## 01 삼각부등식의 풀이

**1. 삼각부등식**
: 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식

**2. 삼각부등식의 풀이**

(1) $\sin x > k$ (또는 $\cos x > k$ 또는 $\tan x > k$)꼴의 부등식
: 함수 $y=\sin x$( 또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표를 이용하여 삼각함수의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위를 구한다.

(2) $\sin x < k$ (또는 $\cos x < k$ 또는 $\tan x < k$)꼴의 부등식
: 함수 $y=\sin x$( 또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표를 이용하여 삼각함수의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위를 구한다.

◪ $0 \le x < 2\pi$**일 때, 다음 부등식을 풀어라.**

**1.** $2\cos x + 1 \ge 0$

**2.** $\sqrt{2}\cos x + 1 \le 0$

**3.** $\sin x > \frac{1}{2}$

**4.** $2\cos x \ge \sqrt{3}$

**5.** $\sqrt{2}\cos x \le -1$

**6.** $\tan x > \sqrt{3}$

**7.** $2\cos x > -\sqrt{3}$

**8.** $2\sin x + 1 < 0$

**9.** $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**10.** $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**11.** $\sqrt{2}\sin x + 1 < 0$

**12.** $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

**13.** $\cos x < -\frac{1}{2}$



I410-ECN-0199-2019-001-000244110

**14.** $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

**15.** $\sqrt{3}\tan x+1\leq 0$

**16.** $\sin x>\cos x$

**17.** $\sin x\geq\cos x$

**18.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**19.** $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{2}$

**20.** $-\cos^2 x-\sin x+1\leq 0$

**21.** $2\sin^2 x-3\cos x\geq 0$

**22.** $2\cos^2 x-3\sin x<0$

**23.** $-2\cos^2 x-3\sin x+3\leq 0$

**24.** $2\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\leq 0$

**25.** $\sin^2 x-\frac{1}{2}\geq 0$

**26.** $\sin^2 x-\frac{1}{4}\leq 0$

**27.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cos x+3}$

◪ 주어진 범위에서 다음 부등식을 풀어라.

**28.** $\tan x < 1 \quad (0 \le x < \pi)$

**29.** $\cos x \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (-\pi \le x < \pi)$

**30.** $\tan x - \sqrt{3} \le 0 \quad \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

**31.** $-\sqrt{3} < \tan x < 1 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

**32.** $3\tan^2 x - 1 > 0 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

**33.** $\cos x \le \sqrt{3}\sin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

**34.** $\dfrac{1}{2} \le \cos x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \le x \le \pi)$

**35.** $\cos x + \sin x < 0 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

**36.** $2\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 3\sin x - 2 \le 0 \quad (0 \le x < 2\pi)$

**37.** $2\sin^2\left(x + \dfrac{3}{2}\pi\right) + 3\sin x - 3 \ge 0 \quad (0 \le x < \pi)$

**38.** $\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\sin x - 1 \ge 0 \quad (0 < x \le 2\pi)$

**39.** $2\sin^2 x - 3\cos x < 0 \quad (0 \le x \le \pi)$

**40.** $-2\sin^2 x + 3\cos x + 3 \ge 0 \quad (-\pi < x < \pi)$

**41.** $-2\cos^2 x + \sin x + 2 \le 0 \quad (0 < x \le 2\pi)$

**42.** $(\sin x+\cos x)(\sin x-\sqrt{3}\cos x)<0\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

**43.** $\cos x \le \sin x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

◪ 다음 물음에 답하여라.

**44.** $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $2\sin^2 x-3\cos x \ge 0$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하여라.

**45.** $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $2\sin x+1>0$을 만족시키는 모든 $x$의 값의 범위가 $0 \le x < \alpha$ 또는 $\beta < x < 2\pi$일 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하여라.

**46.** $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $2\cos x-\sqrt{3}<0$의 해가 $\alpha < x < \beta$이다. $\frac{1}{\tan(\beta-\alpha)}$의 값을 구하여라.

**47.** $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $\sin x \le -\frac{1}{4}$을 만족하는 $x$값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\cos\frac{\alpha+\beta}{4}$의 값을 구하여라.

**48.** $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $5\sin\frac{x}{2} \ge 3$을 만족시키는 $x$값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)$의 값을 구하여라.

**49.** $0 \le \theta \le 2\pi$일 때, $\sin\theta \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족하는 $\theta$의 범위가 $\alpha \le \theta \le \beta$일 때 단위원에서 $\beta-\alpha$를 중심각으로 하는 부채꼴의 넓이를 구하여라.

**50.** $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $4\cos x \le -3$을 만족시키는 $x$의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$의 값을 구하여라.

**51.** $0 < x < 2\pi$에서 부등식 $2\cos 2x < -1$을 만족시키는 $x$의 값의 범위가 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$일 때, $\tan\left(\frac{a+b}{6}\right) \times \sin\left(\frac{c+d}{9}\right)$의 값을 구하여라. (단, $b<c$)

◪ 다음 물음에 답하여라.

**52.** 부등식 $\cos^2\theta - 4\sin\theta \le 2a$가 모든 실수 $\theta$에 대하여 항상 성립하도록 하는 실수 $a$의 최솟값을 구하여라.

**53.** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^2 - 2x\cos\theta + \sin\theta + 1 > 0$이 성립할 때, $\theta$의 값을 구하여라. (단, $0 \le \theta < 2\pi$이다.)

**54.** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^2 + 2\cos\theta x + 3\cos\theta > 0$이 항상 성립하도록 하는 $\theta$의 값의 범위를 구하여라. (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

**55.** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^2 - (2\cos\theta - 1)x + 1 > 0$이 성립하도록 하는 $\theta$의 값의 범위를 구하여라. (단, $\pi < \theta < 2\pi$)

**56.** 모든 실수 $\theta$에 대하여 부등식 $\cos^2\theta - 4\sin\theta \le 5k$가 항상 성립할 때, 실수 $k$의 최솟값을 구하여라.

**57.** 모든 실수 $x$에 대해 $x^2 + 2\sqrt{2}x\cos\theta - 3\sin\theta > 0$이 성립할 때, $\theta$의 범위를 구하여라. (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

**58.** 모든 실수 $\theta$에 대하여 부등식 $\sin^2\theta - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \le 5k$가 항상 성립할 때, 실수 $k$의 최솟값을 구하여라.

**59.** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^2 - 2(2\sin\theta + 1)x + 4 > 0$이 성립하도록 하는 $\theta$의 값의 범위를 구하여라. (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

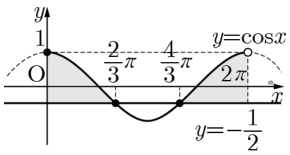
**60.** 모든 실수 $x$에 대하여 $\sin^2 x + (a+2)\cos x - (2a+1) > 0$이 성립하도록 하는 정수 $a$의 최댓값을 구하여라.

## 정답 및 해설

1) $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

⇨ $2\cos x + 1 \ge 0$ 에서 $\cos x \ge -\frac{1}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$




함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$와 만나거나 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위는

$0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

2) $\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$

⇨ $\sqrt{2}\cos x + 1 \le 0$, $\cos x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$

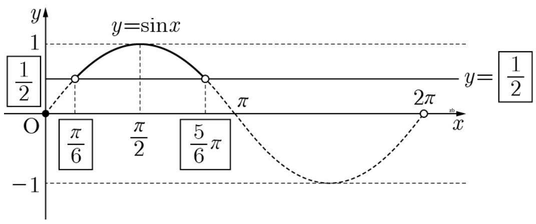
$\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$

3) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

⇨ 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$의 해는 $0 \le x < 2\pi$에서

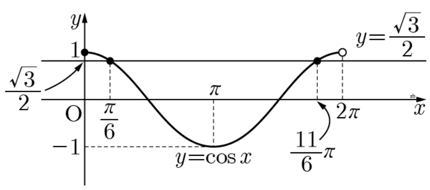
$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

$\sin x > \frac{1}{2}$의 해는 그림에서 $y = \sin x$의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$




4) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \le x < 2\pi$

⇨ $2\cos x \ge \sqrt{3}$ 에서 $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$



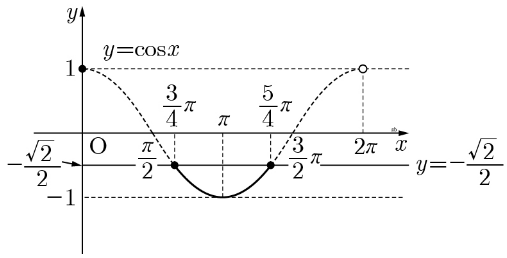

따라서 주어진 부등식의 해는 $y = \cos x$의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \le x < 2\pi$

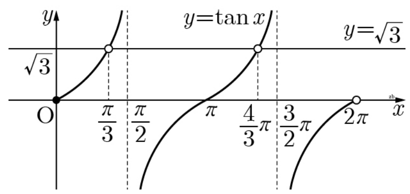
5) $\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$

⇨ 방정식 $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $0 \le x < 2\pi$에서 $x = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

$\sqrt{2}\cos x \le -1$, 즉 $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 그림에서 $y = \cos x$의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$




6) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

⇨ 


주어진 부등식의 해는 $y = \tan x$의 그래프가 직선 $y = \sqrt{3}$보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

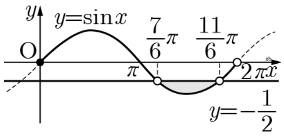
7) $0 \le x < \frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < 2\pi$

⇨ $2\cos x > -\sqrt{3}$, $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \le x < \frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < 2\pi$

8) $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

⇨ $2\sin x + 1 < 0$에서 $\sin x < -\frac{1}{2}$




$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

9) $0\le x<\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$

⇨ $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$인 $x$를 찾으면 $x=\frac{3}{4}\pi$와 $x=\frac{5}{4}\pi$이다. 이 사이 범위에서 $\cos x$는 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 작아지므로 이를 제외한 범위인 $0\le x<\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$에서 $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

10) $\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$

⇨ $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고,

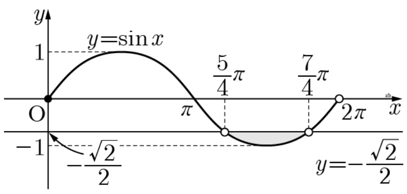
주어진 부등식은 $\cos t\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$

그림에서 $t$의 값의 범위는 $\frac{3}{4}\pi\le t\le\frac{5}{4}\pi$이므로

$\frac{3}{4}\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{4}\pi$ $\quad\therefore\ \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$

11) $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

⇨ $\sqrt{2}\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

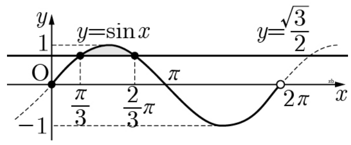



따라서 주어진 부등식의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

12) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$

⇨ $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나거나 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위는 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$



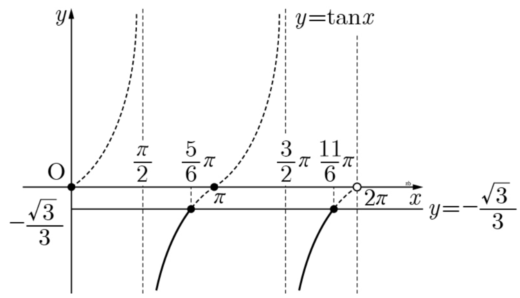

13) $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$

14) $\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3\pi}{2}$

15) $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x\le\frac{11}{6}\pi$

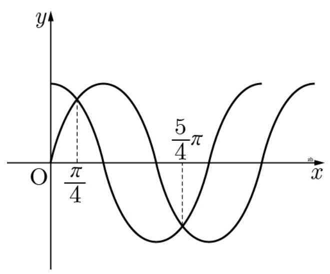
⇨ 방정식 $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

$\sqrt{3}\tan x+1\le0$, 즉 $\tan x\le-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 그림에서 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x\le\frac{11}{6}\pi$

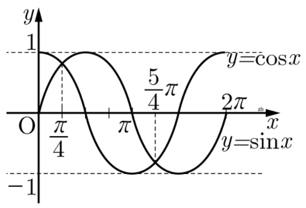



16) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$

⇨ $y=\sin x$와 $y=\cos x$를 그래프로 나타내어 $\sin x>\cos x$인 $x$를 찾으면 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$




17) $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$

⇨ 


$\sin x \ge \cos x$를 만족하는 $x$의 범위는

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$이다.

18) $\frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$

⇨ $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

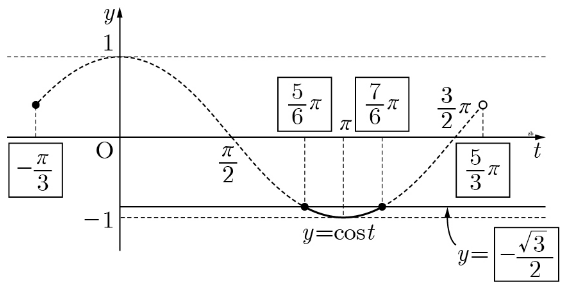
$x-\frac{\pi}{3}=t$로 치환하면 $\cos t \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$0 \le x < 2\pi$이므로 $-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{5}{3}\pi$ …… ㉡

한편, 방정식 $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 ㉡에서

$t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{6}\pi$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y=\cos t$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 $t$의 값의 범위이므로 $\frac{5}{6}\pi \le t \le \frac{7}{6}\pi$




$\frac{5}{6}\pi \le x-\frac{\pi}{3} \le \frac{7}{6}\pi$ $\quad\therefore \frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$

19) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{7}{12}\pi$

⇨ $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

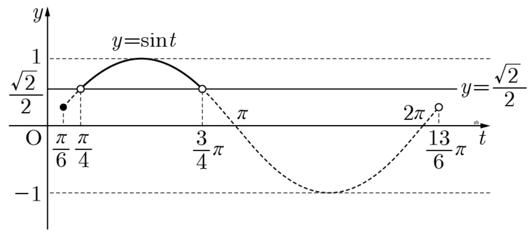
$x+\frac{\pi}{6}=t$로 치환하면 $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉠

$0 \le x < 2\pi$이므로 $\frac{\pi}{6} \le t < \frac{13}{6}\pi$ ……㉡

한편, 방정식 $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 ㉡에서

$t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{3}{4}\pi$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y=\sin t$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 부분의 $t$의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{3}{4}\pi$




$\frac{\pi}{4} < x+\frac{\pi}{6} < \frac{3}{4}\pi$ $\quad\therefore \frac{\pi}{12} < x < \frac{7}{12}\pi$

20) $0 \le x \le \pi$

⇨ $-\cos^2 x - \sin x + 1 \le 0$에서 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$이므로

$\sin^2 x - \sin x \le 0$ $\quad\therefore \sin x(\sin x - 1) \le 0$

즉, $0 \le \sin x \le 1$이므로 $0 \le x \le \pi$

21) $\frac{1}{3}\pi \le x \le \frac{5}{3}\pi$

22) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

⇨ $2\cos^2 x - 3\sin x < 0$에서 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$이므로 $-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 < 0$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$

$\therefore 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 2) > 0$

즉, $\sin x > \frac{1}{2}$ ($\because \sin x + 2 > 0$)이므로

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

23) $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$

⇨ $-2\cos^2 x - 3\sin x + 3 \le 0$에서 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$이므로

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \le 0$, $2(\sin x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \le 0$

따라서 $\frac{1}{2} \le \sin x \le 1$이므로 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$

24) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi \le x < 2\pi$

25) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{7}{4}\pi$

⇨ $\sin^2 x - \frac{1}{2} \ge 0$에서

$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ge 0$

즉, $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{7}{4}\pi$

26) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$

또는 $\frac{11}{6}\pi \le x < 2\pi$

⇨ $\sin^2 x - \frac{1}{4} \le 0$에서 $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \le 0$에서 $-\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{1}{2}$이므로

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$

또는 $\frac{11}{6}\pi \le x < 2\pi$

27) $\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi$

⇨ $2\sin^2 x \ge 3\cos x + 3$

$2(1-\cos^2 x) \ge 3\cos x + 3$

$-2\cos^2 x - 3\cos x - 1 \ge 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 \le 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) \le 0$

$-1 \le \cos x \le -\frac{1}{2}$

$\cos x \le -\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$

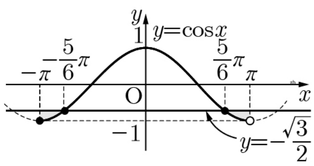
28) $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

29) $-\pi \le x \le -\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \le x < \pi$

⇨ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $x = -\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

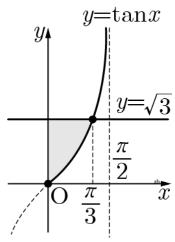
함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나거나 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위는

$-\pi \le x \le -\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \le x < \pi$




30) $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

⇨ $\tan x = \sqrt{3}$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$




함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = \sqrt{3}$과 만나거나 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위는 $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

31) $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{4}$

⇨ 주어진 범위 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$에서

$\tan x > -\sqrt{3}$ 이려면 $x > -\frac{\pi}{3}$

$\tan x < 1$이려면 $x < \frac{\pi}{4}$

$\therefore -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{4}$

32) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

⇨ $3\tan^2 x - 1 > 0$ 에서

$3\left(\tan x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$

따라서 $\tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

33) $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2}$

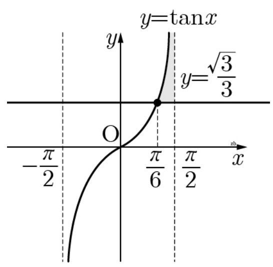
⇨ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos x \ne 0$

$\cos x \le \sqrt{3}\sin x$ 에서

$1 \le \frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x}$ $\quad \therefore \tan x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$

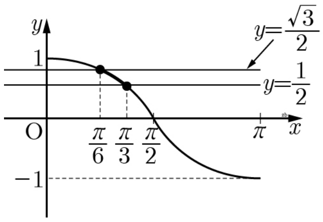
$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $x = \frac{\pi}{6}$

함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$과 만나거나 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위는 $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2}$



34) $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$

⇨ $0 \le x \le \pi$일 때, $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$인 $x$는 각각 $\frac{\pi}{3}$ , $\frac{\pi}{6}$이므로 이를 그래프로 나타내면




따라서 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$이다.

35) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$

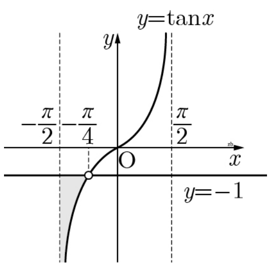
⇨ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos x \ne 0$

$\cos x + \sin x < 0$ 에서

$1 + \frac{\sin x}{\cos x} < 0$ $\quad\therefore\ \tan x < -1$

$\tan x = -1$ 에서 $x = -\frac{\pi}{4}$

함수 $y = \tan x$의 그래프가 직선 $y = -1$의 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위는 $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$




36) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \le x < 2\pi$

⇨ $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$이므로

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \le 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) \le 0$

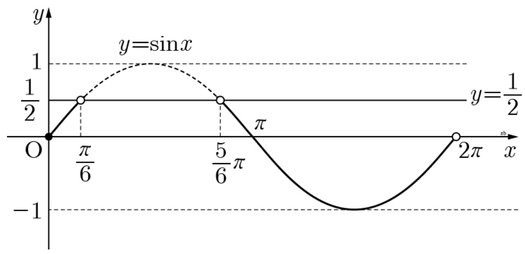
그런데 $\sin x + 2 > 0$이므로

$2\sin x - 1 \le 0$ $\quad\therefore\ \sin x \le \frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$의 해는 $0 \le x < 2\pi$에서

$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y = \sin x$의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \le x < 2\pi$




37) $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$

⇨ $\sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos x$이므로 주어진 부등식은

$2(-\cos x)^2 + 3\sin x - 3 \ge 0$

$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 \ge 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \le 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) \le 0$

$\therefore\ \frac{1}{2} \le \sin x \le 1$

따라서 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$

38) $\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \le x \le 2\pi$

⇨ $(1 - \sin^2 x) - \frac{1}{2}\sin x - 1 \ge 0$

$-\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x \ge 0$, $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x \le 0$

$\sin x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \le 0$

$-\frac{1}{2} \le \sin x \le 0$

$\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \le x \le 2\pi$

39) $0 \le x < \frac{\pi}{3}$

⇨ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이므로

$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x < 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 2) > 0$

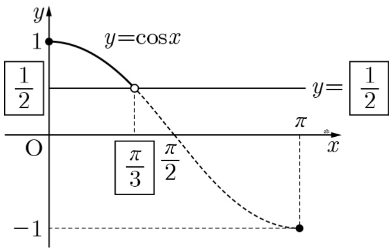
그런데 $\cos x + 2 > 0$이므로 $2\cos x - 1 > 0$

$\therefore\ \cos x > \frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 방정식 $\cos x = \frac{1}{2}$의 해는 $0 \le x \le \pi$에서

$x = \frac{\pi}{3}$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y = \cos x$의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 $0 \le x < \frac{\pi}{3}$




40) $-\dfrac{2}{3}\pi \le x \le \dfrac{2}{3}\pi$

⇨ $-2\sin^2 x+3\cos x+3 \ge 0$ 에서 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ 이므로

$2\cos^2 x+3\cos x+1 \ge 0$,

$2(\cos x+1)\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)\ge 0$

따라서 $\cos x \le -1$ 또는 $\cos x \ge -\dfrac{1}{2}$ 이므로

$-\dfrac{2}{3}\pi \le x \le \dfrac{2}{3}\pi$

41) $\pi \le x \le \dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{11}{6}\pi \le x \le 2\pi$

⇨ $-2\cos^2 x+\sin x+2 \le 0$ 에서 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 이므로

$2\sin^2 x+\sin x \le 0$, $2\sin x\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)\le 0$

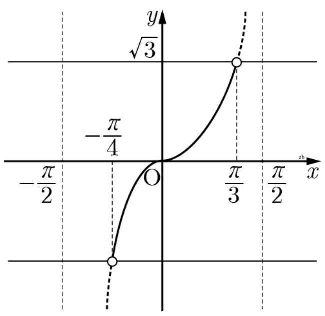
따라서 $-\dfrac{1}{2}\le \sin x \le 0$이므로

$\pi \le x \le \dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{11}{6}\pi \le x \le 2\pi$

42) $-\dfrac{\pi}{4}< x < \dfrac{\pi}{3}$

⇨ $-\dfrac{\pi}{2}< x < \dfrac{\pi}{2}$일 때, $\cos^2 x>0$이므로 주어진 식의 양변을 $\cos^2 x$로 나누면

$(\tan x+1)(\tan x-\sqrt{3})<0$ $\quad\therefore -1<\tan x<\sqrt{3}$




따라서 만족하는 해는 $-\dfrac{\pi}{4}< x < \dfrac{\pi}{3}$이다.

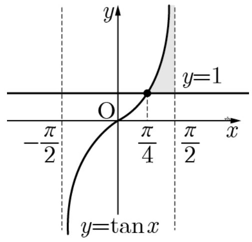
43) $\dfrac{\pi}{4}\le x < \dfrac{\pi}{2}$

⇨ $-\dfrac{\pi}{2}< x < \dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$ 이므로

$\cos x \le \sin x$ 의 양변을 $\cos x$ 로 나누면

$1 \le \tan x$

$\tan x=1$ 에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$




함수 $y=\tan x$ 의 그래프가 직선 $y=1$과 만나거나 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위는 $\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{\pi}{2}$

44) $-\dfrac{4}{3}\pi$

⇨ $2\sin^2 x-3\cos x \ge 0$

$2(1-\cos^2 x)-3\cos x \ge 0$

$2-2\cos^2 x-3\cos x \ge 0$

$2\cos^2 x+3\cos x-2 \le 0$

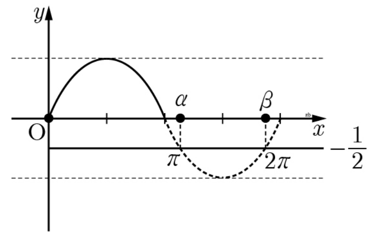
$(2\cos x-1)(\cos x+2) \le 0$

$-2 \le \cos x \le \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{3}\le x \le \dfrac{5}{3}\pi$

$\therefore\ \alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{4}{3}\pi$

45) $\dfrac{2}{3}\pi$

⇨ 


$\sin x>-\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 경우는 그래프에서

$\alpha=\pi+\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=2\pi-\dfrac{\pi}{6}$ $\qquad\therefore\ \beta-\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

46) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⇨ $2\cos x<\sqrt{3}$, $\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{11}{6}\pi$

$\beta-\alpha=\dfrac{10}{6}\pi=\dfrac{5}{3}\pi$

$\tan(\beta-\alpha)=\tan\dfrac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\tan(\beta-\alpha)}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

47) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

48) $-\dfrac{1}{2}$

⇨ $\sin\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{3}{5}$의 범위를 구하기 위해

$\sin k = \dfrac{3}{5}$을 만족한다 하면 $k \leq \dfrac{x}{2} \leq \pi - k$

$\therefore\ 2k \leq x \leq 2\pi - 2k$

$\therefore\ \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{3}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

49) $\dfrac{\pi}{6}$

50) 1

51) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $\cos 2x < -\dfrac{1}{2}$이고 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$이므로

이는 $\cos^2 x < \dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $-\dfrac{1}{2} < \cos\theta < \dfrac{1}{2}$이다.

이를 만족하는 $\theta$의 범위는 $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{2\pi}{3}$,

$\dfrac{4\pi}{3} < \theta < \dfrac{5\pi}{3}$이다.

따라서 $a = \dfrac{\pi}{3}$, $b = \dfrac{2\pi}{3}$, $c = \dfrac{4\pi}{3}$, $d = \dfrac{5\pi}{3}$이다.

$\tan\left(\dfrac{a+b}{6}\right) = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고

$\sin\left(\dfrac{c+d}{9}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{9}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$이다.

52) 2

⇨ $\cos^2\theta - 4\sin\theta \leq 2a$

$1 - \sin^2\theta - 4\sin\theta \leq 2a$

$y = 1 - \sin^2\theta - 4\sin\theta = -(\sin\theta + 2)^2 + 5$

$\sin\theta = t$라 하면 $-1 \leq t \leq 1$이고,

$t = -1$일 때, 최댓값이 4이므로

$4 \leq 2a \qquad \therefore\ 2 \leq a$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 2이다.

53) $0 < \theta < \pi$

⇨ 모든 실수에 대해 이차부등식이 성립하려면

$D/4 = \cos^2\theta - \sin\theta - 1 < 0$,

$1 - \sin^2\theta - \sin\theta - 1 < 0$

$\sin\theta(\sin\theta + 1) > 0$

$\therefore\ \sin\theta > 0$ 또는 $\sin\theta < -1$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$이므로 만족하는 $0 < \sin\theta \leq 1$이다.

따라서 $0 \leq \theta < 2\pi$에서 만족하는 각 $\theta$의 범위는 $0 < \theta < \pi$이다.

54) $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

⇨ $\dfrac{D}{4} = \cos^2\theta - 3\cos\theta < 0$

$\cos\theta(\cos\theta - 3) < 0$

$0 < \cos\theta < 3$

$0 < \cos\theta$

$\therefore\ 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

55) $\dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$

⇨ 주어진 부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하기 위해서 $D < 0$을 만족해야 한다.

$D = (2\cos\theta - 1)^2 - 4 < 0$

$4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 3 < 0$

$(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 3) < 0$

$-\dfrac{1}{2} < \cos\theta < \dfrac{3}{2}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2} < \cos\theta$

이때 $\pi < \theta < 2\pi$이므로 만족하는 $\theta$의 범위는

$\dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$

56) $\dfrac{4}{5}$

57) $\dfrac{7\pi}{6} < \theta < \dfrac{11\pi}{6}$

58) $\dfrac{4}{5}$

⇨ $\sin^2\theta - 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \leq 5k$

$\sin^2\theta - 4\cos\theta \leq 5k$, $1 - \cos^2\theta - 4\cos\theta \leq 5k$

$\cos^2\theta + 4\cos\theta \geq 1 - 5k$

$f(\theta) = \cos^2\theta + 4\cos\theta$라 하면

$f(\theta) = (\cos\theta + 2)^2 - 4 \ (-1 \leq \cos\theta \leq 1)$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$일 때, $f(\theta)$의 최솟값은 $\cos\theta = -1$일 때, $f(\theta) = -3$

즉 $1 - 5k \leq -3$, $5k \geq 4$이므로 $k \geq \dfrac{4}{5}$

따라서 $k$의 최솟값은 $\dfrac{4}{5}$이다.

59) $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

⇨ 모든 실수 $x$에서 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식 $x^2 - 2(2\sin\theta + 1)x + 4 = 0$이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D/4 = (2\sin\theta + 1)^2 - 4 < 0$

$4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$
$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$
$0\le\theta<2\pi$에서 $2\sin\theta+3>0$이므로 $2\sin\theta-1<0$
$\therefore\ \sin\theta<\frac{1}{2}$
따라서 만족하는 $\theta$값의 범위는 $0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$이다.

60) $-2$
⇨ $(1-\cos^2x)+(a+2)\cos x-(2a+1)>0$
$-\cos^2x+(a+2)\cos x-2a>0$
$\cos^2x-(a+2)\cos x+2a<0$
$(\cos x-a)(\cos x-2)<0$
이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 주어진 부등식이 항상 성립하기 위하여 $a<-1$
따라서 정수 $a$의 최댓값은 $-2$이다.