단원 ISSUE

이 단원에서는 **유리함수(무리함수)의 그래프의 평행이동과 대칭이동에 대한 복합적인 문제** 등이 자주 출제되며 유리함수(무리함수)의 그래프의 성질에 대한 개념 학습이 중점적으로 필요합니다.

평가문제

[스스로 확인하기]

1. **분수함수 $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$의 정의역이 $\{x|1<x\le 2\}$일 때, 치역은?**

① $\{y|-1\le y<0\}$　② $\{y|-1<y\le 0\}$
③ $\{y|-1<y<0\}$　④ $\{y|y\le -1\}$
⑤ $\{y|y\ge -1\}$

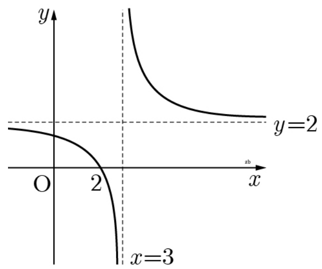
[스스로 확인하기]

2. **함수 $y=\dfrac{bx+3}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행 이동시킨 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3, y=1$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)**

① -4　② -3
③ 2　④ 3
⑤ 4

[스스로 확인하기]

3. **분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+2b+3c$의 값은?**



① -11　② -12
③ -13　④ -14
⑤ -15

[스스로 확인하기]

4. **함수 $f(x)=\dfrac{ax+3}{x+2}$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$가 성립하도록 하는 상수 a의 값은?**

① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

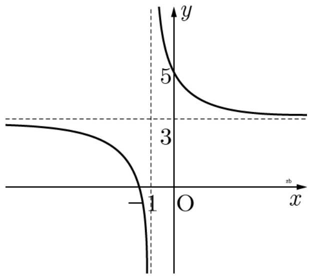
[스스로 마무리하기]

5. **분수함수 $y=\dfrac{-2}{x-1}+3$의 그래프를 x축,y축의 방향으로 각각 a, b만큼 평행이동 했더니 분수함수 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$의 그래프와 일치하였다. 이 때, ab의 값은?**

① 2　② 3
③ 4　④ 5
⑤ 6

[스스로 마무리하기]

6. 분수함수 $y=\dfrac{k}{x-m}+n$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 상수 k, m, n의 합 $k+m+n$의 값은? (단, 그래프의 점선은 점근선이다.)



① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

7. 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$의 그래프가 제 3사분면을 지나지 않을 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, $a>0, b>0$)

① $k>ab$ ② $k<ab$
③ $k>a+b$ ④ $k<2ab$
⑤ $k>2ab$

[스스로 확인하기]

8. 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$의 그래프가 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있을 때, 상수 k의 값은?

① -3 ② -1
③ 1 ④ 3
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

9. 함수 $xy+3y=x-3$의 그래프가 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

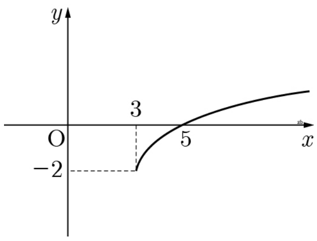
[스스로 확인하기]

10. 분수함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 분수함수 $y=\dfrac{4x+4}{2x-1}$의 그래프와 겹쳐질 때, $k+p+q$의 값은? (단, k, p, q는 상수이다.)

① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{9}{2}$
③ $\dfrac{11}{2}$ ④ 8
⑤ 9

[스스로 확인하기]

11. 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 실수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

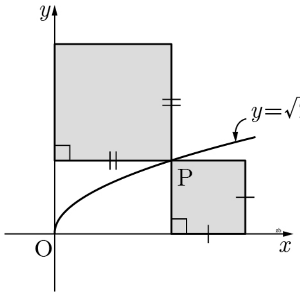


① 18 ② 20
③ 22 ④ 24
⑤ 26

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

[스스로 확인하기]

12. 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프 위의 점 P에서 x축, y축에 각각 수선을 내려 수선의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 각각 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합이 35일 때, 점 P의 x좌표는?



① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

[스스로 마무리하기]

13. 무리함수 $y=-\sqrt{4-4x}+3$의 그래프에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프와 겹친다.
ㄴ. 점 $(-\frac{5}{4},0)$을 지나는 그래프이다.
ㄷ. 제 4사분면을 지나지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[스스로 마무리하기]

14. 함수 $y=\sqrt{3x-6}+3$의 역함수가 $y=ax^2+bx+c\,(x\geq d)$일 때, $3a+2b+c-d$의 값은?

① -4 ② -2
③ -1 ④ 2
⑤ 4

[스스로 확인하기]

15. 무리함수 $y=\sqrt{40-4x}+5$의 그래프는 무리함수 $y=k\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동 한 것이다. 이 때 $k+a+b$의 값은?

① 10 ② 12
③ 14 ④ 17
⑤ 20

[스스로 확인하기]

16. 무리함수 $y=\sqrt{6-2x}+2$의 정의역이 $\{x|x\leq a\}$이고, 치역이 $\{y|y\geq b\}$일 때, 두 상수 a,b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -1
③ 1 ④ 3
⑤ 5

[스스로 확인하기]

17. 함수 $y=\sqrt{-x+3}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프는 점 $(1,a)$를 지난다. 이 때, 상수 a의값은?

① -5 ② -4
③ -3 ④ -2
⑤ -1

[스스로 확인하기]

18. $2\leq x\leq 5$에서 함수 $y=2\sqrt{x-1}+a$의 최댓값이 7일 때, 상수 a의 값은?

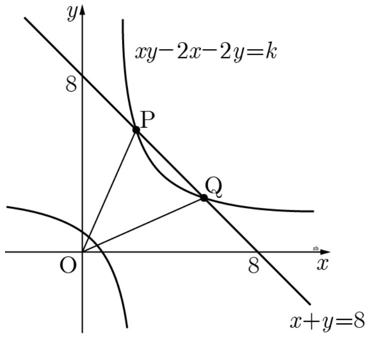
① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

실전문제

19. $k>2$인 상수 k에 대하여 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형일 때, k의 값은? (단, O는 원점이다.)

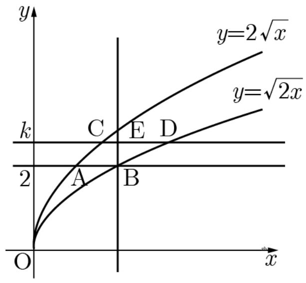
① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$
③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{2}$
⑤ 3

20. 그림과 같이 도형 $xy-2x-2y=k$가 직선 $x+y=8$과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 15일 때, $\overline{OP}\times\overline{OQ}$의 값은? (단, $k<0$이고, O는 원점이다.)



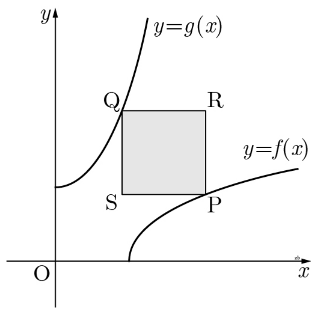
① 34　② 36
③ 38　④ 40
⑤ 42

21. 그림과 같이 직선 $y=2$가 두 함수 $y=2\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ $(k>2)$가 두 함수 $y=2\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 $1:4$로 내분한다. 사각형 $ABCD$의 넓이를 S라 할 때, $9S$의 값은?



① $18\sqrt{5}-8$　② $16\sqrt{3}-8$
③ $16\sqrt{5}-24$　④ $8\sqrt{15}-24$
⑤ $3\sqrt{15}-8$

22. 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P와 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 Q를 꼭짓점으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축에 평행한 정사각형 $PRQS$의 넓이가 최소일 때, 정사각형 $PRQS$의 둘레의 길이는?



① 6　② $\dfrac{13}{2}$
③ 7　④ $\dfrac{15}{2}$
⑤ 8

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

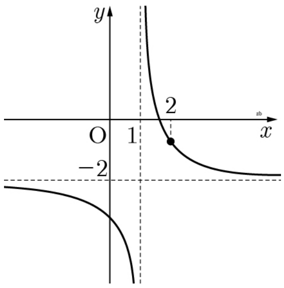
1) [정답] ⑤

[해설] $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-2$

이 때, $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}$으로 놓으면

$f(2)=\dfrac{-2\times2+3}{2-1}=-1$

이므로 다음 그림에서 치역은 $\{y|y\geq-1\}$이다.



2) [정답] ②

[해설] $y=\dfrac{bx+3}{x+a}=\dfrac{b(x+a)+3-ab}{x+a}$

$=\dfrac{3-ab}{x+a}+b$ …… ㉠

㉠에서 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$이고

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후의 점근선의 방정식은

$x=-a+1$, $y=b+2$

따라서, $-a+1=3$에서 $a=-2$

$b+2=1$에서 $b=-1$

$\therefore a+b=-3$

3) [정답] ⑤

[해설] 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로

$y=\dfrac{k}{x-3}+2$ (단, $k\neq0$)

또한, 주어진 함수의 그래프가 점 $(2,0)$을

지나므로 $0=\dfrac{k}{2-3}+2$ $\therefore k=2$

$\therefore y=\dfrac{2}{x-3}+2=\dfrac{2+2(x-3)}{x-3}=\dfrac{2x-4}{x-3}$

$\therefore a=2$, $b=-4$, $c=-3$

$\therefore a+2b+3c=2+2\times(-4)+3\times(-3)=-15$

4) [정답] ①

[해설] 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$가

성립하므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

즉, $y=\dfrac{ax+3}{x+2}$에서 $y(x+2)=ax+3$

$(y-a)x=-2y+3$, $x=\dfrac{-2y+3}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{-2x+3}{x-a}$ $\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-2x+3}{x-a}$

이 때, $f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax+3}{x+2}=\dfrac{-2x+3}{x-a}$ $\therefore a=-2$

5) [정답] ③

[해설] $y=\dfrac{-2}{x-1}+3$의 그래프를 x축, y축의

방향으로 각각 a, b만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{-2}{x-1-a}+3+b$

위 식이 $y=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-2}{x+1}+1$과 일치하므로

$-1-a=1$, $3+b=1$

$\therefore a=-2$, $b=-2$

$\therefore ab=(-2)\times(-2)=4$

6) [정답] ④

[해설] 주어진 그림에서 점근선의 방정식이

$x=-1$, $y=3$이므로 $y=\dfrac{k}{x+1}+3$

또한, 그래프가 점 $(0,5)$를 지나므로

$5=\dfrac{k}{1}+3$에서 $k=2$

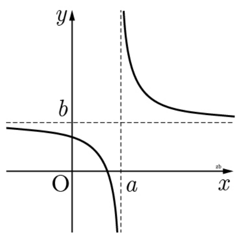
따라서 주어진 분수함수는 $y=\dfrac{2}{x+1}+3$이므로

$k=2$, $m=-1$, $n=3$

$\therefore k+m+n=2+(-1)+3=4$

7) [정답] ②

[해설] (i) $k>0$일 때



주어진 함수의 그래프가 위 그림과 같이

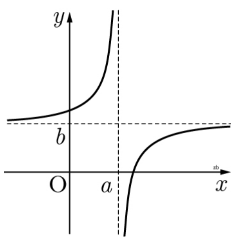
제 3사분면을 지나지 않으려면

(y절편) >0이어야 한다.

즉, $\dfrac{k}{-a}+b>0$에서 $\dfrac{k}{-a}>-b$

$\therefore k<ab$ $(\because a>0)$

(ii) $k<0$일 때



주어진 함수의 그래프는 위 그림과 같이

제 3사분면을 지나지 않는다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

(i), (ii)에서 $k<ab$

8) [정답] ⑤

[해설] $y=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+5}{x-1}=2+\dfrac{5}{x-1}$

이므로 함수 $y=\dfrac{5}{x-1}+2$의 그래프는

함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,

y축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이다.

$\therefore k=5$

9) [정답] ①

[해설] 함수 $xy+3y=x-3$을 y에 대하여 정리하면

$(x+3)y=x-3$

$\therefore y=\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{(x+3)-6}{x+3}$

$=-\dfrac{6}{x+3}+1$ …… ㉠

따라서 ㉠의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=1$이다.

$a=-3$, $b=1$ $\therefore a+b=-2$

10) [정답] ③

[해설] $y=\dfrac{4x+4}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)+6}{2x-1}$

$=\dfrac{6}{2x-1}+2=\dfrac{3}{x-\frac{1}{2}}+2$

즉, 분수함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로

$\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

분수함수 $y=\dfrac{3}{x-\frac{1}{2}}+2$의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 $k=3, p=\dfrac{1}{2}, q=2$이므로

$k+p+q=3+\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{11}{2}$

11) [정답] ④

[해설] 주어진 함수의 그래프에 의하여

$y=\sqrt{a(x-3)}-2$라 하면 점 $(5,0)$을 지나므로

$0=\sqrt{2a}-2$ 에서 $2a=4$, $\therefore a=2$

즉, $y=\sqrt{2(x-3)}-2=\sqrt{2x-6}-2$이므로

$a=2$, $b=-6$, $c=-2$

$\therefore abc=2\times(-6)\times(-2)=24$

12) [정답] ②

[해설] 점 P는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프 위의

점이므로 점 P의 좌표를 $P(a, \sqrt{2a})$라 하면

작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2a}$,

큰 정사각형의 한 변의 길이는 a이므로

두 정사각형의 넓이의 합은

$(\sqrt{2a})^2+a^2=35$, $a^2+2a-35=0$

$(a+7)(a-5)=0$ $\therefore a=5$ $(\because a>0)$

13) [정답] ④

[해설] ㄱ. $y=-\sqrt{4-4x}+3=-\sqrt{-4(x-1)}+3$

이므로 평행이동하면 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프와

겹친다. (거짓)

ㄴ. $y=-\sqrt{4-4x}+3$에 $x=-\dfrac{5}{4}$를 대입하면

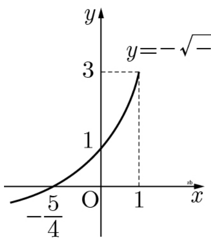
$y=-\sqrt{4-4\times(-\frac{5}{4})}+3=0$이므로

점 $(-\dfrac{5}{4}, 0)$을 지나는 그래프이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=-\sqrt{-4(x-1)}+3$의

그래프는 다음 그림과 같으므로

제 4사분면을 지나지 않는다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14) [정답] ③

[해설] $y=\sqrt{3x-6}+3$의 치역은 $\{y|y\ge 3\}$이므로

역함수의 정의역은 $\{x|x\ge 3\}$이다.

$y=\sqrt{3x-6}+3$에서 $y-3=\sqrt{3x-6}$

양변을 제곱하면

$(y-3)^2=3x-6$, $3x=y^2-6y+15$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}y^2-2y+5$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+5$ $(x\ge 3)$

따라서 $a=\dfrac{1}{3}, b=-2, c=5, d=3$이므로

$3a+2b+c-d=1-4+5-3=-1$

15) [정답] ④

[해설] $y=\sqrt{40-4x}+5$

$=\sqrt{-4(x-10)}+5=2\sqrt{-(x-10)}+5$

즉, 무리함수 $y=\sqrt{40-4x}+5$의 그래프는

무리함수 $y=2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore k=2, a=10, b=5$

$k+a+b=2+10+5=17$

16) [정답] ⑤

[해설] $6-2x\ge 0$에서 $2x\le 6$

즉, 정의역은 $\{x|x\le 3\}$이므로 $a=3$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

또한, $y-2=\sqrt{6-2x}\geq 0$이므로

$y-2\geq 0 \quad \therefore y\geq 2$

즉, 치역은 $\{y|y\geq 2\}$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

17) [정답] ③

[해설] 함수 $y=\sqrt{-x+3}$의 그래프를 원점에 대하여

대칭이동하면 $-y=\sqrt{-(-x)+3}$

즉, $y=-\sqrt{x+3}$

이것을 다시 y축의 방향으로 -1만큼

평행이동하면 $y+1=-\sqrt{x+3}$

즉, $y=-\sqrt{x+3}-1$ …… ㉠

㉠이 점 $(1,a)$를 지나므로

$a=-\sqrt{1+3}-1 \quad \therefore a=-3$

18) [정답] ③

[해설] 함수 $y=2\sqrt{x-1}+a$의 그래프는

함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 평행이동 한 것이므로

x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

따라서 $x=5$일 때 y의 최댓값이 7이므로

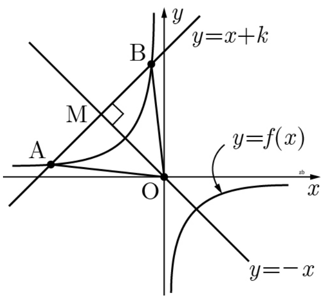
$2\sqrt{5-1}+a=7$, $4+a=7$

$\therefore a=3$

19) [정답] ②

[해설] 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고

하면 다음 그림과 같다.



함수 $y=-\dfrac{1}{x}$은 직선 $y=-x$에 대하여 대칭

이므로 $A\left(-\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)$라 하면 (단, $\alpha>0$)

$B\left(-\dfrac{1}{\alpha},\alpha\right)$이다.

삼각형 OAB가 정삼각형이므로 $\overline{OA}=\overline{AB}$이다.

즉, $\sqrt{\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}}=\sqrt{\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}$에서

$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=2\left(\alpha^2-2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$이다. $\quad \therefore \alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=4$

또한, 점 A와 B의 중점을 M이라 하면

$\overline{OM}=\dfrac{|0-0+k|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\dfrac{k}{\sqrt{2}}$이고,

$\angle OMA=90^\circ$, $\angle OAM=60^\circ$이므로

$\overline{OA}=\dfrac{k\sqrt{6}}{3}$이다.

따라서 $\overline{OA}=\sqrt{\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}}=2$이므로

$2=\dfrac{k\sqrt{6}}{3}$이다. $\quad \therefore k=\sqrt{6}$

20) [정답] ①

[해설] $xy-2x-2y=k$이므로 $y=\dfrac{2x+k}{x-2}$이다.

즉, 함수 $y=\dfrac{2x+k}{x-2}$의 점근선은 $x=2$, $y=2$

이고

직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 점 P, Q 도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 P와 점 Q는 $y=x$ 대칭이고

직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$P(p,-p+8)$이라 하면 $Q(-p+8,p)$이다.

이때 점 P와 Q의 x좌표의 곱이 15이므로

$p(-p+8)=15$이다.

즉, $p^2-8p+15=(p-3)(p-5)=0$이고

$p<-p+8$이므로 $p=3$이다.

그러므로 $P(3,5)$, $Q(5,3)$이고

$\overline{OP}\times\overline{OQ}=\sqrt{9+25}\times\sqrt{9+25}=34$이다.

21) [정답] ④

[해설] $B(2,\ 2)$, $E(2,\ k)$

$2\sqrt{x}=k$, $x=\dfrac{k^2}{4}$

$C\left(\dfrac{k^2}{4},\ k\right)$

$\sqrt{2x}=k$, $x=\dfrac{k^2}{2}$

$D\left(\dfrac{k^2}{2},\ k\right)$

$\overline{ED}=4\overline{CE}$

$\dfrac{k^2}{2}-2=4\left(2-\dfrac{k^2}{4}\right)$

$k^2=\dfrac{20}{3}$

$\therefore k=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

$S=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{3}-2\right)$

$\quad =\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{3}-2\right)=\dfrac{8\sqrt{15}-24}{9}$

$\therefore 9S=8\sqrt{15}-24$

22) [정답] ③

[해설] 정사각형 $PRQS$의 넓이가 최소인 경우는

점 P에서의 접선의 기울기가 1일 때이므로

점 P에서의 접선의 방정식을 $y=x+k$라 하자.

(단, k는 실수)

$x+k=\sqrt{x-2}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$이고,

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)=0$이어야 한다.

$\therefore k=-\frac{7}{4}$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-\frac{7}{4}$이고,

이때 접점의 좌표는 $P\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$이다.

또한, 점 P와 Q는 직선 $y=x$에 대하여

대칭이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$이다.

선분 PQ의 길이는 $\frac{7}{4}\sqrt{2}$이므로

정사각형 $PRQS$의 한 변의 길이는 $\frac{7}{4}$이다.

따라서 정사각형 $PRQS$의 둘레의 길이는

$\frac{7}{4}\times 4=7$이다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574