



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시  
 1) 제작연월일 : 2020-03-10  
 2) 제작자 : 교육지대(주)  
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

## 개념check

## [등차수열과 등비수열의 귀납적 정의]

## • 수열의 귀납적 정의

수열  $\{a_n\}$ 을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열  $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의라 한다.

## • 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때

(1) 등차수열을 나타내는 관계식

$$\textcircled{1} a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow \text{공차가 } d \text{인 등차수열}$$

$$\textcircled{2} 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

$$\textcircled{3} a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

(2) 등비수열을 나타내는 관계식

$$\textcircled{1} a_{n+1} = ra_n \Rightarrow \text{공비가 } r \text{인 등비수열}$$

$$\textcircled{2} a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

$$\textcircled{3} a_{n+1} \div a_n = a_{n+2} \div a_{n+1}$$

## 기본문제

[문제]

1.  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n$ 과 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_5$ 를 구한 것은? (단,  $n=1, 2, 3, \dots$ )

- ① 17                                  ② 19  
 ③ 21                                  ④ 23  
 ⑤ 25

[문제]

2. 다음과 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_5$ 를 구한 것은?

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- ① 27                                  ② 54  
 ③ 81                                  ④ 162  
 ⑤ 243

[예제]

3. 다음과 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_5$ 를 구한 것은?

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- ① 157                                  ② 161  
 ③ 165                                  ④ 169  
 ⑤ 173

[문제]

4.  $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$ 과 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_7$ 를 구한 것은? (단,  $n=1, 2, 3, \dots$ )

- ① 45                                  ② 50  
 ③ 55                                  ④ 60  
 ⑤ 65

## 평가문제

[중단원 마무리하기]

5.  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ 로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_5$ 를 구한 것은? (단,  $n=1, 2, 3, \dots$ )

- ① 16                                  ② 25  
 ③ 36                                  ④ 49  
 ⑤ 64

[중단원 마무리하기]

6. 물 200L가 들어 있는 어느 수족관에 매일 전날의 물의  $\frac{1}{4}$ 을 퍼내고 20L의 물을 새로 넣는다.  $n$ 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양을  $a_n$  L라 할 때,  $a_n$ 과  $a_{n+1}$  사이의 관계식을 구한 것은?

- ①  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 20$  (단,  $n=1, 2, \dots$ )  
 ②  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 20$  (단,  $n=1, 2, \dots$ )  
 ③  $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 20$  (단,  $n=1, 2, \dots$ )  
 ④  $a_{n+1} = a_n + 20$  (단,  $n=1, 2, \dots$ )  
 ⑤  $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n + 20$  (단,  $n=1, 2, \dots$ )

[중단원 마무리하기]

7. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 = 12$ 이고  $a_{n+1}^2 + a_n^2 = 9 + 2a_n a_{n+1}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )이 성립할 때,  $a_{20}$ 을 구한 것은? (단,  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ )

- ① -40                      ② -45  
 ③ -50                      ④ -55  
 ⑤ -60

[중단원 마무리하기]

8. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2^{n+1}a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )으로 정의될 때,  $\log_2 a_8$ 의 값을 구한 것은?

- ① 35                      ② 36  
 ③ 44                      ④ 54  
 ⑤ 55

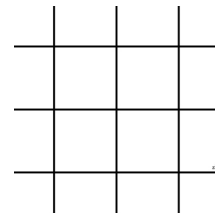
[대단원 평가하기]

9. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 2$ ,  $(n+1)a_{n+1} = 3na_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )으로 정의될 때,  $a_5 = \frac{p}{q}$ 라 한다.  $p+q$ 의 값은?

- ① 152                      ② 157  
 ③ 162                      ④ 167  
 ⑤ 172

[대단원 평가하기]

10. 평면 위에 평행한 세 직선과 이 직선에 수직인 하나의 직선이 있다. 수직인 직선과 평행이 되도록  $n$ 개의 직선을 그을 때, 만들어지는 크고 작은 직사각형의 개수를  $a_n$ 개라고 하자. 예를 들어 다음 그림에서  $a_2 = 9$ 이다. 이때  $a_6$ 을 구하시오.

 $a_2=9$ 

- ① 54                      ② 57  
 ③ 60                      ④ 63  
 ⑤ 66

[중단원 마무리하기]

11. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 8$ ,  $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 6$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )으로 정의될 때,  $a_{2k-1} = 86$ 을 만족시키는 상수  $k$ 의 값을 구한 것은?

- ① 11                      ② 12  
 ③ 13                      ④ 14  
 ⑤ 15

## 유사문제

12.  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$   
 $(n=1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $\frac{a_{10}}{a_9}$

의 값은?

- ① 10                                      ② 12  
 ③ 14                                      ④ 15  
 ⑤ 16

13. 수열  $\{a_n\}$ 이 귀납적으로  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$   
 과 같이 정의될 때,  $a_{10}$ 의 값은?

- ① 9                                        ② 10  
 ③ 11                                      ④ 20  
 ⑤ 22

14. 수열  $\{a_n\}$ 을  
 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} \cdot 2 \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의할  
 때, 제99항은?

- ① -1                                      ② 1  
 ③ 2                                        ④ 3  
 ⑤ 5

15. 수열  $\{a_n\}$ 이 귀납적으로  
 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} (n=1, 2, 3, \dots)$ 과 같이  
 정의될 때,  $a_{10} = \frac{p}{q}$ 이다.  $p-q$ 의 값은?  
 (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.)

- ① 7                                        ② 9  
 ③ 11                                      ④ 13  
 ⑤ 15

16. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_{11} = 6, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수}) \\ a_n + 1 & (a_n \text{이 홀수}) \end{cases}$   
 을 만족할 때,  $\sum_{k=12}^{21} a_k$ 의 값은?

- ① 15                                      ② 16  
 ③ 19                                      ④ 21  
 ⑤ 25

17. 수열  $\{a_n\}$ 을  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} + a_n = (-1)^n \end{cases} (n=1, 2, 3, \dots)$ 으  
 로 정의할 때,  $a_{2016}$ 의 값은?

- ① -2017                                      ② -2016  
 ③ -2015                                      ④ 2015  
 ⑤ 2016

18. 어느 물탱크에 매일 같은 시간에 3톤의 물이 유  
 입되고 바로 물탱크의 저수량을 측정한다. 이후 물  
 탱크의 측정된 물의 75%가 24시간 동안 빠져나가  
 고 물이 다시 유입되는 일이 계속 반복된다. 12월  
 1일 3톤의 물이 유입되고 측정된 저수량이 6톤이었  
 을 때, 12월 6일 3톤의 물이 유입된 다음 바로 측  
 정된 물의 양은?

- ①  $\frac{4097}{1024}$ (톤)                                      ②  $\frac{2047}{512}$ (톤)  
 ③  $\frac{2049}{512}$ (톤)                                      ④  $\frac{1025}{256}$ (톤)  
 ⑤  $\frac{1027}{256}$ (톤)

19.  $a_1 = 2$ 이고 모든 자연수  $n$ 에 대하여  
 $a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n$ 을 만족하는 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_4$   
 의 값은?

- ①  $\frac{3}{2}$     ② 2  
 ③ 3    ④  $\frac{7}{2}$   
 ⑤ 4

20. 다음과 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_5$ 의 값은?

$$a_1 = 3, \quad 2a_{n+1} - a_n + 1 = 0$$

①  $-\frac{3}{4}$

②  $-\frac{7}{8}$

③  $-\frac{15}{16}$

④  $-\frac{31}{32}$

⑤  $-\frac{63}{64}$



## 정답 및 해설

## 1) [정답] ③

[해설]  $a_1 = 1$ 이고,  $a_{n+1} = a_n + 2n$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 6 = 13$$

$$a_5 = a_4 + 8 = 21$$

## 2) [정답] ④

[해설] 이 수열은 등비수열의 귀납적 정의이므로

첫째항이 2, 공비가 3으로  $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$$\text{따라서 } a_5 = 2 \times 3^4 = 162$$

## 3) [정답] ②

[해설]  $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 관계식  $a_{n+1} = 3a_n + 2$ 에

차례대로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 + 2$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3(3 + 2) + 2 = 3^2 + 2 \times 3 + 2$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3(3^2 + 2 \times 3 + 2) + 2$$

$$= 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 3^4 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$$

$$= 3^4 + 2 \times (3^3 + 3^2 + 3 + 1)$$

$$= 161$$

## 4) [정답] ⑤

[해설]  $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 관계식  $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 에 차

례대로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2(2^2 - 1) - 1 = 2^3 - 2 - 1$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2(2^3 - 2 - 1) - 1 = 2^4 - 2^2 - 2 - 1$$

$$\vdots$$

$$a_7 = 2a_6 - 1 = 2^7 - 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 1$$

$$= 2^7 - (2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1)$$

$$= 65$$

## 5) [정답] ②

[해설]  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 5 = 9$$

$$a_4 = a_3 + 7 = 16$$

$$a_5 = a_4 + 9 = 25$$

## 6) [정답] ③

[해설]  $(n+1)$ 일차에는  $n$ 일차의 물의  $\frac{3}{4}$ 만큼 남고,

20 L의 물을 더 넣으므로

$$\text{관계식은 } a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 20 \text{이다.}$$

## 7) [정답] ②

[해설]  $a_{n+1}^2 + a_n^2 = 9 + 2a_n a_{n+1}$

$$a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} + a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)^2 = 9$$

$$\text{즉, } a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots \text{이므로}$$

$$a_{n+1} - a_n = -3$$

따라서  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 -3인 등차

수열이다.  $a_n = 15 - 3n$

$$a_{20} = -45$$

## 8) [정답] ①

[해설]  $a_1 = 1$

$$a_2 = 2^2 \times a_1 = 2^2$$

$$a_3 = 2^3 \times a_2 = 2^3 \times 2^2 = 2^{2+3}$$

$$a_4 = 2^4 \times a_3 = 2^4 \times 2^{2+3} = 2^{2+3+4}$$

$$\vdots$$

$$a_8 = 2^{2+3+\dots+7+8} = 2^{35} \text{이므로}$$

$$\log_2 a_8 = \log_2 2^{35} = 35$$

## 9) [정답] ④

[해설]  $(n+1)a_{n+1} = 3na_n$ 에서 양변을  $(n+1)$ 으로 나

$$\text{누면 } a_{n+1} = \frac{3n}{n+1} a_n$$

$$a_2 = \frac{3}{2} a_1 = \frac{3}{2} \times 2$$

$$a_3 = \frac{6}{3} \times a_2 = \frac{6}{3} \times \frac{3}{2} \times 2$$

$$a_4 = \frac{9}{4} \times a_3 = \frac{9}{4} \times \frac{6}{3} \times \frac{3}{2} \times 2$$

$$a_5 = \frac{12}{5} \times a_4 = \frac{12}{5} \times \frac{9}{4} \times \frac{6}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{162}{5}$$

$$162 + 5 = 167$$

[다른 풀이]  $(n+1)a_{n+1} = 3na_n$ 에서  $b_n = na_n$ 라 한다.

$$b_{n+1} = 3b_n \text{이고, } b_1 = 2 \text{이므로}$$

$$b_n = 2 \times 3^{n-1} \text{인 등비수열이다.}$$

$$\text{따라서 } b_5 = 162 = 5a_5$$

$$\text{즉 } a_5 = \frac{162}{5}$$

## 10) [정답] ④

[해설] 직사각형의 개수는 평행한 세 직선에서 두 개의 직선을, 수직인  $(n+1)$ 개의 직선에서 두 개의 직선을 택하는 방법의 수와 같다.

$$a_1 = {}_3C_2 \times {}_2C_2 = 3$$

$$a_2 = {}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$$

$$a_3 = {}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$$

$$\vdots$$

$$a_n = {}_3C_2 \times {}_{n+1}C_2 = 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{따라서 } a_6 = {}_3C_2 \times {}_7C_2 = 63$$

11) [정답] ④

[해설]  $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 6$ 을 통하여 $\{a_{2n-1}\}$ 는 첫째항이 8, 공차는 6인 등차수열임을 알 수 있다.

$$a_{2n-1} = 8 + 6(n-1) = 6n + 2$$

따라서  $a_{2k-1} = 6k + 2 = 86$ 을 만족하는  $k = 14$ 

12) [정답] ①

[해설]  $a_{n+1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n \dots \textcircled{A}$ 

$$a_n = a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1} \dots \textcircled{B}$$

 $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 빼면

$$a_{n+1} - a_n = na_n, \quad a_{n+1} = (n+1)a_n, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{a_9} = 10$$

13) [정답] ④

$$\begin{aligned} \text{[해설]} \quad a_{10} &= \frac{10}{9}a_9 = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8}a_8 = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7}a_7 = \dots \\ &= \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1}a_1 = 10a_1 = 20 \end{aligned}$$

14) [정답] ②

[해설]  $a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + (-1)^2 \cdot 2 = 3$ 

$$a_3 = a_2 + (-1)^3 \cdot 2 = 1$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^4 \cdot 2 = 3$$

 $\vdots$ 

1, 3이 반복된다.

$$\therefore a_{99} = 1$$

15) [정답] ②

$$\text{[해설]} \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

 $\vdots$ 

$$a_{10} - a_9 = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 더하면

$$a_{10} - a_1 = 1 - \frac{1}{10} \quad \therefore a_{10} = \frac{19}{10}$$

$$\therefore p - q = 19 - 10 = 9$$

16) [정답] ③

$$\text{[해설]} \quad a_{12} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$a_{13} = 3 + 1 = 4$$

$$a_{14} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$a_{15} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_{16} = 1 + 1 = 2$$

 $\vdots$ 

이후로 1, 2가 반복된다.

$$\sum_{k=12}^{21} a_k = 3 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 19$$

17) [정답] ②

[해설] 수열  $\{a_n\}$ 을 구하면

$$a_2 = (-1) - a_1 = -2$$

$$a_3 = 1 - a_2 = 3$$

$$a_4 = (-1) - a_3 = -4$$

 $\vdots$ 

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot n \quad \therefore a_{2016} = -2016$$

18) [정답] ③

[해설] 12월  $n$ 일 측정된 물의 양을  $a_n$ 이라 하자.

$$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = a_n \times \frac{25}{100} + 3 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 \times \frac{1}{4} + 3 = \frac{3}{2} + 3$$

$$a_3 = a_2 \times \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + 3 \right) + 3 = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + 3$$

$$a_4 = a_3 \times \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + 3 \right) + 3$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{4} + 3$$

 $\vdots$ 

$$a_6 = \frac{3}{2^9} + \frac{3}{2^8} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^2} + 35$$

$$= 3 \left( \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} \right) + 3$$

$$= 3 \left( \frac{1+2+8+32+128}{2^9} \right) + 3$$

$$= 3 \left( \frac{1+2+8+32+128}{2^9} \right) + 3$$

$$= \frac{513}{512} + 3 = \frac{2049}{512}$$

19) [정답] ⑤

[해설]  $(n+1)a_{n+1} = 2na_n, \quad na_n = b_n$ 으로 치환하면

$$b_{n+1} = 2b_n, \quad b_n = a_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore a_n = \frac{2^n}{n}$$

$$\therefore a_4 = \frac{2^4}{4} = 4$$

20) [정답] ①

[해설]  $2a_{n+1} - a_n + 1 = 0$ 이므로  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{2}$ 

$$a_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}a_1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{a_3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^2} a_1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2^3} a_1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \\
 a_5 &= \frac{a_4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^3} a_1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2^4} a_1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2^4} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$