● 2회차

01 ⑤	02 ①	03 ③	04 ③	05 ②
06 ①	07 ③	08 ①	09 ④	10 ④
11 ③	12 ⑤	13 ①	14 ①	15 ③
16 ③	17 ②			

[서술형 1] 9

[서술형 2] 6

[서술형 3] -45

01 $\lim_{x\to1+} f(x)=1$

$f(x)=t$라 하면 $x\to2-$일 때 $t\to2+$이므로

$\lim_{x\to2-} f(f(x))=\lim_{t\to2+} f(t)=3$

$\therefore \lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to2-} f(f(x))=1+3=4$

02 $\lim_{x\to-1}(2x^2+4x-2)=2-4-2=-4$

03 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-1}{5x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{5+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{3}{5}$

04 $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=2$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=f(2)-2=0$

즉 $f(2)=2$이므로 $4+2a+b=2$

$\therefore b=-2a-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b-2}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+a+2)\\&=a+4\end{aligned}$$

즉 $a+4=2$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=4-2=2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

다른 풀이

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=2$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=f(2)-2=0$

즉 $f(2)=2$이므로 $4+2a+b=2$

$\therefore 2a+b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=2$

이때 $f'(x)=2x+a$이므로 $4+a=2$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=-2$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

05 $x-1>0$일 때 $x^2-1\le f(x)\le3x^2-4x+1$의 각 변을 $x-1$로 나누면

$\dfrac{x^2-1}{x-1}\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}(x+1)=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}(3x-1)=2\end{aligned}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1+}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x-1<0$일 때 $x^2-1\le f(x)\le3x^2-4x+1$의 각 변을 $x-1$로 나누면

$\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{x^2-1}{x-1}$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(3x-1)=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(x+1)=2\end{aligned}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=2 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$

06 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=3$에서 $f(x)-x^3$은 x^2의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

즉 $f(x)-x^3=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0 \qquad \therefore b=0$

즉 $f(x)=x^3+3x^2+ax$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2+ax}{x}\\&=\lim_{x\to0}(x^2+3x+a)\\&=a\end{aligned}$$

즉 $a=4$이므로 $f(x)=x^3+3x^2+4x$

$\therefore f(-1)=-1+3-4=-2$

07 주어진 그래프에서 불연속인 점은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때이므로 그 개수는 3이다.

또 극한값이 존재하지 않는 점은 $x=-1$, $x=1$일 때이므로 그 개수는 2이다.

따라서 $m=3$, $n=2$이므로

$m-n=3-2=1$

08 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1-}(-x+k)=\lim_{x\to1+}(x-k)=f(1)$이므로

$-1+k=1-k=a+1$

$-1+k=1-k$에서 $2k=2 \qquad \therefore k=1$

$1-k=a+1$에서 $0=a+1$

$\therefore a=-1$

09 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-2)>0$, $f(-1)<0$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고

$f(-2)f(-1)<0$, $f(-1)f(0)<0$,

$f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, 2)$에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$\therefore k=4$

10 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{3-6}{3}=-1$$

$f'(x)=2x-2$이므로 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=2a-2$

즉 $2a-2=-1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

11 ㄱ. $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to10}f(x)=f(10)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=10$에서 연속이다.

ㄷ. 꺾인 점에서는 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 미분가능하지 않다.

ㄹ. (반례) $a=8$이면 함수 $f(x)$가 $x=8$에서 연속이지만 $x=8$에서 미분가능하지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Lecture **미분가능성과 연속성**

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

(1) 연결되어 있지 않은 점은 불연속인 점이다.

(2) 연결되어 있지만 접선을 그을 수 없는 점, 즉 뾰족한 점 또는 꺾인 점은 연속이지만 미분가능하지 않다.

12 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2-}(2x+b)=\lim_{x\to2+}(-x^2+ax+2)=f(2)$

$b+4=2a-2 \qquad \therefore b=2a-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to2-}\frac{2x+b-(2a-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\frac{2x+2a-6-2a+2}{x-2}\quad(\because ㉠)\\&=\lim_{x\to2-}\frac{2(x-2)}{x-2}\\&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to2+}\frac{-x^2+ax+2-(2a-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(-x+a-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}(-x+a-2)\\&=a-4\end{aligned}$$

이므로 $a-4=2 \qquad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=12-6=6$

$\therefore ab=6\cdot6=36$

13 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-13}{h}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^3+2(2+h)+1\}-13}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^3+6h^2+14h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h^2+6h+14)\\&=14\end{aligned}$$

다른 풀이

$f(2)=8+4+1=13$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-13}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$f'(2)=12+2=14$

14 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(0)=2$이므로 $c=2$

또 $f'(0)=-3$, $f'(1)=1$이므로

$b=-3$, $2a+b=1$

$\therefore a=2, b=-3$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+2$이므로 함수 $f(x)$의 모든 계수들의 합은

$2-3+2=1$

15 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-1$의 양변에 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+3xh-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+3xh-1-f(x)}{h}\quad(\because ㉠)\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh-1}{h}\end{aligned}$$

또 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

즉

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh-1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh-f(0)}{h}\quad(\because ㉡)\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+\lim_{h\to0}\frac{3xh}{h}\\&=f'(0)+3x\\&=3x+2\end{aligned}$$

$\therefore f'(2)=6+2=8$

16 $f(x)=x^3-kx+16$에서 $f'(x)=3x^2-k$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-k=1 \qquad \therefore k=3a^2-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 점 $(a, f(a))$, 즉 점 $(a, a^3-ak+16)$이 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $a^3-ak+16=a$

$a^3-(3a^2-1)a+16=a$ ($\because$ ㉠)

$-2a^3+16=0$, $a^3=8$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $k=12-1=11$
$\therefore a+k=2+11=13$

17 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 (a, a^3)이라 하면 접선의 기울기는
$f'(a)=3a^2$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-a^3=3a^2(x-a)$ $\quad\therefore y=3a^2x-2a^3$ ⋯⋯ ㉠
이때 접선의 기울기가 3이므로
$3a^2=3, a^2=1$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x+2$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x-2$
따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=3x+2$ 위의 점 $(0, 2)$와 직선 $y=3x-2$, 즉 $3x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-2-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Lecture 점과 직선 사이의 거리
좌표평면 위의 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[서술형 1] 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $x=\frac{1}{3}$의 교점은 $A\left(\frac{1}{3}, 3\right)$
점 P에서 직선 $x=\frac{1}{3}$에 내린 수선의 발 H의 좌표는
$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{t}\right)$이므로 ❶

$\overline{AH}=3-\frac{1}{t}, \overline{PH}=t-\frac{1}{3}$ ❷

$$\therefore \lim_{t\to\frac{1}{3}+}\frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}=\lim_{t\to\frac{1}{3}+}\frac{3-\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{3}}=\lim_{t\to\frac{1}{3}+}\frac{9t-3}{3t^2-t}$$
$$=\lim_{t\to\frac{1}{3}+}\frac{3(3t-1)}{t(3t-1)}=\lim_{t\to\frac{1}{3}+}\frac{3}{t}$$
$$=9$$
❸

채점 기준	배점
❶ 점 A, H의 좌표를 구할 수 있다.	2점
❷ $\overline{AH}$, $\overline{PH}$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $\lim_{t\to\frac{1}{3}+}\frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}$의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $f(x)=(x^3-2)(x^2-3x)(x^2+1)$에서

$$f'(x)=3x^2(x^2-3x)(x^2+1)+(x^3-2)(2x-3)(x^2+1)+(x^3-2)(x^2-3x)\cdot 2x$$
❶

$\therefore f'(0)=0+(-2)\cdot(-3)\cdot 1+0=6$ ❷

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	4점
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	2점

Lecture 곱의 미분법
미분가능한 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여
$y=f(x)g(x)h(x)$일 때,
$y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

[서술형 3] 다항식 $x^{20}+ax^2+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 그때의 나머지가 $2x-5$이므로
$x^{20}+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)+2x-5$ ⋯⋯ ㉠
❶

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1+a+b=-3$ $\quad\therefore a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 $x^{20}+ax^2+b=(x^2-2x+1)Q(x)+2x-5$
이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$20x^{19}+2ax=(2x-2)Q(x)+(x^2-2x+1)Q'(x)+2$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$20+2a=2$ $\quad\therefore a=-9$
$a=-9$를 ㉡에 대입하면
$-9+b=-4$ $\quad\therefore b=5$
❷

$\therefore ab=-9\cdot 5=-45$ ❸

채점 기준	배점
❶ 몫을 $Q(x)$로 놓고 나눗셈 식을 세울 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점