01 부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질

두 실수 a, b에 대하여
(1) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$
(2) $a>0,\ b>0 \Leftrightarrow a+b>0,\ ab>0$
(3) $a^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 0$
(4) $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$
(5) $a>0,\ b>0$일 때, $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$
(6) $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

◪ 다음 부등식의 관계에서 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

1. $a<b$일 때, $a+6$ $\boxed{}$ $b+6$

2. $a<b$일 때, $a-3$ $\boxed{}$ $b-3$

3. $a<b$일 때, $-a+5$ $\boxed{}$ $-b+5$

4. $a<b,\ c<0$일 때, $-ac+5$ $\boxed{}$ $-bc+5$

5. $a<0$일 때, $\frac{1}{a}-6$ $\boxed{}$ -6

6. $a<b<0$일 때, $-\frac{1}{a}-5$ $\boxed{}$ $-\frac{1}{b}-5$

◪ 실수 a, b에 관한 조건이 주어질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 골라라.

7. $a<0<b$일 때,

<보기>
ㄱ. $ab<0$　ㄴ. $ac<bc$　ㄷ. $a+3<b$
ㄹ. $\frac{a}{b}<1$　ㅁ. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$　ㅂ. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

8. $a<b$일 때

<보기>
ㄱ. $a+1<b+2$　ㄴ. $2a<3b$　ㄷ. $a-5<b-4$
ㄹ. $\frac{a}{3}<\frac{b}{4}+10$　ㅁ. $-a-5>-b-6$

9. $0<a<b$일 때

<보기>
ㄱ. $2a-1<2b-1$　ㄴ. $-a+7<-b+7$
ㄷ. $\frac{a}{3}-1>\frac{b}{3}-1$　ㄹ. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
ㅁ. $ab<b^2$　ㅂ. $a^2<ab$

10. $a<b<0$일 때,

<보기>
ㄱ. $ab<b^2$　ㄴ. $a+b<2b$
ㄷ. $2-a>2-b$　ㄹ. $\frac{a}{3}-1>\frac{b}{3}-1$

11. $ab>a^2$이고 $a<0$일 때,

<보기>
ㄱ. $\frac{a}{b}<1$　ㄴ. $\frac{a}{4}<\frac{b}{4}$
ㄷ. $ac>bc$　ㄹ. $b-a<0$
ㅁ. $2-3a>2-3b$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

02 두 수 또는 두 식의 대소 비교

두 실수 또는 두 식 A, B에 대하여

(1) 차를 이용하는 방법

❶ $A-B>0 \Leftrightarrow A>B$ ❷ $A-B=0 \Leftrightarrow A=B$

❸ $A-B<0 \Leftrightarrow A<B$

(2) 제곱의 차를 이용하는 방법: $A\geq 0$, $B\geq 0$일 때,

❶ $A^2-B^2>0 \Leftrightarrow A>B$ ❷ $A^2-B^2<0 \Leftrightarrow A<B$

(3) 비를 이용하는 방법: $A>0$, $B>0$일 때

❶ $\frac{A}{B}>1 \Leftrightarrow A>B$ ❷ $\frac{A}{B}<1 \Leftrightarrow A<B$

◪ 다음 수들의 대소를 비교하여라.

12. $A=2^{50}$, $B=6^{25}$

13. $A=3^{30}$, $B=6^{15}$

14. $A=3^{400}$, $B=2^{500}$

15. $A=3^{24}$, $B=5^{18}$

16. $A=3^{30}$, $B=6^{20}$

17. $A=2^{30}$, $B=3^{20}$

18. $A=3\sqrt{2}$, $B=2\sqrt{3}$

19. $A=\sqrt{7}-1$, $B=\sqrt{8}-1$

20. $A=3+\sqrt{5}$, $B=\sqrt{8}+\sqrt{5}$

21. $A=\sqrt{5}+\sqrt{6}$, $B=\sqrt{3}+\sqrt{8}$

22. $A=-\sqrt{12}+\sqrt{8}$, $B=3\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

23. $A=3\sqrt{10}-2$, $B=4$

24. $A=\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $B=2+\sqrt{3}$

25. $A=\sqrt{3}+\sqrt{7}$, $B=2+\sqrt{6}$

◪ 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

26. $A=2^{40}$, $B=5^{20}$, $C=3^{30}$

27. $A=\sqrt{3}+\sqrt{6}$, $B=2+\sqrt{5}$, $C=1+2\sqrt{2}$

28. $A=2\sqrt{3}-3$, $B=\sqrt{3}-1$, $C=2-\sqrt{3}$

29. $A=4$, $B=\sqrt{6}+\sqrt{7}$, $C=\sqrt{2}+\sqrt{11}$

30. $A=2+\sqrt{5}$, $B=2+\sqrt{7}$, $C=3+\sqrt{6}$

◪ $a>b>0$일 때, A와 B의 대소를 비교하여라.

31. $\mathrm{A}=\dfrac{2a}{1+2a}$, $\mathrm{B}=\dfrac{2b}{1+2b}$

32. $\mathrm{A}=\dfrac{a}{a+1}$, $\mathrm{B}=\dfrac{b}{b+1}$

33. $\mathrm{A}=\dfrac{a}{1+a}$, $\mathrm{B}=\dfrac{b}{1+b}$

◪ x, y가 실수일 때, A, B의 대소를 비교하여라.

34. $\mathrm{A}=x^2+x$, $\mathrm{B}=3x-1$

35. $\mathrm{A}=3x^2-2y^2$, $\mathrm{B}=2x^2-2xy-3y^2$

36. $\mathrm{A}=3x^2-5x$, $\mathrm{B}=2x^2-3x-1$

37. $\mathrm{A}=x^2-4xy-6y^2$, $\mathrm{B}=2x^2-2y^2$

38. $\mathrm{A}=x^2+xy-3y^2$, $\mathrm{B}=2x^2-3xy+2y^2$

39. $\mathrm{A}=2x^2+3xy$, $\mathrm{B}=3x^2+xy+y^2$

40. $\mathrm{A}=2x^2+4y^2$, $\mathrm{B}=x^2+2xy+2y^2$

41. $\mathrm{A}=xy+1$, $\mathrm{B}=x+y$ (단, $x\le 1$, $y\le 1$)

03 절대부등식

(1) 절대부등식: 문자를 포함한 부등식에서 그 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식을 절대부등식이라고 한다.

(2) 여러 가지 절대부등식의 예

❶ a, b가 실수일 때, $a^2\pm ab+b^2\ge 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

❷ a, b, c가 실수일 때, $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

❸ a, b가 실수일 때, $|a|+|b|\ge|a+b|$ (단, 등호는 $ab\ge 0$일 때 성립)

◪ a, b가 실수일 때, 다음 부등식이 절대부등식이면 ○표, 절대부등식이 아니면 ×표를 ( ) 안에 써넣어라.

42. $|a|+2>0$ ( )

43. $|a|\ge a$ ( )

44. $(3a+2)^2\ge 0$ ( )

45. $2a^2\ge 0$ ( )

46. $a+2>0$ ( )

47. $(a-1)^2+2>0$ ( )

48. $-a^2\le 0$ ( )

49. $2a^2\ge 0$ ( )

50. $a^2+6a+7 \geq 0$ ( )

51. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ **(단,** $a \geq 0,\ b \geq 0$**)** ( )

52. $(a-b)^3 \geq 0$ ( )

53. $a^2-a < a^2$ ( )

54. $a^2-6a+9 > 0$ ( )

55. $(2a-3b+5)^2 \geq 0$ ( )

56. $a^2-4a+4 \geq 0$ ( )

57. $a^2-b \geq 0$ ( )

58. $-(3a+1)^2 < 0$ ( )

59. $|a-b|+1 > 0$ ( )

60. $-a^2+2a-2 \leq 0$ ( )

61. $a^2+2ab+b^2 \geq 0$ ( )

◪ **다음은 실수 a, b에 대하여 주어진 부등식을 증명하는 과정이다. (가)~(마)에 알맞은 내용을 넣어라.**

62. $a^2+b^2 \geq ab$

<증명>

$a^2+b^2-ab=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+\boxed{(가)}$

$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{(가)}$

a, b가 실수이므로 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, $\boxed{(가)} \geq 0$

따라서 $a^2+b^2-ab \geq 0$이므로

$a^2+b^2 \geq ab$ (단, 등호는 $\boxed{(나)}$일 때 성립)

63. $a^2-ab+b^2 \geq 0$

<증명>

$a^2-ab+b^2=a^2-ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$

$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

그런데 $\left(a-\boxed{}\right)^2 \geq 0$, $\frac{3}{4}b^2 \geq 0$이므로

$\left(a-\boxed{}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$

$\therefore\ a^2-ab+b^2 \boxed{}\ 0$

이때, 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $b=0$

즉, $a=b=0$일 때 성립한다.

64. $|a|+|b| \geq |a+b|$

<증명>

$|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$이므로

$(|a|+|b|)^2 \boxed{}\ |a+b|^2$임을 보이면 된다.

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2$

$=2(|ab|-ab)$

$|ab|\ \boxed{}\ ab$이므로 $2(|ab|-ab)\ \boxed{}\ 0$이다.

$\therefore\ (|a|+|b|)^2 \boxed{}\ |a+b|^2$

즉, $|a|+|b|\ \boxed{}\ |a+b|$

단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$일 때, 성립한다.

65. **다음은 두 실수** a, b**에 대하여 부등식** $|a+b| \le |a|+|b|$**임을 증명하는 과정이다.**

<증명>

$\boxed{(\text{가})}$, $\boxed{(\text{나})}$이므로 주어진 부등식의 양변을 제곱하여 $|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$임을 증명하면 된다.

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$

$= a^2 + 2\boxed{(\text{다})} + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 2(\boxed{(\text{다})} - ab)$

그런데 $\boxed{(\text{라})}$이므로 $2(\boxed{(\text{다})} - ab) \ge 0$

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \ge 0$ $(|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$

$\therefore |a+b| \le |a|+|b|$

여기서 등호는 $\boxed{(\text{마})}$일 때 성립한다.

◪ a, b**가 실수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.**

66. $a^2 + a + 1 > 0$

67. $a^2 - 2ab + 2b^2 \ge 0$

68. $4a^2 - 4ab + 2b^2 \ge 0$

69. $a^2 + b^2 \ge ab$

70. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

71. $(a+b)^2 \ge 4ab$

72. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a+b}$ **(단,** $a \ge 0,\ b \ge 0$**)**

73. $|a| + |b| \ge |a+b|$

정답 및 해설

1) $<$

2) $<$

3) $>$

4) $<$

5) $<$

6) $<$

7) ㄱ, ㄹ, ㅂ

⇨ $a<0<b$일 때,

ㄴ.$c<0$이면 $ac>bc$이다.

ㄷ.$a=-1$, $b=1$이면 $a+3>b$이다.

ㅁ.$c>0$이면 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$이다.

8) ㄱ, ㄷ, ㅁ

⇨ $a<b$일 때,

ㄴ. $a=-3$, $b=-2$이면 $2a=3b$이다.

ㄹ. $a=125$, $b=126$이면 $\frac{a}{3}>\frac{b}{4}+10$이다.

9) ㄱ, ㅁ, ㅂ

⇨ $0<a<b$일 때,

ㄴ.$-a+7>-b+7$ ㄷ.$\frac{a}{3}-1<\frac{b}{3}-1$ ㄹ.$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

10) ㄴ, ㄷ

⇨ $a<b<0$일 때,

ㄱ.$ab>b^2$ ㄹ. $\frac{a}{3}-1<\frac{b}{3}-1$

11) ㄱ, ㄹ

⇨ $a<0$일 때, $ab>a^2$의 양변을 a로 나누면 $b<a$이다. 즉, $b<a<0$이다.

ㄴ.$\frac{a}{4}>\frac{b}{4}$ ㄷ.$c<0$이면 $ac<bc$

ㅁ.$2-3a<2-3b$

12) $A<B$

⇨ $\frac{A}{B}=\frac{2^{50}}{6^{25}}=\left(\frac{2^2}{6}\right)^{25}=\left(\frac{4}{6}\right)^{25}=\left(\frac{2}{3}\right)^{25}<1$

$\therefore$ $A<B$

13) $A>B$

⇨ $\frac{A}{B}=\frac{3^{30}}{6^{15}}=\left(\frac{3^2}{6}\right)^{15}=\left(\frac{9}{6}\right)^{25}=\left(\frac{3}{2}\right)^{15}>1$

$\therefore$ $A>B$

14) $A>B$

⇨ $\frac{A}{B}=\frac{3^{400}}{2^{500}}=\left(\frac{3^4}{2^5}\right)^{100}=\left(\frac{81}{32}\right)^{100}>1$ $\therefore$ $A>B$

15) $A<B$

⇨ $\frac{A}{B}=\frac{3^{24}}{5^{18}}=\frac{(3^4)^6}{(5^2)^6}=\left(\frac{3^4}{5^2}\right)^6=\left(\frac{81}{125}\right)^6<1$

이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$

16) $A<B$

⇨ $\frac{A}{B}=\frac{3^{30}}{6^{20}}=\frac{(3^3)^{10}}{(6^2)^{10}}=\left(\frac{3^3}{6^2}\right)^{10}=\left(\frac{27}{36}\right)^{10}<1$

이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$

17) $A<B$

⇨ $\frac{A}{B}=\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}}=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{10}=\left(\frac{8}{9}\right)^{10}<1$

이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$

18) $A>B$

⇨ $A^2=18$, $B^2=12$이므로 $A^2>B^2$

이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A>B$

19) $A<B$

⇨ $(\sqrt{7}-1)-(\sqrt{8}-1)=\sqrt{7}-\sqrt{8}<0$

$\therefore$ $\sqrt{7}-1<\sqrt{8}-1$

20) $A>B$

⇨ $(3+\sqrt{5})-(\sqrt{8}+\sqrt{5})=3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$

$\therefore$ $3+\sqrt{5}>\sqrt{8}+\sqrt{5}$

21) $A>B$

⇨ $A^2=(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=11+2\sqrt{30}$

$B^2=(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=11+2\sqrt{24}$

$\sqrt{30}>\sqrt{24}$이므로 $A^2>B^2$

이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A>B$

22) $A<B$

⇨ $(-\sqrt{12}+\sqrt{8})-(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})$

$=-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$

$=6\sqrt{2}-5\sqrt{3}=\sqrt{72}-\sqrt{75}<0$

$\therefore$ $-\sqrt{12}+\sqrt{8}<3\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

23) $A>B$

⇨ $(3\sqrt{10}-2)-4=3\sqrt{10}-6=\sqrt{90}-\sqrt{36}>0$

$\therefore$ $3\sqrt{10}-2>4$

24) $A<B$

⇨ $A^2=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}$

$B^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}=7+2\sqrt{12}$

$\sqrt{10}<\sqrt{12}$이므로 $A^2<B^2$

이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$

25) $A<B$

⇨ $A^2=(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=10+2\sqrt{21}$
$B^2=(2+\sqrt{6})^2=10+4\sqrt{6}=10+2\sqrt{24}$
$\sqrt{24}>\sqrt{21}$이므로 $A^2<B^2$
이때, $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$

26) $A<B<C$
⇨ $\frac{A}{B}=\frac{2^{40}}{5^{20}}=\left(\frac{2^4}{5^2}\right)^{10}=\left(\frac{16}{25}\right)^{10}<1$ $\quad\therefore\ A<B$
$\frac{B}{C}=\frac{5^{20}}{3^{30}}=\left(\frac{5^2}{3^3}\right)^{10}=\left(\frac{25}{27}\right)^{100}<1$ $\quad\therefore\ B<C$

27) $B>A>C$
⇨ $A^2=(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=9+6\sqrt{2}=9+\sqrt{72}$
$B^2=(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}=9+\sqrt{80}$
$C^2=(1+2\sqrt{2})^2-9+4\sqrt{2}=9+\sqrt{32}$
$\sqrt{80}>\sqrt{72}>\sqrt{32}$ 이므로 $B^2>A^2>C^2$
그런데 $A>0$, $B>0$, $C>0$이므로 $B>A>C$

28) $C<A<B$
⇨ $(2-\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-3)=5-3\sqrt{3}=\sqrt{25}-\sqrt{27}<0$
이므로 $2-\sqrt{3}<2\sqrt{3}-3$
$(2\sqrt{3}-3)-(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$이
므로 $2\sqrt{3}-3<\sqrt{3}-1$
$\therefore\ 2-\sqrt{3}<2\sqrt{3}-3<\sqrt{3}-1$

29) $B>C>A$
⇨ $A^2=4^2=16=13+3=13+2\sqrt{\frac{9}{4}}$
$B^2=(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=13+2\sqrt{42}$
$C^2=(\sqrt{2}+\sqrt{11})^2=13+2\sqrt{22}$
$B^2>C^2>A^2$이고, $A>0$, $B>0$, $C>0$이므로
$B>C>A$

30) $C>B>A$
⇨ $A^2=(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}=9+\sqrt{80}$
$B^2=(2+\sqrt{7})^2=11+4\sqrt{7}=11+\sqrt{112}$
$C^2=(3+\sqrt{6})^2+15+6\sqrt{6}=15+\sqrt{216}$
$C^2>B^2>A^2$이고, $A>0$, $B>0$, $C>0$이므로
$C>B>A$

31) $A>B$
⇨ $A-B=\frac{2a}{1+2a}-\frac{2b}{1+2b}$
$=\frac{2a(1+2b)-2b(1+2a)}{(1+2a)(1+2b)}$
$=\frac{2a-2b}{(1+2a)(1+2b)}=\frac{2(a-b)}{(1+2a)(1+2b)}$
$a>b>0$에서 $a-b>0$, $1+2a>0$, $1+2b>0$이므
로 $\frac{2(a-b)}{(1+2a)(1+2b)}>0$
$\therefore\ A>B$

32) $A>B$
⇨ $A-B=\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}=\frac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)(b+1)}$
$=\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}$
$a>b>0$에서 $a-b>0$, $a+1>0$, $b+1>0$이므로
$\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}>0$ $\quad\therefore\ A>B$

33) $A>B$
⇨ $A-B=\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a(1+b)-b(1+a)}{(1+a)(1+b)}$
$=\frac{a-b}{(1+a)(1+b)}$
$a>b>0$에서 $a-b>0.1+a>0.1+b>0$이므로
$\frac{|a-b|}{(1+a)(1+b)}>0$ $\quad\therefore\ A>B$

34) $A\ \geq\ B$
⇨ $A-B=x^2+x-(3x-1)$
$=x^2-2x+1$
$=(x-1)^2\ \geq\ 0$
$\therefore\ A\ \geq\ B$

35) $A\geq B$
⇨ $A-B=(3x^2-2y^2)+(2x^2-2xy-3y^2)$
$=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2\geq 0$
$\therefore\ A\geq B$

36) $A\geq B$
⇨ $A-B=3x^2-5x-(2x^2-3x-1)$
$=x^2-2x+1$
$=(x-1)^2\geq 0$
$\therefore\ A\geq B$

37) $A\leq B$
⇨ $A-B=(x^2-4xy-6y^2)-(2x^2-2y^2)$
$=-x^2-4xy-4y^2=-(x+2y)^2\leq 0$
$\therefore\ A\leq B$

38) $A\leq B$
⇨ $A-B=x^2+xy-3y^2-(2x^2-3xy+2y^2)$
$=-x^2+4xy-5y^2$
$=-(x^2-4xy+4y^2)-y^2$
$=-(x-2y)^2-y^2\leq 0$
$\therefore\ A\leq B$

39) $A\leq B$
⇨ $A-B=2x^2+3xy-(3x^2+xy+y^2)$
$=-x^2+2xy-y^2$
$=-(x-y)^2\leq 0$
$\therefore\ A\leq B$

40) $A\geq B$
⇨ $A-B=2x^2+4y^2-(x^2+2xy+2y^2)$

$=x^2-2xy+2y^2$
$=(x-y)^2+y^2\ge 0$ ($\because$ $(x-y)^2\ge 0$, $y^2\ge 0$)
$\therefore$ $\mathrm{A}\ge\mathrm{B}$

41) $\mathrm{A}\ge\mathrm{B}$
⇨ $\mathrm{A}-\mathrm{B}=xy+1-(x+y)$
$=xy-x-y+1$
$=(x-1)(y-1)\ge 0$ ($\because$ $x-1\le 0$, $y-1\le 0$)
$\therefore$ $\mathrm{A}\ge\mathrm{B}$

42) ○
⇨ $|a|>-2$

43) ○

44) ○
⇨ $(3a+2)^2\ge 0$

45) ○

46) ×
⇨ $a>-2$

47) ○
⇨ $(a-1)^2\ge 0$이므로 $(a-1)^2+2>0$

48) ○
⇨ $a^2\ge 0$

49) ○
⇨ $a^2\ge 0$

50) ×
⇨ $a=-2$일 때 $a^2+6a+7<0$

51) ○

52) ×
⇨ $a=0$이고 $b=1$일 때 $(a-b)^3<0$

53) ×
⇨ $a\le 0$인 경우 부등식이 성립하지 않는다.

54) ×

55) ○

56) ○
⇨ $a^2-4a+4=(a-2)^2\ge 0$

57) ×
⇨ $a=0$이고 $b=1$일 때 $a^2-b<0$

58) ×
⇨ $a=-\frac{1}{3}$일 때, 부등식이 성립하지 않는다.

59) ○
⇨ $|a-b|\ge 0$이므로 $|a-b|+1\ge 1>0$

60) ○

61) ○
⇨ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\ge 0$

62) (가) $\frac{3}{4}b^2$ (나) $a=b=0$
⇨ $a^2+b^2-ab=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+\boxed{\frac{3}{4}b^2}$
$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{\frac{3}{4}b^2}$
a, b가 실수이므로 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\ge 0$, $\boxed{\frac{3}{4}b^2}\ge 0$
따라서 $a^2+b^2-ab\ge 0$이므로
$a^2+b^2\ge ab$ (단, 등호는 $\boxed{a=b=0}$일 때 성립)

63) $\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\ge$
⇨ $a^2-ab+b^2=a^2-ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$
$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$
그런데 $\left(a-\boxed{\frac{b}{2}}\right)^2\ge 0$, $\frac{3}{4}b^2\ge 0$이므로
$\left(a-\boxed{\frac{b}{2}}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge 0$
$\therefore$ $a^2-ab+b^2\boxed{>}0$
이때, 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $b=0$
즉, $a=b=0$일 때 성립한다.

64) $\ge$, $\ge$, $\ge$, $\ge$, $\ge$
⇨ $|a|+|b|\ge 0$, $|a+b|\ge 0$이므로
$(|a|+|b|)^2\boxed{\ge}|a+b|^2$임을 보이면 된다.
$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=|a|^2+2|a|\,|b|+|b|^2-(a+b)^2$
$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2=2(|ab|-ab)$
$|ab|\boxed{\ge}ab$이므로 $2(|ab|-ab)\boxed{\ge}0$이다.
$\therefore$ $(|a|+|b|)^2\boxed{\ge}|a+b|^2$
즉, $|a|+|b|\boxed{\ge}|a+b|$
단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\ge 0$일 때 성립한다.

65) (가) $|a+b|\ge 0$ (나) $|a|+|b|\ge 0$
(다) $|ab|$ (라) $|ab|\ge ab$ (마) $|ab|=ab$
⇨ (가) $|a+b|\ge 0$
(나) $|a|\ge 0$, $|b|\ge 0$에서 $|a|+|b|\ge 0$
(다) $|a|\,|b|=|ab|$이므로 $|ab|$
(라) 모든 실수 x에 대하여 $|x|\ge x$이 성립하므로 $|ab|\ge ab$
(마) 등호는 $|ab|=ab$일 때 성립하므로 $|ab|=ab$

66) $a^2+a+1=a^2+a+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이때, $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$이므로

$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$

$\therefore\ a^2+a+1>0$

67) $a^2-2ab+2b^2=(a-b)^2+b^2$

이때, $(a-b)^2 \geq 0$이고 $b^2 \geq 0$이므로

$(a-b)^2+b^2 \geq 0$

$\therefore\ a^2-2ab+2b^2 \geq 0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립

68) $4a^2-4ab+2b^2=4a^2-4ab+b^2+b^2$

$=(2a-b)^2+b^2$

이때, $(2a-b)^2 \geq 0$이고 $b^2 \geq 0$이므로

$(2a-b)^2+b^2 \geq 0$

$\therefore\ 4a^2-4ab+2b^2>0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

69) $a^2-ab+b^2=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

이때, $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, $\frac{3}{4}b^2 \geq 0$이므로

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$

즉, $a^2-ab+b^2 \geq 0$이므로

$a^2+b^2 \geq ab$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

70) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

(등호는 $a=b=c$일 때 성립)

71) $(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2$

이때, $(a-b)^2 \geq 0$이므로 $(a+b)^2-4ab \geq 0$

$\therefore\ (a+b)^2 \geq 4ab$ (단, 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$ 일 때 성립)

72) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$

이때, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$, $\sqrt{a+b} \geq 0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (단, 등호는 $ab=0$일 때 성립)

73) $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a|\,|b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)$

이때, $|ab| \geq ab$이므로

$2(|ab|-ab) \geq 0$

따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$이고

$|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$이므로

$|a|+|b| \geq |a+b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$일 때 성립)

I410-ECN-0199-2017-001-000057208