01 무리함수의 그래프를 이용하여 상수 구하기

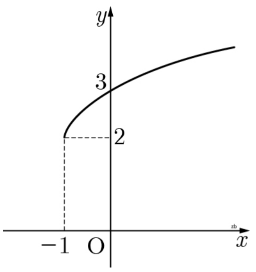
그래프가 시작하는 점의 좌표가 (p, q)인 경우

① 함수의 식을 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$로 놓는다.

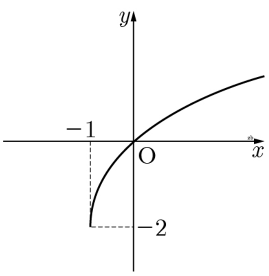
② 그래프가 지나는 점의 좌표를 함수식에 대입하여 a의 값을 구한다.

◪ 주어진 무리함수의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

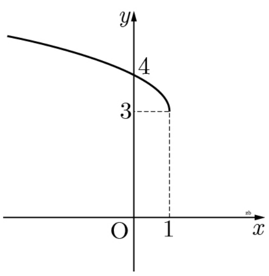
1. $y=\sqrt{ax+b}+c$



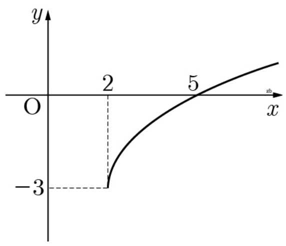
2. $y=\sqrt{ax+b}+c$



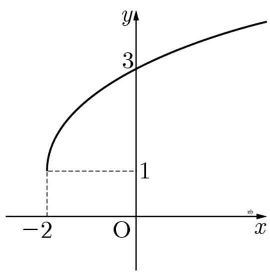
3. $y=\sqrt{ax+b}+c$



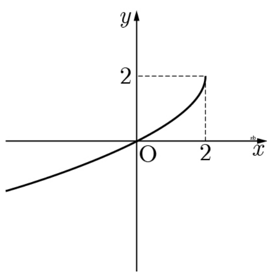
4. $y=\sqrt{ax+b}+c$



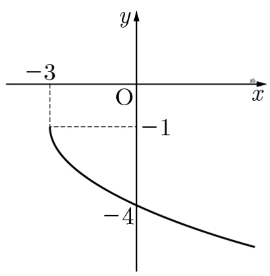
5. $y=\sqrt{ax+b}+c$



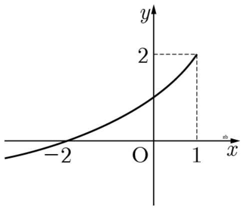
6. $y=-\sqrt{ax+b}+c$



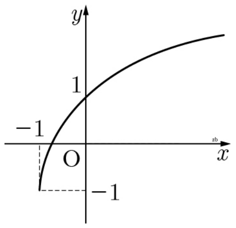
7. $y=-\sqrt{ax+b}+c$



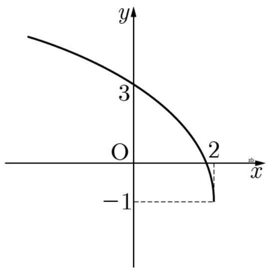
8. $y=-\sqrt{ax+b}+c$



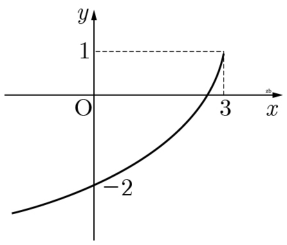
9. $y=\sqrt{ax+b}+c$



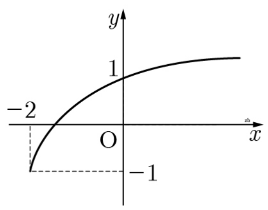
10. $y=\sqrt{ax+b}+c$



11. $y=-\sqrt{ax+b}+c$



12. $y=a\sqrt{x+b}+c$



02 무리함수의 그래프의 최대·최소

(1) 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 최대·최소

정의역이 $\{x|p \le x \le q\}$일 때

① $a>0$일 때 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$

② $a<0$일 때 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$

◪ **주어진 x의 값의 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 모두 구하여라.**

13. $y=\sqrt{x+1}-1 \quad [3 \le x \le 8]$

14. $y=\sqrt{2x-1}+1,\ \{x\,|\,1 \le x \le 5\}$

15. $y=\sqrt{x-1}-1 \quad [2 \le x \le 5]$

16. $y=\sqrt{1-x}-2,\ \{x\,|\,-3 \le x \le 0\}$

17. $y=1+\sqrt{2x+2} \quad [-1 \le x \le 7]$

18. $y=\sqrt{4-2x}+1,\ \left\{x \,\middle|\, -\frac{5}{2} \le x \le 0\right\}$

19. $y=2-\sqrt{2x+2},\ \{x\,|\,1 \le x \le 7\}$

20. $y=-\sqrt{\frac{4}{3}x+4}+3,\ \{x\,|\,0 \le x \le 9\}$

◪ 다음 조건을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

21. 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 7\}$인 무리함수 $y=\sqrt{2x+k}-2$의 최솟값이 0이다.

22. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 6\}$인 무리함수 $y=\sqrt{2x+k}-1$의 최댓값이 3이다.

23. 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$인 무리함수 $y=\sqrt{-x+k}-2$의 최댓값이 2이다.

24. 정의역이 $\{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$인 무리함수 $y=\sqrt{4-x}+k$의 최솟값이 3이다.

25. 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$인 무리함수 $y=-2\sqrt{k-x}+1$의 최솟값이 -3이다.

26. 정의역이 $\{x \mid -6 \leq x \leq 2\}$인 무리함수 $y=\sqrt{k-x}+2$의 최댓값이 5이다.

03 무리함수의 그래프와 직선의 위치관계

(1) 무리함수의 그래프와 직선의 위치관계

⇨ 그래프를 직접 그려서 풀이한다.

(2) 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때

⇨ 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 하면 $D=0$

◪ 주어진 무리함수의 그래프와 직선의 위치관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 범위를 각각 구하여라.

27. $y=\sqrt{x}$, $y=x+k$가 만나지 않는다.

28. $y=\sqrt{x}$, $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

29. $y=\sqrt{x}$, $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

30. $y=\sqrt{-x}$, $y=-x+k$가 만나지 않는다.

31. $y=\sqrt{-x}$, $y=-x+k$가 한 점에서 만난다.

32. $y=\sqrt{-x}$, $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

33. $y=\sqrt{x+1}$, $y=x+k$가 만나지 않는다.

34. $y=\sqrt{x+1}$, $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

35. $y=\sqrt{x+1}$, $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

36. $y=\sqrt{x-1}$, $y=x+k$가 만나지 않는다.

37. $y=\sqrt{x-1}$, $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

38. $y=\sqrt{x-1}$, $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

39. $y=\sqrt{x-1}+1$, $y=x+k$가 만나지 않는다.

40. $y=\sqrt{x-1}+1$, $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

41. $y=\sqrt{x-1}+1$, $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

42. $y=-\sqrt{1-x}$, $y=x+k$가 만나지 않는다

43. $y=-\sqrt{1-x}$, $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

44. $y=-\sqrt{1-x}$, $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

45. $y=\sqrt{2x-3}$, $y=x+k$가 만나지 않는다.

46. $y=\sqrt{2x-3}$, $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

47. $y=\sqrt{2x-3}$, $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

48. $y=\sqrt{1-3x}$, $y=-x+k$가 만나지 않는다.

49. $y=\sqrt{1-3x}$, $y=-x+k$가 한 점에서 만난다.

50. $y=\sqrt{1-3x}$, $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

51. $y=\sqrt{1-x}$, $y=-x+k$가 만나지 않는다.

52. $y=\sqrt{1-x}$, $y=-x+k$가 한 점에서 만난다.

53. $y=\sqrt{1-x}$, $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

54. $y=\sqrt{2-2x}$, $y=-x+k$가 만나지 않는다.

55. $y=\sqrt{2-2x}$, $y=-x+k$가 한 점에서 만난다.

56. $y=\sqrt{2-2x}$, $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

04 무리함수의 그래프의 합성함수와 역함수

(1) 무리함수의 역함수 구하기

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c(a\neq 0)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

① x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

⇨ $y-c=\sqrt{ax+b}$의 양변을 제곱하면

$(y-c)^2=ax+b$ $\therefore x=\frac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

② x와 y를 서로 바꾼다. ⇨ $y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

③ $y=\sqrt{ax+b}+c$의 치역이 $\{y|y\geq c\}$이므로 역함수의 정의역은

⇨ $\{x|x\geq c\}$

(2) 무리함수의 역함수의 그래프의 성질

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

참고 · $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

· $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I$, $f\circ I=f$, $I\circ f=f$
(단, $I(x)=x$)

· $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$

◪ **다음 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 주어진 합성함수의 함숫값을 구하여라.**

57. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$일 때, $(g\circ f^{-1})^{-1}(2)$의 값

58. $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{2x+1}$일 때, $(f\circ g^{-1})(3)$의 값

59. $f(x)=\frac{x-2}{x}$, $g(x)=\sqrt{x-2}$일 때, $(f\circ g^{-1})(2)$의 값

60. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x-1}+1$일 때, $((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ g)(1)$의 값

61. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$일 때, $(g^{-1}\circ f)(-3)$의 값

62. $f(x)=2x-1$, $g(x)=\sqrt{x+4}$일 때, $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)$의 값

63. $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{3x-1}$일 때, $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)$의 값

64. $f(x)=\frac{3x+4}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x-4}+3$**일 때,**
$(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(7)$**의 값**

65. $f(x)=\frac{x}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x-1}$**일 때,**
$(f\circ(g\circ f)^{-1})(5)$**의 값**

66. $f(x)=\frac{-6}{x-4}$, $g(x)=\sqrt{x+2}+1$**일 때,**
$((f\circ g^{-1})^{-1}\circ f)^{-1}(4)$**의 값**

67. $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{2x+3}$**일 때,**
$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)$**의 값**

◪ 다음 무리함수의 역함수를 구하여라.

68. $y=\sqrt{x-1}+1$

69. $y=\sqrt{2x-1}+2$

70. $y=\sqrt{2-x}-3$

71. $y=4-\sqrt{2x+6}$

72. $y=-\sqrt{3x-3}+1$

◪ 다음 무리함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리를 구하여라.

73. $y=\sqrt{2x+4}-2$

74. $y=\sqrt{4x-4}+1$

75. $y=\sqrt{2x-2}+1$

76. $y=-\sqrt{12-4x}+3$

77. $y=-\sqrt{3-x}+3$

◪ 무리함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라고 할 때, 다음을 구하여라.

78. $f(x)=\sqrt{2x-4}-1$일 때, $f(2)+f^{-1}(5)$의 값

79. $f(x)=-\sqrt{3x+15}+2$일 때, $f^{-1}(-1)-f^{-1}(2)$의 값

80. $f(x)=\sqrt{-2x+6}+4$일 때, $f^{-1}(4)-f^{-1}(6)$의 값

◪ 다음 무리함수의 역함수의 그래프가 주어진 점 P를 지난다고 할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

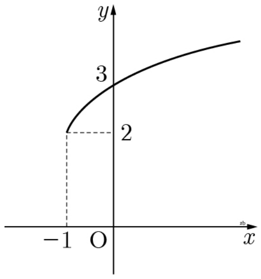
81. $y=\sqrt{k-x}$, $\mathrm{P}(2,\ 4)$

82. $y=\sqrt{x+k}$, $\mathrm{P}(4,\ 6)$

정답 및 해설

1) $a=1,\ b=1,\ c=2$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는



함수 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}+2$ …… ㉠

주어진 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a}+2,\ \sqrt{a}=1$ $\quad\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{x+1}+2$

$\therefore\ b=1,\ c=2$

2) $a=4,\ b=4,\ c=-2$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}-2$

이 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a}-2,\ a=4$

따라서 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{4x+4}-2$

$\therefore\ b=4,\ c=-2$

3) $a=-1,\ b=1,\ c=3$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $y=\sqrt{a(x-1)}+3$

이 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{-a}+3,\ a=-1$

따라서 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x+1}+3$

$\therefore\ b=1,\ c=3$

4) $a=3,\ b=-6,\ c=-3$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-2)}-3$

이 그래프가 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{3a}-3,\ a=3$

따라서 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x-6}-3$이므로

$b=-6,\ c=-3$

5) $a=2,\ b=4,\ c=1$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}+1$

이 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1,\ a=2$

따라서 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x+4}+1$

$\therefore\ b=4,\ c=1$

6) $a=-2,\ b=4,\ c=2$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $y=-\sqrt{a(x-2)}+2$

이 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-2a}+2,\ a=-2$

따라서 무리함수의 그래프는

$y=-\sqrt{-2x+4}+2$

$\therefore\ b=4,\ c=2$

7) $a=3,\ b=9,\ c=-1$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+3)}-1$

이 그래프가 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4=\sqrt{3a}-1,\ a=3$

따라서 무리함수의 그래프는

$y=-\sqrt{3x+9}-1$

$\therefore\ b=9,\ c=-1$

8) $a=-\frac{4}{3},\ b=\frac{4}{3},\ c=2$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ …… ㉠

주어진 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a(-2-1)}+2,\ -\sqrt{-3a}=-2$

$\sqrt{-3a}=2,\ -3a=4$ $\quad\therefore\ a=-\frac{4}{3}$

$a=-\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-\frac{4}{2}(x-1)}+2=-\sqrt{-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}}+2$

$\therefore\ a=-\frac{4}{3},\ b=\frac{4}{3},\ c=2$

9) $a=4,\ b=4,\ c=-1$

⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 함수

$y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므

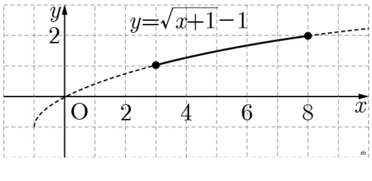
로
$y=\sqrt{a(x+1)}-1$ …… ㉠
주어진 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=\sqrt{a}-1,\ \sqrt{a}=2$
$\therefore\ a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면
$y=\sqrt{4(x+1)}-1$
$\quad=\sqrt{4x+4}-1$
$\therefore\ a=4,\ b=4,\ c=-1$

10) $a=-8,\ b=16,\ c=-1$
⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ \ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로
$y=\sqrt{a(x-2)}-1$
이 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{-2a}-1,\ a=-8$
따라서 무리함수의 그래프는
$y=\sqrt{-8x+16}-1$
$\therefore\ b=16,\ c=-1$

11) $a=-3,\ b=9,\ c=1$
⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ \ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\sqrt{a(x-3)}+1$
이 그래프가 점 $(0,\ -2)$을 지나므로
$-2=-\sqrt{-3a}+1,\ a=-3$
따라서 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x+9}+1$이므로
$b=9,\ c=1$

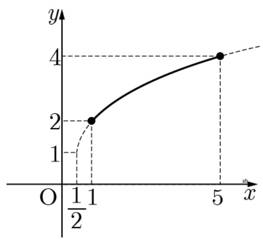
12) $a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=-1$
⇨ 주어진 무리함수의 그래프는 함수
$y=a\sqrt{x}\ \ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로
$y=a\sqrt{x+2}-1$ …… ㉠
주어진 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=a\sqrt{2}-1,\ a\sqrt{2}=2$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$
$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면
$y=\sqrt{2}\sqrt{s+2}-1$
$\therefore\ a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=-1$

13) 최댓값: 2, 최솟값: 1
⇨ 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 다음과 같다.

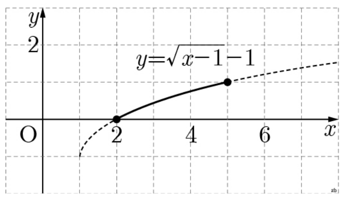


(ⅰ) $x=8$일 때, 최댓값 $\sqrt{8+1}-1=2$
(ⅱ) $x=3$일 때, 최솟값 $\sqrt{3+1}-1=1$

14) 최댓값: 4 최솟값 : 2
⇨ 함수 $y=\sqrt{2x-1}+1=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
정의역 $\{x\,|\,1\le x\le 5\}$에서 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로
최댓값은 $x=5$일 때 $\sqrt{10-1}+1=4$,
최솟값은 $x=1$일 때 $\sqrt{2-1}+1=2$

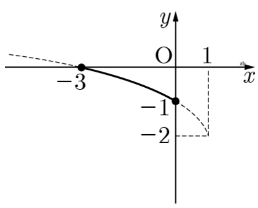


15) 최댓값: 1, 최솟값: 0
⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.



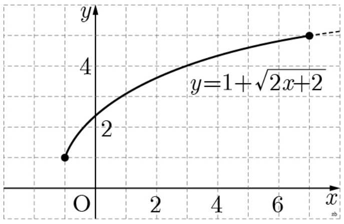
(ⅰ) $x=5$일 때, 최댓값 $\sqrt{5-1}-1=1$
(ⅱ) $x=2$일 때, 최솟값 $\sqrt{2-1}-1=0$

16) 최댓값 : 0 최솟값 : -1
⇨ 함수 $y=\sqrt{1-x}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
정의역 $\{x\,|\,-3\le x\le 0\}$에서 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x=-3$일 때, $\sqrt{1-(-3)}-2=0$, 최솟값은 $x=0$일 때, $\sqrt{1-0}-2=-1$



17) 최댓값: 5, 최솟값: 1
⇨ $y=1+\sqrt{2x+2}$, 즉 $y=\sqrt{2(x+1)}+1$의 그래프는 다음과 같다.

I410-ECN-0199-2017-001-000057208



(ⅰ) $x=7$일 때, 최댓값 $\mathrm{M}=1+\sqrt{2\cdot 7+2}=5$

(ⅱ) $x=-1$일 때, 최솟값 $m=1+\sqrt{2\cdot(-1)+2}=1$

18) 최댓값 : 4　　최솟값 : 3

⇨ 함수 $y=\sqrt{4-2x}+1=\sqrt{-2(x-2)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

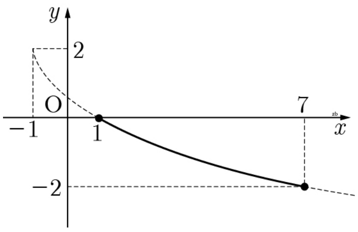
∴ 최댓값은 $x=-\frac{5}{2}$일 때 $\sqrt{4-2\left(-\frac{5}{2}\right)}+1=4$,

최솟값은 $x=0$일 때 $\sqrt{4-0}+1=3$

19) 최댓값 : 0　　최솟값 : −2

⇨ 함수 $y=2-\sqrt{2x+2}=-\sqrt{2(x+1)}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 −1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

정의역 $\{x\,|\,1\leq x\leq 7\}$에서 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x=1$일 때 $2-\sqrt{2+2}=0$, 최솟값은 $x=7$일 때 $2-\sqrt{2\cdot 7+2}=-2$



20) 최댓값 : 1　　최솟값 : −1

⇨ 함수 $y=-\sqrt{\frac{4}{3}x+4}+3=-\sqrt{\frac{4}{3}(x+3)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{\frac{4}{3}x}$의 그래프를 x축의 방향으로 −3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

∴ 최댓값은 $x=0$일 때 $-\sqrt{4}+3=1$,

최솟값은 $x=9$일 때 $-\sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9+4}+3=-1$

21) 2

⇨ 함수 $y=\sqrt{2x+k}-2=\sqrt{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 것이고, x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

따라서 $x=1$일 때 최솟값 0을 갖는다.

$x=1$, $y=0$을 주어진 함수의 식에 대입하면

$0=\sqrt{2+k}-2$, $\sqrt{k+2}=2$　　∴ $k=2$

22) 4

⇨ 함수 $y=\sqrt{2x+k}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

따라서 $x=0$일 때 최솟값, $x=6$일 때 최댓값을 갖는다.

$x=6$일 때, 최댓값이 3이므로

$3=\sqrt{2\cdot 6+k}-1$

$4=\sqrt{12+k}$

$16=12+k$　　∴ $k=4$

23) 13

⇨ 함수 $y=\sqrt{-x+k}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

따라서 $x=-3$일 때 최댓값, $x=4$일 때 최솟값을 갖는다.

$x=-3$일 때, 최댓값이 2이므로

$2=\sqrt{3+k}-2$, $\sqrt{3+k}=4$

$3+a=16$　　∴ $k=13$

24) 2

⇨ 함수 $y=\sqrt{4-x}+k=\sqrt{-(x-4)}+k$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

따라서 $x=3$일 때 최솟값 3을 갖는다.

$x=3$, $y=3$을 주어진 함수의 식에 대입하면

$3=\sqrt{4-3}+k$　　∴ $k=2$

25) 3

⇨ 함수 $y=-2\sqrt{k-x}+1=-2(-(x-k)+1$의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

따라서 $x=-1$일 때 최솟값 −3을 갖는다.

$x=-1$, $y=-3$을 주어진 함수의 식에 대입하면

$-3=-2\sqrt{k-(-1)}+1$, $\sqrt{k+1}=2$　　∴ $k=3$

26) 3

⇨ 함수 $y=\sqrt{k-x}+2=\sqrt{-(x-k)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

따라서 $x=-6$일 때 최댓값 5를 갖는다.

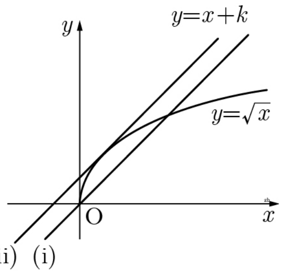
$x=-6$, $y=5$를 주어진 함수의 식에 대입하면

$5=\sqrt{k--6}+2$, $\sqrt{k+6}=3$

∴ $k=3$

27) $k>\frac{1}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

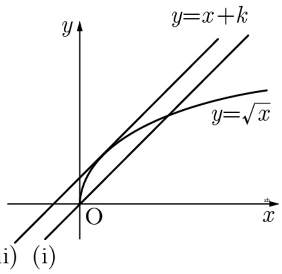
$D=(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k>\frac{1}{4}$

28) $k=\frac{1}{4}$ 또는 $k<0$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

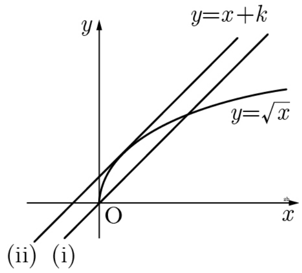
$D=(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k=\frac{1}{4}$ 또는 $k<0$

29) $0\le k<\frac{1}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

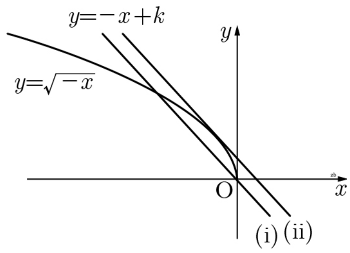
$D=(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $0\le k\le\frac{1}{4}$

30) $k>\frac{1}{4}$

⇨ 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{-x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$-x=x^2-2kx+k^2\ (\because\ x\le 0)$

$x^2-(2k-1)x+k^2=0$

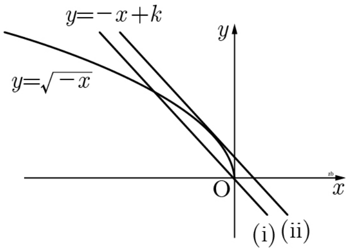
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k>\frac{1}{4}$

31) $k=\frac{1}{4}$ 또는 $k<0$

⇨ 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{-x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$-x=x^2-2kx+k^2$ ($\because\ x\le 0$)

$x^2-(2k-1)x+k^2=0$

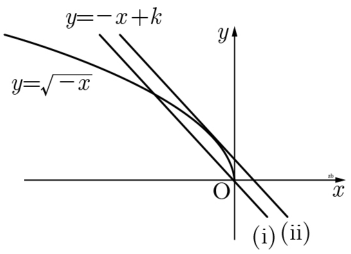
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0$ $\therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k=\dfrac{1}{4}$ 또는 $k<0$

32) $0\le k<\dfrac{1}{4}$

⇨ 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{-x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$-x=x^2-2kx+k^2$ ($\because\ x\le 0$)

$x^2-(2k-1)x+k^2=0$

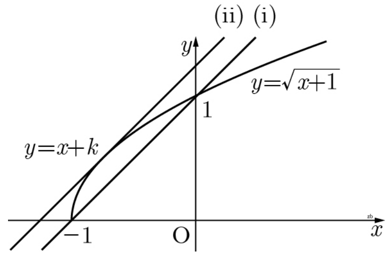
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0$ $\therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $0\le k<\dfrac{1}{4}$

33) $k>\dfrac{5}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때

$0=-1+k$

$\therefore\ k=1$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

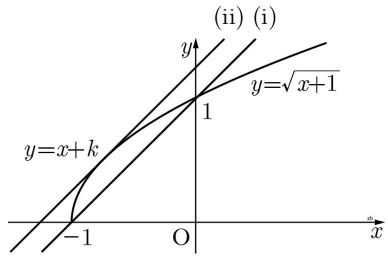
$-4k+5=0$

$\therefore\ k=\dfrac{5}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k>\dfrac{5}{4}$

34) $k<1$ 또는 $k=\dfrac{5}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때

$0=-1+k$

$\therefore\ k=1$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

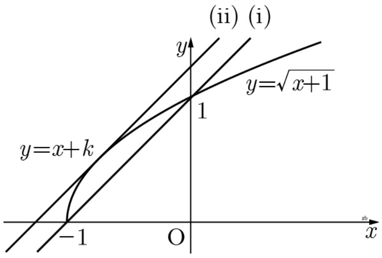
$-4k+5=0$

$\therefore\ k=\dfrac{5}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k<1$ 또는 $k=\dfrac{5}{4}$

35) $1 \le k < \frac{5}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



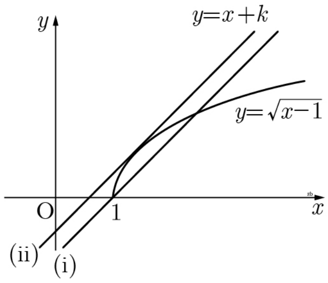
(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때
$0=-1+k$
$\therefore\ k=1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,
$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$x+1=x^2+2kx+k^2$
$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$
$-4k+5=0$
$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $1 \le k < \frac{5}{4}$

36) $k > -\frac{3}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



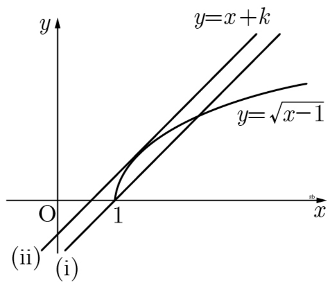
(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k=-1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x-1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$x-1=x^2+2kx+k^2$
$x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$
$-4k-3=0$ $\qquad \therefore\ k=-\frac{3}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k > -\frac{3}{4}$

37) $k=-\frac{3}{4}$ 또는 $k<-1$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



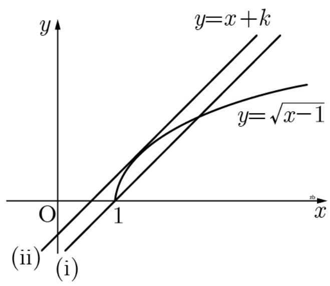
(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k=-1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x-1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$x-1=x^2+2kx+k^2$
$x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$
$-4k-3=0$ $\qquad \therefore\ k=-\frac{3}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k=-\frac{3}{4}$ 또는 $k<-1$

38) $-1 \le k < -\frac{3}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k=-1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x-1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$x-1=x^2+2kx+k^2$
$x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$

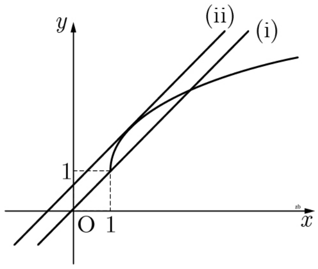
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 D$=0$이므로 $(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$

$-4k-3=0$ $\qquad \therefore\ k=-\dfrac{3}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $-1 \le k < -\dfrac{3}{4}$

39) $k > \dfrac{1}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$은 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 $k=0$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x-1}+1=x+k$

$\sqrt{x-1}=x+(k-1)$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x-1=x^2+2(k-1)x+(k-1)^2$

$x^2+(2k-3)x+k^2-2k+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

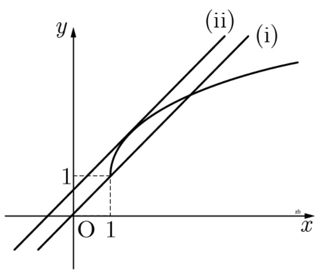
D$=(2k-3)^2-4(k^2-2k+2)=0$

$-4k+1=0$ $\qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k > \dfrac{1}{4}$

40) $k=\dfrac{1}{4}$ 또는 $k<0$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$은 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 $k=0$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x-1}+1=x+k$

$\sqrt{x-1}=x+(k-1)$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x-1=x^2+2(k-1)x+(k-1)^2$

$x^2+(2k-3)x+k^2-2k+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

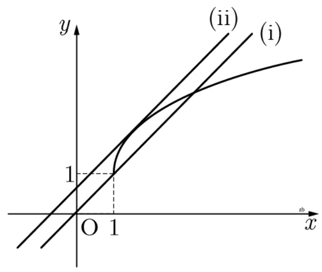
D$=(2k-3)^2-4(k^2-2k+2)=0$

$-4k+1=0$ $\qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k=\dfrac{1}{4}$ 또는 $k<0$

41) $0 \le k < \dfrac{1}{4}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$은 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 $k=0$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{x-1}+1=x+k$

$\sqrt{x-1}=x+(k-1)$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x-1=x^2+2(k-1)x+(k-1)^2$

$x^2+(2k-3)x+k^2-2k+2=0$

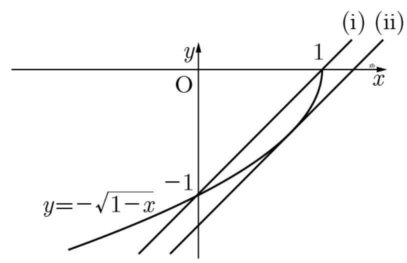
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

D$=(2k-3)^2-4(k^2-2k+2)=0$

$-4k+1=0$ $\qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $0 \le k < \dfrac{1}{4}$

42) $k < -\dfrac{5}{4}$

⇨ 

(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

$0=1+k$ $\qquad \therefore\ k=-1$

(ⅱ) 함수 $y=-\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때, $-\sqrt{1-x}=x+k$, $1-x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+(2k+1)x+k^2-1=0$

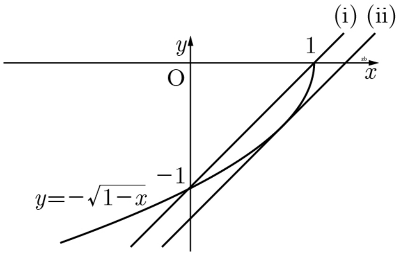
I410-ECN-0199-2017-001-000057208

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(2k+1)^2-4(k^2-1)=0,\ 4k+5=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{5}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k<-\dfrac{5}{4}$

43) $k>-1$ 또는 $k=-\dfrac{5}{4}$

⇨ 

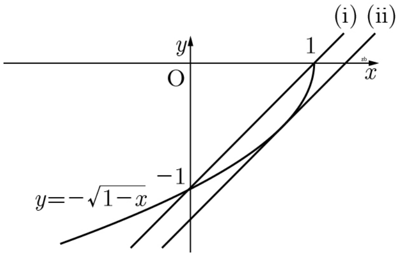
(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,
$0=1+k \qquad \therefore\ k=-1$

(ii) 함수 $y=-\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때, $-\sqrt{1-x}=x+k,\ 1-x=x^2+2kx+k^2$
$\therefore\ x^2+(2k+1)x+k^2-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(2k+1)^2-4(k^2-1)=0,\ 4k+5=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{5}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k>-1$ 또는 $k=-\dfrac{5}{4}$

44) $-\dfrac{5}{4}<k\le -1$

⇨ 

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,
$0=1+k \qquad \therefore\ k=-1$

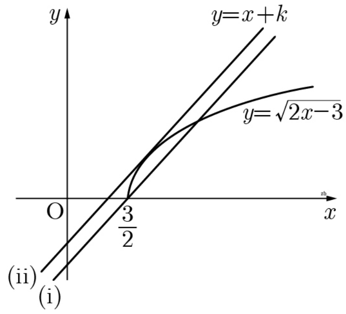
(ii) 함수 $y=-\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때, $-\sqrt{1-x}=x+k,\ 1-x=x^2+2kx+k^2$
$\therefore\ x^2+(2k+1)x+k^2-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(2k+1)^2-4(k^2-1)=0,\ 4k+5=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{5}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $-\dfrac{5}{4}<k\le -1$

45) $k>-1$

⇨ 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



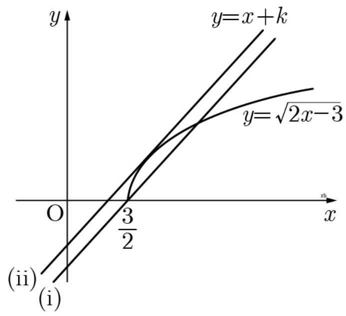
(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때 $k=-\dfrac{3}{2}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{2x-3}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$2x-3=x^2+2kx+k^2$
$x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\dfrac{D}{4}=0$이므로 $(k-1)^2-(k^2+3)=0$
$-2k-2=0 \qquad \therefore\ k=-1$

만나지 않는다. ⇨ $k>-1$

46) [정답 $k=-1$ 또는 $k<-\dfrac{3}{2}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때 $k=-\dfrac{3}{2}$

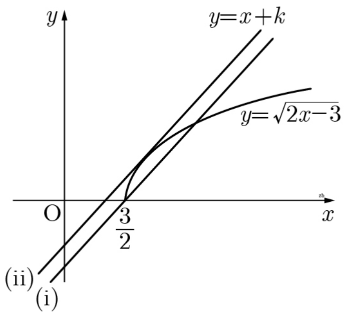
(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{2x-3}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$2x-3=x^2+2kx+k^2$
$x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\dfrac{D}{4}=0$이므로 $(k-1)^2-(k^2+3)=0$
$-2k-2=0 \qquad \therefore\ k=-1$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

한 점에서 만난다. ⇨ $k=-1$ 또는 $k<-\frac{3}{2}$

47) $-\frac{3}{2}\le k<-1$

⇨ 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때 $k=-\frac{3}{2}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 $\sqrt{2x-3}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$2x-3=x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$

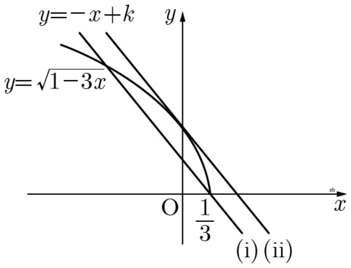
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=0$이므로 $(k-1)^2-(k^2+3)=0$

$-2k-2=0 \qquad \therefore\ k=-1$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $-\frac{3}{2}\le k<-1$

48) $k>\frac{13}{12}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$을 지날 때 $k=\frac{1}{3}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때 $\sqrt{1-3x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-3x=x^2-2kx+k^2$

$x^2-(2k-3)x+k^2-1=0$

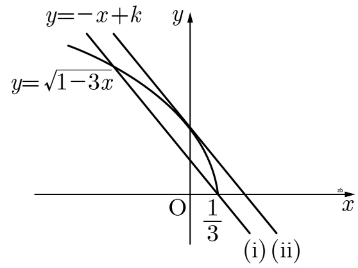
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-3)^2-4(k^2-1)=0$

$-12k+13=0 \qquad \therefore\ k=\frac{13}{12}$

만나지 않는다. ⇨ $k>\frac{13}{12}$

49) [정답]$k=\frac{13}{12}$ 또는 $k<\frac{1}{3}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$을 지날 때 $k=\frac{1}{3}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때 $\sqrt{1-3x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-3x=x^2-2kx+k^2$

$x^2-(2k-3)x+k^2-1=0$

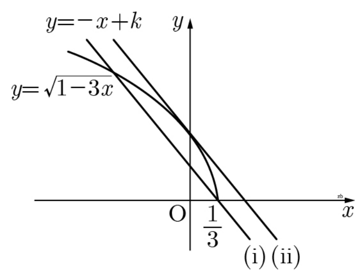
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이므로 $(2k-3)^2-4(k^2-1)=0$

$-12k+13=0 \qquad \therefore\ k=\frac{13}{12}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k=\frac{13}{12}$ 또는 $k<\frac{1}{3}$

50) $\frac{1}{3}\le k<\frac{13}{12}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$을 지날 때 $k=\frac{1}{3}$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때 $\sqrt{1-3x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-3x=x^2-2kx+k^2$

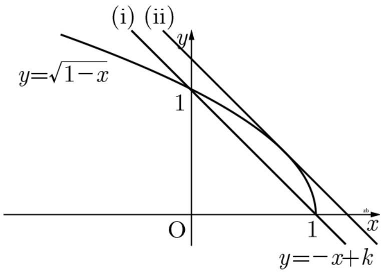
$x^2-(2k-3)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 D$=0$이므로 $(2k-3)^2-4(k^2-1)=0$

$-12k+13=0$ $\quad\quad\therefore\ k=\frac{13}{12}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $\frac{1}{3}\le k<\frac{13}{12}$

51) $k>\frac{5}{4}$

⇨ 

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k$ $\quad\quad\therefore\ k=1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때, $\sqrt{1-x}=-x+k$, $1-x=x^2-2kx+k$

$\therefore\ x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$

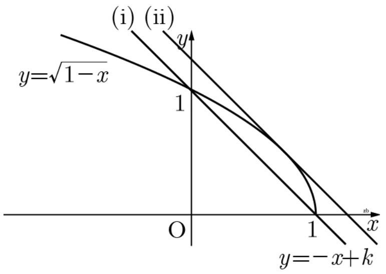
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

D$=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-1)=0$, $-4k+5=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

만나지 않는다. ⇨ $k>\frac{5}{4}$

52) $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

⇨ 

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k$ $\quad\quad\therefore\ k=1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때, $\sqrt{1-x}=-x+k$, $1-x=x^2-2kx+k$

$\therefore\ x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$

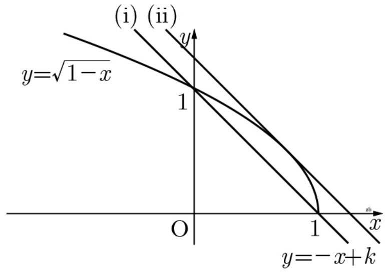
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

D$=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-1)=0$, $-4k+5=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

53) $1\le k<\frac{5}{4}$

⇨ 

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k$ $\quad\quad\therefore\ k=1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때, $\sqrt{1-x}=-x+k$, $1-x=x^2-2kx+k$

$\therefore\ x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

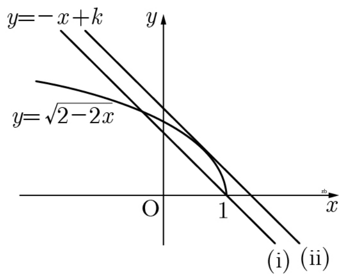
D$=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-1)=0$, $-4k+5=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $1\le k<\frac{5}{4}$

54) $k>\frac{3}{2}$

⇨ 함수 $y=\sqrt{2-2x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k=1$

(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{2-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때 $\sqrt{2-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$2-2x=x^2-2kx+k^2$ $(\because\ x\le 1)$

$x^2-2(k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\frac{\mathrm{D}}{4}=0$이므로 $(k-1)^2-(k^2-2)=0$, $-2k+3=0$

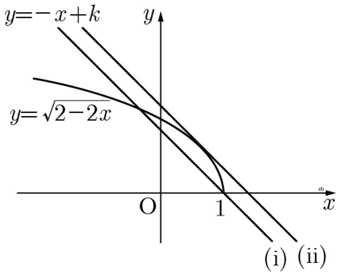
$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

만나지 않는다. ⇨ $k > \frac{3}{2}$

55) $k = \frac{3}{2}$ 또는 $k < 1$

⇨ 함수 $y = \sqrt{2-2x}$의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y = -x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(ⅰ) 직선 $y = x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k = 1$

(ⅱ) 함수 $y = \sqrt{2-2x}$의 그래프와 직선 $y = -x+k$가 접할 때 $\sqrt{2-2x} = -x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$2-2x = x^2-2kx+k^2$ ($\because\ x \le 1$)

$x^2-2(k-1)x+k^2-2 = 0$

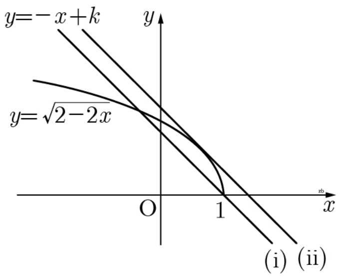
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4} = 0$이므로 $(k-1)^2-(k^2-2) = 0$, $-2k+3 = 0$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$

한 점에서 만난다. ⇨ $k = \frac{3}{2}$ 또는 $k < 1$

56) $1 \le k < \frac{3}{2}$

⇨ 함수 $y = \sqrt{2-2x}$의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 직선 $y = -x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(ⅰ) 직선 $y = x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k = 1$

(ⅱ) 함수 $y = \sqrt{2-2x}$의 그래프와 직선 $y = -x+k$가 접할 때 $\sqrt{2-2x} = -x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$2-2x = x^2-2kx+k^2$ ($\because\ x \le 1$)

$x^2-2(k-1)x+k^2-2 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4} = 0$이므로 $(k-1)^2-(k^2-2) = 0$, $-2k+3 = 0$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$

서로 다른 두 점에서 만난다. ⇨ $1 \le k < \frac{3}{2}$

57) 3

⇨ $(g \circ f^{-1})^{-1}(2)) = (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2))$

이때, $g^{-1}(2) = k$로 놓으면 $g(k) = 2$ 에서

$\sqrt{k+2} = 2$ $\qquad \therefore\ k = 2$

따라서 구하는 함숫값은 $f(g^{-1}(2)) = f(2) = 3$

58) $\frac{5}{2}$

⇨ $(f \circ g^{-1})(3) = (g^{-1}(3))$

이때, $g^{-1}(3) = k$로 놓으면 $g(k) = 3$에서

$\sqrt{2k+1} = 3$ $\qquad \therefore\ k = 4$

따라서 구하는 함숫값은 $f(g^{-1}(3)) = f(4) = \frac{5}{2}$

59) $\frac{2}{3}$

⇨ $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2))$

이때, $g^{-1}(2) = k$로 놓으면 $g(k) = 2$에서

$\sqrt{k-2} = 2$ $\qquad \therefore\ k = 6$

따라서 구하는 함숫값은 $f(g^{-1}(2)) = f(6) = \frac{2}{3}$

60) $\frac{5}{2}$

⇨ $((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(1) = (g^{-1} \circ f \circ g)(1)$

$= (g^{-1} \circ f)(g(1))$

$= (g^{-1} \circ f)(2)$

$= g^{-1}(f(2))$

$= g^{-1}(3)$

이때, $g^{-1}(3) = k$로 놓으면 $g(k) = 3$에서

$\sqrt{2k-1}+1 = 3$, $\sqrt{2k-1} = 2$ $\qquad \therefore\ k = \frac{5}{2}$

따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(3) = \frac{5}{2}$

61) 17

⇨ $(g^{-1} \circ f)(-3) = g^{-1}(f(-3))$

$= g^{-1}(4)$

이때, $g^{-1}(4) = k$로 놓으면 $g(k) = 4$에서

$\sqrt{k-1} = 4$ $\qquad \therefore\ k = 17$

따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(4) = 17$

62) -3

⇨ $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1)$

$= (g^{-1} \circ f)(1)$

$= g^{-1}(f(1))$

$=g^{-1}(1)$
이때, $g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$에서
$\sqrt{k+4}=1$ $\quad\therefore\ k=-3$
따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(1)=-3$

63) $\frac{2}{3}$
⇨ $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)=(g^{-1}\circ f)(-2)$
$=g^{-1}(f(2))$
$=g^{-1}(1)$
이때, $g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$에서
$\sqrt{3k-1}=1$ $\quad\therefore\ k=\frac{2}{3}$
따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(1)=\frac{2}{3}$

64) 10
⇨ $(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(7)=(f^{-1}\circ f\circ g^{-1})(7)$
$=g^{-1}(7)$
이때, $g^{-1}(7)=k$로 놓으면 $g(k)=7$에서
$\sqrt{2k-4}+3=7$ $\quad\therefore\ k=10$
따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(7)=10$

65) 13
⇨ $(f\circ(g\circ f)^{-1})(5)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(5)$
$=g^{-1}(5)$
이때, $g^{-1}(5)=k$로 놓으면 $g(k)=5$에서
$\sqrt{2k-1}=5$ $\quad\therefore\ k=13$
따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(5)=13$

66) 7
⇨ $((f\circ g^{-1})^{-1}\circ f)^{-1}(4)=(g\circ f^{-1}\circ f)^{-1}(4)$
$=g^{-1}(4)$
이때, $g^{-1}(4)=k$로 놓으면 $g(k)=4$에서
$\sqrt{k+2}+1=4$ $\quad\therefore\ k=7$
따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(4)=7$

67) 11
⇨ $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$
$=(g^{-1}\circ f)(3)$
$=g^{-1}(f(3))$
$=g^{-1}(5)$
이때, $g^{-1}(5)=k$로 놓으면 $g(k)=5$에서
$\sqrt{2k+3}=5$ $\quad\therefore\ k=11$
따라서 구하는 함숫값은 $g^{-1}(5)=11$

68) $y=(x-1)^2+1\ (x\ge 1)$
⇨ 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 치역이 $\{y|y\ge 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge 1\}$이다.
$y=\sqrt{x-1}+1$에서
$y-1=\sqrt{x-1}$, $(y-1)^2=x-1$
$\therefore\ x=(y-1)^2+1$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=(x-1)^2+1\ (x\ge 1)$

69) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\ (x\ge 2)$
⇨ $y=\sqrt{2x-1}+2$를 x에 대하여 풀면
$\sqrt{2x-1}=y-2$, $2x-1=(y-2)^2$
$x=\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}$
한편 $y=\sqrt{2x-1}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$이다.

70) $y=-(x+3)^2+2\ (x\ge -3)$
⇨ $y=\sqrt{2-x}-3$을 x에 대하여 풀면
$\sqrt{2-x}=y+3$, $2-x=(y+3)^2$
$x=-(y+3)^2+2$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=-(x+3)^2+2$
한편 $y=\sqrt{2-x}-3$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge -3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -3\}$이다.

71) $y=\frac{1}{2}(x-4)^2-3\ (x\le 4)$
⇨ 함수 $y=4-\sqrt{2x+6}$의 치역이 $\{y|y\le 4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le 4\}$이다.
$y=4-\sqrt{2x+6}$에서
$y-4=-\sqrt{2x+6}$, $(y-4)^2=2x+6$
$\therefore\ x=\frac{1}{2}(y-4)^2-3$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=\frac{1}{2}(x-4)^2-3\ (x\le 4)$

72) $y=\frac{1}{3}(x-1)^2+1\ (x\le 1)$
⇨ $y=-\sqrt{3x-3}+1$을 x에 대하여 풀면
$-\sqrt{3x-3}=y-1,l\ \ 3x-3=(y-1)^2$
$x=\frac{1}{3}(y-1)^2+1$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=\frac{1}{3}(x-1)^2+1$
한편 $y=-\sqrt{3x-3}+1$의 치역이 $\{y\,|\,y\le 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 1\}$이다.

73) $2\sqrt{2}$
⇨ 함수 $y=\sqrt{2x+4}-2$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{2x+4}-2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{2x+4}-2=x,\ \sqrt{2x+4}=x+2$
양변을 제곱하여 정리하면
$2x+4=x^2+4x+4,\ x^2+2x=0$
$x(x+2)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$
따라서 두 교점이 $(-2,\ -2)$, $(0,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(0+2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

74) $4\sqrt{2}$
⇨ $y=\sqrt{4x-4}+1$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{4x-4}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로
$\sqrt{4x-4}+1=x,\ \sqrt{4x-4}=x-1$
양변을 제곱하여 정리하면
$4x-4=x^2-2x+1,\ x^2-6x+5=0$
$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore\ x=1$ 또는 $x=5$
따라서 두 교점이 $(1,\ 1)$, $(5,\ 5)$이므로 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

75) $2\sqrt{2}$
⇨ 함수 $y=\sqrt{2x-2}+1$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{2x-2}+1$의 그래프와 직선 $y=\boxed{x}$의 교점과 같으므로
$\sqrt{2x-2}+1=x,\ \sqrt{2x-2}=x-1$
양변을 제곱하여 정리하면
$2x-2=x^2-2x+1,\ x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$
따라서 두 교점이 $(1,\ 1)$, $(3,\ 3)$이므로 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

76) $4\sqrt{2}$
⇨ 함수 $y=-\sqrt{12-4x}+3$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=-\sqrt{12-4x}+3$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로
$-\sqrt{12-4x}+3=x,\ -\sqrt{12-4x}=x-3$
양변을 제곱하여 정리하면
$12-4x=x^2-6x+9,\ x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 두 교점이 $(-1,\ -1)$, $(3,\ 3)$이므로 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(3+1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

77) $\sqrt{2}$
⇨ $y=-\sqrt{3-x}+3$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=-\sqrt{3-x}+3$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로
$-\sqrt{3-x}+3=x,\ -\sqrt{3-x}=x-3$
양변을 제곱하여 정리하면
$3-x=x^2-6x+9,\ x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$
따라서 두 교점이 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$이므로 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

78) 19
⇨ $y=\sqrt{2x-4}-1$이라고 하고 x에 대하여 풀면
$\sqrt{2x-4}=y+1,\ 2x-4=(y+1)^2$
$\therefore\ x=\frac{1}{2}(y+1)^2+2$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$
$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2+2\ \ (x\geq -1)$
$f(2))=\sqrt{2\cdot 2-4}-1=-1,\ f^{-1}(5)=\frac{1}{2}(5+1)^2+2=20$
$\therefore\ f(2)+f^{-1}(5)=-1+20=19$

79) 3
⇨ $y=-\sqrt{3x+15}+2$라 하고 x에 대하여 풀면
$-\sqrt{3x+15}=y-2,\ 3x+15=(y-2)^2$
$\therefore\ x=\frac{1}{3}(y-2)^2-5$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-5$
$\therefore\ f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}(x-2)^2-5\ \ (x\leq 2)$
$f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}(-1-2)^2-5=-2$
$f^{-1}(2)=\frac{1}{3}(2-2)^2-5=-5$
$\therefore\ f^{-1}(-1)-f^{-1}(2)=-2+5=3$

80) 2
⇨ $y=\sqrt{-2x+6}+4$라고 하고 x에 대하여 풀면
$\sqrt{-2x+y}=y-4,\ -2x+6=(y-4)^2$
$\therefore\ x=-\frac{1}{2}(y-4)^2+3$
x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+3$
$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2+3\ \ (x\geq 4)$
$f^{-1}(4)=-\frac{1}{2}(4-4)^2+3=3,\ f^{-1}(6)=-\frac{1}{2}(6-4)^2+3=1$
$\therefore\ f^{-1}(4)-f^{-1}(6)=3-1=2$

81) $k=8$
⇨ 함수 $y=\sqrt{k-x}$의 역함수의 그래프가 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$를 지나고, 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$와 직선 $y=x$에

대하여 대칭인 점은 점 $(4,\ 2)$이다.
따라서 함수 $y=\sqrt{k-x}$의 그래프는 점 $(4,\ 2)$를 지난다.
즉, $2=\sqrt{k-4}$이므로 $4=k-4$
$\therefore\ k=8$

82) $k=10$
⇨ 함수 $y=\sqrt{x+k}$의 역함수의 그래프가 점 $\mathrm{P}(4,\ 6)$을 지나고, 점 $\mathrm{P}(4,\ 6)$과 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점은 점 $(6,\ 4)$이다.
따라서 함수 $y=\sqrt{x+k}$의 그래프는 점 $(6,\ 4)$를 지난다.
즉, $4=\sqrt{6+k}$이므로 $16=6+k$
$\therefore\ k=10$