3-1-3.연속확률변수와 확률분포_천재(이준열)

개념check

[연속확률변수]

- **연속확률변수**: 확률변수 X가 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 가질 때, X를 연속확률변수라 한다.
- **확률밀도함수**: $\alpha \le X \le \beta$에서 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 $\alpha \le X \le \beta$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 세 가지 성질을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

(1) $f(x) \ge 0$ (단, $\alpha \le x \le \beta$)

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.

(3) 확률 $\mathrm{P}(a \le x \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

<참고> 연속확률분포에서 $\mathrm{P}(X=a)=\mathrm{P}(a \le X \le a)$이므로
$\mathrm{P}(X=a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이로 볼 수 있다.
하지만 둘러싸인 도형의 넓이를 정의할 수 는 없으므로 $\mathrm{P}(X=a)=0$이 된다. 즉, 연속확률변수 X가 특정한 값을 가질 때의 확률은 0이 되는 것이다.
따라서 $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a \le X < b)+\mathrm{P}(X=b)$
$=\mathrm{P}(a \le X < b)$
마찬가지로 $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a \le X < b)$
$=\mathrm{P}(a < X \le b)$
$=\mathrm{P}(a < X < b)$

기본문제

[예제]

1. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=k(3-x)\ \ (0 \le x \le 3)$$

일 때, $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$은? (단, k는 상수)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$
⑤ $\frac{1}{6}$

[문제]

2. 어느 지하철역에서 7분 간격으로 운행되는 지하철을 임의의 시각에 도착하여 기다리는 시간(단위: 분)을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수가 $f(x)=k\,(0 \le x \le 7)$일 때, 지하철을 3분 이상 기다릴 확률은? (단, k는 상수)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$
③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$
⑤ $\frac{5}{7}$

[예제]

3. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=kx\,(0 \le x \le 5)$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 4)$은? (단, k는 상수)

① $\frac{10}{25}$ ② $\frac{12}{25}$
③ $\frac{14}{25}$ ④ $\frac{16}{25}$
⑤ $\frac{18}{25}$

[문제]

4. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=kx^2\ \ (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)$은? (단, k는 상수)

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{7}{27}$
③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{1}{3}$
⑤ $\frac{10}{27}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[소단원 확인 문제]

5. 어느 공항에서 비행기의 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차(단위: 분)를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률밀도함수는

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{100}x & (0 \le x \le 10) \\ k-\frac{1}{100}x & (10 \le x \le 20) \end{cases}$$

라고 한다. 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차가 15분 이상일 확률은? (단, k는 상수)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[예제]

6. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=2x \ (0 \le x \le 1)$$

일 때, X의 분산은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

[문제]

7. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=-\frac{3}{2}x^2+1 \ (-1 \le x \le 1)$$

일 때, X의 평균은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[중단원 연습 문제]

8. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

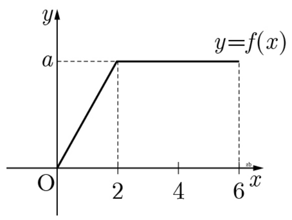
$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{15}x & (0 \le x \le 3) \\ -\frac{1}{5}(x-5) & (3 \le x \le 5) \end{cases}$$

일 때, 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le 3)$은?

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[대단원 종합 문제]

9. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$ $(0 \le x \le 6)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

유사문제

10. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$f(x)=\frac{1}{4}$ $(0 \le x \le 4)$일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 3)$은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

11. $0 \le x \le 1$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{a}{2}x+a$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$
⑤ $\frac{4}{5}$

12. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=k|x-2| \ (0 \le x \le 5)$$

일 때, $\mathrm{P}(X \le 2)$는?

① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{2}{13}$
③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{4}{13}$
⑤ $\frac{5}{13}$

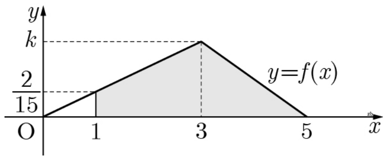
13. 여객선 터미널에서 어느 여객선의 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차를 확률변수 X라 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}x & (0 \le x < 2) \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{12}x & (2 \le x \le 6) \end{cases}$$

이다. 이때 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차가 4분 이상일 확률은?

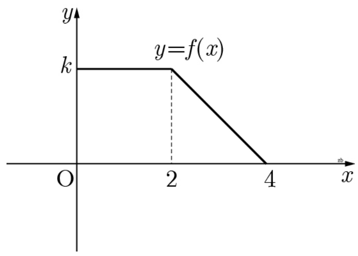
① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{20}$
③ $\frac{1}{15}$ ④ $\frac{1}{10}$
⑤ $\frac{1}{6}$

14. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\mathrm{P}(X \ge 1)$은?



① $\frac{10}{11}$ ② $\frac{11}{12}$
③ $\frac{12}{13}$ ④ $\frac{13}{14}$
⑤ $\frac{14}{15}$

15. $0 \le x \le 4$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $P(2 \le X \le 3)$을 구하면?



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$
⑤ $\frac{2}{3}$

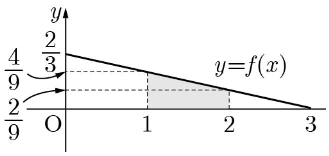
정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times 3k=1,\ k=\frac{2}{9}$

확률 $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$은 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



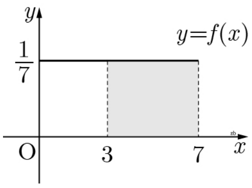
$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)\times 1=\frac{1}{3}$

2) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$7\times k=1,\ k=\frac{1}{7}$

확률 $\mathrm{P}(X\ge 3)$은 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



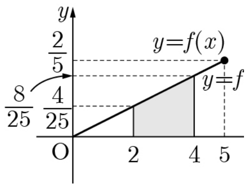
$\mathrm{P}(X\ge 3)=4\times\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$

3) [정답] ②

[해설] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 5\times 5k=1,\ k=\frac{2}{25}$

확률 $\mathrm{P}(2\le X\le 4)$은 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{25}+\frac{8}{25}\right)\times 2=\frac{12}{25}$

4) [정답] ②

[해설] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 직선 $x=1$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\int_0^1 f(x)\,dx=1$, 즉

$\int_0^1 kx^2\,dx=k\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{k}{3}=1$

따라서 $k=3$

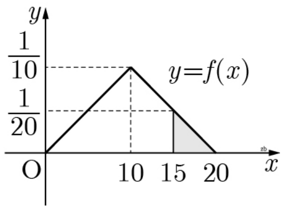
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right)=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}3x^2\,dx=\left[x^3\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=\frac{7}{27}$

5) [정답] ①

[해설] $f(10)$의 함숫값은 같아야 하므로

$\frac{1}{10}=k-\frac{1}{10}$에서 $k=\frac{1}{5}$

구하는 확률은 아래의 그림에서 색칠된 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\ge 15)=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{1}{20}=\frac{1}{8}$

6) [정답] ①

[해설] $\mathrm{E}(X)=\int_0^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\int_0^1 2x^3dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$=\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

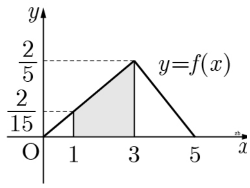
7) [정답] ③

[해설] $xf(x)$는 기함수이므로

$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1\left(-\frac{3}{2}x^3+x\right)dx=0$

8) [정답] ④

[해설] $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$은 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{15}+\frac{2}{5}\right)\times 2=\frac{8}{15}$

9) [정답] ④

[해설] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(6+4)\times a=1\qquad\therefore a=\frac{1}{5}$

10) [정답] ②

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[해설] $\mathrm{P}(2 \le X \le 3) = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

11) [정답] ⑤

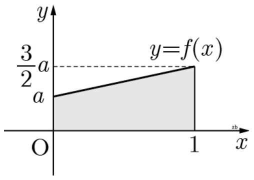
[해설] $0 \le x \le 1$에서 $f(x) \ge 0$이어야 하므로

$a \ge 0$

또, 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2} \times \left(a + \frac{3}{2}a\right) \times 1 = 1$, $\frac{5}{2}a = 2$

따라서 $a = \frac{4}{5}$



[다른 풀이]

함수 $f(x) = \frac{a}{2}x + a$ $(0 \le x \le 1)$에 대하여

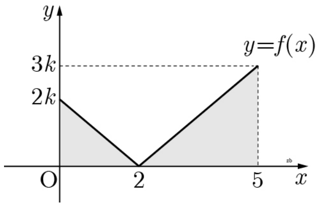
$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{2}x + a\right)dx = 1$이므로

$\left[\frac{1}{4}ax^2 + ax\right]_0^1 = \frac{5}{4}a = 1$, $a = \frac{4}{5}$

12) [정답] ④

[해설] $f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=5$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

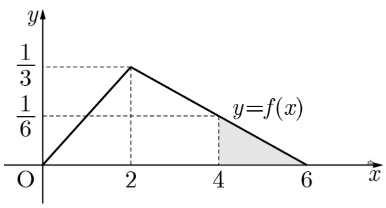
$\frac{1}{2} \times 2 \times 2k + \frac{1}{2} \times 3 \times 3k = 1$, $k = \frac{2}{13}$



따라서 $\mathrm{P}(X \le 2) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{13} = \frac{4}{13}$

13) [정답] ⑤

[해설] 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차가 4분 이상일 확률은 아래의 그림에서 색칠된 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X \ge 4) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

14) [정답] ⑤

[해설] $y = f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 5 \times k = 1$, 즉 $k = \frac{2}{5}$

따라서

$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}x & (0 \le x < 3) \\ -\frac{1}{5}x + 1 & (3 \le x \le 5) \end{cases}$ 이므로

$y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X \ge 1)$

$= 1 - \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$

$= 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{15} = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

15) [정답] ③

[해설] 도형 전체의 넓이가 1이므로

$1 = \frac{1}{2}(4+2) \times k$, $k = \frac{1}{3}$

$P(2 \le X \le 3) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \times 1$

$= \frac{1}{4}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125