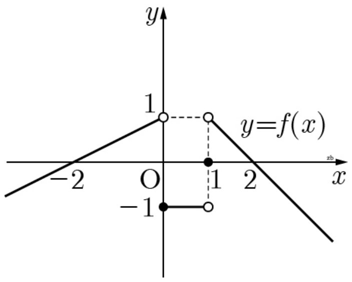
단원 ISSUE

이 단원에서는 **함수의 극한값을 구하는 문제**가 자주 출제된다. 유리화, 인수분해, 약분 등의 다양한 과정을 통하여 극한값을 구하게 되므로 각각의 방법에 대한 반복학습이 필요합니다. 또한 **도형의 넓이, 선분의 길이, 점의 좌표** 등을 이용하여 극한값을 구하게 되는데 복잡한 과정이므로 계산 실수가 생기지 않도록 학습합니다.

평가문제

[대단원 학습 점검]

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $\lim_{x\to 0+}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은?



① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

[중단원 학습 점검]

2. 함수 $f(x)=\begin{cases}-x^3+5 & (x<1)\\ x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$을 구하면?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

[중단원 학습 점검]

3. 다음 함수의 극한 중 가장 큰 값은?

① $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}$　② $\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x+2|}$　③ $\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{2x+1}$　④ $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x}{3x^2+9}$　⑤ $\lim_{x\to 0}(x^2+9x+6)$

[대단원 학습 점검]

4. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-3$, $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5}=12$ 일 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

[중단원 학습 점검]

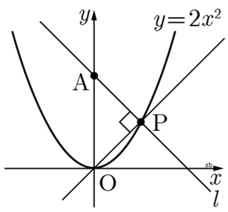
5. 다음을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$를 구하면?

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=1$	(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=8$

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

[대단원 학습 점검]

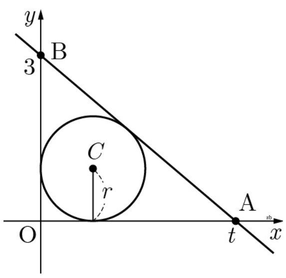
6. 다음 그림과 같이 곡선 $y=2x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2)$을 지나고 직선 OP에 수직인 직선 l과 y축과의 교점을 A라고 할 때, $\lim_{t\to 0}\overline{\mathrm{OA}}$의 값을 구하면? (단, O는 원점이고, $t>0$이다.)



① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ 3

[중단원 학습 점검]

7. 점 $\mathrm{A}(t,\ 0)$와 점 $\mathrm{B}(0,\ 3)$를 지나는 직선 및 x축, y축과 접하는 원 C가 있다. 원 C의 반지름의 길이를 r이라 할 때, $\lim_{t\to\infty} r$을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

[대단원 학습 점검]

8. 다음을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=b$라 할 때, $a+b$를 구하면?

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^2}{2x-3}=6$	(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=a$

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

[대단원 학습 점검]

9. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-ax+b}{x-1}=-3$일 때, $2a-3b$의 값은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[중단원 학습 점검]

10. $x\to\infty$일 때 극한값이 존재하는 두 함수 $f(x),\ g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=5$, $\lim_{x\to\infty}\{3f(x)+g(x)\}=-1$일 때, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\}$의 값을 구하면?

① -1 ② -2
③ -3 ④ -4
⑤ -5

[대단원 학습 점검]

11. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $\frac{3x^2-5x}{2x}\le f(x)\le\frac{3x^2+9}{2x+1}$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

[중단원 학습 점검]

12. $\lim_{x\to 4}\frac{4\sqrt{9+x^2}-5x}{ax-b}=-2$ 일 때, 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $2(a+b)$의 값을 고르면?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[중단원 학습 점검]

13. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-4}=9$, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구하면?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

[대단원 학습 점검]

14. $\lim_{x\to4}\frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+2)}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{2}{6}$　③ $\frac{3}{6}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

[대단원 학습 점검]

15. $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

[중단원 학습 점검]

16. 다음 극한값 중 가장 작은 것을 고르면?

① $\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}$

② $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(x-1)}{6x^2+5}$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$

⑤ $\lim_{x\to1}(x^2+2x+1)$

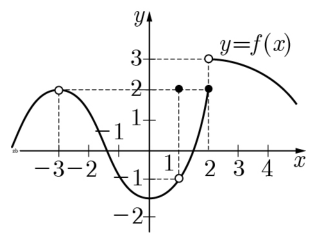
[중단원 학습 점검]

17. $x\ge1$인 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $5x^2+2\le f(x)\le 5x^2+6x$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

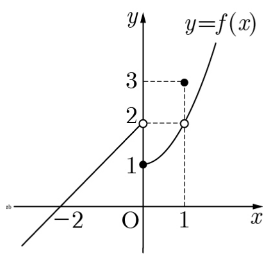
실전문제

18. 다음 그래프에 대하여 $f(1)+\lim_{x\to-3-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)$의 값을 구하여라.



① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

19. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



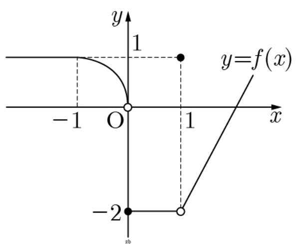
$\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)+f(1)$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

20. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x \le a) \\ -x+1 & (x>a) \end{cases}$, $g(x)=(x-1)(x-2)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x+a)\}$의 값이 존재하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{11}{6}$　③ $\frac{13}{6}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{17}{6}$

21. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to 1-}[f(x)]+\lim_{x\to 1+}f(1-x)$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

22. 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 $4x+1<f(x)<4x+3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2+1}$의 값을 구하시오.

① $\frac{1}{2}$　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

23. 어떤 탱크에 $4000\mathrm{L}$의 순수한 물이 들어 있다. 이 탱크에 L당 $30\mathrm{g}$의 소금이 들어 있는 소금물을 1분에 $20\mathrm{L}$씩 부으려고 한다. t분 후의 소금물의 농도를 $C(t)\%$라고할 때, $\lim_{t\to\infty}C(t)$의 값을 구하시오.

(단, 물 $1\mathrm{L}$는 $1\mathrm{kg}$이고, 탱크의 용량은 무한하다고 생각한다.)

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

24. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-1}{f(x)}=\frac{1}{3}$
(나) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=9$

① 3　② 4　③ 5　④ 12　⑤ 16

25. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=1$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{f(x)-2g(x)}$의 값을 구하시오.

① 2　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ -2

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] $\lim_{x\to0+}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)$

$=-1-1=-2$

2) [정답] ①

[해설] $\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=7+4=11$

3) [정답] ⑤

[해설] ① $\lim_{x\to4}\sqrt{x+5}=3$

② $\lim_{x\to2}\frac{1}{|x+2|}=\frac{1}{4}$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{2x+1}=5$

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x}{3x^2+9}=-\frac{1}{3}$

⑤ $\lim_{x\to0}(x^2+9x+6)=6$

4) [정답] ①

[해설] $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-3$ 에서 $f(2)=0$이므로

$f(x)$는 $x-2$를 인수로 가진다.

$\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{x-5}=12$ 에서 $f(5)=0$이므로

$f(x)$는 $x-5$를 인수로 가진다. 그러므로

$f(x)=(x-2)(x-5)(ax+b)$라 할 수 있고

$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-5)(ax+b)}{x-2}=-3(2a+b)=-3$

$2a+b=1$,

$\lim_{x\to5}\frac{(x-2)(x-5)(ax+b)}{x-5}=3(5a+b)=12$

$5a+b=4$ 이므로

$2a+b=1$, $5a+b=4$를 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-1$

그러므로 $f(x)=(x-2)(x-5)(x-1)$, $f(1)=0$

5) [정답] ①

[해설] $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=1$에서 $f(x)$가

다항함수이므로 $f(x)=3x^3+x^2+ax+b$ 이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=8$에서 $f(1)=0$,

$f(1)=3+1+a+b=0$, $4+a+b=0$ 에서

$b=-4-a$,

$f(x)=3x^3+x^2+ax-4-a$

$=(x-1)(3x^2+4x+a+4)$ 에서

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x^2+4x+a+4)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(3x^2+4x+a+4)=11+a=8$ 이므로

$a=-3$, $b=-1$ 즉, $f(x)=3x^3+x^2-3x-1$ 이고

$f(2)=21$ 이다.

6) [정답] ①

[해설] 직선 OP의 기울기는 $\frac{2t^2}{t}=2t$이고

따라서 직선 OP와 수직인 직선 l은

기울기가 $-\frac{1}{2t}$이고 점 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2)$을 지나므로

$y-2t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$ 이다.

이때 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ 2t^2+\frac{1}{2})$이므로

$\lim_{t\to0}\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

7) [정답] ③

[해설] 선분 AB의 길이를 구하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{t^2+9}$

원이 삼각형 OAB의 내접원이므로

내심의 성질에 의하여

$\frac{1}{2}\times r\times(\sqrt{t^2+9}+t+3)=\frac{1}{2}\times3\times t$,

$r=\frac{3t}{\sqrt{t^2+9}+t+3}$ 에서

$\lim_{t\to\infty}r=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{t^2+9}+t+3}=\frac{3}{2}$ 이다.

8) [정답] ④

[해설] $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^2}{2x-3}=6$에서 $f(x)=4x^2+12x+b$라

하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=a$에서 $f(1)=0$이므로 $4+12+b=0$,

$b=-16$ 이다. 한편,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4x^2+12x-16}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x+16)}{x-1}=20$ 에서

$a+b=20-16=4$ 이다.

9) [정답] ①

[해설] $\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+b}{x-1}=-3$ 이므로

$1-a+b=0$, $b=a-1$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a+1)}{x-1}=-3$

에서 $2-a=-3$ 이므로 $a=5$, $b=4$

따라서 $2a-3b=-2$

10) [정답] ③

[해설] $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\beta$라 하면

$\alpha-\beta=5$, $3\alpha+\beta=-1$ 이므로

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=1$, $\beta=-4$이다.

그러므로 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\}=-3$

11) [정답] ①

[해설] $x>0$일 때 $\frac{3x^2-5x}{6x^2}\le\frac{f(x)}{3x}\le\frac{3x^2+9}{6x^2+3x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{6x^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+9}{6x^2+3x}=\frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x}=\frac{1}{2}$ 이다.

12) [정답] ④

[해설] $\lim_{x\to4}\frac{4\sqrt{9+x^2}-5x}{ax-b}=-2$에서

$\lim_{x\to4}\left(4\sqrt{9+x^2}-5x\right)=0$이므로 $\lim_{x\to4}(ax-b)=0$,

즉 $b=4a$ 이다.

$\lim_{x\to4}\frac{4\sqrt{9+x^2}-5x}{ax-4a}$

$=\lim_{x\to4}\frac{\left(4\sqrt{9+x^2}-5x\right)\left(4\sqrt{9+x^2}+5x\right)}{a(x-4)\left(4\sqrt{9+x^2}+5x\right)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{-9(x+4)(x-4)}{a(x-4)\left(4\sqrt{9+x^2}+5x\right)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{-9(x+4)}{a\left(4\sqrt{9+x^2}+5x\right)}=-\frac{9}{5a}=-2$ 에서

$a=\frac{9}{10}$, $b=\frac{18}{5}$ 이고

$2(a+b)=2\times\frac{9}{2}=9$ 이다.

13) [정답] ②

[해설] $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)(x+2)}=9$, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=3$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{f(x)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{g(x)}{(x-2)(x+2)}}=\frac{9}{\frac{3}{4}}=12$

14) [정답] ⑤

[해설] $\lim_{x\to4}\frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\lim_{x\to4}\frac{x+1}{x+2}=\frac{5}{6}$

15) [정답] ②

[해설] $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x(x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}=-2$

16) [정답] ①

[해설] ① $\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-4)=-3$

② $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

$=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\frac{1}{6}$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(x-1)}{6x^2+5}=\frac{1}{3}$

④ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}=3$

⑤ $\lim_{x\to1}\left(x^2+2x+1\right)=4$

17) [정답] ⑤

[해설] $x\ge1$인 x에 대하여

$5x^2+2\le f(x)\le5x^2+6x$ 이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{x^2}=5$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x}{x^2}=5$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=5$

18) [정답] ⑤

[해설] $f(1)=2$, $\lim_{x\to-3-}f(x)=2$, $\lim_{x\to2+}f(x)=3$이므로

$f(1)+\lim_{x\to-3-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=2+2+3=7$

19) [정답] ④

[해설] $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$, $f(1)=3$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)+f(1)=6$

20) [정답] ②

[해설] $\lim_{x\to a-}\{f(x)g(x+a)\}=\lim_{x\to a+}\{f(x)g(x+a)\}$

$\lim_{x\to a-}(x+a)(x+a-1)(x+a-2)$

$=\lim_{x\to a+}(1-x)(x+a-1)(x+a-2)$

$4a(2a-1)(a-1)=2(1-a)(2a-1)(a-1)$

$\therefore a=\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$

21) [정답] ④

[해설] 구간 $[0,1)$에서 $[f(x)]=-2$이므로

$\lim_{x\to1-}[f(x)]=-2$

또 $\lim_{x\to1+}f(1-x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로

구하고자 하는 값은

$-2+0=-2$

22) [정답] ⑤

[해설] $4x+1<f(x)<4x+3$에서

$16x^2+8x+1<\{f(x)\}^2<16x^2+24x+9$

$\frac{16x^2+8x+1}{2x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2+1}<\frac{16x^2+24x+9}{2x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+8x+1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+24x+9}{2x^2+1}=8$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2+1}=8$

23) [정답] ①

[해설] 문제의 조건에 따라 수식을 세우면

$C(t)=100\left(\frac{0.6t}{4000+20t}\right)=\frac{60t}{4000+20t}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}C(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{60t}{4000+20t}\right)=3$

24) [정답] ④

[해설] (가)조건이 성립하므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

이때 (나)에 의해

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{(x+2)(x+1)}=9$

이므로 상수 k에 대해 $f(x)=3(x+2)(x+k)$로 나타낼 수 있다.

따라서 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=-3k+6=9$에서 $k=-1$

$\therefore f(2)=12$

25) [정답] ④

[해설] $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=1$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2g(x)}{f(x)}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{2g(x)}{f(x)}=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2g(x)}{f(x)}=-1$ $\quad\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4g(x)}{f(x)}}{1-\frac{2g(x)}{f(x)}}=-\frac{1}{2}$