1. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2=5$, $a_7=20$일 때, a_9의 값은?

① 3　② 7　③ 18　④ 22　⑤ 26

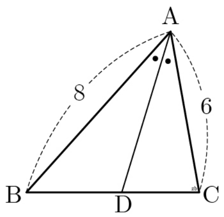
2. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{5}(6k^2-5)$의 값은?

① 304　② 305　③ 306　④ 307　⑤ 308

3. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2+\cdots+a_5=6$, $a_6+a_7+\cdots+a_{10}=12$일 때, $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{25}$의 값은?

① 168　② 178　③ 188　④ 198　⑤ 208

4. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $A=60^\circ$이고, $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 BD의 길이는?



① $2\sqrt{13}$　② $\frac{8}{3}\sqrt{13}$　③ $\frac{8}{5}\sqrt{13}$　④ $\frac{8}{7}\sqrt{13}$　⑤ $\frac{8}{9}\sqrt{13}$

5. 수열 $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \cdots$의 일반항을 a_n, n항까지의 합을 S_n일 때, $a_{10}+S_{10}$의 값은?

① 255　② 260　③ 265　④ 270　⑤ 275

6. x에 대한 다항식 $f(x)=x^2+ax+2a^2$을 $x-1$, $x+2$, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

7. 매일 일정한 비율로 증가하는 어떤 미생물 a마리를 번식시켰더니 10일 후에는 36마리, 20일 후에는 81마리가 되었다고 한다. 이때 이 미생물을 번식시킨 날로부터 15일 후의 미생물의 개수는?

① 12　② 30　③ 54　④ 80　⑤ 110

8. x에 대한 이차방정식 $(\cos A+\cos C)x^2+2x\sin B+(\cos A-\cos C)=0$이 중근을 가질 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $A=90^\circ$ 인 직각삼각형
② $B=90^\circ$ 인 직각삼각형
③ $C=90^\circ$ 인 직각삼각형
④ $a=b$인 이등변 삼각형
⑤ $a=c$인 이등변 삼각형

I410-ECN-0199-2022-001-000168432

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n+1}-1$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}$의 값은?

① $\frac{2^{11}+1}{3}$ ② $\frac{2^{11}-2}{3}$

③ $\frac{2^{10}+1}{3}$ ④ $\frac{2^{10}-2}{3}$

⑤ $\frac{2^{8}+1}{3}$

10. 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\frac{S_{2n}}{S_n}$의 값이 n의 값에 관계없이 항상 일정할 때, $\frac{a}{d}$의 값은? (단, $d \neq 0$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$

③ 1 ④ 2

⑤ 3

11. 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의가 $a_1 = \frac{1}{8}$, $a_{n+1} \div a_n = -2\,(n=1,2,3,\cdots)$일 때, $a_k = -256$를 만족시키는 자연수 k의 값은?

① 9 ② 10

③ 11 ④ 12

⑤ 13

12. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 때, $a_2 + a_3 + \cdots + a_6$의 값은?

(가) $a_1 = 4^8$

(나) $a_{n+1} = \log_2 a_n$

① 19 ② 20

③ 21 ④ 22

⑤ 23

13. $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $n! > 2^n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)를 각각 a, b, $f(k)$라 하자. $f(a-b)$의 값은?

<증명>

ⓐ $n=4$일 때,

(좌변)=((가)), (우변)=((나))

이때 (가) > (나) 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

ⓑ $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$k! > 2^k$이고

양변에 ((다))을 곱하면

$k! \times ($ (다) $) > 2^k($ (다) $) > 2^{k+1}$

((다) > 2이므로)

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

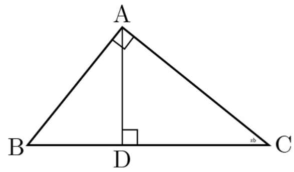
ⓐ, ⓑ에 의하여 $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 $n! > 2^n$이 성립한다.

① 8 ② 9

③ 10 ④ 11

⑤ 12

14. 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 직각인 꼭지점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$, $\triangle ABC$의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3라 할 때, S_1, S_2, S_3가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\cos^2 B + \tan^2 B$의 값은?



① 1 ② 2

③ 3 ④ $\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$

⑤ $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

15. $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 2, $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=1$인 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}$의 길이는? (단, $\angle BAC$는 둔각이다.)

① $\dfrac{\sqrt{15}-3}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}$

③ $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$

16. $\angle O=75^{\circ}$인 점 O를 꼭짓점으로 하는 $\angle AOB$의 내부에 한 점 P를 고정하고 점 P를 지나는 직선이 반직선 OA, OB와 만나는 점을 각각 X, Y라 한다. 이때, $\triangle OXY$의 면적이 최소가 되도록 하는 $\dfrac{\overline{XP}}{\overline{XY}}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{2}$

⑤ 1

17. 첫째항이 18인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{10}=0$일 때, S_n의 최댓값을 구하는 과정을 자세히 서술하시오.

18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{33}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하고 그 과정을 자세히 서술하시오. (단, p, q는 서로소)

19. 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n+2}{2}$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 빈칸에 알맞은 답을 쓰시오.

<증명>

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)=(우변)= $\boxed{\text{(가)}}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{k+2}{2}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $\boxed{\text{(나)}}$을 곱하면

$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)\times\left(\boxed{\text{(나)}}\right)$

$=\dfrac{k+2}{2}\left(\boxed{\text{(나)}}\right)=\boxed{\text{(다)}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

정답 및 난이도 | **2019년 1학기 기말**

고림고

1) [하] ⑤

2) [하] ②

3) [중] ①

4) [중] ④

5) [중] ⑤

6) [중] ②

7) [중] ③

8) [중] ③

9) [특] ①

10) [상] ②

11) [중] ④

12) [중] ⑤

13) [중] ②

14) [상] ②

15) [특] ⑤

16) [상] ④

17) [중] 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_{10}=\dfrac{10(2\times 18+9d)}{2}=0 \qquad \therefore d=-4$

$S_n=\dfrac{n\{2\times 18-4(n-1)\}}{2}=n(20-2n)$

$=-2(n-5)^2+50$

따라서 S_n의 최댓값은 50이다.

18) [중] $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{33}{(3k-1)(3k+2)}$

$=\dfrac{33}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$

$=11\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{35}-\dfrac{1}{38}\right)\right\}$

$=11\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{38}\right)=\dfrac{99}{19}$

$\therefore p=99,\ q=19$

따라서 $p+q=99+19=118$이다.

19) [중] (가) $\dfrac{3}{2}$ (나) $1+\dfrac{1}{k+2}$ (다) $\dfrac{k+3}{2}$