01 순환소수와 등비급수

등비급수를 이용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.
① 순환소수를 등비급수로 나타낸다.
② 첫째항 a와 공비 r를 구한다.
③ 등비급수의 합 $S=\dfrac{a}{1-r}$ 를 구한다.

◪ 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 기약분수로 나타내어라.

1. $0.\dot{3}$

2. $0.\dot{4}$

3. $0.\dot{5}$

4. $0.\dot{8}$

5. $0.\dot{9}$

6. $0.\dot{1}\dot{8}$

7. $0.\dot{2}\dot{1}$

8. $0.\dot{2}\dot{9}$

9. $0.\dot{3}\dot{0}$

10. $0.\dot{3}\dot{4}$

11. $0.\dot{4}\dot{5}$

12. $0.\dot{6}\dot{1}$

13. $0.\dot{7}\dot{3}$

14. $0.\dot{0}0\dot{4}$

15. $0.\dot{1}0\dot{9}$

16. $0.\dot{1}1\dot{5}$

17. $0.\dot{1}3\dot{7}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

18. $0.\dot{2}4\dot{6}$

19. $0.\dot{2}7\dot{2}$

20. $0.\dot{2}8\dot{1}$

21. $0.\dot{3}0\dot{9}$

22. $0.\dot{3}4\dot{1}$

23. $0.\dot{3}9\dot{5}$

24. $0.\dot{4}2\dot{3}$

25. $0.\dot{4}4\dot{7}$

26. $0.\dot{4}5\dot{6}$

27. $0.\dot{5}0\dot{5}$

28. $0.\dot{5}1\dot{8}$

29. $0.\dot{5}6\dot{9}$

30. $0.\dot{6}3\dot{4}$

31. $0.\dot{6}7\dot{1}$

32. $0.\dot{6}9\dot{5}$

33. $0.\dot{7}1\dot{4}$

34. $0.\dot{7}7\dot{3}$

35. $0.\dot{7}8\dot{2}$

36. $0.\dot{8}2\dot{6}$

37. $1.\dot{1}$

38. $1.\dot{2}\dot{5}$

39. $1.\dot{3}\dot{6}$

40. $1.\dot{9}\dot{4}$

41. $4.\dot{5}\dot{7}$

42. $6.\dot{9}\dot{3}$

43. $0.1\dot{2}\dot{9}$

44. $0.2\dot{3}\dot{1}$

45. $0.6\dot{2}\dot{9}$

02 도형과 등비급수

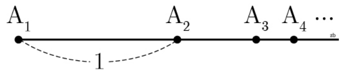
닮은 꼴이 무한히 반복되는 그림 문제는 등비급수를 이용하여 구할 수 있다.

① 닮음인 도형들에 대해서 첫 번째 도형, 두 번째 도형 사이의 규칙을 찾는다.

② ①에서 구한 규칙을 이용하여 등비급수의 첫째항 a, 공비 r를 구한다.

③ 등비급수의 합 $S=\dfrac{a}{1-r}$ 를 구한다.

◪ 수직선 위에 길이가 1인 선분 $\mathrm{A_1A_2}$를 $3:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{A_3}$, 선분 $\mathrm{A_2A_3}$을 $3:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{A_4}$, 선분 $\mathrm{A_3A_4}$를 $3:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{A_5}$라 하자. 이와 같은 방법으로 $\mathrm{A_6}$, $\mathrm{A_7}$, $\cdots$을 한없이 만들 때, 다음 값을 구하여라.



46. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 길이를 a_n이라 할 때, a_1의 값

47. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$의 값

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$의 값

◪ 수직선 위에 길이가 1인 선분 $\mathrm{A_1A_2}$를 $4:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{A_3}$, 선분 $\mathrm{A_2A_3}$을 $4:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{A_4}$, 선분 $\mathrm{A_3A_4}$를 $4:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{A_5}$라 하자. 이와 같은 방법으로 $\mathrm{A_6}$, $\mathrm{A_7}$, $\cdots$을 한없이 만들 때, 다음 값을 구하여라.

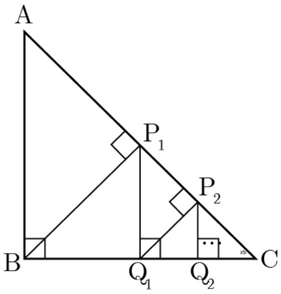
49. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 길이를 a_n이라 할 때, a_1의 값

50. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$의 값

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$의 값

◪ 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$ 인 직각이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 P_1, 점 P_1에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1에서 변 AC에 내린 수선의 발을 P_2, 점 P_2에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q_2라 한다. 이와 같이 계속할 때, 다음 값을 구하여라.

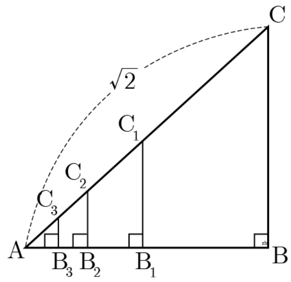


52. $\overline{P_nQ_n}=a_n$이라 할 때, a_1의 값

53. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nQ_n}$의 값

◪ 다음 그림과 같이 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 B_1, C_1이라 하고, 다시 삼각형 AB_1C_1에서 $\overline{AB_1}$, $\overline{AC_1}$의 중점을 각각 B_2, C_2라 한다. 이와 같이 계속하여 삼각형 AB_nC_n에서 $\overline{AB_n}$, $\overline{AC_n}$의 중점을 각각 B_{n+1}, C_{n+1}이라고 할 때, 다음 값을 구하여라.

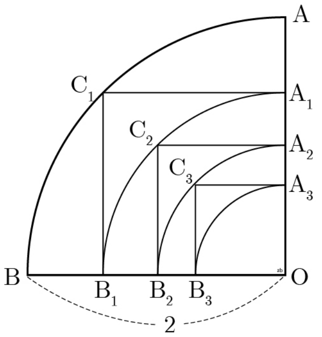


55. $\overline{B_nC_n}=a_n$이라 할 때, a_1의 값

56. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{B_nC_n}$의 값

◪ 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 사분원 OAB에 내접하는 정사각형 $OA_1C_1B_1$을 그리고, 사분원 OA_1B_1에 내접하는 정사각형 $OA_2C_2B_2$를 그린다. 이와 같은 과정을 반복하여 사분원에 내접하는 정사각형을 한없이 그려갈 때, 정사각형 $OA_nC_nB_n$의 넓이를 S_n이라고 하자. 다음 값을 구하여라.

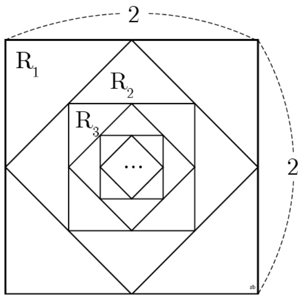


58. S_1의 값

59. $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$의 값

60. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값

◪ 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 R_1이 있다. R_1의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 R_2를 만들고, 또 R_2의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 R_3를 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 얻은 정사각형 R_n의 넓이를 S_n이라 하자. 다음 값을 구하여라.

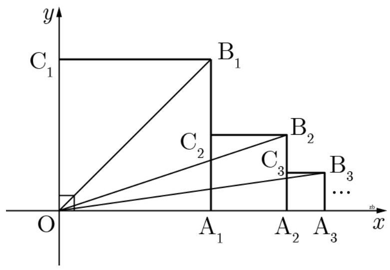


61. S_1의 값

62. $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$의 값

63. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값

◪ 다음 그림과 같이 좌표평면의 x축 위에 $\overline{OA_1}=1$, $\overline{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{A_2A_3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $\cdots$, $\overline{A_{n-1}A_n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\cdots$를 만족하는 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$에 대하여 제1사분면에 $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\cdots$를 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$, $\cdots$를 계속하여 만든다. 다음 물음에 답하여라.

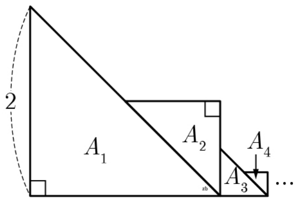


64. 점 A_n의 좌표를 $(x_n, 0)$이라 할 때, 수열 $\{x_n\}$의 일반항

65. 점 B_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 할 때, 수열 $\{y_n\}$의 일반항

66. 삼각형 OA_nB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값

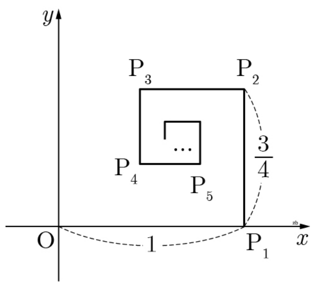
◪ 다음 그림은 높이가 2인 직각이등변삼각형 A_1에서 시작하여 변의 길이를 반으로 줄인 직각이등변삼각형을 계속 그려 나간 것이다. 다음 물음에 답하여라.



67. 삼각형 A_1, A_2, A_3의 넓이

68. 삼각형 A_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값

◪ 다음 그림과 같이 원점 O에서 수평으로 1만큼 오른쪽으로 간 점을 P_1, P_1에서 수직으로 직선 거리 $\frac{3}{4}$만큼 위로 간 점을 P_2, P_2에서 수평으로 직선 거리 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$만큼 왼쪽으로 간 점을 P_3이라고 한다. 이와 같이 계속할 때, 다음 값을 구하여라.



69. 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값

70. 점 P_n의 y좌표를 y_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} y_n$의 값

71. 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표

◪ 어느 공장에서 만든 알루미늄 캔은 생산량의 75%가 수거되고 그중 80%가 재활용되며, 재활용된 알루미늄 캔의 75%가 수거되고 그중 80%가 다시 재활용된다고 한다. 이와 같은 재활용 과정이 반복된다고 할 때, 이 공장에서 처음 생산된 알루미늄 캔 1톤에 대하여 다음 물음에 답하여라.

72. n번째 재활용되는 알루미늄 캔의 무게 a_n을 구하여라.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 구하여라.

정답 및 해설

1) $\frac{1}{3}$

⇨ $0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots$

$=\frac{0.3}{1-0.1}=\frac{0.3}{0.9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

2) $\frac{4}{9}$

⇨ $0.\dot{4}=0.4+0.04+0.004+\cdots$

$=\frac{0.4}{1-0.1}=\frac{0.4}{0.9}=\frac{4}{9}$

3) $\frac{5}{9}$

⇨ $0.\dot{5}=0.5+0.05+0.005+\cdots$

$=\frac{0.5}{1-0.1}=\frac{0.5}{0.9}=\frac{5}{9}$

4) $\frac{8}{9}$

⇨ $0.\dot{8}=0.8+0.08+0.008+\cdots$

$=\frac{0.8}{1-0.1}=\frac{0.8}{0.9}=\frac{8}{9}$

5) 1

⇨ $0.\dot{9}=0.9+0.09+0.009+\cdots$

$=\frac{0.9}{1-0.1}=\frac{0.9}{0.9}=1$

6) $\frac{2}{11}$

⇨ $0.\dot{1}\dot{8}=0.18+0.0018+0.000018+\cdots$

$=\frac{18}{10^2}+\frac{18}{10^4}+\frac{18}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{18}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$

7) $\frac{7}{33}$

⇨ $0.\dot{2}\dot{1}=0.21+0.0021+0.000021+\cdots$

$=\frac{21}{10^2}+\frac{21}{10^4}+\frac{21}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{21}{99}=\frac{7}{33}$

8) $\frac{29}{99}$

⇨ $0.\dot{2}\dot{9}=0.29+0.0029+0.000029+\cdots$

$=\frac{29}{10^2}+\frac{29}{10^4}+\frac{29}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{29}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{29}{99}$

9) $\frac{10}{33}$

⇨ $0.\dot{3}\dot{0}=0.30+0.0030+0.000030+\cdots$

$=\frac{30}{10^2}+\frac{30}{10^4}+\frac{30}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{30}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{30}{99}=\frac{10}{33}$

10) $\frac{34}{99}$

⇨ $0.\dot{3}\dot{4}=0.34+0.0034+0.000034+\cdots$

$=\frac{34}{10^2}+\frac{34}{10^4}+\frac{34}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{34}{99}$

11) $\frac{5}{11}$

⇨ $0.\dot{4}\dot{5}=0.45+0.0045+0.000045+\cdots$

$=\frac{45}{10^2}+\frac{45}{10^4}+\frac{45}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$

12) $\frac{61}{99}$

⇨ $0.\dot{6}\dot{1}=0.61+0.0061+0.000061+\cdots$

$=\frac{61}{10^2}+\frac{61}{10^4}+\frac{61}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{61}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{61}{99}$

13) $\frac{73}{99}$

⇨ $0.\dot{7}\dot{3}=0.73+0.0073+0.000073+\cdots$

$=\frac{73}{10^2}+\frac{73}{10^4}+\frac{73}{10^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{73}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{73}{99}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

14) $\frac{4}{999}$

⇨ $0.\dot{0}0\dot{4}=0.004+0.000004+0.000000004+\cdots$

$=\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^6}+\frac{4}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{4}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{4}{999}$

15) $\frac{109}{999}$

⇨ $0.\dot{1}0\dot{9}=0.109+0.000109+0.000000109+\cdots$

$=\frac{109}{10^3}+\frac{109}{10^6}+\frac{109}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{109}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{109}{999}$

16) $\frac{115}{999}$

⇨ $0.\dot{1}1\dot{5}=0.115+0.000115+0.000000115+\cdots$

$=\frac{115}{10^3}+\frac{115}{10^6}+\frac{115}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{115}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{115}{999}$

17) $\frac{137}{999}$

⇨ $0.\dot{1}3\dot{7}=0.137+0.000137+0.000000137+\cdots$

$=\frac{137}{10^3}+\frac{137}{10^6}+\frac{137}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{137}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{137}{999}$

18) $\frac{82}{333}$

⇨ $0.\dot{2}4\dot{6}=0.246+0.000246+0.000000246+\cdots$

$=\frac{246}{10^3}+\frac{246}{10^6}+\frac{246}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{246}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{246}{999}=\frac{82}{333}$

19) $\frac{272}{999}$

⇨ $0.\dot{2}7\dot{2}=0.272+0.000272+0.000000272+\cdots$

$=\frac{272}{10^3}+\frac{272}{10^6}+\frac{272}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{272}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{272}{999}$

20) $\frac{281}{999}$

⇨ $0.\dot{2}8\dot{1}=0.281+0.000281+0.000000281+\cdots$

$=\frac{281}{10^3}+\frac{281}{10^6}+\frac{281}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{281}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{281}{999}$

21) $\frac{103}{333}$

⇨ $0.\dot{3}0\dot{9}=0.309+0.000309+0.000000309+\cdots$

$=\frac{309}{10^3}+\frac{309}{10^6}+\frac{309}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{309}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{309}{999}=\frac{103}{333}$

22) $\frac{341}{999}$

⇨ $0.\dot{3}4\dot{1}=0.341+0.000341+0.000000341+\cdots$

$=\frac{341}{10^3}+\frac{341}{10^6}+\frac{341}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{341}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{341}{999}$

23) $\frac{395}{999}$

⇨ $0.\dot{3}9\dot{5}=0.395+0.000395+0.000000395+\cdots$

$=\frac{395}{10^3}+\frac{395}{10^6}+\frac{395}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{395}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{395}{999}$

24) $\frac{47}{111}$

⇨ $0.\dot{4}2\dot{3}=0.423+0.000423+0.000000423+\cdots$

$=\frac{423}{10^3}+\frac{423}{10^6}+\frac{423}{10^9}+\cdots$

$=\frac{\frac{423}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{423}{999}=\frac{47}{111}$

25) $\frac{149}{333}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$\Rightarrow\ 0.\dot{4}4\dot{7}=0.447+0.000447+0.000000447+\cdots$

$=\dfrac{447}{10^3}+\dfrac{447}{10^6}+\dfrac{447}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{447}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{447}{999}=\dfrac{149}{333}$

26) $\dfrac{152}{333}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{4}5\dot{6}=0.456+0.000456+0.000000456+\cdots$

$=\dfrac{456}{10^3}+\dfrac{456}{10^6}+\dfrac{456}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{456}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{456}{999}=\dfrac{152}{333}$

27) $\dfrac{505}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{5}0\dot{5}=0.505+0.000505+0.000000505+\cdots$

$=\dfrac{505}{10^3}+\dfrac{505}{10^6}+\dfrac{505}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{505}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{505}{999}$

28) $\dfrac{14}{27}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{5}1\dot{8}=0.518+0.000518+0.000000518+\cdots$

$=\dfrac{518}{10^3}+\dfrac{518}{10^6}+\dfrac{518}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{518}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{518}{999}=\dfrac{14}{27}$

29) $\dfrac{569}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{5}6\dot{9}=0.569+0.000569+0.000000569+\cdots$

$=\dfrac{569}{10^3}+\dfrac{569}{10^6}+\dfrac{569}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{569}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{569}{999}$

30) $\dfrac{634}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{6}3\dot{4}=0.634+0.000634+0.000000634+\cdots$

$=\dfrac{634}{10^3}+\dfrac{634}{10^6}+\dfrac{634}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{634}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{634}{999}$

31) $\dfrac{671}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{6}7\dot{1}=0.671+0.000671+0.000000671+\cdots$

$=\dfrac{671}{10^3}+\dfrac{671}{10^6}+\dfrac{671}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{671}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{671}{999}$

32) $\dfrac{695}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{6}9\dot{5}=0.695+0.000695+0.000000695+\cdots$

$=\dfrac{695}{10^3}+\dfrac{695}{10^6}+\dfrac{695}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{695}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{695}{999}$

33) $\dfrac{238}{333}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{7}1\dot{4}=0.714+0.000714+0.000000714+\cdots$

$=\dfrac{714}{10^3}+\dfrac{714}{10^6}+\dfrac{714}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{714}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{714}{999}=\dfrac{238}{333}$

34) $\dfrac{773}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{7}7\dot{3}=0.773+0.000773+0.000000773+\cdots$

$=\dfrac{773}{10^3}+\dfrac{773}{10^6}+\dfrac{773}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{773}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{773}{999}$

35) $\dfrac{782}{999}$

$\Rightarrow\ 0.\dot{7}8\dot{2}=0.782+0.000782+0.000000782+\cdots$

$=\dfrac{782}{10^3}+\dfrac{782}{10^6}+\dfrac{782}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{782}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{782}{999}$

36) $\dfrac{826}{999}$

⇨ $0.\dot{8}2\dot{6}=0.826+0.000826+0.000000826+\cdots$

$=\dfrac{826}{10^3}+\dfrac{826}{10^6}+\dfrac{826}{10^9}+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{826}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{826}{999}$

37) $\dfrac{10}{9}$

⇨ $1.\dot{1}=1+0.1+0.01+0.001+\cdots$

$=1+\dfrac{0.1}{1-0.1}=1+\dfrac{0.1}{0.9}=1+\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}$

38) $\dfrac{124}{99}$

⇨ $1.\dot{2}\dot{5}=1+0.25+0.0025+0.000025+\cdots$

$=1+\dfrac{0.25}{1-0.01}=1+\dfrac{0.25}{0.99}=1+\dfrac{25}{99}=\dfrac{124}{99}$

39) $\dfrac{15}{11}$

⇨ $1.\dot{3}\dot{6}=1+0.36+0.0036+0.000036+\cdots$

$=1+\dfrac{0.36}{1-0.01}=1+\dfrac{0.36}{0.99}$

$=\dfrac{135}{99}=\dfrac{15}{11}$

40) $\dfrac{193}{99}$

⇨ $1.\dot{9}\dot{4}=1+0.94+0.0094+0.000094+\cdots$

$=1+\dfrac{0.94}{1-0.01}=1+\dfrac{0.94}{0.99}\ =\dfrac{193}{99}$

41) $\dfrac{151}{33}$

⇨ $4.\dot{5}\dot{7}=4+0.57+0.0057+0.000057+\cdots$

$=4+\dfrac{0.57}{1-0.01}=4+\dfrac{0.57}{0.99}\ =\dfrac{453}{99}=\dfrac{151}{33}$

42) $\dfrac{229}{33}$

⇨ $6.\dot{9}\dot{3}=6+0.93+0.0093+0.000093+\cdots$

$=6+\dfrac{0.93}{1-0.01}=6+\dfrac{0.93}{0.99}\ =\dfrac{687}{99}=\dfrac{229}{33}$

43) $\dfrac{128}{990}$

⇨ $0.1\dot{2}\dot{9}=0.1+0.029+0.00029+0.0000029+\cdots$

$=\dfrac{1}{10}+\left(\dfrac{29}{10^3}+\dfrac{29}{10^5}+\dfrac{29}{10^7}+\cdots\right)$

$=\dfrac{1}{10}+\dfrac{\dfrac{29}{1000}}{1-\dfrac{1}{100}}\ =\dfrac{1}{10}+\dfrac{29}{990}=\dfrac{128}{990}$

44) $\dfrac{229}{990}$

⇨ $0.2\dot{3}\dot{1}=0.2+0.031+0.00031+0.0000031+\cdots$

$=\dfrac{2}{10}+\left(\dfrac{31}{10^3}+\dfrac{31}{10^5}+\dfrac{31}{10^7}+\cdots\right)$

$=\dfrac{2}{10}+\dfrac{\dfrac{31}{1000}}{1-\dfrac{1}{100}}$

$=\dfrac{2}{10}+\dfrac{31}{990}=\dfrac{229}{990}$

45) $\dfrac{623}{990}$

⇨ $0.6\dot{2}\dot{9}=0.6+0.029+0.00029+0.0000029+\cdots$

$=\dfrac{6}{10}+\left(\dfrac{29}{10^3}+\dfrac{29}{10^5}+\dfrac{29}{10^7}+\cdots\right)$

$=\dfrac{6}{10}+\dfrac{\dfrac{29}{1000}}{1-\dfrac{1}{100}}$

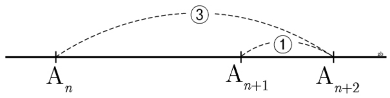
$=\dfrac{6}{10}+\dfrac{29}{990}=\dfrac{623}{990}$

46) 1

⇨ $a_1=\overline{A_1A_2}=1$

47) $\dfrac{1}{2}$

⇨ 선분 A_nA_{n+1}을 $3:1$로 외분하는 점을 A_{n+2}라고 하면 점 A_{n+2}는 다음과 같이 그려진다.



즉, $a_n:a_{n+1}=\overline{A_nA_{n+1}}:\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=2:1$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$

48) 2

⇨ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비급수이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

49) 1

⇨ $a_1=\overline{A_1A_2}=1$

50) $\dfrac{1}{3}$

⇨ $a_n:a_{n+1}=\overline{A_nA_{n+1}}:\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=3:1$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$

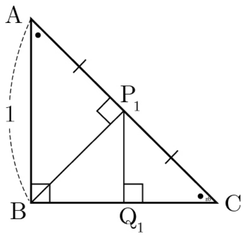
51) $\frac{3}{2}$

⇨ $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

52) $\frac{1}{2}$

⇨ 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발 P_1은 변 AC를 수직이등분한다.



이때 점 P_1에서 변 BC에 내린 수선의 발 Q_1에 대하여 삼각형 ABC와 삼각형 P_1Q_1C는 닮음이므로 두 도형의 닮음비는 $\overline{AC}:\overline{P_1C}=2:1$이다.

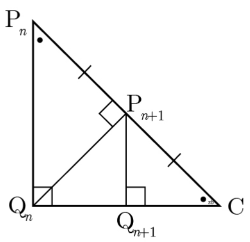
$a_1=\overline{P_1Q_1}$이므로 $\overline{AB}:\overline{P_1Q_1}=1:a_1=2:1$

즉, $2a_1=1$에서 $a_1=\frac{1}{2}$

53) $\frac{1}{2}$

⇨ 삼각형 P_nQ_nC와 삼각형 $P_{n+1}Q_{n+1}C$는 모두 직각이등변삼각형이므로 닮음이고, 두 도형의 닮음비는

$\overline{P_nC}:\overline{P_{n+1}C}=2:1$이다.



따라서 $a_n:a_{n+1}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=2:1$이므로

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$

54) 1

⇨ $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nQ_n}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nQ_n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

55) $\frac{1}{2}$

⇨ $\triangle AB_1C_1$에서 $\overline{AC_1}:\overline{B_1C_1}=\sqrt{2}:1$ 이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}:\overline{B_1C_1}=\sqrt{2}:1$

$\sqrt{2}\times\overline{B_1C_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore\ \overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}$

56) $\frac{1}{2}$

⇨ $a_n:a_{n+1}=\overline{B_nC_n}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}$

$=\overline{AC_n}:\overline{AC_{n+1}}=2:1$

이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$

57) 1

⇨ $\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$\overline{B_3C_3}=\frac{1}{2}\overline{B_2C_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\cdots$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\overline{B_nC_n}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

58) 2

⇨ $\overline{OC_1}=\overline{OA}=2$ 이므로 정사각형 $OA_1C_1B_1$에서

$\overline{OA_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OC_1}=\sqrt{2}$

$\therefore\ S_1=\square OA_1C_1B_1=(\sqrt{2})^2=2$

59) $\frac{1}{2}$

⇨ 정사각형 $OA_nC_nB_n$의 한 변의 길이를

$\overline{OA_n}=n$ 이라 하면 $S_n=n^2$

정사각형 $OA_{n+1}C_{n+1}B_{n+1}$의 한 변의 길이는

$\overline{OA_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}n$

이므로 $S_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}n\right)^2=\frac{1}{2}n^2$

$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{2}$

60) 4

⇨ $S_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

61) 4

⇨ 정사각형 R_1의 한 변의 길이가 2이므로

$S_1=2^2=4$

62) $\frac{1}{2}$

⇨ $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$ 이므로 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{2}$

63) 8

⇨ $S_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=4+2+1+\cdots=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$

64) $x_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⇨ $x_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

65) $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⇨ $y_n=\overline{A_nB_n}=\overline{A_{n-1}A_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

66) $\frac{4}{3}$

⇨ $S_n=\frac{1}{2}\times x_n\times y_n$

$=\frac{1}{2}\times\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

67) $A_1=2$, $A_2=\frac{1}{2}$, $A_3=\frac{1}{8}$

⇨ A_1의 넓이: $\frac{1}{2}\times 2^2=2$

A_2의 넓이: $\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$

A_3의 넓이: $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

68) $\frac{8}{3}$

⇨ 직각이등변삼각형 A_n의 넓이 a_n은

첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$

69) $\frac{16}{25}$

⇨ 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{16}{25}$

70) $\frac{12}{25}$

⇨ 점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}y_n=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$

$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{12}{25}$

71) $\left(\frac{16}{25},\frac{12}{25}\right)$

72) 0.6^n톤

⇨ 알루미늄 캔 1톤에 대하여 75%가 수거되고, 그 중 80%가 재활용되므로

$a_1=(1\times 0.75)\times 0.8=0.6$

$a_2=(a_1\times 0.75)\times 0.8=0.6^2$

⋮

따라서 $a_n=0.6^n$(톤)

73) 1.5톤

⇨ $\sum_{n=1}^{\infty}0.6^n=\frac{0.6}{1-0.6}=1.5$(톤)