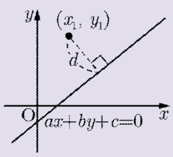
01 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



참고 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◪ **다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.**

1. 점 $(0,\ 0)$, 직선 $3x+4y-5=0$

2. 점 $(0,\ 0)$, 직선 $x+7y+20=0$

3. 점 $(2,\ 1)$, 직선 $3x+y+3=0$

4. 점 $(2,\ -1)$, 직선 $4x-3y-6=0$

5. 점 $(7,\ 3)$, 직선 $2x-y+4=0$

6. 점 $(0,\ 0)$, 직선 $x-y-4\sqrt{2}=0$

7. 점 $(3,\ -1)$, 직선 $4x+3y+1=0$

8. 점 $(1,\ 2)$, 직선 $x-y=2$

9. 점 $(2,\ -5)$, 직선 $y=\frac{1}{3}x+1$

10. 점 $(-1, 5)$, 직선 $3x+4y-8=0$

11. 점 $(2,\ -4)$, 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$

12. 점 $(7, 3)$, 직선 $2x-y+4=0$

13. 점 $(0,\ 0)$, 직선 $5x-12y+13=0$

◪ 다음 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 구하여라. (단, k는 실수)

14. 점 $(1, 2)$, 직선 $kx-y-k=0$

15. 점 $(0, 0)$, 직선 $x+3y-5+k(x-2y)=0$

16. 점 $(0, 0)$, 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$

17. 점 $(0, 0)$, 직선 $x+y-4+k(x-y)=0$

18. 점 $(0,0)$, 직선 $kx-(k-2)y+4=0$

19. 점 $(0, 0)$, 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$

◪ 다음을 구하여라.

20. 점 $(1, 0)$에서 거리가 $\sqrt{5}$이고, 직선 $2x+y-6=0$에 평행한 직선의 방정식

21. 점 $(1, -1)$에서 거리가 $\sqrt{10}$이고, 직선 $x+3y-2=0$에 수직인 직선의 방정식

22. 점 $(2, -3)$과 직선 $ax-4y+2=0$ 사이의 거리가 4일 때, 실수 a의 값

23. 점 $(3, -6)$과 직선 $mx-y+3=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$일 때, 양수 m의 값

24. 점 $(1, -1)$에서 거리가 1이고, 직선 $4x+3y-5=0$에 수직인 직선의 방정식

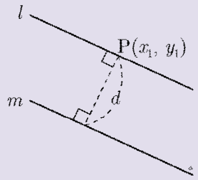
25. 점 $(2, -3)$에서 거리가 2이고, 직선 $3x+4y-2=0$에 평행한 직선의 방정식

26. 점 $(0, 0)$에서 거리가 1이고, 직선 $x-y+4=0$에 수직인 직선의 방정식

27. 점 $(0, 0)$에서 거리가 $\sqrt{5}$이고, 직선 $3x-y-5=0$에 평행한 직선의 방정식

02 평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선 l, m 사이의 거리는
❶ 직선 l 위의 임의의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 잡는다.
❷ 점 (x_1, y_1)과 직선 m 사이의 거리를 구한다.



참고 평행인 두 직선 사이 $l: ax+by+c=0$,
$m: ax+by+c'=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

◪ **다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하여라.**

28. $2x+y+2=0, 2x+y-3=0$

29. $3x-y=0$, $3x-y+5=0$

30. $3x+4y+3=0$, $3x+4y-6=0$

31. $y=-\dfrac{3}{4}x+1$, $y=-\dfrac{3}{4}x+6$

32. $5x+12y-17=0$, $5x+12y-4=0$

33. $3x+4y-4=0$, $3x+4y+6=0$

34. $2x-y-1=0$, $2x-y+4=0$

35. $3x+4y-3=0$, $6x+8y+5=0$

36. $2x+3y=0$, $2x+3y-13=0$

37. $3x+2y-6=0, 3x+2y+7=0$

38. $3x-y-2=0$, $3x-y+2=0$

39. $x-2y+1=0$, $x-2y-3=0$

40. $3x-4y+2=0, 3x-4y-1=0$

41. $3x+4y-3=0$, $3x+4y+2=0$

42. $2x+3y-6=0, 2x+3y+7=0$

43. $5x-12y+7=0$, $5x-12y-6=0$

44. $x+4y+2=0, x+4y-15=0$

◪ **다음 두 직선이 평행할 때, 상수 k의 값과 두 직선 사이의 거리 d의 값을 구하여라.**

45. $x+ky-1=0,\ kx+(2k+3)y-3=0$

46. $kx-2y+1=0,\ 2x-(k-3)y-2=0$

47. $3x-4y-1=0, 6x+ky+2=0$

48. $x-2y+2=0, kx-(k-2)y-6=0$

49. $kx-2y+3=0, 3x+4y-2=0$

50. $2x+y+4=0, 4x+ky-2=0$

51. $x+ky+1=0,\ 2x-4y-3=0$

52. $2x+3y+3=0, 4x-ky+1=0$

53. $2x+ky-1=0, kx+(k+4)y-2=0$

03 점과 직선 사이의 거리의 응용

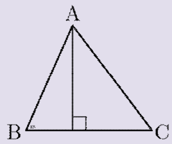
1. 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이는 밑변을 $\overline{\mathrm{BC}}$로 잡으면

(1) 밑변의 길이: $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구한다.

(2) 높이: 점 A와 직선 BC 사이의 거리 h를 구한다.

(3) $\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h$



2. 자취의 방정식

(1) 점의 자취: 어떤 일정한 조건을 만족하며 점이 움직일 때, 그 점이 이루는 도형

(2) 자취의 방정식

어떤 조건을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

❶ 조건을 만족하는 점의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓는다.

❷ 주어진 조건을 이용하여 x, y의 관계식을 세워 식을 정리한다.

◪ **다음 삼각형의 넓이를 구하여라.**

54. $\mathrm{A}(6,-2), \mathrm{B}(-2,6), \mathrm{C}(3,3)$**일 때, 삼각형** ABC

55. $\mathrm{A}(-1,\ 1), \mathrm{B}(-3,\ -1), \mathrm{C}(3,\ 2)$**일 때, 삼각형** ABC

56. $\mathrm{A}(-5,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 4)$, $\mathrm{C}(0,\ 0)$**일 때, 삼각형** ABC

57. $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$, $\mathrm{C}(6,\ -5)$**일 때, 삼각형** ABC

58. $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$**일 때, 삼각형** OAB

59. $O(0,\ 0)$, $A(3,\ 6)$, $B(7,\ 2)$**일 때, 삼각형** OAB

60. $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 6)$, $B(7,\ 3)$**일 때, 삼각형** OAB

61. $O(0,\ 0)$, $A(3,\ 2)$, $B(6,\ 5)$**일 때, 삼각형** OAB

◪ **다음 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점** P**의 자취의 방정식을 구하여라.**

62. $2x+3y-2=0, 3x+2y+2=0$

63. $x+2y-1=0,\ 2x+y+1=0$

64. $2x-y-1=0,\ x+2y-1=0$

65. $x-y+1=0, x+y-2=0$

66. $3x-4y+9=0,\ 4x+3y+12=0$

67. $x+2y+3=0, 2x-y+1=0$

◪ **다음 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 모두 구하여라.**

68. $x+3y+1=0, 3x-y+3=0$

69. $3x-4y+5=0, 4x+3y+10=0$

70. $x+3y-2=0, 3x+y+2=0$

71. $2x-y+2=0, x+2y-2=0$

72. $4x+3y-5=0, 3x-4y+15=0$

73. $x+3y-2=0, 3x+y+2=0$

74. $3x+4y+2=0, 4x-3y+1=0$

75. $x-3y+2=0, 3x-y+4=0$

76. $2x+y+2=0, x+2y-5=0$

77. $x-2y=0, 2x-y=0$

78. $2x+y+1=0, x-2y+2=0$

정답 및 해설

1) 1

⇨ $\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

2) $2\sqrt{2}$

⇨ $\dfrac{|20|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{20}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

3) $\sqrt{10}$

⇨ $\dfrac{|3\cdot2+1\cdot1+3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

4) 1

⇨ $\dfrac{|4\times2-3\times(-1)-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{25}}=1$

5) $3\sqrt{5}$

⇨ $\dfrac{|2\cdot7-1\cdot3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

6) 4

⇨ $\dfrac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

7) 2

⇨ $\dfrac{|4\cdot3+3\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

8) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

⇨ $x-y=2$에서 $x-y-2=0$이므로

$\dfrac{|1\cdot1-1\cdot2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

9) $2\sqrt{10}$

⇨ $y=\dfrac{1}{3}x+1$에서 $x-3y+3=0$이므로

$\dfrac{|1\cdot2-3\cdot(-5)+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

10) $\dfrac{9}{5}$

⇨ $\dfrac{|3\cdot(-1)+4\cdot5-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{9}{5}$

11) $2\sqrt{10}$

⇨ 점 $(2,\ -4)$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+2$, 즉 $x-3y+6=0$

사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot2-3\cdot(-4)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

12) $3\sqrt{5}$

⇨ $\dfrac{|2\cdot7-1\cdot3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

13) 1

⇨ $\dfrac{|5\times0-12\times0+13|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{169}}=1$

14) 2

⇨ 주어진 점과 직선 사이의 거리는

$\dfrac{|k-2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}$

이 값이 최대가 되려면 $\sqrt{k^2+1}$이 최소이어야 하므로 $k=0$일 때, 거리의 최댓값은 2이다.

15) $\sqrt{5}$

⇨ 점 $(0,\ 0)$과 직선 $x+3y-5+k(x-2y)=0$,

즉 $(k+1)x+(3-2k)y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{(k+1)^2+(3-2k)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5k^2-10k+10}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{5(k-1)^2+5}}$

이 값이 최대가 되려면 $\sqrt{5(k-1)^2+5}$가 최소이어야 하므로 $k=1$일 때 거리의 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

16) $\sqrt{2}$

⇨ 점 $(0,0)$과 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$,

즉 $(k+1)x+(k-1)y-2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$

이 값이 최대가 되려면 $\sqrt{2k^2+2}$가 최소이어야 하므로 $k=0$일 때 거리의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

17) $2\sqrt{2}$

⇨ 점 $(0,0)$과 직선 $x+y-4+k(x-y)=0$,

즉 $(k+1)x+(1-k)y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-4|}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2k^2+2}}$

이 값이 최대가 되려면 $\sqrt{2k^2+2}$가 최소이어야 하므로 $k=0$일 때 거리의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

18) $2\sqrt{2}$

⇨ 주어진 점과 직선 사이의 거리는

$\dfrac{|4|}{\sqrt{k^2+(k-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2k^2-4k+4}}$

이 값이 최대가 되려면 $\sqrt{2k^2-4k+4}$가 최소이어야 하고

$\sqrt{2(k^2-2k+1)+2}=\sqrt{2(k-1)^2+2}$이므로

$k=1$일 때, 거리의 최댓값은 $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이다.

19) $\sqrt{2}$

⇨ $x+y-2+k(x-y)=0$에서
$(1+k)x+(1-k)y-2=0$이므로 점 $(0,\ 0)$과
이 직선 사이의 거리는
$\dfrac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$
이 값이 최대가 되려면 $\sqrt{2k^2+2}$가 최소이어야 하므로 $k=0$일 때, 거리의 최댓값은 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 이다.

20) $y=-2x-3$ 또는 $y=-2x+7$

⇨ 직선 $2x+y-6=0$, 즉 $y=-2x+6$에 평행한 직선의 방정식을 $y=-2x+a$로 놓으면 점 $(1,0)$과 직선 $2x+y-a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로
$\dfrac{|2\cdot1+1\cdot0-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|2-a|=5$
$2-a=\pm5$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=-2x-3$ 또는 $y=-2x+7$

21) $y=3x+6$ 또는 $y=3x-14$

⇨ 직선 $x+3y-2=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$에 수직인 직선의 방정식을 $y=3x+a$로 놓으면 점 $(1,-1)$과 직선 $3x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로
$\dfrac{|3\cdot1-1\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$, $|a+4|=10$
$a+4=\pm10$ $\therefore a=6$ 또는 $a=-14$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=3x+6$ 또는 $y=3x-14$

22) $\dfrac{5}{3}$ 또는 3

⇨ 점 $(2,-3)$과 직선 $ax-4y+2=0$ 사이의 거리가 4이므로
$\dfrac{|a\cdot2-4\cdot(-3)+2|}{\sqrt{a^2+(-4)^2}}=4$
$|2a+14|=4\sqrt{a^2+16}$
양변을 제곱하여 정리하면
$3a^2-14a+15=0$, $(3a-5)(a-3)=0$
$\therefore a=\dfrac{5}{3}$ 또는 $a=3$

23) 7

⇨ 점 $(3,-6)$과 직선 $mx-y+3=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로
$\dfrac{|m\cdot3-1\cdot(-6)+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$
$|3m+9|=3\sqrt{2(m^2+1)}$
양변을 제곱하여 정리하면
$m^2-6m-7=0, (m+1)(m-7)=0$
$\therefore m=7(\because m>0)$

24) $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ 또는 $y=\dfrac{3}{4}x-3$

⇨ 직선 $4x+3y-5=0$, 즉 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$에 수직인 직선의 방정식을 $y=\dfrac{3}{4}x+a$로 놓으면
점 $\mathrm{P}(1,-1)$에서 직선 $3x-4y+4a=0$ 사이의 거리가 1이므로
$\dfrac{|3\cdot1-4\cdot(-1)+4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$, $|4a+7|=5$
$4a+7=\pm5$ $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=-3$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ 또는 $y=\dfrac{3}{4}x-3$

25) $y=-\dfrac{3}{4}x+1$ 또는 $y=-\dfrac{3}{4}x-4$

⇨ 직선 $3x+4y-2=0$, 즉 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$에 평행한 직선의 방정식을 $y=-\dfrac{3}{4}x+a$로 놓으면
점 $\mathrm{P}(2,-3)$에서 직선 $3x+4y-4a=0$ 사이의 거리가 2이므로
$\dfrac{|3\cdot2+4\cdot(-3)-4a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, $|-4a-6|=10$
$2a+3=\pm5$ $\therefore a=1$ 또는 $a=-4$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=-\dfrac{3}{4}x+1$ 또는 $y=-\dfrac{3}{4}x-4$

26) $y=-x+\sqrt{2}$ 또는 $y=-x-\sqrt{2}$

⇨ 직선 $x-y+4=0$, 즉 $y=x+4$에 수직인 직선의 방정식을 $y=-x+a$로 놓으면 원점에 직선 $x+y-a=0$ 사이의 거리가 1이므로
$\dfrac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$ $\therefore a=\pm\sqrt{2}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=-x+\sqrt{2}$ 또는 $y=-x-\sqrt{2}$

27) $y=3x+5\sqrt{2}$ 또는 $y=3x-5\sqrt{2}$

⇨ 직선 $3x-y-5=0$, 즉 $y=3x-5$에 평행한 직선의 방정식을 $y=3x+a$로 놓으면 원점과 직선 $3x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로
$\dfrac{|a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ $\therefore a=\pm5\sqrt{2}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=3x+5\sqrt{2}$ 또는 $y=3x-5\sqrt{2}$

28) $\sqrt{5}$

⇨ 직선 $2x+y+2=0$ 위의 한 점 $(-1,0)$과
직선 $2x+y-3=0$ 사이의 거리는

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$\dfrac{|2\cdot(-1)+0-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

29) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

30) $\dfrac{9}{5}$

⇨ 직선 $3x+4y+3=0$위의 점 $(-1,\ 0)$에서 $3x+4y-6=0$까지의 거리이므로 $\dfrac{|-3-6|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{9}{5}$이다.

31) 4

⇨ 직선 $y=-\dfrac{3}{4}x+1$위의 점 $(0,\ 1)$에서 직선 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$ 즉 $3x+4y-24=0$까지의 거리와 같으므로 $\dfrac{|4-24|}{\sqrt{9+16}}=4$

32) 1

⇨ 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $5x+12y-17=0$ 위의 한 점 $(1,1)$과 직선 $5x+12y-4=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는 $\dfrac{|5\cdot1+12\cdot1-4|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{13}{13}=1$

33) 2

⇨ 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-4=0$ 위의 한 점 $(0,1)$과 직선 $3x+4y+6=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는 $\dfrac{|3\cdot0+4\cdot1+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

34) $\sqrt{5}$

⇨ 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y-1=0$ 위의 한 점 $(0,-1)$과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는
$\dfrac{|2\cdot0-1\cdot(-1)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

35) $\dfrac{11}{10}$

⇨ 두 직선 $3x+4y-3=0$, $6x+8y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-3=0$ 위의 한 점 $(1,0)$과 직선 $6x+8y+5=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \dfrac{|6\cdot1+8\cdot0+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{11}{10}$

36) $\sqrt{13}$

⇨ 두 직선 $2x+3y=0$, $2x+3y-13=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+3y=0$ 위의 한 점 $(0,0)$과 직선 $2x+3y-13=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \dfrac{|-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=13$

37) $\sqrt{13}$

⇨ 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+2y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$과 직선 $3x+2y+7=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는
$\dfrac{|3\cdot2+2\cdot0+7|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

38) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

⇨ 두 직선이 평행하므로 직선 $3x-y-2=0$ 위의 점 $(0,\ -2)$에서 직선 $3x-y+2=0$에 이르는 거리가 두 직선 사이의 거리이다.
$\therefore \dfrac{|0+2+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

39) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

⇨ 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 한 점 $(-1,0)$과 직선 $x-2y-3=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는
$\dfrac{|1\cdot(-1)-2\cdot0-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

40) $\dfrac{3}{5}$

⇨ 직선 $3x-4y+2=0$ 위의 한 점 $(2,2)$와 직선 $3x-4y-1=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|3\cdot2+4\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-3|}{5}=\dfrac{3}{5}$

41) 1

⇨ 직선 $3x+4y-3=0$위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $3x+4y+2=0$사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|3+2|}{\sqrt{9+16}}=1$

42) $\sqrt{13}$

⇨ 직선 $2x+3y-6=0$ 위의 한 점 $(3,0)$과 직선 $2x+3y+7=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\cdot3+3\cdot0+7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

43) 1

⇨ 두 직선이 평행하므로 직선 $5x-12y-6=0$ 위의 점 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$에서 직선 $5x-12y+7=0$에 이르는 거리가 두 직선 사이의 거리이다.

$\therefore \dfrac{|0+6+7|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{13}{13}=1$

44) $\sqrt{17}$

⇨ 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는
직선 $x+4y+2=0$ 위의 한 점 $(-2,0)$과
직선 $x+4y-15=0$사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는
$d=\dfrac{|1\cdot(-2)+4\cdot 0-15|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\dfrac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

45) $k=-1$, $d=2\sqrt{2}$

⇨ 평행조건에서 $\dfrac{k}{1}=\dfrac{2k+3}{k}\neq\dfrac{-3}{-1}$
$k^2=2k+3$, $k^2-2k-3=0$, $(k-3)(k+1)=0$,
$k=3$, -1
이때 $k=3$이면 두 직선이 일치하므로 $k=-1$
두 직선 $x-y-1=0$, $-x+y-3=0$사이의 거리는 직선 $x-y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $-x+y-3=0$사이의 거리와 같으므로
$d=\dfrac{|-1-3|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$

46) $k=4$,, $d=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

⇨ 평행조건에서 $\dfrac{2}{k}=\dfrac{-(k-3)}{-2}\neq\dfrac{-2}{1}$
$k(k-3)=4$, $k^2-3k-4=0$, $(k-4)(k+1)=0$,
$k=4$, -1
이때 $k=-1$이면 두 직선이 일치하므로 $k=4$
두 직선 $4x-2y+1=0$, $2x-y-2=0$사이의 거리는 직선 $4x-2y+1=0$위의 점 $(0,\ \dfrac{1}{2})$와 직선 $2x-y-2=0$사이의 거리와 같다.
$\therefore \dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

47) $k=-8, d=\dfrac{2}{5}$

⇨ 두 직선이 평행하므로
$\dfrac{3}{6}=-\dfrac{4}{k}\neq\dfrac{-1}{2}$ $\therefore k=-8$
$k=-8$을 $6x+ky+2=0$에 대입하여 정리하면
$3x-4y+1=0$
따라서 평행한 두 직선 사이의 거리는
직선 $3x-4y+1=0$ 위의 한 점 $(1,1)$과
직선 $3x-4y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로
$d=\dfrac{|3\cdot 1-4\cdot 1-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{2}{5}$

48) $k=-2, d=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

⇨ 두 직선이 평행하므로
$\dfrac{1}{k}=\dfrac{-2}{-k+2}\neq\dfrac{2}{-6}$ $\therefore k=-2$
$k=-2$를 $kx-(k-2)y-6=0$에 대입하여 정리하면 $x-2y+3=0$
따라서 평행한 두 직선 사이의 거리는
직선 $x-2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3,0)$과
직선 $x-2y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로
$d=\dfrac{|1\cdot(-3)-2\cdot 0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

49) $k=-\dfrac{3}{2}$, $d=\dfrac{4}{5}$

⇨ 두 직선이 서로 평행하므로 $\dfrac{k}{3}=\dfrac{-2}{4}\neq\dfrac{3}{-2}$
$\dfrac{k}{3}=\dfrac{-2}{4}$에서 $4k=-6$ $\therefore k=-\dfrac{3}{2}$
구한 k의 값을 직선 $kx-2y+3=0$에 대입하여 정리하면 $3x+4y-6=0$
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는
직선 $3x+4y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$과
직선 $3x+4y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로
$d=\dfrac{|3\cdot 2+4\cdot 0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{4}{5}$

50) $k=2, d=\sqrt{5}$

⇨ 두 직선이 평행하므로 $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{k}\neq\dfrac{4}{-2}$ $\therefore k=2$
$k=2$를 $4x+ky-2=0$에 대입하여 정리하면
$2x+y-1=0$
따라서 평행한 두 직선 사이의 거리는
직선 $2x+y-1=0$ 위의 한 점 $(0,1)$과
직선 $2x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로
$d=\dfrac{|2\cdot 0+1\cdot 1+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

51) $k=-2$, $d=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

⇨ 두 직선이 평행하기 때문에 $k=-2$이고
점$(-1,\ 0)$와 $2x-4y-3=0$사이의 거리는
$\dfrac{|-2-3|}{\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

52) $k=-6$, $d=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

⇨ 두 직선 $2x+3y+3=0$, $4x-ky+1=0$이 서로 평행하므로 $\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{-k}\neq\dfrac{3}{1}$ $\therefore k=-6$
직선 $2x+3y+3=0$ 위의 임의의 한 점 $(0,-1)$과 직선 $4x+6y+1=0$ 사이의 거리는
$d=\dfrac{|4\cdot 0+6\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{52}}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

53) $k=-2$, $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

⇨ 두 직선 $2x+ky-1=0$, $kx+(k+4)y-2=0$이 서로 평행하므로 $\frac{2}{k}=\frac{k}{k+4}\neq\frac{-1}{-2}$

$\frac{2}{k}=\frac{k}{k+4}$에서 $k^2=2k+8$

$k^2-2k-8=0$, $(k-4)(k+2)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=-2$

이때, 위 등식을 만족하는 값은 $k=-2$이므로 두 직선은 $2x-2y-1=0$, $x-y+1=0$이다.

직선 $x-y+1=0$ 위의 임의의 한 점 $(0,1)$과 직선 $2x-2y-1=0$ 사이의 거리는

$d=\frac{|2\cdot0-2\cdot1-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

54) 8

⇨ $\overline{BC}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(3-6)^2}=\sqrt{34}$

직선 BC의 방정식은

$y-6=\frac{3-6}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore 3x+5y-24=0$

점 $A(6,-2)$와 직선 BC 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot6+5\cdot(-2)-24|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{16}{\sqrt{34}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\,\frac{\cdot16}{\sqrt{34}}=8$

55) 3

⇨ △ABC의 밑변의 길이

$\overline{BC}=\sqrt{(3+3)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}$

직선 BC의 방정식은 $y-2=\frac{2+1}{3+3}(x-3)$

즉 $x-2y+1=0$이다.

△ABC의 높이의 길이는 점 $A(-1,\ 1)$과 직선 $x-2y+1=0$사이의 거리이므로

$\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=3$

56) 11

⇨ $\overline{BC}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

직선 BC의 방정식은 $y=4x$

점 A와 직선 $4x-y=0$사이의 거리는

$\frac{|-20-2|}{\sqrt{16+1}}=\frac{22}{\sqrt{17}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\frac{22}{\sqrt{17}}=11$

57) 23

⇨ △ABC의 밑변의 길이

$\overline{BC}=\sqrt{(6-4)^2+(-5-7)^2}=2\sqrt{37}$

직선 BC의 방정식은 $y-7=\frac{-5-7}{6-4}(x-4)$

즉 $6x+y-31=0$이다.

△ABC의 높이는 점 $A(1,\ 2)$와 직선 BC 사이의 거리이므로 $\frac{|6+2-31|}{\sqrt{36+1}}=\frac{23}{\sqrt{37}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{37}\times\frac{23}{\sqrt{37}}=23$

58) $\frac{13}{2}$

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(5-2)^2}=\sqrt{34}$

직선 AB의 방정식은

$y-2=\frac{5-2}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore 3x-5y+13=0$

점 $O(0,0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|13|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\frac{13}{\sqrt{34}}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\frac{13}{\sqrt{34}}=\frac{13}{2}$

59) 18

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(7-3)^2+(2-6)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-6=\frac{2-6}{7-3}(x-3)$ $\quad\therefore x+y-9=0$

점 $O(0,0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|-9|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{9}{\sqrt{2}}=18$

60) 15

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(7-4)^2+(3-6)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-6=\frac{3-6}{7-4}(x-4)$ $\quad\therefore x+y-10=0$

점 $O(0,0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}=15$

61) $\frac{3}{2}$

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(6-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-2=\frac{5-2}{6-3}(x-3)$ $\quad\therefore x-y-1=0$

점 $O(0,0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$

62) $x-y+4=0$ 또는 $x+y=0$

⇨ 점 $P(x,y)$로 놓으면 점 P에서 두 직선

$2x+3y-2=0$, $3x+2y+2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|2x+3y-2|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|3x+2y+2|}{\sqrt{3^2+2^2}}$

$|2x+3y-2|=|3x+2y+2|$

$2x+3y-2=\pm(3x+2y+2)$

$\therefore x-y+4=0$ 또는 $x+y=0$

63) $x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

⇨ 점 P에서 직선 $x+2y-1=0$까지의 거리는

$\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}$

점 P에서 직선 $2x+y+1=0$까지의 거리는

$\dfrac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|2x+y+1|}{\sqrt{5}}$

거리가 같으므로

$\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2x+y+1|}{\sqrt{5}}$

$|x+2y-1|=|2x+y+1|$

$x+2y-1=\pm(2x+y+1)$

$x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

64) $x-3y=0$ 또는 $3x+y-2=0$

⇨ 점 P에서 직선 $2x-y-1=0$까지의 거리는

$\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}$

점 P에서 직선 $x+2y-1=0$까지의 거리는

$\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}$

거리가 같으므로

$\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}$

$|2x-y-1|=|x+2y-1|$

$2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

$x-3y=0$ 또는 $3x+y-2=0$

65) $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $y=\dfrac{3}{2}$

⇨ 점 P에서 두 직선 $x-y+1=0$, $x+y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x-y+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$|x-y+1|=|x+y-2|$

$x-y+1=\pm(x+y-2)$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $y=\dfrac{3}{2}$

66) $x+7y+3=0$ 또는 $7x-y+21=0$

⇨ 점 P에서 직선 $x+7y+3=0$까지의 거리는

$\dfrac{|3x-4y+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3x-4y+9|}{5}$

점 P에서 직선 $4x+3y+12=0$까지의 거리는

$\dfrac{|4x+3y+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|4x+3y+12|}{5}$

거리가 같으므로

$\dfrac{|3x-4y+9|}{5}=\dfrac{|4x+3y+12|}{5}$

$|3x-4y+9|=|4x+3y+12|$

$3x-4y+9=\pm(4x+3y+12)$

$x+7y+3=0$ 또는 $7x-y+21=0$

67) $x-3y-2=0$ 또는 $3x+y+4=0$

⇨ 점 P에서 두 직선 $x+2y+3=0, 2x-y+1=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$|x+2y+3|=|2x-y+1|$

$x+2y+3=\pm(2x-y+1)$

$\therefore x-3y-2=0$ 또는 $3x+y+4=0$

68) $x-2y+1=0$ 또는 $2x+y+2=0$

⇨ 두 직선 $x+3y+1=0$, $3x-y+3=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+3y+1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{|3x-y+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$|x+3y+1|=|3x-y+3|$,

$x+3y+1=\pm(3x-y+3)$

$\therefore x-2y+1=0$ 또는 $2x+y+2=0$

69) $x+7y+5=0$ 또는 $7x-y+15=0$

⇨ 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,y)$라고 하면 두 직선에서 이 점까지의 거리가 같으므로

$\dfrac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|4x+3y+10|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$|3x-4y+5|=|4x+3y+10|$

$3x-4y+5=\pm(4x+3y+10)$

$\therefore x+7y+5=0$ 또는 $7x-y+15=0$

70) $x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

⇨ 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,y)$라고 하면 두 직선에서 이 점까지의 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+3y-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$|x+3y-2|=|3x+y+2|$

$x+3y-2=\pm(3x+y+2)$

$\therefore x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

71) $x-3y+4=0$ 또는 $3x+y=0$

⇨ 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,y)$라고 하면 두 직선에서 이 점까지의 거리가 같으므로

$\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$|2x-y+2|=|x+2y-2|$

$2x-y+2=\pm(x+2y-2)$

$\therefore x-3y+4=0$ 또는 $3x+y=0$

72) $x+7y-20=0$ 또는 $7x-y+10=0$

⇨ 두 직선 $4x+3y-5=0$, $3x-4y+15=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x+3y-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3x-4y+15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$|4x+3y-5|=|3x-4y+15|$

$4x+3y-5=\pm(3x-4y+15)$

$\therefore x+7y-20=0$ 또는 $7x-y+10=0$

73) $x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

⇨ 두 직선 $x+3y-2=0$, $3x+y+2=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$|x+3y-2|=|3x+y+2|$

$x+3y-2=\pm(3x+y+2)$

$\therefore x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

74) $x-7y-1=0$ 또는 $7x+y+3=0$

⇨ 두 직선 $3x+4y+2=0$, $4x-3y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+4y+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4x-3y+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$|3x+4y+2|=|4x-3y+1|$

$3x+4y+2=\pm(4x-3y+1)$

$\therefore x-7y-1=0$ 또는 $7x+y+3=0$

75) $x+y+1=0$ 또는 $2x-2y+3=0$

⇨ 두 직선 $x-3y+2=0$, $3x-y+4=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-3y+2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3x-y+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$|x-3y+2|=|3x-y+4|$

$x-3y+2=\pm(3x-y+4)$

$\therefore x+y+1=0$ 또는 $2x-2y+3=0$

76) $x-y+7=0$ 또는 $x+y-1=0$

⇨ 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 두 직선 $2x+y+2=0$, $x+2y-5=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+y+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|2x+y+2|=|x+2y-5|$

$2x+y+2=\pm(x+2y-5)$

$\therefore x-y+7=0$ 또는 $x+y-1=0$

77) $x+y=0$ 또는 $x-y=0$

⇨ 두 직선 $x-2y=0, 2x-y=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$|x-2y|=|2x-y|$, $x-2y=\pm(2x-y)$

$\therefore x+y=0$ 또는 $x-y=0$

78) $x+3y-1=0$ 또는 $3x-y+3=0$

⇨ 두 직선 $2x+y+1=0$, $x-2y+2=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|x-2y+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$|2x+y+1|=|x-2y+2|$

$2x+y+1=\pm(x-2y+2)$

$\therefore x+3y-1=0$ 또는 $3x-y+3=0$