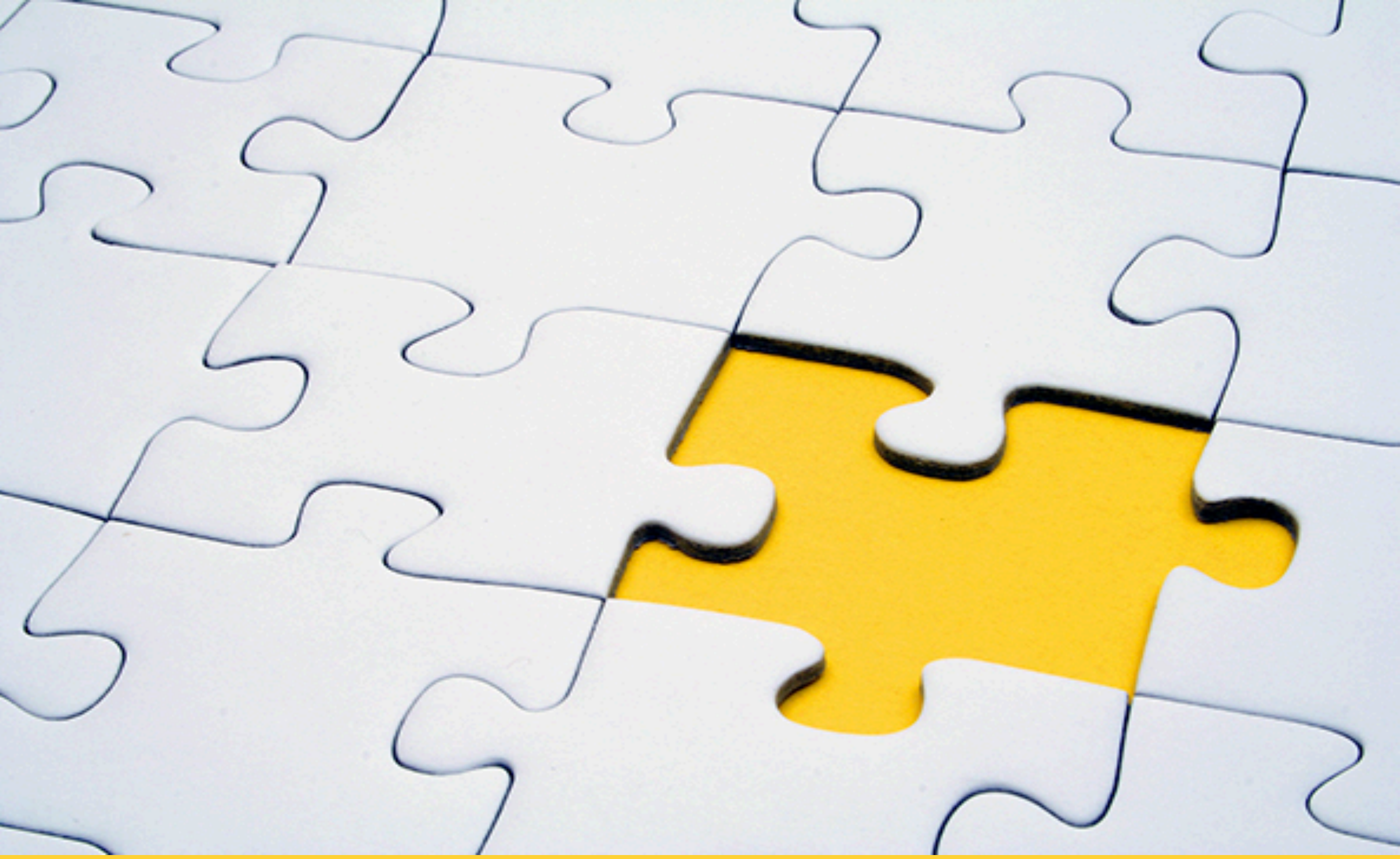


고등학교

미적분

수약중독

고등학교 미적분

수열의 극한

1

1. 수열의 극한
2. 급수

1 수열의 수렴과 발산

수열의 수렴

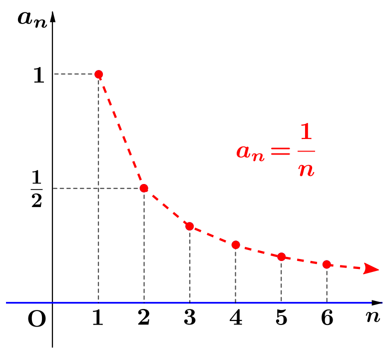
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하고, 기호로

$$n \to \infty \text{일 때, } a_n \to \alpha \text{ 또는 } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

와 같이 나타낸다.

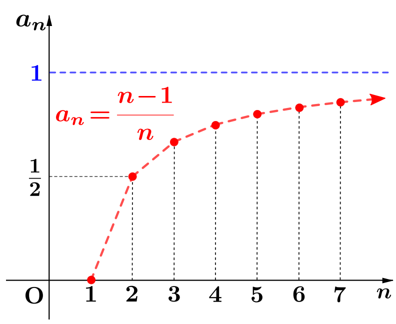
➤ 수열 $\{a_n\}$이 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$과 같으면 일반항은 $a_n = \frac{1}{n}$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$



➤ 수열 $\{a_n\}$이 $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots$과 같으면 일반항은 $a_n = \frac{n-1}{n}$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $\frac{n-1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$



➤ 수열 $\{a_n\}$이 $c,\ c,\ c,\ \cdots,\ c,\ \cdots$ (c는 상수)와 같으면 일반항은 $a_n = c$이고, n이 한없이 커지더라도 $a_n = c$이므로 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c$$

수열의 발산

(1) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

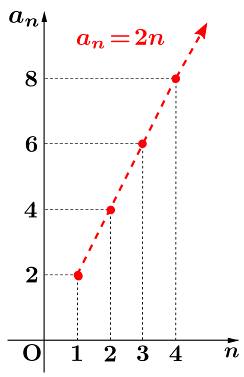
(2) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산하다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

(3) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

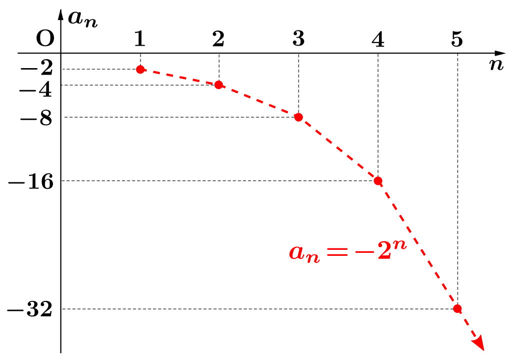
➤ 수열 $\{a_n\}$이 $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$과 같으면 일반항은 $a_n = 2n$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $2n$의 값도 한없이 커지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

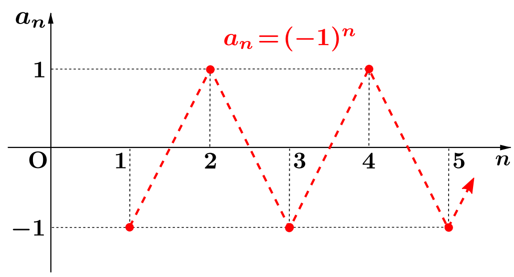


➤ 수열 $\{a_n\}$이 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ \cdots$과 같으면 일반항은 $a_n = -2^n$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, -2^n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-2)^n = -\infty$$



➤ 수열 $\{a_n\}$이 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$과 같으면 일반항은 $a_n = (-1)^n$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $(-1)^n$의 값은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 즉, $a_n = (-1)^n$은 진동한다.

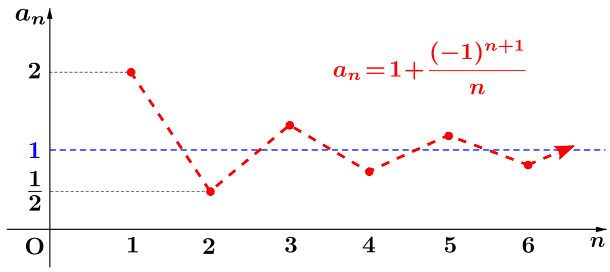


예제1

일반항이 다음과 같이 주어지는 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ (2) $b_n = (-2)^{n-1}$

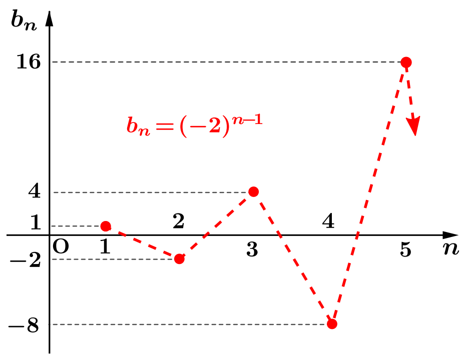
(1) 수열 $\{a_n\}$을 첫째 항부터 나열하면 $2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ 1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n},\ \cdots$ 이고, 그래프는 아래 그림과 같다.



그래프에서 n이 한없이 커질 때, $1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$의 값이 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(2) 수열 $\{b_n\}$을 첫째 항부터 나열하면 $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots$ 이고, 그래프는 아래 그림과 같다.



그래프에서 n이 한없이 커질 때, $(-2)^{n-1}$의 값은 교대로 양수와 음수가 되면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다. 즉, 수열 $\{b_n\}$은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 따라서 수열 $\{b_n\}$은 진동한다.

2 극한값의 계산

수열의 극한의 성질

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$ (복부호동순)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$

➤ 수열의 극한의 성질에 대한 증명은 고등학교 수학의 범위를 벗어나므로 생략한다.

예제2

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$임을 이용하여 다음 수열의 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$ (2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (3) $\lim_{n\to\infty} = \dfrac{\dfrac{2}{n} - 1}{2 + \dfrac{4}{n}}$

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + 2 \times \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + 2 \times 0 = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \times \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \times 0 = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{n} - 1}{2 + \dfrac{4}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{n} - 1\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(2 + \dfrac{4}{n}\right)} = \dfrac{2 \times \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 2 + 4 \times \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} = \dfrac{2 \times 0 - 1}{2 + 4 \times 0} = \dfrac{0 - 1}{2 + 0} = -\dfrac{1}{2}$

극한값의 계산

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴

분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

(분자의 차수) > (분모의 차수) ➡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $-\infty$

(분자의 차수) = (분모의 차수) ➡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ (최고차항의 계수의 비율)

(분자의 차수) < (분모의 차수) ➡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) $\infty - \infty$꼴

① 다항식의 극한은 최고차항으로 묶는다.

② 무리식의 극한은 분모 또는 분자를 유리화한다.

예제3

다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2-4n}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{2n}{n^2+1}$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{1+\dfrac{1}{n}} = \infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2-4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3-\dfrac{4}{n}} = \dfrac{1}{3-0} = \dfrac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

예제4

다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2+3)$ (2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2+3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\infty$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\\&=\frac{2}{1+1}\\&=1\end{aligned}$$

수열의 극한의 대소 관계

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

(1) $a_n \leq b_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} = \beta$이면 $\alpha \leq \beta$

(2) $a_n \leq c_n \leq b_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

➤ 수열의 극한의 대소 관계에 대한 증명은 고등학교 수학의 범위를 벗어나므로 생략한다.

➤ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이어도 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$일 수 있다.

예) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $b_n = a + \dfrac{1}{n}$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$이다.

➤ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이어도 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$가 성립한다.

예제5

일반항이 $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{n}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

모든 자연수 n에 대하여 $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$이고, 부등식의 양변을 n으로 나눠주면

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n\theta}{n} \leq \frac{1}{n}$$

이 된다. 이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n} = 0$이다.

예제6

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$을 구하시오.

$$\frac{2n^2 - n}{n^2 + 1} < a_n < \frac{2n^2 + n}{n^2 + 1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2 - n}{n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \dfrac{2}{1} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2 + n}{n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \dfrac{2}{1} = 2$이므로

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$이다.

3 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

(4) $r \le -1$일 때, $\{r^n\}$은 진동

(1) $r>1$일 때,

수학적 귀납법에 의하여 $(1+h)^n > 1+nh$가 성립하므로 $r=1+h$ (단, $h>0$)라고 하면

$$r^n = (1+h)^n > 1+nh \quad (\text{단, } n \ge 2)$$

가 성립한다. 이때, $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n \ge \lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$이다.

(2) $r=1$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $r^n = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$이다.

(3) $|r|<1$일 때,

① $r=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이다.

② $r \ne 0$이면 $\frac{1}{|r|} > 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r|}=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|r^n|=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이다.

(4) $r \le -1$일 때,

① $r=-1$이면 $r^n = (-1)^n$이므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

② $r<-1$이면 $|r|>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|r^n| = \lim_{n\to\infty}|r|^n = \infty$이고 항의 부호가 교대로 바뀌므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

등비수열의 수렴조건

(1) 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴조건은 $-1 < r \le 1$이다.

(2) 등비수열 $\{a \times r^{n-1}\}$의 수렴조건은 $a = 0$ 또는 $-1 < r \le 1$이다.

예제7

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$

(2) $\left\{(-\sqrt{2})^n\right\}$

(3) $\left\{\frac{1}{(-3)^n}\right\}$

(4) $\{6^n\}$

(1) 수열 $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열이고, $-1 < \frac{4}{5} < 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$이다.

(2) 수열 $\left\{(-\sqrt{2})^n\right\}$은 공비가 $-\sqrt{2}$인 등비수열이고, $-\sqrt{2} < -1$이므로 진동한다.

(3) 수열 $\left\{\frac{1}{(-3)^n}\right\}$은 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이고, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(-3)^n} = 0$ 이다.

(4) 수열 $\{6^n\}$은 공비가 6인 등비수열이고, $6 > 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} 6^n = \infty$이다.

예제8

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}$

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times 2^n + 3\times\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2}\times 2^n + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{6^n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6^n}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$$

예제9

수열 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하시오. (단, $r \neq -1$)

(1) $-1 < r < 1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} r^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty} r^n} = \frac{0}{1+0} = 0$$

(2) $r = 1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} r^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty} r^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(3) $r > 1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

(4) $r < -1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

따라서 $-1 < r < 1$이면 0에 수렴, $r = 1$이면 $\dfrac{1}{2}$에 수렴, $|r| > 1$이면 1에 수렴한다.

1 급수의 수렴과 발산

급수와 부분합

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 더한 식

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라 하고, 이것을 기호 $\sum$을 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째 항부터 제$n$항까지의 합 S_n을 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

급수의 수렴과 발산

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$을 $\{S_n\}$이라 할 때,

(1) 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

이때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$이면, 급수는 S에 수렴한다고 하며, S를 이 급수의 합이라고 한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

(2) 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산한다.

예제10

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(1) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$이므로 급수의 부분합 S_n은

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$이므로 급수의 부분합 S_n은

$$S_n = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}-1$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-1\right) = \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. (일반적으로 역은 성립하지 않는다.)

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

➤ 수렴하는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합을 S_n, $\lim_{n\to\infty} a_n = S$라고 하면

$a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$이고, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$, 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이 된다.

➤ 위 명제의 역 '$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.'는 일반적으로 성립하지 않는다.

반례) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$은 발산한다.

예제11

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = -\frac{1}{3}(1-0) = -\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

(2) 수열 $\{(-1)^{n-1}\}$은 진동한다. $\Rightarrow$ 수렴하지 않는다.

즉, $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

급수의 성질

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때, 그 합을 각각 S, T라고 하면

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cS$　(단, c는 상수)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

➤ 수열의 극한의 성질을 이용하면 위와 같은 급수의 성질이 성립함을 알 수 있다.

예제12

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} = \beta$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n)$의 합을 구하시오.

$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\alpha - 3\beta$

2 등비급수

등비급수

첫째 항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ 에서 얻은 급수

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

을 등비급수라고 한다.

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$은

(1) $|r| < 1$ 이면 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$ 이다.

(2) $|r| \geq 1$ 이면 발산한다.

➤ 첫째 항이 a, 공비가 r 인 등비급수의 부분합을 S_n 이라 하면

$r = 1$ 일 때, $S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{개}} = na$

$r \neq 1$ 일 때, $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

① $|r| < 1 \iff -1 < r < 1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}$$

② $r = 1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$

③ $r > 1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$, $1 - r < 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

④ $r > 1$ 일 때, 수열 $\{r^n\}$은 발산(진동)하므로 $\{S_n\}$도 발산한다.

등비급수의 수렴조건

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$의 수렴 조건은 $-1 < r < 1$이다.

예제13

다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $3+\sqrt{3}+1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$

(2) $1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{3^{n-1}}$

(1) 첫째 항이 3, 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$인 등비급수이다. 공비가 $-1<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$을 만족하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right\}=\frac{3}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$ 이다.

(2) 첫째 항이 1, 공비가 $-\sqrt{2}$인 등비급수이다. 공비가 $-\sqrt{2}<-1$이므로 등비급수는 발산한다.

(3) 첫째 항과 공비가 모두 $-\dfrac{3}{4}$인 등비급수이다. 공비가 $-1<-\dfrac{3}{4}<1$을 만족하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=\frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{7}$$ 이다.

(4) 첫째 항이 5, 공비가 $\dfrac{5}{3}$인 등비급수이다. 공비가 $\dfrac{5}{3}>1$이므로 등비급수는 발산한다.

예제14

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}$의 합을 구하시오.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{125}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{32}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{125}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{32}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{\frac{125}{6}}{1-\frac{5}{6}} - \frac{\frac{32}{3}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 125 - 32 \\ &= 93\end{aligned}$$

예제15

급수 $\frac{3}{5} + \frac{3(x-5)}{5^2} + \frac{3(x-5)^2}{5^3} + \cdots$ 가 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

첫째 항이 $\frac{3}{5}$, 공비가 $\frac{x-5}{5}$ 인 등비급수이다.

공비가 $-1 < \frac{x-5}{5} < 1$일 때, 즉 $0 < x < 10$일 때 등비급수가 수렴한다.

따라서 $0 < x < 10$을 만족하는 모든 정수 x 값들의 합은 $1+2+3+\cdots+9 = 45$이다.

3 등비급수의 활용

등비급수의 활용

(1) 순환소수
순환소수는 등비급수의 합을 이용하여 기약분수로 고칠 수 있다.

(2) 도형과 등비급수
n번째와 $n+1$번째의 관계식으로부터 공비를 구하여 접근한다.

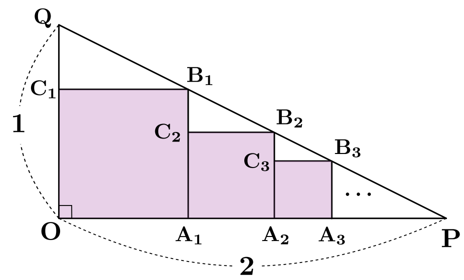
예제16

등비급수를 이용하여 순환소수 $3.\dot{1}\dot{4}$를 기약분수로 나타내시오.

$$
\begin{aligned}
3.\dot{1}\dot{4} &= 3.14141414\cdots \\
&= 3 + 0.14 + 0.0014 + 0.000014 + \cdots \\
&= 3 + \frac{14}{100} + \frac{14}{100^2} + \frac{14}{100^3} + \cdots \\
&= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{14}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^{n-1} \right\} \\
&= 3 + \frac{\frac{14}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \\
&= 3 + \frac{14}{99} \\
&= \frac{311}{99}
\end{aligned}
$$

예제17

아래 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}} = 2$, $\overline{\mathrm{OQ}} = 1$이고, $\angle\mathrm{QOP} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 OPQ에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$을 내접시키고, 다시 직각삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$에 정사각형 $\mathrm{A_1A_2B_2C_2}$를 내접시킨다. 이와 같은 방법으로 정사각형을 계속 만들어 갈 때, 정사각형들의 넓이의 합을 구하시오.



n번째 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라고하면

(1) $\triangle\mathrm{OPQ}$와 $\triangle\mathrm{C_1B_1Q}$가 닮은꼴이고, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = a_1$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{C_1B_1}} : \overline{\mathrm{C_1Q}} = a_1 : 1 - a_1 = 2 : 1$$

에서 $a_1 = \frac{2}{3}$임을 알 수 있다.

(2) $\triangle\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$에서

$$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} = a_n,\ \overline{\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n} = a_{n-1} - a_n$$

이 된다. 또한, $\triangle\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과 $\triangle\mathrm{QOP}$가 닮은꼴이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\overline{\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{3}a_{n-1}$$

이 성립한다.

결국 정사각형 한 변의 길이를 나타내는 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$이 된다.

이때, n번 째 정사각형의 넓이를 b_n이라고 하면

$$b_n = (a_n)^2 = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

임을 알 수 있다.

결국 이들 정사각형의 넓이의 합은 첫째 항과 공비가 모두 $\frac{4}{9}$인 등비급수의 합이 된다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

고등학교 미적분

미분

2

1. 여러 가지 함수의 미분
2. 여러 가지 미분법
3. 도함수의 활용

1 지수함수와 로그함수의 극한

지수함수와 로그함수의 극한

함수의 극한에 대한 성질과 지수함수 $y = a^x$, 로그함수 $y = \log_a x$의 그래프를 이용하면 지수함수 $y = a^x$, 로그함수 $y = \log_z x$의 극한을 쉽게 알 수 있다.

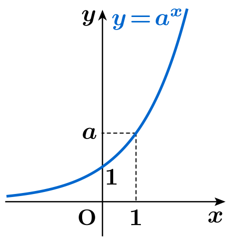
➤ 지수함수의 극한

$a > 1$ 일 때,

$$\lim_{x \to 1} a^x = a$$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

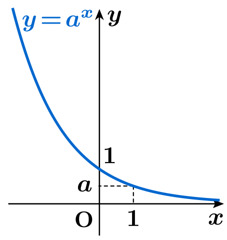


$0 < a < 1$ 일 때,

$$\lim_{x \to 1} = a$$

$$\lim_{x \to \infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \infty$$



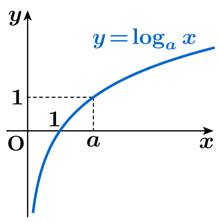
➤ 로그함수의 극한

$a > 1$ 일 때,

$$\lim_{x \to a} \log_a x = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$$

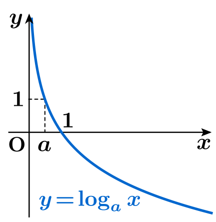


$0 < a < 1$ 일 때,

$$\lim_{x \to a} \log_a x = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \infty$$



예제1

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \{\log_3(x+2) - \log_3 x\}$

(1) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{2^x}{3^x}}{1 + \dfrac{2^x}{3^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(2) $$\lim_{x \to \infty} \{\log_3(x+2) - \log_3 x\} = \lim_{x \to \infty} \log_3 \frac{x+2}{x} = \log_3 1 = 0$$

수 e의 정의

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

(단, $e=2.71828182845904\cdots$)

➤ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값을 구하시 위하여 식 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$에

$$x=\pm 0.1,\ \pm 0.01,\ \pm 0.001,\ \pm 0.0001,\ \cdots$$

를 대입하여 그 값을 계산하면 오른쪽 표와 같다. 이 표에서 알 수 있듯이 x의 값이 0에 한없이 가까워지면 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$은 일정한 값으로 수렴하게 된다. 이때, 그 극한값을 e로 나타낸다.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

극한값 e는 무리수이고, $e=2.71828182845904\cdots$임이 알려져 있다.

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.1	2.86797199079244
-0.01	2.73199902642903
-0.001	2.71964221644285
-0.0001	2.71841775501015
-0.00001	2.71829541998040
-0.000001	2.71828318767937
-0.0000001	2.71828196294236
0.0000001	2.71828169413208
0.000001	2.71828046909575
0.00001	2.71826823719230
0.0001	2.71814592682493
0.001	2.71692393223559
0.01	2.70481382942153
0.1	2.59374246010000

➤ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$임을 알 수 있다.

실제로 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$에 $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 그 값을 계산해 보면 오른쪽 표와 같은 결과를 얻을 수 있다. 여기서도 x의 값이 한없이 커지면 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$이 일정한 값 e에 수렴함을 볼 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$
1	2
2	2.25
3	2.37037037037037
$\vdots$	$\vdots$
10	2.59374246010000
100	2.70481382942153
1000	2.71692393223559
10000	2.71814592682493
100000	2.71826823719230
1000000	2.71828046909575
10000000	2.71828169413208
$\vdots$	$\vdots$

예제2

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ (3) $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

(1) $2x=t$로 치환하면 $x\to 0$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{2}=e^{2}$$

(2) $\frac{3}{x}=t$로 치환하면 $x\to\infty$일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0+}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0+}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{3}=e^{3}$$

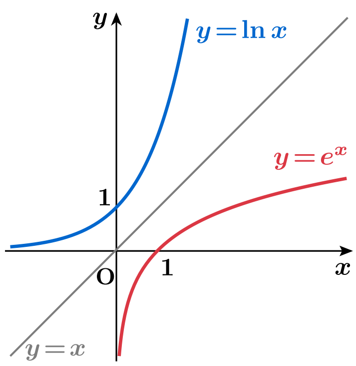
(3) $-2x=t$로 치환하면 $x\to 0$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\{1+(-2x)\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$$

자연로그

e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 x의 자연로그하고 하고, 이것을 간단히 $\ln x$로 나타낸다.

➤ 지수함수에서도 e를 밑으로 하는 지수함수 $y=e^x$을 생각할 수 있고, 이 함수는 로그함수 $y=\ln x$와 역함수 관계에 있으므로, 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이 된다.



밑이 e인 지수함수와 로그함수의 극한

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

➤ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

➤ $e^x - 1 = t$로 치환하면 $e^x = t+1 \;\Leftrightarrow\; x = \ln(1+t)$이고, $x \to 0$일 때, $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

➤ $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ (단, $a > 0,\ a \neq 1$)의 경우

$a^x - 1 = t$로 치환하면 $a^x = t+1 \;\Leftrightarrow\; x = \log_a(1+t)$이고, $x \to 0$일 때, $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

예제3

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{4x}$　　(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$　　(3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$

(1) $3x = t$로 치환하면 $x \to 0$일 때, $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{4x} = \frac{3}{4} \times \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \frac{3}{4} \times \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

(2) $3x = t$로 치환하면 $x \to 0$일 때, $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{3}{2} \times \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = \frac{3}{2} \times \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

(3) $2^x - 1 = t$로 치환하면 $x \to 0$일 때, $t \to 0$이고 $2^x = t+1 \;\Leftrightarrow\; x = \log_2(t+1)$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_2(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln 2}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$$

2 지수함수와 로그함수의 도함수

지수함수의 도함수

(1) $(a^x)' = a^x \ln a$ (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

(2) $(e^x)' = e^x$

➤ 지수함수 $y = a^x$ 의 도함수

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x\left(a^h - 1\right)}{h} = a^x \times \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$$

➤ 지수함수 $y = e^x$ 의 도함수

(1)에서 $a = e$를 대입하면 $y' = e^x \times \ln e = e^x$

예제4

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y = 5^{x-1}$

(2) $y = x^2 e^x$

(1) $y = 5^{x-1} = \frac{1}{5} \times 5^x$ 이므로

$$y' = \frac{1}{5} \times 5^x \times \ln 5$$

$$= 5^{x-1} \times \ln 5$$

(2) $y' = \left(x^2\right)' e^x + x^2 \left(e^x\right)'$

$$= 2xe^x + x^2 e^x$$

$$= \left(x^2 + 2x\right) e^x$$

로그함수의 도함수

(1) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

➤ 로그함수 $y = \ln x$의 도함수

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x}{h} \times \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

➤ 로그함수 $y = \log_a x$의 도함수

$y = \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$이므로 $y' = \dfrac{1}{\ln a} (\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$

예제5

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y = \ln 2x$

(2) $y = x \log_2 4x$

(1) $y = \ln 2x = \ln x + \ln 2$이므로

$$\begin{aligned} y' &= (\ln x)' + (\ln 2)' \\ &= \frac{1}{x} + 0 \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(2) $y = x \log_2 4x = x(\log_2 x + 2) = x \log_2 x + 2x$이므로

$$\begin{aligned} y' &= (x \log_2 x)' + (2x)' \\ &= \log_2 x + x(\log_2 x)' + 2 \\ &= \log_2 x + x \times \frac{1}{x \ln 2} + 2 \\ &= \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} + 2 \end{aligned}$$

3 삼각함수의 덧셈정리

사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

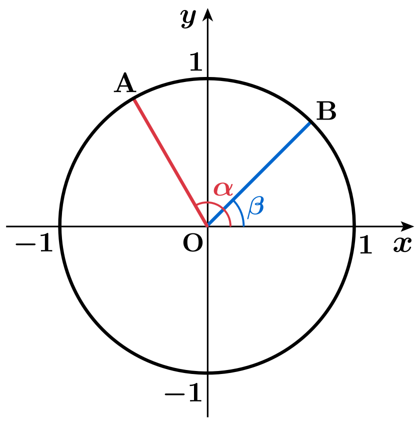
(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

➤ 오른쪽 그림과 같이 두 각 α, $beta$가 나타내는 두 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면

$$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

이다. 이때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 다음과 같이 두 가지 방법으로 구해볼 수 있다.



① 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}\\&=\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}\end{aligned}$$

② 코사인법칙

$\triangle\mathrm{OAB}$에서 코사인법칙에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\cos(\alpha-\beta)}\\&=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

①, ②의 결과가 같아야 하므로

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$\cos(\alpha--\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

➤ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$에 β 대신 $-\beta$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

➤ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

➤ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$에 β 대신 $-\beta$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

예제6

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\frac{7}{12}\pi$ (2) $\cos\frac{\pi}{12}$

(1) $$\begin{aligned}\sin\frac{7}{12}\pi&=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

예제7

다음 등식이 성립함을 보이시오

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ (2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(1) $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

예제8

$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$일 때, 다음 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$

(1) $\sin 2\alpha$

(2) $\cos 2\alpha$

$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$

예제9

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$일 때, 다음 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

(1) $\sin\frac{\alpha}{2}$

(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이므로 $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$이다.

또한, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이면 $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\frac{\alpha}{2} > 0,\ \cos\frac{\alpha}{2} > 0$이다.

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$를 이용하면

(1) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{4}{5}$ $\qquad \therefore \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{1}{5}$ $\qquad \therefore \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

탄젠트함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

➤ $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

➤ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 에 β 대신 $-\beta$를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

예제10

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\tan\dfrac{5}{12}\pi$　　　　(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$

(1) $$\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

(2) $$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

예제11

두 직선 $y=2x+2$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$이 이루는 예각의 크기를 구하시오.

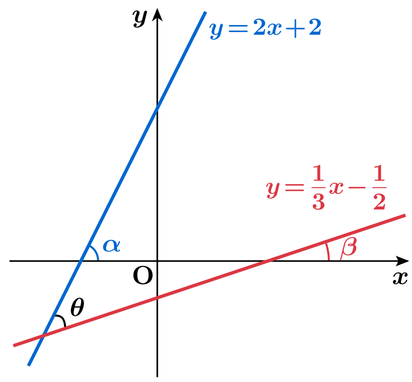
두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라고 하면 $\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\frac{1}{3}$이 된다.

이때, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=1$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$



예제12

등식 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$가 성립함을 보이시오.

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

예제13

$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$일 때, $\tan 2\alpha$의 값을 구하시오. $\left(단, \pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$이므로

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times2\sqrt{2}}{1-(2\sqrt{2})^2}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$이다.

예제14

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$일 때, $\tan\dfrac{\alpha}{2}$의 값을 구하시오. $\left(단, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이므로 $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = -\dfrac{4}{5}$이다.

또한, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이면 $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0,\ \cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$이다.

$\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$를 이용하면

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{2} = \dfrac{9}{10}$ $\quad\therefore \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{2} = \dfrac{1}{10}$ $\quad\therefore \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$$\therefore \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}{\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = 3$$

4 삼각함수의 합성

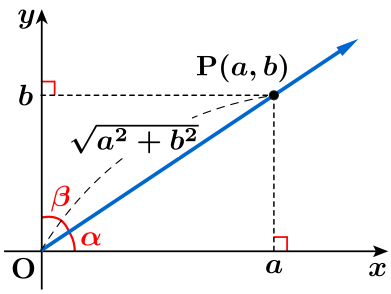
삼각함수의 합성

(1) $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, } \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

(2) $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$ $\left(\text{단, } \sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

➤ 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 잡고, 반직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 α라 하면 다음이 성립한다.

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



➤ 위 결과를 이용하여 주어진 식을 변형하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

➤ α의 여각을 β라고 하면 $\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\beta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta) \end{aligned}$$

예제15

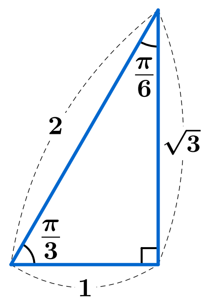
함수 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

$$f(x) = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}} \times \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}} \times \cos x\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$= 2 \times \left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$



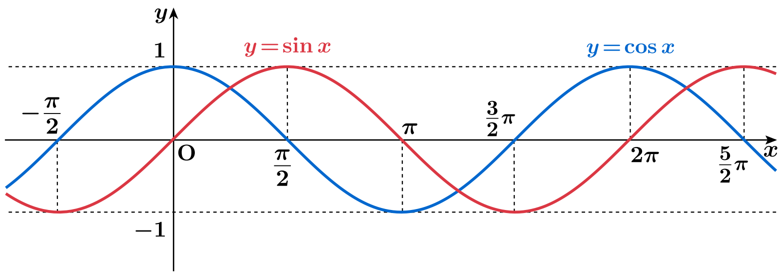
이때, $-1 \le \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \le 1$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이다.

5 삼각함수의 극한

삼각함수의 극한

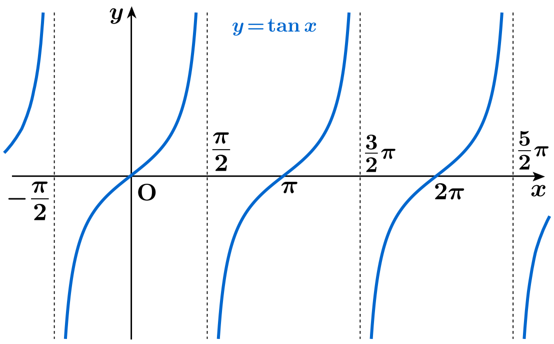
함수의 극한에 대한 성질과 삼각함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$의 그래프를 이용하면 삼각함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$의 극한을 쉽게 알 수 있다.

➤ 아래의 그래프를 이용하면 다음을 알 수 있다.



$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

$$\lim_{x\to \pi}\cos x = -1$$



$$\lim_{x\to 0}\tan x = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-}\tan x = \infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\tan x = -\infty$$

➤ 또한 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$는 존재하지 않음을 알 수 있다.

예제16

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$의 값을 구하시오.

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$이므로 다음과 같이 극한을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 2\end{aligned}$$

예제17

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\tan^2 x}$ 의 값을 구하시오.

$\dfrac{\sin x - \cos x}{1-\tan^2 x}$ 의 분자, 분모에 $\cos^2 x$를 곱해서 다음과 같이 극한을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\tan^2 x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{(\cos x + \sin x)} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

예제18

$\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ 의 값을 구하시오.

$x \neq 0$일 때, $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$이므로 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$, 즉

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

이다. 이때, $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$, $\lim_{x\to 0}|x| = 0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

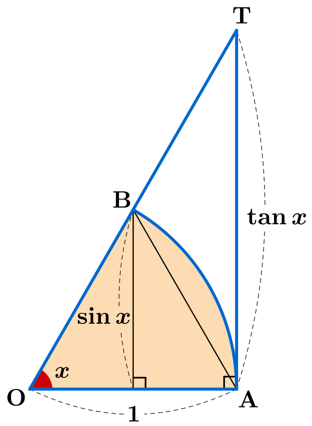
이다.

$x \to 0$일 때, $\frac{\sin x}{x}$의 극한

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

➤ $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때,

오른쪽 그림과 같이 중심각의 크기가 x이고, 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB 위의 점 A에서의 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라 하면 다음 관계가 성립한다.



$$\triangle\mathrm{OAB} < (\text{부채꼴OAB의 넓이}) < \triangle\mathrm{OAT}$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$\sin x>0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

이때, $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1$이므로 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$이 성립한다.

➤ $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때,

$x=-t$로 놓으면 $x\to 0-$일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to 0+}\frac{-\sin t}{-t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}=1$$

➤ 위 두 사실로부터 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이 성립함을 알 수 있다.

예제19

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$의 값을 구하시오.

$2x=t$로 치환하면 $x\to 0$일 때, $t\to 0$이므로 다음과 같이 극한을 구할 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\times\frac{\sin 2x}{2x}\right)=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2$$

예제20

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$$

(2) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 치환하면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\sin t}{t}\right)=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=-1$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times\frac{0}{2}=0$$

(4) $\dfrac{x}{2}=t$로 치환하면 $x\to 0$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{4}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{4}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$$

6 사인함수와 코사인함수의 도함수

사인함수와 코사인함수의 도함수

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

➤ $y = \sin x$의 도함수

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \left(\sin x \times \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\cos x \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) \\
&= (\sin x \times 0) + (\cos x \times 1) \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

➤ $y = \cos x$의 도함수

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \left(\cos x \times \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\sin x \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) \\
&= (\cos x \times 0) - (\sin x \times 1) \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}
$$

$$
= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = -1 \times 1 \times \frac{0}{2} = 0
$$

예제21

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=\sin x+\ln x$　　(2) $y=x\sin x$

(3) $y=e^{x}\cos x$　　(4) $y=\sin 2x$

(1) $y'=(\sin x)'+(\ln x)'=\cos x+\dfrac{1}{x}$

(2) $y'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$

(3) $y'=(e^{x})'\cos x+e^{x}(\cos x)'=e^{x}\cos x+e^{x}(-\sin x)=e^{x}(\cos x-\sin x)$

(4) $y=\sin 2x=2\sin x\cos x$ 이므로 다음과 같이 도함수를 구할 수 있다.

$$y'=2\{(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\}=2\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)=2\cos 2x$$

1 함수의 몫의 미분법

함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ (단, $g(x) \neq 0$)가 미분가능할 때,

(1) $\left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $\left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

➤ $y = \dfrac{1}{g(x)}$ 의 도함수 (단, $g(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{h} \times \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right\} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\ &= -g'(x) \times \frac{1}{\{g(x)\}^2} \\ &= -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

➤ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 도함수 (단, $g(x) \neq 0$)

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ 이므로 곱의 미분법을 사용하여 다음과 같이 도함수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)\}' \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

예제22

함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 도함수를 구하시오.

$$y'=\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=\frac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

예제23

함수 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$의 도함수를 구하시오.

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{\left(x^2-x+1\right)'\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)^2}\\
&=\frac{(2x-1)\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}\\
&=\frac{2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1-2x^3-x^2+2x^2+x-2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\\
&=\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)}
\end{aligned}$$

$\sec\theta,\ \csc\theta,\ \cot\theta$

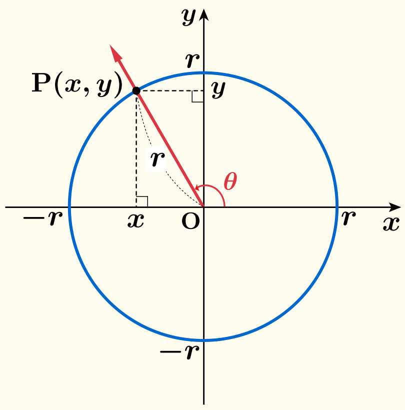
좌표평면 위에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하고, 일반각 θ(라디안)가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름이 r인 원이 만나는 점을 P$(x,\ y)$라고 하면, θ의 값에 따라

$$\frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

의 값은 각각 하나로 정해진다.
따라서 다음과 같은 대응은 각각 함수이다.

$$\theta \to \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \ \theta \to \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \ \theta \to \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

이와 같은 함수를 각각 θ의 시컨트함수, 코시컨트함수, 코탄젠트함수라 하고, 다음과 같이 나타낸다.



$$\sec\theta = \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\quad \csc\theta = \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\quad \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

➤ 삼각함수 $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$의 역수로 정의되는 함수가 차례대로 시컨트함수, 코시컨트함수, 코탄젠트함수이다.

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

➤ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$의 양변을 $\cos^2\theta,\ \sin^2\theta$ (단, $\cos\theta \neq 0,\ \sin\theta \neq 0$)로 각각 나누면

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta},\quad 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

가 성립하고, 이로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,\quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

예제24

$(\tan\theta - \sec\theta)(\tan\theta + \sec\theta)$를 간단히 하시오.

$$(\tan\theta - \sec\theta)(\tan\theta + \sec\theta) = \tan^2\theta - \sec^2\theta = -1$$

탄젠트함수의 도함수

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

➤ $y = \tan x$의 도함수

$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로 함수의 몫의 미분법을 사용하여 다음과 같이 도함수를 구한다.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

예제25

함수 $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$의 도함수를 구하시오.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - \tan x)'(1 + \tan x) - (1 - \tan x)(1 + \tan x)'}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{\left(-\sec^2 x\right)(1 + \tan x) - (1 - \tan x)\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{-\sec^2 x - \sec^2 x \tan x - \sec^2 x + \sec^2 x \tan x}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{-2\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \end{aligned}$$

코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수의 도함수

(1) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

(2) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

(3) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

➤ $y = \csc x$의 도함수

$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$이므로 함수의 몫의 미분법을 사용하여 다음과 같이 도함수를 구한다.

$$y' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

➤ $y = \sec x$의 도함수

$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$이므로 함수의 몫의 미분법을 사용하여 다음과 같이 도함수를 구한다.

$$y' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

➤ $y = \cot x$의 도함수

$y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$이므로 함수의 몫의 미분법을 사용하여 다음과 같이 도함수를 구한다.

$$y' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

예제26

함수 $y = x \sec x$의 도함수를 구하시오.

$$\begin{aligned} y' &= (x)' \sec x + x(\sec x)' \\ &= \sec x + x \sec x \tan x \\ &= \sec x(1 + x \tan x) \end{aligned}$$

예제27

$y = e^x \cot x$의 도함수를 구하시오.

$$f'(x) = (e^x)' \cot x + e^x (\cot x)'$$
$$= e^x \cot x + e^x \left(-\csc^2 x\right)$$
$$= e^x \left(\cot x - \csc^2 x\right)$$

예제28

$f(x) = \csc x$일 때, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{4} + 3h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h}$의 값을 구하시오.

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{4} + 3h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h} = \dfrac{3}{2} \times \lim_{h \to 0} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{4} + 3h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3h} = \dfrac{3}{2} f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$이다.

또한 $f'(x) = (\csc x)' = -\csc x \cot x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\csc \frac{\pi}{4} \times \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}}$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{1}{1} = -\sqrt{2} \times 1 = -\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 3h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h} = \frac{3}{2} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \times (-\sqrt{2}) = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

함수 $y=x^2$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때,

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

➤ n이 음수일 때, $y=x^n$의 도함수

$n=-m$ (m은 자연수)라고 놓고, 몫의 미분법을 사용하여 다음과 같이 도함수를 구한다.

$$\begin{aligned} y' &= (x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

➤ $n=0$일 때, $y=x^n$의 도함수

$n=0$일 때, $y=x^n$에서 $y=x^0=1$로 정의하면 $y'=0$이 된다. 이때, $y'=0\times x^{0-1}$이라고 생각해도 무방하므로 $n=0$일 때도 $y'=nx^{n-1}$이 성립한다.

예제29

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{x^5}$ (2) $y=x^2-\dfrac{1}{x^4}$ (3) $y=\dfrac{x^4-4}{x^8}$

(1) $y' = \left(\dfrac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\dfrac{5}{x^6}$

(2) $y' = \left(x^2-\dfrac{1}{x^4}\right)' = (x^2-x^{-4})' = 2x-(-4)x^{-4-1} = 2x+4x^{-5} = 2x+\dfrac{4}{x^5}$

(3) $$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^4-4}{x^8}\right)' = (x^{-4}-4x^{-8})' \\ &= -4x^{-4-1}-4\times(-8)x^{-8-1} = -4x^{-5}+32x^{-9} \\ &= -\frac{4}{x^5}+\frac{32}{x^9} = \frac{-4x^4+32}{x^9} \end{aligned}$$

2 합성함수의 미분법

합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

➤ $u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\text{단, } \Delta u\neq 0)$$

가 된다. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

이다. 이때, 함수 $u=g(x)$는 미분가능한 함수이므로 연속함수이다. 따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=\lim_{\Delta x\to 0}\{g(x+\Delta x)-g(x)\}=g(x)-g(x)=0$$

이 되어 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta u\to 0$이 된다. 결국

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

이때, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=f'(u)\times g'(x)$이므로 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

예제30

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=\left(x^3+5x\right)^7$

(2) $y=\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^2$

(1) $u=x^3+5x$로 놓으면 $y=u^7$이므로 $\dfrac{dy}{du}=7u^6$, $\dfrac{du}{dx}=3x^2+5$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=7u^6\times\left(3x^2+5\right)\\&=7\left(x^3+5x\right)^6\left(3x^2+5\right)\end{aligned}$$

(2) $u=x^2-\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 $y=u^2$이므로 $\dfrac{dy}{du}=2u$, $\dfrac{du}{dx}=2x+\dfrac{2}{x^3}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=2u\times2\left(x+\frac{1}{x^3}\right)\\&=4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)\end{aligned}$$

예제31

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=\ln(3x-1)$

(2) $y=\left(2^x+\ln x\right)^3$

(3) $y=\cos\left(x^2+1\right)$

(4) $y=\sin^2 x$

(1) $y'=\dfrac{1}{3x-1}\times3=\dfrac{3}{3x-1}$

(2) $y'=3\left(2^x+\ln x\right)^2\times\left(2^x\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $y'=-\sin\left(x^2+1\right)\times2x=-2x\sin\left(x^2+1\right)$

(4) $y'=2\sin x\times\cos x=\sin 2x$

절댓값이 포함된 로그함수의 도함수

(1) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(2) $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

➤ 함수 $y = \ln|x|$의 도함수

① $x > 0$일 때, $y = \ln|x| = \ln x$이므로 $y' = \dfrac{1}{x}$이다.

② $x < 0$일 때, $y = \ln|x| = \ln(-x)$이므로 $y' = \dfrac{1}{-x} \times (-x)' = \dfrac{1}{-x} \times (-1) = \dfrac{1}{x}$이다.

①, ②에서 $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$이다.

➤ 함수 $y = \log_a|x|$의 도함수

$$(\log_a|x|)' = \left(\frac{\ln|x|}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \times (\ln|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$$

➤ 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x) \neq 0$이면 합성함수의 미분법에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

예제32

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y = x\ln|x|$

(2) $y = \ln\left|x^3 - x\right|$

(3) $y = \log_2|\sin x|$

(1) $y' = 1 \times \ln|x| + x \times \dfrac{1}{x} = \ln|x| + 1$

(2) $y' = \dfrac{\left(x^3 - x\right)'}{\left(x^3 - x\right)} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

(3) $y' = \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{(\sin x)'}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\ln 2 \times \sin x}$

함수 $y = x^r$ (r은 실수)의 도함수

r이 실수일 때, $y = x^r$의 도함수는 다음과 같다.

$$y' = rx^{r-1}$$

➤ r이 실수일 때, 함수 $y = x^r$ $(x > 0)$의 도함수
$y = x^r$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면 $\ln|y| = \ln|x^r|$이다.
이때, $\ln|x^r| = \ln|x|^r = r\ln|x|$이므로

$$\ln|y| = r\ln|x|$$

가 되고, 양변을 x에 대해서 미분하면

$$\frac{y'}{y} = r \times \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = y \times \frac{r}{x} = x^r \times \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

가 된다. 따라서 $y' = rx^{r-1}$이 성립한다.

➤ $x \le 0$인 경우에도 함수 $y = x^r$ (r은 실수)의 도함수가 존재하면 $y' = rx^{r-1}$이 성립함이 알려져 있다.

예제33

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y = \sqrt[4]{x}$ (2) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(1) $y' = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(2) $y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수로 나타낸 함수

두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

의 꼴로 주어진 함수를 매개변수로 나타낸 함수라 하고, 변수 t를 매개변수라고 한다.

예제34

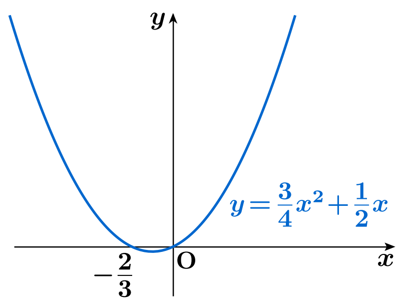
다음 매개변수로 나타낸 함수에서 매개변수 t를 소거하여 x, y의 관계식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

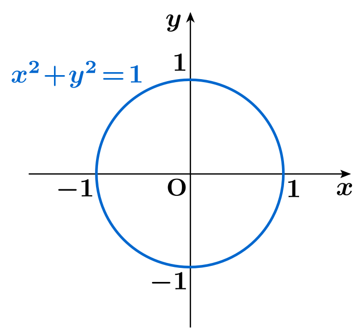
(1) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t^2 + t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

(1) $x = 2t$에서 $t = \dfrac{x}{2}$이므로

$$y = 3t^2 + t = 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

(2) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$이므로 $x^2 + y^2 = 1$





매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t),\ y=g(t)$가 미분가능하고, $f'(t)\neq 0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

➤ t의 증분 Δt에 대하여 x와 y의 증분을 각각 $\Delta x,\ \Delta y$라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

이다. 이때, 함수 $x=f(t)$가 미분가능하고, $f'(t)\neq 0$이면 함수 $x=f(t)$의 역함수가 존재하고, 그 역함수는 연속임이 알려져 있다. 즉, $t=f^{-1}(x)$이고, $f^{-1}(x)$가 연속이므로 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta t\to 0$이다.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

예제35

다음 함수를 미분하시오.

(1) $\begin{cases} x=2t \\ y=3t^2+t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2,\ \dfrac{dy}{dt}=6t+1$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{6t+1}{2}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=\cos t$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}$ (단, $\sin t\neq 0$)

4 음함수와 역함수의 미분법

양함수와 음함수

하나의 변수 y를 $y = f(x)$와 같이 다른 한 변수 x에 관한 식으로 직접적으로 나타낼 수 있을 때, y가 x에 대해서 양함수로 표현되었다고 한다.
반면, 변수 x, y가 $f(x, y) = 0$처럼 분리되지 않는 하나의 관계식으로 주어질 때, 음함수로 표현되었다고 한다.

➤ $y = x + 1$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ 등은 모두 양함수로 표현된 것이다.

➤ $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $9x^5 + x^4y^2 - 14xy - y^4 - 3 = 0$ 등은 모두 음함수로 표현된 것이다.

➤ 양함수로 표현된 경우는 $x - y + 1 = 0$, $x^2 - y = 0$, $\sqrt{x} - y = 0$처럼 항상 음함수의 표현으로 바꿀 수 있다.

➤ 반면, 음함수의 경우는 양함수로 쉽게 바꿀 수 있는 경우도 있고, 바꾸는 것이 힘들거나 불가능한 경우도 있다. 예를 들어, 음함수 $x^2 + y^2 = 1$의 경우는 y의 구간을 나누어

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} & (y \geq 0) \\ y = -\sqrt{1 - x^2} & (y < 0) \end{cases}$$

와 같이 두 개의 양함수로 표현하는 것이 가능하지만, 음함수 $9x^5 + x^4y^2 - 14xy - y^4 - 3 = 0$의 경우는 양함수로 표현하는 것이 불가능하다.

➤ 음함수 중에는 함수의 정의에서 벗어나서 함수가 아닌 경우도 있지만, 함수처럼 취급하면 편리할 때가 많으므로 통상적으로 "함수"라는 용어를 사용한다.

음함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

예제36

x의 함수 y가 음함수 $x^2+y^2=1$로 주어질 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

음함수 $x^2+y^2=1$에서 y를 x의 함수로 보고, 양변을 x에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=0$$

$$2x+2y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

예제37

x의 함수 y가 음함수 $xy^2-2=0$로 주어질 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

음함수 $xy^2-2=0$에서 y를 x의 함수로 보고, 양변을 x에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\left(xy^2\right)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=0$$

$$2x+2y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

역함수의 미분법

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{또는} \quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

➤ $y=f^{-1}(x)$에서 $x=f(y)$이고, 이 식의 양변을 x에 대해서 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dy}(f(y))\times\frac{dy}{dx}=f'(y)\times\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\times\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\times\frac{dy}{dx}$$

이때, $\frac{dx}{dy}\neq 0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

또한, $\frac{dy}{dx}=\left(f^{-1}\right)'(x)$, $\frac{dx}{dy}=f'(y)=f'\left(f^{-1}(x)\right)$이므로

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

➤ 역함수의 성질에 의하여 $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$가 성립한다. 이 식의 양변을 x에 대해서 미분하여 다음과 같이 $\left(f^{-1}\right)'(x)$를 구할 수도 있다.

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\times\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

$$\therefore \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

예제38

역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(1) $x = y^3$

(2) $x = y^2 + y - 1$

(1) $x = y^3$에서 $\dfrac{dx}{dy} = 3y^2$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{3y^2}$

(2) $x = y^2 + y = 1$에서 $\dfrac{dx}{dy} = 2y + 1$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dx}} = \dfrac{1}{2y+1}$

예제39

함수 $f(x) = x^3 + 3x$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라고할 때, $\left(f^{-1}\right)'(4)$의 값을 구하시오.

$f^{-1}(4) = \alpha$라고 하면 $f(\alpha) = 4$이다.

$$f(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha = 4$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha - 1)\left(\alpha^2 + \alpha + 4\right) = 0$$

따라서 $\alpha = 1$이고 $f^{-1}(4) = 1$이 된다. 이때, $f'(x) - 3x^2 + 3$이므로 다음과 같이 $\left(f^{-1}\right)'(4)$를 구할 수 있다.

$$\left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(4)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

예제40

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = 3$을 만족시킬 때, $f'(2)$를 구하시오.

$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = 3$에서 $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$임을 알 수 있다.

$\therefore f'(2) = \dfrac{1}{g'(1)} = \dfrac{1}{3}$

5 이계도함수

이계도함수

함수 $y = f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

를 $y = f(x)$의 이계도함수라고 하며, 이것을 기호로 $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$와 같이 나타낸다.

예제41

다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y = \dfrac{e^x}{x}$

(2) $y = x \ln x$

(3) $y = \sqrt{2x-1}$

(4) $y = \tan^2 x$

(1) $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$y'' = \dfrac{\{e^x(x-1)+e^x\}x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4} = \dfrac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}$

(2) $y' = \ln x + 1$

$y'' = \dfrac{1}{x}$

(3) $y = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$y'' = -\dfrac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2 = -(2x-1)^{-\frac{3}{2}}$

(4) $y' = 2\tan x \times \sec^2 x$

$y'' = 2\sec^2 x \times \sec^2 x + 2\tan x \times 2\sec x \times \sec x \times \tan x$

$= 2\sec^2 x\left(\sec^2 x + 2\tan^2 x\right)$

1 접선의 방정식

접선의 방정식

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

예제42

함수 $y=\dfrac{4x-1}{x^2+2}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $ax+by+1=0$일 때, 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오.

$f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+2}$라고 하면 $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2+2\right)-(4x-1)\times 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{-4x^2+2x+8}{\left(x^2+2\right)^2}$이다.

따라서 구하는 접선이 방정식은

$$y-1=f'(1)(x-1)$$

$$y-1=\frac{2}{3}(x-1)$$

$$2x-3y+1=0$$

이고, $ab=2\times(-3)=-6$이다.

예제43

곡선 $y=2e^x+1$에 접하는 직선이 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$일 때, 이 직선의 방정식을 구하시오.

$y'=2e^x$이고, 접선의 기울기가 $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이므로 접점의 좌표를 $(t, 2e^t+1)$이라고 하면 $y'=2e^t=1$에서 $t=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$가 된다. 따라서 접점의 좌표는 $(-\ln 2,\ 2)$이고, 접선의 방정식은 $y-2=x+\ln 2$이다.

$\therefore y=x+2+\ln 2$

예제44

매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin^2 t$$

에 대하여 $t = \frac{\pi}{4}$에 대응하는 점에서 이 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하시오.

$t = \frac{\pi}{4}$일 때, $x = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $y = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$이므로

$t = \frac{\pi}{4}$에 대응하는 점은 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

또한 $\frac{dx}{dt} = -2\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 2\sin t\cos t$에서 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t\cos t}{-2\sin t} = -\cos t$이므로,

$t = \frac{\pi}{4}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $-\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2})$, 즉 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3}{2}$이다.

예제45

점 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y = 2\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

$y' = \frac{2}{x}$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ 2\ln t)$라고 하면, 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{t}(x - t) + 2\ln t$$

가 된다. 이 접선이 점 $(0,\ 1)$을 지나야 하므로

$$1 = \frac{2}{t}(0 - t) + 2\ln t$$

에서 $t = e^{\frac{3}{2}}$가 된다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2e^{-\frac{3}{2}}x + 1$$

이다.

2 함수의 그래프의 개형

이계도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$일 때,

(1) $f''(a) < 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이다.

(2) $f''(a) > 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

➤ 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

➤ 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$이고 $x = a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

➤ $f''(a) < 0$이면 $f'(x)$는 $x = a$를 포함하는 작은 열린구간에서 감소하고, $f'(a) = 0$이므로 $f'(x)$의 부호는 $x = a$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이다.

➤ $f''(a) > 0$이면 $f'(x)$는 $x = a$를 포함하는 작은 열린구간에서 증가하고, $f'(a) = 0$이므로 $f'(x)$의 부호는 $x = a$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

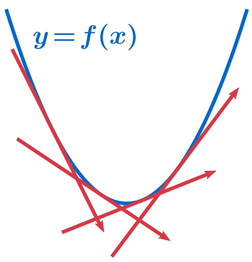
곡선의 볼록과 이계도함수

어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

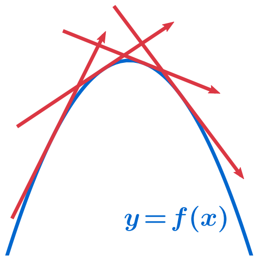
(1) $f''(a) > 0$이면 곡선 $f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

(2) $f''(a) < 0$이면 곡선 $f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

➤ 어떤 열린구간에 속하는 임의의 점에서 곡선 $y = f(x)$에 접하는 접선이 그 구간에서 곡선보다 아래쪽에 놓이면 그 구간에서 곡선 $y = f(x)$는 아래로 볼록하다고 한다. 반대로, 어떤 열린구간에 속하는 임의의 점에서 곡선 $y = f(x)$에 접하는 접선이 그 구간에서 곡선보다 위쪽에 놓이면 그 구간에서 곡선 $y = f(x)$는 위로 볼록하다고 한다.



아래로 볼록

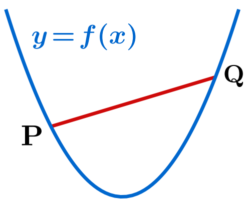


위로 볼록

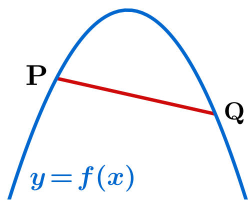
➤ 어떤 열린구간에서 $f'(x)$가 증가하면, 그 구간에서 곡선 $y = f(x)$는 아래로 볼록하다고 하고, $f'(x)$가 감소하면, 그 구간에서 곡선 $y = f(x)$는 위로 볼록하다고 한다.

➤ 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f''(x) > 0$이면, 이 구간에서 $f'(x)$는 증가하므로 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다. 또한, 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f''(x) < 0$이면, 이 구간에서 $f'(x)$는 감소하므로 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

☆ 어떤 구간에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 놓이면 곡선 $y = f(x)$는 그 구간에서 아래로 볼록하다고 한다. 반대로, 어떤 구간에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 놓이면 곡선 $y = f(x)$는 그 구간에서 위로 볼록하다고 한다.



아래로 볼록



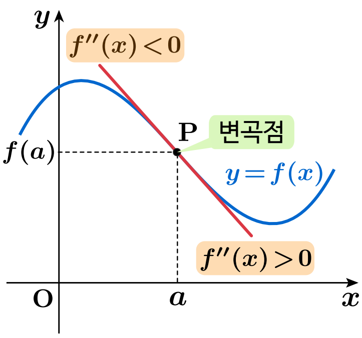
위로 볼록

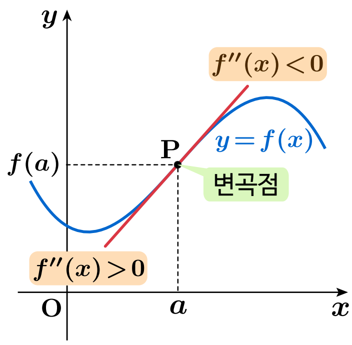
변곡점과 이계도함수

함수 $y=f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 된다.

➤ 연속인 어떤 곡선이 위로 볼록인 구간과 아래로 볼록인 구간을 동시에 갖고 있다면, 위록 볼록에서 아래로 볼록으로 또는 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌는 경계가 되는 점이 있을 것이다. 이 점을 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.

➤ 변곡점은 이계도함수의 부호가 양에서 음으로 바뀌거나 혹은 음에서 양으로 바뀌는 경계가 되는 점이다.





예제46

함수 $y=x^3-3x^2+5$의 볼록을 조사하고, 변곡점의 좌표를 구하시오.

$f(x)=x^3-3x^2+5$라고 하면

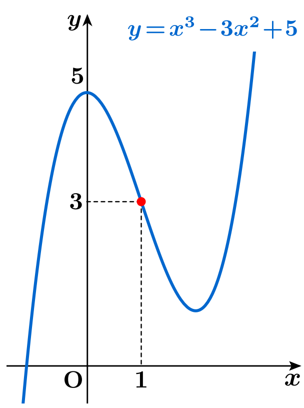
$f'(x)=3x^2-6x,\ f''(x)=6(x-1)$이다.

$x<1$일 때, $f''(x)<0$

$x=1$일 때, $f''(x)=0$

$x>1$일 때, $f''(x)>0$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(1,\ \infty)$에서 아래로 볼록하다. 또한, 변곡점의 좌표는 $(1,\ 3)$이 된다.



함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하면 쉽게 그릴 수 있다.

(1) 함수의 정의역과 치역

(2) 좌표축과의 교점

(3) 곡선의 대칭성과 주기

(4) 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 곡선의 볼록, 변곡점

(5) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선

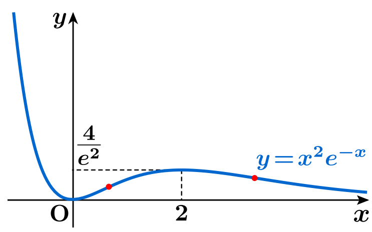
예제47

함수 $y=x^2e^{-x}$의 그래프의 개형을 그리시오.

$f(x)=x^2e^{-x}$라고 하면
$f'(x)=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$, $f''(x)=\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}$이다.
방정식 $f'(x)=0$의 근은 $x=0$ 또는 $x=2$이고,
방정식 $f''(x)=0$의 근은 $x=2\pm\sqrt{2}$이다.
이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 (극소)	↗	(변곡점)	↗	$\frac{4}{e^2}$ (극대)	↘	(변곡점)	↘

위 표에 의하면 함수 $y=f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0,
$x=2$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$을 갖고,
구간 $\left(-\infty,\ 2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2},\ \infty\right)$에서는 아래로
볼록, 구간 $\left(2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)$에서는 위로 볼록이다.
또한, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\infty$이므로 그래프의
개형은 오른쪽 그림과 같다.



예제48

함수 $y=3x^4+4x^3-1$의 그래프의 개형을 그리시오.

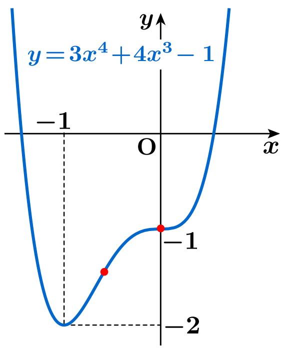
$f(x)=3x^4+4x^3-1$라고 하면
$f'(x)=12x^2(x+1),\ f''(x)=12x(3x+2)$이다.
방정식 $f'(x)=0$의 근은 $x=-1$ 또는 $x=0$이고,
방정식 $f''(x)=0$의 근은 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=0$이다.
이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2 (극소)	$\nearrow$	(변곡점)	$\nearrow$	(변곡점)	$\nearrow$

위 표에 의하면 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -2를 갖고, 구간 $\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right)\cup(0,\ \infty)$에서는 아래로 볼록, 구간 $\left(-\frac{2}{3},\ 0\right)$에서는 위로 볼록이다.

또한, 변곡점은 $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{43}{27}\right)$, $(0,\ -1)$이 된다.

따라서 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



예제49

함수 $y = x + \dfrac{1}{x}$의 그래프의 개형을 그리시오.

함수의 정의역은 $x \neq 0$인 모든 실수이다.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$라고 하면 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$이다.

방정식 $f'(x) = 0$의 근은 $x = -1$ 또는 $x = 1$이고, 방정식 $f''(x) = 0$의 근은 존재하지 않는다.

이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2 (극대)	$\searrow$		$\searrow$	2 (극소)	$\nearrow$

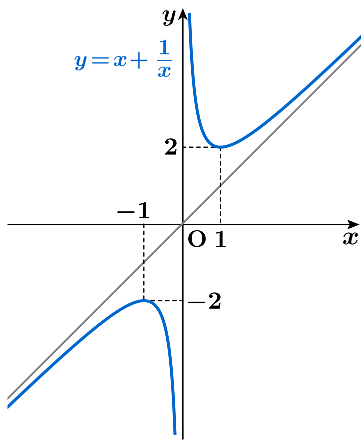
위 표에 의하면 함수 $y = f(x)$는 $x = -1$에서 극댓값 -2를 갖고, $x = 1$에서 극솟값 2를 갖는다. 또한, 구간 $(-\infty,\ 0)$에서는 위로 볼록, 구간 $(0,\ \infty)$에서는 아래로 볼록이다. 변곡점은 존재하지 않고,

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

$$|x| \to \infty \text{일 때, } f(x) \to x$$

이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



3 방정식과 부등식에의 활용

방정식의 실근의 개수

(1) 방정식 $f(x) = 0$의 실근은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 $(y = 0)$이 만나는 점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 $y = f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 서로 다른 교점의 개수와 같다.

(2) 방정식 $f(x) = g(x)$의 실근은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 함수 $y = g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 $y = f(x)$의 그래프와 $y = g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 교점의 개수와 같다.

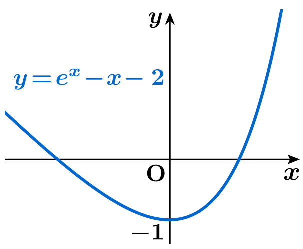
예제50

방정식 $e^x = x + 2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

방정식 $e^x = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - x - 2 = 0$이므로 $f(x) = e^x - x - 2$로 놓으면
$f'(x) = e^x - 1,\ f''(x) = e^x$이다.
방정식 $f'(x) = 0$의 근은 $x = 0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f''(x) > 0$이다.

이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1 (극소)	$\nearrow$



위 표에 의하면 함수 $y = f(x)$는 $x = 0$에서 극솟값 -1을

갖고, 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록이다.

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$이므로 함수

$y = f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축과의 교점이 2개이므로 주어진
방정식의 서로 다른 실근의 개수도 2개가 된다.

예제51

방정식 $x - \ln x + k = 0$이 실근을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

방정식 $x - \ln x + k = 0 \ \Leftrightarrow \ k = \ln x - x$이므로 $f(x) = \ln x - x$라고 하면 $y = f(x)$의 그래프와 $y = k$의 그래프가 교점을 갖지 않게 되는 k값의 범위를 구하면 된다.

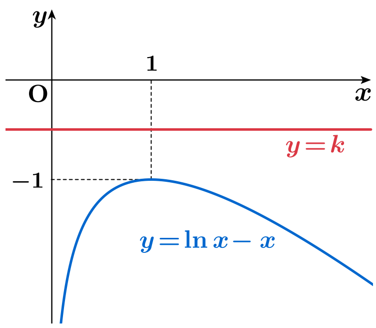
함수 $y = f(x)$의 정의역은 $x > 0$이고, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$이다.

방정식 $f'(x) = 0$의 근은 $x = 1$, $x > 0$에서 $f''(x) < 0$이다.

이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	-1 (극대)	$\searrow$

위 표에 의하면 함수 $y = f(x)$는 $x = 1$에서 극댓값 -1을 갖고, 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록이다. 또한, $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



이로부터 $k > -1$인 범위에서는 두 함수의 그래프가 교점을 갖지 않는다는 것을 알 수 있다.

부등식의 증명

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) > 0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서

$$f(x)\text{의 최솟값} > 0$$

임을 보이면 된다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이려면 $h(x) = f(x) - g(x)$라고 할 때, 그 구간에서

$$h(x)\text{의 최솟값} \geq 0$$

임을 보이면 된다.

예제52

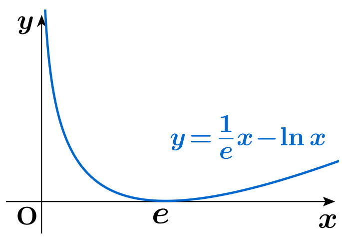
$x > 0$일 때, 부등식 $\frac{1}{e}x - \ln x \geq 0$이 성립함을 보이시오.

$f(x) = \frac{1}{e}x - \ln x$라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$이다.
방정식 $f'(x) = 0$의 근은 $x = e$이고, $x > 0$에서 $f''(x) > 0$이다.

이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$

위 표에 의하면 함수 $y = f(x)$는 $x = e$에서 극솟값 0을 갖고, 구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록이다. 또한 $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



$x > 0$에서 함수 $y = f(x)$의 최솟값이 0이므로 $f(x) \geq 0$이고, 부등식 $\frac{1}{e}x - \ln x \geq 0$가 성립함을 알 수 있다.

예제53

$x > 0$일 때, 부등식 $x \ln x > x + k$가 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x) = x \ln x - k$라고 하면 $x > 0$에서 $f(x)$의 최솟값보다도 k가 더 작은 값을 가지면 된다.

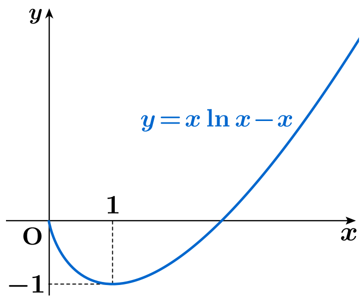
$f'(x) = \ln x,\ f''(x) = \frac{1}{x}$이다.

방정식 $f'(x) = 0$의 근은 $x = 1$이고, $x > 0$에서 $f''(x) > 0$이다.

이를 토대로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	-1 (극소)	$\nearrow$

위 표에 의하면 함수 $y = f(x)$는 $x = 1$에서 극솟값 -1을 갖고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 아래로 볼록이다. 또한 $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



$x > 0$에서 함수 $y = f(x)$의 최솟값이 -1이므로 $k < -1$일 때 주어진 부등식이 성립하는 것을 알 수 있다.

4 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x = f(t)$라고 하면, 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는 다음과 같다.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad a(t) = v'(t) = f''(t)$$

예제54

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x = f(t)$가

$$f(t) = 2\cos t - \cos 2t$$

이다. $t = \frac{\pi}{6}$일 때, 점 P의 속도와 가속도를 구하시오.

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라고 하면

$$v(t) = f'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t$$

$$a(t) = f''(t) = -2\cos t + 4\cos 2t$$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$일 때, 점 P의 속도와 가속도는

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - 1$$

$$a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{\pi}{6} + 4\cos\frac{\pi}{3} = 2 - \sqrt{3}$$

이다.

평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 함수 $x=f(t),\ y=g(t)$와 같이 주어질 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는 다음과 같다.

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도 : $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

(2) 점 P의 시각 t에서의 속력 : $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

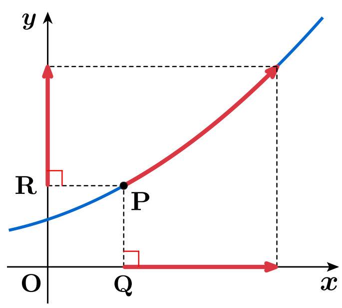
(3) 점 P의 시각 t에서의 가속도 : $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

(4) 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기 : $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

➤ 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 좌표평면 위를 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 좌표 $(x,\ y)$는시각 t를 매개변수로 하는 함수

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

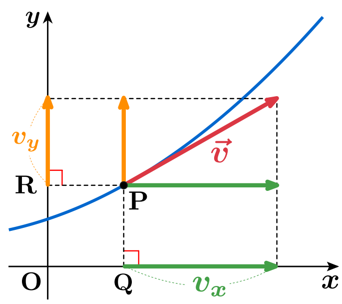
로 나타낼 수 있다. 이때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하면, 점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 점 Q는 x축 위를 움직이고, x축 위에서의 점 Q의 위치는 $x=f(t)$로 나타낼 수 있다. 또한 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 R라고 하면, 점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 점 R는 y축 위를 움직이고, y축 위에서의 점 R의 위치는 $y=g(t)$로 나타낼 수 있다.



➤ 시각 t에서의 두 점 $\mathrm{Q},\ \mathrm{R}$의 속도를 각각 $v_x(t),\ v_y(t)$라고 하면

$$v_x(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad v_y(t)=\frac{dy}{dt}=g'(t)$$

이다. 이때, 순서쌍 $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$를 점 P의 시각 t에서의 속도라 하고, $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$를 속도의 크기, 즉 속력이라 한다.



➤ 시각 t에서의 두 점 Q, R의 가속도를 각각 $a_x(t)$, $a_y(t)$라고 하면

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} = g''(t)$$

이다. 이때, 순서쌍 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$를 점 P의 시각 t에서의 가속도라 하고, $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$을 가속도의 크기라 한다.

예제55

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $x = t^2$, $y = 2t$라고 할 때, 점 P의 시각 $t = 2$에서의 속력과 가속도의 크기를 구하시오.

$\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 2$이므로 속도는 $(2t, 2)$이므로, $t = 2$에서의 속도는 $(4, 2)$이다.
따라서 $t = 2$에서의 속력은 $\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$이다.
또한, $\frac{d^2x}{dt^2} = 2$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$이므로 가속도는 $(2, 0)$이고, 시각 $t = 2$에서의 가속도의 크기는 $\sqrt{2^2 + 0^2} = 2$가 된다.

예제56

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$라고 할 때, 점 P의 시각 $t = 2$에서의 속도와 가속도를 구하시오.

$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \cos t$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(1 - \cos t, \sin t)$, 가속도는 $(\sin t, \cos t)$가 된다.

적분

3

1. 여러 가지 적분법
2. 정적분의 활용

1 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분

함수 $y = x^r$ (r는 실수)의 부정적분과 정적분

(1) $r \neq 1$일 때, $\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

(2) $r = -1$일 때, $\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

➤ $r \neq 1$일 때, 미분법에서 $\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right)' = x^r$이므로 $\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$이다.

➤ $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$이므로 $\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$이다.

예제1

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \frac{x^2+3x}{x^3} \, dx$ (2) $\int (2\sqrt{x}-1)^2 \, dx$

(1)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3x}{x^3} \, dx &= \int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{3}{x^2} \, dx \\ &= \int x^{-1} \, dx + 3\int x^{-2} \, dx \\ &= \ln|x| - \frac{3}{x} + C\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int (2\sqrt{x}-1)^2 \, dx &= \int 4x \, dx - \int 4\sqrt{x} \, dx + \int 1 \, dx \\ &= 4\int x \, dx - 4\int x^{\frac{1}{2}} \, dx + \int 1 \, dx \\ &= 2x^2 - \frac{3}{8}x\sqrt{x} + x + C\end{aligned}$$

예제2

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x^3}\ dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \left(2\sqrt{x}-1\right)^2\ dx$

(1) $$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x^3}\ dx &= \int_1^2 \frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\ dx \\ &= \left[\ln|x| - \frac{3}{x}\right]_1^2 \\ &= \ln 2 - \frac{3}{2} - \ln 1 + 3 \\ &= \ln 2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_0^1 \left(2\sqrt{x}-1\right)^2\ dx &= \int_0^1 4x - 4\sqrt{x}+1\ dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + x\right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{8}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

지수함수의 부정적분과 정적분

(1) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

(2) $\int e^x\,dx = e^x + C$

➤ $a > 0,\ a \neq 1$일 때, 지수함수의 미분법에서 $= (a^x)' = a^x \ln a$, 즉 $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$이므로 $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$이다.

➤ $(e^x)' = e^x$ 이므로 $\int e^x\,dx = e^x + C$

예제3

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 5^{2x}\,dx$

(2) $\int e^{x-1}\,dx$

(1) $\int 5^{2x}\,dx = \int 25^x\,dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C$

(2) $\int e^{x-1}\,dx = \int \frac{1}{e} \times e^x\,dx = \frac{1}{e}\int e^x\,dx = \frac{1}{e} \times e^x + C = e^{x-1} + C$

예제4

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^1 5^{2x}\,dx$

(2) $\int_1^3 e^{x-1}\,dx$

(1) $\int_0^1 5^{2x}\,dx = \left[\frac{5^{2x}}{2\ln 5}\right]_0^1 = \frac{25}{2\ln 5} - \frac{1}{2\ln 5} = \frac{24}{2\ln 5} = \frac{12}{\ln 5}$

(2) $\int_1^3 e^{x-1}\,dx = \left[e^{x-1}\right]_1^3 = e^2 - 1$

삼각함수의 부정적분과 정적분

(1) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ (2) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(3) $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ (4) $\displaystyle\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

➤ 삼각함수의 미분법에서 $(-\cos x)' = \sin x$, $(\sin x)' = \cos x$이므로 다음이 성립한다.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

➤ 삼각함수의 미분법에서 $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(-\cot x)' = \csc^2 x$이므로 다음이 성립한다.

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C, \quad \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

예제5

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int \left(\cos x - 3\sec^2 x\right)\, dx$ (2) $\displaystyle\int \cot^2 x\, dx$

(1) $\displaystyle\int \left(\cos x - 3\sec^2 x\right)\, dx = \int \cos x\, dx - 3\int \sec^2 x\, dx = \sin x - 3\tan x + C$

(2) $\displaystyle\int \cot^2 x\, dx = \int \csc^2 x - 1\, dx = \int \csc^2 x\, dx + \int 1\, dx = -\cot x - x + C$

예제6

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\cos x - 3\sec^2 x\right)\, dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\, dx$

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\cos x - 3\sec^2 x\right)\, dx = \Big[\sin x - 3\tan x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 = 6$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\, dx = \Big[-\cot x - x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

2 치환적분법

치환적분법을 이용한 부정적분

미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\int f(g(x)) \times g'(x)\ dx = \int f(t)\ dt$$

➤ 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 할 때, 합성함수 $F(g(x))$를 미분하면

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \times g'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$$

이다. 따라서

$$\int f(g(x)) \times g'(x)\ dx = F(g(x)) + C$$

이다. 이때, $g(x)=t$로 놓으면 $F(g(x))=F(t)$이고, $\int f(t)\ dt = F(t)+C$이므로

$$\int f(g(x)) \times g'(x)\ dx = \int f(t)\ dt$$

이다. 이와 같이 한 변수에 대해 미분가능한 함수를 다른 변수로 치환하여 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

➤ $\int f(g(x)) \times g'(x)\ dx$에서 $g(x)=t$로 치환하면 $\frac{dt}{dx}=g'(x)$이므로

$$\int f(g(x)) \times g'(x)\ dx = \int f(t) \times \frac{dt}{dx}\ dx = \int f(t)\ dt$$

로 구할 수 있다.

예제7

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 2\sin(2x+1)\ dx$ (2) $\int 2x\left(x^2+1\right)^2\ dx$

(1) $f(x)=\sin x,\ g(x)=2x+1$라 하면 $g'(x)=2$이므로

$$\int 2\sin(2x+1)\ dx=\int f(g(x))g'(x)\ dx$$

가 된다. 이때, $g(x)=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)\ dx&=\int f(t)\ dt=F(t)+C\\&=-\cos t+C=-\cos(2x+1)+C\end{aligned}$$

이 된다. 간단히 $2x+1=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$\begin{aligned}\int 2\sin(2x+1)\ dx&=\int \sin t\times\frac{dt}{dx}\ dx=\int \sin t\ dt\\&=-\cos t+C=-\cos(2x+1)+C\end{aligned}$$

로 구할 수 있다.

(2) $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2+1$라 하면 $g'(x)=2x$이므로

$$\int 2x\left(x^2+1\right)^2\ dx=\int f(g(x))g'(x)\ dx$$

가 된다. 이때, $g(x)=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)\ dx&=\int f(t)\ dt=F(t)+C\\&=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^3+C\end{aligned}$$

이 된다. 간단히 $x^2+1=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\begin{aligned}\int 2x\left(x^2+1\right)^2\ dx&=\int t^2\times\frac{dt}{dx}\ dx=\int t^2\ dt\\&=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^3+C\end{aligned}$$

로 구할 수 있다.

예제8

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}\,dx$

(1) $3x = t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx} = 3$이므로

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\,dx &= \int e^t \times \frac{1}{3} \times \frac{dt}{dx}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt \\ &= \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C\end{aligned}$$

이다.

(2) $4x+3 = t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx} = 4$이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x+3}\,dx &= \int \frac{1}{t} \times \frac{1}{4} \times \frac{dt}{dx}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|4x+3| + C\end{aligned}$$

이다.

함수 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

➤ $f(x) = t$라고 하면 $\dfrac{dt}{dx} = f'(x)$이므로 치환적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \int \frac{1}{f(x)} \times f'(x)\,dx \\ &= \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \ln|t| + C \\ &= \ln|f(x)| + C\end{aligned}$$

가 성립한다.

예제9

부정적분 $\displaystyle\int \tan x\,dx$를 구하시오.

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}\,dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx \\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $g(a)=\alpha,\ g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\times g'(x)\ dx=\int_\alpha^\beta f(t)\ dt$$

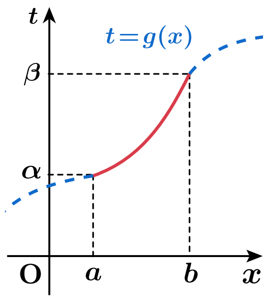
➤ 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 함수 $f(x)$가 $g(x)$의 치역을 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int f(g(x))\times g'(x)\ dx=F(g(x))+C$$

이다.

이때, $g(a)=\alpha,\ g(b)=\beta$라고 하면

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))\times g'(x)\ dx&=\Big[F(g(x))\Big]_a^b\\&=F(g(b))-F(g(a))\\&=F(\beta)-F(\alpha)\\&=\int_\alpha^\beta f(t)\ dt\end{aligned}$$



예제10

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\ dx$

(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

(1) $\cos x=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이다. 또한, $x=0$이면 $t=1$이고, $x=\dfrac{\pi}{2}$이면 $t=0$이므로 다음과 같이 정적분 값을 구할 수 있다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\sin x\ dx=\int_1^0 t^2\times\left(-\frac{dt}{dx}\right)\ dx=\int_1^0 -t^2\ dt=\left[-\frac{1}{3}t^3\right]_1^0=\frac{1}{3}$$

(2) $\ln x=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이다. 또한, $x=1$이면 $t=0$이고, $x=e$이면 $t=1$이므로 다음과 같이 정적분 값을 구할 수 있다.

$$\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\ dx=\int_0^1 t^2\times\frac{dt}{dx}\ dx=\int_0^1 t^2\ dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

3 부분적분법

부분적분법을 이용한 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

➤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 연속인 도함수를 가질 때, 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

이다. 위 등식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\ dx &= \int \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)\ dx\\ &= \int \{f(x)g(x)\}'\ dx - \int f'(x)g(x)\ dx\\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx\end{aligned}$$

이 된다. 이와 같이 적분하는 방법을 부분적분법이라고 한다.

➤ 부분적분에서 $f(x)$, $g'(x)$를 결정하는 방법

지수함수 $\rightarrow$ 삼각함수 $\rightarrow$ 다항함수 $\rightarrow$ 로그함수

순으로 앞쪽의 것을 $g'(x)$로 뒤쪽의 것을 $f(x)$로 놓는다.

예제11

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

(1) x는 다항함수, e^x는 지수함수이므로 $f(x)=x,\ g'(x)=e^x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이다.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

(2) x^2은 다항함수이고, $\sin x$는 삼각함수이므로 $f(x)=x^2,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이다.

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= x^2\times(-\cos x) - \int 2x\times(-\cos x)\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2\left\{x\sin x - \int \sin x\,dx\right\}\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

(3) $\ln x$를 $1\times\ln x$라고 보면 1은 다항함수이고, $\ln x$는 로그함수이므로 $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이다.

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int 1\times\ln x\,dx\\ &= x\ln x - \int x\times\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\ln x - \int 1\,dx\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

부분적분법을 이용한 정적분

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때, 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

➤ 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 연속인 도함수를 가질 때, 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)g(x)\}'\ dx &= \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\ dx + \int_a^b f(x)g'(x)\ dx\end{aligned}$$

이다. 이때, $\displaystyle\int_a^b \{f(x)g(x)\}\ dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$ 이므로

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\ dx + \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)\ dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

임을 알 수 있다.

예제12

정적분 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\ dx$의 값을 구하시오.

x는 다항함수, $\ln x$는 로그함수이므로 $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$로 놓으면

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$이다.

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\ dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2\ dx \\ &= \frac{e}{4} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2}x\ dx = \frac{e}{4} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

1 정적분과 급수의 합 사이의 관계

구분구적법

(1) 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 넓이 또는 부피를 알고 있는 기본 도형으로 주어진 도형을 세분하여 근삿값을 구하고, 이 근삿값의 극한으로 그 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라 한다.

(2) 구분구적법의 계산

① 주어진 도형을 n개의 기본 도형으로 나눈다.

② 기본 도형들의 넓이(부피)를 구한다.

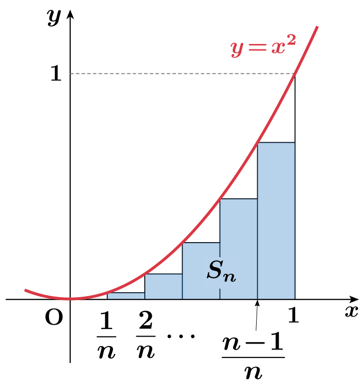
③ 위에서 구한 도형들의 넓이(부피)의 합의 극한을 구한다.

예제13

$y=x^2$, x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하시오.

구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 각 분점의 x좌표는 왼쪽으로부터 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$이다. n등분한 각 구간의 왼쪽 끝점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형을 만들면, 분점 사이의 거리는 $\frac{1}{n}$이므로 직사각형들의 넓이는 각각

$$\left(\frac{0}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n},\ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n},\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

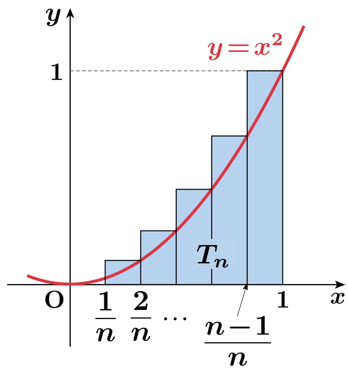


이다. 이때, 직사각형들의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\left\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)\times n \times (2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

이다.

또한, 구간 $[0,\ 1]$을 각 구간의 오른쪽 끝점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형을 만들어 이들의 넓이의 합을 T_n이라 하면



$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\left\{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right\} \\
&= \frac{1}{n^3} \times \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

이다.
구하는 넓이를 A라고 하면 극한의 대소 관계에 의하여

$$S_n < A < T_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n \le A \le \lim_{n\to\infty} T_n$$

이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$$

이므로 $A = \frac{1}{3}$이 된다.

정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\ dx \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

➤ 닫힌구간 $[a,\ b]$를 n등분한 각 분점의 x좌표를 각각

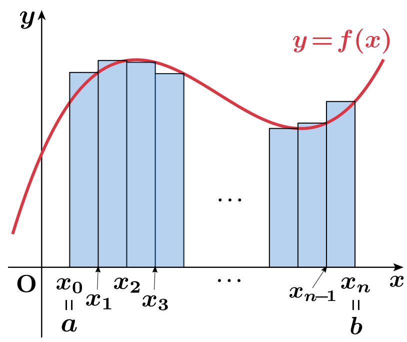
$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

라고 하면, 등분된 각 소구간의 길이 Δx와 등분점의 x좌표 x_k는 각각

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

$$x_k = a + k\Delta x \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

가 된다.



이때, 각 소구간의 길이를 밑변으로 하고, 각 소구간의 오른쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_k)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

이다. 구분구적법에 의하면 위 식에서 n이 한없이 커지면 S_n의 값은 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a,\ x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이에 한없이 가까워진다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\ dx$$

가 성립한다.

➤ 위 식은 다음 두 가지 경우에도 성립한다.

① 각 소구간의 길이를 밑변으로 하고, 각 소구간의 왼쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합을 S_n이라 할 때도 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = \int_a^b f(x)\ dx$$

② $f(x)$의 부호에 관계없이 성립한다.

예제14

$f(x)=x^2+2x$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(3+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(3+\frac{2k}{n}\right) &= \int_3^5 x^2+2x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_3^5 \\
&= \left(\frac{125}{3}+25\right)-(9+9) \\
&= \frac{146}{3}
\end{aligned}
$$

예제15

정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}\right)$의 값을 구하시오.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} \\
&= \int_1^2 \sqrt{x}\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\
&= \frac{4\sqrt{2}-2}{3}
\end{aligned}
$$

2 도형의 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

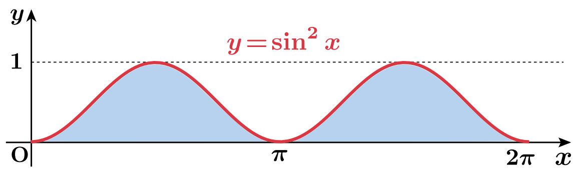
함수 $y = f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

예제16

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y = \sin^2 x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

곡선 $y = \sin^2 x$와 x축으로 둘러싸인 영역은 아래 그래프에서 보는 바와 같다.



구하는 영역의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} \\
&= \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

가 된다.

곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $x=g(y)$가 y축 위의 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |g(y)|\ dy$$

예제17

곡선 $y=\ln x$ 와 y축 및 두 직선 $y=0$과 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

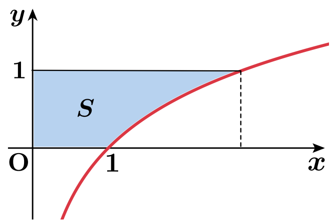
넓이를 구하려는 영역은 오른쪽 그림에서보는 바와 같다.

$$y=\ln x \ \Leftrightarrow\ x=e^y$$

이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_0^1 e^y\ dy=\Big[e^y\Big]_0^1=e=1$$

이 된다.



예제18

곡선 $y=\sqrt{x+1}-1$과 y축 및 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

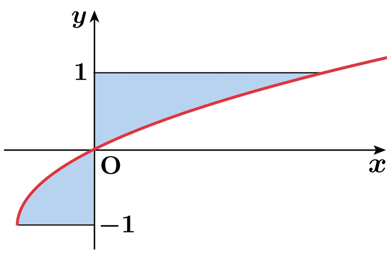
넓이를 구하려는 영역은 오른쪽 그림에서보는 바와 같다.

$$y=\sqrt{x+1}-1 \ \Leftrightarrow\ x=(y+1)^2-1$$

이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S&=\int_{-1}^1 \left|(y+1)^2-1\right|\ dy \\ &=\int_{-1}^0 \left\{1-(y+1)^2\right\}\ dy+\int_0^1 \left\{(y+1)^2-1\right\}\ dy \\ &=\left[y-\frac{1}{3}(y+1)^3\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}(y+1)^3-y\right]_0^1 \\ &=\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2 \end{aligned}$$

가 된다.



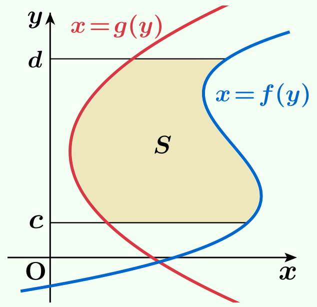
두 곡선 사이의 넓이

(1) 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

(2) 함수 $x = f(y)$, $x = g(y)$가 y축 위의 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 두 곡선 $x = f(y)$, $x = g(y)$ 및 두 직선 $y = c$, $y = d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다 .

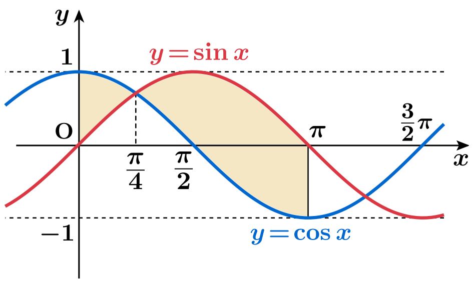
$$S = \int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$$



예제19

두 곡선 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 및 두 직선 $x = 0$, $x = \pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

넓이를 구하려는 영역은 아래 그림에서보는 바와 같다.



구하는 넓이를 S라고 하면

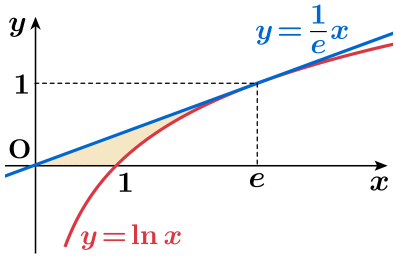
$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\ dx \\
&= \Big[\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 0\right) + \left(1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

가 된다.

예제20

곡선 $y = \ln x$와 점 $(e,\ 1)$에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

점 $(e,\ 1)$에서 곡선 $y = \ln x$에 접하는 접선이 방정식은 $y = \dfrac{1}{e}x$이므로 넓이를 구하려는 영역은 아래 그림에서 바와 같다.



이때,

$$y = \ln x \ \Leftrightarrow\ x = e^y$$

$$y = \frac{1}{e}x \ \Leftrightarrow\ x = ey$$

이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S = \int_0^1 (e^y - ey)\ dy = \left[e^y - \frac{e}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

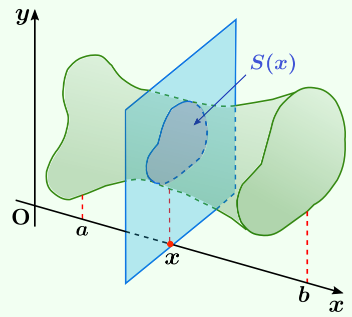
이 된다.

3 입체도형의 부피

입체도형의 부피

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는 다음과 같다. (단, $S(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 경우만 생각한다.)

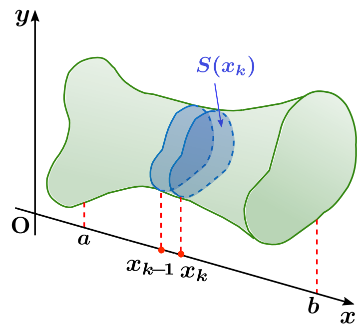
$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$



➤ 오른쪽 그림과 같이 x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양끝점과 분점을 차례로

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

라 하고, 소구간의 길이를 Δx라 하자.
또, 좌표가 x_k인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x_k)$라 하면, 밑변의 넓이가 $S(x_k)$이고, 높이가 $\Delta x = x_k - x_{k-1}$인 기둥을 생각할 수 있다.



이 기둥의 부피가 $S(x_k)\Delta x$이므로 $k=1$부터 $k=n$까지 n개의 기둥의 부피의 합 V_n은

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

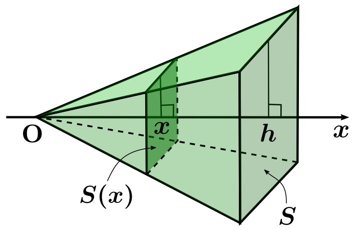
이다. 따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)\, dx$$

가 된다.

예제21

정적분을 이용하여 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 정사각뿔의 부피를 구하시오.



오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정하자. x좌표가 x인 점을 지나고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

이므로

$$S(x) = \frac{x^2}{h^2}S$$

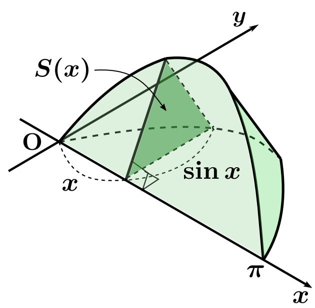
가 된다. 따라서 구하는 부피를 V라고 하면

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}S\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh$$

가 된다.

예제22

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양이 정삼각형이 된다고 할 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



그림에서처럼 점 $(x,\ 0)$에서 x축에 수직으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sin x$인 정삼각형이 된다. 이 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$이다.

따라서 구하는 부피를 V라고 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi S(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \end{aligned}$$

가 된다.

4 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$라고 하면

(1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt$이다.

(2) 시각 $t=a$에서 점 P의 위치를 x_0라고 할 때, $t=b$에서의 점 P의 위치 x는

$x=x_0+\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt$이다.

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\displaystyle\int_a^b |v(t)|\,dt$이다.

예제23

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=\sin t-\sin 2t$이고, $t=0$일 때의 위치가 $x=2$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 시각 $t=\pi$에서 점 P의 위치를 구하시오.

(2) 시각 $t=0$에서 시각 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

(1) 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 $x=2$이므로 시각 $t=\pi$에서 점 P의 위치 x는

$$x=2+\int_0^\pi(\sin t-\sin 2t)\,dt=2+\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^\pi=2+\left(1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=2+2=4$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi|\sin t-\sin 2t|\,dt$

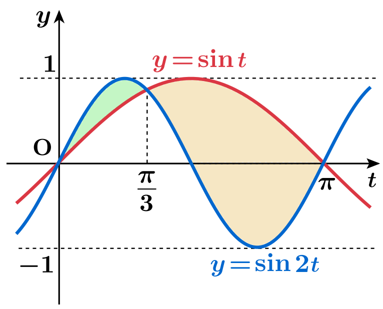
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2t-\sin t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin t-\sin 2t)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$

$$=\frac{5}{2}$$

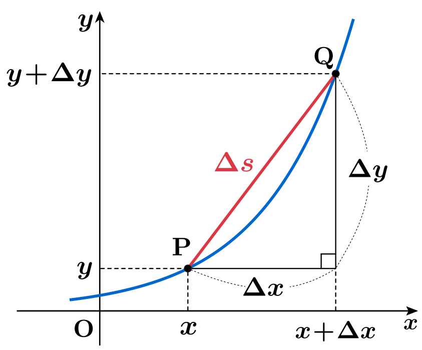


좌표평면 위에서 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t),\ y=g(t)$로 주어질 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

➤ 점 P가 시각 a에서 시각 t $(a\le t\le b)$까지 움직인 거리는 $s(t)$라고 하고, 시각이 t에서 $t+\Delta t$로 변할 때, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 점 $\mathrm{Q}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$로 움직인다고 하자. 이때, $s(t)$의 증분 Δs는 시각 t의 증분 Δt가 충분히 작을 때, 선분 PQ의 길이 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$에 가까워진다.



$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $s(t)$는 미분가능하고, 그 도함수는

$$s'(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

이다.

결국 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 움직인 거리 $s(b)$는

$$\begin{aligned}s(b)&=s(b)-s(a)\quad(\because s(a)=0)\\&=\int_a^b s'(t)\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\end{aligned}$$

가 된다.

예제24

좌표평면 위에서 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x = 2(2t+3)^{\frac{3}{2}}, \quad y = 3(t+1)^2$$

일 때, 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

$\dfrac{dx}{dt} = 6(2t+3)^{\frac{1}{2}},\ \dfrac{dy}{dt} = 6(t+1)$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36(2t+3) + 36\left(t^2+2t+1\right) = 36\left(t^2+4t+4\right) = 36(t+2)^2$$

이다. 따라서 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s = \int_0^3 \sqrt{36(t+2)^2}\, dt = 6\int_0^3 (t+2)\, dt = 6\left[\frac{1}{2}(t+2)^2\right]_0^3 = 6\left(\frac{25}{2} - \frac{4}{2}\right) = 63$$

이다.

예제25

좌표평면 위에서 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 시각 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

$\dfrac{dx}{dt} = 3\cos^2 t \times (-\sin t),\ \dfrac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \times \cos t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9\cos^2 t\sin^2 t$$

이다. 따라서 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t}\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t\sin t|\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\, dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이다.

곡선의 길이

미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

➤ 곡선 $y=f(x)$ $(a \le x \le b)$는 매개변수 t를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x=t, \quad y=f(t) \quad (a \le t \le b)$$

이때, 구간 $[a,\ b]$에서 이 매개변수로 나타낸 함수의 그래프의 길이는 좌표평면 위에서 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 움직인 거리와 같다. 따라서 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \end{aligned}$$

가 된다.

예제26

곡선 $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ $(1 \le x \le 4)$의 길이를 구하시오.

$f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$라고 하면 $f'(x)=(x-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x-1}$이므로

주어진 구간에서 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_1^4 \sqrt{1+\{\sqrt{x-1}\}^2}\,dx=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{3}$$

이다.