01 x, y에 대한 대칭식인 연립방정식의 풀이

(1) x, y에 대한 대칭식: x와 y를 바꾸어도 원래의 식과 같아지는 식을 대칭식이라고 한다.

(2) 대칭식인 연립방정식의 풀이: $x+y=p$, $xy=q$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-pt+q=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

$\Leftrightarrow$ $t^2-(x+y)t+xy=0$, $(t-x)(t-y)=0$

$\therefore t=x$ 또는 $t=y$

◪ 다음 연립방정식을 풀어라.

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-xy+y=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12 \\ xy=-8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+xy=-5 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

12. $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+y^2=80 \\ xy=32 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ xy=12 \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy+x+y=7 \\ 2xy-x-y=2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=-1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+y+xy=6 \\ x^2y+xy^2=8 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ xy=28 \end{cases}$

23. $\begin{cases} xy+2x+2y=-10 \\ xy-x-y=-1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} xy-2x-2y=-2 \\ xy+x+y=19 \end{cases}$

25. $\begin{cases} xy+x+y=1 \\ x^2+y^2+2x+2y=3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} xy+3x+3y=0 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

02 연립방정식의 활용

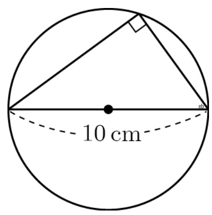
연립방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
① 구하고자 하는 것을 미지수로 놓는다.
② 주어진 조건을 이용하여 연립방정식을 세운다.
③ 연립방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건을 만족하는지 확인한다.

◪ **다음 물음에 답하여라.**

33. **대각선의 길이가 $15cm$인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $2cm$씩 늘렸더니 그 넓이가 처음보다 $46cm^2$만큼 더 커졌다. 가로의 길이가 세로의 길이보다 길 때, 처음 직사각형의 세로의 길이를 구하여라.**

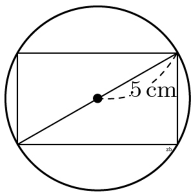
34. **대각선의 길이가 $10cm$인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $2cm$씩 늘렸더니 그 넓이가 처음 넓이보다 $32cm^2$만큼 커졌다. 이때, 처음 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 구하여라. (단, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길다.)**

35. **다음 그림과 같이 지름의 길이가 $10cm$인 원에 내접하는 직각삼각형의 둘레의 길이가 $24cm$일 때, 나머지 두 변의 길이를 구하여라.**

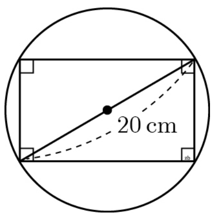


36. 대각선의 길이가 $50cm$인 직사각형의 가로를 $4cm$ 늘리고, 세로를 $8cm$ 줄였더니 그 넓이가 처음보다 $48cm^2$만큼 더 커졌다. 처음 직사각형의 세로의 길이를 구하여라.

37. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $5cm$인 원에 내접하는 직사각형이 있다. 직사각형의 둘레의 길이가 $28cm$일 때, 이 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단, $(\text{가로의 길이}) > (\text{세로의 길이})$)



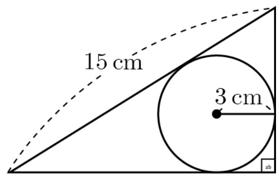
38. 다음 그림과 같이 지름의 길이가 $20cm$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이가 $56cm$일 때, 이 직사각형의 넓이를 구하여라.



39. 길이가 $280cm$인 철사를 남김없이 사용하여 한 변의 길이가 $x\,cm$, ycm인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 $2900cm^2$일 때, x, y의 값을 구하여라. (단, $x > y$이고 철사의 굵기는 무시한다.)

40. 길이가 $48cm$인 철사를 잘라서 한 변의 길이가 각각 acm, bcm인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 $74cm^2$일 때, a, b의 값을 구하여라. (단, $a > b$이고, 철사는 모두 사용하고 굵기는 무시한다.)

41. 다음 그림과 같이 빗변의 길이가 $15cm$이고 내접원의 반지름의 길이가 $3cm$인 직각삼각형이 있다. 이 직각삼각형의 빗변이 아닌 다른 두 변의 길이를 각각 구하여라.



42. 길이가 $160cm$인 철사를 잘라서 한 변의 길이가 각각 acm, bcm인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 $850cm^2$일 때, a, b의 값을 구하여라. (단, $a > b$이고, 철사는 모두 사용하고 굵기는 무시한다.)

43. 두 자리 정수에서 각 자리 숫자의 제곱의 합은 73이고, 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾼 정수와 처음 정수와의 합은 121일 때, 처음 정수를 구하여라. (단, 십의 자리의 숫자가 일의 자리 숫자보다 크다.)

03 정수 조건의 부정방정식

(1) **부정방정식**: 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적어 그 근을 정할 수 없는 방정식

(2) **정수 조건의 부정방정식**:
(일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형하여 일차식이 정수의 약수가 됨을 이용한다.

◪ **다음 방정식을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하여라.**

44. $xy+4x-2y-10=0$

45. $6xy+4x-3y-7=0$

46. $xy-2x-3y+1=0$

47. $xy-3x-y=0$

48. $xy-x-y-1=0$

49. $xy+3x-2y-2=0$

50. $x+y-xy=4$

51. $xy-x-3y=2$

◪ **다음 방정식을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 구하여라.**

52. $xy-4x-3y+5=0$

53. $xy-3x+2y=0$

54. $xy-3x-3y+7=0$

55. $xy-4x-3y+10=0$

56. $xy+2x-3y-14=0$

04 실수 조건의 부정방정식

① A, B가 실수이고 $A^2+B^2=0$의 꼴이면 $A=B=0$임을 이용한다.
② 실수 x, y에 대한 이차방정식으로 주어지면 한 문자에 대하여 정리한 후 판별식 $D \geq 0$임을 이용한다.

◪ **다음 방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.**

57. $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

58. $2x^2-6xy+9y^2-6x+9=0$

59. $x^2+y^2-4x-6y+13=0$

60. $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$

61. $x^2-8xy+17y^2-6y+9=0$

62. $x^2-2xy+2y^2+4x-6y+5=0$

63. $x^2+2y^2+2xy-2x-6y+5=0$

64. $x^2-2xy+2y^2-4x+2y+5=0$

65. $4x^2-4xy+2y^2-2y+1=0$

66. $x^2+y^2-6x+2y=-10$

67. $x^2-4x+y^2-8y+20=0$

68. $x^2-6xy+10y^2-2y+1=0$

69. $9x^2-6xy+4y^2-3x-2y+1=0$

70. $x^2+y^2+2x-8y+17=0$

71. $x^2+y^2-2x-4y+5=0$

72. $x^2+y^2-4x+6y+13=0$

정답 및 해설

1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

⇨ x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2y-8=0$의 두 근이므로 $(t+2)(t-4)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-18 \end{cases}$ 에서 x, y는 $t^2-3t-18=0$의 두 근이고,

$(t+3)(t-6)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$ 에서 x, y는 $t^2+5t-6=0$의 두 근이고,

$(t+6)(t-1)=0$ $\therefore t=-6$ 또는 $t=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}$ 에서 x, y는 $t^2+4t+3=0$의 두 근이고,

$(t+1)(t+3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=-3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15 \end{cases}$ 에서 x, y는 $t^2-2t-15=0$의 두 근이고,

$(t+3)(t-5)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=5$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

⇨ x, y의 합은 8이고 곱이 15이므로 두 수 x, y는 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이 된다.

인수분해하면 $(t-3)(t-5)=0$이므로

$t=3$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

⇨ x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이고,

$(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

[다른 풀이]

$\begin{cases} x+y=6 \cdots ㉠ \\ xy=8 \quad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면

$y=-x+6$ $\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(-x+6)=8, x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

㉢에서 $x=2$이면 $y=4$, $x=4$이면 $y=2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

⇨ $x-xy+y=5$에서 $x+y=-1$이므로

$xy=-6$

즉 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12 \\ xy=-8 \end{cases}$ 에서 $x+y=p$, $xy=q$라 하면

$\begin{cases} p^2-q=12 \cdots ㉠ \\ q=-8 \quad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $p^2=4$ $\therefore p=\pm 2$

(ⅰ) $p=2, q=-8$이면 x, y는 $t^2-2t-8=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t-4)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

(ⅱ) $p=-2, q=-8$이면 x, y는 $t^2+2t-8=0$의 두 근이다.

$(t-2)(t+4)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=-4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x+y+xy=-5 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ 에서 $x+y=p, xy=q$라 하면

$\begin{cases} p+q=-5 \\ p^2-2q=10 \end{cases}$ 이고, 이 연립방정식을 풀면

$\begin{cases} p=0 \\ q=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} p=-2 \\ q=-3 \end{cases}$

(ⅰ) $p=0, q=-5$이면 x, y는 $t^2-5=0$의 두 근이다.

$t^2=5$에서 $t=\pm\sqrt{5}$

$\therefore \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$

(ⅱ) $p=-2, q=-3$이면 x, y는 $t^2+2t-3=0$의 두 근이다.

$(t+3)(t-1)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또 는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또 는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또 는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

⇨ $x+y=p$, $xy=q$라 하면 $\begin{cases} p^2-2q=13 \cdots ㉠ \\ q=-6 \qquad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $p^2=1$ $\quad\therefore p=\pm1$

(ⅰ) $p=1, q=-6$이면 x, y는 $t^2-t-6=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t-3)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(ⅱ) $p=-1, q=-6$이면 x, y는 $t^2+t-6=0$의 두 근이다.

$(t-2)(t+3)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 $x+y=p, xy=q$라 하면

$\begin{cases} p+q=-1 \cdots ㉠ \\ p^2-2q=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $q=-p-1 \cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면 $p^2+2p-3=0$

$(p+3)(p-1)=0$ $\therefore p=-3$ 또는 $p=1$

㉢에서 $p=-3$이면 $q=2$, $p=1$이면 $q=-2$

(ⅰ) $p=-3$, $q=2$이면 x, y는 $t^2+3t+2=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t+1)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

(ⅱ) $p=1$, $q=-2$이면 x, y는 $t^2-t-2=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-2)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 $x+y=p, xy=q$라 하면

$\begin{cases} p^2-q=3 \\ p^2-2q=5 \end{cases}$ 이고, 이 연립방정식을 풀면

$\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} p=-1 \\ q=-2 \end{cases}$

(ⅰ) $p=1, q=-2$이면 x, y는 $t^2-t-2=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-2)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(ⅱ) $p=-1, q=-2$이면 x, y는 $t^2+t-2=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t-1)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

⇨ $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=80 \cdots ㉠ \\ v=32 \qquad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-64=80$

$u^2=144$ $\therefore u=\pm12$

(ⅰ) $u=12, v=32$, 즉 $x+y=12, xy=32$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-12t+32=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-8)=0 \quad \therefore t=4$ 또는 $t=8$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

(ⅱ) $u=-12, v=32$, 즉 $x+y=-12$, $xy=32$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2+12t+32=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t+8)=0 \quad \therefore t=-4$ 또는 $t=-8$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

⇨ 두 수 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-9t+20=0$의 두 근이 된다.

$(t-4)(t-5)=0 \quad \therefore t=4$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

⇨ $x+y=u, xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=40 \cdots ㉠ \\ v=12 \quad\quad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-24=40$

$u^2=64 \quad \therefore u=\pm 8$

(ⅰ) $u=8, v=12$, 즉 $x+y=8, xy=12$일 때, x, y는 이차방정식

$t^2-8t+12=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-6)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=6$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

(ⅱ) $u=-8, v=12$, 즉 $x+y=-8, xy=12$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2+8t+12=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t+6)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=-6$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} xy+x+y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2xy-x-y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라고 하면

㉠에서 $v+u=7$ ……㉢

㉡에서 $2v-u=2$ ……㉣

㉢+㉣을 하면 $3v=9$

$\therefore v=3$

이를 ㉢에 대입하면 $u=4$

따라서 $u=4$, $v=3$일 때 x, y는 이차방정식

$t^2-4t+3=0$의 두 근이므로 $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

⇨ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $(-1)^2=-1+2xy$

$2xy=2 \quad \therefore xy=1$

$x+y=-1, xy=1$일 때, x, y는 이차방정식

$t^2+t+1=0$의 두 근이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

19) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라고 하면

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$

㉠에서 $u^2-2v-u=2$ ……㉢

㉡에서 $u^2-v=1$ ……㉣

㉢−㉣을 하면 $-u-v=1$

$\therefore v=-u-1$ ……㉤

㉤을 ㉣에 대입하면

$u^2+u=0$, $u(u+1)=0 \quad \therefore u=0$ 또는 $u=-1$

$u=0$일 때 $v=-1$, $u=-1$일 때 $v=0$

(ⅰ) $u=0$, $v=-1$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로 $(t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=\pm 1$

(ⅱ) $u=-1$, $v=0$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2+t=0$의

두 근이므로 $t(t+1)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x=1+\sqrt{3}i \\ y=1-\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1-\sqrt{3}i \\ y=1+\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2-\sqrt{2} \\ y=2+\sqrt{2} \end{cases}$

⇨ $x+y=u$, $xy=v$라고 하면 주어진 연립방정식은

$u+v=6 \quad \therefore v=6-u$ …… ㉠

$uv=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$u(6-u)=8$, $u^2-6u+8=0$

$(u-2)(u-4)=0 \quad \therefore u=2$ 또는 $u=4$

$u=2$일 때, $v=4$, $u=4$일 때, $v=2$

(ⅰ) $u=2, v=4$ 즉, $x+y=2$, $xy=4$일 때, x, y는

이차방정식 $t^2-2t+4=0$의 두 근이다.

$\therefore t=1\pm\sqrt{3}i$

(ⅱ) $u=4, v=2$ 즉, $x+y=4$, $xy=2$일 때, x, y는

이차방정식 $t^2-4t+2=0$의 두 근이다.

$\therefore t=2\pm\sqrt{2}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}i\\y=1-\sqrt{3}i\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1-\sqrt{3}i\\y=1+\sqrt{3}i\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\y=2-\sqrt{2}\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\y=2+\sqrt{2}\end{cases}$

21) $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

⇨ $x+y=u, xy=v$로 치환하면

$\begin{cases}u^2-2v-u=2\\u^2-v=1\end{cases}$

두 식을 빼면 $u=-v-1$

$u^2-v=1$에 대입하면 $v^2+v=0$ $v(v+1)=0$

$\therefore xy$의 값은 0또는 -1이다.

따라서 $\begin{cases}x+y=-1\\xy=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+y=0\\xy=-1\end{cases}$ 이므로

주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

22) $\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=-7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-7\\y=-4\end{cases}$

⇨ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=121$

$\therefore x+y=\pm 11$

$i)$ $\begin{cases}x+y=11 & \cdots ㉠\\xy=28 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\therefore x=4$, $y=7$ 또는 $x=7$, $y=4$

$ii)$ $\begin{cases}x+y=-11 & \cdots ㉢\\xy=28 & \cdots ㉣\end{cases}$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$\therefore x=-4$, $y=-7$ 또는 $x=-7$, $y=-4$

23) $\begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$

⇨ $\begin{cases}xy+2x+2y=-10 & \cdots ㉠\\xy-x-y=-1 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$3x+3y=-9$

$x+y=-3$

따라서 ㉡에 $y=-x-3$을 대입하면

$x(-x-3)-x-(-x-3)=-1$

$-x^2-3x-x+x+3=-1$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-4$

24) $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$

⇨ $\begin{cases}xy-2x-2y=-2 & \cdots ㉠\\xy+x+y=19 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡ 을 하면

$-3x-3y=-21$

$x+y=7$

$\therefore y=7-x \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉡ 에 대입하면

$x(7-x)+x+(7-x)=19$

$-x^2+7x+x+7-x=19$

$x^2-7x+12=0$

$(x-4)(x-3)=0$

$\therefore \begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$

25) $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

⇨ $\begin{cases}xy+x+y=1 & \cdots ㉠\\x^2+y^2+2x+2y=3 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x+y=1-xy$ 이므로 ㉡에 대입하면

$x^2+y^2+2x+2y=3 \Rightarrow x^2+y^2+2(1-xy)=3$

$x^2+y^2-2xy=1$

$(x-y)^2=1$

$\therefore x-y=\pm 1$

$i)$ $x-y=1$

$y=x-1$ 이므로 ㉠에 대입하면

$x(x-1)+x+(x-1)=1$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y=-3$ 또는 $y=0$

$ii)$ $x-y=-1$

$y=x+1$ 이므로 ㉠에 대입하면

$x(x+1)+x+(x+1)=1$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$

$y=1$ 또는 $y=-2$

26) $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

⇨ $\begin{cases}x+y=4 & \cdots ㉠\\xy=4 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=4-x$ 이므로 ㉡에 대입하면

$x(4-x)=4$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$
$\therefore x=2$, $y=2$

27) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

⇨ 주어진 연립방정식을 더하면
$2x^2+2y^2=10$, $x^2+y^2=5$이고
주어진 연립방정식을 빼면
$2xy=4$, $xy=2$이다.
$\therefore x=2,\ y=1$ 또는 $x=1,\ y=2$ 또는 $x=-2,\ y=-1$ 또는 $x=-1,\ y=-2$

28) $\begin{cases}x=3\\y=-\frac{3}{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\y=3\end{cases}$

⇨ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-\frac{5}{2}$
$\frac{x^2+y^2}{xy}=-\frac{5}{2}$
$2x^2+5xy+2y^2=0$
$(x+2y)(2x+y)=0$
$\therefore x=-2y$ 또는 $x=-\frac{1}{2}y$
(i) $x=-2y$ 일 때
$xy+3x+3y=0$ 에 $x=-2y$를 대입하면
$-2y^2-6y+3y=0$
$2y^2+3y=0$ $\therefore y=0$ 또는 $y=-\frac{3}{2}$
$y\neq 0$ 이므로 $y=-\frac{3}{2},x=3$
(ii) $x=-\frac{1}{2}y$일 때
$xy+3x+3y=0$ 에 $x=-\frac{1}{2}y$를 대입하면
$-\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}y+3y=0$
$y^2-3y=0$
$y=0$ 또는 $y=3$
$y\neq 0$ 이므로 $y=3,x=-\frac{3}{2}$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$x=3,\ y=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-\frac{3}{2},\ y=3$

29) $\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

⇨ $y=2-x$이므로
$x^2+x(2-x)+(2-x)^2=7$에서 정리하면
$x^2-2x-3=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.
따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=-1$

30) $\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=6\end{cases}$

⇨ $x+y=14$에서 $y=14-x$
$x^2+y^2=100$에 대입하면 $x^2+(14-x)^2=100$에서
$2x^2-28x+96=0$, $2(x-6)(x-8)=0$
$\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=6\end{cases}$

31) $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

⇨ $x^2+xy+y^2=1$에서 $x^2+y^2=1-xy$
이를 $x^2+y^2+x+y=2$에 대입하면
$1-xy+x+y-2=0$에서
$x+y-xy-1=(x-1)(-y+1)=0$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$x=1,\ y=0$ 또는 $x=1,\ y=-1$ 또는 $x=0,\ y=1$ 또는 $x=-1,\ y=1$

32) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

⇨ $x^2+y^2=5$는 $(x+y)^2-2xy=5\cdots$㉠와 같으므로
㉠에 $xy=2$를 대입하면
$x+y=3$ 또는 $x+y=-3$이다.
(i) $x+y=3$, $xy=2$인 경우
x,y를 두 근으로 갖는 이차방정식
$t^2-3t+2=0$의 해를 구하면 $t=1,2$이므로
$(x,\ y)=(1,2),(2,1)$이다.
(ii) $x+y=-3$, $xy=2$인 경우
x,y를 두 근으로 갖는 이차방정식
$t^2+3t+2=0$의 해를 구하면 $t=-1,\ -2$이므로
$(x,\ y)=(-1,-2),(-2,-1)$
(i), (ii)에서 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

33) $9cm$

⇨ 처음 직사각형의 가로의 길이를 $x\,cm$, 세로의 길이를 $y\,cm$라 하면 대각선의 길이가 $15cm$이므로
$x^2+y^2=15^2$ $\therefore x^2+y^2=225$ $\cdots$ ㉠
직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $2cm$씩 늘렸더니
직사각형의 넓이가 처음보다 $46cm^2$만큼 커졌으므로
$(x+2)(y+2)=xy+46$
$\therefore x+y=21$ $\cdots$ ㉡
㉠,㉡을 연립하여 풀면
$x=12, y=9(\because x>y)$
따라서 처음 직사각형의 세로의 길이는 $9cm$이다.

34) 가로의 길이:$8cm$, 세로의 길이:$6cm$

⇨ 처음 직사각형의 가로의 길이를 $x\,cm$, 세로의 길이를 $y\,cm(x>y)$라 하면 대각선의 길이가 $10cm$이므

로
$x^2+y^2=10^2 \quad \therefore x^2+y^2=100 \quad \cdots ㉠$
직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $2cm$씩 늘렸더니 직사각형의 넓이가 처음보다 $32cm^2$만큼 커졌으므로
$(x+2)(y+2)=xy+32 \quad \therefore x+y=14 \quad \cdots ㉡$
㉠,㉡을 연립하여 풀면 $x=8, y=6(\because x>y)$
따라서 처음 직사각형의 가로의 길이는 $8cm$, 세로의 길이는 $6cm$이다.

35) $6cm, 8cm$
⇨ 나머지 두 변의 길이를 각각 $x\,cm, y\,cm$라 하면
직각삼각형의 둘레의 길이가 $24cm$이므로
$x+y=14 \quad \cdots ㉠$
빗변의 길이가 $10cm$이므로
$x^2+y^2=100 \quad \cdots ㉡$
㉠,㉡을 연립하여 풀면
$x=6, y=8$ 또는 $x=8, y=6$
따라서 직각삼각형의 나머지 두 변의 길이는 $6cm$, $8cm$이다.

36) $48cm$
⇨ 처음 직사각형의 가로의 길이를 $x\,cm$, 세로의 길이를
$y\,cm$라 하면
$x^2+y^2=2500 \quad \cdots ㉠$
직사각형의 가로를 $4cm$ 늘리고,
세로를 $8cm$ 줄였더니
직사각형 넓이가 처음보다 $48cm^2$만큼 커졌으므로
$(x+4)(y-8)=xy+48$
$\therefore 2x-y=-20 \quad \cdots ㉡$
㉠,㉡을 연립하여 풀면
$x=14, y=48(\because x>0, y>0)$
따라서 처음 직사각형의 세로의 길이는 $48cm$이다.

37) $8\,cm$
⇨ 직사각형의 가로의 길이를 acm, 세로의 길이를 bcm
라고 하면
$\begin{cases}2a+2b=28\\ a^2+b^2=10^2\end{cases} ⇨ \begin{cases}a+b=14 & \cdots ㉠\\ a^2+b^2=10^2 & \cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $b=14-a$이므로 ㉡에 대입하면
$a^2+(14-a)^2=100$, $a^2-14a+48=0$
$(a-8)(a-6)=0 \quad \therefore a=8$ 또는 $a=6$
$\therefore \begin{cases}a=8\\ b=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=6\\ b=8\end{cases}$
$a>b$이므로 $a=8, b=6$
따라서 직사각형의 가로의 길이는 $8\,cm$이다.

38) $192(cm^2)$
⇨ 직사각형의 가로의 길이를 $x\,cm$, 세로의 길이를 $y\,cm$라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 $56cm$이므로
$2(x+y)=56 \quad \therefore x+y=28 \quad \cdots ㉠$
대각선의 길이가 $20cm$이므로
$x^2+y^2=20^2 \quad \therefore x^2+y^2=400 \quad \cdots ㉡$
㉠,㉡을 연립하여 풀면
$x=12, y=16$ 또는 $x=16, y=12$
따라서 직사각형의 넓이는
$12\cdot 16=192(cm^2)$

39) $x=50, y=20$
⇨ 처음 철사의 길이가 $280cm$이므로
$4x+4y=280 \quad \therefore x+y=70 \quad \cdots ㉠$
두 정사각형의 넓이의 합이 $2900cm^2$이므로
$x^2+y^2=2900 \quad \cdots ㉡$
㉠,㉡을 연립하여 풀면
$x=50, y=20(\because x>y)$

40) $a=7, b=5$
⇨ 문제의 조건에서 식을 세우면
$\begin{cases}4a+4b=48 \cdots ㉠\\ a^2+b^2=74 \cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $a+b=12, b=12-a$
$b=12-a$를 ㉡에 대입하면
$a^2+(12-a)^2=74$ ⇨ $a^2-12a+35=0$
$(a-5)(a-7)=0 \quad \therefore a=5$ 또는 $a=7$
$\therefore \begin{cases}a=5\\ b=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=7\\ b=5\end{cases}$
그런데 $a>b$이므로 $a=7, b=5$.

41) $9cm, 12cm$
⇨ 직각삼각형의 나머지 두 변의 길이를 각각 xcm, ycm라 하면 빗변의 길이가 $15cm$이므로
$x^2+y^2=15^2 \quad \therefore x^2+y^2=225 \quad \cdots ㉠$
내접원의 반지름의 길이가 $3cm$이므로
$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot y\cdot 3=\frac{1}{2}xy$
$\therefore 3x+3y-xy+45=0 \quad \cdots ㉡$
이때, $x+y=p, xy=q$라 하면
㉠에서 $p^2-2q=225$
㉡에서 $3p-q+45=0$
두 식을 연립하면 $p=21, q=108(\because p>0)$
$p=21, q=108$이면 x, y는 $t^2-21t+108=0$의 두 근이다.
$(t-12)(t-9)=0$에서 $t=12$ 또는 $t=9$
$\therefore \begin{cases}x=12\\ y=9\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=9\\ y=12\end{cases}$
따라서 직각삼각형의 빗변이 아닌 다른 두 변의 길이는 각각
$12cm, 9cm$이다.

42) $a=25, b=15$
⇨ 길이가 $160cm$인 철사를 잘라서 한 변의 길이가 각각
$acm, b\,cm$인 두 개의 정사각형을 만들었으므로

$4a+4b=160$ $\therefore a+b=40$ $\cdots$ ㉠
이 두 정사각형의 넓이의 합이 $850cm^2$이므로
$a^2+b^2=850$ $\cdots$ ㉡
㉠에서 $a=40-b$
이것을 ㉡에 대입하면
$(40-b)^2+b^2=850$, $b^2-40b+375=0$
$(b-25)(b-15)=0$ $\therefore b=25$ 또는 $b=15$
$\therefore a=25, b=15$ $(\because a>b)$

43) 83
⇨ 처음 두 자리 정수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리
의 숫자를 각각 x, y라고 하면
$\begin{cases} x^2+y^2=74 & \cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=121 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉡을 정리하면 $x+y=11$이므로 $y=11-x$
$y=11-x$를 ㉠에 대입하면
$x^2+(11-x)^2=73$, $x^2-11x+24=0$
$(x-3)(x-8)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=8$
$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$
$x>y$이므로 $x=8, y=3$
따라서 처음 정수는 83이다.

44)
$\begin{cases} x=0 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$
⇨ $xy+4x-2y-10=0$에서
$x(y+4)-2(y+4)-2=0$ $\therefore (x-2)(y+4)=2$
이때, x, y가 정수이므로 $x-2, y+4$의 값은 다음 표와 같다.

$x-2$	-2	-1	1	2
$y+4$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

45) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
⇨ $6xy+4x-3y-7=0$에서
$2x(3y+2)-(3y+2)-5=0$ $\therefore (2x-1)(3y+2)=5$
이때, x, y가 정수이므로 $2x-1, 3y+2$의 값은 다음 표와 같다.

$2x-1$	-5	-1	1	5
$3y+2$	-1	-5	5	1

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
<주의>
$3y+2=-5$, $3y+2=1$일 때의 y의 값은 정수가 아니다.

46)
$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$
⇨ $xy-2x-3y+1=0$에서
$x(y-2)-3(y-2)-5=0$ $\therefore (x-3)(y-2)=5$
이때, x, y가 정수이므로 $x-3, y-2$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3$	-5	-1	1	5
$y-2$	-1	-5	5	1

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$
⇨ $xy-3x-y=0$에서 $x(y-3)-(y-3)-3=0$
$\therefore (x-1)(y-3)=3$
이때, x, y가 정수이므로 $x-1, y-3$의 값은 다음 표와 같다.

$x-1$	-3	-1	1	3
$y-3$	-1	-3	3	1

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$

48) $x=2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=2$ 또는 $x=0,\ y=-1$ 또는 $x=-1,\ y=0$
⇨ $xy-x-y-1=(x-1)(y-1)-2=0$에서
$(x-1)(y-1)=2$를 만족하는 정수 (x, y)의 순서쌍은 $(2, 3), (3, 2), (0, -1), (-1, 0)$이다.
따라서 $x=2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=2$ 또는 $x=0, y=-1$ 또는 $x=-1, y=0$이다.

49) $x=-2,\ y=-2$ 또는 $x=6,\ y=-4$ 또는 $x=4,\ y=-5$ 또는 $x=0,\ y=-1$ 또는 $x=3,\ y=-7$ 또는 $x=1,\ y=1$
⇨ $xy+3x-2y-2=(x-2)(y+3)+4=0$에서
$(x-2)(y+3)=-4$이므로 $(x-2,\ y+3)$이 될 수 있는
순서쌍은 $(-4,\ 1)$, $(4,\ -1)$, $(2,\ -2)$, $(-2,\ 2)$, $(-1,\ 4)$
$(1,\ -4)$이므로 만족하는 $(x,\ y)$의 순서쌍을 구하면
$(-2,\ -2)$, $(6,\ -4)$, $(4,\ -5)$, $(0,\ -1)$, $(3,\ -7)$,
$(1,\ 1)$이다. 따라서 $x=-2,\ y=-2$ 또는 $x=6,\ y=-4$ 또는 $x=4,\ y=-5$ 또는 $x=0,\ y=-1$ 또는 $x=3,\ y=-7$ 또는 $x=1,\ y=1$이다.

50) $x=2, y=-2$ 또는 $x=4, y=0$ 또는 $x=0, y=4$ 또는 $x=-2, y=2$
⇨ $x+y-xy=4$에서 $(x-1)(-y+1)+1=4$,
$(x-1)(-y+1)=3$을 만족하는 (x, y)의 순서쌍은 $(2, -2)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$, $(-2, 2)$이다.

따라서 $x=2,\ y=-2$ 또는 $x=4,\ y=0$ 또는 $x=0,\ y=4$ 또는 $x=-2,\ y=2$

51) $x=4, y=6$ 또는 $x=8, y=2$ 또는 $x=2, y=-4$ 또는 $x=-2, y=0$
⇨ $xy-x-3y-2=(x-3)(y-1)-5=0$에서
$(x-3)(y-1)=5$를 만족하는 $(x,\ y)$의 순서쌍은
$(4,\ 6),\ (8,\ 2),\ (2,\ -4),\ (-2,\ 0)$이다.
따라서 $x=4, y=6$ 또는 $x=8, y=2$ 또는 $x=2, y=-4$ 또는 $x=-2,\ y=0$

52) $(4,11)$, $(10,5)$
⇨ $xy-4x-3y+5=0$에서
$x(y-4)-3(y-4)-7=0$ $\therefore (x-3)(y-4)=7$
이때, x, y가 자연수이므로 $x-3, y-4$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3$	1	7
$y-4$	7	1

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=11 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases}$

53) $(1,1)$, $(4,2)$
⇨ $xy-3x+2y=0$에서 $y(x+2)-3(x+2)=-6$
$(x+2)(y-3)=-6$

$x+2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y-3$	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

이를 만족하는 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(-8,4)$, $(-5,5)$, $(-4,6)$, $(-3,9)$, $(-1,-3)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,2)$
x, y는 자연수이므로 구하는 해는 $(1,1)$, $(4,2)$

54) $(1,2)$, $(2,1)$, $(4,5)$, $(5,4)$
⇨ $xy-3x-3y+7=0$에서
$x(y-3)-3(y-3)=2$ ⇨ $(x-3)(y-3)=2$

$x-3$	-2	-1	1	2
$y-3$	-1	-2	2	1

이를 만족하는 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1,2)$, $(2,1)$, $(4,5)$, $(5,4)$이고 x, y는 모두 자연수이므로 모두 구하는 해이다.

55) $(1,3), (2,2), (4,6), (5,5)$
⇨ $xy-4x-3y+10=0$에서
$x(y-4)-3(y-4)=2$ ⇨ $(x-3)(y-4)=2$

$x-3$	-2	-1	1	2
$y-4$	-1	-2	2	1

이를 만족하는 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1,3), (2,2), (4,6), (5,5)$이다.

56) $(4,6)$, $(5,2)$
⇨ $xy+2x-3y-14=0$에서
$x(y+2)-3(y+2)-8=0$ $\therefore (x-3)(y+2)=8$
이때, x, y가 자연수이므로 $x-3, y+2$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3$	1	2
$y+2$	8	4

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

57) $x=-1, y=2$
⇨ 주어진 식을 변형하면
$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$
$(x+1)^2+(y-2)^2=0$
이때, x, y가 실수이므로
$x+1=0, y-2=0$
$\therefore x=-1, y=2$

58) $x=3, y=1$
⇨ 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하면
$(x^2-6xy+9y^2)+(x^2-6x+9)=0$
$\therefore (x-3y)^2+(x-3)^2=0$
이때, x, y가 실수이므로
$x-3y=0, x-3=0$
$\therefore x=3, y=1$

59) $x=2, y=3$
⇨ $x^2+y^2-4x-6y+13=0$에서
$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=0$
$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=0$
이때, x, y가 실수이므로
$x-2=0, y-3=0$ $\therefore x=2, y=3$

60) $x=3, y=2$
⇨ 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2(1-2y)x+5y^2-8y+5=0$
x가 실수이므로 주어진 방정식이 실근을 가져야 한다.
$\frac{D}{4}=(1-2y)^2-5y^2+8y-5 \geq 0$
$-y^2+4y-4 \geq 0$ ⇨ $(y-2)^2 \leq 0$
y도 실수이므로 y의 값은 2뿐이다.
이 값을 주어진 방정식에 대입하면 $x^2-6x+9=0$
$(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$
$\therefore (x,y)=(3,2)$

61) $x=12, y=3$
⇨ $x^2-8xy+17y^2-6y+9=0$에서
$(x^2-8xy+16y^2)+(y^2-6y+9)=0$
$\therefore (x-4y)^2+(y-3)^2=0$
이때, x, y가 실수이므로
$x-4y=0, y-3=0$ $\therefore x=12, y=3$

62) $x=-1, y=1$
⇨ 주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하

면

$x^2-2(y-2)x+2y^2-6y+5=0\cdots$ ㉠

이때, x가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(2y^2-6y+5)\geq 0$, $-y^2+2y-1\geq 0$,

$y^2-2y+1\leq 0$ $\therefore (y-1)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=1$이고, 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$

63) $x=-1, y=2$

⇨ 주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-1)x+2y^2-6y+5=0\cdots$ ㉠

이때, x가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-(2y^2-6y+5)\geq 0$, $-y^2+4y-4\geq 0$,

$y^2-4y+4\leq 0$ $\therefore (y-2)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0, (x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$

64) $x=3, y=1$

⇨ 주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-2(y+2)x+2y^2+2y+5=0\cdots$ ㉠

이때, x가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(2y^2+2y+5)\geq 0$, $-y^2+2y-1\geq 0$

$y^2-2y+1\leq 0$ $\therefore (y-1)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=1$이고, 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-6x+9=0, (x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

65) $x=\frac{1}{2}, y=1$

⇨ $4x^2-4xy+2y^2-2y+1=0$에서

$(4x^2-4xy+y^2)+(y^2-2y+1)=0$

$\therefore (2x-y)^2+(y-1)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로

$2x-y=0, y-1=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}, y=1$

66) $x=3, y=-1$

⇨ $x^2+y^2-6x+2y=-10$에서

$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로

$x-3=0, y+1=0$

$\therefore x=3, y=-1$

67) $x=2, y=4$

⇨ $x^2-4x+y^2-8y+20=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-8y+16)=0$

$(x-2)^2+(y-4)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로 $x-2=0, y-4=0$

$\therefore x=2, y=4$

68) $x=3, y=1$

⇨ $x^2-6yx+10y^2-2y+1=0$

이 방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=9y^2-10y^2+2y-1\geq 0$

$-y^2+2y-1\geq 0$ ⇨ $(y-1)^2\leq 0$ $\therefore y=1$

$y=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

$\therefore (x, y)=(3, 1)$

69) $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}$

⇨ 주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$9x^2-3(2y+1)x+4y^2-2y+1=0\cdots$ ㉠

이때, x가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=9(2y+1)^2-4\cdot 9(4y^2-2y+1)\geq 0$

$-12y^2+12y-3\geq 0$, $4y^2-4y+1\leq 0$

$\therefore (2y-1)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=\frac{1}{2}$이고, 이것을 ㉠에 대입하면

$9x^2-6x+1=0$, $(3x-1)^2=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$

70) $x=-1, y=4$

⇨ $x^2+y^2+2x-8y+17=0$에서 $(x+1)^2+(y-4)^2=0$이므로 $x=-1, y=4$

71) $x=1, y=2$

⇨ $(x-1)^2+(y-2)^2=0$이므로 $x=1, y=2$이다.

72) $x=2, y=-3$

⇨ $x^2+y^2-4x+6y+13=(x-2)^2+(y+3)^2=0$

따라서 $x=2, y=-3$이다.

I410-ECN-0199-2017-001-000057208