01 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$,
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

◪ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{2}{3}$**일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하여라.(단, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$)**

1. $\sin(\alpha-\beta)$

2. $\cos(\alpha+\beta)$

3. $\tan(\alpha-\beta)$

◪ **제 1사분면의 각 α와 제 4사분면의 각 β에 대하여 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하여라.**

4. $\sin(\alpha+\beta)$

5. $\cos(\alpha-\beta)$

6. $\tan(\alpha+\beta)$

◪ **다음 삼각함수의 값을 구하여라.**

7. $\sin 75^\circ$

8. $\cos 75^\circ$

9. $\tan 75^\circ$

10. $\sin 105^\circ$

11. $\cos 105^\circ$

12. $\tan 105^\circ$

13. $\sin 225^\circ$

14. $\tan 165^\circ$

15. $\sin\dfrac{5}{12}\pi$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

16. $\cos\frac{7}{12}\pi$

17. $\tan\frac{19}{12}\pi$

◪ 다음 식의 값을 구하여라.

18. $\cos 50^\circ \cos 100^\circ - \sin 50^\circ \sin 100^\circ$

19. $\cos 100^\circ \cos 55^\circ + \sin 100^\circ \sin 55^\circ$

20. $\sin 100^\circ \cos 40^\circ - \cos 100^\circ \sin 40^\circ$

21. $\sin 35^\circ \cos 55^\circ + \cos 35^\circ \sin 55^\circ$

22. $\sin 50^\circ \cos 100^\circ + \cos 50^\circ \cos 10^\circ$

23. $\sin 75^\circ \cos 30^\circ - \cos 75^\circ \sin 30^\circ$

24. $\cos 65^\circ \cos 20^\circ + \sin 65^\circ \sin 20^\circ$

25. $\dfrac{\tan 25^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 35^\circ}$

26. $\dfrac{\tan 80^\circ - \tan 50^\circ}{1 + \tan 80^\circ \tan 50^\circ}$

◪ 다음 이차방정식의 두 근을 $\tan\alpha$, $\tan\beta$라 할 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

27. $x^2 - 6x - 1 = 0$

28. $x^2 + x - 5 = 0$

29. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

30. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

31. $3x^2 + 10x + 2 = 0$

◪ 다음 물음에 답하여라.

32. α, β가 각각 예각이고, $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$일 때, $\cos(\alpha - \beta)$의 값을 구하여라.

33. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이고, $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

34. α, β가 각각 예각이고, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

35. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$가 각각 예각이고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{2}{3}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구하여라.

36. $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{8}$일 때, $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$의 값을 구하여라.

37. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$이고, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

38. $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{4}{3}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{a}{b}$를 만족한다. a, b는 서로소인 자연수일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

39. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값이 $\frac{a+b\sqrt{30}}{12}$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

40. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

41. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\tan\beta=\frac{15}{8}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

02 두 직선이 이루는 예각의 크기

두 직선 $l_1 : y=m_1x+n_1$, $l_2 : y=m_2x+n_2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면
$m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$
이때, 두 직선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ (단, $m_1m_2\neq-1$)

◪ 다음 물음에 답하여라.

42. 두 직선 $y=x+2$, $y=-3x+1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

43. 두 직선 $x-4y+2=0$, $3x-y+5=0$이 이루는 예각의 크기가 θ일 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

44. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x-2y+6=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

45. 두 직선 $y=-3x+4$, $y=x-1$이 이루는 예각을 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

46. 두 직선 $y=2x-2$, $y=\frac{1}{3}x+1$이 이루는 예각을 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

47. 두 직선 $5x-3y-1=0$, $2x+y=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.

48. 두 직선 $3x-y+2=0$, $x-2y+3=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

49. 두 직선 $x-\sqrt{3}y+2=0$, $\sqrt{3}x-y+1=0$가 이루는 예각의 크기를 구하여라.

50. 두 직선 $y=-(\sqrt{3}-2)x-2$와 $y=x+1$이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

03 배각의 공식, 반각의 공식

1. 삼각함수의 배각의 공식

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2. 삼각함수의 반각의 공식

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

(3) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

◪ 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

51. $\sin 15^\circ$

52. $\cos 15^\circ$

53. $\tan 15^\circ$

◪ 다음 물음에 알맞은 값을 구하여라.

54. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고, $\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$일 때, $\tan 2\alpha$의 값

55. $\tan\alpha=2$일 때, $\cos 2\alpha$의 값

56. $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$이고, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$일 때, $\cos 2\alpha$의 값

57. $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$이고, $\tan\alpha = \frac{4}{3}$일 때, $\sin\frac{\alpha}{2}$의 값

58. $\sin\alpha + \sin\beta = 0$, $\cos\alpha + \cos\beta = 1$일 때, $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$의 값

59. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고, $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$일 때, $\cos\alpha + \sin\alpha$의 값

60. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이고, $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$일 때, $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$의 값

61. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고, $\tan\alpha = \frac{1}{5}$일 때, $\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\tan 2\alpha}$의 값

04 삼각함수의 합성

(1) 사인합성: $a\sin x + b\cos x = r\sin(x+\alpha)$

(단, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha = \frac{b}{r}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$)

(2) 코사인합성: $a\sin x + b\cos x = r\cos(x-\beta)$

(단, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\beta = \frac{a}{r}$, $\cos\beta = \frac{b}{r}$)

◪ **다음 식을 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내시오. (단, $r>0$, $0 \le \alpha < 2\pi$)**

62. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

63. $\sin\theta + \cos\theta$

64. $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

65. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$

66. $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$

67. $\cos(\theta - 60^\circ) - \cos\theta$

68. $\sin\theta + \cos(\theta + 30^\circ)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

05 삼각함수의 주기와 최대, 최소

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

◪ 다음 함수의 최댓값, 최솟값을 각각 구하여라.

69. $y=\sin x-\cos x$

70. $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

71. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x+1$

72. $y=2\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

73. $y=4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin x$

74. $y=\sqrt{3}\sin(\pi+x)+\cos x$

75. $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\theta$

◪ 다음 물음에 답하여라.

76. 함수 $y=\sin x+\sqrt{a}\cos x$의 최댓값이 6일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

77. 함수 $y=a\sin x+(a-2)\cos x$의 최댓값이 $\sqrt{10}$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

78. 함수 $f(x)=3\sin x+4\cos x$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, $\tan\alpha$의 값을 구하여라. (단, $0\le x\le\pi$)

79. 함수 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x=r\sin(x+\alpha)$일 때, $r^2+\tan^2\alpha$의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

80. 함수 $f(x)=\sin x-2\cos x+3$가 $x=\theta$에서 최댓값을 가질 때, $10\cos\theta$의 값을 구하여라.

81. 함수 $y=2\sin^3 x+\sin x\cos 2x+2\cos x$의 최댓값을 구하여라.

정답 및 해설

1) $-\dfrac{\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{9}$

⇨ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\cos\beta<0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{9}$$

2) $-\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}}{9}$

⇨ $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}}{9}$$

3) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$

⇨ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$$

4) $\dfrac{16}{65}$

⇨ 각 α는 제 1사분면의 각이므로 $\cos\alpha>0$이고, 각 β는 제 4사분면의 각이므로 $\sin\beta<0$이다.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{65}$$

5) $-\dfrac{33}{65}$

⇨ $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{33}{65}$$

6) $\dfrac{16}{63}$

⇨ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{12}{5}$, $\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{4}{3}$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{12}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{12}{5}\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{16}{63}$$

7) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

⇨ $$\sin75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin30^\circ\times\cos45^\circ+\cos30^\circ\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

8) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

⇨ $$\cos75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos30^\circ\cos45^\circ-\sin30^\circ\sin45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

9) $2+\sqrt{3}$

⇨ $$\tan75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\frac{\tan30^\circ+\tan45^\circ}{1-\tan30^\circ\tan45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

10) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

⇨ $$\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin60^\circ\cos45^\circ+\cos60^\circ\sin45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

11) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

⇨ $$\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos60^\circ\cos45^\circ-\sin60^\circ\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

12) $-2-\sqrt{3}$

⇨ $$\tan105^\circ=\tan(45^\circ+60^\circ)=\frac{\tan45^\circ+\tan60^\circ}{1-\tan45^\circ\tan60^\circ}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

13) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ)$

$= \sin 180^\circ \cos 45^\circ + \cos 180^\circ \sin 45^\circ$

$= 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

14) $-2+\sqrt{3}$

⇨ $\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan(-15^\circ)$

$= \tan(30^\circ - 45^\circ)$

$= \frac{\tan 30^\circ - \tan 45^\circ}{1+\tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}$

$= \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$= \frac{-(3+1-2\sqrt{3})}{2} = -2+\sqrt{3}$

15) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

⇨ $\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

16) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

⇨ $\cos\frac{7}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

17) $-2-\sqrt{3}$

⇨ $\tan\frac{19}{12}\pi = \tan\left(\pi + \frac{7}{12}\pi\right)$

$= \tan\frac{7}{12}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}$

$= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$

$= -2-\sqrt{3}$

18) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $\cos 50^\circ \cos 100^\circ - \sin 50^\circ \sin 100^\circ$

$= \cos(50^\circ + 100^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

19) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\cos(100^\circ - 55^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

20) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $\sin 100^\circ \cos 40^\circ - \cos 100^\circ \sin 40^\circ$

$= \sin(100-40)^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21) 1

⇨ $\sin 35^\circ \times \cos 55^\circ + \cos 35^\circ \times \sin 55^\circ$

$= \sin(35^\circ + 55^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

22) $\frac{1}{2}$

⇨ $\cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$

$\sin 50^\circ \cos 100^\circ + \cos 50^\circ \cos 10^\circ$

$= -\sin 50^\circ \sin 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 10^\circ$

$= \cos 50^\circ \cos 10^\circ - \sin 50^\circ \sin 10^\circ$

$= \cos(50^\circ + 10^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

23) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\sin 75^\circ \cos 30^\circ - \cos 75^\circ \sin 30^\circ$

$= \sin(75^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

24) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\cos 65^\circ \times \cos 20^\circ + \sin 65^\circ \times \sin 20^\circ$

$= \cos(65^\circ - 20^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

25) $\sqrt{3}$

⇨ $\frac{\tan 25^\circ + \tan 35^\circ}{1-\tan 25^\circ \times \tan 35^\circ} = \tan(25^\circ + 35^\circ)$

$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

26) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

⇨ $\frac{\tan 80^\circ - \tan 50^\circ}{1+\tan 80^\circ \tan 50^\circ}$

$= \tan(80^\circ - 50^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

27) 3

⇨ $x^2-6x-1=0$의 두 근 $\tan\alpha$, $\tan\beta$에서

$\tan\alpha + \tan\beta = 6$

$\tan\alpha \times \tan\beta = -1$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{6}{1-(-1)} = \dfrac{6}{2} = 3$

28) $-\dfrac{1}{6}$

⇨ $x^2+x-5=0$의 두 근 $\tan\alpha$, $\tan\beta$에서

$\tan\alpha+\tan\beta=-1$

$\tan\alpha\times\tan\beta=-5$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{-1}{1-(-5)} = -\dfrac{1}{6}$

29) 3

⇨ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{3}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{2}$이므로

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = 3$

30) 1

⇨ $2x^2-5x-3=0$의 두 근 $\tan\alpha$, $\tan\beta$에서

$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{2}$

$\tan\alpha\times\tan\beta=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{5}{2}}{1-\left(-\dfrac{3}{2}\right)} = 1$

31) -10

⇨ 근과 계수의 관계에 의해

$\tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{10}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{-\dfrac{10}{3}}{1-\dfrac{2}{3}} = -10$

32) $\dfrac{\sqrt{15}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

⇨ $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$이므로 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\sin\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

($\because \alpha$, β는 예각)

따라서 구하는 값은

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

33) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

⇨ $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$이고, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\left(\because \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

$\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ 이고, $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$이므로

$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\because 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 값은

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{12}-\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

34) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

⇨ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$이므로 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ 이므로 $\sin\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

($\because \alpha$, β는 예각)

따라서 구하는 값은

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

35) $\dfrac{2(1-\sqrt{10})}{9}$

⇨ $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$이므로 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이고,

$\left(\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\sin\beta=\dfrac{2}{3}$이므로 $\cos\beta=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}$이다.

$\left(\because \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=-\dfrac{2\sqrt{10}}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{9}(1-\sqrt{10})$

36) -5

⇨ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{8}$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{5}{16}$, $\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\dfrac{5}{16}}{-\dfrac{1}{16}}=-5$

37) 0

⇨ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$이므로 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$이고, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$에서 $\cos\beta=\frac{4}{5}$이므로 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$이다.

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$=\frac{12}{25}-\frac{12}{25}=0$

38) 73

⇨ $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{4}{3}$에서 양변을 제곱하면,

$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$,

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{16}{9}$ ……㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ 에서 양변을 제곱하면,

$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$ ……㉡

두 식 ㉠, ㉡에 대하여 ㉠+㉡하여 정리하면

$2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{73}{36}$,

$2\cos(\alpha-\beta)=\frac{73}{36}-2=\frac{1}{36}$,

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{72}$

즉, $a=1$, $b=72$이므로 구하는 값은
$a+b=1+72=73$

39) -1

⇨ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$이고 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$이면 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고,

$\cos\beta=\frac{1}{4}$이면 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$이다.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}-\frac{2\sqrt{30}}{12}$

$=\frac{1-2\sqrt{30}}{12}$

$\therefore\ a+b=1-2=-1$

40) $-\frac{2}{11}$

⇨ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{2}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$

$\tan\beta=\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}$

$=\dfrac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{8}}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{11}{8}}=-\frac{2}{11}$

41) $\frac{36}{85}$

⇨ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\cos\alpha<0$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}$, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$, $\sin\beta<0$, $\cos\beta<0$

$\sin\beta=-\frac{15}{17}$, $\cos\beta=-\frac{8}{17}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{36}{85}$

42) 2

⇨ 두 직선 $y=x+2$, $y=-3x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면
$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=-3$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{1-(-3)}{1+1\times(-3)}\right|=\left|\dfrac{4}{-2}\right|=2$

43) $\frac{11}{7}$

⇨ 두 직선 $x-4y+2=0$, $3x-y+5=0$이 각각 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β라 할 때, $\tan\alpha$, $\tan\beta$는 각각 직선의 기울기이다.

즉, $x-4y+2=0 \to y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{4}$

$3x-y+5=0 \to y=3x+5$

$\therefore \tan\beta=3$

두 직선이 이루는 예각의 크기 θ는
$\theta=|\alpha-\beta|$이므로
$\tan\theta=\tan(|\alpha-\beta|)=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\dfrac{\frac{1}{4}-3}{1+\frac{1}{4}\cdot 3}\right|$

$=\left|\dfrac{-\dfrac{11}{4}}{\dfrac{7}{4}}\right|=\left|\dfrac{-11}{7}\right|=\dfrac{11}{7}$

44) $\dfrac{4}{5}$

⇨ 두 직선 $2x-y-1=0$, $x-2y+6=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$이므로

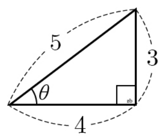
$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{1+2\times\dfrac{1}{2}}\right|=\dfrac{3}{4}$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$

이때, θ를 한 각으로 하는 직각삼각형은 다음 그림과 같으므로



$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

45) 2

⇨ $y=-3x+4$가 x축과 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 $\tan\theta_1=-3$이고, $y=x-1$가 x축과 이루는 각의 크기를 θ_2이라 하면 $\tan\theta_2=1$이다.

두 직선이 이루는 예각 θ이라 할 때,

$\tan\theta=|\tan(\theta_1-\theta_2)|$

$=\left|\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|=\left|\dfrac{-3-1}{1-3}\right|=2$

46) 1

⇨ $y=2x-2$가 x축과 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 $\tan\theta_1=2$이고, $y=\dfrac{1}{3}x+1$가 x축과 이루는 각의 크기를 θ_2이라 하면 $\tan\theta_2=\dfrac{1}{3}$이다.

두 직선이 이루는 예각 θ이라 할 때,

$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{2}{3}}=1$

47) $\dfrac{11\sqrt{170}}{170}$

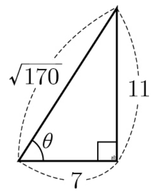
⇨ 두 직선 $5x-3y-1=0$, $2x+y=0$, 즉 $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{1}{3}$, $y=-2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{5}{3}$, $\tan\beta=-2$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{\dfrac{5}{3}-(-2)}{1+\dfrac{5}{3}\times(-2)}\right|=\dfrac{11}{7}$

이때, θ를 한 각으로 가지는 직각삼각형은 다음 그림과 같으므로



$\sin\theta=\dfrac{11\sqrt{170}}{170}$

48) 1

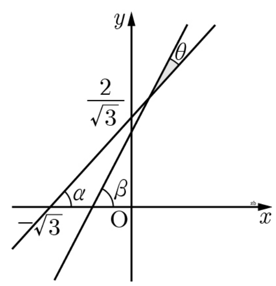
⇨ $3x-y+2=0$과 x축이 이루는 예각의 크기를 α라 하면 $\tan\alpha=3$

$x-2y+3=0$과 x축이 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\dfrac{3-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{3}{2}}\right|=1$

49) $\dfrac{\pi}{6}$

⇨ 

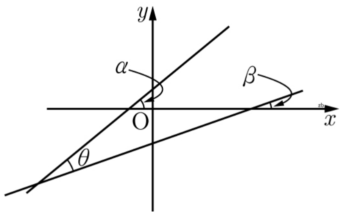
θ가 두 직선이 이루는 예각이라 하면

$\theta=\beta-\alpha$, $\tan\beta=\sqrt{3}$, $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$

50) $\dfrac{\pi}{6}$

⇨ 두 직선이 각각 $(0,\ -2)$, $(0,\ 1)$을 지나고, $2-\sqrt{3}>0$이므로 두 직선을 그림으로 나타내면



두 직선이 이루는 각을 θ라 하면
$\tan\alpha = 1$, $\tan\beta = 2-\sqrt{3}$이고, $\alpha = \beta + \theta$이므로
$\theta = \alpha - \beta$

$\therefore\ \tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 예각 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$이다.

51) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

⇨ $\sin15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$
$= \sin45^\circ \times \cos30^\circ - \cos45^\circ \times \sin30^\circ$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

52) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

⇨ $\cos15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$
$= \cos60^\circ \times \cos45^\circ + \sin60^\circ \times \sin45^\circ$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

53) $2-\sqrt{3}$

⇨ $\tan15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ)$
$= \dfrac{\tan60^\circ - \tan45^\circ}{1+\tan60^\circ \times \tan45^\circ}$
$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

54) $\dfrac{4}{3}$

⇨ $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\alpha = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \tan2\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$

55) $-\dfrac{3}{5}$

⇨ $\tan\alpha = 2$이면 삼각비에 의해
$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\times\dfrac{4}{5} = 1-\dfrac{8}{5} = -\dfrac{3}{5}$

56) $-\dfrac{7}{25}$

⇨ $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\alpha < 0$이므로
$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5}$
$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\dfrac{7}{25}$

57) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

⇨ $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$에서 $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$이므로
$\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$
$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\frac{3}{5}}{2} = \dfrac{4}{5}$이므로
$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이고,
$\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3}{4}\pi$이므로 $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

58) -1

⇨ $\sin\alpha = k$라고 하자.
이때 $\sin\beta = -k$, $\cos\alpha = t$라고 하면 $\cos\beta = 1-t$
따라서 $k^2+t^2 = 1$, $(-k)^2+(1-t)^2 = 1$
$k^2+t^2-2t+1 = 1$
$1-2t+1 = 1$
$\therefore\ t = \dfrac{1}{2}$, $k = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ \cos2\alpha + \cos2\beta = t^2-k^2+(1-t)^2-k^2$
$= \dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4} = -1$

59) $\dfrac{7}{5}$

⇨ $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$이므로

$\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$ 이고

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$이다.

$\therefore\ \cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{7}{5}$

60) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

⇨ 코사인의 덧셈정리에 의해
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$에 의해,
$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos2\alpha$이다.

$\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$이고, $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$이므로

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\left(\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$

따라서 구하는 값은

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

61) 5

⇨ $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$,

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{5}{12}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\dfrac{1}{\tan 2\alpha}=5$

62) $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

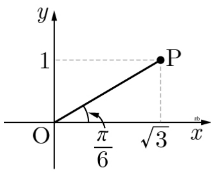
⇨ 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(\sqrt{3},1)$을 잡으면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$\therefore \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\times\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



63) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

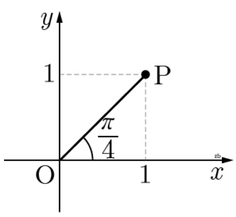
⇨ 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(1,1)$을 잡으면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$



64) $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

⇨ $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$이므로

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

65) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

⇨ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\theta+\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\theta$

$=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

66) $2\sin\left(\theta+\dfrac{11}{6}\pi\right)$

⇨ $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$이므로

$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos\theta\right\}$

$=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi\sin\theta+\sin\dfrac{11}{6}\pi\cos\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{11}{6}\pi\right)$

67) $\sin(\theta+330^\circ)$

⇨ $\cos(\theta-60^\circ)-\cos\theta$

$=\cos\theta\cos60^\circ+\sin\theta\sin60^\circ-\cos\theta$

$=\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\cos\theta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\dfrac{1}{2}\cos\theta$

$=\cos330^\circ\sin\theta+\sin330^\circ\cos\theta$

$=\sin(\theta+330^\circ)$

68) $\sin(\theta+60^\circ)$

⇨ $\sin\theta+\cos(\theta+30^\circ)$

$=\sin\theta+\cos\theta\cos30^\circ-\sin\theta\sin30^\circ$

$=\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$=\cos60^\circ\sin\theta+\sin60^\circ\cos\theta$

$=\sin(\theta+60^\circ)$

69) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$

⇨ $y=\sin x-\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$,

최솟값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

70) 최댓값: 2, 최솟값: -2

⇨ $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(\sin x\times\frac{1}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이다.

71) 최댓값: 3, 최솟값: -1

⇨ $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

이므로

$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x+1$

$=\sin x+\sqrt{3}\cos x-2\sin x+1$

$=-\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$

또한 $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$

$=2\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right\}+1$

$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin x+\sin\frac{2}{3}\pi\cos x\right)+1$

$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+1$

이때, $-1\le\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\le 1$이므로

$-1\le 2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+1\le 3$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이다.

72) 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

⇨ $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

이므로

$y=2\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\cos x-\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{3}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

또한 $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$이므로

$y=\frac{3}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)$

$=\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$이므로

$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$ 이다.

73) 최댓값: $\sqrt{7}$, 최솟값: $-\sqrt{7}$

⇨ $y=4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin x$

$=2\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{7}$, 최솟값은 $-\sqrt{7}$ 이다.

74) 최댓값: 2, 최솟값: -2

⇨ $y=\sqrt{3}(\sin\pi\cos x+\cos\pi\sin x)+\cos x$

$=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이다.

75) 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

⇨ $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\theta$

$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}+\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$이므로

따라서 이 함수의 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$ 이다.

76) 35

⇨ $y=\sin x+\sqrt{a}\cos x=\sqrt{1+a}\sin(x+\alpha)$

(단, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$)

$-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$-\sqrt{1+a}\le\sqrt{1+a}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{1+a}$

이때, 최댓값이 6이라 하였으므로

$\sqrt{1+a}=6$

$1+a=36$

$\therefore a=35$

77) 3

⇨ 삼각함수의 합성을 이용하면

$y=\sqrt{a^2+(a-2)^2}\sin(x+\alpha)$로 정리할 수 있고

최댓값이 $\sqrt{10}$ 이므로

$\sqrt{a^2+(a-2)^2}=\sqrt{10}$, $a^2+a^2-4a+4=10$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

$a^2-2a-3=0$, $(a-3)(a+1)=0$
$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

78) $\frac{3}{4}$
⇨ $f(x)=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)=5\sin(x+\theta)$
$\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$
$x+\theta=\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)$는 최댓값을 가진다.
$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$
$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$

79) 25
⇨ $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x$
$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x$
$=\sin x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\cos x$
$=\sin x+2\sqrt{3}\cos x$
$=\sqrt{13}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\cos x\right)$
$=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$
(단, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$)
따라서 $r=\sqrt{13}$이고, $\tan\alpha=2\sqrt{3}$이다.
$\therefore\ r^2+\tan^2\alpha=13+12=25$

80) $-4\sqrt{5}$
⇨ $f(x)=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)+3$
$f(x)=-\sqrt{5}\cos(x+\alpha)+3$
$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$
$f(x)$는 $x+\alpha=\pi$일 때, 최댓값을 가진다.
따라서 $\theta=\pi-\alpha$
$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$
$10\cos\theta=-\frac{20}{\sqrt{5}}=-4\sqrt{5}$

81) $\sqrt{5}$
⇨ $\sin^2x=1-\cos^2x$,
$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1$
이므로
$y=2\sin^3x+\sin x\cos 2x+2\cos x$
$=2\sin x(1-\cos^2x)+\sin x(2\cos^2x-1)+2\cos x$
$=2\sin x-2\sin x\cos^2x+2\sin x\cos^2x-\sin x+2\cos x$
$=\sin x+2\cos x$
$=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$(단, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$)
$-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로
$-\sqrt{5}\le\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{5}$
따라서 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.