



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-13

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 접선의 방정식함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때,
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서(1) 접선의 기울기 : $f'(a)$ (2) 접선의 방정식 : $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

■ 다음 곡선의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

1. $y=(x+2)^3(5x-3), (-1, -8)$

2. $y=xe^x, (1, e)$

3. $y=\frac{1}{2}\tan x, \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

4. $y=\sin x \cos x, \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

5. $y=\frac{\sin x}{1+\cos x} (-\pi < x < \pi), (0, 0)$

6. $y=e^x \cos x, (0, 1)$

7. $y=e^x \ln 2x, \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

02 / 접선의 방정식 구하는 방법**-(1) 접점의 좌표가 주어진 경우**접점의 좌표 $(a, f(a))$ 가 주어진 경우① 접선의 기울기 $f'(a)$ 를 구한다.② $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ 를 이용하여
접선의 방정식을 구한다.

■ 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

8. $y=\sqrt{x}, (4, 2)$

9. $y=\frac{1}{x-2}, (3, 1)$

10. $y=\sin x, (\pi, 0)$

11. $y=\sin x + \cos x, \left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

12. $y=\cos \pi x + x^2, (1, 0)$

13. $y = \frac{1}{2}e^{2x}, \left(0, \frac{1}{2}\right)$

14. $y = e^{x-1} + 1, (1, 2)$

15. $y = \ln 2x, (e, \ln 2 + 1)$

16. $y = \ln(x+1), (3, \ln 4)$

17. $y = x \ln x, (1, 0)$

18. $y = \ln x^2, (e, 2)$

19. $y = x - x \ln x, (e, 0)$

20. $y = \sqrt{2x} + \frac{6}{x}, (2, 5)$

▣ 다음 곡선 위의 주어진 점을 지나고 그 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

21. $y = 1 + \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

22. $y = x + \sin x, (2\pi, 2\pi)$

23. $y = x^2 \ln x, (e, e^2)$

24. $y = \frac{x}{x-1}, (2, 2)$

25. $y = x^3 e^{-2x}, \left(1, \frac{1}{e^2}\right)$

03 / 접선의 방정식 구하는 방법 -(2) 기울기가 주어진 경우

접선의 기울기 m 이 주어진 경우

(i) 접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 로 놓는다.

(ii) $f'(a) = m$ 임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

(iii) $y - f(a) = m(x - a)$ 를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

■ 다음 곡선에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식을 구하여라.

26. $y = -\frac{1}{x} \quad (x > 0), \quad m = 1$

27. $y = \sqrt{x+1}, \quad m = 1$

28. $y = \sqrt{2x-1} \left(x > \frac{1}{2} \right), \quad m = 2$

29. $y = \sqrt{2x-3} - 2, \quad m = 1$

30. $y = \ln(x+5), \quad m = \frac{1}{2}$

31. $y = \sqrt{2x}, \quad m = 4$

32. $y = e^x, \quad m = 1$

33. $y = e^{3x}, \quad m = 3$

34. $y = \cos 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right), \quad m = -1$

35. $y = \ln(x-1), \quad m = 2$

36. $y = 2\cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi), \quad m = 2$

37. $y = \ln x, \quad m = 1$

38. $y = x \ln x, \quad m = 2$

39. $y = \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right), \quad m = 2$

40. $y = x + \cos x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad m = 2$

41. $y = x^x (x > 0), \quad m = 0$

■ 다음 직선의 방정식을 구하여라.

42. 곡선 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 에 접하고 $x - 3y + 2 = 0$ 과 수직인 직선의 방정식 (단, $x > -1$)

43. 곡선 $y = \ln(3x+1)$ 에 접하고 직선 $y = 3x - 1$ 와 평행한 직선의 방정식 (단, $x > -\frac{1}{3}$)

44. 곡선 $y = x - \ln x$ 에 접하고 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 에 평행한 직선의 방정식

■ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

45. 곡선 $y = e^{x+1}$ 에 접하고 $x + 4y - 1 = 0$ 에 수직인 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 할 때, 상수 a, b 에 대하여 $4\ln a + b$ 의 값을 구하여라.

46. 직선 $y = 2x + a$ 가 곡선 $y = e^{2x}$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

47. 직선 $y = \frac{1}{e}x + 3$ 이 곡선 $y = \ln x + a$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

48. 직선 $y = x + a$ 가 곡선 $y = x + \sin x$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $0 \leq x \leq \pi$)

49. 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e, 1)$ 에서의 접선이 곡선 $y = x^2 + k$ 에 접할 때, 실수 k 의 값을 구하여라.

04

접선의 방정식 구하는 방법
-(3) 곡선밖의 한 점이 주어진 경우곡선 밖의 한 점 (x_1, y_1) 이 주어진 경우(i) 접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 로 놓는다.(ii) $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 에 점 (x_1, y_1) 를 대입하여 a 의 값을 구한다.(iii) a 의 값을 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

■ 주어진 점에서 다음 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

50. $y = \frac{1}{x}, (4, 0)$

51. $y = \sqrt{x-1}, (0, 0)$

52. $y = \sqrt{x-3}, (2, 0)$

53. $y = \ln x, (0, 0)$

54. $y = e^{-x}, (1, 0)$

55. $y = e^{x-1}, (1, 0)$

56. $y = \ln(x-2), (2, -1)$

57. $y = \ln(x-3), (3, 0)$

58. $y = \frac{\ln x}{x}, (0, 0)$

■ 다음 물음에 답하여라.

59. 원점에서 곡선 $y = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$ 에 그은 접선이 점 (e, a) 를 지날 때, a 의 값을 구하여라.

60. 점 $(0, 4)$ 에서 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 에 그은 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 할 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

61. 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y = (x-1)e^x$ 에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라고 할 때, $m_1 m_2$ 의 값을 구하여라.

05

매개변수/음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

1. 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 에서 $t=a$ 에 대응하는 점이 주어진 경우
 - (i) 접선의 기울기 $\frac{g'(a)}{f'(a)}$ 와 접점 $(f(a), g(a))$ 를 구한다.
 - (ii) $y-g(a)=\frac{g'(a)}{f'(a)}\{x-f(a)\}$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.
2. 곡선 $f(x, y)=0$ 위의 점 P가 주어진 경우
 - (i) 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.
 - (ii) (i)에서 구한 $\frac{dy}{dx}$ 에 점 P의 좌표를 대입하여 접선의 기울기를 구한다.
 - (iii) 점 P의 좌표와 (ii)에서 구한 기울기를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

■ 다음 곡선의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

62. $2x^3+xy^2=3e^{x-y}$, $(1, 1)$

63. $3x^2+4y^2=12$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

64. $x^3-xy^2=10$, $(-2, 3)$

65. $x \cos y + y \cos x + 2\pi = 0$, (π, π)

66. $e^{\sin x} \ln y = 1$, $(0, e)$

■ 다음 접선의 방정식을 구하여라.

67. 매개변수 t 로 나타낸 곡선 $x=\cos t$, $y=\sin 2t$ 에 대하여 $t=\frac{\pi}{6}$ 인 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

68. 매개변수 t 로 나타낸 곡선 $x=t^2-1$, $y=t+\frac{1}{t}$ 에 대하여 $t=2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

69. 매개변수 t 로 나타낸 곡선 $x=1+2t^2$, $y=t^3$ 에 대하여 $t=1$ 인 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

70. 평면 곡선 $x=\sec t$, $y=\tan t$ 위의 점 $(\sqrt{2}, 1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

71. 곡선 $x^2-y \ln x + ex - e = 0$ 위의 점 (e, e^2) 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

72. 곡선 $x^2-2xy-y^2+7=0$ 에 대하여 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

73. 곡선 $x = t^2 - 2t + 9$, $y = \frac{1}{3}t^3 + 5$ 에 대하여 $t = k$

에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y = 2x + 6$ 과 수직이 되도록 하는 모든 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

74. 매개변수로 나타낸 곡선 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 에 대하여

$t = \frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 곡선 위의 점에서의 접선의 방정

식이 $y = x + \sqrt{2}$ 이다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

75. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x = t^2 - 1, y = t + 1$ 에서 $t = 2$ 에 대응하는 점에서의 접선이 점 $(a, 2)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

76. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 매개변수로 나타낸 곡선

$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$ 에 직선 $2x + y = k$ 가 접한다. 이때, 상수 k 의 값을 구하여라.

77. 곡선 $x^2 + axy - y^2 + b = 0$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기가 1일 때, 상수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

78. 곡선 $ax^3 + y^5 + by = -2$ 위의 한 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

79. 곡선 $x^3 + y^3 + axy + b = 0$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{10}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

80. 곡선 $x^2 + y^2 + axy + b = 0$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서 접선의 기울기가 -4 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

81. 곡선 $2x^2 + 4y^2 + axy + b = 0$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 일 때, 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

82. 곡선 $x^3 + y^3 - axy + b = 0$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

83. 곡선 $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

06 두 곡선에 동시에 접하는 직선

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 $x=a$ 인 점에서 공통인 접선을 가지면

- (1) $x=a$ 에서의 함숫값이 같다. $\Rightarrow f(a)=g(a)$
 (2) $x=a$ 에서의 접선의 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(a)=g'(a)$

■ 다음 물음에 답하여라.

84. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x+3$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, g(3))$ 에서의 접선의 기울기를 구하여라.

85. 함수 $f(x)=x^3+2x+1$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$ 에서의 접선의 기울기를 구하여라.

86. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$ ($x>0$)의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^5, 5)$ 에서의 접선의 기울기를 구하여라.

87. $f(x)=\tan\pi x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.(단, $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$)

88. $f(x)=x^3+3x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

89. 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x+k$ 가 접할 때, 상수 k 의 값을 구하여라.(단, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$)

90. 두 곡선 $y=\frac{k}{x}$, $y=\ln x$ 가 서로 접할 때, 상수 k 의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) -19

$\Rightarrow y' = 3(x+2)^2(5x-3) + 5(x+2)^3$ 이므로
 $x = -1$ 일 때, 접선의 기울기는 $3 \cdot (-8) + 5 = -19$

2) $2e$

$\Rightarrow y' = e^x + xe^x$ 이므로 $x = 1$ 일 때 접선의 기울기는
 $e + e = 2e$

3) 1

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \sec^2 x$ 이므로 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서의 접선의 기울기
 는 $\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = 1$

4) $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y' = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $x = \frac{\pi}{6}$ 일 때, $y' = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

5) $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y' = \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$ 이므로 $x = 0$ 일 때,
 접선의 기울기는 $\frac{1 \times (1+1)}{2^2} = \frac{1}{2}$

6) 1

$\Rightarrow y' = e^x \cos x - e^x \sin x$ 이므로 점 $(0, 1)$ 에서의
 접선의 기울기는 $e^0(\cos 0 - \sin 0) = 1$ 이다.

7) $2\sqrt{e}$

$\Rightarrow y = e^x \ln 2x$ 를 미분하면 $y' = e^x \ln 2x + \frac{e^x}{x}$ 이므로
 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 접선의 기울기는 $e^{\frac{1}{2}} \ln 1 + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$

8) $y = \frac{1}{4}x + 1$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ 라고 하면
 $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(4) = \frac{1}{4}$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \therefore y = \frac{1}{4}x + 1$

9) $y = -x + 4$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-2}$ 이라 하면 $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$

점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(3) = -\frac{1}{(3-2)^2} = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 3) \therefore y = -x + 4$$

10) $y = -x + \pi$

$\Rightarrow f(x) = \sin x$ 라 하면 $f'(x) = \cos x$
 점 $(\pi, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\pi) = -1$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y - 0 = -(x - \pi) \therefore y = -x + \pi$

11) $y = -\sqrt{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

$\Rightarrow f(x) = \sin x + \cos x$ 라고 하면 $f'(x) = \cos x - \sin x$
 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos \frac{3}{4}\pi - \sin \frac{3}{4}\pi = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
 이므로 접선의 방정식은
 $y - 0 = (-\sqrt{2})\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) \therefore y = -\sqrt{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

12) $y = 2x - 2$

$\Rightarrow f(x) = \cos \pi x + x^2$ 이라 하면 $f'(x) = -\pi \sin \pi x + 2x$
 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$
 $y - 0 = 2(x - 1) \therefore y = 2x - 2$

13) $y = x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \times 2 = e^{2x}$
 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 1$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y - \frac{1}{2} = x - 0 \therefore y = x + \frac{1}{2}$

14) $y = x + 1$

$\Rightarrow f(x) = e^{x-1} + 1$ 이라고 하면 $f'(x) = e^{x-1}$
 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$
 이므로 접선의 방정식은
 $y - 2 = 1(x - 1) \therefore y = x + 1$

15) $y = \frac{1}{e}x + \ln 2$

$\Rightarrow f(x) = \ln 2x$ 라고 하면
 $f'(x) = (\ln 2x)' = (\ln 2 + \ln x)' = \frac{1}{x}$
 점 $(e, \ln 2 + 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(e) = \frac{1}{e}$
 이므로 접선의 방정식은
 $y - (\ln 2 + 1) = \frac{1}{e}(x - e), y = \frac{1}{e}x - 1 + \ln 2 + 1$

$$\therefore y = \frac{1}{e}x + \ln 2$$

$$16) y = \frac{1}{4}x + \ln 4 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(x+1) \text{ 이라고 하면 } f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

점 $(3, \ln 4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(3) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 4 = \frac{1}{4}(x-3) \therefore y = \frac{1}{4}x + \ln 4 - \frac{3}{4}$$

$$17) y = x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x \ln x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

점 $(1, 0)$ 에서 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$

$$y - 0 = 1 \times (x - 1) \therefore y = x - 1$$

$$18) y = \frac{2}{e}x$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln x^2 \text{ 이라 하면 } f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

점 $(e, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(e) = \frac{2}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{2}{e}(x - e) \therefore y = \frac{2}{e}x$$

$$19) y = -x + e$$

$$\Rightarrow f(x) = x - x \ln x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$$

점 $(e, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(e) = -1$

$$y - 0 = -(x - e) \therefore y = -x + e$$

$$20) y = -x + 7$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^2}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } y' = \frac{1}{2} - \frac{6}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } y = 2 + 3 = 5$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + 7$

$$21) y = x - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \cos x \text{ 라 하면 } f'(x) = -\sin x$$

점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 구하

는 직선의 방정식은 $y - 1 = 1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore y = x - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$22) y = -\frac{1}{2}x + 3\pi$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \sin x \text{ 라 하면 } f'(x) = 1 + \cos x$$

점 $(2\pi, 2\pi)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2\pi) = 2$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 직선의 방정식은 $y - 2\pi = -\frac{1}{2}(x - 2\pi)$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\pi$$

$$23) y = -\frac{1}{3e}x + e^2 + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \ln x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

점 (e, e^2) 에서의 접선의 기울기는

$$f'(e) = 2e \ln e + e = 3e$$

접선과 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$m \times 3e = -1 \therefore m = -\frac{1}{3e}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - e^2 = -\frac{1}{3e}(x - e)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3e}x + e^2 + \frac{1}{3}$$

$$24) y = x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} \text{ 이므로}$$

점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = -1$

따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로

$$\text{직선의 방정식은 } y - 2 = x - 2 \therefore y = x$$

$$25) y = -e^2x + e^2 + \frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 e^{-2x} \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-2x} - 2x^3 e^{-2x} = e^{-2x}(3x^2 - 2x^3)$$

점 $\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = \frac{1}{e^2}$

따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-e^2$ 이므로

$$y - \frac{1}{e^2} = -e^2(x - 1)$$

$$y = -e^2x + e^2 + \frac{1}{e^2}$$

$$26) y = x - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} \text{ 이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(a, -\frac{1}{a})$ 이라 하면 $f'(a) = 1$ 이므로

$$\frac{1}{a^2} = 1, a^2 = 1 \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

따라서 접점의 좌표가 $(1, -1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은 $y+1=x-1 \therefore y=x-2$

$$27) y = x + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{a+1})$ 이라 하면 $f'(a) = 1$ 이므로

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} = 1, \sqrt{a+1} = \frac{1}{2}$$

$$a+1 = \frac{1}{4} \therefore a = -\frac{3}{4}$$

따라서 접점의 좌표가 $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ 이므로 구하는 접

선의 방정식은 $y - \frac{1}{2} = x + \frac{3}{4} \therefore y = x + \frac{5}{4}$

$$28) y = 2x - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x-1} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$ 이므로

$$f'(a) = \frac{1}{\sqrt{2a-1}} = 2$$

$$\frac{1}{2a-1} = 4, 8a-4=1 \therefore a = \frac{5}{8}$$

$$\text{이때, } f(a) = f\left(\frac{5}{8}\right) = \sqrt{2 \times \frac{5}{8} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

접점의 좌표는 $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$

따라서 접선의 방정식은 $y - \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{5}{8}\right)$

$$\therefore y = 2x - \frac{3}{4}$$

$$29) y = x - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{2x-3}} = 1 \text{을 만족하는 } x = \frac{7}{2} \text{이므로}$$

점 $(\frac{7}{2}, 0)$ 을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식

은 $y = 1 \times \left(x - \frac{7}{2}\right) = x - \frac{7}{2}$ 이다.

$$30) y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \ln 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(x+5) \text{라고 하면 } f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

접점의 좌표를 $(a, \ln(a+5))$ 라고 하면

접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(a) = \frac{1}{a+5} = \frac{1}{2} \text{에서 } a = -3$$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, \ln 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x+3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \ln 2$$

$$31) y = 4x + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x} \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = \left((2x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{2a})$ 라고 하면

접선의 기울기가 4이므로

$$f'(a) = \frac{1}{\sqrt{2a}} = 4 \text{에서 } a = \frac{1}{32}$$

따라서 접점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{32}, \sqrt{2 \cdot \frac{1}{32}}\right) = \left(\frac{1}{32}, \frac{1}{4}\right) \text{이므로}$$

구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{4} = 4\left(x - \frac{1}{32}\right)$$

$$\therefore y = 4x + \frac{1}{8}$$

$$32) y = x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x \text{이라고 하면 } f'(x) = e^x$$

접점의 좌표를 (a, e^a) 이라고 하면 기울기가 1이므로 $f'(a) = e^a = 1$ 에서 $a = 0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, e^0) = (0, 1)$ 이므로

구하는 접선의 방정식은 $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$

$$\therefore y = x + 1$$

$$33) y = 3x + 1$$

$$\Rightarrow \text{접점을 } (t, e^{3t}) \text{라 하면 접선의 기울기가 3이므로}$$

$$f'(t) = 3e^{3t} = 3 \therefore t = 0$$

따라서 접점은 $(t, e^{3t}) = (0, 1)$ 이므로 접선의 방정

식은 $y = 3x + 1$ 이다.

$$34) y = -x + \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos 2x \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$$

접점의 좌표를 $(a, \cos 2a)$ 라고 하면

접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(a) = -2\sin 2a = -1 \text{에서}$$

$$\sin 2a = \frac{1}{2}, 2a = \frac{\pi}{6} \therefore a = \frac{\pi}{12}$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로

구하는 접선의 방정식은 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$

$$\therefore y = -x + \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$$

$$35) y = 2x - 3 - \ln 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(x-1) \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x-1}$$

접점의 좌표를 $(a, \ln(a-1))$ 이라 하면 $f'(a) = 2$ 이

$$\text{므로 } \frac{1}{a-1} = 2, a-1 = \frac{1}{2} \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, \ln \frac{1}{2}\right)$ 이므로 구하는 접

선의 방정식은 $y - \ln \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$\therefore y = 2x - 3 - \ln 2$$

$$36) y = 2x - 3\pi$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\cos x \text{라 하면 } f'(x) = -2\sin x$$

접점의 좌표를 $(a, 2\cos a)$ 라 하면 $f'(a) = 2$ 이므로

$$-2\sin a = 2, \sin a = -1 \therefore a = \frac{3}{2}\pi (\because 0 \leq a \leq 2\pi)$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ 이므로 구하는 접선

$$\text{의 방정식은 } y - 0 = 2\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \therefore y = 2x - 3\pi$$

$$37) y = x - 1$$

\Rightarrow 접점을 $(t, \ln t)$ 라 하면 접선의 기울기는 접점에서 미분계수와 같으므로

$$1 = y' = \frac{1}{t} \therefore t = 1$$

이때, 접점은 $(1, 0)$ 이 되므로 접선의 방정식은 $y = x - 1$ 이다.

$$38) y = 2x - e$$

$$\Rightarrow f(x) = x \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

접점의 좌표를 $(a, a \ln a)$ 라 하면 $f'(a) = 2$ 이므로

$$\ln a + 1 = 2, \ln a = 1 \therefore a = e$$

따라서 접점의 좌표가 (e, e) 이므로 구하는 접선의 방정식은 $y - e = 2(x - e) \therefore y = 2x - e$

$$39) y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \tan x \text{라 하면 } f'(x) = \sec^2 x$$

접점의 좌표를 $(a, \tan a)$ 라 하면 $f'(a) = 2$ 이므로

$$\sec^2 a = 2, \sec a = \pm \sqrt{2} \therefore a = \frac{\pi}{4} (\because 0 < a < \frac{\pi}{2})$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 이므로 구하는 접선

의 방정식은

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \therefore y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$40) y = 2x + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \cos x \text{라 하면 } f'(x) = 1 - \sin x$$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$ 이므로

$$f'(a) = 1 - \sin a = 2$$

$$\sin a = -1 \therefore a = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{이때, } f(a) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ 이므}$$

로 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 접선의 방정식은

$$y - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left\{x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \therefore y = 2x + \frac{\pi}{2}$$

$$41) y = e^{-e^{-1}}$$

$$\Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ 일 때, } x = \frac{1}{e} \text{ 이고, } y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)}$$

$$\text{따라서 접선의 방정식은 } y = e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{-e^{-1}}$$

$$42) y = -3x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)$ 이다.

이 접선과 수직인 직선 $x - 3y + 2 = 0$ 의 기울기는 $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ 에서 $\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 직선의 기울기는 -3 이다.

$$\text{즉 } f'(a) = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} = -3, a^2 + 2a = -3(a+1)^2$$

$$4a^2 + 8a + 3 = 0, (2a+1)(2a+3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} (\because a > -1)$$

$$\text{이때, } f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 접점의}$$

$$\text{좌표는 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -3\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \therefore y = -3x - 1$$

$$43) y = 3x$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(3x+1) \text{라 하면 } f'(x) = \frac{3}{3x+1}$$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)$ 이다.

이 접선과 평행한 직선 $y=3x-1$ 의 기울기는 3이

$$\text{므로 } f'(a) = \frac{3}{3a+1} = 3 \quad \therefore a=0$$

이때, $f(a) = f(0) = \ln 1 = 0$ 이므로 접점의 좌표는 $(0, 0)$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x$

$$44) y = \frac{1}{2}x - \ln 2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{접선의 기울기가 } y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \text{이므로 } x=2$$

접점 $(2, 2 - \ln 2)$ 에서 접선의 방정식은

$$y - (2 - \ln 2) = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \ln 2 + 1$$

45) 8

$$\Rightarrow f(x) = e^{x+1} \text{이라고 하면 } f'(x) = e^{x+1}$$

$$x+4y-1=0 \text{에서 } y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \text{이므로}$$

이것과 수직인 접선 $y=ax+b$ 의 기울기는 4이다.

접점의 좌표를 (t, e^{t+1}) 이라고 하면

기울기가 4이므로

$$f'(t) = e^{t+1} = 4 \quad \therefore t = \ln 4 - 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(\ln 4 - 1, 4)$ 이므로

접선의 방정식은 $y - 4 = 4\{x - (\ln 4 - 1)\}$

$$\therefore y = 4x - 4\ln 4 + 8$$

$$\therefore a=4, b=-4\ln 4 + 8$$

따라서 구하는 값은

$$4\ln a + b = 4\ln 4 + (-4\ln 4 + 8) = 8$$

46) 1

$$\Rightarrow y' = 2e^{2x} = 2 \text{에서 } x=0 \text{이므로 접점은 } (0, 1) \text{이다.}$$

$$\therefore a=1$$

47) 3

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \quad \therefore x=e$$

따라서 접점은 $(e, 4)$ 이므로 이 접점을 곡선에 대입하면 $4 = \ln e + a \quad \therefore a=3$

48) 1

$$\Rightarrow f(x) = x + \sin x \text{라고 하면 } f'(x) = 1 + \cos x$$

접점의 좌표를 $(t, t + \sin t)$ 라고 하면

접선 $y=x+a$ 의 기울기가 1이므로

$$f'(t) = 1 + \cos t = 1, \quad \cos t = 0$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right)$ 이므로

$$y - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore y = x + 1$$

따라서 $y=x+1$ 에서 구하는 a 의 값은

$$a=1$$

$$49) \frac{1}{4e^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x} \text{이므로 점 } (e, 1) \text{에서의 접선의 방정식은}$$

$$y = \frac{1}{e}x \text{이고, 이 곡선이 } y = x^2 + k \text{에 접하므로}$$

$$\frac{1}{e}x = x^2 + k \text{에서}$$

$$(\text{판별식}) = 0 \text{이므로 } 1 - 4e^2k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4e^2}$$

$$50) y = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{이라 하면 } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ 이라 하면 이 점에서의 접선

의 기울기는 $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(4 - a), \quad a = 4 - a \quad \therefore a=2$$

$$a=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$51) y = \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-1})$ 이라 하면

$$\text{이 점에서의 접선의 기울기는 } f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}$$

접선의 방정식은

$$y - \sqrt{t-1} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 - \sqrt{t-1} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}(0 - t)$$

$$2(t-1) = t \text{이므로 } t=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y = \frac{1}{2}x$$

$$52) y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-3} \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{a-3})$ 이라 하면 이 점에서의
접선의 기울기는 $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a-3}}$ 이므로 접선의

$$\text{방정식은 } y - \sqrt{a-3} = \frac{1}{2\sqrt{a-3}}(x-a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 - \sqrt{a-3} = \frac{1}{2\sqrt{a-3}}(2-a)$$

$$-2a+6=2-a \quad \therefore a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y-1 = \frac{1}{2}(x-4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$53) y = \frac{1}{e}x$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln x \text{라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x}$$

접점의 좌표를 $(a, \ln a)$ 라 하면 이 점에서의 접선
의 기울기는 $f'(a) = \frac{1}{a}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x-a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 - \ln a = \frac{1}{a}(0-a)$$

$$\ln a = 1 \quad \therefore a = e$$

$$a=e \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y-1 = \frac{1}{e}(x-e)$$

$$\therefore y = \frac{1}{e}x$$

$$54) y = -x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} \text{이라 하면 } f'(x) = -e^{-x}$$

접점의 좌표를 (a, e^{-a}) 이라 하면 이 점에서의 접
선의 기울기는 $f'(a) = -e^{-a}$ 이므로 접선의 방정식
은 $y - e^{-a} = -e^{-a}(x-a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 - e^{-a} = -e^{-a}(1-a)$$

$$1 = 1-a (\because e^{-a} > 0) \quad \therefore a=0$$

$$a=0 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y-1 = -(x-0)$$

$$\therefore y = -x + 1$$

$$55) y = ex - e$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x-1} \text{이라고 하면 } f'(x) = e^{x-1}$$

접점의 좌표를 (a, e^{a-1}) 이라고 하면

$x=a$ 에서 접선의 기울기는 $f'(a) = e^{a-1}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - e^{a-1} = e^{a-1}(x-a),$$

$$y = e^{a-1}x - ae^{a-1} + e^{a-1}$$

이 접선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 대입하면

$$0 = e^{a-1} \cdot 1 - ae^{a-1} + e^{a-1},$$

$$e^{a-1}(2-a) = 0$$

$$\therefore a=2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = e^{2-1}x - 2 \cdot e^{2-1} + e^{2-1}$$

$$\therefore y = ex - e$$

$$56) y = x - 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(x-2) \text{라고 하면 } f'(x) = \frac{1}{x-2}$$

접점의 좌표를 $(a, \ln(a-2))$ 라고 하면

$x=a$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(a) = \frac{1}{a-2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln(a-2) = \frac{1}{a-2}(x-a),$$

$$y = \frac{1}{a-2}x - \frac{a}{a-2} + \ln(a-2)$$

이 접선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로 대입하면

$$-1 = \frac{1}{a-2} \cdot 2 - \frac{a}{a-2} + \ln(a-2)$$

양변에 $a-2$ 를 곱하면 (단, $a \neq 2$)

$$-(a-2) = 2 - a + (a-2)\ln(a-2),$$

$$(a-2)\ln(a-2) = 0$$

$$\therefore a=3 (\because a \neq 2)$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = x - 3$$

$$57) y = \frac{1}{e}x - \frac{3}{e}$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(x-3) \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x-3}$$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t-3))$ 이라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = \frac{1}{t-3}$

$$\text{접선의 방정식은 } y - \ln(t-3) = \frac{1}{t-3}(x-t) \dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 - \ln(t-3) = \frac{1}{t-3}(3-t)$$

$$\ln(t-3) = 1 \text{이므로 } t = e+3 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y = \frac{1}{e}x - \frac{3}{e}$$

$$58) y = \frac{1}{2e}x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

접점을 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$ 이라 하자. 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x-t)$$

원점을 지나므로

$$-\frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(-t)$$

$$\frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t}$$

$$\ln t = 1 - \ln t, \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

$$\therefore m = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

따라서 접선의 방정식은 $y = \frac{1}{2e}x$

59) $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{라고 하면 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$ 라고 하면

$x=t$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t) \quad y = \frac{1 - \ln t}{t^2}x + \frac{2\ln t - 1}{t}$$

이 접선이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{1 - \ln t}{t^2} \cdot 0 + \frac{2\ln t - 1}{t} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2e}x$$

이 직선이 점 (e, a) 를 지나므로

$$a = \frac{1}{2e} \cdot e = \frac{1}{2}$$

60) 20

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} \text{라고 하면 } f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{t}\right)$ 라고 하면

$x=t$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{2}{t} = -\frac{2}{t^2}(x - t), \quad y = -\frac{2}{t^2}x + \frac{4}{t}$$

이 접선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로 대입하면

$$4 = -\frac{2}{t^2} \cdot 0 + \frac{4}{t} \quad \therefore t = 1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = -2x + 4 \quad \therefore a = -2, \quad b = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$$

61) 1

\Rightarrow 점 $(m, (m-1)e^m)$ 이라 할 때, 이 점에서 접선의 기울기를 구하면

$$y' = e^x + e^x(x-1) = xe^x \text{이므로 } me^m \text{이고,}$$

접선의 방정식은 $y = me^m(x-m) + (m-1)e^m$ 이다.

접선이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,

$e^m(m^2 - 3m + 1) = 0$ 으로 정리되고 이때, $e^m \neq 0$ 이고, 두 접선의 기울기 m_1, m_2 는 $m^2 - 3m + 1 = 0$ 의 근이므로 두 근의 곱 $m_1 m_2 = 1$ 이다.

62) $-\frac{4}{5}$

\Rightarrow 주어진 식의 양변을 미분하여 나타내면

$$6x^2 + y^2 + 2xyy' = 3e^{x-y}(1-y') \text{이며}$$

점 $(1, 1)$ 을 대입하여 정리하면

$$7 + 2y' = 3 - 3y' \text{이고}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{4}{5}$ 이다.

63) $-\frac{1}{2}$

\Rightarrow 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$6x + 8y \cdot y' = 0 \quad \therefore y' = -\frac{3x}{4y}$$

점 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 을 대입하면 접선의 기울기는

$$-\frac{3 \times 1}{4 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \text{이다.}$$

64) $-\frac{1}{4}$

\Rightarrow 주어진 양변을 각각 미분하여 정리하면

$$3x^2 - y^2 - 2xyy' = 0 \text{이고 곡선 위의 점 } (-2, 3) \text{을}$$

$$\text{대입하면 } 12 - 9 + 12y' = 0 \text{이므로 접선의 기울기는}$$

$$-\frac{1}{4} \text{이다.}$$

65) -1

\Rightarrow 곡선을 x 에 대해서 미분하면

$$\cos y - x \sin y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \cos x - y \sin x = 0 \text{이다.}$$

점 (π, π) 에서의 접선의 기울기는 $-1 - \frac{dy}{dx} = 0$ 이

$$\text{므로 } \frac{dy}{dx} = -1 \text{이다.}$$

66) $-e$

\Rightarrow 주어진 양변을 미분하면

$$\cos x \times e^{\sin x} \times \ln y + e^{\sin x} \times \frac{1}{y} \times y' = 0 \text{이고}$$

$x=0$ 일 때 $y=e$ 이므로 대입하여 정리하면

$$\ln e + \frac{1}{e} \times y' = 0 \text{이다.}$$

따라서 $y' = -e$ 이다.

67) $y = -2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \text{ 일 때 } x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

한편, $\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos 2t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos 2t}{\sin t} \quad (\sin t \neq 0) \text{에서}$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 일 때 접선의 기울기는

$$-\frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore y = -2x + \sqrt{3}$$

$$68) y = \frac{3}{16}x + \frac{31}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{2t} = \frac{t^2 - 1}{2t^3}$$

$t = 2$ 이면

$$x = 2^2 - 1 = 3, y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2 - 1}{2 \times 2^3} = \frac{3}{16} \text{이므로}$$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{16}(x - 3) \therefore y = \frac{3}{16}x + \frac{31}{16}$$

$$69) y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow t = 1$ 일 때 $x = 3, y = 1$ 이므로 접점의 좌표는 $(3, 1)$ 이다.

한편, $\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t}{4} \quad (t \neq 0) \text{에서 } t = 1 \text{일 때 접선의 기}$$

울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 3) \therefore y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$70) y = \sqrt{2}x - 1$$

$\Rightarrow x = \sec t, y = \tan t$ 에 대해서

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t, \frac{dy}{dt} = \sec^2 t \text{이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin t} \text{이다.}$$

점 $(\sqrt{2}, 1)$ 은 $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때이므로 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}$ 이다.

따라서 접선의 방정식은 $y = \sqrt{2}x - 1$ 이다.

$$71) y = 2ex - e^2$$

\Rightarrow 곡선 $x^2 - y \ln x + ex - e = 0$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - \ln x \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + e = 0$$

$$2x - \frac{y}{x} + e = \ln x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \frac{y}{x} + e}{\ln x}$$

곡선 위의 점 (e, e^2) 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e - \frac{e^2}{e} + e}{\ln e} = 2e$$

따라서 점 (e, e^2) 에서의 접선의 방정식은

$$y = 2e(x - e) + e^2$$

$$\therefore y = 2ex - e^2$$

$$72) y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

$\Rightarrow x^2 - 2xy - y^2 + 7 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $2x - 2y - 2x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$

$$2(x + y) \frac{dy}{dx} = 2(x - y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y} \quad (x + y \neq 0)$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $x = 1, y = 2$ 일 때

$$\frac{dy}{dx} \text{의 값이므로 } \frac{1 - 2}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$73) -1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t - 2, \frac{dy}{dt} = t^2 \text{이므로 } t = k \text{일 때,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k^2}{2k - 2} \text{이다.}$$

$$y = 2x + 6 \text{과 수직이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{k^2}{2k - 2} = -\frac{1}{2} \text{이므}$$

로 식을 정리하면 $k^2 + k - 1 = 0$ 이므로 모든 k 의 값은 -1 이다.

$$74) -1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = b \cos t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ 일 때}$$

$$x = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad y = b \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}b \text{ 이므로}$$

접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2}b = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a \right)$$

$$\therefore y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

이 직선이 직선 $y = x + \sqrt{2}$ 와 일치하므로

$$a = -1, \quad b = 1 \quad \therefore ab = -1$$

75) -1

$$\Rightarrow x = t^2 - 1 \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$y = t + 1 \text{ 에서 } \frac{dy}{dt} = 1$$

$$t = 2 \text{ 에서의 접선의 기울기는 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \text{ 이므로 접}$$

선의 방정식은 기울기가 $\frac{1}{4}$ 이고 접점이 $(3, 3)$ 이다.

$$\therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$

접선의 방정식 $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ 이 점 $(a, 2)$ 을 지나므로 대입하면

$$2 = \frac{1}{4}a + \frac{9}{4} \quad \therefore a = -1$$

76) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

\Rightarrow 직선 $2x + y = k$ 의 기울기는 -2 이므로 곡선

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \text{ 의 접선의 기울기도 } -2 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2\theta}{-\sin \theta} = -2$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} = 1$$

$$1 - 2\sin^2 \theta = \sin \theta$$

$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 는 직선 $2x + y = k$ 위의 점이므로 대입하면

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = k \quad \therefore k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

77) 9

\Rightarrow 곡선을 x 에 대해서 미분하면

$$2x + ay + ax \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 이다.}$$

곡선이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 식을 정리하면

$$2 - 2a + (a + 4) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \text{ 이므로 } a = 6 \text{ 이고 } b = 2a + 3 = 15 \text{ 이므로}$$

$$\therefore b - a = 9 \text{ 이다.}$$

78) 7

\Rightarrow 곡선 $ax^3 + y^5 + by = -2$ 를 x 에 대해서 미분하면

$$3ax^2 + 5y^4 \frac{dy}{dx} + b \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{점 } (1, -1) \text{ 에서의 } \frac{dy}{dx} = -1 \text{ 이므로 } 3a - b = 5 \text{ 이고}$$

점 $(1, -1)$ 은 곡선 위의 점이므로 $a - b = -1$ 이다.

두 식을 연립하면

$$a = 3, \quad b = 4 \quad \therefore a + b = 7$$

79) 3

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} + ax \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

$$(3y^2 + ax) \frac{dy}{dx} = -3x^2 - ay$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - ay}{3y^2 + ax}$$

$$\text{점 } (1, 2) \text{ 에서 } \frac{dy}{dx} = \frac{-3 - 2a}{12 + a} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore -30 - 20a = 12 + a$$

$$\therefore a = -2$$

$x^3 + y^3 + axy + b = 0$ 위의 점 $(1, 2)$ 를 대입하면

$$1 + 8 + 2a + b = 0$$

$$\therefore b = -5$$

$$\therefore a - b = -2 - (-5) = 3$$

80) 7

\Rightarrow 곡선의 식을 음함수 미분하면 다음과 같다.

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} + ax \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

$$\text{이 식에서 점 } (2, 3) \text{ 을 대입하면 } \frac{dy}{dx} = -4 \text{ 이므로}$$

$$4 - 24 - 8a + 3a = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{여기에서 } a = -4 \text{ 이다.}$$

원래 곡선의 식에 점 $(2, 3)$ 을 대입하면

$$13 - 24 + b = 0 \text{ 이므로 } b = 11 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a + b = 7 \text{ 이다.}$$

81) -6

\Rightarrow 곡선 $2x^2 + 4y^2 + axy + b = 0$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x + 8y \frac{dy}{dx} + ay + ax \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x + ay = (-8y - ax) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+ay}{-ax-8y}$$

곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$

이므로

$$\frac{4+a}{-a-8} = -\frac{1}{3}, \quad 12+3a=a+8$$

$$\therefore a = -2$$

점 (1, 1)은 곡선 위의 점이므로 대입하면

$$2+4+a+b=0$$

$$a = -2 \text{ 이므로}$$

$$4+b=0 \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore a+b = -2-4 = -6$$

82) 9

⇒ i) 곡선에 점 (2, 1)을 대입하면 $2a-b=9$

ii) 곡선의 방정식을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2y'-ay-axy'=0$$

$$(ax-3y^2)y' = 3x^2-ay \quad \therefore y' = \frac{3x^2-ay}{ax-3y^2}$$

위 식에 점 (2, 1)과 이때의 $y' = \frac{2}{3}$ 을 대입하면

$$\frac{2}{3} = \frac{12-a}{2a-3}, \quad 4a-6=36-3a$$

$$7a=42 \quad \therefore a=6, \quad b=3$$

$$\therefore a+b=9$$

$$83) y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

⇒ 곡선 $x^3-3xy+y^3=3$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2-3y-3x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$3x^2-3y=(3x-3y^2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x-y^2}$$

곡선 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{4-1}{2-1}=3$$

따라서 점 (2, 1)에서의 접선의 방정식과 수직인

$$\text{직선의 방정식은 } y = -\frac{1}{3}(x-2)+1$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$84) \frac{1}{3}$$

⇒ $f'(x) = 3x^2-6x+3$ 이고, $g(3)=a$ 라고 하면

$$f(a)=3$$

$$a^3-3a^2+3a+3=3$$

$$a^3-3a^2+3a=0$$

$$a(a^2-3a+3)=0$$

$$\therefore a=0$$

따라서 $x=3$ 에서 접선의 기울기

$$g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

$$85) \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x^3+2x+1=4, \quad x^3+2x-3=0$$

$$(x-1)(x^2+x+3)=0 \quad \therefore x=1$$

$$\therefore f(1)=4$$

$$f'(x)=3x^2+2 \quad \therefore f'(1)=5$$

$$\therefore g'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

$$86) \frac{1}{2e^5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x + (x-4)e^x = e^x(x-3) \text{ 이므로}$$

곡선 $y=g(x)$ 의 점 $(e^5, 5)$ 에서 접선의 기울기는

$$g'(e^5) = \frac{1}{f'(g(e^5))} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{2e^5}$$

$$87) y = \frac{1}{2\pi}x - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4}$$

⇒ $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(1)=a$ 로 놓으면

$$f(a)=1 \text{에서 } \tan \pi a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } g(1) = \frac{1}{4} \text{이다.}$$

한편, $f'(x) = \pi \sec^2 \pi x$ 에서

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \pi \sec^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2\pi \text{ 이므로}$$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2\pi}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi}(x-1) \quad \therefore y = \frac{1}{2\pi}x - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4}$$

$$88) y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$$

⇒ $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(4)=a$ 로 놓으면

$$f(a)=4$$

$$a^3+3a=4, \quad (a-1)(a^2+a+4)=0$$

$$\therefore a=1$$

$$\text{즉, } g(4)=1 \text{이다.}$$

한편, $f'(x) = 3x^2+3$ 에서 $f'(1)=6$ 이므로

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{1}{6}(x-4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$$

89) $\sqrt{2}$ $\Rightarrow f(x) = \cos x, g(x) = \sin x + k$ 라 하자.두 곡선의 교점에서 공통인 접선을 가지므로 교점의 x 좌표를 a 라 하면 $f(a) = g(a)$ 에서

$$\cos a = \sin a + k \cdots \textcircled{1}$$

또한 두 곡선의 교점에서의 기울기가 같으므로

$$f'(a) = g'(a) \text{에서 } -\sin a = \cos a$$

$$a = -\frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + k$$

$$\therefore k = \sqrt{2}$$

90) $-\frac{1}{e}$ $\Rightarrow f(x) = \frac{k}{x}, g(x) = \ln x$ 라 하자.두 곡선의 접점의 x 좌표를 $a(a > 0)$ 라 하면함숫값이 같으므로 $f(a) = g(a)$ 에서

$$\frac{k}{a} = \ln a \cdots \textcircled{1}$$

접선의 기울기가 같으므로 $f'(a) = g'(a)$ 에서

$$-\frac{k}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$-\frac{k}{a} = 1 \quad (\because a > 0) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \ln a = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{e}$$

$$a = \frac{1}{e} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } k = -\frac{1}{e}$$