-1=0$

29. $2(k+2)x-(k+1)y+5k+3=0$

30. $(2k+3)x+(k+2)y+2k-3=0$

31. $(k-3)x+(3k+1)y+5k+5=0$

32. $(3k+1)x-(k-1)y+8=0$

33. $(k-1)x+(2k-1)y+k-3=0$

34. $x+2y+4+k(3x-y-9)=0$

35. $(k+1)x+(k-2)y-3=0$

36. $kx+y+k-1=0$

37. $kx+y+k+1=0$

38. $(k-1)x+y=3k+3$

39. $(k+1)x-(2k-1)y+k-1=0$

◪ 다음 두 직선의 교점과 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

40. $2x-3y-1=0, x+y-3=0$, $\mathrm{P}(1,\ 1)$

41. $x+y+4=0, 2x-y-2=0$, $\mathrm{P}(0,\ 0)$

42. $2x+y-4=0, 2x-3y+4=0$, $\mathrm{P}(4,\ -1)$

43. $x+y-1=0$, $3x+2y-6=0$, $\mathrm{P}(1,\ 1)$

44. $2x+y-1=0$, $x+2y-2=0$, $\mathrm{P}(1,2)$

45. $x+y+1=0$, $x+3y+5=0$, $\mathrm{P}(4,\ 1)$

46. $3x+2y-6=0, 2x-y=3$, $\mathrm{P}(0,\ 1)$

47. $2x+y+1=0$, $x-2y+2=0$ $\mathrm{P}(1,\ 1)$

48. $x+y-3=0, 2x-3y-1=0$, $\mathrm{P}(3,\ 3)$

49. $x+2y+5=0$, $-2x+y+3=0$, $\mathrm{P}(0,-2)$

50. $3x-2y+3=0$, $x-3y-3=0$, $\mathrm{P}(0,\ 0)$

51. $2x-y-1=0, x+3y-6=0$, $\mathrm{P}(2,\ 2)$

52. $x+2y-5=0$, $2x-y-5=0$, $\mathrm{P}(1,\ -5)$

53. $2x-y+6=0$, $2x+y=0$, $\mathrm{P}(0,\ 2)$

54. $x-2y-1=0$, $x+3y+4=0$, $\mathrm{P}(2,5)$

55. $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$, $\mathrm{P}(2,-1)$

◪ 다음 두 직선 l_1, l_2의 교점을 지나고 직선 m에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

56. $l_1 : 3x+2y-1=0$, $l_2 : x+y-1=0$,
$m : x-2y+4=0$

57. l_1: $2x-y-1=0$, $l_2 : x-2y+1=0$
m: $x-2y+1=0$

58. $l_1 : x-y+4=0$, $l_2 : 2x+y-7=0$
$m : x-3y+1=0$

59. $l_1 : -x+y-5=0$, $l_2 : x+2y-1=0$
$m : 3x+y+2=0$

60. $l_1 : x-2y+2=0$, $l_2 : 2x+y-6=0$
$m : 4x-3y=1$

◪ 다음 두 직선 l_1, l_2의 교점을 지나고 직선 m에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

61. $l_1 : x+y+2=0$, $l_2 : x+2y-3=0$,
$m : 2x+3y-2=0$

62. $l_1 : 3x+y+1=0$, $l_2 : x-4y-2=0$,
$m : x-2y+5=0$

63. $l_1 : x-y-1=0$, $l_2 : x-2y+1=0$
$m : 3x+y-1=0$

64. $l_1 : x+y+1=0$, $l_2 : 2x-y-1=0$
$m : 4x+2y+1=0$

정답 및 해설

1) $a=-2,\ b=-2$

⇨ l_1과 l_2가 서로 수직이므로

$2\cdot1+1\cdot a=0 \quad \therefore a=-2$

l_1과 l_3가 서로 평행하므로

$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a+1}\neq\dfrac{1}{-4}$

$b=2a+2$에 $a=-2$를 대입하면 $b=-2$

2) $a=3, b=-6$

⇨ 직선 $ax+y+3=0$이 직선 $2x+by-1=0$과 수직이므로 $a\cdot2+1\cdot b=0 \ \therefore 2a+b=0 \cdots$ ㉠

직선 $ax+y+3=0$이 직선 $(b+3)x-y+2=0$과 평행하므로 $\dfrac{a}{b+3}=\dfrac{1}{-1}\neq\dfrac{3}{2} \quad \therefore a+b=-3 \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$ax+y+3=0 \qquad \therefore a=3, b=-6$

3) $a=\dfrac{1}{3}, b=-1$

⇨ l_1과 l_2가 서로 수직이므로

$1\cdot1+(-3)\cdot a=0 \quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$

l_1과 l_3가 서로 평행하므로

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{-3}{b}\neq\dfrac{2}{-5}$

$b=-3a$에 $a=\dfrac{1}{3}$를 대입하면 $b=-1$

4) $a=4, b=-2$

⇨ l_1과 l_2가 서로 수직이므로

$2\cdot2+(-1)\cdot a=0 \quad \therefore a=4$

또, l_1과 l_3이 서로 평행하므로

$\dfrac{2}{a}=\dfrac{-1}{b}\neq\dfrac{1}{1}$

$2b=-a$에 $a=4$를 대입하면 $b=-2$

5) 17

⇨ 직선 $x-ay+3=0$이 직선 $4x+by+7=0$과 수직이므로 $1\cdot4+(-a)\cdot b=0 \quad \therefore ab=4$

직선 $x-ay+3=0$이 직선 $2x-2(b-3)y+1=0$과 평행하므로 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-a}{-2(b-3)}\neq\dfrac{3}{1}$

$-2b+6=-2a \quad \therefore a-b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=(-3)^2+2\cdot4=17$

6) 10

⇨ 직선 $l_1: ax-y+2=0$과 직선 $l_2: bx-3y-4=0$이 수직이므로

$a\cdot b+(-1)\cdot(-3)=0 \quad \therefore ab=-3 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또, 직선 $l_2: bx-3y-4=0$과 직선 $l_3: (4-b)x-y+3=0$이 평행하므로

$\dfrac{b}{4-b}=\dfrac{-3}{-1}\neq\dfrac{-4}{3}$

$-b=-3(4-b) \qquad \therefore b=3$

이를 ㉠에 대입하면 $a=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

7) 10

8) 10

⇨ 직선 $y=ax+1$, 즉 $ax-y+1=0$이 직선 $bx+3y+8=0$과 수직이므로

$ab+(-1)\cdot3=0 \quad \therefore ab=3$

또, 직선 $y=ax+1$이 직선 $y=(4-b)x-1$과 평행하므로

$a=4-b \quad \therefore a+b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=4^2-2\cdot3=10$

9) 5

⇨ l_1, l_2가 수직이므로 $2-ab=0$, $ab=2$

l_1, l_3는 평행하므로 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{-b+3}{a}\neq\dfrac{-1}{1}$

$a=-b+3$, $a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-4=5$

10) 4

11) -3

⇨ 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $y=kx+2$가 $y=-x$ 또는 $y=x-2$와 평행할 때 $k=-1$ 또는 $k=1$

(ⅱ) $y=kx+2$가 $y=-x$와 $y=x-2$의 교점을 지날 때

$y=-x, y=x-2$를 연립하여 풀면

$-x=x-2$, $-2x=-2$

$\therefore x=1, y=-1$

즉, 직선 $y=kx+2$가 두 직선 $y=-x$와 $y=x-2$의 교점 $(1, -1)$을 지나려면 $-1=k+2 \ \therefore k=-3$

(ⅰ),(ⅱ)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+1+(-3)=-3$

12) 4

⇨ (i)두 직선이 평행 할 때

두 직선 $x-y+1=0$, $kx+y-5=0$이 평행할 때

$\dfrac{k}{1}=\dfrac{1}{-1}\neq\dfrac{-5}{1} \quad \therefore k=-1$

두 직선 $2x+y-4=0$, $kx+y-5=0$이 평행할 때

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-5}{-4} \quad \therefore k=2$

(ii)세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $x-y+1=0$, $2x+y-4=0$의 교점 $(1,\ 2)$가 직선 $kx+y-5=0$위의 점이어야 하므로

$k+2-5=0$ $\therefore k=3$
$\therefore k$의 값의 합은 $(-1)+2+3=4$

13) -10
⇨ $-x+y=0$ …… ㉠
$x+y-2=0$ …… ㉡
$5x-ky-15=0$ …… ㉢
이라 하면 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.
(ⅰ) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우
$\frac{1}{5}=\frac{1}{-k}\neq\frac{-2}{-15}$ $\therefore k=-5$
(ⅱ) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우
$\frac{-1}{5}=\frac{1}{-k}\neq\frac{0}{-15}$ $\therefore k=5$
(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$이므로 직선 ㉢이 점 $(1,1)$을 지나야 한다.
즉, $5-k-15=0$ $\therefore k=-10$
(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$-5+5+(-10)=-10$

14) 0
⇨ $x-y=0$ … ㉠, $x+y-2=0$ … ㉡
는 기울기가 다르므로 한 점에서 만나는 직선이다.
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$이므로 교점의 좌표는 $(1,1)$이다.
$3x-ky-3=0$ … ㉢ 이라 두면
(ⅰ) ㉢과 ㉠의 기울기가 같을 때,
$1=\frac{3}{k}$ $\therefore k=3$
(ⅱ) ㉢과 ㉡의 기울기가 같을 때,
$-1=\frac{3}{k}$ $\therefore k=-3$
(ⅲ) ㉢이 ㉠, ㉡의 교점을 지날 때, $x=1, y=1$를 $3x-ky-3=0$에 대입하면 $3-k-3=0$ $\therefore k=0$
따라서 구하는 k의 값은 $3, -3, 0$ 이므로 k의 값의 합은 0이다.

15) $\frac{5}{2}$
⇨ $x-y-1=0$ …… ㉠
$3x+y-7=0$ …… ㉡
$kx+2y+1=0$ …… ㉢
이라 하면 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.
(ⅰ) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우
$\frac{3}{k}=\frac{1}{2}\neq\frac{-7}{1}$ $\therefore k=6$
(ⅱ) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우
$\frac{1}{k}=\frac{-1}{2}\neq\frac{-1}{1}$ $\therefore k=-2$
(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2, y=1$이므로 직선 ㉢이 점 $(2,1)$을 지나야 한다.
즉, $2k+2+1=0$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$
(ⅰ)(ⅱ),(ⅲ)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$6-2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

16) $\frac{1}{3}$
⇨ $x-y+2=0$ … ㉠, $3x+y+1=0$ … ㉡
는 기울기가 다르므로 한 점에서 만나는 직선이다.
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{3}{4}, y=\frac{5}{4}$이므로 교점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$이다.
$kx-y+3=0$ … ㉢ 이라 두면
(ⅰ) ㉢과 ㉠의 기울기가 같을 때, $1=k$
(ⅱ) ㉢과 ㉡의 기울기가 같을 때, $-3=k$
(ⅲ) ㉢이 ㉠, ㉡의 교점을 지날 때,
$x=-\frac{3}{4}, y=\frac{5}{4}$를 $kx-y+3=0$에 대입하면
$-\frac{3}{4}k-\frac{5}{4}+3=0$ $\therefore k=\frac{7}{3}$
따라서 구하는 k의 값은 $1, -3, \frac{7}{3}$ 이므로 k의 값의 합은 $\frac{1}{3}$이다.

17) 10
⇨ 삼각형을 만들 수 없으려면 평행이거나 한 점에서 만난다.
(1)평행할 때 $k=1,2$
(2)$(2,3)$을 지날 때
$2k-3-11=0$ $\therefore k=7$
모든 k값의 합은 10이다.

18) $\frac{3}{2}$
⇨ $x+2y=0$ …㉠, $x-y+3=0$ …㉡,
$kx+y+k+1=0$ …㉢이라 하자
(ⅰ) 직선 ㉠,㉡은 평행하지 않으므로
① 두 직선 ㉡,㉢이 평행한 경우
$\frac{1}{k}=\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{k+1}$ $\therefore k=-1$
② 두 직선 ㉠,㉢이 평행한 경우
$\frac{1}{k}=\frac{2}{1}\neq\frac{0}{k+1}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$
(ⅱ)세 직선이 한 점에서 만나는 경우
㉠$-$㉡을 하면 $3y-3=0$ $\therefore y=1, x=-2$
즉, 직선 ㉢이 두 직선 ㉠,㉡의 교점 $(-2,1)$을 지나려면 $-2k+1+k+1=0$ $\therefore k=2$
(ⅰ),(ⅱ)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$-1+\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

19) $\frac{7}{2}$

20) $\frac{28}{3}$

21) 250
⇨ 세 직선이 삼각형을 이루지 않을 때는 다음과 같다.
(i)두 직선이 평행할 때,
세 직선의 기울기는 각각 $-1,\ 1,\ -\frac{5}{a}$이므로
$-\frac{5}{a}=-1$일 때, $a=5$
$-\frac{5}{a}=1$일 때, $a=-5$
(ii)세 직선이 한 점에서 만날 때,
$x+y=0,\ x-y-2=0$을 연립하여 풀면,
$x=1,\ y=-1$
두 직선의 교점 $(1,\ -1)$을 직선 $5x+ay-15=0$에 대입하면, $5-a-15=0,\ a=-10$
a의 값의 곱은 $5\times(-5)\times(-10)=250$

22) 4
⇨ 세 직선이 삼각형을 이루지 않을 경우 다음과 같다.
(i) 세 직선이 한 점에서 만날 때,
$2x+y+1=0,\quad x-2y+3=0$를 연립하여 풀면
$x=-1,\ y=1$
점 $(-1,\ 1)$을 $ax-y-3=0$에 대입하면
$-a-1-3=0\qquad \therefore a=-4$
(ii)두 직선이 평행할 때,
두 직선 $2x+y+1=0$과 $ax-y-3=0$이 평행할 때 $\frac{a}{2}=\frac{-1}{1}\neq\frac{-3}{1}\quad \therefore a=-2$
두 직선 $x-2y+3=0$과 $ax-y-3=0$이 평행할 때 $\frac{a}{1}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-3}{3}\quad \therefore a=\frac{1}{2}$
$\therefore$ 모든 a의 값의 곱은 $(-4)\times(-2)\times\frac{1}{2}=4$

23) 360
⇨ 세 직선이 삼각형을 이루지 않을 때는 다음과 같다.
(i)세 직선이 한 점에서 만날 때,
$\begin{cases}2x+y+3=0\cdots①\\2x-y-7=0\cdots②\end{cases}$에서 ①+②를 하면
$4x-4=0,\ x=1,\ y=-5$
점 $(1,\ -5)$를 $ax-3y-5=0$에 대입하면
$a+15-5=0\quad \therefore a=-10$
(ii)두 직선이 평행할 때,
두 직선 $ax-3y-5=0$과 $2x+y+3=0$이 평행할 때 $\frac{a}{2}=\frac{-3}{1}\neq\frac{-5}{2}\quad \therefore a=-6$
두 직선 $ax-3y-5=0$과 $2x-y-7=0$이 평행할 때 $\frac{a}{2}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{-5}{-7}\qquad \therefore a=6$
$\therefore$ 모든 a의 값의 곱은 $(-10)\times(-6)\times 6=360$

24) -6
⇨ $x-2y+5=0\quad \cdots\cdots$ ㉠
$x+y-4=0\quad \cdots\cdots$ ㉡
$x-ay+8=0\quad \cdots\cdots$ ㉢
이라 하면 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.
(i) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우
$\frac{1}{1}=\frac{1}{-a}\neq\frac{-4}{8}\qquad \therefore a=-1$
(ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우
$\frac{1}{1}=\frac{-2}{-a}\neq\frac{5}{8}\qquad \therefore a=2$
(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=3$이므로 직선 ㉢이 점 $(1,3)$을 지나야 한다.
즉, $1-3a+8=0\qquad \therefore a=3$
(i),(ii),(iii)에서 모든 실수 a의 값의 곱은
$(-1)\cdot 2\cdot 3=-6$

25) $\mathrm{P}(3,-5)$
⇨ 직선 $x+y+2+k(3x+y-4)=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+y+2=0, 3x+y-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=-5$
따라서 주어진 직선은 항상 점 $(3,\ -5)$를 지난다.

26) $\mathrm{P}(-4,3)$
⇨ $4x+5y+1=0, 2x+3y-1=0$을 연립하여 풀면
$x=-4, y=3\qquad \therefore \mathrm{P}(-4,3)$

27) $\mathrm{P}(2,\ 1)$
⇨ $\begin{cases}x-y-1=0\cdots①\\x+2y-4=0\cdots②\end{cases}$
①×2+②를 하면, $3x-6=0\quad \therefore x=2,\ y=1$
$\therefore \mathrm{P}(2,\ 1)$

28) $\mathrm{P}(1,0)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(2x-y-2)k+x+y-1=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$2x-y-2=0,\ x+y-1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=0\quad \therefore \mathrm{P}(1,0)$

29) $\mathrm{P}(1,\ 7)$
⇨ $2(k+2)x-(k+1)y+5k+3=0$
$(2x-y+5)k+(4x-y+3)=0$
$\therefore 2x-y+5=0\cdots①,\ 4x-y+3=0\cdots②$
②−①을 하면, $2x-2=0,\ x=1,\ y=7$
$\therefore \mathrm{P}=(1,\ 7)$

30) $\mathrm{P}(-7,12)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+2y-3)+k(2x+y+2)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$3x+2y-3=0, 2x+y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-7, y=12$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(-7,12)$이다.

31) $\mathrm{P}(1,-2)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(-3x+y+5)+k(x+3y+5)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$-3x+y+5=0, x+3y+5=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=-2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(1,-2)$이다.

32) $\mathrm{P}(-2,-6)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x+y+8)+k(3x-y)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+y+8=0,\ 3x-y=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=-6$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(-2,-6)$이다.

33) $\mathrm{P}(-5,2)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(-x-y-3)+k(x+2y+1)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$-x-y-3=0, x+2y+1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-5, y=2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(-5,2)$이다.

34) $\mathrm{P}(2,-3)$
⇨ 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+2y+4=0, 3x-y-9=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=-3$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(2,-3)$

35) $\mathrm{P}(1,-1)$
⇨
주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x-2y-3)+k(x+y)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x-2y-3=0,\ x+y=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(1,-1)$이다.

36) $\mathrm{P}(-1,1)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x+1)k+y-1=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+1=0, y-1=0\ \ \therefore x=-1, y=1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(-1,1)$이다.

37) $\mathrm{P}(-1,-1)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x+1)k+y+1=0$이므로
$x+1=0, y+1=0\qquad \therefore x=-1, y=-1$
$\therefore \mathrm{P}(-1,-1)$

38) $\mathrm{P}(3,6)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x-3)k-x+y-3=0$이므로
$x-3=0,\ -x+y-3=0\ \ \therefore x=3, y=6$
$\therefore \mathrm{P}(3,6)$

39) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$
⇨ 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x-2y+1)k+x+y-1=0$이므로
$x-2y+1=0, x+y-1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

40) $y=1$
⇨ 직선 $2x-3y-1+k(x+y-3)=0$ (k는 실수)은
점 $\mathrm{P}(1,1)$을 지나므로
$2-3-1+k(1+1-3)=0$
$-k=2\qquad \therefore k=-2$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$2x-3y-1-2(x+y-3)=0$
$-5y+5=0\qquad \therefore y=1$

41) $5x-y=0$
⇨ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+y+4)+k(2x-y-2)=0$(k는 실수)
이 직선이 원점을 지나므로
$4-2k=0\ \ \therefore k=2$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(x+y+4)+2(2x-y-2)=0$
$\therefore 5x-y=0$

42) $x+y-3=0$
⇨ 직선 $2x+y-4+k(2x-3y+4)=0$ (k는 실수)은
점 $\mathrm{P}(4,-1)$을 지나므로
$8-1-4+k(8+3+4)=0$
$15k=-3\qquad \therefore k=-\frac{1}{5}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$2x+y-4-\frac{1}{5}(2x-3y+4)=0$
$10x+5y-20-2x+3y-4=0$
$8x+8y-24=0$
$\therefore x+y-3=0$

43) $4x+3y-7=0$
⇨ 두 직선 $x+y-1=0,\ 3x+2y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$3x+2y-6+k(x+y-1)=0\cdots$ ①이다.

점 $(1,\ 1)$을 ①에 대입하면 $-1+k=0$, $k=1$
$\therefore k=1$을 ①에 대입하면 $4x+3y-7=0$

44) $x-y+1=0$
⇨ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(2x+y-1)+k(x+2y-2)=0$ (k는 실수)
이 직선이 점 $\mathrm{P}(1,2)$를 지나므로
$(2+2-1)+k(1+4-2)=0 \quad \therefore k=-1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(2x+y-1)-(x+2y-2)=0$
$2x+y-1-x-2y+2=0$
$\therefore x-y+1=0$

45) $-x+y+3=0$
⇨ 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x+3y+5+k(x+y+1)=0\cdots(1)$이고 점$(4,1)$을 대입하면 $12+6k=0$이고 $k=-2$이다. (1)의 식에 k를 대입하면 교점을 지나는 직선의 방정식은 $-x+y+3=0$이다.

46) $x+3y-3=0$
⇨ 두 직선 $3x+2y-6=0$, $2x-y=3$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$3x+2y-6+k(2x-y-3)=0$ (k는 실수)라고 하면 이 직선은 점 $\mathrm{P}(0,1)$을 지나므로
$2-6+k(-1-3)=0$
$-4k=4 \quad \therefore k=-1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$3x+2y-6-(2x-y-3)=0$
$\therefore x+3y-3=0$

47) $2x-9y+7=0$
⇨ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(2x+y+1)+k(x-2y+2)=0\cdots$①이다.
점 $(1,\ 1)$을 ①에 대입하면, $4+k=0$, $k=-4$
$\therefore k=-4$를 ①에 대입하면
$2x+y+1-4x+8y-8=0$
$\therefore 2x-9y+7=0$

48) $2x-y-3=0$
⇨ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+y-3)+k(2x-3y-1)=0$ (k는 실수)
이 직선이 점 $\mathrm{P}(3,3)$을 지나므로
$(3+3-3)+k(2\cdot3-3\cdot3-1)=0 \quad \therefore k=\dfrac{3}{4}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(x+y-3)+\dfrac{3}{4}(2x-3y-1)=0$
$\therefore 2x-y-3=0$

49) $3x+y+2=0$
⇨ 직선 $x+2y+5+k(-2x+y+3)=0$ (k는 실수)은 점 $\mathrm{P}(0,-2)$를 지나므로
$-4+5+k(-2+3)=0 \quad \therefore k=-1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$x+2y+5-(-2x+y+3)=0$
$x+2y+5+2x-y-3=0 \quad \therefore 3x+y+2=0$

50) $4x-5y=0$
⇨ 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$(k는 실수)$\cdots$ ㉠으로 놓으면 이 직선이 점 $\mathrm{P}(0,\ 0)$를 지나므로
$3-3k=0 \quad \therefore k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면
$3x-2y+3+(x-3y-3)=0$
$\therefore 4x-5y=0$

51) $3x-5y+4=0$
⇨ 직선 $2x-y-1+k(x+3y-6)=0$ (k는 실수)은 점 $\mathrm{P}(2,2)$를 지나므로
$4-2-1+k(2+6-6)=0$
$2k=-1 \quad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$2x-y-1-\dfrac{1}{2}(x+3y-6)=0$
$4x-2y-2-x-3y+6=0$
$\therefore 3x-5y+4=0$

52) $3x-y-8=0$

53) $2x+3y-6=0$
⇨ 두 직선 $2x-y+6=0$, $2x+y=0$을 지나는 직선의 방정식은 $2x-y+6+k(2x+y)=0\cdots$①이다.
점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $-2+6+2k=0$, $k=-2$
$k=-2$를 ①에 대입하면,
$2x-y+6-2(2x+y)=0 \quad \therefore 2x+3y-6=0$

54) $2x-y+1=0$
⇨ $x-2y-1=0$, $x+3y+4=0$을 연립하여 풀면
$x=-1$, $y=-1$
$\therefore$ 두 점 $(-1,\ -1)$, $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은 $y+1=\dfrac{5+1}{2+1}(x+1) \quad \therefore 2x-y+1=0$이다.

55) $4x+y-7=0$
⇨ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+y-4)+k(2x-y+1)=0$ (k는 실수)
이 직선이 점 $\mathrm{P}(2,-1)$을 지나므로
$(2-1-4)+k(4+1+1)=0 \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(x+y-4)+\dfrac{1}{2}(2x-y+1)=0$
$2x+2y-8+2x-y+1=0$
$\therefore 4x+y-7=0$

56) $2x+y=0$
⇨ 두 직선 l_1, l_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(3x+2y-1)+k(x+y-1)=0$(k는 실수)
$\therefore (k+3)x+(k+2)y-k-1=0$ ⋯ ㉠
이 직선이 $x-2y+4=0$과 수직이므로
$(k+3)\cdot 1+(k+2)\cdot(-2)=0$ $\therefore k=-1$
$k=-1$을 ㉠에 대입하면 $2x+y=0$

57) $2x+y-3=0$
⇨ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(2x-y-1)+k(x-2y+1)=0$(k는 실수)
$\therefore (k+2)x-(2k+1)y+k-1=0$ ⋯ ㉠
이 직선이 $x-2y+1=0$과 수직이므로
$(k+2)\cdot 1-(2k+1)\cdot(-2)=0$
$k+2+4k+2=0$ $\therefore k=-\frac{4}{5}$
$k=-\frac{4}{5}$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $2x+y-3=0$

58) $3x+y-8=0$
⇨ 두 직선 $x-y+4=0$, $2x+y-7=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$x-y+4+k(2x+y-7)=0$ (k는 실수)라고 하면
$(2k+1)x+(k-1)y-7k+4=0$ ⋯ ㉠
㉠은 직선 $x-3y+1=0$에 수직이므로
$(2k+1)\cdot 1+(k-1)\cdot(-3)=0$
$2k+1-3k+3=0$ $\therefore k=4$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$x-y+4+4(2x+y-7)=0$
$\therefore 3x+y-8=0$

59) $x-3y+9=0$
⇨ 두 직선 $-x+y-5=0$, $x+2y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$-x+y-5+k(x+2y-1)=0$ (k는 실수)라고 하면
$(-1+k)x+(1+2k)y-5-k=0$ ⋯ ㉠
㉠은 직선 $3x+y+2=0$에 수직이므로
$(-1+k)\cdot 3+(1+2k)\cdot 1=0$ $\therefore k=\frac{2}{5}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$-x+y-5+\frac{2}{5}(x+2y-1)=0$ $\therefore x-3y+9=0$

60) $3x+4y-14=0$
⇨ 두 직선 l_1, l_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x-2y+2)+k(2x+y-6)=0$(k는 실수)
$\therefore (2k+1)x+(k-2)y-6k+2=0$ ⋯ ㉠
이 직선이 $4x-3y=1$과 수직이므로
$(2k+1)\cdot 4+(k-2)\cdot(-3)=0$ $\therefore k=-2$
$k=-2$를 ㉠에 대입하면 $3x+4y-14=0$

61) $2x+3y-1=0$
⇨ 두 직선 l_1, l_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+y+2)+k(x+2y-3)=0$(k는 실수)
$\therefore (k+1)x+(2k+1)y-3k+2=0$ ⋯ ㉠
이 직선이 $2x+3y-2=0$과 평행하므로
$\frac{k+1}{2}=\frac{2k+1}{3}\neq\frac{-3k+2}{-2}$
$3k+3=4k+2$ $\therefore k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면 $2x+3y-1=0$

62) $13x-26y-12=0$
⇨ 두 직선 l_1, l_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(3x+y+1)+k(x-4y-2)=0$(k는 실수)
$\therefore (k+3)x+(1-4k)y-2k+1=0$ ⋯ ㉠
이 직선이 $x-2y+5=0$과 평행하므로
$\frac{k+3}{1}=\frac{1-4k}{-2}\neq\frac{-2k+1}{5}$
$-2k-6=1-4k$ $\therefore k=\frac{7}{2}$
$k=\frac{7}{2}$을 ㉠에 대입하면 $13x-26y-12=0$

63) $3x+y-11=0$
⇨ 두 직선 $x-y-1=0, x-2y+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$x-y-1+k(x-2y+1)=0$(k는 실수)라고 하면
$(1+k)x-(1+2k)y-(1-k)=0$ ⋯ ㉠
㉠이 직선 $3x+y-1=0$과 평행하므로
$\frac{1+k}{3}=\frac{-1-2k}{1}\neq\frac{-1+k}{1}$ $\therefore k=-\frac{4}{7}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$x-y-1-\frac{4}{7}(x-2y+1)=0$
$\therefore 3x+y-11=0$

64) $2x+y+1=0$
⇨ 두 직선 $x+y+1=0, 2x-y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$x+y+1+k(2x-y-1)=0$(k는 실수)라고 하면
$(1+2k)x+(1-k)y+1-k=0$ ⋯ ㉠
㉠이 직선 $4x+2y+1=0$과 평행하므로
$\frac{1+2k}{4}=\frac{1-k}{2}\neq\frac{1-k}{1}$
$\frac{1+2k}{4}=\frac{1-k}{2}$에서 $k=\frac{1}{4}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$x+y+1+\frac{1}{4}(2x-y-1)=0$
$\therefore 2x+y+1=0$