단원 ISSUE

이 단원에서는 **충분(필요)조건, 필요충분조건을 판별하는 문제, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 합 또는 곱의 최솟값을 구하는 문제** 등이 자주 출제되며 충분조건과 필요조건에 대한 개념이 헷갈릴 수 있으므로 문제를 통한 정확한 개념 정립이 필요합니다.

평가문제

[중단원 연습 문제]

1. 다음 중 거짓인 명제는? (단, x,y는 실수이다.)

① 6의 배수는 2의 배수이다.
② 대각선이 서로 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.
③ 직사각형은 평행사변형이다.
④ $x+\sqrt{2}y=0$이면 $x=y=0$이다.
⑤ $x^2<25$이면 $-5<x<5$이다.

[소단원 확인 문제]

2. 다음 중 참인 명제는? (단, x,y는 실수이다.)

① 모든 소수는 홀수이다.
② xy가 짝수이면 x, y는 모두 짝수이다.
③ $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다.
④ $x^2\le 1$이면 $x\le 1$이다.
⑤ $x>2$이면 $4x-2<2x$이다.

[소단원 확인 문제]

3. 다음 중 주어진 명제의 부정이 참인 것은? (단, x,y는 실수이다.)

① $x^2=x$이면 $x=1$이다.
② $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다.
③ $(x+3)^2=0$이면 $x^2+2x-3=0$이다.
④ $2x-1>0$이면 $x+2>0$이다.
⑤ $|xy|>xy$이면 $xy\ge 0$이다.

[소단원 확인 문제]

4. 전체집합 U가 자연수 전체의 집합일 때, 조건 $p:x^2-x-6\le 0$ 의 진리집합 P에 대하여 $n(P)$의 값은?

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

[소단원 확인 문제]

5. 다음 중 거짓인 명제는? (단, x는 실수이다.)

① 어떤 소수는 짝수이다.
② 모든 정삼각형은 이등변삼각형이다.
③ 모든 x에 대하여 $x^2-x+1>0$이다.
④ 어떤 x에 대하여 $x^2-2x+3=0$이다.
⑤ 어떤 사다리꼴의 대각선의 길이는 서로 같다.

[소단원 확인 문제]

6. 전체집합 U가 자연수 전체의 집합일 때, 조건 $p:x\le -1$ 또는 $x>4$ 에 대하여 $\sim p$는?

① $-1>x$, $x\ge 4$　② $4<x$
③ $x=-1$, $x\ne 4$　④ $-1<x\le 4$
⑤ $x=-1$ 또는 $x=4$

[중단원 연습 문제]

7. 전체집합 $U=\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 $p:10$의 약수, $q:x^2-2x-24<0$일 때, 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합의 모든 원소의 합은?

① 10　② 15
③ 20　④ 25
⑤ 30

[중단원 연습 문제]

8. 전체집합 $U=\{x|x$는 4의 약수$\}$에 대하여 두 조건 $p:x^2-5x+6=0$, $q:\ x^2-2x<0$의 진리집합이 각각 P, Q 일 때, $P^C\cap Q$의 진리집합의 모든 원소의 합은?

① 1　② 3
③ 5　④ 6
⑤ 7

[중단원 연습 문제]

9. 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-kx+9<0$이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 상수 k의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -4　② -9
③ -16　④ -25
⑤ -36

[대단원 종합 문제]

10. 다음 중 거짓인 명제는? (단, x,y는 실수이다.)

① $x=-2$이면 $x^2=4$이다.
② $x=y$이면 $x^2=y^2$이다.
③ $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다
④ $x+y>2$이면 $x>1$ 또는 $y>1$이다.
⑤ $xy=|xy|$이면 $x\geq 0$이고 $y\geq 0$이다.

[대단원 종합 문제]

11. 다음 중에서 명제 '자연수 n의 각 자리 숫자의 합이 짝수이면 n은 짝수이다.' 가 거짓임을 보여주는 반례로 알맞은 것은?

① 12　② 15
③ 18　④ 20
⑤ 24

[대단원 종합 문제]

12. 다음 중 참인 명제는? (단, x,y는 실수이다.)

① x, y가 모두 무리수이면 $x+y$는 무리수이다.
② $x<7$이면 $|x|<7$이다.
③ $x>y$이면 $x^2>y^2$이다.
④ $xy<0$이면, $x>0$ 또는 $y>0$이다.
⑤ $B\subset(A\cup C)$이면 $B\subset A$이고 $B\subset C$이다.

[소단원 확인 문제]

13. 두 조건 $p:-1\leq x\leq 3$, $q:x<a+1$에서 명제 $p\rightarrow q$가 참이 되도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① -1　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

[대단원 종합 문제]

14. 전체집합 $U=\{x|x$는 $|x|<3$인 정수$\}$에서 두 조건 $p:\ x^2-2x-3=0$, $q:\ x^3=1$의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $n(P^C-Q)$는?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

[대단원 종합 문제]

15. 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. 명제 $q \rightarrow \sim p$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$
② $P \cap Q = P$
③ $P^C \cap Q = P^C$
④ $P^C \cup Q = Q$
⑤ $P \cup Q^C = Q^C$

[대단원 종합 문제]

16. 모든 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + y^2 + 2xy + ax - 2y + b \geq 0$ 이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a = m$, $b \geq n$라고 할 때, $m + n$의 값은?

① -4
② -1
③ 0
④ 2
⑤ 4

[대단원 종합 문제]

17. 다음 두 조건 p, q에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은? (단, x,y는 실수, A, B, C는 집합)

① $p: x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ $\quad q: |x| = 1$
② $p: 0 < x < y$ $\quad q: 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$
③ $p: x > y > z$ $\quad q: (x-y)(y-z)(z-x) < 0$
④ $p: A \cap B = A$ $\quad q: A - B = \varnothing$
⑤ $p: (A \cap B) \subset C$ $\quad q: A \subset C$이고 $B \subset C$

[소단원 확인 문제]

18. x, y가 실수일 때, 명제의 역이 참인 것은?

① $x = 0$이면 $xy = 0$이다.
② $x = y$이면 $x^2 = y^2$이다.
③ $x = 0$이면 $x^2 - x = 0$이다.
④ $x > 0$이고 $y > 0$이면 $x + y > 0$이다.
⑤ $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 $x^2 + y^2 = 0$이다.

[중단원 연습 문제]

19. 두 조건 $p: x \leq a$ 또는 $x \geq b$, $q: x^2 - 3x - 10 \geq 0$에 대하여 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$의 대우가 참이 되게 하는 a의 최솟값과 b의 최댓값의 합은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[중단원 연습 문제]

20. 다음 두 조건 p, q에서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은? (단, a, b는 실수)

① $p: ab \geq 0$ $\quad q: a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$
② $p: a > 1$ 또는 $b > 1$ $\quad q: a + b > 2$
③ $p: a$는 유리수 $\quad q: a^2$은 유리수
④ $p: a = 0$ 또는 $b = 0$ $\quad q: a + \sqrt{2}b = 0$
⑤ $p: ab = 0$이고 $a + b = 0$ $\quad q: a = 0$이고 $b = 0$

[중단원 연습 문제]

21. 실수 x에 대하여 세 조건 $p: |x-2| \leq 2$, $q: x^2 - 2x - 48 \leq 0$, $r: |x-a| \leq 3$에 대하여 r은 p이기 위한 필요조건이고 q이기 위한 충분조건일 때, 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 4
② 5
③ 6
④ 7
⑤ 8

[중단원 연습 문제]

22. **두 집합 A, B에 대하여**
$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$라고 정의할 때,
$A \triangle B = A \cup B$인 것은 $A \cap B = \varnothing$이기 위한
(가)조건, $A^C = B$이기 위한 (나)조건이다.
또, $B \cup (A^C - B) = B$이기 위한 (다)조건이다. (가), (나), (다)에 들어갈 내용을 짝지은 것 중 가장 적절한 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	필요	충분	충분
②	필요충분	필요	필요충분
③	필요충분	충분	충분
④	충분	필요충분	필요충분
⑤	필요	필요충분	필요

[중단원 연습 문제]

23. **다음 중 명제의 대우와 그 참, 거짓이 옳은 것은?**

① xy가 정수이면 x와 y는 정수이다.
<대우> x와 y가 정수가 아니면 xy는 정수가 아니다. (거짓)

② $x^2 < 0$이면 x는 실수가 아니다.
<대우> x가 실수이면 $x^2 \geq 0$ (참)

③ $|x-2| > 1$이면 x는 3의 약수가 아니다.
<대우> x가 3의 약수이면 $|x-2| \leq 1$이다. (거짓)

④ $a+b < 2$이면 $a < 1$ 또는 $b < 1$이다
<대우> $a \geq 1$이고 $b \geq 1$이면 $a+b \geq 2$이다. (거짓)

⑤ $|x| + |y| \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다.
<대우> $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 $|x| + |y| = 0$이다. (참)

[중단원 연습 문제]

24. **다음 중 명제의 역과 대우를 모두 바르게 쓴 것은?**

① x와 y가 모두 유리수이면 xy는 유리수이다.
<역> xy가 유리수이면 x 또는 y는 유리수이다.
<대우> xy가 무리수이면 x와 y는 무리수이다.

② x가 양수이면 x^2도 양수이다.
<역> x^2이 양수이면 x도 양수이다.
<대우> x^2이 음수이면 x도 음수이다.

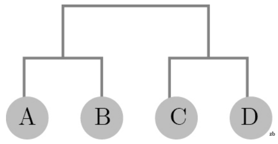
③ $x^2 \geq 0$이면 x는 실수이다.
<역> x가 실수이면 $x^2 \geq 0$이다.
<대우> x가 복소수이면 $x^2 < 0$이다.

④ $x > 0$이고 $y > 0$이면 $x+y > 0$이다
<역> $x+y > 0$이면 $x > 0$ 또는 $y > 0$이다.
<대우> $x+y < 0$이면 $x < 0$ 또는 $y < 0$이다.

⑤ $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 $x^2 + y^2 = 0$이다.
<역> $x^2 + y^2 = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.
<대우> $x^2 + y^2 \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다.

[소단원 확인 문제]

25. **A, B, C, D 네 사람이 다음 대진표와 같이 경기를 하였다. 경기를 치룬 후 네 명의 사람이 아래와 같이 말하였다. 한 명만 참을 말하였을 때, 참을 말한 사람과 이 경기에서 최종 우승한 사람을 차례로 나열하면? (단, 비기는 경우는 없다.)**



A: 탁구 경기에서 나는 결승에 올라갔어.
B: D는 결승전에 올라갔어.
C: 나는 A와의 대결에서 이겼어.
D: 탁구 경기에서 B는 두 번 경기했지!

① A, A　　② A, C
③ B, A　　④ B, D
⑤ C, C

[소단원 확인 문제]

26. 다음 두 조건 p, q에서 p가 q이기 위한 필요충분 조건인 것은? (단, a, b는 실수, A, B는 집합)

① $p : a^2+b^2=0$ $\quad q : a=0$ 또는 $b=0$

② $p : |a| \le 2,$ $\quad q : 0 \le a \le 2$

③ $p : |a|+|b|=0$ $\quad q : a+bi=0$ (단, $i=\sqrt{-1}$)

④ $p : n(A)=n(B)$ $\quad q : n(A-B)=0$

⑤ $p : A \subset B$ $\quad q : n(A)<n(B)$

[소단원 확인 문제]

27. 명제 '$x+y>2$이면 $x>1$ 또는 $y>1$이다.'에 대한 설명으로 <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, x,y는 실수)

<보기>

ㄱ. 역의 결론은 '$x+y>2$' 이다.

ㄴ. $x=3$, $y=-5$은 역의 반례이다.

ㄷ. 대우는 '$x \le 1$ 또는 $y \le 1$이면 $x+y \le 2$' 이다.

ㄹ. 명제는 참이다.

① ㄱ, ㄴ $\quad$ ② ㄴ, ㄷ

③ ㄷ, ㄹ $\quad$ ④ ㄱ, ㄴ, ㄹ

⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

[소단원 확인 문제]

28. 다음은 $\sqrt{2}$가 무리수임을 이용하여 $1+\sqrt{2}$도 무리수임을 증명하는 과정이다.

<증명>

$1+\sqrt{2}$를 $\boxed{\text{(가)}}$라 가정하면

$1+\sqrt{2}$와 -1은 $\boxed{\text{(나)}}$이고

$(1+\sqrt{2})+(-1)=\sqrt{2}$는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

그런데 이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{(라)}}$ 라는 사실에 모순이다.

따라서 $1+\sqrt{2}$는 $\boxed{\text{(마)}}$이다.

위의 증명에서 (가)~(마)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)	(라)	(마)
①	유리수	유리수	유리수	무리수	무리수
②	유리수	무리수	무리수	무리수	무리수
③	무리수	무리수	유리수	무리수	무리수
④	무리수	유리수	유리수	무리수	무리수
⑤	유리수	유리수	무리수	무리수	무리수

[소단원 확인 문제]

29. 다음은 a, b, c이 자연수일 때, 명제 '$a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다.

<증명>

주어진 명제의 대우 'a, b, c가 모두 홀수이면 $\boxed{\text{(가)}}$이다.'가 참임을 보이면 된다.

$a=2l-1$, $b=2m-1$, $c=2n-1$

(단, l, m, n은 자연수)이라 하면

$a^2+b^2+c^2=(2l-1)^2+(2m-1)^2+(2n-1)^2$

$\quad =4(l^2+m^2-n^2)+4(-l-m+n)+1$

$\quad =2(2l^2+2m^2-2n^2-2l-2m+2n)+\boxed{\text{(나)}}$

이므로 a, b, c가 모두 홀수이면 $\boxed{\text{(가)}}$이다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

① $a^2+b^2=c^2$, 0, 참 $\quad$ ② $a^2+b^2=c^2$, 0, 거짓

③ $a^2+b^2 \ne c^2$, 0, 참 $\quad$ ④ $a^2+b^2 \ne c^2$, 1, 참

⑤ $a^2+b^2 \ne c^2$, 1, 거짓

[소단원 확인 문제]

30. 다음은 $a>b>0$일 때, 부등식 $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$가 성립함을 증명하는 과정이다.

<증명>

$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)=2\sqrt{ab}-2b$

$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\boxed{\text{(가)}}0$ $(\because\ a>b)$

따라서 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\boxed{\text{(나)}}(\sqrt{a-b})^2$

그런데 $\sqrt{a-b}\boxed{\text{(다)}}0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\boxed{\text{(다)}}0$ 이므로

$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

위의 증명에서 (가)~(다)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\ge$	$>$	$\ge$
②	$\ge$	$\ge$	$>$
③	$>$	$<$	$>$
④	$>$	$>$	$\ge$
⑤	$\le$	$<$	$\ge$

[중단원 연습 문제]

31. $ab>0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{(a+2b)^2}{4ab}$의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{2}$　　② 1　　③ $\dfrac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\dfrac{5}{4}$

[소단원 확인 문제]

32. $a>0$, $b>0$일 때, $36+\dfrac{3}{a}+12a$의 최솟값은?

① 12　　② 24　　③ 36　　④ 48　　⑤ 60

[소단원 확인 문제]

33. $a>1$, $b>1$인 실수 a, b에 대하여 다음 중 절대부등식이 아닌 것은?

① $a^2+b^2\geq 2ab$　　② $a^2+b^2>ab$　　③ $a+b>2\sqrt{ab}$　　④ $(a+b)^2+(a-b)^2>0$　　⑤ $a^2+a>0$

[대단원 종합 문제]

34. $x>-2$일 때, $4x+\dfrac{1}{x+2}$은 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 이때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ -6　　⑤ -3

[대단원 종합 문제]

35. 다음은 실수 a, b에 대하여 $a>0$, $b>0$일 때, $\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하는 과정으로, 어떤 학생의 오답에 대한 선생님의 첨삭지도 일부이다.

<학생풀이>

$a>0$, $b>0$일 때, a, $\dfrac{4}{b}$, b, $\dfrac{9}{a}$가 모두 양수이므로

산술평균과 기하평균의 대소관계를 적용하면

$a+\dfrac{4}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{4a}{b}}$ … ㉠

$b+\dfrac{9}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{9b}{a}}$ … ㉡

㉠, ㉡의 양변을 각각 곱하면

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 4\sqrt{\dfrac{4a}{b}\cdot\dfrac{9b}{a}}=24$ … ㉢

그러므로 구하는 최솟값은 24이다.

<첨삭내용>

㉠의 등호가 성립할 때는 $\boxed{\text{(가)}}$이고

㉡의 등호가 성립할 때는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

따라서 (가)와 (나)를 동시에 만족하는 양수 a, b는 존재하지 않으므로 최솟값은 24가 될 수 없다.

<바른 풀이> 전개하여 산술 기하 부등식을 이용함.

$\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)=13+ab+\dfrac{36}{ab}$

$\geq 13+2\sqrt{36}=25$ … ㉣

이다. 따라서 최솟값은 $\boxed{\text{(다)}}$이며,

등호가 성립할 조건은 $\boxed{\text{(라)}}$이다.

위의 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $a=4$, $b=9$, 24, $ab=6$

② $ab=4$, $ab=9$, 25, $ab=6$

③ $ab=9$, $ab=4$, 24, $ab=6$

④ $b=9$, $ab=9$, 25, $ab=9$

⑤ $ab=4$, $ab=6$, 25, $ab=9$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ④
[해설] ① 6의 배수는 2의 배수이다. (참)
② 대각선이 서로 수직이등분하는 사각형은 마름모이다. (참)
③ 직사각형은 평행사변형이다. (참)
④ $x+\sqrt{2}y=0$이면 $x=y=0$이다.
(반례) $x=-\sqrt{2}$, $y=1$이면 $x+\sqrt{2}y=0$이지만 $x=y=0$이 아니다. (거짓)
⑤ $x^2<25$이면 $-5<x<5$이다. (참)

2) [정답] ④
[해설] ① 2는 짝수인 소수이다. (거짓)
② x,y중 하나만 짝수이면 xy가 짝수이다.(거짓)
③ $xy=0$이면 $x=0$이거나 $y=0$이다. (거짓)
④ $x^2\le 1$이면 $x\le 1$이다. (참)
⑤ $x=3$일 때 $4x-2>2x$이다. (거짓)

3) [정답] ⑤
[해설] ① 주어진 명제의 부정은 '$x^2=x$이면 $x\ne 1$이다.' 이고,
$x^2=x$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 거짓이다.
② 주어진 명제의 부정은 '$xy=0$이면 $x\ne 0$이고 $y\ne 0$'이다.
$xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이므로 거짓이다.
③ 주어진 명제의 부정은 $(x+3)^2=0$이면 $x^2+2x-3\ne 0$이다.
$(x+3)^2=0$에서 $x=-3$이고
$(-3)^2+2(-3)-3=0$이므로 거짓이다.
④ 주어진 명제의 부정은 $2x-1>0$이면 $x+2\le 0$이다. 즉 $x>\frac{1}{2}$이면 $x\le -2$이므로 거짓이다.
⑤ 주어진 명제의 부정은 $|xy|>xy$이면 $xy<0$이다. $xy<0$일 때 $xy=-xy$이고, $|xy|>xy$이므로 참이다.

4) [정답] ①
[해설] $x^2-x-6\le 0$, $(x-3)(x+2)\le 0$ 에서
$-2\le x\le 3$ 이므로 진리집합 P는 $P=\{1,\ 2,\ 3\}$
$\therefore\ n(P)=3$

5) [정답] ④
[해설] ① 소수 중 짝수인 수는 2가 존재하므로 참이다.
② 모든 정삼각형은 이등변삼각형이다.
③ $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 참이다.
④ $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$는 모든 실수에 대하여 2이상이므로 $x^2-2x+3=0$인 실수는 존재하지 않는다.
⑤ 대각선의 길이가 서로 같은 사다리꼴은 등변사다리꼴과 정사각형이 있으므로 참이다.

6) [정답] ④
[해설] $\sim p$: $-1<x\le 4$

7) [정답] ①
[해설] 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
$x^2-2x-24<0$, $(x-6)(x+4)<0$ 에서
$-4<x<6$이므로
$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
조건 'p이고 $\sim q$' 의 진리집합은 $P\cap Q^C$,
즉 $P-Q$ 이므로 $\{10\}$
따라서 모든 원소의 합은 10이다.

8) [정답] ①
[해설] $U=\{x|$는 4의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 4\}$
$p: x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$
$P=\{2,\ 3\}$
q: $x^2-2x\le 0$, $x(x-2)\le 0$, $0\le x\le 2$
$Q=\{1,\ 2\}$, $P^C\cap Q=\{1\}$
따라서 모든 원소의 합은 1이다.

9) [정답] ⑤
[해설] 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-kx+9\ge 0$ 이다.'
이고, 최고차항의 계수가 양수인 이차방정식이 항상 0보다 크거나 같으려면 판별식이 0보다 작거나 같아야 한다.
$D=k^2-36\le 0$ $\therefore$ $-6\le k\le 6$
따라서 상수 k의 최댓값과 최솟값의 곱은 -36이다.

10) [정답] ⑤
[해설] ① $x=-2$이면 $x^2=(-2)^2=4$이다. (참)
② $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)
③ $x^2+y^2=0$는 $x=0$이고 $y=0$이므로 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)
④ $x+y>2$이면 $x>1$ 또는 $y>1$이다. (참)
⑤ $xy=|xy|$이면 $x\ge 0$이고 $y\ge 0$이다.
<반례> $x=-2$, $y=-2$ 이면
$xy=4$이므로 $xy=|xy|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

11) [정답] ②
[해설] 반례는 가정은 만족하지만 결론은 만족하지 않는 경우이므로 각 자리 숫자의 합이 짝수이면서 홀수인 수인 수이다.
따라서 반례로 알맞은 수는 15이다.

12) [정답] ④
[해설] ① (반례) $x=-y$이면 $x+y=0$이다. (거짓)
② (반례) $x=-8$이면 $|x|>7$이다. (거짓)

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

③ (반례) $1>-2$이지만 $1<4$이다. (거짓)
④ $xy<0$이면, $x>0$ 또는 $y>0$이다. (참)
⑤ (반례) $A=\varnothing$, $B=\{1\}$, $C=\{1,2\}$이면
$B\subset(A\cup C)$이지만 $B\subset A$가 아니다. (거짓)

13) [정답] ④
[해설] 'p이면 q이다.'가 참이므로 $P\subset Q$ 이다.
따라서 $3<a+1$, $a>2$
이를 만족하는 정수 a의 최솟값은 3이다.

14) [정답] ③
[해설] $U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
$P=\{-1\}$, $Q=\{1\}$
$P^C-Q=P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=\{-2,\ 0,\ 2\}$
$\therefore\ n(P^C-Q)=3$

15) [정답] ⑤
[해설] $q\to\sim p$가 참이므로 $Q\subset P^C$이다.
이때 $P\subset Q^C$이므로 $P\cup Q^C=Q^C$이다.

16) [정답] ②
[해설] $x^2+y^2+2xy+ax-2y+b\ge 0$ 을
x에 대하여 정리하면
$x^2+(2y+a)x+y^2-2y+b\ge 0$
이 식이 항상 성립해야하므로 $D\le 0$이다.
$D=(2y+a)^2-4(y^2-2y+b)\le 0$
$4(a+2)y+a^2-4b\le 0$에서
이 식이 y에 대하여 일차함수이면 식이 항상 성립하지 않으므로 이 식은 상수함수이어야 한다.
즉 $a+2=0$, $a^2-4b\le 0$이어야 하므로
$a=-2$, $b\ge 1$
따라서 $m=-2$, $n=1$
$\therefore\ m+n=-1$

17) [정답] ③
[해설] 명제 $p\to q$는 참이고, $q\to p$는 거짓인 것을 고르거나 $P\subset Q$, $P\ne Q$인 것을 고르면 된다.
① $p: x^3+2x^2-x-2=0$에서
$(x-1)(x+1)(x+2)=0$
$x=1$ 또는 $x=-1$, $x=-2$
$q: |x|=1$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$
$Q\subset P$, $P\ne Q$이므로 조건 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
② $p: 0<x<y$
$q: 0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$의 양변에 xy를 곱하면
$0<x<y$가 되므로 두 조건은 필요충분조건이다.
③ $q: x>y>z$
$p: (x-y)(y-z)(z-x)<0$
$y>z>x$ 또는 $x>y>z$ 또는 $y>z>x$이므로
$P\subset Q$, $P\ne Q$이므로 조건 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
④ $p: A\cap B=A$, $q: A-B=\varnothing$
$p: A\cap B=A$에서 $A\subset B$
$q: A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$
이므로 두 조건은 필요충분조건이다.
⑤ $p: (A\cap B)\subset C$, $q: A\subset C$이고 $B\subset C$
에 대하여 명제 $q\to p$는 참이고, 명제 $p\to q$는 거짓이므로 조건 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

18) [정답] ⑤
[해설] ① 역 : $xy=0$이면 $x=0$이다.
<반례> $x=1$, $y=0$
② 역 : $x^2=y^2$이면 $x=y$이다.
<반례> $x=1$, $y=-1$
③ 역 : $x^2-x=0$이면 $x=0$이다.
<반례> $x=1$
④ 역 : $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다.
<반례> $x=3$, $y=-2$
⑤ 역 : $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다.
$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이므로
$x=0$ 또는 $y=0$이므로 참이다.

19) [정답] ③
[해설] $\sim p\to\sim q$가 참이므로 대우 $q\to p$가 참이고
조건 p,q의 진리집합 P,Q에 대하여
$Q\subset P$가 성립해야 한다.
$q: x^2-3x-10\ge 0$에서 $(x+2)(x-5)\ge 0$
즉, $Q=\{x\,|\,x\le -2$ 또는 $x\ge 5\}$
$Q\subset P$를 만족하기 위해서는 $-2\le a$, $b\le 5$
이어야 하므로
a의 최솟값과 b의 최댓값의 합은
$-2+5=3$이다.

20) [정답] ②
[해설] 명제 $p\to q$는 거짓이고, 명제 $q\to p$는 참인 것을 고르거나 $Q\subset P$, $P\ne Q$인 것을 고르면 된다.
① $p: ab\ge 0$에서 $a\ge 0$이고 $b\ge 0$이거나
$a\le 0$이고 $b\le 0$이 된다.
$q: a\ge 0$ 또는 $b\ge 0$
명제 $p\to q$의 반례는 $a=-1$, $b=-1$
명제 $q\to p$의 반례는 $a=2$, $b=-1$
따라서 포함관계가 없다.
② $p: a>1$ 또는 $b>1$, $q: a+b>2$
명제 $p\to q$의 반례는 $a=2$, $b=0$이고,
명제 $q\to p$가 참이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
③ $p: a$는 유리수, $q: a^2$은 유리수
명제 $p\to q$는 참이고, 명제 $q\to p$의 반례는
$a=\sqrt{2}$ 이므로 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
④ $p: a=0$ 또는 $b=0$, $q: a+\sqrt{2}b=0$
명제 $p\to q$의 반례는 $a=0$, $b=1$
명제 $q\to p$의 반례는 $a=2$, $b=-\sqrt{2}$

따라서 포함관계가 없다.
⑤ $p: ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$인데
$a+b=0$이므로 $a=b=0$이다.
따라서 두 조건은 필요충분조건이다.

21) [정답] ①
[해설] $P=\{x|0 \le x \le 4\}$
$Q=\{x|-6 \le x \le 8\}$
$R=\{x|-3+a \le x \le 3+a\}$
r은 p이기 위한 필요조건이고,
q이기 위한 충분조건이므로
$P \subset R \subset Q$
따라서 $-6 \le -3+a \le 0$이고 $4 \le 3+a \le 8$
즉, $-3 \le a \le 3$이고 $1 \le a \le 5$
$\therefore\ 1 \le a \le 3$
따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은 4이다.

22) [정답] ②
[해설] (ⅰ) $A \triangle B=(A \cup B)-(A \cap B)=A \cup B$이면
$A \cap B=\varnothing$이고, $A \cap B=\varnothing$이면
$A \triangle B=A \cup B$이므로 필요충분조건이다.
(ⅱ) $A \cap B=\varnothing$이면 $A^C=B$라고 할 수 없지만
$A^C=B$일 때는 $A \cap B=\varnothing$이므로 필요조건이다.
(ⅲ) $B \cup (A^C-B)=B$에서
$B \cup (A^C \cap B^C)=B$
$(B \cup A^C) \cap (B \cup B^C)=B$
$(B \cup A^C) \cap U=B$, $B \cup A^C=B$, $B \subset A^C$
따라서 $A \cap B=\varnothing$이므로 필요충분조건이다.

23) [정답] ②
[해설] ① xy가 정수이면 x와 y는 정수이다.
<대우> x 또는 y가 정수가 아니면 xy는 정수가 아니다.
반례) $x=2$, $y=\frac{1}{2}$이면 $xy=1$이다. (거짓)
② $x^2<0$이면 x는 실수가 아니다.
<대우> x가 실수이면 $x^2 \ge 0$ (참)
③ $|x-2|>1$이면 x는 3의 약수가 아니다.
<대우> x가 3의 약수이면 $|x-2| \le 1$이다.
3의 약수는 1과 3이고,
$|1-2| \le 1$, $|3-2| \le 1$이므로 참이다.
④ $a+b<2$이면 $a<1$ 또는 $b<1$이다.
<대우> $a \ge 1$이고 $b \ge 1$이면 $a+b \ge 2$이다. (참)
⑤ $|x|+|y| \ne 0$이면 $x \ne 0$이고 $y \ne 0$이다.
<대우> $x=0$ 또는 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다.
반례) $x=0$, $y=1$이면 $|x|+|y|=1$이다. (거짓)

24) [정답] ⑤
[해설] ① x와 y가 모두 유리수이면 xy는 유리수이다.
<역> xy가 유리수이면 x와 y는 유리수이다.
<대우> xy가 무리수이면 x 또는 y는 무리수이다.
② x가 양수이면 x^2도 양수이다.
<역> x^2이 양수이면 x도 양수이다.
<대우> x^2이 0또는 음수이면 x도 0 또는 음수이다.
③ $x^2 \ge 0$이면 x는 실수이다.
<역> x가 실수이면 $x^2 \ge 0$이다.
<대우> x가 실수가 아니면 $x^2<0$이다.
④ $x>0$이고 $y>0$이면 $x+y>0$이다
<역> $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다.
<대우> $x+y \le 0$이면 $x \le 0$ 또는 $y \le 0$이다.
⑤ $x=0$ 또는 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.
<역> $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다.
<대우> $x^2+y^2 \ne 0$이면 $x \ne 0$이고 $y \ne 0$이다.

25) [정답] ①
[해설] (ⅰ) A만 참을 말했을 때,
A가 참이므로 A가 B를 이겼다.
B가 거짓이므로 C가 D를 이겼다.
C가 거짓이므로 A가 C를 이겼다.
D가 거짓이므로 B가 A에게 졌다.
따라서 최종 우승한 사람은 A이다.
(ⅱ) B만 참을 말했을 때,
A가 거짓이므로 A가 B에게 졌다.
B가 참이므로 D가 C를 이겼다.
C가 거짓이므로 A가 C를 이겼다.
D가 거짓이므로 B가 A에게 졌다.
이는 모순이다.
(ⅲ) C만 참을 말했을 때,
A가 거짓이므로 A가 B에게 졌다.
B가 거짓이므로 C가 D를 이겼다.
C가 참이므로 C가 A를 이겼다.
A가 1회전에서 져서 C와 경기를 치룰 수 없다.
따라서 모순이다.
(ⅳ) D만 참을 말했을 때,
A가 거짓이므로 A가 B에게 졌다.
B가 거짓이므로 C가 D를 이겼다.
C가 거짓이므로 A가 C를 이겼다.
A가 1회전에서 져서 C와 경기를 치룰 수 없다.
따라서 모순이다.

26) [정답] ③
[해설] ① $p: a^2+b^2=0$에서 $a=b=0$이므로
필요충분조건이 아니다.
② $p: |a| \le 2$에서 $-2 \le a \le 2$이므로
필요충분조건이 아니다.
③ $p: |a|+|b|=0$ 에서 $a=b=0$
$q: a+bi=0$에서 $a=b=0$ 이므로
필요충분조건이다.
④ $q: n(A-B)=0$에서 $A-B=\varnothing$, $A \subset B$
$p: n(A)=n(B)$는 $A \subset B$를 의미하지 않는다.
따라서 필요충분조건이 아니다.
⑤ $p: A \subset B$는 $A=B$일 수 있으므로

$n(A) \le n(B)$
따라서 필요충분조건이 아니다.

27) [정답] ④
[해설] ㄱ. 주어진 명제의 역
'$x>1$ 또는 $y>1$이면 $x+y>2$이다.'
에서 결론은 $x+y>2$이다.
ㄴ. $x=3$, $y=-5$이라 하면 $x>1$이지만
$x+y=-2$이므로 주어진 명제의 역
'$x>1$ 또는 $y>1$이면 $x+y>2$이다.'
의 반례가 된다.
ㄷ. 주어진 명제 '$x+y>2$이면 $x>1$ 또는 $y>1$이다.'의 대우명제는
'$x \le 1$이고 $y \le 1$이면 $x+y \le 2$이다.' 이다.
ㄹ. 명제 '$x+y>2$이면 $x>1$ 또는 $y>1$이다.'
의 대우는 '$x \le 1$이고 $y \le 1$이면 $x+y \le 2$이다.'
이고, $x \le 1$, $y \le 1$이라 하면
$x+y \le 1+y \le 1+1=2$ 에서
대우 명제가 참이므로 본 명제도 참이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ 이다.

28) [정답] ①
[해설] $1+\sqrt{2}$를 유리수라 가정하면
$1+\sqrt{2}$와 -1은 유리수이고
$(1+\sqrt{2})+(-1)=\sqrt{2}$는 유리수이다.
그런데 이것은 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실에 모순이다. 따라서 $1+\sqrt{2}$는 무리수이다.
따라서 (가) 유리수, (나) 유리수, (다) 유리수, (라) 무리수, (마) 무리수 이다.

29) [정답] ④
[해설] 주어진 명제의 대우 'a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2 \ne c^2$이다.'가 참임을 보이면 된다.
$a=2l-1$, $b=2m-1$, $c=2n-1$
(단, l,m,n은 자연수)라 하자.
$a^2+b^2+c^2=(2l-1)^2+(2m-1)^2+(2n-1)^2$
$=4(l^2+m^2-n^2)+4(-l-m+n)+1$
$=2(2l^2+2m^2-2n^2-2l-2m+2n)+1$
이므로 a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2 \ne c^2$이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
(가) $a^2+b^2 \ne c^2$, (나) 1, (다) 참

30) [정답] ③
[해설] $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
$=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)=2\sqrt{ab}-2b$
$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\boxed{>}0 \ (\because a>b)$
따라서 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\boxed{<}(\sqrt{a-b})^2$
그런데 $\sqrt{a-b}\boxed{>}0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\boxed{>}0$이므로
$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

31) [정답] ④
[해설] $\dfrac{(a+2b)^2}{4ab}=\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{4ab}=\dfrac{b}{4a}+\dfrac{a}{b}+1$
$ab>0$이므로 $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\dfrac{a}{4b}+\dfrac{b}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{4b}\times\dfrac{b}{a}}=1$
따라서 구하는 최솟값은 $1+1=2$이다.

32) [정답] ④
[해설] 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$36+\dfrac{3}{a}+12a \ge 36+2\sqrt{36}=48$이므로
구하는 식의 최솟값은 48이다.

33) [정답] ③
[해설] ① $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \ge 0$
② $a^2+b^2-ab=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0 \ (\because b \ne 0)$
③ <반례> $a=\dfrac{9}{4}$, $b=\dfrac{9}{4}$이면
$\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}>2\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{9}{2}>\dfrac{9}{2}$으로
성립하지 않는다.
④ 모든 실수 a,b에 대하여
$(a+b)^2+(a-b)^2 \ge 0$ 인데, $a \ne 0$, $b \ne 0$이므로
$(a+b)^2+(a-b)^2>0$이다.
⑤ $a^2+a>0$은 $a>1$에서 항상 성립한다.

34) [정답] ③
[해설] $4x+\dfrac{1}{x+2}=4(x+2)+\dfrac{1}{x+2}-8$
$x>-2$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4(x+2)+\dfrac{1}{x+2} \ge 2\sqrt{4(x+2)\times\dfrac{1}{x+2}}=4$
등호는 $4(x+2)=\dfrac{1}{x+2}$, 즉 $(x+2)^2=\dfrac{1}{4}$,
$x=-\dfrac{3}{2}$일 때 성립하므로 구하는 최솟값은
$4-8=-4$
즉 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-4$이므로 $ab=6$

35) [정답] ②
[해설] (가) $a=\dfrac{4}{b}$ 즉, $ab=4$
(나) $b=\dfrac{9}{a}$ 즉, $ab=9$
(다) 25
(라) $ab=\dfrac{36}{ab}$ 즉, $(ab)^2=36$이므로 $ab=6$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574