

### 2-3.여러 가지 방정식과 부등식

2-3-1.삼차방정식과 사차방정식\_천재(이준열)



내 교과서 속 문제를 실제 기출과 유사 변형하여 구성한 단원별 족보



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

- 1) 제작연월일 : 2020-03-05
- 2) 제작자 : 교육지대㈜
- 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호 되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무 단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

# 개념check

### [삼·사차방정식의 풀이]

- •인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한 후 방정식의 해를 구한 다
- 공통부분이 있으면 그것을 하나의 문자로 치환하여 인수분해한 후 방정식의 해를 구한다.

#### [삼차방정식의 근과 계수와의 관계]

삼차방정식  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (a, b, c, d는 상수,  $a \neq 0$ )의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라 하면

$$\bullet \ \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \ \alpha \beta + \beta \gamma + \gamma \alpha = \frac{c}{a}, \ \alpha \beta \gamma = -\frac{d}{a}$$

기본문제

[예제]

- **1.** 방정식  $x^4 5x^2 + 4 = 0$ 을 풀었을 때 해가 아닌 것은?
  - ① x = 1
- ② x = -1
- (3) x = 2
- (4) x = 3
- (5) x = -2

[문제]

- **2.** 삼차방정식  $x^3 + ax^2 2x 8 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 실수 a의 값은?
  - $\bigcirc -5$
- ② -3
- (3) -1
- **4**) 1

(5) 3

[문제]

- **3.** 방정식  $x^4 16 = 0$ 을 풀었을 때 해가 아닌 것은?
  - $\bigcirc$  2

 $\bigcirc -2$ 

- $\Im i$
- (4) 2*i*
- (5) 2i

[예제]

- **4.** 방정식  $x^4 x^3 4x^2 + 2x + 4 = 0$ 을 풀었을 때 해 가 아닌 것은?
  - $\bigcirc -2$
- 2 2
- $\sqrt{2}$
- $\bigcirc 4 \sqrt{2}$
- (5) -1

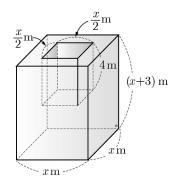
- [문제]
- **5.** 방정식  $x^4 4x^3 + 12x 9 = 0$ 을 풀었을 때 해가 아닌 것은?
  - ①  $\sqrt{3}$
- ②  $-\sqrt{3}$
- 3 3
- (4) 1
- $\bigcirc$  -1

[예제]

- 6. 어느 자동차 회사에서는 직육면체 모양의 적재함을 생산하는데, 이 적재함의 가로, 세로의 길이는 각각 2.5 m, 6.3 m이고, 높이는 x m이고 x가 삼차방정식  $2x^3-7x^2+2x+3=0$ 의 한 근일 때, 적재함의 높이는? (단, 높이는 가로의 길이보다 길다.)
  - ① 3 m
- ②  $\frac{7}{2}$  m
- 3 4 m
- $\frac{9}{2}$  m
- ⑤ 5 m

[문제]

7. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 모두 x m이고 높이가 (x+3) m인 직육면체가 있다. 이 직육면체에 가로, 세로의 길이가 모두  $\frac{x}{2}$  m이고 높이가 4 m인 직육면체 모양의 구멍을 팠더니 남은 부분의 부피가 16 m3가 되었다고 할 때, x의 값은?



1

②  $\frac{5}{4}$ 

- $3\frac{3}{2}$
- $4 \frac{7}{4}$

⑤ 2

평가문제

[소단원 확인 문제]

- **8.** 방정식  $x^4 + 3x^3 + 2x^2 2x 4 = 0$ 을 풀었을 때 해 가 아닌 것은?
  - ① 1
- ② 1+i
- 3 1 + i
- (4) -1-i
- (5) 2

[소단원 확인 문제]

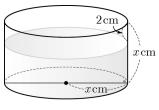
- **9.** 삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx 8 = 0$ 의 한 근이 -2i 일 때, 실수 a, b의 값에 대하여 a + b의 값은?
  - $\bigcirc -2$
- ② 0
- 3 2
- 4
- **⑤** 6

[소단원 확인 문제]

- **10.** 사차방정식  $x^4 x^3 + 7x^2 9x 18 = 0$ 의 두 허근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?
  - (1) 2
- 2 8
- 3 18
- (4) -32
- $\bigcirc 50$

[소단원 확인 문제]

**11.** 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이와 높이 가 모두 x cm인 원기둥 모양의 그릇에  $75\pi$  cm<sup>3</sup>의 물을 부었더니 그릇의 위에서부터 2 cm 만큼이 채워지지 않았을 때, x의 값은?



① 2

② 3④ 5

- 3 4

**⑤** 6

[중단원 연습 문제]

**12.** 방정식  $2x^4-5x^2+2=0$ 을 풀었을 때 해가 아닌 것은?

① 
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

② 
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4 \sqrt{2}$$

(5)  $-\sqrt{2}$ 

[중단원 연습 문제]

- **13.** 방정식  $(x^2+1)^2-2(x^2+1)-15=0$ 을 풀었을 때해가 아닌 것은?
  - ① 2
- 32i
- 4 i

#### [중단원 연습 문제]

- **14.** 삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 한 근이 2+i일 때, 실수 a, b에 대하여 a+b의 값은?
  - $\bigcirc -2$
- (3) 0
- **4** 1
- ⑤ 2

### [중단원 연습 문제]

- **15.** 삼차방정식  $x^3 2x^2 + (k-3)x + k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?
  - ①  $k \leq \frac{4}{9}$
- ②  $k \ge \frac{4}{9}$
- $3 k \leq \frac{9}{4}$
- $4 k \ge \frac{9}{4}$

#### [중단원 연습 문제]

- **16.** 사차식  $x^4 + ax^2 + b$ 가 이차식  $(x-1)(x+\sqrt{2})$ 로 나누어떨어질 때, 사차방정식  $x^4 + bx^2 + a = 0$ 의 근이 아닌 것은? (단, a, b는 실수)
  - ①  $\sqrt{3}i$
- ②  $-\sqrt{3}i$
- ③ 1
- $\bigcirc$  -1

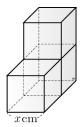
(5) 2

#### [중단원 연습 문제]

- **17.** 방정식  $x^3+1=0$ 의 한 허근을  $\omega$ 라고 할 때,  $\omega+\frac{1}{\omega}-\omega^2-\frac{1}{\omega^2}$ 의 값을 구하시오.
  - $\bigcirc -1$
- ② 0
- 3 1
- **4** 2
- ⑤ 3

#### [중단원 연습 문제]

**18.** 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체 세 개를 쌓아 만든 도형의 부피가  $A \text{ cm}^3$ , 겉넓이가  $B \text{ cm}^2$ 이다. 5A-2B=8일 때, x의 값은?



- ①  $\frac{3}{2}$
- ②  $\frac{7}{4}$

- 3 2
- $4 \frac{9}{4}$
- $(5) \frac{5}{2}$

### [대단원 종합 문제]

- **19.** 이차방정식  $x^2+x+2=0$ 의 두 근이 모두 삼차방 정식  $x^3+ax^2+bx+6=0$ 의 근일 때, a+b의 값은? (단, a, b는 실수)
  - ① 13
- ② 11
- 3 9
- (4) 7

(5) 5

- [대단원 종합 문제]
- **20.** 사차방정식  $x^4 + 3x^3 + 2x^2 2x 4 = 0$ 의 두 실근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라고 할 때,  $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값은?
  - $\bigcirc -5$
- (2) 6
- (3) 7
- $\bigcirc -8$
- (5) 9

### [대단원 종합 문제]

- **21.** 삼차방정식  $x^3 2x^2 + kx 2k = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?
  - $\bigcirc -3$
- $\bigcirc -4$
- 3 5
- $\bigcirc 4 6$
- (5) 7

# 

#### 정답 및 해설

# 1) [정답] ④

[해설] 
$$x^2 = X$$
로 놓으면 주어진 방정식은 
$$X^2 - 5X + 4 = 0, \ (X - 1)(X - 4) = 0$$
 
$$X = 1 \ \text{또는} \ X = 4,$$
 즉  $x^2 = 1 \ \text{또는} \ x^2 = 4$  
$$x = \pm 1 \ \text{또는} \ x = \pm 2$$

#### 2) [정답] ④

### 3) [정답] ③

[해설] 
$$x^2 = X$$
로 놓으면 주어진 방정식은  $X^2 - 16 = 0$ ,  $(X+4)(X-4) = 0$   $X = -4$  또는  $X = 4$ , 즉  $x^2 = -4$  또는  $x^2 = 4$   $x = \pm 2i$  또는  $x = \pm 2$ 

### 4) [정답] ①

수분해하면

[해설] 
$$P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 4$$
라고 하면  $P(-1) = 0$ ,  $P(2) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여  $x+1$ ,  $x-2$ 는 다항식  $P(x)$ 의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 다항식  $P(x)$ 를 인

# 5) [정답] ⑤

[해설] 
$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x - 9$$
라고 하면  $P(1) = 0$ ,  $P(3) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여  $x - 1$ ,  $x - 3$ 은 다항식  $P(x)$ 의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 다항식  $P(x)$ 를 인수분해하면

$$P(x) = (x-1)(x-3)(x^2-3)$$
  
즉, 주어진 방정식은  $(x-1)(x-3)(x^2-3) = 0$   
 $x=1$  또는  $x=3$  또는  $x=\pm\sqrt{3}$ 

### 6) [정답] ①

[해설] 
$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$$
이라고 하면 
$$P(1) = 0$$
이므로 인수정리에 의하여  $x-1$ 은 다항 식  $P(x)$ 의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인수분해하면

$$P(x) = (x-1)(2x^2 - 5x - 3)$$
  
즉, 주어진 방정식은  $(x-1)(2x^2 - 5x - 3) = 0$   
 $(x-1)(x-3)(2x+1) = 0$   
 $x = 1$  또는  $x = 3$  또는  $x = -\frac{1}{2}$ 

그런데 x > 2.5이므로 적재함의 높이는 3 m이다.

#### 7) [정답] ⑤

[해설] 가로, 세로의 길이가 모두 
$$x$$
 m이고 높이가  $(x+3)$  m인 직육면체의 부피는  $x \times x \times (x+3) = x^3 + 3x^2$ 

가로, 세로의 길이가 모두 
$$\frac{x}{2}$$
 m이고 높이가  $4$ 

m인 직육면체 모양의 구멍의 부피는

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{2} \times 4 = x^2$$

$$(x^3+3x^2)-x^2=x^3+2x^2=16$$

$$= x^3 + 2x^2 = 16, \quad x^3 + 2x^2 - 16 = 0$$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 16$$
이라고 하면

P(2) = 0이므로 인수정리에 의하여 x-2은 다항 식 P(x)의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인수분해하면

$$P(x) = (x-2)(x^2+4x+8)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2+4x+8)=0$$

따라서 x는 1보다 큰 실수이므로 x=2

### 8) [정답] ②

[해설]  $P(x)=x^4+3x^3+2x^2-2x-4$ 라고 하면  $P(1)=0,\ P(-2)=0$ 이므로 인수정리에 의하여  $x-1,\ x+2$ 는 다항식 P(x)의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인수분해하면

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+2x+2)$$
  
즉, 주어진 방정식은  $(x-1)(x+2)(x^2+2x+2) = 0$   
따라서  $x=1$  또는  $x=-2$  또는  $x=-1\pm i$ 

### 9) [정답] ③

[해설]  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ 라고 하면 P(x)의 한 근이 -2i이므로 켤레근인 2i도 삼차 방정식의 해이다.  $(x+2i)(x-2i) = x^2 - (2i)^2 = x^2 + 4$  즉 P(x)는  $x^2 + 4$ 를 인수로 가진다. 상수인 c에 대하여 P(x)의  $x^3$ 의 계수가 1이므로  $P(x) = (x^2 + 4)(x - c)$ 라고 하면  $(x^2 + 4)(x - c) = x^3 - cx^2 + 4x - 4c$ 이고 P(x)의 상수항이 -8이므로 c = 2이다. 따라서  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ 이므로 a = -2, b = 4이고 a + b = 2

#### 10) [정답] ③

[해설]  $P(x)=x^4-x^3+7x^2-9x-18$ 이라고 하면 P(-1)=0, P(2)=0이므로 인수정리에 의하여 x+1, x-2는 다항식 P(x)의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인수부해하면

 $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+9)$ 즉, 주어진 방정식은  $(x+1)(x-2)(x^2+9) = 0$ x = -1 또는 x = 2 또는  $x = \pm 3i$ 따라서 두 허근은 3i 또는 -3i이고  $\alpha^2 + \beta^2 = (3i)^2 + (-3i)^2 = -9 - 9 = -18$ 

### 11) [정답] ④

수분해하면

[해설] 그릇에 채워진 물의 부피는  $\pi\times x\times x\times (x-2)=(x^3-2x^2)\pi=75\pi$  즉  $x^3-2x^2-75=0$   $P(x)=x^3-2x^2-75$ 라고 하면 P(5)=0이므로 인수정리에 의하여 x-5는 다항식 P(x)의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인

 $P(x) = (x-5)(x^2+3x+15)$ 즉, 주어진 방정식은  $(x-5)(x^2+3x+15) = 0$ 

따라서 x=5 또는  $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{51}}{2}i$ 이므로 실수 x의 값은 5

### 12) [정답] ③

[해설]  $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은  $2X^2-5X+2=0, \ (2X-1)(X-2)=0$   $X=\frac{1}{2} \ \text{또는 } X=2,$  즉  $x^2=\frac{1}{2} \ \text{또는 } x^2=2$   $x=\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{또는 } x=\pm \sqrt{2}$ 

### 13) [정답] ④

[해설]  $x^2+1=X$ 로 놓고 좌변을 인수분해하면  $X^2-2X-15=0$ , (X-5)(X+3)=0 X=5 또는 X=-3 이때,  $X=x^2+1$ 이므로  $x^2+1=5$  또는  $x^2+1=-3$  즉  $x^2-4=0$  또는  $x^2+4=0$  (x-2)(x+2)=0 또는 (x-2i)(x+2i)=0 따라서 주어진 방정식의 근은  $x=\pm 2$  또는  $x=\pm 2i$ 

#### 14) [정답] ①

[해설]  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ 라고 하면 P(x)의 한 근이 2+i이므로 켤레근인 2-i도 삼 차방정식의 해이다.  $\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}=x^2-4x+2^2-i^2$  $=x^2-4x+5$ 즉 P(x)는  $x^2-4x+5$ 를 인수로 가진다. 상수인 c에 대하여 P(x)의  $x^3$ 의 계수가 1이므로  $P(x)=(x^2-4x+5)(x-c)$ 라고 하면  $(x^2-4x+5)(x-c)=x^3-(c+4)x^2+(4c+5)x-5c$ 

이고

P(x)의 상수항이 5이므로 c=-1이다. 따라서  $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ 이므로 a = -3, b = 1이고 a + b = -2

# 15) [정답] ③

[해설]  $P(x) = x^3 - 2x^2 + (k-3)x + k$ 라고하면 P(-1) = 0이므로 x + 1을 인수로 가진다.  $x^3-2x^2+(k-3)x+k=(x+1)(x^2-3x+k)$ 이차방정식  $x^2-3x+k=0$ 의 판별식을 D라고 하 면 실근을 가져야하므로  $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times k = -4k + 9 \ge 0$ 따라서  $k \leq \frac{9}{4}$ 

#### 16) [정답] ⑤

[해설]  $P(x) = x^4 + ax^2 + b$ 라고 하면 P(x)가 이차식  $(x-1)(x+\sqrt{2})$ 로 나누어떨어지 므로 x=1,  $x=-\sqrt{2}$ 를 근으로 가진다.  $x=-\sqrt{2}$ 를 근으로 가지므로 켤레근  $x=\sqrt{2}$ 도 근으로 가진다. 상수인 c에 대하여  $x^4$ 의 계수가 1이므로  $P(x) = (x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-c)$  $=x^4-(c+1)x^3+(c-2)x^2+(2c+2)x-2c$  $x^3$ 의 계수와 x의 계수가 0이므로 c=-1

즉  $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ 이므로 a = -3, b = 2 $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$  에서  $x^2 = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은  $X^2+2X-3=0$ , (X+3)(X-1)=0 $X = -3 \, \, \pm \frac{1}{2} \, \, X = 1$ 즉  $x^2 = -3$  또는  $x^2 = 1$  $x = \pm \sqrt{3}i$   $\mathfrak{L} = \pm 1$ 

#### 17) [정답] ④

[해설]  $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로  $\omega^2 - \omega + 1 = 0$ 양변을  $\omega$ 로 나누면  $\omega-1+\frac{1}{\omega}=0$ , 즉  $\omega+\frac{1}{\omega}=1$  $\omega + \frac{1}{\omega} = 1$ 이므로  $\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} = 1$ ,  $\stackrel{\sim}{\neg} \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = -1$ 따라서  $\omega + \frac{1}{\omega} - \omega^2 - \frac{1}{\omega^2} = 1 - (-1) = 2$ 

#### 18) [정답] ③

[해설] 정육면체 하나의 부피는  $x^3$ 이므로  $A=3x^3$ 앞쪽과 뒤쪽에 보이는 도형의 겉넓이는  $2x^2 + 2x^2 = 4x^2$ 왼쪽과 오른쪽에 보이는 도형의 겉넓이는

$$3x^2 + 3x^2 = 6x^2$$

위쪽과 아래쪽에 보이는 도형의 겉넓이는

$$2x^2 + 2x^2 = 4x^2$$

$$rac{\Delta}{2}$$
  $B = 14x^2$ 

5A-2B=8에서  $A=3x^3$ .  $B=14x^2$ 이므로

$$15x^3 - 28x^2 - 8 = 0$$

 $P(x) = 15x^3 - 28x^2 - 8$ 이라고 하면

P(2) = 0이므로 인수정리에 의하여 x-2는 다항 식 P(x)의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인 수분해하면

 $P(x) = (x-2)(15x^2+2x+4)$ 

즉. 주어진 방정식은

$$(x-2)(15x^2+2x+4) = 0$$

한편  $15x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 15 \times 4 = -59 < 0$$

따라서 실근 x=2

### 19) [정답] ③

[해설]  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ 이라고 하면

P(x)는  $x^2 + x + 2$ 를 인수로 가진다.

상수인 c에 대하여 P(x)의  $x^3$ 의 계수가 1이므로

$$P(x) = (x^2 + x + 2)(x - c)$$
라고 하면

 $(x^2+x+2)(x-c) = x^3+(1-c)x^2+(2-c)x-2c$ 

P(x)의 상수항이 6이므로 c=-3이다.

따라서  $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ 이므로

a = 4. b = 5이고 a + b = 9

#### 20) [정답] ③

[해설]  $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ 라고 하면

P(1) = 0, P(-2) = 0이므로 인수정리에 의하여 x-1, x+2는 다항식 P(x)의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 다항식 P(x)를 인 수분해하면

 $P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+2x+2)$ 즉, 주어진 방정식은  $(x-1)(x+2)(x^2+2x+2)=0$  $x = 1 + x = -2 + x = -1 \pm i$ 따라서 실근은 1, -2이므로

$$1^3 + (-2)^3 = -7$$

- 21) [정답] ②
- [해설]  $P(x) = x^3 2x^2 + kx 2k$ 라고 하면

$$P(2) = 0$$
이므로

$$P(x) = (x-2)(x^2+k)$$

즉, 주어진 방정식은  $(x-2)(x^2+k)=0$ 

$$x-2=0$$
 또는  $x^2+k=0$ 

주어진 삼차방정식이 중근을 가지려면

x=2가 중근이거나  $x^2+k=0$ 이 중근을 가지면 된다.

(i) x=2가 중근일 때,

x=2가  $x^2+k=0$ 의 근이어야 하므로

$$4+k=0$$
,  $k=-4$ 

(ii)  $x^2 + k = 0$ 이 중근을 가질 때,

이차방정식  $x^2+k=0$ 의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4} = 0^2 - 1 \times k = -k = 0, \ k = 0$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

-4+0=-4