01 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때,
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서
(1) 접선의 기울기 : $f'(a)$
(2) 접선의 방정식 : $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

◪ 다음 곡선의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

1. $y=(x+2)^3(5x-3)$, $(-1,\ -8)$

2. $y=xe^x$, $(1,\ e)$

3. $y=\dfrac{1}{2}\tan x$, $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

4. $y=\sin x\cos x$, $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

5. $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\ (-\pi<x<\pi)$, $(0,\ 0)$

6. $y=e^x\cos x$, $(0,1)$

7. $y=e^x\ln 2x$, $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

02 접선의 방정식 구하는 방법 -(1) 접점의 좌표가 주어진 경우

접점의 좌표 $(a,\ f(a))$가 주어진 경우
① 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
② $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여
접선의 방정식을 구한다.

◪ 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

8. $y=\sqrt{x}$, $(4,\ 2)$

9. $y=\dfrac{1}{x-2}$, $(3,1)$

10. $y=\sin x$, $(\pi,0)$

11. $y=\sin x+\cos x$, $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 0\right)$

12. $y=\cos\pi x+x^2$, $(1,0)$

13. $y=\frac{1}{2}e^{2x}$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

14. $y=e^{x-1}+1$, $(1,\ 2)$

15. $y=\ln 2x$, $(e,\ \ln 2+1)$

16. $y=\ln(x+1)$, $(3,\ \ln 4)$

17. $y=x\ln x$, $(1,0)$

18. $y=\ln x^2$, $(e,2)$

19. $y=x-x\ln x$, $(e,0)$

20. $y=\sqrt{2x}+\frac{6}{x}$, $(2,\ 5)$

◪ 다음 곡선 위의 주어진 점을 지나고 그 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

21. $y=1+\cos x$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

22. $y=x+\sin x$, $(2\pi,\ 2\pi)$

23. $y=x^2\ln x$, (e, e^2)

24. $y=\frac{x}{x-1}$, $(2,\ 2)$

25. $y=x^3e^{-2x}$, $\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$

03 접선의 방정식 구하는 방법 -(2) 기울기가 주어진 경우

접선의 기울기 m이 주어진 경우
(ⅰ) 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.
(ⅱ) $f'(a)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.
(ⅲ) $y-f(a)=m(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

◪ 다음 곡선에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하여라.

26. $y=-\frac{1}{x}\ (x>0)$, $m=1$

27. $y=\sqrt{x+1}$, $m=1$

28. $y=\sqrt{2x-1}\left(x>\frac{1}{2}\right)$, $m=2$

29. $y=\sqrt{2x-3}-2$, $m=1$

30. $y=\ln(x+5)$, $m=\frac{1}{2}$

31. $y=\sqrt{2x}$, $m=4$

32. $y=e^{x}$, $m=1$

33. $y=e^{3x}$, $m=3$

34. $y=\cos 2x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$, $m=-1$

35. $y=\ln(x-1)$, $m=2$

36. $y=2\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$, $m=2$

37. $y=\ln x$, $m=1$

38. $y=x\ln x$, $m=2$

39. $y = \tan x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $m = 2$

40. $y = x + \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$, $m = 2$

41. $y = x^x (x > 0)$, $m = 0$

◪ 다음 직선의 방정식을 구하여라.

42. 곡선 $y = \dfrac{x^2}{x+1}$에 접하고 $x - 3y + 2 = 0$과 수직인 직선의 방정식 (단, $x > -1$)

43. 곡선 $y = \ln(3x+1)$에 접하고 직선 $y = 3x - 1$와 평행한 직선의 방정식 (단, $x > -\dfrac{1}{3}$)

44. 곡선 $y = x - \ln x$에 접하고 $y = \dfrac{1}{2}x + 3$에 평행한 직선의 방정식

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

45. 곡선 $y = e^{x+1}$에 접하고 $x + 4y - 1 = 0$에 수직인 직선의 방정식을 $y = ax + b$라고 할 때, 상수 a, b에 대하여 $4\ln a + b$의 값을 구하여라.

46. 직선 $y = 2x + a$가 곡선 $y = e^{2x}$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

47. 직선 $y = \dfrac{1}{e}x + 3$이 곡선 $y = \ln x + a$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

48. 직선 $y = x + a$가 곡선 $y = x + \sin x$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $0 \leq x \leq \pi$)

49. 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선이 곡선 $y = x^2 + k$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하여라.

04 접선의 방정식 구하는 방법 -(3) 곡선밖의 한 점이 주어진 경우

곡선 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$이 주어진 경우

(i) 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 점 $(x_1,\ y_1)$를 대입하여 a의 값을 구한다.

(iii) a의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

◪ **주어진 점에서 다음 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.**

50. $y=\dfrac{1}{x}$, $(4,\ 0)$

51. $y=\sqrt{x-1}$, $(0, 0)$

52. $y=\sqrt{x-3}$, $(2,\ 0)$

53. $y=\ln x$, $(0,\ 0)$

54. $y=e^{-x}$, $(1,\ 0)$

55. $y=e^{x-1}$, $(1,\ 0)$

56. $y=\ln(x-2)$, $(2,\ -1)$

57. $y=\ln(x-3)$, $(3, 0)$

58. $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $(0,\ 0)$

◪ **다음 물음에 답하여라.**

59. 원점에서 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}\ (x>0)$에 그은 접선이 점 $(e,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

60. 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$에 그은 접선의 방정식을 $y=ax+b$라고 할 때, 두 상수 $a,\ b$에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

61. 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 $m_1,\ m_2$라고 할 때, m_1m_2의 값을 구하여라.

05 매개변수/음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

1. 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 $t=a$에 대응하는 점이 주어진 경우
   (ⅰ) 접선의 기울기 $\dfrac{g'(a)}{f'(a)}$와 접점 $(f(a),\ g(a))$를 구한다.
   (ⅱ) $y-g(a)=\dfrac{g'(a)}{f'(a)}\{x-f(a)\}$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

2. 곡선 $f(x,\ y)=0$ 위의 점 P가 주어진 경우
   (ⅰ) 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.
   (ⅱ) (i)에서 구한 $\dfrac{dy}{dx}$에 점 P의 좌표를 대입하여 접선의 기울기를 구한다.
   (ⅲ) 점 P의 좌표와 (ii)에서 구한 기울기를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

◪ 다음 곡선의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

62. $2x^3+xy^2=3e^{x-y}$, $(1,\ 1)$

63. $3x^2+4y^2=12$, $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

64. $x^3-xy^2=10$, $(-2,\ 3)$

65. $x\cos y+y\cos x+2\pi=0$, $(\pi,\ \pi)$

66. $e^{\sin x}\ln y=1$, $(0,\ e)$

◪ 다음 접선의 방정식을 구하여라.

67. 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=\cos t$, $y=\sin 2t$에 대하여 $t=\dfrac{\pi}{6}$인 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

68. 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=t^2-1$, $y=t+\dfrac{1}{t}$에 대하여 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

69. 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=1+2t^2$, $y=t^3$에 대하여 $t=1$인 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

70. 평면 곡선 $x=\sec t$, $y=\tan t$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

71. 곡선 $x^2-y\ln x+ex-e=0$위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

72. 곡선 $x^2-2xy-y^2+7=0$에 대하여 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

73. 곡선 $x=t^2-2t+9$, $y=\frac{1}{3}t^3+5$에 대하여 $t=k$에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y=2x+6$과 수직이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

74. 매개변수로 나타낸 곡선 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ 에 대하여 $t=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식이 $y=x+\sqrt{2}$이다. 이때, 두 상수 a,b의 곱 ab의 값을 구하여라.

75. 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x=t^2-1, y=t+1$에서 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선이 점$(a,2)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하여라.

76. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, 매개변수로 나타낸 곡선 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin2\theta \end{cases}$ 에 직선 $2x+y=k$가 접한다. 이때, 상수 k의 값을 구하여라.

77. 곡선 $x^2+axy-y^2+b=0$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 1일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.

78. 곡선 $ax^3+y^5+by=-2$ 위의 한 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 -1일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

79. 곡선 $x^3+y^3+axy+b=0$위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{10}$일 때, $a-b$의 값을 구하여라.

80. 곡선 $x^2+y^2+axy+b=0$ 위의 점 $(2,3)$에서 접선의 기울기가 -4일 때, 두 상수 a,b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

81. 곡선 $2x^2+4y^2+axy+b=0$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$일 때, 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

82. 곡선 $x^3+y^3-axy+b=0$위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{3}$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

83. 곡선 $x^3-3xy+y^3=3$ 위의 점 $(2,1)$에서의 접선의 방정식과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

06 두 곡선에 동시에 접하는 직선

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면
(1) $x=a$에서의 함숫값이 같다. ⇨ $f(a)=g(a)$
(2) $x=a$에서의 접선의 기울기가 같다. ⇨ $f'(a)=g'(a)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

84. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

85. 함수 $f(x)=x^3+2x+1$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

86. 함수 $f(x)=(x-4)e^x\ (x>0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^5,\ 5)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

87. $f(x)=\tan\pi x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식을 구하여라.(단, $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$)

88. $f(x)=x^3+3x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

89. 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x+k$가 접할 때, 상수 k의 값을 구하여라.(단, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$)

90. 두 곡선 $y=\frac{k}{x}$, $y=\ln x$가 서로 접할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

정답 및 해설

1) -19

⇨ $y'=3(x+2)^2(5x-3)+5(x+2)^3$이므로
$x=-1$일 때, 접선의 기울기는 $3\cdot(-8)+5=-19$

2) $2e$

⇨ $y'=e^x+xe^x$이므로 $x=1$일 때 접선의 기울기는
$e+e=2e$

3) 1

⇨ $y'=\frac{1}{2}\sec^2 x$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2=1$

4) $\frac{1}{2}$

⇨ $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$
$x=\frac{\pi}{6}$일 때, $y'=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

5) $\frac{1}{2}$

⇨ $y'=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$이므로 $x=0$일 때,
접선의 기울기는 $\frac{1\times(1+1)}{2^2}=\frac{1}{2}$

6) 1

⇨ $y'=e^x\cos x-e^x\sin x$이므로 점 $(0,1)$에서의
접선의 기울기는 $e^0(\cos 0-\sin 0)=1$이다.

7) $2\sqrt{e}$

⇨ $y=e^x\ln 2x$를 미분하면 $y'=e^x\ln 2x+\frac{e^x}{x}$이므로
$x=\frac{1}{2}$일 때 접선의 기울기는 $e^{\frac{1}{2}}\ln 1+\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{e}$

8) $y=\frac{1}{4}x+1$

⇨ $f(x)=\sqrt{x}$라고 하면
$f'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(4)=\frac{1}{4}$이므로 접선의 방정식은
$y-2=\frac{1}{4}(x-4)\quad\therefore y=\frac{1}{4}x+1$

9) $y=-x+4$

⇨ $f(x)=\frac{1}{x-2}$이라 하면 $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$
점 $(3,1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(3)=-\frac{1}{(3-2)^2}=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=-(x-3)\qquad\therefore y=-x+4$

10) $y=-x+\pi$

⇨ $f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$
점 $(\pi,0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\pi)=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-0=-(x-\pi)\qquad\therefore y=-x+\pi$

11) $y=-\sqrt{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

⇨ $f(x)=\sin x+\cos x$라고 하면 $f'(x)=\cos x-\sin x$
점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$에서의 접선의 기울기는
$f'\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi-\sin\frac{3}{4}\pi=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$
이므로 접선의 방정식은
$y-0=(-\sqrt{2})\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\quad\therefore y=-\sqrt{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

12) $y=2x-2$

⇨ $f(x)=\cos\pi x+x^2$이라 하면 $f'(x)=-\pi\sin\pi x+2x$
점 $(1,0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$
$y-0=2(x-1)\quad\therefore y=2x-2$

13) $y=x+\frac{1}{2}$

⇨ $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\times 2=e^{2x}$
점 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-\frac{1}{2}=x-0\qquad\therefore y=x+\frac{1}{2}$

14) $y=x+1$

⇨ $f(x)=e^{x-1}+1$이라고 하면 $f'(x)=e^{x-1}$
점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=e^{1-1}=e^0=1$
이므로 접선의 방정식은
$y-2=1(x-1)\qquad\therefore y=x+1$

15) $y=\frac{1}{e}x+\ln 2$

⇨ $f(x)=\ln 2x$라고 하면
$f'(x)=(\ln 2x)'=(\ln 2+\ln x)'=\frac{1}{x}$
점 $(e,\ \ln 2+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{1}{e}$
이므로 접선의 방정식은
$y-(\ln 2+1)=\frac{1}{e}(x-e),\ \ y=\frac{1}{e}x-1+\ln 2+1$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\therefore y=\frac{1}{e}x+\ln 2$

16) $y=\frac{1}{4}x+\ln 4-\frac{3}{4}$

⇨ $f(x)=\ln(x+1)$이라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$
점 $(3,\ \ln 4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(3)=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$
이므로 접선의 방정식은
$y-\ln 4=\frac{1}{4}(x-3)\quad \therefore y=\frac{1}{4}x+\ln 4-\frac{3}{4}$

17) $y=x-1$
⇨ $f(x)=x\ln x$라 하면
$f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$
점 $(1,0)$에서 접선의 기울기는 $f'(1)=1$
$y-0=1\times(x-1)\quad \therefore y=x-1$

18) $y=\frac{2}{e}x$

⇨ $f(x)=\ln x^2$이라 하면 $f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

점 $(e,2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{2}{e}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=\frac{2}{e}(x-e)\qquad \therefore y=\frac{2}{e}x$

19) $y=-x+e$
⇨ $f(x)=x-x\ln x$라 하면
$f'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$
점 $(e,0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=-1$
$y-0=-(x-e)\qquad \therefore y=-x+e$

20) $y=-x+7$
⇨ $y'=\sqrt{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{6}{x^2}$
$x=2$일 때, $y'=\frac{1}{2}-\frac{6}{4}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$
$x=2$일 때, $y=2+3=5$
따라서 접선의 방정식은 $y=-x+7$

21) $y=x-\frac{\pi}{2}+1$
⇨ $f(x)=1+\cos x$라 하면 $f'(x)=-\sin x$
점 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$
이 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-1=1\times\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
$\therefore y=x-\frac{\pi}{2}+1$

22) $y=-\frac{1}{2}x+3\pi$
⇨ $f(x)=x+\sin x$라 하면 $f'(x)=1+\cos x$
점 $(2\pi,\ 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2\pi)=2$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 직선의 방정식은 $y-2\pi=-\frac{1}{2}(x-2\pi)$
$y=-\frac{1}{2}x+3\pi$

23) $y=-\frac{1}{3e}x+e^2+\frac{1}{3}$
⇨ $f(x)=x^2\ln x$라 하면
$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$
점 (e,e^2)에서의 접선의 기울기는
$f'(e)=2e\ln e+e=3e$
접선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면
$m\times 3e=-1\qquad \therefore m=-\frac{1}{3e}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-e^2=-\frac{1}{3e}(x-e)$
$\therefore y=-\frac{1}{3e}x+e^2+\frac{1}{3}$

24) $y=x$
⇨ $f(x)=\frac{x}{x-1}$이라 하면
$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$이므로
점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$
따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로
직선의 방정식은 $y-2=x-2\qquad \therefore\ y=x$

25) $y=-e^2x+e^2+\frac{1}{e^2}$
⇨ $f(x)=x^3e^{-2x}$라 하면
$f'(x)=3x^2\cdot e^{-2x}-2x^3e^{-2x}=e^{-2x}(3x^2-2x^3)$
점 $\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{1}{e^2}$
따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-e^2$이므로
$y-\frac{1}{e^2}=-e^2(x-1)$
$y=-e^2x+e^2+\frac{1}{e^2}$

26) $y=x-2$
⇨ $f(x)=-\frac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a, -\frac{1}{a}\right)$이라 하면 $f'(a)=1$이므로

$\frac{1}{a^2}=1$, $a^2=1$ $\therefore a=1(\because a>0)$

따라서 접점의 좌표가 $(1,-1)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y+1=x-1$ $\therefore y=x-2$

27) $y=x+\frac{5}{4}$

⇨ $f(x)=\sqrt{x+1}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{a+1})$이라 하면 $f'(a)=1$이므로

$\frac{1}{2\sqrt{a+1}}=1$, $\sqrt{a+1}=\frac{1}{2}$

$a+1=\frac{1}{4}$ $\therefore a=-\frac{3}{4}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{2}=x+\frac{3}{4}$ $\therefore y=x+\frac{5}{4}$

28) $y=2x-\frac{3}{4}$

⇨ $f(x)=\sqrt{2x-1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$f'(a)=\frac{1}{\sqrt{2a-1}}=2$

$\frac{1}{2a-1}=4$, $8a-4=1$ $\therefore a=\frac{5}{8}$

이때, $f(a)=f\left(\frac{5}{8}\right)=\sqrt{2\times\frac{5}{8}-1}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$이므로

접점의 좌표는 $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{5}{8}\right)$

$\therefore y=2x-\frac{3}{4}$

29) $y=x-\frac{7}{2}$

⇨ $y'=\frac{2}{\sqrt{2x-3}}=1$을 만족하는 $x=\frac{7}{2}$이므로

점 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y=1\times\left(x-\frac{7}{2}\right)=x-\frac{7}{2}$이다.

30) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\ln 2$

⇨ $f(x)=\ln(x+5)$라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{x+5}$

접점의 좌표를 $(a, \ln(a+5))$라고 하면

접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(a)=\frac{1}{a+5}=\frac{1}{2}$에서 $a=-3$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, \ln 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\ln 2=\frac{1}{2}(x+3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\ln 2$

31) $y=4x+\frac{1}{8}$

⇨ $f(x)=\sqrt{2x}$라고 하면

$f'(x)=\left((2x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)'=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{2a})$라고 하면

접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=\frac{1}{\sqrt{2a}}=4$에서 $a=\frac{1}{32}$

따라서 접점의 좌표는

$\left(\frac{1}{32}, \sqrt{2\cdot\frac{1}{32}}\right)=\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{4}\right)$이므로

구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}=4\left(x-\frac{1}{32}\right)$

$\therefore y=4x+\frac{1}{8}$

32) $y=x+1$

⇨ $f(x)=e^x$이라고 하면 $f'(x)=e^x$

접점의 좌표를 (a, e^a)이라고 하면 기울기가 1이므로 $f'(a)=e^a=1$에서 $a=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, e^0)=(0, 1)$이므로

구하는 접선의 방정식은 $y-1=1\cdot(x-0)$

$\therefore y=x+1$

33) $y=3x+1$

⇨ 접점을 (t, e^{3t})라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3e^{3t}=3$ $\therefore t=0$

따라서 접점은 $(t, e^{3t})=(0, 1)$이므로 접선의 방정식은 $y=3x+1$이다.

34) $y=-x+\frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$

⇨ $f(x)=\cos 2x$라고 하면

$f'(x)=(\cos 2x)'=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$

접점의 좌표를 $(a, \cos 2a)$라고 하면

접선의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=-2\sin 2a=-1$에서

$\sin 2a=\frac{1}{2}$, $2a=\frac{\pi}{6}$ $\therefore a=\frac{\pi}{12}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

구하는 접선의 방정식은 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

$\therefore y=-x+\frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$

35) $y=2x-3-\ln 2$

⇨ $f(x)=\ln(x-1)$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x-1}$

접점의 좌표를 $(a, \ln(a-1))$이라 하면 $f'(a)=2$이므로 $\frac{1}{a-1}=2$, $a-1=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, \ln\frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-\ln\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore y=2x-3-\ln 2$

36) $y=2x-3\pi$

⇨ $f(x)=2\cos x$라 하면 $f'(x)=-2\sin x$

접점의 좌표를 $(a, 2\cos a)$라 하면 $f'(a)=2$이므로

$-2\sin a=2$, $\sin a=-1$ $\therefore a=\frac{3}{2}\pi(\because 0\le a\le 2\pi)$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-0=2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$ $\therefore y=2x-3\pi$

37) $y=x-1$

⇨ 접점을 $(t, \ln t)$라 하면 접선의 기울기는 접점에서 미분계수와 같으므로

$1=y'=\frac{1}{t}$ $\therefore t=1$

이때, 접점은 $(1, 0)$이 되므로 접선의 방정식은 $y=x-1$이다.

38) $y=2x-e$

⇨ $f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(a, a\ln a)$라 하면 $f'(a)=2$이므로

$\ln a+1=2$, $\ln a=1$ $\therefore a=e$

따라서 접점의 좌표가 (e, e)이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-e=2(x-e)$ $\therefore y=2x-e$

39) $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

⇨ $f(x)=\tan x$라 하면 $f'(x)=\sec^2 x$

접점의 좌표를 $(a, \tan a)$라 하면 $f'(a)=2$이므로

$\sec^2 a=2$, $\sec a=\pm\sqrt{2}$ $\therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

40) $y=2x+\frac{\pi}{2}$

⇨ $f(x)=x+\cos x$라 하면 $f'(x)=1-\sin x$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$f'(a)=1-\sin a=2$

$\sin a=-1$ $\therefore a=-\frac{\pi}{2}$

이때, $f(a)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ 이므로 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\left\{x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ $\therefore y=2x+\frac{\pi}{2}$

41) $y=e^{-e^{-1}}$

⇨ $\ln y=x\ln x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\frac{dy}{dx}=0$ 일 때, $x=\frac{1}{e}$이고, $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)}$

따라서 접선의 방정식은 $y=e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}=e^{-e^{-1}}$

42) $y=-3x-1$

⇨ $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

이 접선과 수직인 직선 $x-3y+2=0$의 기울기는 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$에서 $\frac{1}{3}$이므로 구하는 직선의 기울기는 -3이다.

즉 $f'(a)=\frac{a^2+2a}{(a+1)^2}=-3$, $a^2+2a=-3(a+1)^2$

$4a^2+8a+3=0$, $(2a+1)(2a+3)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}(\because a>-1)$

이때, $f(a)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}$이므로 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=-3\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$ $\therefore y=-3x-1$

43) $y=3x$

⇨ $f(x)=\ln(3x+1)$라 하면 $f'(x)=\dfrac{3}{3x+1}$
접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.
이 접선과 평행한 직선 $y=3x-1$의 기울기는 3이므로 $f'(a)=\dfrac{3}{3a+1}=3$ $\therefore a=0$
이때, $f(a)=f(0)=\ln 1=0$이므로 접점의 좌표는 $(0,0)$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x$

44) $y=\dfrac{1}{2}x-\ln 2+1$

⇨ 접선의 기울기가 $y'=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$이므로 $x=2$
접점 $(2,\ 2-\ln 2)$에서 접선의 방정식은
$y-(2-\ln 2)=\dfrac{1}{2}(x-2)$
$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-\ln 2+1$

45) 8
⇨ $f(x)=e^{x+1}$이라고 하면 $f'(x)=e^{x+1}$
$x+4y-1=0$에서 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$이므로
이것과 수직인 접선 $y=ax+b$의 기울기는 4이다.
접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+1})$이라고 하면
기울기가 4이므로
$f'(t)=e^{t+1}=4$ $\therefore t=\ln 4-1$
따라서 접점의 좌표는 $(\ln 4-1,\ 4)$이므로
접선의 방정식은 $y-4=4\{x-(\ln 4-1)\}$
$\therefore y=4x-4\ln 4+8$
$\therefore a=4,\ b=-4\ln 4+8$
따라서 구하는 값은
$4\ln a+b=4\ln 4+(-4\ln 4+8)=8$

46) 1
⇨ $y'=2e^{2x}=2$에서 $x=0$이므로 접점은 $(0,\ 1)$이다.
$\therefore a=1$

47) 3
⇨ $y'=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e}$ $\quad\therefore x=e$
따라서 접점은 $(e,\ 4)$이므로 이 접점을 곡선에 대입하면 $4=\ln e+a$ $\quad\therefore\ a=3$

48) 1
⇨ $f(x)=x+\sin x$라고 하면 $f'(x)=1+\cos x$
접점의 좌표를 $(t,\ t+\sin t)$라고 하면
접선 $y=x+a$의 기울기가 1이므로
$f'(t)=1+\cos t=1,\ \cos t=0$
$\therefore t=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because 0\le x\le \pi)$
따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}+1\right)$이므로
$y-\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\therefore y=x+1$
따라서 $y=x+1$에서 구하는 a의 값은
$a=1$

49) $\dfrac{1}{4e^2}$

⇨ $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$y=\dfrac{1}{e}x$ 이고, 이 곡선이 $y=x^2+k$에 접하므로
$\dfrac{1}{e}x=x^2+k$에서
(판별식)$=0$이므로 $1-4e^2k=0$ $\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{4e^2}$

50) $y=-\dfrac{1}{4}x+1$

⇨ $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
접점의 좌표를 $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$이므로 접선의 방정식은
$y-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a^2}(x-a)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이 직선이 점 $(4,0)$을 지나므로
$0-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a^2}(4-a),\ a=4-a$ $\quad\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}(x-2)$
$\therefore y=-\dfrac{1}{4}x+1$

51) $y=\dfrac{1}{2}x$

⇨ $f(x)=\sqrt{x-1}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$
접점의 좌표를 $(t,\sqrt{t-1})$이라 하면
이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$
접선의 방정식은
$y-\sqrt{t-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)\cdots$ ㉠
이 직선이 점 $(0,0)$을 지나므로
$0-\sqrt{t-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}(0-t)$
$2(t-1)=t$이므로 $t=2\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2}x$

52) $y=\dfrac{1}{2}x-1$

⇨ $f(x)=\sqrt{x-3}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{a-3})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a-3}}$이므로 접선의 방정식은 $y-\sqrt{a-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-3}}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(2,0)$을 지나므로

$0-\sqrt{a-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-3}}(2-a)$

$-2a+6=2-a$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-4)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-1$

53) $y=\dfrac{1}{e}x$

⇨ $f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(a, \ln a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\dfrac{1}{a}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,0)$을 지나므로

$0-\ln a=\dfrac{1}{a}(0-a)$

$\ln a=1$ $\quad\therefore a=e$

$a=e$를 ㉠에 대입하면 $y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)$

$\therefore y=\dfrac{1}{e}x$

54) $y=-x+1$

⇨ $f(x)=e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 (a, e^{-a})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-e^{-a}$이므로 접선의 방정식은 $y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1,0)$을 지나므로

$0-e^{-a}=-e^{-a}(1-a)$

$1=1-a(\because e^{-a}>0)$ $\quad\therefore a=0$

$a=0$를 ㉠에 대입하면 $y-1=-(x-0)$

$\therefore y=-x+1$

55) $y=ex-e$

⇨ $f(x)=e^{x-1}$이라고 하면 $f'(x)=e^{x-1}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{a-1})$이라고 하면

$x=a$에서 접선의 기울기는 $f'(a)=e^{a-1}$이므로

접선의 방정식은

$y-e^{a-1}=e^{a-1}(x-a)$,

$y=e^{a-1}x-ae^{a-1}+e^{a-1}$

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 대입하면

$0=e^{a-1}\cdot 1-ae^{a-1}+e^{a-1}$,

$e^{a-1}(2-a)=0$

$\therefore a=2$

따라서 접선의 방정식은

$y=e^{2-1}x-2\cdot e^{2-1}+e^{2-1}$

$\therefore y=ex-e$

56) $y=x-3$

⇨ $f(x)=\ln(x-2)$라고 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x-2}$

접점의 좌표를 $(a,\ \ln(a-2))$라고 하면

$x=a$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\dfrac{1}{a-2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\ln(a-2)=\dfrac{1}{a-2}(x-a)$,

$y=\dfrac{1}{a-2}x-\dfrac{a}{a-2}+\ln(a-2)$

이 접선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 대입하면

$-1=\dfrac{1}{a-2}\cdot 2-\dfrac{a}{a-2}+\ln(a-2)$

양변에 $a-2$를 곱하면 (단, $a\neq 2$)

$-(a-2)=2-a+(a-2)\ln(a-2)$,

$(a-2)\ln(a-2)=0$

$\therefore a=3\ (\because a\neq 2)$

따라서 접선의 방정식은

$y=x-3$

57) $y=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{3}{e}$

⇨ $f(x)=\ln(x-3)$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x-3}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t-3))$이라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t-3}$

접선의 방정식은 $y-\ln(t-3)=\dfrac{1}{t-3}(x-t)$ … ㉠

이 직선이 점 $(3,0)$을 지나므로

$0-\ln(t-3)=\dfrac{1}{t-3}(3-t)$

$\ln(t-3)=1$이므로 $t=e+3$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{3}{e}$

58) $y=\dfrac{1}{2e}x$

⇨ $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

접점을 $\left(t, \dfrac{\ln t}{t}\right)$이라 하자. 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\ln t}{t}=\dfrac{1-\ln t}{t^2}(x-t)$

원점을 지나므로

$-\dfrac{\ln t}{t}=\dfrac{1-\ln t}{t^2}(-t)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t}$

$\ln t=1-\ln t,\ \ln t=\frac{1}{2}\quad \therefore\ t=\sqrt{e}$

$\therefore\ m=\frac{1-\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2e}x$

59) $\frac{1}{2}$

⇨ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라고 하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$라고 하면

$x=t$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln x}{t^2}(x-t),\ y=\frac{1-\ln x}{t^2}x+\frac{2\ln t-1}{t}$

이 접선이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{1-\ln x}{t^2}\cdot 0+\frac{2\ln t-1}{t}\quad \therefore t=\sqrt{e}$

따라서 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2e}x$

이 직선이 점 $(e,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2e}\cdot e=\frac{1}{2}$

60) 20

⇨ $f(x)=\frac{2}{x}$라고 하면 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$라고 하면

$x=t$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{2}{t^2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{t}=-\frac{2}{t^2}(x-t),\ y=-\frac{2}{t^2}x+\frac{4}{t}$

이 접선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로 대입하면

$4=-\frac{2}{t^2}\cdot 0+\frac{4}{t}\quad \therefore t=1$

따라서 접선의 방정식은

$y=-2x+4\quad \therefore a=-2,\ b=4$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+4^2=20$

61) 1

⇨ 접점 $(m,\ (m-1)e^m)$이라 할 때, 이 점에서 접선의 기울기를 구하면

$y'=e^x+e^x(x-1)=xe^x$이므로 me^m이고,

접선의 방정식은 $y=me^m(x-m)+(m-1)e^m$이다.

접선이 점 $(2,0)$을 지날 때,

$e^m(m^2-3m+1)=0$으로 정리되고 이때,$e^m\neq 0$이고, 두 접선의 기울기 $m_1,\ m_2$는 $m^2-3m+1=0$의 근이므로 두 근의 곱 $m_1m_2=1$이다.

62) $-\frac{4}{5}$

⇨ 주어진 식의 양변을 미분하여 나타내면

$6x^2+y^2+2xyy'=3e^{x-y}(1-y')$이며

점 $(1,1)$을 대입하여 정리하면

$7+2y'=3-3y'$이고

점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{4}{5}$이다.

63) $-\frac{1}{2}$

⇨ 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x+8y\cdot y'=0\qquad \therefore y'=-\frac{3x}{4y}$

점 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$을 대입하면 접선의 기울기는

$-\frac{3\times 1}{4\times\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$이다.

64) $-\frac{1}{4}$

⇨ 주어진 양변을 각각 미분하여 정리하면

$3x^2-y^2-2xyy'=0$이고 곡선 위의 점 $(-2,3)$을 대입하면 $12-9+12y'=0$이므로 접선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

65) -1

⇨ 곡선을 x에 대해서 미분하면

$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\cos x-y\sin x=0$이다.

점 (π,π)에서의 접선의 기울기는 $-1-\frac{dy}{dx}=0$이므로 $\frac{dy}{dx}=-1$이다.

66) $-e$

⇨ 주어진 양변을 미분하면

$\cos x\times e^{\sin x}\times\ln y+e^{\sin x}\times\frac{1}{y}\times y'=0$이고

$x=0$일 때 $y=e$이므로 대입하여 정리하면

$\ln e+\frac{1}{e}\times y'=0$이다.

따라서 $y'=-e$이다.

67) $y=-2x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

⇨ $t=\frac{\pi}{6}$일 때 $x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

한편, $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{2\cos 2t}{\sin t}(\sin t\neq 0)$에서

$t=\frac{\pi}{6}$일 때 접선의 기울기는

$-\frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore y=-2x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

68) $y=\frac{3}{16}x+\frac{31}{16}$

⇨ $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{2t}=\frac{t^2-1}{2t^3}$

$t=2$이면

$x=2^2-1=3$, $y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2^2-1}{2\times 2^3}=\frac{3}{16}$이므로

$y-\frac{5}{2}=\frac{3}{16}(x-3)$ $\therefore y=\frac{3}{16}x+\frac{31}{16}$

69) $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$

⇨ $t=1$일 때 $x=3$, $y=1$이므로 접점의 좌표는 $(3,1)$이다.

한편, $\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t}{4}(t\neq 0)$에서 $t=1$일 때 접선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{4}(x-3)$ $\therefore y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$

70) $y=\sqrt{2}x-1$

⇨ $x=\sec t, y=\tan t$에 대해서

$\frac{dx}{dt}=\sec t\tan t$, $\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin t}$이다.

점 $(\sqrt{2},1)$은 $t=\frac{\pi}{4}$일 때이므로 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}$이다.

따라서 접선의 방정식은 $y=\sqrt{2}x-1$이다.

71) $y=2ex-e^2$

⇨ 곡선 $x^2-y\ln x+ex-e=0$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-\ln x\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+e=0$

$2x-\frac{y}{x}+e=\ln x\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{y}{x}+e}{\ln x}$

곡선 위의 점 $(e\ ,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{2e-\frac{e^2}{e}+e}{\ln e}=2e$

따라서 점 $(e\ ,\ e^2)$에서의 접선의 방정식은

$y=2e(x-e)+e^2$

$\therefore y=2ex-e^2$

72) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

⇨ $x^2-2xy-y^2+7=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x-2y-2x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$

$2(x+y)\frac{dy}{dx}=2(x-y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}(x+y\neq 0)$

점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기는 $x=1, y=2$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이므로 $\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

73) -1

⇨ $\frac{dx}{dt}=2t-2$, $\frac{dy}{dt}=t^2$이므로 $t=k$일 때,

$\frac{dy}{dx}=\frac{k^2}{2k-2}$이다.

$y=2x+6$과 수직이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{k^2}{2k-2}=-\frac{1}{2}$이므로 식을 정리하면 $k^2+k-1=0$이므로 모든 k의 합은 -1이다.

74) -1

⇨ $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\frac{dy}{dt}=b\cos t$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$

$t=\frac{\pi}{4}$일 때

$x=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $y=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$이므로

접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

$\therefore y=-\frac{b}{a}x+\sqrt{2}b$

이 직선이 직선 $y=x+\sqrt{2}$ 와 일치하므로

$a=-1,\ b=1$ $\quad\therefore ab=-1$

75) -1

⇨ $x=t^2-1$에서 $\frac{dx}{dt}=2t$

$y=t+1$에서 $\frac{dy}{dt}=1$

$t=2$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}$ 이므로 접선의 방정식은 기울기가 $\frac{1}{4}$이고 접점이 $(3,3)$이다.

$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

접선의 방정식 $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$이 점 $(a,2)$을 지나므로 대입하면

$2=\frac{1}{4}a+\frac{9}{4}$ $\quad\therefore a=-1$

76) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

⇨ 직선 $2x+y=k$의 기울기는 -2이므로 곡선 $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin 2\theta\end{cases}$ 의 접선의 기울기도 -2이어야 한다.

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos 2\theta}{-\sin\theta}=-2$

$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}=1$

$1-2\sin^2\theta=\sin\theta$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$는 직선 $2x+y=k$ 위의 점이므로 대입하면

$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=k$ $\quad\therefore k=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

77) 9

⇨ 곡선을 x에 대해서 미분하면

$2x+ay+ax\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$이다.

곡선이 점 $(1,-2)$를 지나므로 식을 정리하면

$2-2a+(a+4)\frac{dy}{dx}=0$이다.

$\frac{dy}{dx}=1$이므로 $a=6$이고 $b=2a+3=15$이므로

$\therefore b-a=9$이다.

78) 7

⇨ 곡선 $ax^3+y^5+by=-2$를 x에 대해서 미분하면

$3ax^2+5y^4\frac{dy}{dx}+b\frac{dy}{dx}=0$이다.

점 $(1,-1)$에서의 $\frac{dy}{dx}=-1$이므로 $3a-b=5$이고

점 $(1,-1)$은 곡선 위의 점이므로 $a-b=-1$이다.

두 식을 연립하면

$a=3, b=4$ $\quad\therefore a+b=7$

79) 3

⇨ $3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}+ax\frac{dy}{dx}+ay=0$

$(3y^2+ax)\frac{dy}{dx}=-3x^2-ay$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-ay}{3y^2+ax}$

점$(1,2)$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{-3-2a}{12+a}=\frac{1}{10}$

$\therefore -30-20a=12+a$

$\therefore a=-2$

$x^3+y^3+axy+b=0$위의 점 $(1,2)$를 대입하면

$1+8+2a+b=0$

$\therefore b=-5$

$\therefore a-b=-2-(-5)=3$

80) 7

⇨ 곡선의 식을 음함수 미분하면 다음과 같다.

$2x+2y\frac{dy}{dx}+ax\frac{dy}{dx}+ay=0$

이 식에서 점 $(2,3)$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-4$이므로

$4-24-8a+3a=0$이다.

여기에서 $a=-4$이다.

원래 곡선의 식에 점 $(2,3)$을 대입하면

$13-24+b=0$이므로 $b=11$이다.

따라서 $a+b=7$이다.

81) -6

⇨ 곡선 $2x^2+4y^2+axy+b=0$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x+8y\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$

$4x+ay=(-8y-ax)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{4x+ay}{-ax-8y}$

곡선 위의 점 (1 , 1)에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$\frac{4+a}{-a-8}=-\frac{1}{3}$, $12+3a=a+8$

$\therefore a=-2$

점 (1 , 1)은 곡선 위의 점이므로 대입하면

$2+4+a+b=0$

$a=-2$ 이므로

$4+b=0 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b=-2-4=-6$

82) 9

⇨ ⅰ) 곡선에 점 (2, 1)을 대입하면 $2a-b=9$

ⅱ) 곡선의 방정식을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2y'-ay-axy'=0$

$(ax-3y^2)y'=3x^2-ay \qquad \therefore y'=\frac{3x^2-ay}{ax-3y^2}$

위 식에 점 (2, 1)과 이때의 $y'=\frac{2}{3}$을 대입하면

$\frac{2}{3}=\frac{12-a}{2a-3}$, $4a-6=36-3a$

$7a=42 \qquad \therefore a=6,\ b=3$

$\therefore a+b=9$

83) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

⇨ 곡선 $x^3-3xy+y^3=3$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y-3x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$3x^2-3y=(3x-3y^2)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}$

곡선 위의 점 (2 , 1)에서의 접선의 기울기는

$\frac{4-1}{2-1}=3$

따라서 점 (2 , 1)에서의 접선의 방정식과 수직인 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}(x-2)+1$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

84) $\frac{1}{3}$

⇨ $f'(x)=3x^2-6x+3$이고, $g(3)=a$라고 하면

$f(a)=3$

$a^3-3a^2+3a+3=3$

$a^3-3a^2+3a=0$

$a(a^2-3a+3)=0$

$\therefore\ a=0$

따라서 $x=3$에서 접선의 기울기

$g'(3)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3}$

85) $\frac{1}{5}$

⇨ $x^3+2x+1=4$, $x^3+2x-3=0$

$(x-1)(x^2+x+3)=0 \qquad \therefore x=1$

$\therefore f(1)=4$

$f'(x)=3x^2+2 \qquad \therefore f'(1)=5$

$\therefore g'(4)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$

86) $\frac{1}{2e^5}$

⇨ $f'(x)=e^x+(x-4)e^x=e^x(x-3)$이므로

곡선 $y=g(x)$의 점 $(e^5,\ 5)$에서 접선의 기울기는

$g'(e^5)=\frac{1}{f'(g(e^5))}=\frac{1}{f'(5)}=\frac{1}{2e^5}$

87) $y=\frac{1}{2\pi}x-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4}$

⇨ $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(1)=a$로 놓으면

$f(a)=1$에서 $\tan\pi a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

즉, $g(1)=\frac{1}{4}$이다.

한편, $f'(x)=\pi\sec^2\pi x$ 에서

$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\pi\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2\pi$ 이므로

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{2\pi}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{2\pi}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2\pi}x-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4}$

88) $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$

⇨ $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(4)=a$로 놓으면 $f(a)=4$

$a^3+3a=4$, $(a-1)(a^2+a+4)=0$

$\therefore a=1$

즉, $g(4)=1$이다.

한편, $f'(x)=3x^2+3$에서 $f'(1)=6$이므로

$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{6}(x-4)$

$\therefore y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$

89) $\sqrt{2}$

⇨ $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x+k$라 하자.

두 곡선의 교점에서 공통인 접선을 가지므로 교점의 x좌표를 a라 하면 $f(a)=g(a)$에서

$\cos a=\sin a+k \cdots$ ㉠

또한 두 곡선의 교점에서의 기울기가 같으므로

$f'(a)=g'(a)$에서 $-\sin a=\cos a$

$a=-\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

이 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+k$

$\therefore k=\sqrt{2}$

90) $-\frac{1}{e}$

⇨ $f(x)=\frac{k}{x}$, $g(x)=\ln x$라 하자.

두 곡선의 접점의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면

함숫값이 같으므로 $f(a)=g(a)$에서

$\frac{k}{a}=\ln a \cdots$ ㉠

접선의 기울기가 같으므로 $f'(a)=g'(a)$에서

$-\frac{k}{a^2}=\frac{1}{a}$

$-\frac{k}{a}=1 \ (\because a>0) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\ln a=-1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{e}$

$a=\frac{1}{e}$을 ㉡에 대입하면 $k=-\frac{1}{e}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110