4-2-3.여러 가지 증명_천재(이준열)

개념check

[부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질]

• 두 실수 a, b에 대하여

(1) $a>b \quad \Leftrightarrow \quad a-b>0$

(2) $a>0,\ b>0 \quad \Leftrightarrow \quad a+b>0,\ ab>0$

(3) $a^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 0$

(4) $a^2+b^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0,\ b=0$

(5) $a>0,\ b>0$일 때, $a>b \ \Leftrightarrow\ a^2>b^2 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{a}>\sqrt{b}$

(6) $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

[절대부등식]

• **절대부등식**: 문자를 포함한 부등식에서 그 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식

• **여러 가지 절대부등식의 예**

(1) a, b가 실수일 때, $a^2 \pm ab+b^2 \geq 0$
(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

(2) a, b, c가 실수일 때, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(3) a, b가 실수일 때, $|a|+|b| \geq |a+b|$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)

기본문제

[예제]

1. **다음은 명제 '짝수와 홀수의 합은 홀수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> 짝수와 홀수를 각각 a, b라고 하면
> $a=2m$, $b=$ (ㄱ) (m, n은 자연수)로 나타낼 수 있다.
> $a+b=2m+$ (ㄱ) $=2m+2n-1$
> $\qquad =2(m+n)-1$
> 이때 $m+n$은 (ㄴ) 이므로 $a+b$는 홀수이다.
> 따라서 짝수와 홀수의 합은 홀수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $2n+1$ (ㄴ) : 자연수
② (ㄱ) : $2n+1$ (ㄴ) : 유리수
③ (ㄱ) : $2n-1$ (ㄴ) : 자연수
④ (ㄱ) : $2n-1$ (ㄴ) : 유리수
⑤ (ㄱ) : $2n-1$ (ㄴ) : 실수

[문제]

2. **다음은 명제 '홀수와 홀수의 곱은 홀수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> 두 홀수를 각각 p, q라고 하면
> $p=2m-1$, $q=2n-1$ (m, n은 자연수)
> 으로 나타낼 수 있다.
> $pq=2($ (ㄱ) $)-1$
> 이때 (ㄱ) 은 (ㄴ) 이므로 pq는 홀수이다.
> 따라서 홀수와 홀수의 곱은 홀수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $2mn-m-n$ (ㄴ) : 자연수
② (ㄱ) :$2mn-m-n-1$ (ㄴ) : 유리수
③ (ㄱ) : $2mn-m-n-1$ (ㄴ) : 자연수
④ (ㄱ) : $2mn-m-n+1$ (ㄴ) : 유리수
⑤ (ㄱ) : $2mn-m-n+1$ (ㄴ) : 자연수

[예제]

3. **다음은 n이 자연수일 때, 'n^2이 홀수이면 n은 홀수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> 주어진 명제의 대우 'n이 (ㄱ) 이면 n^2은 (ㄱ) 이다.'가 참임을 보이면 된다.
> n이 (ㄱ) 이면 $n=$ (ㄴ) (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
> 이때 $n^2=2$ 이므로 n^2은 (ㄱ) 이다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $2k-1$
② (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $2k$
③ (ㄱ) : 짝수, (ㄴ) : $2k-1$
④ (ㄱ) : 짝수, (ㄴ) : $2k$
⑤ (ㄱ) : 자연수, (ㄴ) : $2k-1$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[문제]

4. **다음은 n이 자연수일 때,**
명제 'n^2이 5의 배수가 아니면 n은 5의 배수가 아니다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우 'n이 $\boxed{(ㄱ)}$이면
> n^2은 $\boxed{(ㄱ)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
> n이 $\boxed{(ㄱ)}$이면 $n=\boxed{(ㄴ)}$(k는 자연수)로
> 나타낼 수 있다.
> 이때 $n^2=5\boxed{}$이므로 n^2은 $\boxed{(ㄱ)}$이다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 5의 배수, (ㄴ) : $2k-1$
② (ㄱ) : 5의 배수, (ㄴ) : $5k$
③ (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $2k-1$
④ (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $5k$
⑤ (ㄱ) : 자연수, (ㄴ) : k

[예제]

5. **다음은 명제 '$\sqrt{7}$는 무리수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> 실수 $\sqrt{7}$이 $\boxed{(ㄱ)}$라고 가정하면
> $\sqrt{7}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{(ㄴ)}$인 자연수)으로
> 나타낼 수 있다.
> 즉, $n=\sqrt{7}m$이고 양변을 제곱하면
> $n^2=7m^2$
> 이때 n^2이 $\boxed{(ㄷ)}$의 배수이므로 n도 $\boxed{(ㄷ)}$의 배수이다.
> 따라서 $n=7k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
> 이때 $m^2=7k^2$
> 여기서 m^2이 7의 배수이므로 m도 7의 배수이다.
> 따라서 m, n은 $\boxed{(ㄴ)}$라는 가정에 모순이다.
> 그러므로 $\sqrt{7}$은 무리수이다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 서로소 (ㄷ) : 7
② (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 7의 배수 (ㄷ) : 7
③ (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 서로소 (ㄷ) : 14
④ (ㄱ) : 실수 (ㄴ) : 7의 배수 (ㄷ) : 7
⑤ (ㄱ) : 실수 (ㄴ) : 서로소 (ㄷ) : 14

[문제]

6. **다음은 명제 '$\sqrt{5}$는 무리수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.**

> 실수 $\sqrt{5}$가 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{(ㄱ)}$인 자연수)으로
> 나타낼 수 있다.
> 즉, $n=\sqrt{5}m$이고 양변을 제곱하면
> $n^2=5m^2$
> 이때 n^2이 $\boxed{(ㄴ)}$이므로 n도 $\boxed{(ㄴ)}$이다.
> 따라서 $n=5k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
> 이때 $m^2=5k^2$
> 여기서 m^2이 $\boxed{(ㄴ)}$이므로 m도 $\boxed{(ㄴ)}$이다.
> 따라서 m, n은 $\boxed{(ㄱ)}$라는 가정에 모순이다.
> 그러므로 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 서로소 (ㄴ) : 4의 배수
② (ㄱ) : 서로소 (ㄴ) : 5의 배수
③ (ㄱ) : 서로소 (ㄴ) : 3의 배수
④ (ㄱ) : 자연수 (ㄴ) : 3의 배수
⑤ (ㄱ) : 자연수 (ㄴ) : 5의 배수

[예제]

7. **다음은 a, b가 실수일 때, 부등식**
$a^2+3b^2\geq 2ab$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> a, b가 실수일 때,
> $a^2+3b^2-2ab\geq 0$임을 보이면 된다.
> $a^2+3b^2-2ab=\left(a^2-2ab+\boxed{(ㄱ)}\right)+2b^2$
> $=(a-b)^2+2b^2$
> 그런데 $(a-b)^2\geq 0$, $2b^2\geq 0$이므로
> $(a-b)^2+2b^2\geq 0$이다.
> 따라서 $a^2+3b^2\geq 2ab$가 성립한다.
> 여기서 등호는 $a=b=\boxed{(ㄴ)}$일 때 성립한다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : b^2 (ㄴ) : 0
② (ㄱ) : b^2 (ㄴ) : 1
③ (ㄱ) : $2b^2$ (ㄴ) : 0
④ (ㄱ) : $2b^2$ (ㄴ) : 1
⑤ (ㄱ) : $-b^2$ (ㄴ) : 0

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[문제]

8. 다음은 a, b, x, y가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$이 성립함을 증명하는 과정이다.

> a, b, x, y가 실수일 때,
> $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \geq 0$임을 보이면 된다.
> $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
> $=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
> $=a^2y^2+b^2x^2-\boxed{(ㄱ)}=(\boxed{(ㄴ)})^2 \geq 0$
> 따라서 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \geq 0$, 즉
> $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$이 성립한다.
> 여기서 등호는 $\boxed{(ㄷ)}$일 때 성립한다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $abxy$ (ㄴ) : $ax-by$ (ㄷ) : $ax=by$
② (ㄱ) : $abxy$ (ㄴ) : $ay-bx$ (ㄷ) : $ax=by$
③ (ㄱ) : $2abxy$ (ㄴ) : $ax-by$ (ㄷ) : $ay=bx$
④ (ㄱ) : $2abxy$ (ㄴ) : $ay-bx$ (ㄷ) : $ay=bx$
⑤ (ㄱ) : $4abxy$ (ㄴ) : $ay-bx$ (ㄷ) : $ay=bx$

[예제]

9. 다음은 $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> $a>0$, $b>0$일 때,
> $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b} \geq 0$임을 보이면 된다.
> $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(\boxed{(ㄱ)})^2}{2(a+b)} \geq 0$
> 따라서 $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$가 성립한다.
> 여기서 등호는 $\boxed{(ㄴ)}$일 때 성립한다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : $a=b$
② (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : $a+b=0$
③ (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : $ab=0$
④ (ㄱ) : $a+b$ (ㄴ) : $a=b$
⑤ (ㄱ) : $a+b$ (ㄴ) : $a+b=0$

[문제]

10. $a>0$일 때, $4a+\frac{9}{a}$의 최솟값은?

① 6 ② 8
③ 10 ④ 12
⑤ 14

[예제]

11. 다음은 a, b가 실수일 때, 부등식 $|a-b| \geq |a|-|b|$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> (i) $|a| \geq |b|$
> $|a-b| \geq 0$, $|a|-|b| \geq 0$이므로
> $(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2 \geq 0$임을 보이면 된다.
> $(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2$
> $=a^2-2ab+b^2-a^2+2|a||b|-b^2$
> $=2(|ab|-ab)\ \boxed{(ㄱ)}\ 0$
> $(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2 \geq 0$
> 따라서 $|a-b| \geq |a|-|b|$가 성립한다.
> (ii) $|a| \leq |b|$
> $|a|-|b| \leq \boxed{(ㄴ)}$이고 $\boxed{(ㄴ)} \leq |a-b|$이므로
> $|a|-|b| \leq \boxed{(ㄴ)} \leq |a-b|$
> 따라서 $|a|-|b| \leq |a-b|$가 성립한다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : 1
② (ㄱ) : $=$ (ㄴ) : 1
③ (ㄱ) : $\leq$ (ㄴ) : 0
④ (ㄱ) : $\geq$ (ㄴ) : 0
⑤ (ㄱ) : $=$ (ㄴ) : 0

[문제]

12. a, b가 실수일 때, 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> ㄱ. $|a|+|b| \geq |a+b|$
> ㄴ. $|a+b| \geq |a-b|$
> ㄷ. $|a+b| > |a|-|b|$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[문제]

13. 다음 중 용어의 정의로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 한 평면 위에서 만나지 않는 두 직선은 평행하다. ㄴ. 이등변삼각형은 두 각의 크기가 같은 삼각형이다. ㄷ. 평행사변형은 마주보는 두 대변의 길이가 같은 사각형이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[문제]

14. 다음은 명제 '이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 서로 같다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, $\boxed{(ㄱ)}$임을 보이고자 한다. $\angle$A의 이등분선이 밑변 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라고 하면 $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ $\cdots\cdots$ (1) $\overline{AD}$는 공통 $\cdots\cdots$ (2) $\angle BAD=\angle CAD$ $\cdots\cdots$ (3) (1), (2), (3)에서 $\boxed{(ㄴ)}$합동이므로 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ 따라서 $\boxed{(ㄱ)}$이므로 주어진 명제는 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) $\angle A=\angle B$ (ㄴ) SAS
② (ㄱ) $\angle A=\angle B$ (ㄴ) RHS
③ (ㄱ) $\angle B=\angle C$ (ㄴ) SAS
④ (ㄱ) $\angle B=\angle C$ (ㄴ) RHA
⑤ (ㄱ) $\angle B=\angle C$ (ㄴ) RHS

[문제]

15. 다음은 명제 '$xy\neq 0$이면 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

명제의 $\boxed{(ㄱ)}$가 참임을 보이면 된다. 주어진 명제의 $\boxed{(ㄱ)}$는 '$x=0$ $\boxed{(ㄴ)}$ $y=0$이면 $xy=0$이다.'이므로 (1) $x=0$이고 $y\neq 0$인 경우 $xy=0$이다. (2) $x\neq 0$이고 $y=0$인 경우 $xy=0$다. (3) $x=0$이고 $y=0$인 경우 $xy=0$다. 위 (1), (2), (3)에서 주어진 명제는 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) 부정, (ㄴ) 또는 ② (ㄱ) 역, (ㄴ) 또는
③ (ㄱ) 역, (ㄴ) 이고 ④ (ㄱ) 대우, (ㄴ) 이고
⑤ (ㄱ) 대우, (ㄴ) 또는

[문제]

16. 다음은 $3+\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하는 과정이다.

$3+\sqrt{2}=a$ (a는 유리수)라고 하자. $\sqrt{2}=\boxed{(ㄱ)}$ 에서 우변은 유리수이다. 그런데 좌변은 $\boxed{(ㄴ)}$가 되어 모순이다. 따라서 $3+\sqrt{2}$는 무리수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) $3-a$, (ㄴ) 무리수 ② (ㄱ) $3-a$, (ㄴ) 유리수
③ (ㄱ) $a-3$, (ㄴ) 무리수 ④ (ㄱ) $a-3$, (ㄴ) 유리수
⑤ (ㄱ) $a-3$, (ㄴ) 정수

[문제]

17. $a>0$, $b>0$일 때, $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}\right)$의 최솟값은?

① 21 ② 22
③ 23 ④ 24
⑤ 25

[문제]

18. 세 실수 a, b, c에 대하여, 다음 중 항상 성립하는 부등식인 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $(a+b)^2\geq 3ab$ ㄴ. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geq 0$ ㄷ. $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[문제]

19. $a>0,\ b>0$일 때, 다음은 부등식 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> $(\boxed{(ㄱ)})^2-(\sqrt{a+b})^2=2\boxed{(ㄴ)}>0$
> 따라서 부등식 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$가 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (ㄴ) $\sqrt{ab}$
② (ㄱ) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (ㄴ) ab
③ (ㄱ) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (ㄴ) $a+b$
④ (ㄱ) $\sqrt{a+b}$ (ㄴ) $\sqrt{ab}$
⑤ (ㄱ) $\sqrt{a+b}$ (ㄴ) ab

평가문제

[소단원 확인 문제]

20. 다음은 $m,\ n$이 자연수일 때, 명제 '$m+n$이 홀수이면 mn은 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우 'mn이 홀수이면 $m+n$은 $\boxed{(ㄱ)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
> mn이 홀수이면 $m,\ n$ 모두 홀수이므로
> $m=2k-1,\ n=2l-1$ ($k,\ l$은 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때 $m+n=2(\boxed{(ㄴ)})$
> 이므로 $m+n$은 $\boxed{(ㄱ)}$이다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $k+l-1$
② (ㄱ) : 짝수, (ㄴ) : $k+l-1$
③ (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $k+l$
④ (ㄱ) : 짝수, (ㄴ) : $k+l$
⑤ (ㄱ) : 홀수, (ㄴ) : $k+l+1$

[소단원 확인 문제]

21. 다음은 명제 '$\sqrt{3}+1$은 무리수이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.

> 실수 $\sqrt{3}+1$이 $\boxed{(ㄱ)}$라고 가정하면
> $\sqrt{3}+1=a$ (a는 $\boxed{(ㄱ)}$), 즉 $\sqrt{3}=a-1$
> 이때 a와 1은 유리수이므로 $a-1$도 유리수이다.
> 따라서 $\sqrt{3}$도 유리수이다.
> 이것은 $\sqrt{3}$이 $\boxed{(ㄴ)}$라는 사실에 모순이다.
> 그러므로 $\sqrt{3}+1$는 무리수이다.

다음 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 무리수
② (ㄱ) : 무리수 (ㄴ) : 무리수
③ (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 유리수
④ (ㄱ) : 무리수 (ㄴ) : 유리수
⑤ (ㄱ) : 유리수 (ㄴ) : 정수

[소단원 확인 문제]

22. 다음 부등식 중 절대부등식인 것만을 있는 대로 고른 것은?

> ㄱ. $x+3<0$
> ㄴ. $x^2-2x+1\ge 0$
> ㄷ. $x^3+8>0$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

[소단원 확인 문제]

23. $x>0$일 때, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$의 최솟값은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[소단원 확인 문제]

24. 다음은 $a\ge b>0$일 때, 부등식 $\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a-b}$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> $\sqrt{a}-\sqrt{b}\ge 0,\ \sqrt{a-b}\ge 0$이므로
> $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\le(\sqrt{a-b})^2$임을 보이면 된다.
> $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a-b})^2$
> $=(a-2\sqrt{ab}+b)-(\boxed{(ㄱ)})$
> $=2b-2\sqrt{ab}\ \boxed{(ㄴ)}\ 0$
> 따라서 $\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a-b}$이다.
> 여기서 등호는 $\boxed{(ㄷ)}$일 때 성립한다.

(ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $a+b$ (ㄴ) : $\le$ (ㄷ) : $a=b$
② (ㄱ) : $a+b$ (ㄴ) : $\ge$ (ㄷ) : $a<b$
③ (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : $\le$ (ㄷ) : $a=b$
④ (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : $\ge$ (ㄷ) : $a=b$
⑤ (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : $\le$ (ㄷ) : $a<b$

[소단원 확인 문제]

25. $a>0$, $b>0$**일 때,** $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$**의 최솟값은?**

① 10 ② 12

③ 14 ④ 16

⑤ 18

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

정답 및 해설

1) [정답] ③
[해설] 짝수와 홀수를 각각 a, b라고 하면
$a=2m$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)
로 나타낼 수 있다.
$a+b=2m+(2n-1)=2m+2n-1$
$=2(m+n)-1$
이때 $m+n$은 자연수이므로 $a+b$는 홀수이다.
따라서 짝수와 홀수의 합은 홀수이다.

2) [정답] ⑤
[해설] 두 홀수를 각각 p, q라고 하면
$p=2m-1$, $q=2n-1$ (m, n은 자연수)
으로 나타낼 수 있다.
$pq=2(2mn-m-n+1)-1$
이때 $2mn-m-n+1$은 자연수이므로 pq는 홀수이다.
따라서 홀수와 홀수의 곱은 홀수이다.

3) [정답] ④
[해설] 주어진 명제의 대우 'n이 짝수이면 n^2은 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.
n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 $n^2=4k^2=2(2k^2)$이므로 n^2은 짝수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

4) [정답] ②
[해설] 주어진 명제의 대우 'n이 5의 배수이면 n^2은 5의 배수이다.'가 참임을 보이면 된다.
n이 5의 배수이면 $n=5k$(k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 $n^2=5(5k^2)$이므로 n^2은 5의 배수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

5) [정답] ①
[해설] 실수 $\sqrt{7}$이 유리수라고 가정하면
$\sqrt{7}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다.
즉, $n=\sqrt{7}m$이고 양변을 제곱하면
$n^2=7m^2$
이때 n^2이 7의 배수이므로 n도 7의 배수이다.
따라서 $n=7k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 $m^2=7k^2$
여기서 m^2이 7의 배수이므로 m도 7의 배수이다.
따라서 m, n은 서로소라는 가정에 모순이다.
그러므로 $\sqrt{7}$은 무리수이다.

6) [정답] ②
[해설] 실수 $\sqrt{5}$가 유리수라고 가정하면
$\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다.
즉, $n=\sqrt{5}m$이고 양변을 제곱하면
$n^2=5m^2$
이때 n^2이 5의 배수이므로 n도 5의 배수이다.
따라서 $n=5k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 $m^2=5k^2$
여기서 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.
따라서 m, n은 서로소라는 가정에 모순이다.
그러므로 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

7) [정답] ①
[해설] a, b가 실수일 때,
$a^2+3b^2-2ab\ge 0$임을 보이면 된다.
$a^2+3b^2-2ab=(a^2-2ab+b^2)+2b^2=(a-b)^2+2b^2$
그런데 $(a-b)^2\ge 0$, $2b^2\ge 0$이므로
$(a-b)^2+2b^2\ge 0$이다.
따라서 $a^2+3b^2\ge 2ab$가 성립한다.
여기서 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.

8) [정답] ④
[해설] a, b, x, y가 실수일 때,
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\ge 0$임을 보이면 된다.
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=a^2y^2+b^2x^2-2abxy=(ay-bx)^2\ge 0$
따라서 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\ge 0$, 즉
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$이 성립한다.
여기서 등호는 $ay=bx$일 때 성립한다.

9) [정답] ①
[해설] $a>0$, $b>0$일 때,
$\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}\ge 0$임을 보이면 된다.
$\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}\ge 0$
따라서 $\dfrac{a+b}{2}\ge\dfrac{2ab}{a+b}$가 성립한다.
여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

10) [정답] ④
[해설] $4a>0$, $\dfrac{9}{a}>0$이므로
$4a+\dfrac{9}{a}\ge 2\sqrt{4a\times\dfrac{9}{a}}=12$
따라서 최솟값은 12이다.

11) [정답] ④

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[해설] (ⅰ) $|a| \geq |b|$

$|a-b| \geq 0$, $|a|-|b| \geq 0$이므로

$(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2 \geq 0$임을 보이면 된다.

$(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2$

$=a^2-2ab+b^2-a^2+2|a||b|-b^2$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$

$(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2 \geq 0$

따라서 $|a-b| \geq |a|-|b|$가 성립한다.

(ⅱ) $|a| \leq |b|$

$|a|-|b| \leq 0$이고 $0 \leq |a-b|$이므로

$|a|-|b| \leq 0 \leq |a-b|$

따라서 $|a|-|b| \leq |a-b|$가 성립한다.

12) [정답] ①

[해설] ㄱ. $|a|+|b| \geq |a+b|$이 항상 성립한다.

ㄴ. $a=1$, $b=-1$이면 성립하지 않는다.

ㄷ. $a=0$, $b=0$이면 성립하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

13) [정답] ①

[해설] ㄱ. 평행이라는 용어의 정의다. (참)

ㄴ. 이등변삼각형의 정의는 두 변의 길이가 같은 삼각형이다. (거짓)

ㄷ. 평행사변형의 정의는 마주보는 두 쌍의 대변이 서로 평행인 사각형이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

14) [정답] ③

[해설] △ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, $\angle B=\angle C$임을 보이고자 한다.

$\angle A$의 이등분선이 밑변 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라고 하면 △ABD와 △ACD에서

$\overline{AB}=\overline{AC}$ ⋯⋯ (1)

$\overline{AD}$는 공통 ⋯⋯ (2)

$\angle BAD=\angle CAD$ ⋯⋯ (3)

(1), (2), (3)에서 SAS합동이므로

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

따라서 $\angle B=\angle C$이므로 주어진 명제는 참이다.

15) [정답] ⑤

[해설] 명제의 대우가 참임을 보이면 된다.

주어진 명제의 대우는 '$x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.'이므로

(1) $x=0$이고 $y \neq 0$인 경우 $xy=0$이다.

(2) $x \neq 0$이고 $y=0$인 경우 $xy=0$다.

(3) $x=0$이고 $y=0$인 경우 $xy=0$다.

위 (1), (2), (3)에서 주어진 명제는 참이다.

16) [정답] ③

[해설] $3+\sqrt{2}=a$ (a는 유리수)라고 하자.

$\sqrt{2}=a-3$ 에서 우변은 유리수이다.

그런데 좌변은 무리수가 되어 모순이다.

따라서 $3+\sqrt{2}$는 무리수이다.

17) [정답] ⑤

[해설] $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}\right)=\frac{4b^2}{a^2}+\frac{9a^2}{b^2}+4+9$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{4b^2}{a^2}+\frac{9a^2}{b^2}+13 \geq 2\sqrt{\frac{4b^2}{a^2}\times\frac{9a^2}{b^2}}+13=25$

따라서 최솟값은 25

18) [정답] ⑤

[해설] ㄱ. $(a+b)^2-3ab=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$

이므로 항상 성립하는 부등식이다.

ㄴ. $(a+b+c)^2 \geq 0$이므로 항상 성립하는 부등식이다.

ㄷ. $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \geq 0$이므로

항상 성립하는 부등식이다.

따라서 항상 성립하는 부등식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19) [정답] ①

[해설] $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=2\sqrt{ab}>0$

따라서 부등식 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$가 성립한다.

20) [정답] ②

[해설] 주어진 명제의 대우 'mn이 홀수이면 $m+n$은 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

mn이 홀수이면 m, n 모두 홀수이므로

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때 $m+n=2(k+l-1)$

이므로 $m+n$은 짝수이다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

21) [정답] ①

[해설] 실수 $\sqrt{3}+1$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{3}+1=a$ (a는 유리수), 즉 $\sqrt{3}=a-1$

이때 a와 1은 유리수이므로 $a-1$도 유리수이다.

따라서 $\sqrt{3}$도 유리수이다.

이것은 $\sqrt{3}$이 무리수라는 사실에 모순이다.

그러므로 $\sqrt{3}+1$는 무리수이다.

22) [정답] ②

[해설] ㄱ. $x=0$에서 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다.

ㄴ. $(x-1)^2 \geq 0$이므로 절대부등식이다.

ㄷ. $x=-2$이면 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄴ이다.

23) [정답] ④

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[해설] $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}+1+4$

$=5+x^2+\frac{4}{x^2}\geq 5+2\sqrt{4}=9$

따라서 최솟값은 9이다.

24) [정답] ③

[해설] $\sqrt{a}-\sqrt{b}\geq 0$, $\sqrt{a-b}\geq 0$이므로

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\leq(\sqrt{a-b})^2$임을 보이면 된다.

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a-b})^2$

$=(a-2\sqrt{ab}+b)-(a-b)$

$=2b-2\sqrt{ab}\leq 0$

($\because$ $\sqrt{a}\geq\sqrt{b}$이므로

양변에 양수 $\sqrt{b}$를 곱하면 $\sqrt{ab}\geq b$)

따라서 $\sqrt{a}-\sqrt{b}\leq\sqrt{a-b}$이다.

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

25) [정답] ④

[해설] $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=1+9+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}$

$\geq 10+2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{9a}{b}}=16$

따라서 최솟값은 16이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240