개념check

[삼각형의 넓이]

• 삼각형 ABC의 넓이를 S라 할 때

(1) 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 경우

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

(2) 외접원의 반지름의 길이 R가 주어진 경우

$$S=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

(3) 내접원의 반지름의 길이 r가 주어진 경우

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

(4) 삼각형의 세 변의 길이가 주어진 경우

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

[사각형의 넓이]

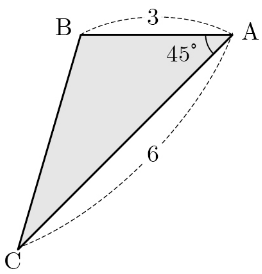
• 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 θ일 때 평행사변형의 넓이(S): $S=ab\sin\theta$

• 두 대각선의 길이가 a, b이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때 사각형의 넓이(S'): $S'=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

기본문제

[문제]

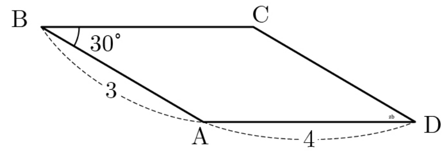
1. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC의 넓이를 구한 것은?



① $3\sqrt{2}$　② $\frac{7\sqrt{2}}{2}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

[문제]

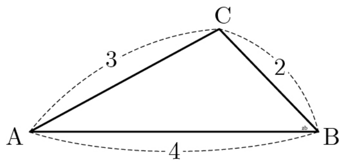
2. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 넓이를 구한 것은?



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[예제]

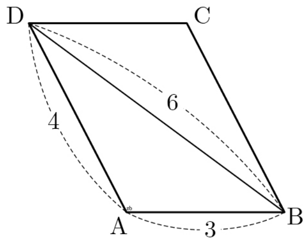
3. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC의 넓이를 구한 것은?



① $\frac{\sqrt{15}}{4}$　② $\frac{2\sqrt{15}}{4}$　③ $\frac{3\sqrt{15}}{4}$　④ $\sqrt{15}$　⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{4}$

[문제]

4. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 넓이를 구한 것은?



① $\frac{5\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{430}}{12}$

③ $\frac{\sqrt{435}}{2}$ ④ $\sqrt{110}$

⑤ $\frac{\sqrt{455}}{2}$

[예제]

5. 삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라 할 때, 사인법칙과 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$를 이용하여 S를 a, b, c, R에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $\frac{4abc}{R}$ ② $\frac{2abc}{R}$

③ $\frac{abc}{R}$ ④ $\frac{abc}{2R}$

⑤ $\frac{abc}{4R}$

[문제]

6. 삼각형 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 삼각형 $\triangle$ABC의 넓이 S를 사인법칙을 이용하여 R과 각 A, 각 B, 각 C에 관한 식으로 올바르게 나타낸 것은?

① $R^2\sin A\sin B\sin C$ ② $2R\sin A\sin B\sin C$

③ $4R\sin A\sin B\sin C$ ④ $2R^2\sin A\sin B\sin C$

⑤ $4R^2\sin A\sin B\sin C$

평가문제

[스스로 확인하기]

7. 다음은 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{abc}{4R}$임을 증명하는 과정이다. 빈 칸에 알맞은 것을 모두 고른 것은?

> 삼각형 ABC의 각 변을 a, b, c라고 하자.
>
> 삼각형의 넓이를 $S=\frac{1}{2}ab$ $\boxed{\text{(가)}}$라 할 때,
>
> 사인법칙 $\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{b}{\sin\mathrm{B}}=\frac{c}{\sin\mathrm{C}}=\boxed{\text{(나)}}$을 이용하여 대입하면 $S=\frac{abc}{4R}$이다.

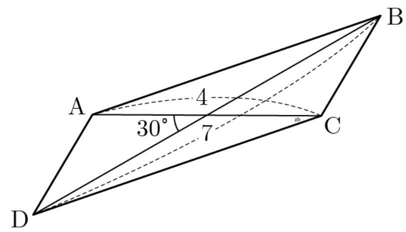
① (가) sinA ② (가) sinB

③ (가) sinC ④ (나) R

⑤ (나) $2R$

[스스로 확인하기]

8. 다음 그림과 같이 두 대각선의 길이가 4, 7이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 30°인 사각형 ABCD의 넓이를 구한 것은?



① 5 ② 6

③ 7 ④ 8

⑤ 9

[스스로 마무리하기]

9. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

> (가) 외접원의 반지름의 길이는 8이다.
>
> (나) $\angle B=120°$, $\angle C=30°$

① $8\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{3}$

③ 16 ④ $16\sqrt{2}$

⑤ $16\sqrt{3}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[스스로 마무리하기]

10. 삼각형 ABC에서 $a=4$, $b=5$, $c=6$일 때, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이는?

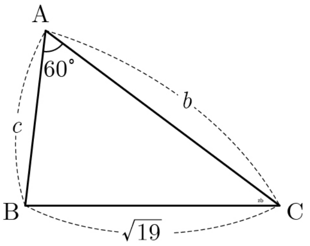
① $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{61}}{6}$

③ $\dfrac{\sqrt{62}}{6}$　④ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

⑤ 2

[스스로 마무리하기]

11. 다음 그림과 같이 $a=\sqrt{19}$, $\angle A=60^{\circ}$인 삼각형 ABC에서 $b+c=8$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



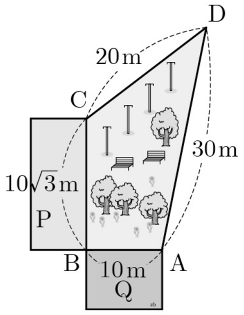
① $\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$　② $\sqrt{3}$

③ $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$　④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

[스스로 마무리하기]

12. 다음 그림과 같이 서로 직각으로 놓여 있는 두 구조물 P, Q의 앞 광장에 사각형 모양의 공원을 조성하려 한다. 네 변의 길이가 각각 $10\,\mathrm{m}$, $10\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, $30\,\mathrm{m}$, $20\,\mathrm{m}$일 때, 이 공원의 넓이를 구하시오.



① $50\sqrt{3}+100\sqrt{7}\,\mathrm{m}^2$　② $25\sqrt{3}+75\sqrt{7}\,\mathrm{m}^2$

③ $25\sqrt{3}+50\sqrt{7}\,\mathrm{m}^2$　④ $25\sqrt{3}+25\sqrt{7}\,\mathrm{m}^2$

⑤ $50\sqrt{3}+75\sqrt{7}\,\mathrm{m}^2$

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times6\times\sin45^\circ=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

2) [정답] ①

[해설] 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{BC}=\overline{AD}=4$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin30^\circ=3$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는 $3\times2=6$

3) [정답] ③

[해설] 코사인법칙으로부터

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\frac{7}{8}$

$0<A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$\sin^2A+\cos^2A=1$ 이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$

4) [정답] ⑤

[해설] 코사인법칙으로부터

$\cos A=\frac{4^2+3^2-6^2}{2\times4\times3}=-\frac{11}{24}$

$\sin^2A+\cos^2A=1$ 이고

$0<A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{24}\right)^2}=\frac{\sqrt{455}}{24}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$S=2\times\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{\sqrt{455}}{24}=\frac{\sqrt{455}}{2}$

5) [정답] ⑤

[해설] 사인법칙에 따라 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

$\sin A=\frac{a}{2R}$ …㉠

삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ …㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$S=\frac{1}{2}bc\times\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$

6) [정답] ④

[해설] 사인법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$에서

$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B$이므로

삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times2R\sin A\times2R\sin B\times\sin C$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

7) [정답] ③, ⑤

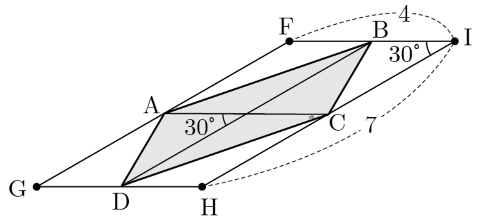
[해설] 삼각형 ABC의 각 변을 $a,\ b,\ c$라고 하자.

삼각형의 넓이를 $S=\frac{1}{2}ab\boxed{\text{sinC}}$라 할 때,

사인법칙 $\frac{a}{\text{sinA}}=\frac{b}{\text{sinB}}=\frac{c}{\text{sinC}}=\boxed{2R}$을 이용하여 대입하면 $S=\frac{abc}{4R}$이다.

8) [정답] ③

[해설] 다음 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D를 지나고 대각선에 평행한 직선을 각각 그어 평행사변형 FGHI을 만들면 사각형 ABCD의 넓이는 사각형 FGHI의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.



이때 사각형 FGHI의 넓이는

$4\times7\times\sin30^\circ=14$이므로

사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times14=7$

9) [정답] ⑤

[해설] 사인법칙에 따라

$b=2R\sin B=2\times8\times\sin120^\circ=8\sqrt{3}$

$c=2R\sin C=2\times8\times\sin30^\circ=8$

삼각형의 내각의 합은 180°이므로

$A=180^\circ-(B+C)=30^\circ$

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}\times\sin30^\circ=16\sqrt{3}$

10) [정답] ④

[해설] 코사인법칙으로부터

$\cos C=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$ 이므로

$\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}\ (0<C<\pi)$

이때 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

한편 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4+5+6)r=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$\frac{15}{2}r=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

즉 $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{7}}{2}$이다.

11) [정답] ⑤

[해설] 코사인법칙에 따라

$\sqrt{19}^2=b^2+c^2-2bc\cos60^\circ$

$19=b^2+c^2-bc\cdots$㉠

주어진 조건에서 $c=8-b$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$19=b^2+(8-b)^2-b(8-b)$

$3b^2-24b+45=0$, $(b-3)(b-5)=0$

$b=3$ 또는 $b=5$이므로

$b=3$, $c=5$ 또는 $b=5$, $c=3$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin60^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

12) [정답] ⑤

[해설] $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times10\times10\sqrt{3}=50\sqrt{3}\ (m^2)$

삼각형 ACD에서

$\overline{CA}=20\ (m)$이고, $\angle CDA=\theta$라 하면

코사인법칙으로부터

$\cos\theta=\frac{20^2+30^2-20^2}{2\times30\times20}=\frac{3}{4}$ 이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

이때 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times20\times30\times\frac{\sqrt{7}}{4}=75\sqrt{7}$

따라서 구하는 연못의 넓이는

$50\sqrt{3}+75\sqrt{7}\ (m^2)$이다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125