01 적분 구간이 상수인 경우

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$($a$, b는 상수)의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ $\int_a^b f(t)dt=k$(k는 상수)로 놓고 $f(x)=g(x)+k$임을 이용한다.

◪ 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 주어진 식을 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

1. $f(x)=2x+\int_0^2 f(t)dt$

2. $f(x)=12x-2+2\int_0^1 f(t)dt$

3. $f(x)=x^2-x+\int_0^2 f(t)dt$

4. $f(x)=x^2-2x+3\int_0^1 f(t)dt$

5. $f(x)=3x^2+x+\int_0^2 f(t)dt$

6. $f(x)=3x^2+2x+2\int_0^1 f(t)dt$

7. $f(x)=3x^2+4x-\int_0^2 f(t)dt$

8. $f(x)=-3x^2+2x+\int_0^2 f(t)dt$

9. $f(x)=2x-3\int_0^2 f(t)dt$

10. $f(x)=x^3-2x+\int_0^1 f'(y)dy$

11. $f(x)=x^3-4x^2+3x\int_0^1 f(t)dt$

12. $f(x)=x^2-2x+\int_0^1 tf(t)dt$

13. $f(x)=x^2-3x+\int_0^1 tf(t)dt$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

02 적분 구간에 변수가 있는 경우

(1) $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ 양변을 x에 대하여 미분하고 $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용한다.

(2) $\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ 좌변을 $x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

◪ 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $f(x)$를 구하여라.

14. $\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x$

15. $\int_0^x f(t)dt=x^3-1$

16. $\int_0^x f(t)\,dt=x^3+5x^2-4x+1$

◪ 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족하는 상수 a의 값과 다항함수 $f(x)$를 각각 구하여라.

17. $\int_a^x f(t)dt=x^2-4x+4$

18. $\int_a^x f(t)dt=x^2+3x-4$

19. $\int_a^x f(t)dt=x^2+6x+9$

20. $\int_a^x f(t)dt=x^3+1$

21. $\int_a^x f(t)dt=x^3+8$

22. $\int_a^x f(t)dt=x^3-1$

23. $\int_a^x f(t)dt=x^3+x^2-ax-1$

24. $\int_a^x f(t)dt=x^3-x^2-x+a$ (단, a는 양수)

◪ 다음 물음에 답하여라.

25. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_2^x f(t)\,dt=x^2-ax-6$을 만족할 때, $f(5)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

26. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)\,dt=x^2+2ax-a$을 만족할 때, $f(5)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

27. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt = x^3 + x^2 + ax$를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수)

28. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + ax + 1$을 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수)

29. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)\,dt = x^3 - 2ax^2 + ax$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

30. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt = x^4 + x^3 - 2ax$를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

31. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x (t-1)f(t)dt = x^3 - x^2 - x + a$를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수)

32. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x (t+1)f(t)dt = x^3 + x^2 - x + a$를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

◪ 다음 물음에 답하여라.

33. 임의의 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $x^2 f(x) = 2x^6 - x^4 + 2\int_1^x tf(t)dt$를 만족할 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

34. 임의의 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $x^2 f(x) = 3x^6 - x^4 + 2\int_1^x tf(t)\,dt$를 만족할 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

35. 임의의 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $xf(x) = x^4 - 2x^2 + \int_a^x tf'(t)dt$를 만족할 때, $f(2)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

36. 임의의 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + \int_a^x f(t)dt$, $f(0) = 0$을 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

37. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^4-2x^2+1$이 성립할 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

38. 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=3x^2+\int_{0}^{1}(2x-1)f(t)dt$를 만족할 때, $\int_{0}^{1}f(x)dx$의 값을 구하여라.

03 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소

$f(x)=\int_{a}^{x}g(t)dt$(a는 상수)로 정의된 다항함수 $f(x)$의 극값은
⇨ 양변을 x에 대하여 미분한 후 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

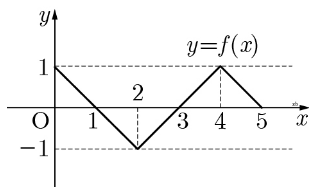
39. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2+t-2)dt$의 극솟값을 구하여라.

40. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2-2t-3)dt$의 극댓값을 구하여라.

41. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(t^2-4t+3)dt$의 극댓값과 극솟값의 합을 구하여라.

42. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2-6t+8)dt$의 극댓값을 구하여라.

43. $0\le x\le 5$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 극솟값을 구하여라.



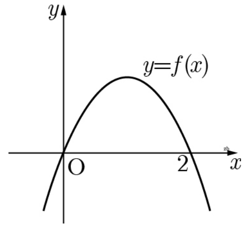
04 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소

주어진 닫힌구간에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값과 양 끝값에서의 함숫값 중 최댓값과 최솟값을 찾는다.

◪ 다음 물음에 답하여라.

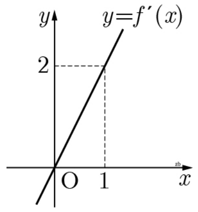
44. 구간 $[-1, 0]$에서 함수 $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^2+t)dt$의 최솟값을 구하여라.

45. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 최솟값을 구하여라.



I410-ECN-0199-2019-001-000244110

46. $f(0)=2$인 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $F(x)=\int_0^1 f(x-t)dt$의 최솟값을 구하여라.



05 정적분으로 정의된 함수의 극한

(1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

◪ 다음 극한값을 구하여라.

47. $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h (x^2+2x-8)\,dx$

48. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (x-1)(x+3)\,dx$

◪ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, 다음 극한값을 구하여라.

49. $f(x)=x^2+2x-1$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$의 값

50. $f(x)=(x-1)^3$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$의 값

51. $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$의 값

52. $f(x)=(x+1)^3$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$의 값

53. $f(x)=4x^2-3x+1$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$의 값

54. $f(x)=x^3+2x^2+x$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$의 값

55. $f(x)=x^2+3x-2$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$의 값

56. $f(x)=4x-3$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{1+x} f(t)dt$의 값

57. $f(x)=2x^2+3x+1$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h} f(x)dx$의 값

58. $f(x)=3x^2+1$**일 때,** $\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_3^{3+x}f(t)dt$**의 값**

59. $f(x)=\int_0^x(3t^2-2t+1)dt$**일 때,**

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$**의 값**

60. $f(x)=x^3-4x^2+1$**일 때,** $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_4^{x^2}f(t)dt$**의 값**

61. $f(x)=2x^2-x+2$**일 때,**

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$**의 값**

정답 및 해설

1) -2

⇨ $\int_0^2 f(t)dt = k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 하면 $f(x) = 2x + k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (2t+k)dt = k$, $[t^2 + kt]_0^2 = k$, $4 + 2k = k$

$\therefore\ k = -4$

따라서 $f(x) = 2x - 4$이므로 $f(1) = -2$

2) 2

⇨ $\int_0^1 f(t)dt = k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 하면 $f(x) = 12x - 2 + 2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (12t - 2 + 2k)dt = k$, $[6t^2 - 2t + 2kt]_0^1 = k$

$6 - 2 + 2k = k$

$\therefore\ k = -4$

따라서 $f(x) = 12x - 10$이므로 $f(1) = 2$

3) $-\frac{2}{3}$

⇨ $\int_0^2 f(t)dt = k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 하면 $f(x) = x^2 - x + k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (t^2 - t + k)dt = k$, $\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + kt\right]_0^2 = k$

$\frac{8}{3} - 2 + 2k = k$ $\quad\therefore\ k = -\frac{2}{3}$

따라서 $f(x) = x^2 - x - \frac{2}{3}$이므로 $f(1) = -\frac{2}{3}$

4) 0

⇨ $\int_0^1 f(t)dt = k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 하면 $f(x) = x^2 - 2x + 3k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (t^2 - 2t + 3k)dt = k$, $\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 3kt\right]_0^1 = k$

$\frac{1}{3} - 1 + 3k = k$, $2k = \frac{2}{3}$ $\quad\therefore\ k = \frac{1}{3}$

따라서 $f(x) = x^2 - 2x + 1$이므로

$f(1) = 0$

5) -6

⇨ $\int_0^2 f(t)dt = k$ (k는 상수)⋯⋯ ㉠으로 놓으면

$f(x) = 3x^2 + x + k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (3t^2 + t + k)dt = k$

$\left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 + kt\right]_0^2 = k$

$8 + 2 + 2k = k$ $\quad\therefore k = -10$

따라서 $f(x) = 3x^2 + x - 10$이므로

$f(1) = -6$

6) 1

⇨ $\int_0^1 f(t)dt = k$ (k는 상수)⋯⋯ ㉠으로 놓으면

$f(x) = 3x^2 + 2x + 2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2 + 2t + 2k)dt = k$

$[t^3 + t^2 + 2kt]_0^1 = k$

$1 + 1 + 2k = k$ $\quad\therefore\ k = -2$

따라서 $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$이므로

$f(1) = 1$

7) $\frac{5}{3}$

⇨ $\int_0^2 f(t)dt = k$ (k는 상수)⋯⋯ ㉠으로 놓으면

$f(x) = 3x^2 + 4x - k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (3t^2 + 4t - k)dt = k$

$[t^3 + 2t^2 - kt]_0^2 = k$

$8 + 8 - 2k = k$, $3k = 16$ $\quad\therefore\ k = \frac{16}{3}$

따라서 $f(x) = 3x^2 + 4x - \frac{16}{3}$이므로

$f(1) = \frac{5}{3}$

8) 3

⇨ $\int_0^2 f(t)dt = k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠으로 놓으면

$f(x) = -3x^2 + 2x + k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (-3t^2 + 2t + k)dt = k$

$[-t^3 + t^2 + kt]_0^2 = k$

$-8 + 4 + 2k = k$ $\quad\therefore k = 4$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$이므로

$f(1) = -3 + 2 + 4 = 3$

9) $\frac{2}{7}$

⇨ $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠으로 놓으면

$f(x)=2x-3k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (2t-3k)dt=k$

$[t^2-3kt]_0^2=k,\ 4-6k=k\ \ \therefore k=\frac{4}{7}$

따라서 $f(x)=2x-\frac{12}{7}$이므로

$f(1)=2-\frac{12}{7}=\frac{2}{7}$

10) -2

⇨ $\int_0^1 f'(y)dy=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$f(x)=x^3-2x+k$에서 $f'(x)=3x^2-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (3y^2-2)dy=k$

$\therefore\ k=[y^3-2y]_0^1=-1$

따라서 $f(x)=x^3-2x-1$이므로 $f(1)=-2$

11) $\frac{7}{2}$

⇨ $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=x^3-4x^2+3kx$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (t^3-4t^2+3kt)dt=k,\ \left[\frac{1}{4}t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{3}{2}kt^2\right]_0^1=k$

$\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}k=k$

$\therefore\ k=\frac{13}{6}$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+\frac{13}{2}x$이므로 $f(1)=\frac{7}{2}$

12) $-\frac{11}{6}$

⇨ $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠으로 놓으면

$f(x)=x^2-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(t^2-2t+k)dt=k,\ \int_0^1 (t^3-2t^2+kt)dt=k$

$\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=k,\ \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{k}{2}=k$

$\frac{k}{2}=-\frac{5}{12}\ \ \therefore k=-\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$이므로

$f(1)=1-2-\frac{5}{6}=-\frac{11}{6}$

13) $-\frac{7}{2}$

⇨ $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=x^2-3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(t^2-3t+k)dt=k,\ \int_0^1 (t^3-3t^2+kt)dt=k$

$\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1=k$

$\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}k=k\qquad \therefore\ k=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$이므로 $f(1)=-\frac{7}{2}$

14) $f(x)=4x-3$

⇨ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-3$

15) $f(x)=3x^2$

⇨ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2$

16) $f(x)=3x^2+10x-4$

⇨ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+10x-4$

17) $a=2,\ f(x)=2x-4$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $a^2-4a+4=(a-2)^2=0,\ a=2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에서

$f(x)=(x^2-4x+4)'=2x-4$

$\therefore a=2,\ f(x)=2x-4$

18) $a=-4$ 또는 $a=1,\ f(x)=2x+3$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$a^2+3a-4=(a+4)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x)=(x^2+3x-4)'=2x+3$

19) $a=-3,\ f(x)=2x+6$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$a^2+6a+9=(a+3)^2=0\qquad \therefore\ a=-3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x)=(x^2+6x+9)'=2x+6$

20) $a=-1,\ f(x)=3x^2$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $a^3+1=0$ $\quad\therefore\ a=-1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x)=(x^3+1)'=3x^2$

21) $a=-2,\ f(x)=3x^2$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $a^3+8=0$ $\quad\therefore\ a=-2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x)=(x^3+8)'=3x^2$

22) $a=1,\ f(x)=3x^2$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $a^3-1=0,\ a=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에서

$f(x)=(x^3-1)'=3x^2$

$\therefore a=1, f(x)=3x^2$

23) $a=1,\ f(x)=3x^2+2x-1$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $a^3+a^2-a^2-1=0$

$a^3-1=0$ $\quad\therefore\ a=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에서

$f(x)=(x^3+x^2-x-1)'=3x^2+2x-1$

$\therefore a=1, f(x)=3x^2+2x-1$

24) $a=1,\ f(x)=3x^2-2x-1$

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $a^3-a^2-a+a=0$

$a^3-a^2=0,\ a^2(a-1)=0$ $\quad\therefore\ a=1(\because\ a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에서

$f(x)=(x^3-x^2-x+1)'=3x^2-2x-1$

$\therefore a=1, f(x)=3x^2-2x-1$

25) 11

⇨ $\int_2^x f(t)dt=x^2-ax-6$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=4-2a-6$ $\ \therefore a=-1$

$\int_2^x f(t)dt=x^2+x-6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+1$ $\ \therefore f(5)=2\cdot5+1=11$

26) 8

⇨ $\int_1^x f(t)dt=x^2+2ax-a$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+2a-a$ $\ \therefore a=-1$

$\int_1^x f(t)dt=x^2-2x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

$\therefore f(5)=2\cdot5-2=8$

27) 3

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=0$이므로 $0=1+1+a,\ \therefore a=-2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+2x+a$

$a=-2$를 대입하면 $f(x)=3x^2+2x-2$

$\therefore f(1)=3$

28) -1

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=0$이므로 $0=1-2+a+1,\ \therefore a=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+a$

$a=0$을 대입하면 $f(x)=3x^2-4x$

$\therefore f(1)=-1$

29) 16

⇨ $\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=1-2a+a,\ 0=1-a$ $\ \therefore a=1$

$\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^3-2ax^2+ax)$

$f(x)=3x^2-4ax+a=3x^2-4x+1$

$\therefore f(3)=27-12+1=16$

30) 5

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=0$이므로 $0=2-2a$ $\quad\therefore\ a=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x)=4x^3+3x^2-2a=4x^3+3x^2-2$

$\therefore\ f(1)=4+3-2=5$

31) 4

⇨ $\int_0^x (t-1)f(t)dt=x^3-x^2-x+a$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^0 (t-1)f(t)dt=0$이므로 $a=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-1)f(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$\therefore f(x)=3x+1\quad \therefore f(1)=4$

32) 2

⇨ 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^0 (t+1)f(t)dt=0$이므로 $a=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$(x+1)f(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

따라서 $f(x)=3x-1$이므로 $f(1)=2$

33) 1

⇨ $x^2f(x)=2x^6-x^4+2\int_1^x tf(t)dt$ …… ㉠

의 양변을 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=12x^5-4x^3+2xf(x)$

따라서 $f'(x)=12x^3-4x$이므로

$f(x)=3x^4-2x^2+C$ (C는 적분상수) …… ㉡

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-1+2\int_1^1 tf(t)dt=1+0=1$

이므로 ㉡에서 $f(1)=3-2+C=1 \quad \therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=3x^4-2x^2$이므로 $f(-1)=1$

34) 2

⇨ $x^2f(x)=3x^6-x^4+2\int_1^x tf(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3-1+2\int_1^1 tf(t)\,dt=2+0=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=18x^5-4x^3+2xf(x)$

$\therefore f'(x)=18x^3-4x$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x^4-2x^2+C$

㉡에서 $f(1)=2$이므로

$f(1)=\frac{9}{2}-2+C=2\quad \therefore C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x^4-2x^2-\frac{1}{2}$이므로

$f(-1)=2$

35) 24

⇨ $xf(x)=x^4-2x^2+\int_a^x tf'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=4x^3-4x+xf'(x)$

따라서 $f(x)=4x^3-4x$이므로 $f(2)=24$

36) 9

⇨ $xf(x)=\frac{2}{3}x^3+\int_a^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x^2+f(x)$

따라서 $f'(x)=2x$이므로

$f(x)=x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$에서 $f(x)=x^2$

$\therefore\ f(3)=9$

37) 8

⇨ $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^4-2x^2+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4-2x^2+1$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-4x$

$\therefore\ \int_1^x f(t)dt=4x^3-4x$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=12x^2-4$이므로 $f(1)=8$

38) 1

⇨ $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2+(2x-1)k=3x^2+2kx-k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+2kt-k)dt=k,\ \left[t^3+kt^2-kt\right]_0^1=k$

$1+k-k=k \qquad \therefore\ k=1$

$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t)dt=k=1$

39) $-\frac{7}{6}$

⇨ $f(x)=\int_0^x (t^2+t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1)=\int_0^1(t^2+t-2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^1=-\frac{7}{6}$$

40) $\frac{5}{3}$

⇨ $f(x)=\int_0^x(t^2-2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-1)=\int_0^{-1}(t^2-2t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^{-1}=\frac{5}{3}$$

41) $-\frac{4}{3}$

⇨ $f(x)=\int_1^x(t^2-4t+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$f(1)+f(3)$

$$=\int_1^1(t^2-4t+3)dt\int_1^3(t^2-4t+3)dt$$

$$=0+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3=-\frac{4}{3}$$

42) $\frac{20}{3}$

⇨ $f(x)=\int_0^x(t^2-6t+8)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(2)=\int_0^2(t^2-6t+8)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2=\frac{20}{3}$$

43) $-\frac{1}{2}$

⇨ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이때, $F'(x)=f(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

$0<x<1$일 때 $F'(x)>0$

$1<x<3$일 때 $F'(x)<0$

$3<x<5$일 때 $F'(x)>0$

이므로 $F(x)$는 $x=3$일 때 극소이고 극솟값은

$$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2(1-t)dt+\int_2^3(t-3)dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_2^3=-\frac{1}{2}$$

44) $-\frac{1}{6}$

⇨ $f(x)=\int_x^{x+1}(t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2+(x+1)\}-(x^2+x)=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f(-1)=\int_{-1}^0(t^2+t)dt=-\int_0^{-1}(t^2+t)dt$$

$$=-\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^{-1}=-\frac{1}{6}$$

45) $F(0)$

⇨ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은 $F(0)$

46) $\frac{25}{12}$

⇨ $f'(x)=2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2xdx=x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^2+2$이므로

$F(x)=\int_0^1 f(x-t)dt=\int_0^1\{(x-t)^2+2\}dt$

$=\int_0^1(x^2-2xt+t^2+2)dt$

$=\left[x^2t-xt^2+\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^1$

$=x^2-x+\frac{7}{3}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{12}$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{12}$ 를 갖는다.

47) -8

⇨ $F'(x)=x^2+2x-8$이라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h(x^2+2x-8)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=-8$

48) 0

⇨ $F'(x)=(x-1)(x+3)$이라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(x-1)(x+3)\,dx=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=0$

49) -1

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)=-1$

50) -1

⇨ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)=-1$

51) 0

⇨ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)=0$

52) 8

⇨ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)=2^3=8$

53) 1

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}(4-3+1)=1$

54) 2

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}(1+2+1)=2$

55) 2

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$

$=\frac{1}{4}(4+6-2)=2$

56) 1

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{1+x}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(1+x)-F(1)}{x}$

$=F'(1)=f(1)=4-3=1$

57) 6

⇨ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(x)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$

$=F'(1)=f(1)$

$=2+3+1=6$

58) 14

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_3^{3+x}f(t)dt=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{F(3+x)-F(3)}{x}$

$=\frac{1}{2}F'(3)=\frac{1}{2}f(3)=\frac{1}{2}(3\cdot3^2+1)=14$

59) 2

⇨ $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)=f'(1)$

$=3-2+1=2$

60) 4

⇨ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_4^{x^2} f(t)dt$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \{F(x^2) - F(4)\}$$
$$= \lim_{x \to 2} \left\{ \frac{F(x^2) - F(4)}{x^2 - 4} \times (x+2) \right\}$$
$$= F'(4) \times 4 = 4F'(4) = 4f(4)$$
$$= 4(64 - 64 + 1) = 4$$

61) 30

⇨ $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x+1}{x-1} \int_1^{x^2} f(t)dt$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x+1}{x-1} \{F(x^2) - F(1)\}$$
$$= \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \times (x^2+3x+1)(x+1) \right\}$$
$$= F'(1) \times 5 \times 2 = 10F'(1) = 10f(1)$$
$$= 10 \times (2 - 1 + 2) = 30$$