

03

인수분해

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 O, X 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	인수분해(1)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 02	인수분해(2)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 03	치환을 이용한 인수분해	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 04	복잡한 식의 인수분해	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 05	인수정리를 이용한 고차식의 인수분해	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
필수유형 06	인수분해의 활용(1) - 수의 계산, 식의 값	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
발전유형 07	인수분해의 활용(2) - 도형에서의 활용	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

필수유형 01 인수분해(1)

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(a-b)^2 - (a-b)$

(2) $5a^2 - 20a + 20$

(3) $27x^2 - 3$

(4) $x^3 - 5x^2 - 14x$

(5) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

풍뎡 POINT

- 공통인수가 있으면 공통인수로 먼저 묶고, 남은 식을 인수분해해.
- (5)와 같이 항이 4개인 경우 둘씩 짝 지어 공통인수를 찾아 인수분해할 수 있어.

풀이

- (1) 공통인수인 $a-b$ 로 묶고 인수분해하면

$$\begin{aligned}(a-b)^2 - (a-b) &= (a-b)\{(a-b) - 1\} \\ &= (a-b)(a-b-1)\end{aligned}$$

- (2) 공통인수인 5로 묶고 인수분해하면

$$\begin{aligned}5a^2 - 20a + 20 &= 5(a^2 - 4a + 4) \\ &= 5(a-2)^2\end{aligned}$$

- (3) 공통인수인 3으로 묶고 인수분해하면

$$\begin{aligned}27x^2 - 3 &= 3(9x^2 - 1) \text{ ①} \\ &= 3\{(3x)^2 - 1^2\} \\ &= 3(3x+1)(3x-1)\end{aligned}$$

① 공통인수로 묶어서 $A^2 - B^2$ 꼴로 변형한 후 제곱의 합차 공식을 이용한다.

- (4) 공통인수인 x 로 묶고 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 - 14x &= x(x^2 - 5x - 14) \\ &= x(x-7)(x+2)\end{aligned}$$

- (5) 둘씩 짝 지어 공통인수를 찾아 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= (x^3 - 2x^2) + (-4x + 8) \\ &= x^2(x-2) - 4(x-2) \\ &= (x-2)(x^2 - 4) \\ &= (x-2)(x-2)(x+2) \\ &= (x-2)^2(x+2)\end{aligned}$$

답 (1) $(a-b)(a-b-1)$ (2) $5(a-2)^2$ (3) $3(3x+1)(3x-1)$
(4) $x(x-7)(x+2)$ (5) $(x-2)^2(x+2)$

풍뎡 강의 NOTE

인수분해할 때 공통인수가 있으면 가장 먼저 공통인수로 묶어서 정리한다.

01-1 유사

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x+y)-(a-b)(x+y)$

(2) $3x^2-18x+27$

(3) $2a^3-2a$

(4) $ax^2+3ax-10a$

(5) $a^3-3a^2-4a+12$

01-2 변형

$x^2-3x^2y+3xy^2-y^2=(x+ay)(x+y+bxy)$ 일 때,
상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

01-3 변형

$(2x-3)^2-(x+4)^2=(ax+1)(x+b)$ 일 때, 상수
 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

01-4 변형

기출

x 에 대한 다항식 $x(x+2)+a$ 가 이차식 $(x+b)^2$ 으로
인수분해될 때, 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하여라.

01-5 변형

일차항의 계수가 자연수인 세 일차식의 곱이
 $3x^3-4x^2-4x$ 일 때, 세 일차식의 합을 구하여라.

01-6 실력

다항식 $x^2+Ax+180$ 이 $(x+a)(x+b)$ 로 인수분해될
때, A 의 값이 될 수 있는 수의 개수를 구하여라.
(단, $a < b$ 인 정수이다.)

필수유형 02 인수분해(2)

다음 식을 인수분해하여라.

$$(1) 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4zx$$

$$(2) 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

$$(3) 27x^3 - 64y^3$$

$$(4) a^3 + 8b^3 + 27 - 18ab$$

$$(5) 81a^4 + 36a^2b^2 + 16b^4$$

풍뎡 POINT

- 인수분해 공식을 완벽히 외우고 비슷한 형태가 보이면 적용해 보.
- (3)과 같이 항이 2개이고 세제곱인 식은 세제곱의 합차 공식을 이용해.

풀이

$$(1) 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4zx$$

$$= (2x)^2 + (-3y)^2 + z^2 + 2 \times 2x \times (-3y) + 2 \times (-3y) \times z + 2 \times z \times 2x$$

$$= (2x - 3y + z)^2$$

$$(2) 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

$$= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3y + 3 \times 2x \times (3y)^2 - (3y)^3$$

$$= (2x - 3y)^3$$

$$(3) 27x^3 - 64y^3$$

$$= (3x)^3 - (4y)^3$$

$$= (3x - 4y) \{ (3x)^2 + 3x \times 4y + (4y)^2 \}$$

$$= (3x - 4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$$

$$(4) a^3 + 8b^3 + 27 - 18ab$$

$$= a^3 + (2b)^3 + 3^3 - 3 \times a \times 2b \times 3$$

$$= (a + 2b + 3) \{ a^2 + (2b)^2 + 3^2 - a \times 2b - 2b \times 3 - 3 \times a \}$$

$$= (a + 2b + 3)(a^2 + 4b^2 + 9 - 2ab - 6b - 3a)$$

$$(5) 81a^4 + 36a^2b^2 + 16b^4$$

$$= (3a)^4 + (3a)^2 \times (2b)^2 + (2b)^4$$

$$= \{ (3a)^2 + 3a \times 2b + (2b)^2 \} \{ (3a)^2 - 3a \times 2b + (2b)^2 \}$$

$$= (9a^2 + 6ab + 4b^2)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$$

① y 를 포함한 항이 음수이므로 인수분해할 때에도 y 를 포함한 항을 음수로 나타낸다.

$$\text{답} (1) (2x - 3y + z)^2$$

$$(2) (2x - 3y)^3$$

$$(3) (3x - 4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$$

$$(4) (a + 2b + 3)(a^2 + 4b^2 + 9 - 2ab - 6b - 3a)$$

$$(5) (9a^2 + 6ab + 4b^2)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$$

풍뎡 강의 NOTE

- 일반적으로 계수가 유리수인 다항식의 인수분해는 계수가 유리수인 범위까지만 한다.
- 곱셈 공식은 외우지 않아도 분배법칙을 이용하여 전개할 수 있지만, 인수분해는 공식을 모르면 빠르게 인수분해를 할 수 없으므로 반드시 암기한다.

02-1 유사

다음 식을 인수분해하여라.

- (1) $4a^2 + 9b^2 + 1 + 12ab - 4a - 6b$
- (2) $64x^3 + 48x^2 + 12x + 1$
- (3) $8a^3 + b^3$
- (4) $8x^3 - y^3 + 27z^3 + 18xyz$
- (5) $256x^4 + 16x^2 + 1$

02-2 변형

다음 식을 인수분해하여라.

- (1) $x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4$
- (2) $x^4 - 27x$
- (3) $a^3 - b^3 - 27 - 9ab$

02-3 변형

다음 인수분해한 것 중 옳지 않은 것은?

- ① $8a^3 + 27 = (2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$
- ② $a^3 - 27b^3 = (a - 3b)(a^2 + 6ab + 9b^2)$
- ③ $16a^4 + 4a^2b^2 + b^4$
 $= (4a^2 + 2ab + b^2)(4a^2 - 2ab + b^2)$
- ④ $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 = (a + 2b)^3$
- ⑤ $a^3 + b^3 - 27c^3 + 9abc$
 $= (a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3bc + 3ca)$

02-4 변형

기출

다항식 $x^3 - 80$ 이 $(x - a)(x^2 + bx + 4)$ 로 인수분해될 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

02-5 변형

$x^6 - y^6$ 을 인수분해하여라.

02-6 실력

다음 등식에서 □ 안에 알맞은 식을 구하여라.

$$\begin{aligned} & a^2(a+1) + b^2(b+1) - ab \\ &= (a+b+1)(\square) \end{aligned}$$

필수유형 03 치환을 이용한 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x^2 - 2x - 5)(x^2 - 2x - 6) - 6$

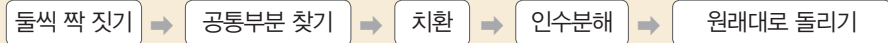
(2) $x(x+1)(x+2)(x+3) - 8$

**풍샘
POINT**

• (1)과 같이 공통부분이 있는 복잡한 식의 인수분해



• (2)와 같이 $(\quad)(\quad)(\quad)(\quad) + k$ 꼴의 인수분해



풀이 • (1) STEP1 치환한 식을 인수분해하기

$x^2 - 2x = t$ ①로 치환하여 인수분해하면

① 공통부분을 한 문자로 치환한다.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x - 5)(x^2 - 2x - 6) - 6 &= (t - 5)(t - 6) - 6 \\ &= t^2 - 11t + 24 \\ &= (t - 3)(t - 8) \end{aligned}$$

STEP2 원래의 식으로 되돌리고 다시 인수분해하기

위의 식에 $t = x^2 - 2x$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} (t - 3)(t - 8) &= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8) \\ &= (x - 3)(x + 1)(x - 4)(x + 2) \end{aligned}$$

(2) STEP1 둘씩 짝 지어 전개하기

전개했을 때 $x^2 + 3x$ 가 나오도록 짝 지어 전개하면 ②

② 두 일차식의 상수항의 합이 같게 짝을 지어 전개한다.

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3) - 8 &= \{x(x+3)\} \{(x+1)(x+2)\} - 8 \\ &= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 8 \end{aligned}$$

STEP2 치환한 식을 인수분해하기

$x^2 + 3x = t$ 로 치환하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 8 &= t(t + 2) - 8 = t^2 + 2t - 8 \\ &= (t - 2)(t + 4) \end{aligned}$$

STEP3 원래의 식으로 되돌리기

위의 식에 $t = x^2 + 3x$ 를 대입하면

$$(t - 2)(t + 4) = (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x + 4)$$

☞ (1) $(x - 3)(x + 1)(x - 4)(x + 2)$ (2) $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x + 4)$

**풍샘 강의
NOTE**

치환하여 인수분해한 후 원래 문자로 되돌려 놓을 때, 부호가 틀리지 않도록 주의한다.
또, 각각의 인수가 더 인수분해가 되는지 반드시 확인한다.

03-1 기본

다음 식을 인수분해하여라.

- (1) $x^4 - 5x^2 + 4$
 (2) $(x-y)(x-y-2) - 24$
 (3) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8$

03-2 유사

다음 식을 인수분해하여라.

- (1) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 3) - 5$
 (2) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) + 4$

03-3 변형

다항식 $(x^2 + x - 10)(x^2 + x - 16) - 400$ 이
 $(x+a)(x-4)(x+b)(x-2)$ 로 인수분해될 때, 상
 수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하여라.

03-4 변형

다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$ 가 계수가
 정수인 일차식 2개와 이차식 1개로 인수분해될 때, 세
 식의 합을 구하여라.

03-5 변형

기출

다항식 $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 30$ 이
 $(x^2 + ax - 1)(x^2 + x + b)$ 로 인수분해될 때, 상수 a, b
 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

03-6 실력

x 의 계수가 1인 이차식 $f(x)$ 에 대하여 다항식
 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4) + kf(x)^2$ 꼴로
 나타내어질 때, $kf(1)$ 의 값을 구하여라.
 (단, k 는 상수이다.)

필수유형 04 복잡한 식의 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2 - y^2 + 8x + 16$

(2) $a^4 - 13a^2 + 4$

(3) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$

풍뎡
POINT

- (1) 항 나누기 → 완전제곱식으로 바꾸기 → 합차 공식 적용
- (2) a^2 항을 적당히 나누기 → $A^2 - B^2$ 꼴로 만들기 → 합차 공식 적용
- (3)과 같이 문자가 여러 개인 다항식의 경우, 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 다른 문자 부분을 먼저 인수분해해.

풀이 • (1) STEP1 1개의 항과 3개의 항으로 나누기

3개의 항이 완전제곱식이 되도록 자리를 바꾸면

$$x^2 - y^2 + 8x + 16 = (x^2 + 8x + 16) - y^2$$

STEP2 3개의 항을 완전제곱식으로 바꾼 후, 합차 공식 적용하기

$$\begin{aligned} (x^2 + 8x + 16) - y^2 &= (x + 4)^2 - y^2 \\ &= \{(x + 4) + y\} \{(x + 4) - y\} \\ &= (x + y + 4)(x - y + 4) \end{aligned}$$

(2) STEP1 완전제곱식이 되도록 a^2 항을 적당히 나누기

$$\begin{aligned} a^4 - 13a^2 + 4 &= a^4 - 4a^2 - 9a^2 + 4 \\ &= (a^4 - 4a^2 + 4) - 9a^2 \end{aligned}$$

STEP2 3개의 항을 완전제곱식으로 바꾼 후, 합차 공식 적용하기

$$\begin{aligned} (a^4 - 4a^2 + 4) - 9a^2 &= (a^2 - 2)^2 - 9a^2 \\ &= \{(a^2 - 2) + 3a\} \{(a^2 - 2) - 3a\} \\ &= (a^2 + 3a - 2)(a^2 - 3a - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a^4 - 4a^2 + 4 \\ &= a^4 - 2 \times a^2 \times 2 + 2^2 \\ &= (a^2 - 2)^2 \end{aligned}$$

(3) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - y^2 - 2y + 3 &= x^2 - 4x - (y^2 + 2y - 3) \\ &= x^2 - 4x - (y + 3)(y - 1) \textcircled{2} \\ &= \{x - (y + 3)\} \{x + (y - 1)\} \\ &= (x - y - 3)(x + y - 1) \end{aligned}$$

② 합이
 $-4 = -(y + 3) + (y - 1)$,
 곱이 $-(y + 3)(y - 1)$ 인 두
 다항식 $-(y + 3)$, $y - 1$ 을 찾
 는다.

답 (1) $(x + y + 4)(x - y + 4)$ (2) $(a^2 + 3a - 2)(a^2 - 3a - 2)$ (3) $(x - y - 3)(x + y - 1)$

풍뎡 강의
NOTE

$x^4 + ax^2 + b$ 에서 kx^2 을 적당히 빼거나 더하여 $x^4 + (a + k)x^2 + b$ 가 완전제곱식이 되도록 k 의 값을 정한 후, $x^4 + (a + k)x^2 + b - kx^2$ 의 형태로 나타내어야 한다.

04-1 유사

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2 - b^2 + 6b - 9$

(2) $x^4 - 8x^2 + 4$

(3) $x^2 + 4xy + 3y^2 - x + y - 2$

04-2 변형

기출

다항식 $x^4 + 9x^2 + 25$ 가 $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)$ 로 인수분해될 때, 양수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

04-3 변형

다음 식을 인수분해하여라.

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 - x + 7y - 3$$

04-4 변형

다항식 $x^6 - 7x^4 + 9x^2$ 이 3개의 이차식으로 인수분해될 때, 세 이차식의 합을 구하여라.

04-5 실력

다음 식을 인수분해하여라.

$$xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z-x)$$

04-6 실력

다항식 $4x^3 + 4(y+1)x^2 + (y^2 + 4y - 9)x + y^2 - 9$ 가 $(x+a)(2x+by+c)(2x+by-c)$ 로 인수분해될 때, 양수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

필수유형 05 인수정리를 이용한 고차식의 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

(2) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

**풍샘
POINT**

인수정리를 이용하여 고차식을 인수분해하는 방법

인수정리로 인수 찾기



조립제법으로 몫 구하기



몫을 인수분해하기

풀이 ● (1) STEP1 인수정리로 인수 찾기

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \text{ 이라고 하면}$$

$$f(1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$$

이므로 $x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이다.

STEP2 조립제법을 이용하여 몫 구하기

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x^2 - 2x - 8)$$

STEP3 몫을 인수분해하기

$$x^2 - 2x - 8 \text{을 인수분해하면 } x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$$

$$\therefore x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x+2)(x-4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

(2) STEP1 인수정리로 인수 찾기

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \text{ 이라고 하면}$$

$$f(1) = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0,$$

$$f(-1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$$

이므로 $x-1$, $x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이다.

STEP2 조립제법을 이용하여 몫 구하기

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 $x-1$, $x+1$ 로 나누면

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$$= (x-1)(x^3 - 7x - 6) \text{ ①}$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$$

STEP3 몫을 인수분해하기

$$x^2 - x - 6 \text{을 인수분해하면 } x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

$$\therefore x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & & 0 \end{array}$$

① 몫이 삼차 이상인 다항식이면 몫이 이차 이하가 될 때까지 계속 나눈다.

$$\text{답 (1) } (x-1)(x+2)(x-4) \quad (2) (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

**풍샘 강의
NOTE**

- 다항식 $f(x)$ 에서 $f(a)=0$ 인 a 의 값을 찾을 때, 계산하기 쉬운 $-1, 0, 1$ 부터 차례대로 대입해 본다.
- 고차식을 인수분해할 때, 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 계속 해야 한다.

05-1 유사

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

(2) $6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

05-2 유사

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 20$

(2) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

05-3 변형

모든 실수 x 에 대하여 등식

$$x^3 - 2x^2 - x + 14 = (x+a)(x^2+bx+7)$$

이 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

(단, a, b 는 상수이다.)

기술

05-4 변형

다항식 $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + ax + b$ 가 $x^2 - 2x - 3$ 을 인수로 가질 때, 다음 중 이 다항식의 인수가 될 수 있는 것은? (단, a, b 는 상수이다.)

① $(x-3)^2$

② $(x+2)^2$

③ $(x-1)(x+2)$

④ $(x+1)(x+3)$

⑤ $(x+2)(x+3)$

05-5 실력

다항식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 2$ 를 인수분해하면

$(x+1)(x+2)Q(x)$ 가 될 때, 다항식 $Q(x)$ 를 구하여라.

05-6 실력

삼차식 $x^3 - (n+1)x + n$ 이 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

꼴로 인수분해될 때, 다음 중 자연수 n 의 값이 될 수 있는 것은? (단, α, β, γ 는 서로 다른 상수이다.)

① 8

② 10

③ 12

④ 15

⑤ 18

필수유형 06 인수분해의 활용(1) - 수의 계산, 식의 값

다음 물음에 답하여라.

(1) $10^2 - 12^2 + 14^2 - 16^2 + 18^2 - 20^2$ 의 값을 구하여라.

(2) $\frac{206^3 + 1}{206 \times 205 + 1}$ 의 값을 구하여라.

(3) $x + y = 2$, $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 4$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값을 구하여라.

**품셈
POINT**

• (2)와 같이 복잡한 수를 계산할 때, 반복적으로 나타나는 수를 치환하여 인수분해한 후 치환한 수를 돌려놓고 수를 계산해.

• (3)과 같은 식의 값은 주어진 식을 인수분해하여 나온 식에 값을 대입해.

풀이 (1) 각 항을 둘씩 짝 짓고 합차 공식을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} & 10^2 - 12^2 + 14^2 - 16^2 + 18^2 - 20^2 \\ &= (10^2 - 12^2) + (14^2 - 16^2) + (18^2 - 20^2) \\ &= \{(10-12)(10+12)\} + \{(14-16)(14+16)\} \\ &\quad + \{(18-20)(18+20)\} \quad \text{① 합차 공식} \\ &= \{(-2) \times 22\} + \{(-2) \times 30\} + \{(-2) \times 38\} \\ &\quad \quad \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ &= -2(22 + 30 + 38) \\ &= -2 \times 90 = -180 \end{aligned}$$

(2) $206 = k$ 로 놓으면 $205 = k - 1$

$$\begin{aligned} \frac{206^3 + 1}{206 \times 205 + 1} &= \frac{k^3 + 1}{k(k-1) + 1} = \frac{(k+1)(k^2 - k + 1)}{k^2 - k + 1} \\ &= k + 1 = 206 + 1 = 207 \end{aligned}$$

(3) **STEP1** 주어진 조건을 이용하여 xy 의 값 구하기

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 &= (x^3 + y^3) + (x^2y + xy^2) \\ &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x+y) \\ &= (x+y)(x^2 + y^2) \\ &= (x+y)\{(x+y)^2 - 2xy\} \quad \text{② 곱셈 공식의 변형} \\ &= 2(4 - 2xy) = 4 \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 \\ &= (x+y)^2 - 2xy \end{aligned} \end{aligned}$$

이므로 $xy = 1$

STEP2 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2}{1} = 2$$

☞ (1) -180 (2) 207 (3) 2

**품셈 강의
NOTE**

인수분해를 활용한 수의 계산이나 식의 계산에서 자주 이용되는 인수분해 공식

① $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

② $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

③ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

④ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

06-1 유사

$16^2 - 15^2 + 14^2 - 13^2 + 12^2 - 11^2$ 의 값을 구하여라.

06-2 유사

$\frac{365^3 + 1}{365^2 - 365 + 1}$ 의 값을 구하여라.

기출

06-3 변형

$51^2 + 52^2 + 53^2 + 54^2 - (46^2 + 47^2 + 48^2 + 49^2)$ 의 값을 구하여라.

06-4 실력

$a = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 일 때, $a^6 - b^6$ 의 값을 구하여라.

06-5 실력

$x = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $\frac{x^4 - x^3 - 8x + 8}{x^2 + 2x + 4}$ 의 값을 구하여라.

06-6 실력

$\sqrt{10 \times 13 \times 14 \times 17 + 36}$ 의 값을 구하여라.

기출



다음 물음에 답하여라.

- (1) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.
- (2) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

**풍뎡
POINT**

여러 개의 문자를 포함한 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해한 후, 삼각형의 모양을 판단한다.

풀이 •

- (1) STEP1 주어진 식을 인수분해하기

등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0 \end{aligned}$$

STEP2 a, b, c 사이의 관계식 구하기

그런데 $a+b+c>0$ ^①이므로

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

즉, $a-b=0, b-c=0, c-a=0$ ^②이므로 $a=b=c$

따라서 정삼각형이다.

① a, b, c 는 삼각형의 변의 길이이므로 모두 양수이다.

② $A^2+B^2=0$ 이면 $A=0$ 이고 $B=0$

- (2) STEP1 주어진 식의 좌변을 인수분해하기

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} & a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2 \\ &= -(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ &= -(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0 \end{aligned}$$

STEP2 a, b, c 사이의 관계식 구하기

그런데 $a+b>0$ ^④이므로 $-c^2+a^2+b^2=0$ 에서 $a^2+b^2=c^2$

따라서 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

③ 문자가 여러 개일 때에는 보통 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

④ a, b 는 삼각형의 변의 길이이므로 모두 양수이다.

☞ (1) 정삼각형 (2) 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

**풍뎡 강의
NOTE**

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c 일 때

- ① $a=b=c$ 이면 정삼각형이고, $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ 이면 이등변삼각형이다.
- ② 가장 긴 변의 길이가 c 일 때
- (i) $c^2>a^2+b^2$ 이면 둔각삼각형 (ii) $c^2=a^2+b^2$ 이면 직각삼각형
- (iii) $c^2<a^2+b^2$ 이면 예각삼각형

07-1 유사

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^4 + b^2c^2 = a^2c^2 + b^4$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

07-2 유사

세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에서 $a^3 + 8b^3 + 8c^3 = 12abc$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.


07-3 변형

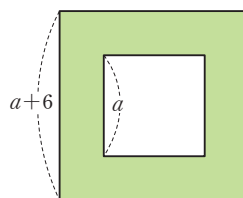
c 를 빗변의 길이로 하는 직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2b + b^2c - b^3 - a^2c = 0$ 이 성립할 때, c 를 a 에 대한 식으로 나타내어라.

07-4 변형

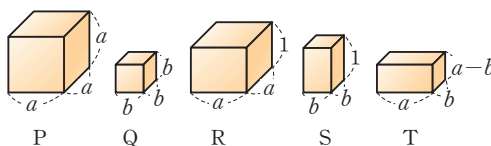
삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 $(b-c)a^2 + (c-a)b^2 + (a-b)c^2 = 0$ 을 만족시킬 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

07-5 변형

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $a+6$ 인 정사각형 모양의 색종이에서 한 변의 길이가 a 인 정사각형 모양의 색종이를 오려 내었다. 오려 낸 후 남아 있는  모양의 색종이의 넓이가 $k(a+3)$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

**07-6** 실력

두 양수 a, b ($a > b$)에 대하여 다음 그림과 같은 직육면체 P, Q, R, S, T의 부피를 각각 p, q, r, s, t 라고 하자.



$p = q + r + s + t$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

실전 연습 문제

01

다음 인수분해한 것 중 옳은 것은?

- ① $x-2y+4x(2y-x)=(x-2y)(4x-1)$
- ② $x^3+8y^3=(x-2y)(x^2+2xy-4y^2)$
- ③ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca=(a+b-c)^2$
- ④ $x^3+8y^3-6xy+1$
 $= (x+2y+1)(x^2+4y^2+1-2xy-x-2y)$
- ⑤ $a^3-ab^2-b^2c+a^2c=(a+b)(a-b)(a-c)$

02

다음 중 x^8-y^8 의 인수가 아닌 것은?

- ① $x+y$ ② x^2+y^2 ③ x^2-y^2
- ④ x^3+y^3 ⑤ x^4+y^4

03 서술형

$x^3+y^3+3xy-1=20$, $x^2+y^2-xy+x+y=9$ 일 때,
 $x+y$ 의 값을 구하여라.

04

기출

다항식 x^3+270 이 $(x+3)(x^2+ax+b)$ 로 인수분해될
 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 2
- ④ 4 ⑤ 6

05

x, y 에 대한 서로 다른 두 일차식 A, B 에 대하여
 $AB=(x+y)(x+y+4)+3$ 일 때, $A+B$ 를 구하여
 라.

06

다항식 x^4-8x^2+16 을 인수분해하면

$(x+a)^2(x+b)^2$ 이다. $\frac{2024}{a-b}$ 의 값을 구하여라.

(단, $a>b$)

07

다음 중 다항식 $(x^2+x-3)(x^2-4x-3)+6x^2$ 의 인수가 아닌 것은?

- ① $x-3$ ② $x+1$ ③ x^2-x-3
 ④ x^2-2x-3 ⑤ x^2-2x+3

08 서술형

다항식 x^4+2x^2+9 를 인수분해하면 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 일 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

09

기출

다항식 $x^2+y^2-2(xy+x-y)-3$ 을 인수분해하면 $(x-y+a)(x+by+1)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① -4 ② -3 ③ -2
 ④ -1 ⑤ 0

10

다음 중 다항식 $x^2y^2-x^2-y^2+1-4xy$ 의 인수인 것은?

- ① $xy-x-y+1$ ② $xy-x+y+1$
 ③ $xy+x-y-1$ ④ $xy+x+y-1$
 ⑤ $xy+x+y+1$

11

기출

다항식 $2x^3-3x^2-12x-7$ 을 인수분해하면 $(x+a)^2(bx+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

(단, a, b, c 는 상수이다.)

- ① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2

12

다항식 $2x^3+3x^2+6x-4$ 를 인수분해하면 $(2x+a)(x^2+bx+c)$ 일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값은?

- ① -8 ② -4 ③ 1
 ④ 4 ⑤ 8

13

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 일 때,
 x^2y+xy^2+x+y 의 값을 구하여라.

기출

14

10이 아닌 두 자연수 a, b ($a < b$)에 대하여

$$11^4 - 6^4 = a \times b \times 157$$

로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 21 ② 22 ③ 23
 ④ 24 ⑤ 25

기출

15 서술형

세 실수 a, b, c 에 대하여

$$[a, b, c] = (a-b)(a-c)$$

로 정의할 때, $[a, b, b] + 4[c, a, b]$ 를 인수분해하여라.

16

$x^3 - y^3 + x^2z + xz^2 - y^2z - yz^2 = 0$ 일 때, 다음 중 실수
 x, y, z 사이의 관계식으로 옳은 것은? (단, $xyz \neq 0$)

- ① $x+2y=0$ ② $x=y$ ③ $y=z$
 ④ $x=y=z$ ⑤ $x+y+z=0$

17

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여

$$a^4 + b^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2 - b^2c^2 = 0$$

이 성립할 때, 삼각형 ABC의 모양으로 옳은 것만을
 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

|보기|

- ㄱ. 정삼각형
 ㄴ. b 가 빗변인 직각삼각형
 ㄷ. $a=b$ 인 이등변삼각형
 ㄹ. $b=c$ 인 이등변삼각형

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

01

100개의 다항식

$$x^2 - x - 1, x^2 - x - 2, \dots, x^2 - x - 100$$

중에서 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 것의 개수를 구하여라.

02

기출

$n^4 - 6n^2 + 25$ 의 값이 소수가 되게 하는 정수 n 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

임의의 실수 a, b, c 에 대하여

$$b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a) + a^2b^2(a-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\times \{A(a^2+b^2+c^2) + B(ab+bc+ca)\}$$

가 성립할 때, $A+B$ 의 값을 구하여라.

(단, A, B 는 상수이다.)

04

기출

$2018^3 - 27$ 을 $2018 \times 2021 + 9$ 로 나눈 몫은?

- ① 2015 ② 2025 ③ 2035
④ 2045 ⑤ 2055

05

다항식 $x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 주어진 다항식을 x 에 대한 다항식 $f(x)$ 로 생각할 때, $f(y)$ 의 값을 구하여라.
 (2) (1)의 결과와 인수정리를 이용하여 주어진 다항식을 인수분해하여라.

06

다음 식을 인수분해하여라.

$$(xy - yz)^3 + (yz - zx)^3 + (zx - xy)^3$$

07

기출

등식

$$(182\sqrt{182} + 13\sqrt{13}) \times (182\sqrt{182} - 13\sqrt{13}) = 13^4 \times m$$

을 만족시키는 자연수 m 의 값은?

- ① 211 ② 217 ③ 223
 ④ 229 ⑤ 235

08

기출

다음 그림과 같이 여덟 개의 정삼각형으로 이루어진 정팔면체가 있다. 여섯 개의 꼭짓점에는 자연수를 적고 여덟 개의 정삼각형의 면에는 각각의 삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 수의 곱을 적는다. 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합이 105일 때, 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수들의 합을 구하여라.

