01 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha\neq0$인 실수)일 때, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$이면 ($f(x)$의 차수)=($g(x)$의 차수)
이때 극한값 α는 ($f(x)$의 최고차항의 계수)÷($g(x)$의 최고차항의 계수)이다.

◪ **다음 등식이 성립할 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.**

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax+b}{x-1}=2$

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=6$

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{2x^2+ax+b}=-1$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=1$

5. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=1$

6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=1$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\dfrac{1}{4}$

8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

9. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$

10. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-4}=\dfrac{1}{6}$

11. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3}=b$

12. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}+a}=b$ (단, $b\neq0$)

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{ax+4}-\sqrt{2x+a}}{x}=b$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 등식이 성립할 때, 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

14. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=3$

15. $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}=5$

16. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=3$

17. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$

18. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-b}{x-2}=9$

19. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+ax+b}=\frac{1}{8}$

20. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=1$

21. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-ax+b}=\frac{1}{3}$

22. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+ax+b}=\frac{2}{5}$

23. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-b}=4$

24. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$

25. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$

26. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-a}+b}{x-2}=\frac{1}{6}$

27. $\lim_{x\to 2}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

◪ 다음 값을 구하여라.

28. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}$의 값

29. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=1$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-4}$의 값

30. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값

31. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값

◪ 다음을 만족하는 다항함수 $f(x)$를 구하여라.

32. $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$를 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

33. $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2-4}=-3$을 만족시키는 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

34. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+5}=1$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$을 만족하는 다항함수 $f(x)$

35. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x+1}=1$, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=2$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$

36. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=1$, $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-2$

37. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=1$, $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-4$

38. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$

39. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$

40. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{f(x)}=2$, $\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=3$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 값을 구하여라.

41. $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$, $\lim_{x\to2}f(x)=2$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

42. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

43. 다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값을 구하여라.

44. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{f(x)}=2$, $\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=3$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

45. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 값을 구하여라.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+5}{f(x)}=\frac{1}{2}$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

02 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$($\alpha$, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면

$$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$$

◪ 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값을 구하여라.

46. $\dfrac{3x+5}{x} < f(x) < \dfrac{3x^2+7x}{x^2}$

47. $\dfrac{2x-3}{x} \le f(x) \le \dfrac{2x^2+5x}{x^2}$

48. $\dfrac{x-4}{x+1} < f(x) < \dfrac{x-2}{x+1}$

49. $\dfrac{x+2}{x+1} < f(x) < \dfrac{x+1}{x}$

50. $\dfrac{x^2+1}{2x^2-4x+1} < f(x) < \dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2-1}$

51. $\dfrac{x^2+1}{3x^2-4x+1} < f(x) < \dfrac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}$

◪ 다음 물음에 답하여라.

52. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2+2x \le f(x) \le 2x^2+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값을 구하여라.

53. 모든 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $x^2+2 \le f(x) \le x^2+5$를 만족할 때, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

54. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$x^2+3x-4 \le f(x) \le 4x^2-3x-1$$

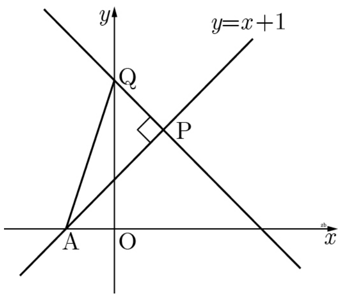
을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$의 값을 구하여라.

55. $x > \dfrac{1}{2}$인 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2x-1 < f(x) < 2x+1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}$의 값을 구하여라.

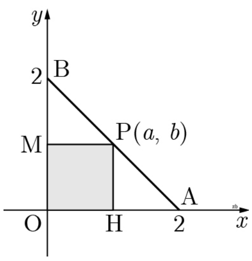
56. 모든 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $2x-3 < f(x) < 2x+4$를 만족할 때, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1}$의 값을 구하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

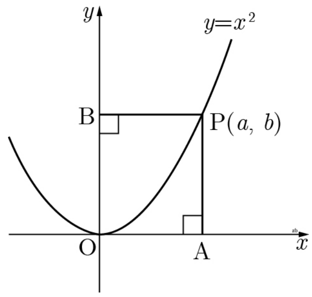
57. 그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위의 두 점 $A(-1,0)$과 $P(t,t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 고 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$의 값을 구하여라.



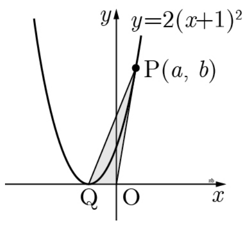
58. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$에 대하여 선분 AB 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, M이라 하자. 직사각형 OHPM의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $\lim_{a\to 2-}\frac{f(a)}{4-a^2}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)



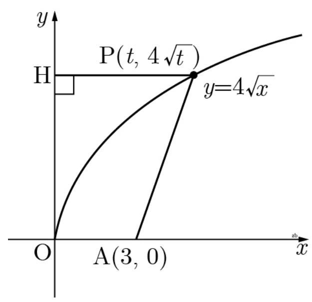
59. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a,b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 A, y축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 사각형 $OAPB$의 넓이를 $S(a)$, 둘레의 길이를 $L(a)$라고 할 때, $\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{aL(a)}$의 값을 구하여라.(단, O는 원점이고, $a>0$이다.)



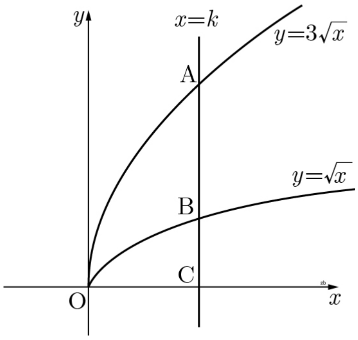
60. 다음과 같이 좌표평면에서 포물선 $y=2(x+1)^2$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 이 포물선의 꼭짓점 Q에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim_{a\to 0}\frac{S(a)-1}{a}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)



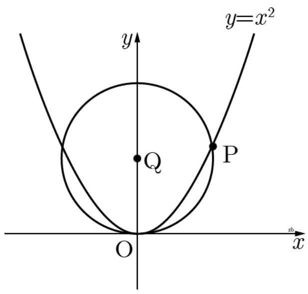
61. 다음 그림과 같이 함수 $y=4\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 $P(t,4\sqrt{t})$와 x축 위의 점 $A(3,0)$이 있다. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(\overline{PA}-\overline{PH})$의 값을 구하여라.



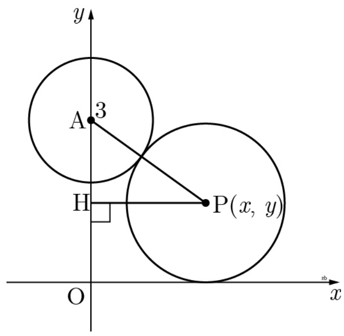
62. 그림과 같이 두 함수 $y=3\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라고 하자. 이때, $\lim_{k\to0+}\frac{\overline{OA}-\overline{AC}}{\overline{OB}-\overline{BC}}$의 값을 구하여라. (단, $k>0$이고, O는 원점이다.)



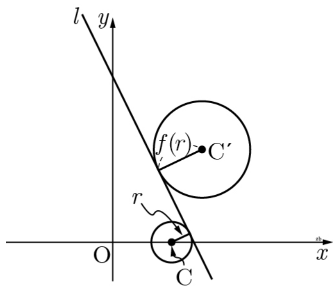
63. 다음 그림과 같이 $y=x^2$ 위의 원점이 아닌 점 P에 대하여 점 P와 원점 O를 지나고 y축 위의 점 Q를 중심으로 하는 원이 있다. 점 P가 곡선 $y=x^2$을 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 점 Q는 점 $(0,a)$에 한없이 가까워진다. 이때, a의 값을 구하여라.



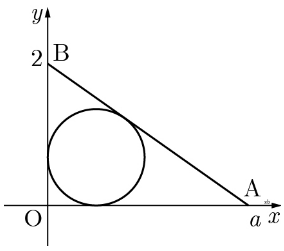
64. 그림과 같이 중심이 $A(0,3)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 x축에 접하는 원의 중심을 $P(x,y)$라고 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}$의 값을 구하여라.



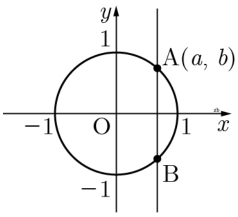
65. 그림과 같이 중심이 $C(2,0)$이고 반지름의 길이가 $r(r<\sqrt{5})$인 원 C가 있다. 기울기가 -2이고 원 C에 접하는 직선을 l이라고 하자. 직선 l에 접하고 중심이 $C'(3,3)$인 원 C'의 반지름을 $f(r)$라고 할 때, $\lim_{r\to0+}f(r)$의 값을 구하여라.



66. 다음과 같이 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$에 대하여 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $f(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a \to \infty} f(a)$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이고 $a>0$이다.)



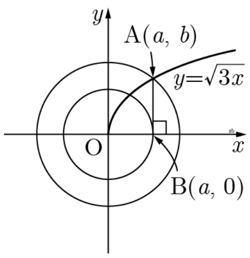
67. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)(0<a<1)$를 지나고 y축에 평행한 직선이 원과 만나는 점 A가 아닌 점을 B라 하자. 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



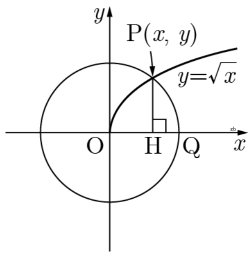
(1) 정사각형의 넓이 $S(a)$를 a에 대하여 나타내어라.

(2) $\lim\limits_{a \to 1-} \dfrac{1-a}{S(a)}$의 값을 구하여라.

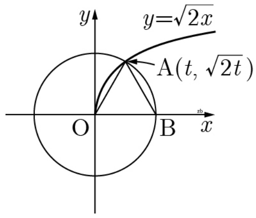
68. 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 원 점 O가 중심이고 점 A를 지나는 원과 원점 O가 중심이고 점 B를 지나는 두 원의 반지름의 길이의 차를 $f(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a \to \infty} f(a)$의 값을 구하여라. (단, $f(a)>0$)



69. 다음과 같이 원점 O가 중심이고, 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 지나는 원이 x축의 양의 부분과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}$의 값을 구하여라.



70. 다음과 같이 원점 O를 중심으로 하고 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ \sqrt{2t})$를 지나는 원이 x축의 양의 방향과 만나는 점을 B라 하자. 원의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 OAB의 넓이를 $T(t)$라 할 때, $\lim\limits_{\overline{\mathrm{OA}} \to 0+} \dfrac{T(t)}{S(t)}$의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) $a=2,\ b=-2$

⇨ $x\to 1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}(ax+b)=0$이므로

$a+b=0 \quad \therefore\ b=-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax-a}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}a=a$

이므로 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-2$

2) $a=0,\ b=-9$

⇨ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=6$에서

$9+3a+b=0 \quad \therefore\ b=-3a-9$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax-3(a+3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+a+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+a+3)=a+6=6$

$\therefore\ a=0,\ b=-9$

3) $a=3,\ b=1$

⇨ $x\to -1$일 때 (분자)$\to$0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to$0이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+ax+b)=0$이므로

$2-a+b=0 \quad \therefore\ b=a-2 \quad \cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{2x^2+ax+a-2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(2x+a-2)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{2x+a-2}$

$=\dfrac{1}{a-4}$

이므로 $\dfrac{1}{a-4}=-1 \quad \therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

4) $a=2,\ b=-2$

⇨ $x\to 1$일 때, (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=a+b=0 \quad \therefore\ b=-a \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x}-a}{x-1} \quad (\because$ ㉠$)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$

$=a\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=a\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=a\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}a=1$

$\therefore\ a=2,\ b=-2$

5) $a=4,\ b=-8$

⇨ $x\to 4$일 때, (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)=a\sqrt{4}+b=2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{a\sqrt{x}-2a}{x-4} \quad (\because$ ㉠$)$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{a}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{a}{4}=1$

$\therefore\ a=4,\ b=-8$

6) $a=2\sqrt{2},\ b=-4$

⇨ $x\to2$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=\sqrt{2}a+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{2}a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x}-\sqrt{2}a}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

$\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=1$이므로 $a=2\sqrt{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

7) $a=1,\ b=2$

⇨ $x\to3$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{3+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{3+a} \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3+a}}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{3+a}}=\dfrac{1}{4}$이므로 $\sqrt{3+a}=2,\ 3+a=4 \quad \therefore a=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{3+1}=2 \quad \therefore a=1, b=2$

8) $a=6,\ b=3$

⇨ $x\to 3$일 때, (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{3+a}-b=0$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

$\therefore\ b=\sqrt{3+a}$ $\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{3+a}}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=6,\ b=3$

9) $a=2,\ b=\frac{1}{4}$

⇨ $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x+a}-2)=\sqrt{2+a}-2=0$

$2+a=4\ \ \therefore a=2$

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}=b$

10) $a=5,\ b=3$

⇨ $x\to4$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{4+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{4+a}$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a}}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a}}=\frac{1}{2\sqrt{4+a}}$

$\frac{1}{2\sqrt{4+a}}=\frac{1}{6}$이므로 $\sqrt{4+a}=3,\ 4+a=9\ \ \therefore a=5$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{4+5}=3$

$\therefore a=5, b=3$

11) $a=1,\ b=-\frac{1}{6}$

⇨ $x\to-3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)=\sqrt{(-3)^2-(-3)-3}-3a=0$

$3-3a=0\ \ \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$

$=\lim\limits_{x\to-3}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=-\frac{1}{6}=b$

$\therefore a=1,\ b=-\frac{1}{6}$

12) $a=-3,\ b=-\frac{3}{4}$

⇨ $x\to-2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) → 0이므로 (분모) → 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-2}(\sqrt{2x^2+1}+a)=\sqrt{9}+a=0$

$\therefore\ a=-3$ $\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}+a}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}-3}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}{2x^2-8}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}{2(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x^2+1}+3}{2(x-2)}$

$=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ a=-3,\ b=-\frac{3}{4}$

13) $a=4,\ b=\frac{1}{2}$

⇨ $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{ax+4}-\sqrt{2x+a})=\sqrt{4}-\sqrt{a}=0\ \ \therefore a=4$

$a=4$를 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4x+4}-\sqrt{2x+4}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(4x+4)-(2x+4)}{x(\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x+4})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x+4}}=\frac{1}{2}$

$\therefore a=4,\ b=\frac{1}{2}$

14) 9

⇨ $x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+ax+b)=1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$

$a-2=3$이므로 $a=5$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=9$

15) 16

⇨ $x \to -1$일 때, (분모)→ 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+ax+b)=2-a+b=0$

$\therefore\ b=a-2 \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+ax+b}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+ax+a-2}{x+1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(2x+a-2)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}(2x+a-2)$

$=-2+a-2=5$

$\therefore\ a=9,\ b=7$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a+b=16$

16) -3

⇨ $x \to 2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a-4 \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+a+2)=a+4=3$

따라서 $a=-1,\ b=-2$ ($\because$ ㉠)이므로 $a+b=-3$

17) -5

⇨ $x \to 2$일 때, (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a-4 \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+a+2)=4+a=5$

따라서 $a=1,\ b=-6$ ($\because$ ㉠)이므로 $a+b=-5$

18) 19

⇨ $x\to2$일 때, (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax-b)=4+2a-b=0$

$\therefore b=2a+4 \ \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+a+2)=4+a$

$4+a=9$이므로 $a=5$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=14$ $\therefore a+b=19$

19) -8

⇨ $x\to2$일 때, (분자)→0이므로 (분모)→0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4 \ \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2+ax-2a-4}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+a+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+a+2}=\dfrac{1}{a+4}$

$\dfrac{1}{a+4}=\dfrac{1}{8}$이므로 $a=4$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-12$ $\therefore a+b=-8$

20) -1

⇨ $x \to 1$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) → 0이므로 (분모) → 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1 \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+ax-a-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+a+1}=\dfrac{1}{2+a}=1$

따라서 $a=-1,\ b=0$ ($\because$ ㉠)이므로 $a+b=-1$

21) -3

⇨ $x\to1$일 때, (분자)→0이므로 (분모)→0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}(x^2-ax+b)=1-a+b=0$ $\therefore b=a-1 \ \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-ax+a-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x-a+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-a+1}=\dfrac{1}{2-a}$

$\dfrac{1}{2-a}=\dfrac{1}{3}$이므로 $a=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-2$ $\therefore a+b=-3$

22) -5

⇨ $x \to 2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) → 0이므로 (분모) → 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a-4 \quad \cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+ax-2a-4}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x}{x+a+2}=\frac{2}{4+a}=\frac{2}{5}$

따라서 $a=1$, $b=-6$ ($\because$ ㉠)이므로 $a+b=-5$

23) -6

⇨ $x\to1$일 때, (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^2-b)=1-b=0$ $\therefore b=1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{x+1}=\frac{1-a}{2}$

$\frac{1-a}{2}=4$이므로 $a=-7$

$\therefore a+b=-6$

24) -6

⇨ $x\to2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이어야 한다

$\lim_{x\to2}(x^2-b)=4-b=0$ $\therefore$ $b=4$

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-a}{x+2}=\frac{2-a}{4}=3$

$\therefore$ $a=-10$

$\therefore$ $a+b=-6$

25) 15

⇨ $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^2+ax-b)=1+a-b=0$ $\therefore b=a+1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+a+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x^2+x+1}=\frac{a+2}{3}$

$\frac{a+2}{3}=3$이므로 $a=7$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=8$ $\therefore a+b=15$

26) -10

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-a}+b}{x-2}=\frac{1}{6}$에서

$\sqrt{2-a}+b=0$ $\therefore$ $b=-\sqrt{2-a}$

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-a}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{2-a}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-a)-(2-a)}{(x-2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a}}=\frac{1}{2\sqrt{2-a}}=\frac{1}{6}$

즉 $\sqrt{2-a}=3$이므로

$2-a=9$ $\therefore$ $a=-7$, $b=-3$

$\therefore$ $a+b=-7+(-3)=-10$

27) -2

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$에서

$2a+b=0$이므로 $b=-2a$

$\lim_{x\to2}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to2}\frac{ax-2a}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(x+1)-3}$

$=\lim_{x\to2}a(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}a=4\sqrt{3}$ $\therefore$ $a=2$, $b=-4$

$\therefore$ $a+b=2+(-4)=-2$

28) 3

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$

여기서 $x-1=t$로 놓으면, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=6$

$\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=6\times\frac{1}{2}=3$

29) $\frac{1}{4}$

⇨ $x-1=t$로 놓으면, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$x-2=t-1$이고, $x\to2$일 때 $t\to1$이다.

$\therefore\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$

$=\frac{1}{4}\times\lim_{t\to1}\frac{f(t-1)}{t-1}$

$=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$

30) 8

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$에서 $x-2=t$로 놓으면

$x=t+2$이고, $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{(t+2)^2-2(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=4$

$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$

31) $\frac{1}{30}$

⇨ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=3$

$\therefore\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}\cdot\{f(x)+3\}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to2}\{f(x)+3\}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3+3}=\frac{1}{30}$

32) $f(x)=x^2+4x+3$

⇨ $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

따라서 $f(x)=(x+1)(x+a)$ (a는 상수)라고 놓으면

$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a)}{(x-1)(x+1)}=\frac{a-1}{-2}$

$\frac{a-1}{-2}=-1$이므로 $a=3$

$\therefore f(x)=(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$

33) $f(x)=x^2+16x+28$

⇨ $x\to-2$일 때 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)=0$

$\therefore$ $f(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수)

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+a)}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+a)}{(x-2)(x+2)}=\frac{a-2}{-4}$

즉, $\frac{a-2}{-4}=-3$이므로 $a=14$

$\therefore$ $f(x)=(x+2)(x+14)=x^2+16x+28$

34) $f(x)=x^2+x-2$

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+5}=1$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+a)$(a는 상수)라고 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+a)=1+a$

$1+a=3$이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

35) $f(x)=x^2-4x+3$

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x+1}=1$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이다.

또, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)=0$

$\therefore$ $f(x)=(x-3)(x-a)$ (a는 상수)

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-a)}{x-3}=3-a$

즉, $3-a=2$이므로 $a=1$

$\therefore$ $f(x)=(x-3)(x-1)=x^2-4x+3$

36) $f(x)=x^3+x^2+3x+3$

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=1$에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)-x^3=x^2+ax+b$

$\therefore$ $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ (a, b는 상수) $\cdots$ ㉠

또, $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-2$에서 $x\to-1$일 때, (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다

$\therefore$ $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

㉠에 의하여 $-1+1-a+b=0$ $\therefore$ $a=b$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^3+x^2+bx+b=(x+1)(x^2+b)$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+b)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+b)}{(x+1)(x-1)}=\frac{b+1}{-2}$

즉, $\frac{b+1}{-2}=-2$이므로 $b=3$

$\therefore$ $f(x)=(x+1)(x^2+3)=x^3+x^2+3x+3$

37) $f(x)=x^3+x^2+7x+7$

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=1$에서 $f(x)-x^3$은 이차식이고 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$ (a, b는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-4$에서 $x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

$-1+1-a+b=0$ $\therefore$ $a=b$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^3+x^2+bx+b=(x+1)(x^2+b)$라고 놓으면

$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+b)}{x^2-1}=\frac{b+1}{-2}$

$\frac{b+1}{-2}=-4$이므로 $b=7$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+7)=x^3+x^2+7x+7$

38) $f(x)=x^3+x^2+2x$

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)-x^3=x^2+ax+b$

$\therefore\ f(x)=x^3+x^2+ax+b$ (a, b는 상수) ⋯ ㉠

또, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때, (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

즉, ㉠에서 $b=0$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+ax$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+x+a)=a$

즉, $a=2$이므로 $f(x)=x^3+x^2+2x$

39) $f(x)=x^3+x^2+5x$

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$이므로 $f(x)$는 삼차항과 이차항의 계수가 모두 1인 삼차식이다. ⋯⋯ ㉠

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$에서 $x\to0$일 때, (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^3+x^2+ax$(a는 상수)라고 놓으면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+x+a)=a$

$a=5$이므로 $f(x)=x^3+x^2+5x$

40) 3

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{f(x)}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

또, $\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=3$에서 $x\to2$일 때, (분자) → 0이므로 (분모) → 0이어야 한다.

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$에서 함수 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x-a)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x-a}=\frac{6}{2-a}$

즉, $\frac{6}{2-a}=3$이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=x(x-2)$이므로 $f(3)=3$

41) $\frac{7}{4}$

⇨ $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}=2$에서

$x\to2$일 때, (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$\lim_{x\to2}(ax^2+bx+c)=4a+2b+c=0$ ⋯ ㉠

또, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}=1$에서

$a=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $c=-2b-4$ ⋯ ㉢

$\therefore\ f(x)=\frac{x^2+bx-2b-4}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x+b+2)}{(x-2)(x+1)}$

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x+b+2}{x+1}=\frac{b+4}{3}=2$

$\therefore\ b=2$

$b=2$를 ㉢에 대입하면 $c=-8$

따라서 $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}$이므로

$f(3)=\frac{7}{4}$

42) 7

⇨ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로 함수 $f(x)$의 차수를 n이라고 하면 $n\le2$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$에서 $x\to0$일 때, (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

$f(x)=ax^2+bx$(a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}(ax+b)=b=5$

이때, 방정식 $f(x)=x$, 즉 $ax^2+5x=x$의 한 근이 $x=-2$이므로 $4a-10=-2$에서 $4a=8$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+5x$이므로 $f(1)=7$

43) 1

⇨ $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$에서 $x\to1$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$이고 $g(x)$가 다항함수이므로

$g(1)-2=0$

$\therefore g(1)=2$

$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$에서

$f(x)=(x-1)g(x)-(x-1)=(x-1)\{g(x)-1\}$

⋯⋯ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1}$

$=\frac{\{g(1)-1\}g(1)}{1+1}=\frac{(2-1)\times2}{2}=1$

44) 0

⇨ $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$로 놓으면

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{ax^2+bx+c}=2\ \ \therefore \frac{2}{a}=2\ \ \therefore a=1$

또, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2+bx+c}=3$에서 $x\to 2$일 때,

(분자)→0이므로 (분모)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+bx+c)=0$, $4+2b+c=0$

$\therefore c=-2b-4$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{x^2+bx-2b-4}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+b+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x+b+2}=\frac{6}{4+b}=3$

$\therefore b=-2, c=0\ \ \therefore f(x)=x^2-2x\ \ \therefore f(2)=0$

45) 5

⇨ 조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. 또, 조건 (나)에서 $x\to 1$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다.

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$

즉, $f(x)=2(x-1)(x+a)$(a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}2(x+a)=2(1+a)=3\ \ \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로

$f(2)=2\cdot 1\cdot \frac{5}{2}=5$

46) 3

⇨ $\frac{3x+5}{x}<f(x)<\frac{3x^2+7x}{x^2}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x}{x^2}=3$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=3$

47) 2

⇨ $\frac{2x-3}{x}\le f(x)\le \frac{2x^2+5x}{x^2}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x}\right)=2$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

48) 1

⇨ $\frac{x-4}{x+1}<f(x)<\frac{x-2}{x+1}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1\ \ \therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=1$

49) 1

⇨ $\frac{x+2}{x+1}<f(x)<\frac{x+1}{x}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

50) $\frac{1}{2}$

⇨ $\frac{x^2+1}{2x^2-4x+1}<f(x)<\frac{2x^2+5x+3}{4x^2-1}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+3}{4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{4-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

51) $\frac{1}{3}$

⇨ $\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1}<f(x)<\frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}=\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$

52) 3

⇨ $x^2+2x \le f(x) \le 2x^2+1$이고

$\lim_{x\to1}(x^2+2x)=3$,

$\lim_{x\to1}(2x^2+1)=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=3$

53) 1

⇨ $x^2+2 \le f(x) \le x^2+5$의 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{x^2+2}{x^2} \le \frac{f(x)}{x^2} \le \frac{x^2+5}{x^2}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^2}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

54) 5

⇨ $x^2+3x-4 \le f(x) \le 4x^2-3x-1$에서

(ⅰ) $x>1$일 때 $x-1>0$이므로 양변을 $x-1$로 나누면

$\frac{x^2+3x-4}{x-1} \le \frac{f(x)}{x-1} \le \frac{4x^2-3x-1}{x-1}$

이때, $\lim_{x\to1+}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+4)=5$,

$\lim_{x\to1+}\frac{4x^2-3x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(4x+1)=5$이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=5$

(ⅱ) $x<1$일 때 $x-1<0$이므로 양변을 $x-1$로 나누면

$\frac{4x^2-3x-1}{x-1} \le \frac{f(x)}{x-1} \le \frac{x^2+3x-4}{x-1}$

이때, $\lim_{x\to1-}\frac{4x^2-3x-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}(4x+1)=5$,

$\lim_{x\to1-}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x+4)=5$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=5$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$

55) 4

⇨ $2x-1<f(x)<2x+1$의 각 변을 제곱하면

$(2x-1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+1)^2$

$x^2-x+1>0$이므로 각 변을 x^2-x+1로 나누면

$\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}<\frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1}{x^2-x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=4$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^2-x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=4$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}=4$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}=4$

56) $\frac{4}{3}$

⇨ $2x-3<f(x)<2x+4$의 각 변을 제곱하면

$(2x-3)^2<\{f(x)\}^2<(2x+4)^2$

$x\to\infty$일 때, $x>0$이므로 각 변을 $3x^2-x+1$로 나누면

$\frac{(2x-3)^2}{3x^2-x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1}<\frac{(2x+4)^2}{3x^2-x+1}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^2}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+4)^2}{3x^2-x+1}=\frac{4}{3}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1}=\frac{4}{3}$

57) 2

⇨ 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로

점 $P(t,t+1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 PQ의 방정식은 $y-(t+1)=-(x-t)$ $\therefore y=-x+2t+1$

$x=0$일 때, $y=2t+1$이므로 $Q(0,2t+1)$

$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$

$\overline{AQ}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$

58) $\frac{1}{2}$

⇨ 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+2$이다. 이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 선분 AB 위의 점이므로 $b=-a+2$ $(0\le a\le 2)$

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{PH}}=b=-a+2$이므로 사각형 OHPM의 넓이는

$f(a)=\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=a(2-a)$

$\therefore \lim_{a\to2-}\frac{f(a)}{4-a^2}=\lim_{a\to2-}\frac{a(2-a)}{(2+a)(2-a)}=\lim_{a\to2-}\frac{a}{2+a}=\frac{1}{2}$

59) $\frac{1}{2}$

⇨ 점 $P(a,b)$가 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로

$b=a^2 \quad \therefore S(a)=a\cdot a^2=a^3$

$L(a)=2(a+a^2)=2a^2+2a$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{aL(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^3}{2a^3+2a^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}$$

60) 2

⇨ 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 포물선 $y=2(x+1)^2$ 위의 점이므로

$b=2(a+1)^2$

이때, 점 Q의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times b=\frac{1}{2}\times 1\times 2(a+1)^2=a^2+2a+1$$

$$\therefore \lim_{a\to 0}\frac{S(a)-1}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{a^2+2a}{a}=\lim_{a\to 0}(a+2)=2$$

61) 5

⇨ $\overline{PA}=\sqrt{(t-3)^2+16t}$, $\overline{PH}=t$이므로

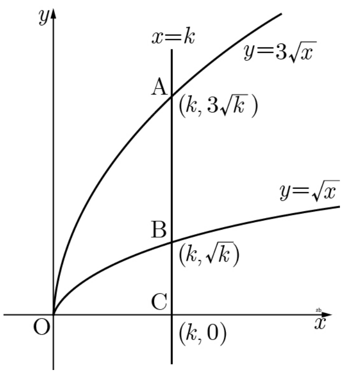
$$\lim_{t\to\infty}(\overline{PA}-\overline{PH})=\lim_{t\to\infty}\sqrt{(t-3)^2+16t}-t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-3)^2+16t-t^2}{\sqrt{(t-3)^2+16t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{10t+9}{\sqrt{t^2+10t+9}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{10+\frac{9}{t}}{\sqrt{1+\frac{10}{t}+\frac{9}{t^2}}+1}=5$$

62) $\frac{1}{3}$

⇨ 

$\overline{OA}=\sqrt{k^2+(3\sqrt{k})^2}=\sqrt{k^2+9k}$, $\overline{AC}=3\sqrt{k}$,

$\overline{OB}=\sqrt{k^2+(\sqrt{k})^2}=\sqrt{k^2+k}$, $\overline{BC}=\sqrt{k}$ 이므로

$$\lim_{k\to 0+}\frac{\overline{OA}-\overline{AC}}{\overline{OB}-\overline{BC}}$$

$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k(k+9)}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}-\sqrt{k}}$$

$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+9}-3)}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-1)}\quad(\because k>0)$$

$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}$$

$$=\lim_{k\to 0+}\frac{(\sqrt{k+9}-3)(\sqrt{k+9}+3)(\sqrt{k+1}+1)}{(\sqrt{k+1}-1)(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+9}+3)}$$

$$=\lim_{k\to 0+}\frac{k(\sqrt{k+1}+1)}{k(\sqrt{k+9}+3)}=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}$$

$$=\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}$$

63) $\frac{1}{2}$

⇨ 점 Q의 좌표를 $(0,y)$, 점 P의 좌표를 (x,x^2)으로 놓으면 $\overline{QO}^2=\overline{QP}^2$이므로

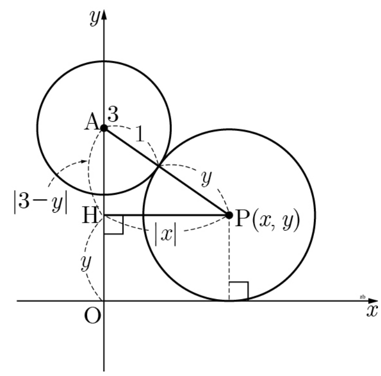
$y^2=x^2+(x^2-y)^2$, $y^2=x^2+x^4-2x^2y+y^2$

$\therefore y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2$

$P\to O$이면 $x\to 0$이므로 구하는 값은

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}$$

64) 8

⇨ 

중심이 P인 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 점 P의 y좌표와 같다.

이때, 중심이 A인 원의 반지름의 길이가 1이고 두 원이 외접하므로 $\overline{PA}=y+1$

또, 두 점 $A(0,3)$, $P(x,y)$에 의하여 $\overline{PH}=|x|$이고 $\overline{OH}=y$이므로 $\overline{AH}=|3-y|$

직각삼각형 AHP에서 $\overline{PA}^2=\overline{PH}^2+\overline{AH}^2$이므로

$(y+1)^2=x^2+(3-y)^2$, $1+2y+y^2=x^2+9-6y+y^2$

$x^2=8y-8 \quad \therefore y=\frac{x^2+8}{8}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\frac{x^2+8}{8}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{x^2+16}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{1+\frac{16}{x^2}}=8$$

65) $\sqrt{5}$

⇨ 직선 l의 y절편을 b라고 하면 직선 l의 기울기가 -2이므로 직선 l의 방정식은 $2x+y-b=0$

이때, 점 $C(2,0)$과 직선 l 사이의 거리는 원 C의 반지름의 길이 r와 같으므로

$\dfrac{|2\times 2+0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|4-b|}{\sqrt{5}}=r \quad \therefore b=4\pm\sqrt{5}r$

또한 점 $C'(3,3)$과 직선 l 사이의 거리는 원 C'의 반지름의 길이 $f(r)$와 같으므로

$\dfrac{|3\times 2+3-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|9-b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|5\pm\sqrt{5}r|}{\sqrt{5}}=f(r)$

$\therefore \lim\limits_{r\to 0+}f(r)=\lim\limits_{r\to 0+}\dfrac{|5\pm\sqrt{5}r|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

66) 1

⇨ $\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\times a\times 2=a$ $\cdots$ ㉠

또, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2}=\sqrt{a^2+4}$이고 삼각형 OAB에 내접하는 원의 중심을 C라 하면 이 원의 반지름의 길이가 $f(a)$이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{COA}+\triangle\mathrm{CAB}+\triangle\mathrm{CBO}$

$=\dfrac{1}{2}\times f(a)\times(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{OB}})$

$=\dfrac{1}{2}\times f(a)\times(a+\sqrt{a^2+4}+2)$ $\cdots$ ㉡

㉠$=$㉡이므로

$a=\dfrac{1}{2}\times f(a)\times(a+\sqrt{a^2+4}+2)$에서

$f(a)=\dfrac{2a}{a+2+\sqrt{a^2+4}}$

$\therefore \lim\limits_{a\to\infty}f(a)=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{2a}{a+2+\sqrt{a^2+4}}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{a}+\sqrt{1+\dfrac{4}{a^2}}}=\dfrac{2}{1+1}=1$

67) (1) $S(a)=4(1-a^2)$, (2) $\dfrac{1}{8}$

⇨ (1) 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=b$이다.

이때, 점 A는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=1$에서 $b^2=1-a^2$

따라서 $b=\sqrt{1-a^2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2b=2\sqrt{1-a^2}$

$\therefore S(a)=\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\sqrt{1-a^2})^2=4(1-a^2)$

(2) $\lim\limits_{a\to 1-}\dfrac{1-a}{S(a)}=\lim\limits_{a\to 1-}\dfrac{1-a}{4(1-a^2)}=\lim\limits_{a\to 1-}\dfrac{1-a}{4(1+a)(1-a)}$

$=\lim\limits_{a\to 1-}\dfrac{1}{4(1+a)}=\dfrac{1}{4\times 2}=\dfrac{1}{8}$

68) $\dfrac{3}{2}$

⇨ 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+3a}$ ($\because$ $b=\sqrt{3a}$)이고

점 $\mathrm{B}(a,\ 0)$을 지나는 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OB}}=a$이다.

이때, 두 원의 반지름의 길이의 차 $f(a)$는

$f(a)=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{a^2+3a}-a$이므로

$\lim\limits_{a\to\infty}f(a)=\lim\limits_{a\to\infty}(\sqrt{a^2+3a}-a)$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{(\sqrt{a^2+3a}-a)(\sqrt{a^2+3a}+a)}{\sqrt{a^2+3a}+a}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{3a}{\sqrt{a^2+3a}+a}=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{a}}+1}$

$=\dfrac{3}{2}$

69) 0

⇨ 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+y^2=r^2$

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 원과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점이므로

$x^2+y^2=r^2$, $y=\sqrt{x}$를 연립하여 r를 구하면

$x^2+x=r^2 \qquad \therefore r=\sqrt{x^2+x}$

이때, $\overline{\mathrm{QH}}=r-x=\sqrt{x^2+x}-x$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}(\sqrt{x^2+x}+x)=0$

70) $\dfrac{1}{2\pi}$

⇨ 점 A의 좌표가 $(t,\ \sqrt{2t})$이므로 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{t^2+2t}$

따라서 원의 넓이는 $S(t)=\pi\overline{\mathrm{OA}}^2=\pi(t^2+2t)$이다.

한편, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 넓이는

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{t^2+2t}\times\sqrt{2t}$

$=\dfrac{\sqrt{2t^3+4t^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2t^2(t+2)}}{2}$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}\to 0+$이면 $t\to 0+$이므로

$\lim\limits_{\overline{\mathrm{OA}}\to 0+}\dfrac{T(t)}{S(t)}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\dfrac{t\sqrt{2t+4}}{2}}{\pi(t^2+2t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2t+4}}{2\pi(t+2)}=\dfrac{1}{2\pi}$