01 거듭제곱근의 대소비교

(1) 근호가 다른 두 거듭제곱근의 대소비교

: 두 수 $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ (단, m, n은 서로소)의 대소는 m과 n의 최소공배수를 이용하여 $\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[mn]{b^m}$ 꼴로 고쳐서 지수를 같게하여 비교한다.

참고 밑과 지수가 다른 두 수는 지수를 같게 만들어 대소관계를 비교한다.

◪ 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{4}$

3. $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

4. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$

5. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{\sqrt{6}}$

6. $\sqrt[6]{\sqrt{3}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$

7. $2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}$

◪ 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

8. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$

9. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{7}$

10. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{10}$

11. $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{26}$

12. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[12]{7}$

13. $\sqrt[9]{10}$, $\sqrt[6]{7}$, $\sqrt{2}$

14. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[9]{10}$

15. $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{12}}}$, $\sqrt[6]{4}$

16. $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{10}}}$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

02 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

(1) 곱셈공식을 이용하여 식의 값 구하기

① $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (복호동순)

② $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (복호동순)

③ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

④ $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (복호동순)

(2) $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$의 식의 값 구하기

① a^{2x}의 값이 주어질 때, $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$의 식의 값 구하기

: 구하는 식의 분모와 분자에 a^x 또는 a^{3x}를 곱한다.

② $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$의 값이 주어질 때, a^{2x}의 값 구하기

: 분모와 분자에 a^x를 곱한다.

◪ $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

17. $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$

18. $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$

19. $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2$

20. $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

21. $(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 + (a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3$

22. $(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}})$

23. $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

24. $(a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})$

◪ $a+a^{-1}=9$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

25. $a^2 + a^{-2}$

26. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

27. $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

◪ $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>1$)

28. $a + a^{-1}$

29. $a - a^{-1}$

30. $a^2 + a^{-2}$

31. $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}$

◪ $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

32. $a-a^{-1}$

33. $a+a^{-1}$

34. a^2+a^{-2}

35. $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

◪ $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=4$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

36. $a+a^{-1}$

37. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$

38. $a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$

◪ $a^{2x}=2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

39. $\dfrac{a^{6x}-a^{-6x}}{a^{2x}-a^{-2x}}$

40. $\dfrac{a^{5x}+a^{-7x}}{a^{x}+a^{-3x}}$

41. $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$

42. $\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}$

◪ $a^{2x}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

43. $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{3x}+a^{-3x}}$

44. $\dfrac{a^{3x}+a^{-x}}{a^{x}+a^{-3x}}$

45. $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}$

46. $\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

◪ $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(단, $a>0$)

47. $a^{3x}+a^{-3x}$

48. a^x-a^{-x}

49. a^{2x}

◪ 다음 각 조건을 만족하는 양수 a에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

50. $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=5$일 때, $a^{2x}+a^{-2x}$의 값

51. $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=5$일 때, $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}$의 값

52. $a^2+a^{-2}=27$일 때, $a-a^{-1}$의 값

53. $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=4$일 때, $a+a^{-1}$의 값

54. $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, a^2+a^{-2}의 값

55. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$일 때, $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-10}{a+a^{-1}-3}$의 값

56. $a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}=5$일 때, $(a+a^{-1})\div(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})$의 값

57. $a^{2x}=\dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x-a^{-3x}}$의 값

58. $a^{2x}=5$일 때, $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}+a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 값

◪ 다음에 알맞은 값을 구하여라.

59. $\dfrac{3^a+3^{-a}}{3^a-3^{-a}}=\dfrac{3}{2}$일 때, 81^a의 값

60. $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}}$의 값

61. $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{1}{3}$일 때, 4^x+4^{-x}의 값

62. $\dfrac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}}=\dfrac{3}{5}$**일 때,** 9^a-9^{-a}**의 값**

63. $\dfrac{2^a-2^{-a}}{2^a+2^{-a}}=\dfrac{1}{2}$**일 때,** 4^{-a}**의 값**

64. $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$**일 때,** 4^a**의 값**

03 거듭제곱을 주어진 문자로 나타내기

$a>0,\ b>0,\ mn\neq 0$일 때,

$a^m=b^n=k$일 때, $a=k^{\frac{1}{m}}$, $b=k^{\frac{1}{n}}$이므로 지수법칙에 의해

$ab=k^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$, $\dfrac{a}{b}=k^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$으로 나타낼 수 있다.

◪ 다음 각 조건을 만족하는 0이 아닌 실수, x, y에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

65. $8^x=10,\ 125^y=10$**일 때,** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$**의 값**

66. $8^x=27^y=6$**일 때,** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$**의 값**

67. $3^x=12^y=6$**일 때,** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$**의 값**

68. $5^x=6^y=30$**일 때,** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$**의 값**

69. $25^x=4^y=10$**일 때,** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$**의 값**

70. $2^x=\left(\dfrac{1}{5}\right)^y=\sqrt{10}$**일 때,** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$**의 값**

71. $5^x=4^y=20$**일 때,** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$**의 값**

72. $20^x=8,\ 5^y=16$**일 때,** $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}$**의 값**

73. $2^x=7,\ 7^{\frac{y}{2}}=16$**일 때,** xy**의 값**

74. $2^x=27,\ 18^y=81$**일 때,** $\dfrac{9}{x}-\dfrac{12}{y}$**의 값**

75. $15^x=3^y=5$**일 때,** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$**의 값**

76. $36^{x}=81^{y}=2$**일 때,** $\frac{2y-x}{2xy}$**의 값**

77. $5^{x}=81,\ 15^{y}=27$**일 때,** $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$**의 값**

78. $18^{x}=27,\ 2^{y}=9$**일 때,** $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}$

79. $67^{x}=27,\ 603^{y}=81$**일 때,** $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}$

80. $9^{x}=32,\ 36^{y}=16$**일 때,** $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}$**의 값**

81. $5^{x}=16,\ 20^{y}=64$**일 때,** $\frac{4}{x}-\frac{6}{y}$**의 값**

82. $2^{x}=9^{y}=12$**일 때,** $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$**의 값**

83. $20^{x}=32,\ 5^{y}=16$**일 때,** $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}$**의 값**

84. $9^{x}=8^{y}=36$**일 때,** $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$**의 값**

85. $2^{x}=3^{y}=36$**일 때,** $\frac{4(x^2+y^2)-x^2y^2}{2(x+y)}$**의 값**

정답 및 해설

1) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

⇨ $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$ 이고,

$\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$ ∴ $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

2) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$

⇨ $\sqrt[4]{3} = \sqrt[20]{3^5} = \sqrt[20]{243}$, $\sqrt[5]{4} = \sqrt[20]{4^4} = \sqrt[20]{256}$ 이고,

$\sqrt[20]{243} < \sqrt[20]{256}$ ∴ $\sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$

3) $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

⇨

$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \times 2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{(2^3)^3} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[12]{512}$

$\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 \times 3}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[12]{(3^3)^2} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$

이므로 $\sqrt[12]{512} < \sqrt[12]{729}$

∴ $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

4) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}$

⇨ $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$, $\sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$ 이고,

$\sqrt[12]{625} > \sqrt[12]{512}$ ∴ $\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}$

5) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{\sqrt{6}}$

⇨ $\sqrt[3]{2} = \sqrt[24]{2^8} = \sqrt[24]{256}$, $\sqrt[4]{\sqrt{6}} = \sqrt[8]{6} = \sqrt[24]{6^3} = \sqrt[24]{216}$ 이고, $\sqrt[24]{256} > \sqrt[24]{216}$ ∴ $\sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{\sqrt{6}}$

6) $\sqrt[6]{\sqrt{3}} < \sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$

⇨ $\sqrt[6]{\sqrt{3}} = \sqrt[12]{3} = \sqrt[60]{3^5} = \sqrt[60]{243}$,

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[15]{4} = \sqrt[60]{4^4} = \sqrt[60]{256}$ 이고,

$\sqrt[60]{243} < \sqrt[60]{256}$ ∴ $\sqrt[6]{\sqrt{3}} < \sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$

7) $2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} > \sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}$

⇨ $(2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2})$

$= \sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$

$= \sqrt[6]{3^2} - \sqrt[6]{2^3}$

$= \sqrt[6]{9} - \sqrt[6]{8} > 0$

∴ $2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} > \sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}$

8) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

⇨ $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ 에서 2, 3, 4의 최소공배수가 12이고 $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$

이때, 2^6, 3^4, 5^3의 대소를 비교하면 $2^6 < 3^4 < 5^3$

∴ $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

9) $\sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{7} < \sqrt{3}$

⇨ $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{7}$ 에서 2, 3, 4의 최소공배수가 12이고, $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3}$

이때, 3^6, 4^4, 7^3의 대소를 비교하면 $4^4 < 7^3 < 3^6$

∴ $\sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{7} < \sqrt{3}$

10) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$

⇨ $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$ 이므로

$\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} < \sqrt[6]{10}$

∴ $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$

11) $\sqrt[6]{26} < \sqrt[3]{6} < \sqrt{5}$

⇨ $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{26}$ 에서 3, 2, 6의 최소공배수가 6이고, $\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2}$, $\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3}$, $\sqrt[6]{26}$

이때, 6^2, 5^3, 26의 대소를 비교하면 $26 < 6^2 < 5^3$

∴ $\sqrt[6]{26} < \sqrt[3]{6} < \sqrt{5}$

12) $\sqrt[12]{7} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[3]{3}$

⇨ $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[12]{7} = 7^{\frac{1}{12}}$ 에서

지수 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$의 분모의 최소공배수는 12이므로 $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = (3^4)^{\frac{1}{12}} = 81^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{12}} = (5^2)^{\frac{1}{12}} = 25^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{7} = 7^{\frac{1}{12}}$

∴ $\sqrt[12]{7} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[3]{3}$

13) $\sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{7} < \sqrt{2}$

⇨ $\sqrt[9]{10}$, $\sqrt[6]{7}$, $\sqrt{2}$ 에서 9, 6, 2의 최소공배수가 18이고, $\sqrt[9]{10} = \sqrt[18]{10^2}$, $\sqrt[6]{7} = \sqrt[18]{7^3}$, $\sqrt{2} = \sqrt[18]{2^9}$

10^2, 7^3, 2^9의 대소를 비교하면

$10^2 < 7^3 < 2^9$

∴ $\sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{7} < \sqrt{2}$

14) $\sqrt[3]{2} < \sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{5}$

⇨ $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[9]{10}$ 에서 3, 6, 9의 최소공배수가 18이고, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[18]{2^6}$, $\sqrt[6]{5} = \sqrt[18]{5^3}$, $\sqrt[9]{10} = \sqrt[18]{10^2}$

이때, 2^6, 5^3, 10^2의 대소를 비교하면 $2^6 < 10^2 < 5^3$

∴ $\sqrt[3]{2} < \sqrt[9]{10} < \sqrt[6]{5}$

15) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{12}}} < \sqrt[6]{4} < \sqrt[4]{3}$

⇨ $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{12}}} = \sqrt[12]{12}$, $\sqrt[6]{4}$ 에서 4, 12, 6의 최소공배수가 12이고 $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}$, $\sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{4^2}$

3^3, 12, 4^2의 대소를 비교하면

$12 < 4^2 < 3^3$

∴ $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{12}}} < \sqrt[6]{4} < \sqrt[4]{3}$

16) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{10}}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{\sqrt{6}}$

⇨ $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{10}}} = \sqrt[12]{10}$ 에서

6, 3, 12의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[12]{6^2}$, $\sqrt[12]{2^4}$, $\sqrt[12]{10}$

이때, $10 < 2^4 < 6^2$이므로 $\sqrt[12]{10} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{6^2}$

$\therefore\ \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{10}}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{\sqrt{6}}$

17) $a-a^{-1}$

⇨ 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2=a-a^{-1}$

18) $a-b$

⇨ $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2=a-b$

19) 4

⇨ 곱셈 공식 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$을 이용하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a+2+a^{-1})-(a-2+a^{-1})=4$

20) $a+b$

⇨$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=a+b$

21) $2a+6a^{-\frac{1}{3}}$

⇨ 곱셈 공식 $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$을 이용하면

$(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(a+3a^{\frac{1}{3}}+3a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1})+(a-3a^{\frac{1}{3}}+3a^{-\frac{1}{3}}-a^{-1})$

$=2a+6a^{-\frac{1}{3}}$

22) $a+a^{-1}$

⇨ 곱셈 공식 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$을 이용하면

$(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3+(a^{-\frac{1}{3}})^3=a+a^{-1}$

23) $a-b$

⇨ $a^{\frac{1}{4}}=\mathrm{A}$, $b^{\frac{1}{4}}=\mathrm{B}$로 놓으면

$a^{\frac{1}{2}}=\mathrm{A}^2$, $b^{\frac{1}{2}}=\mathrm{B}^2$

$\therefore\ (a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

$=(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)$

$=(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)$

$=\mathrm{A}^4-\mathrm{B}^4$

$=(a^{\frac{1}{4}})^4-(b^{\frac{1}{4}})^4$

$=a-b$

24) $a-a^{-1}$

⇨ $a^{\frac{1}{4}}=A$, $a^{-\frac{1}{4}}=B$로 놓으면

$(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=(A-B)(A+B)(A^2+B^2)$

$=(A^2-B^2)(A^2+B^2)$

$=A^4-B^4$

$=(a^{\frac{1}{4}})^4-(a^{-\frac{1}{4}})^4=a-a^{-1}$

25) 79

⇨ $a+a^{-1}=9$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=81 \qquad \therefore\ a^2+a^{-2}=79$

26) $\sqrt{11}$

⇨ $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=9+2=11$

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{11}$ $(\because\ a>0)$

27) $8\sqrt{11}$

⇨ $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{11}$의 양변을 세제곱하면

$a^{\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+a^{-\frac{3}{2}}=11\sqrt{11}$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=11\sqrt{11}-3\sqrt{11}=8\sqrt{11}$

28) 11

⇨ $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a-2+a^{-1}=9 \qquad \therefore\ a+a^{-1}=11$

29) $3\sqrt{13}$

⇨ $(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=11^2-4=117$

$\therefore\ a-a^{-1}=3\sqrt{13}$ $(\because\ a>1)$

30) 119

⇨ $a+a^{-1}=11$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=121$

$\therefore\ a^2+a^{-2}=119$

31) 36

⇨ $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$a^{\frac{3}{2}}-3(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})-a^{-\frac{3}{2}}=27$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=27+3\cdot 3=36$

32) $\pm 3\sqrt{5}$

⇨ $(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4$

$=7^2-4=45$

$\therefore\ a-a^{-1}=\pm 3\sqrt{5}$

33) 7

⇨ $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2$

$=3^2-2=7$

34) 47

⇨ $a+a^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=49 \qquad \therefore\ a^2+a^{-2}=47$

35) 18

⇨ $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\times1\times3$

$=18$

36) 52

⇨ $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=4$의 양변을 세제곱하면

$a+3(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})+a^{-1}=64$

$\therefore\ a+a^{-1}=64-3\cdot4=52$

37) $3\sqrt{6}$

⇨ $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=52+2=54$

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}\ (\because\ a>0)$

38) 14

⇨ $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=4$의 양변을 제곱하면

$a^{\frac{2}{3}}+2+a^{-\frac{2}{3}}=16 \qquad \therefore\ a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}=14$

39) $\frac{21}{4}$

⇨ 분모, 분자에 a^{6x}을 각각 곱하면

$\frac{a^{6x}-a^{-6x}}{a^{2x}-a^{-2x}}=\frac{a^{12x}-1}{a^{8x}-a^{4x}}=\frac{(a^{2x})^6-1}{(a^{2x})^4-(a^{2x})^2}$

$=\frac{64-1}{16-4}=\frac{63}{12}=\frac{21}{4}$

40) $\frac{13}{4}$

⇨ 분모, 분자에 a^{7x}을 각각 곱하면

$\frac{a^{5x}+a^{-7x}}{a^{x}+a^{-3x}}=\frac{a^{12x}+1}{a^{8x}+a^{4x}}=\frac{(a^{2x})^6+1}{(a^{2x})^4+(a^{2x})^2}$

$=\frac{64+1}{16+4}=\frac{65}{20}=\frac{13}{4}$

41) $\frac{3}{2}$

⇨ 분모, 분자에 a^{3x}을 각각 곱하면

$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=\frac{a^{6x}+1}{a^{4x}+a^{2x}}=\frac{(a^{2x})^3+1}{(a^{2x})^2+a^{2x}}=\frac{8+1}{4+2}$

$=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

42) 3

⇨ 분모, 분자에 a^x을 각각 곱하면

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\frac{2+1}{2-1}=3$

43) $\frac{13}{14}$

⇨ 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{3x}+a^{-3x}}$

$=\frac{a^{3x}(a^{3x}-a^{-3x})}{a^{3x}(a^{3x}+a^{-3x})}=\frac{a^{6x}-1}{a^{6x}+1}=\frac{(a^{2x})^3-1}{(a^{2x})^3+1}$

$=\frac{27-1}{27+1}=\frac{13}{14}$

44) 3

⇨ 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$\frac{a^{3x}+a^{-x}}{a^{x}+a^{-3x}}$

$=\frac{a^{3x}(a^{3x}+a^{-x})}{a^{3x}(a^{x}+a^{-3x})}=\frac{a^{6x}+a^{2x}}{a^{4x}+1}=\frac{(a^{2x})^3+a^{2x}}{(a^{2x})^2+1}$

$=\frac{27+3}{9+1}=3$

45) $\frac{14}{3}$

⇨ 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}$

$=\frac{a^{3x}(a^{3x}+a^{-3x})}{a^{3x}(a^{x}-a^{-x})}=\frac{a^{6x}+1}{a^{4x}-a^{2x}}=\frac{(a^{2x})^3+1}{(a^{2x})^2-a^{2x}}$

$=\frac{27+1}{9-3}=\frac{14}{3}$

46) 2

⇨ 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\frac{3+1}{3-1}=2$

47) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

⇨ $a^{3x}+a^{-3x}=(a^x)^3+(a^x)^{-3}$

$=2\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

48) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $a^{2x}=(a^x)^2=2$에서 $a^x=\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ a^x-a^{-x}=a^x-(a^x)^{-1}$

$=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

49) 2

⇨ $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=3$

$a^{2x}+1=3a^{2x}-3,\ 2a^{2x}=4 \qquad \therefore\ a^{2x}=2$

50) $\dfrac{13}{6}$

⇨ $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=5$

$a^{2x}+1=5a^{2x}-5,\ 4a^{2x}=6 \qquad \therefore\ a^{2x}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a^{2x}+a^{-2x}=a^{2x}+(a^{2x})^{-1}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{13}{6}$

51) 140

⇨ $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3-(a^{-\frac{1}{2}})^3$

$=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^3+3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=5^3+3\times1\times5$

$=140$

52) ±5

⇨ $(a-a^{-1})^2=a^2+a^{-2}-2=27-2=25$

$\therefore\ a-a^{-1}=\pm5$

53) 18

⇨ $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+2=4^2+2=18$

54) 119

⇨ $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a-2+a^{-1}=9 \qquad \therefore\ a+a^{-1}=11$

$a+a^{-1}=11$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=121 \qquad \therefore\ a^2+a^{-2}=121-2=119$

55) 5

⇨ (ⅰ) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 세제곱하면

$a^{\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+a^{-\frac{3}{2}}=125$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=125-3\times5=110$

(ⅱ) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=25 \qquad \therefore\ a+a^{-1}=23$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-10}{a+a^{-1}-3}=\dfrac{100}{20}=5$

56) 4

⇨ $a^{\frac{1}{3}}=A,\ a^{-\frac{1}{3}}=B$라 하자.

$A^2+B^2=5,\ AB=1$

$(준식)=(A^3+B^3)\div(A+B)=\dfrac{(A+B)(A^2-AB+B^2)}{A+B}$

$=A^2+B^2-1=5-1=4$

57) $\dfrac{1}{2}$

⇨ 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x-a^{-3x}}$

$=\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-3x})}=\dfrac{a^{4x}-1}{a^{2x}-a^{-2x}}=\dfrac{(a^{2x})^2-1}{a^{2x}-(a^{2x})^{-1}}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{2}-2}=\dfrac{1}{2}$

58) $\dfrac{73}{15}$

⇨ 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}+a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^{3x}(a^{3x}+a^{-3x}+a^x-a^{-x})}{a^{3x}(a^x+a^{-x})}$

$=\dfrac{a^{6x}+1+a^{4x}-a^{2x}}{a^{4x}+a^{2x}}$

$=\dfrac{(a^{2x})^3+1+(a^{2x})^2-a^{2x}}{(a^{2x})^2+a^{2x}}$

$=\dfrac{125+1+25-5}{25+5}=\dfrac{73}{15}$

59) 25

⇨ 분모, 분자에 3^a을 각각 곱하면

$\dfrac{3^{2a}+1}{3^{2a}-1}=\dfrac{9^a+1}{9^a-1}=\dfrac{3}{2}$

이것을 정리하면 $9^a=5$

$\therefore\ 81^a=9^{2a}=(9^a)^2=5^2=25$

60) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{1}{2},\ 2a^x-2a^{-x}=a^x+a^{-x},\ a^x=3a^{-x},$

$a^{2x}=3,\ a^x=\sqrt{3}$

$\therefore\ \dfrac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}}=\dfrac{a^{2x}-1}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{3-1}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

61) $\dfrac{5}{2}$

⇨ $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^x(2^x-2^{-x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\dfrac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$

$3\cdot2^{2x}-3=2^{2x}+1,\ 2\cdot2^{2x}=4 \qquad \therefore\ 2^{2x}=2$

$\therefore\ 4^x+4^{-x}=2^{2x}+(2^{2x})^{-1}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

62) $\frac{15}{4}$

⇨ 분모, 분자에 3^a을 각각 곱하면

$\frac{3^{2a}-1}{3^{2a}+1}=\frac{9^a-1}{9^a+1}=\frac{3}{5}$

이것을 정리하면 $9^a=4$

$\therefore\ 9^a-9^{-a}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

63) $\frac{1}{3}$

⇨ 분모, 분자에 2^a을 각각 곱하면

$\frac{2^{2a}-1}{2^{2a}+1}=\frac{4^a-1}{4^a+1}=\frac{1}{2}$

이것을 정리하면 $4^a=3$ $\quad\therefore\ 4^{-a}=\frac{1}{3}$

64) $\frac{1}{3}$

⇨ 분모, 분자에 2^a을 각각 곱하면

$\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2$

이것을 정리하면 $4^a=\frac{1}{3}$

65) 3

⇨ $8^x=10$에서 $8=10^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$125^y=10$에서 $125=10^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면

$1000=10^{\frac{1}{x}}\times10^{\frac{1}{y}},\ 10^3=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$

66) 3

⇨ $8^x=6$에서 $8=6^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$27^y=6$에서 $27=6^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡에서

$216=6^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},\ 6^3=6^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$

67) 2

⇨ $3^x=12^y=6$이므로 $3=6^{\frac{1}{x}},\ 12=6^{\frac{1}{y}}$

$6^{\frac{1}{x}}\times6^{\frac{1}{y}}=6^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=3\times12=36=6^2$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

68) 1

⇨ $5^x=30$에서 $5=30^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$6^y=30$에서 $6=30^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡에서

$5\times6=30^{\frac{1}{x}}+30^{\frac{1}{y}}=30^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

69) 2

⇨ $25^x=10$에서 $25=10^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$4^y=10$에서 $4=10^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡에서

$100=10^{\frac{1}{x}}+10^{\frac{1}{y}},\ 10^2=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

70) 2

⇨ $2^x=\sqrt{10}$에서 $2=(\sqrt{10})^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$\left(\frac{1}{5}\right)^y=\sqrt{10}$에서 $\frac{1}{5}=(\sqrt{10})^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡에서

$10=(\sqrt{10})^{\frac{1}{x}}\div(\sqrt{10})^{\frac{1}{y}}$

$(\sqrt{10})^2=(\sqrt{10})^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$

71) 1

⇨ $5^x=4^y=20$이므로 $5=20^{\frac{1}{x}},4=20^{\frac{1}{y}}$

$20^{\frac{1}{x}}\times20^{\frac{1}{y}}=20^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=5\times4=20$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

72) 2

⇨ $20^x=8$에서 $8^{\frac{1}{x}}=(2^3)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$5^y=16$에서 $5=16^{\frac{1}{y}}=(2^4)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$4=2^{\frac{3}{x}}\div2^{\frac{4}{y}},\ 2^2=2^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=2$

73) 8

⇨ $7^{\frac{y}{2}}=16=2^4$에 $2^x=7$을 대입하면

$7^{\frac{y}{2}}=(2^x)^{\frac{y}{2}}=2^{\frac{xy}{2}}=2^4$이므로

$\frac{xy}{2}=4 \qquad \therefore\ xy=8$

74) -6

75) 1

⇨ $15^x=5$에서 $15=5^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$3^y=5$에서 $3=5^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡에서

$5=5^{\frac{1}{x}}\div 5^{\frac{1}{y}}=1^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$

76) 2

77) -1

⇨ $5^x=81$에서 $5=81^{\frac{1}{x}}=(3^4)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{4}{x}}$ …… ㉠

$15^y=27$에서 $15=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡에서

$\frac{1}{3}=3^{\frac{4}{x}}\div 3^{\frac{3}{y}},\ 3^{-1}=3^{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}$

$\therefore\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=-1$

78) 2

⇨ $18^x=27$에서 $18=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$2^y=9$에서 $2=9^{\frac{1}{y}}=(3^2)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡에서

$9=3^{\frac{3}{x}}\div 3^{\frac{2}{y}},\ 3^2=3^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}}$

$\therefore\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=2$

79) -2

⇨ $67^x=27$에서 $67=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$603^y=81$에서 $603=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡에서 $\frac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$이므로 $3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$

80) -2

⇨ $9^x=32$에서 $9=32^{\frac{1}{x}}=(2^5)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{5}{x}}$ …… ㉠

$36^y=16$에서 $36=16^{\frac{1}{y}}=(2^4)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡에서

$\frac{1}{4}=2^{\frac{5}{x}}\div 2^{\frac{4}{y}},\ 2^{-2}=2^{\frac{5}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore\ \frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

81) -2

82) 2

⇨ $2^x=9^y=12$이므로 $2=12^{\frac{1}{x}},\ 9=12^{\frac{1}{y}}$

$12^{\frac{4}{x}+\frac{1}{y}}=(12^{\frac{1}{x}})^4\times 12^{\frac{1}{y}}=2^4\times 9=144=12^2$

$\therefore\ \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=2$

83) 2

84) $\frac{1}{2}$

⇨ $9^x=(3^2)^x=3^{2x}=36$에서 $3=36^{\frac{1}{2x}}$ …… ㉠

$8^y=(2^3)^y=2^{3y}=36$에서 $2=36^{\frac{1}{3y}}$ …… ㉡

㉠×㉡에서

$6=36^{\frac{1}{2x}}\times 36^{\frac{1}{3y}},\ 36^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}}$

$\therefore\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{2}$

85) -8

⇨ $2^x=36 \ \Rightarrow\ 2=36^{\frac{1}{x}}$

$3^y=36 \ \Rightarrow\ 3=36^{\frac{1}{y}}$

$2\times 3=36^{\frac{1}{x}}\times 36^{\frac{1}{y}}=36^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=36^{\frac{x+y}{xy}}$

$6=36^{\frac{x+y}{xy}}$

$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$

$x+y=\frac{1}{2}xy$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{4(x^2+y^2)-x^2y^2}{2(x+y)}&=\frac{4\{(x+y)^2-2xy\}-x^2y^2}{2(x+y)}\\&=\frac{4\left\{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-2xy\right\}-x^2y^2}{2\left(\frac{1}{2}xy\right)}\\&=\frac{4\left(\frac{1}{4}x^2y^2-2xy\right)-x^2y^2}{xy}\\&=\frac{x^2y^2-8xy-x^2y^2}{xy}\\&=-8\end{aligned}$$