## 개념check

**[곡선과 $x$축 사이의 넓이]**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

**[두 곡선 사이의 넓이]**

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

## 기본문제

[예제]

**1.** 곡선 $y=x^2-3x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

[문제]

**2.** 곡선 $y=-x^2+1$과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

[예제]

**3.** 곡선 $y=x^3-3x^2$과 $x$축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

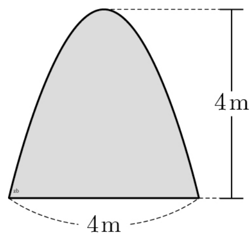
[문제]

**4.** 곡선 $y=3x^2+4x$와 $x$축 및 두 직선 $x=0, x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[문제]

**5.** 다음 그림과 같이 폭이 $4\text{m}$, 높이가 $4\text{m}$인 어느 터널의 위쪽 경계는 이차함수 그래프의 일부와 일치한다. 터널 입구의 넓이를 구하면?




① $\frac{31}{3}\text{ m}^2$　② $\frac{32}{3}\text{ m}^2$　③ $11\text{ m}^2$　④ $\frac{34}{3}\text{ m}^2$　⑤ $\frac{35}{3}\text{ m}^2$



I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[예제]

**6.** 두 곡선 $y=x^2-x+5$, $y=-x^2+3x+5$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $2$ ② $\frac{7}{3}$
③ $\frac{8}{3}$ ④ $3$
⑤ $\frac{10}{3}$

[문제]

**7.** 곡선 $y=2x^2-6x+1$과 직선 $y=4x-7$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $1$ ② $3$
③ $5$ ④ $7$
⑤ $9$

[예제]

**8.** 두 곡선 $y=x^3-3x, y=-x^3+5x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $16$ ② $17$
③ $18$ ④ $19$
⑤ $20$

[문제]

**9.** 곡선 $y=-x^3-2x-2$와 직선 $y=-3x-2$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$
⑤ $1$

[문제]

**10.** 곡선 $y=-x^3+2x^2+3$을 $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행 이동한 곡선을 $y=f(x)$라고 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3+k$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $1$ ④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{5}{3}$

평가문제

[중단원 학습 점검]

**11.** 곡선 $y=6x^2+6x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$
⑤ $1$

[중단원 학습 점검]

**12.** 곡선 $y=x^2$ $(x \geq 0)$과 직선 $y=-2x+3$ 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $1$ ④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{5}{3}$

[중단원 학습 점검]

**13.** 곡선 $y=x^3-2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,-1)$에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$
③ $7$ ④ $\frac{29}{4}$
⑤ $\frac{15}{2}$

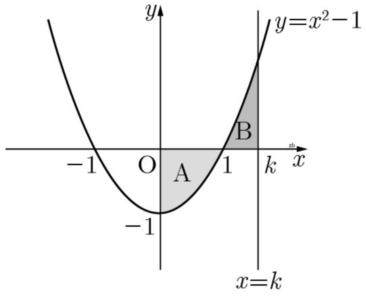
[중단원 학습 점검]

**14.** 곡선 $y=x^2-ax$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{6}$일 때, 양수 $a$의 값은?

① $1$ ② $2$
③ $3$ ④ $4$
⑤ $5$

[중단원 학습 점검]

**15.** 그림과 같이 곡선 $y=x^2-1$과 $y$축, $x$축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 두 도형 $A, B$의 넓이가 같을 때, 상수 $k$의 값은? (단, $k>1$)




① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$
③ $2$　　④ $\sqrt{5}$
⑤ $\sqrt{6}$

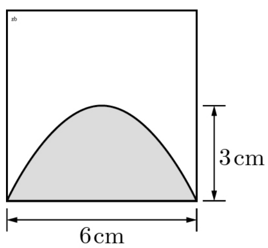
[중단원 학습 점검]

**16.** 함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 $6$만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라고 하자. 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $20$　　② $\frac{62}{3}$
③ $\frac{64}{3}$　　④ $22$
⑤ $\frac{68}{3}$

[중단원 학습 점검]

**17.** 다음 그림은 한 변의 길이가 $6\,\text{cm}$인 정사각형 모양의 흰 종이에 곡선의 경계가 이차함수의 형태를 이루는 색종이를 붙인 것이다. 색종이의 곡선의 경계에서의 꼭짓점이 정사각형 종이의 두 대각선의 교점과 일치할 때, 붙인 색종이의 넓이는?




① $11\ \text{cm}^2$　　② $12\ \text{cm}^2$
③ $13\ \text{cm}^2$　　④ $14\ \text{cm}^2$
⑤ $15\ \text{cm}^2$

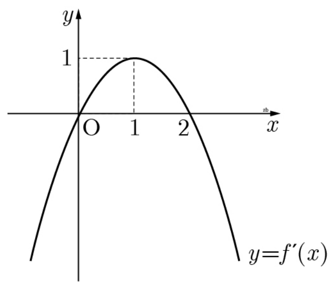
[대단원 학습 점검]

**18.** 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $x$축에 의하여 이등분 될 때, 상수 $a$에 대하여 $(2-a)^3$의 값은? (단, $a<0$)

① $16$　　② $17$
③ $18$　　④ $19$
⑤ $20$

[대단원 학습 점검]

**19.** 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?




① $\frac{7}{4}$　　② $2$
③ $\frac{9}{4}$　　④ $\frac{5}{2}$
⑤ $\frac{11}{4}$

[대단원 학습 점검]

**20.** 원점에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 두 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$　　② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{2}{3}$

유사문제

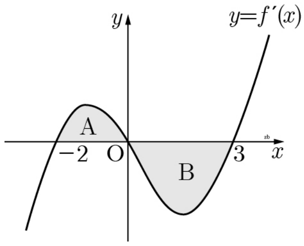
**21.** 곡선 $f(x)=x^2-2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $1$ ④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{5}{3}$

**22.** 두 곡선 $y=|x^3-x|$와 $y=3x^2-3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는? (단, $-1 \le x \le 1$)

① $3$ ② $\frac{7}{2}$
③ $4$ ④ $\frac{9}{2}$
⑤ $5$

**23.** 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.




이 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이 $A$, $B$가 각각 $4$, $9$이고 $f(-2)=7$일 때, $f(3)$의 값은?

① $-2$ ② $-1$
③ $0$ ④ $1$
⑤ $2$

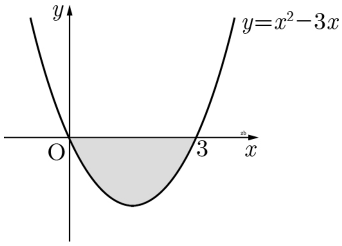

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

## 정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] 주어진 곡선과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^2-3x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$




닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $y \le 0$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

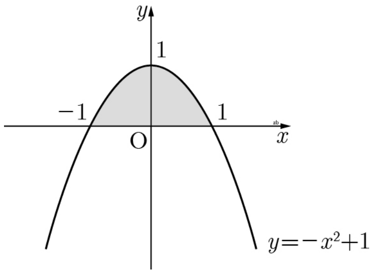
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

2) [정답] ④

[해설] 주어진 곡선과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+1=-(x-1)(x+1)=0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=1$




닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y \ge 0$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_{-1}^1(-x^2+1)dx$$

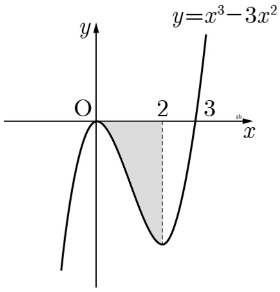
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^1=\frac{4}{3}$$

3) [정답] ⑤

[해설] 주어진 곡선과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^3-3x^2=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$




닫힌구간 $[0, 2]$에서 $y \le 0$이므로

구하는 넓이 $S$는

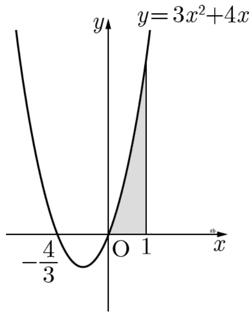
$$S=\int_0^2(-x^3+3x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^2=4$$

4) [정답] ③

[해설] 주어진 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$3x^2+4x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{4}{3}$




닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y \ge 0$이므로

구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_0^1(3x^2+4x)dx$$

$$=\left[x^3+2x^2\right]_0^1=3$$

5) [정답] ②

[해설] 터널 입구의 가운데 밑 부분을 $(0, 0)$이라 하면 위쪽 경계가 그리는 곡선은 꼭짓점이 $(0,\ 4)$이고 $(-2,\ 0)$과 $(2,\ 0)$을 지나는 이차함수이다.

즉, $f(x)=-x^2+4$로 나타낼 수 있다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2(-x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^2=\frac{32}{3}$$

$\therefore$ 터널 입구의 넓이는 $\frac{32}{3}\,\mathrm{m}^2$이다.

6) [정답] ③

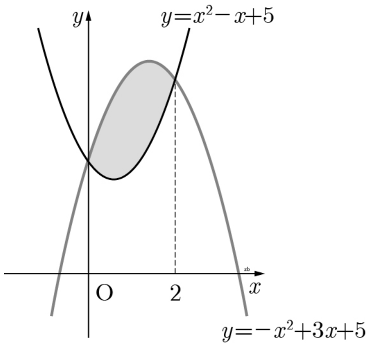
[해설] 두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$x^2-x+5=-x^2+3x+5$

$2x^2-4x=0$

즉, $x=0$ 또는 $x=2$


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125




닫힌구간 $[0, 2]$에서

$x^2-x+5 \le -x^2+3x+5$

이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_0^2\{(-x^2+3x+5)-(x^2-x+5)\}dx$$

$$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

7) [정답] ⑤

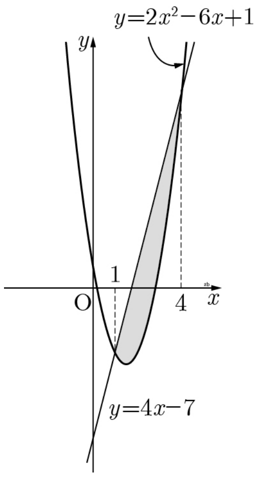
[해설] 곡선과 직선의 교점의 $x$좌표는

$2x^2-6x+1=4x-7$

$2x^2-10x+8=0$

$2(x-1)(x-4)=0$

따라서 $x=1, x=4$에서 만난다.




닫힌구간 $[1, 4]$에서 $2x^2-6x+1 \le 4x-7$이므로

구하는 넓이 $S$는

$$\int_1^4\{(4x-7)-(2x^2-6x+1)\}dx$$

$$=\int_1^4(-2x^2+10x-8)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4=9$$

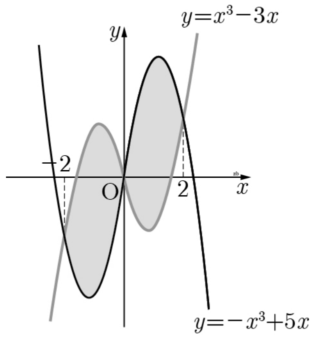
8) [정답] ①

[해설] 두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$x^3-3x=-x^3+5x$

$x^3-4x=x(x-2)(x+2)=0$

즉, $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$




닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서

$x^3-3x \ge -x^3+5x$

이고 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$x^3-3x \le -x^3+5x$

이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_{-2}^0\{(x^3-3x)-(-x^3+5x)\}dx$$

$$+\int_0^2\{(-x^3+5x)-(x^3-3x)\}dx$$

$$=2\int_{-2}^0(x^3-4x)dx+2\int_0^2(-x^3+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-4x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{2}x^4+4x^2\right]_0^2$$

$$=16$$

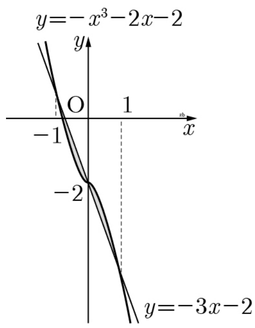
9) [정답] ④

[해설] 곡선과 직선의 교점의 $x$좌표는

$-x^3-2x-2=-3x-2$

$0=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

즉, $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$




닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서

$-x^3-2x-2 \le -3x-2$

이고 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$-x^3-2x-2 \ge -3x-2$

이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_0^1\{(-x^3-2x-2)-(-3x-2)\}dx$$

$$+\int_{-1}^0\{(-3x-2)-(-x^3-2x-2)\}dx$$


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$$= \int_0^1 (-x^3+x)dx + \int_{-1}^0 (x^3-x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$$

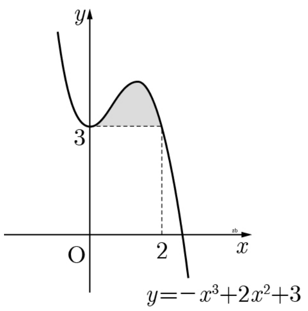
$$= \frac{1}{2}$$

10) [정답] ④

[해설] $f(x)=-x^3+2x^2+3+k$와 $y=3+k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=-x^3+2x^2+3$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y=-x^3+2x^2+3$과 직선 $y=3$의 교점의 $x$좌표는

$-x^3+2x^2+3=3$에서 $x=0$ 또는 $x=2$




닫힌구간 $[0, 2]$에서 $-x^3+2x^2+3 \geq 3$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^3+2x^2+3)-3\}dx$$

$$= \int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$$

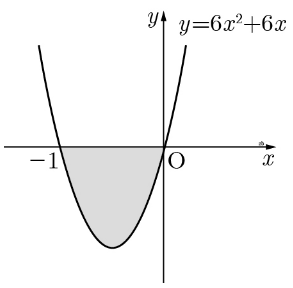
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

11) [정답] ⑤

[해설] 곡선 $y=6x^2+6x=6x(x+1)$ 이므로 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x=-1$ 또는 $x=0$




닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $6x^2+6x \leq 0$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_{-1}^0 (-6x^2-6x)dx$$

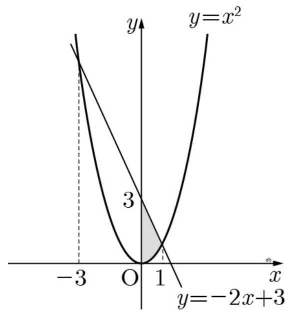
$$= \left[-2x^3-3x^2\right]_{-1}^0 = 1$$

12) [정답] ⑤

[해설] 곡선과 직선의 교점의 $x$좌표는

$x^2=-2x+3$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$




닫힌구간 $[0, 1]$에서

$x^2 \leq -2x+3$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\int_0^1 \{(-2x+3)-x^2\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

13) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-2x$라 하면

$f'(1)=1$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=x-2$

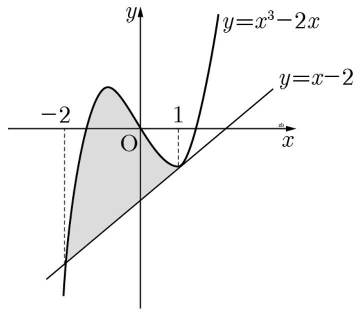
곡선과 접선의 교점의 $x$좌표는

$x^3-2x=x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$




닫힌구간 $[-2, 1]$에서

$x^3-2x \geq x-2$

이므로 구하는 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-2}^1 \{(x^3-2x)-(x-2)\}dx$$

$$= \int_{-2}^1 (x^3-3x+2)dx$$

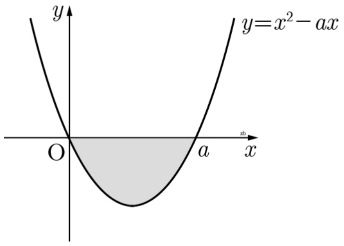
$$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1 = \frac{27}{4}$$

14) [정답] ①

[해설] 곡선 $y=x^2-ax$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x^2-ax=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125




닫힌구간 $[0, a]$에서 $x^2-ax \le 0$이므로
구하는 도형의 넓이 $S$는

$$\int_0^a(-x^2+ax)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a=\frac{1}{6}a^3$$

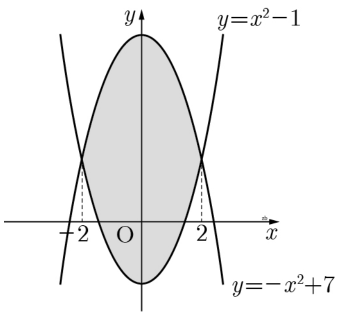
즉, $\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{6}$이므로 $a^3=1$
따라서 $a=1$이다.

15) [정답] ②
[해설] 두 도형 $A$, $B$의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k(x^2-1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^k=\frac{1}{3}k^3-k=0$$

즉, $k=0$ 또는 $k=\pm\sqrt{3}$
이때 $k>1$이므로 $k=\sqrt{3}$

16) [정답] ③
[해설] 곡선 $y=x^2-1$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 6만큼 평행이동하면
$g(x)=-x^2+7$이다.
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의
교점의 $x$좌표를 구하면
$-x^2+7=x^2-1$, $2x^2-8=0$
$x=-2$ 또는 $x=2$




따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^2\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{-2}^2(-2x^2+8)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{-2}^2=\frac{64}{3}$$

17) [정답] ②
[해설] 흰 종이의 제일 아래의 가운데 지점을 $(0, 0)$이라 하면
색종이의 곡선의 경계 식은

$$y=-\frac{1}{3}(x-3)(x+3)$$

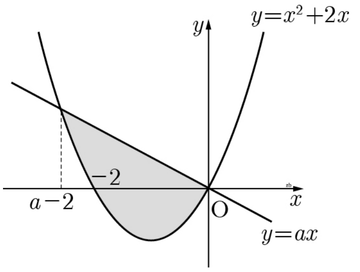
$$y=-\frac{1}{3}x^2+3$$

이므로 구하는 색종이의 넓이는

$$\int_{-3}^3\left(-\frac{1}{3}x^2+3\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+3x\right]_{-3}^3=12$$

18) [정답] ①
[해설] 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 $x$좌표는 $x^2+2x=ax$에서
$x=0$ 또는 $x=a-2$




곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{a-2}^0\{ax-(x^2+2x)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2\right]_{a-2}^0$$

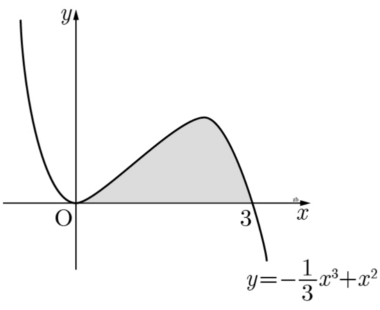
$$=\frac{(2-a)^3}{6}$$

한편, 곡선 $y=x^2+2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^0-(x^2+2x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^0=\frac{4}{3}$$

즉, $\frac{(2-a)^3}{6}=2\times\frac{4}{3}$이므로 $(2-a)^3=16$

19) [정답] ③
[해설] 그래프에서 $f'(x)=ax(x-2)$이고,
$f'(1)=1$이므로 $a=-1$
따라서 $f'(x)=-x^2+2x$이므로
$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+C$ (단, $C$는 적분상수)
이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$
따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2$이고, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는 $x=3$ 또는 $x=0$





I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3 f(x)dx=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=\frac{9}{4}$$

20) [정답] ⑤

[해설] 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라고 하자.

$f(x)=x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로

이 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$

따라서 접선의 방정식은 $y=2tx-t^2+1$이고

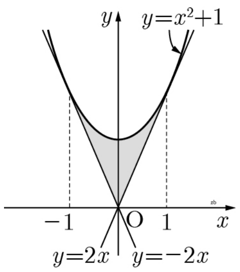
이 접선이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-t^2+1,\ (t+1)(t-1)=0$

따라서 $t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 원점에서 곡선에 그은 접선의 방정식은

$y=-2x$ 또는 $y=2x$




닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{(x^2+1)-(2x)\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^0\{(x^2+1)-(-2x)\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^0$$

$$=\frac{1}{3}$$

따라서 원점에서 곡선에 그은 두 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{2}{3}$

21) [정답] ④

[해설] $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

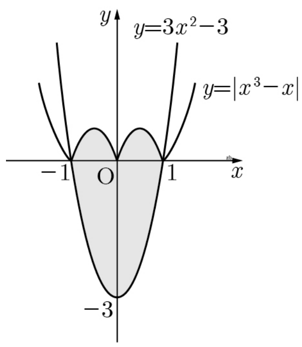
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하려는 도형의 넓이는

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

22) [정답] ④

[해설] $y=x^3-x=x(x-1)(x+1)$




따라서 구하려는 도형의 넓이는

$$2\int_{-1}^0\{x^3-x-(3x^2-3)\}dx$$

$$=2\int_{-1}^0(x^3-3x^2-x+3)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^0=-2\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)$$

$$=-2\times\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{2}$$

23) [정답] ⑤

[해설] $f(3)=f(-2)+\int_{-2}^3 f'(x)dx=7+4-9=2$


I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125