(4)복소수의 사칙연산의 응용, i의 거듭제곱의 계산

01 복소수의 사칙연산의 응용

1. **식의 값 구하기**
   두 복소수의 합(또는 차)과 곱을 구한 후, 곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 구한다
2. **복소수가 실수 또는 순허수가 되는 조건**
   복소수 $z=a+bi(a,b$는 실수)에 대하여
   (1) z가 실수가 되기 위한 조건 ⇨ $b=0$
   (2) z가 순허수가 되기 위한 조건 ⇨ $a=0, b\neq 0$

◪ **두 복소수 x, y에 대하여 다음 식의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)**

1. $x=2+i, y=2-i$일 때, x^2+y^2의 값을 구하여라.

2. $x=-2i, y=i-2$일 때, x^2+y^2의 값을 구하여라.

3. $x=2+2i$, $y=3+i$일 때, $(x+y)(\overline{x+y})$의 값을 구하여라.

4. $x=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$, $y=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$일 때, x^3+y^3의 값을 구하여라.

5. $x=1+2i$, $y=2-i$일 때, $(x+y)(\overline{x+y})$의 값을 구하여라.

6. $x=2+i, y=2-i$일 때, x^3+y^3-3xy의 값을 구하여라.

7. $x=2+i, y=2-i$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 값을 구하여라.

8. $x=1+\sqrt{2}i$, $y=1-\sqrt{2}i$일 때, $x^2y-3x^2-xy^2+3y^2$의 값을 구하여라.

9. $x=\dfrac{5+3i}{2}$, $y=\dfrac{5-3i}{2}$일 때, $x^3+x^2y+xy^2+y^3$의 값을 구하여라.

◪ **다음 복소수가 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)**

10. $(4+xi)(\overline{2+3i})$

11. $(4+2i)(x-4i)$

12. $-(1-2xi)(3-4i)$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

13. $(1-2i)x^2-(3+i)x-4+3i$

14. $(1-i)x^2-3x+2+4i$

15. $(1+i)x^2-(4-i)x+3-2i$

◪ 다음 복소수가 순허수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

16. $(4+2i)(x-4i)$

17. $-(1-2xi)(3-4i)$

18. $(1+i)x^2-(1+2i)x-6-3i$

19. $(1+i)x^2-(3+i)x+2(1-i)$

20. $x(3-i)+2(-3+2i)$

21. $(1-i)x^2+(2-i)x-3+6i$

22. $(1+2i)x^2+2(1+3i)x-3$

02 켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2에 대하여

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

(2) $z_1+\overline{z_1}=$(실수), $z_1\overline{z_1}=$(실수)

(3) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(4) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

◪ 실수가 아닌 두 복소수 z, w에 대하여 $z+w$, zw가 모두 실수일 때, 옳은 것을 ○표, 옳지 않은 것은 × 표하여라. (단, $\overline{z}$, $\overline{w}$는 각각 z, w의 켤레복소수이다.)

23. $z\overline{w}=\overline{z}w$ ( )

24. $\overline{z+w}=z+w$ ( )

25. $z-\overline{w}=\overline{z}-w$ ( )

◪ 두 복소수 z_1, z_2에 대한 설명 중 옳은 것을 ○표, 옳지 않은 것은 ×표하여라. (단, $\overline{z_2}$는 z_2의 켤레복소수이다.)

26. $z_1=z_2$이면 $z_1+\overline{z_2}$는 실수이다. ( )

27. $z_1+\overline{z_2}=0$일 때, $z_1z_2=0$이면 $z_2=0$이다. ( )

28. $z_1=\overline{z_2}$이면 $z_1{}^2+z_2{}^2=0$이다. ( )

◪ 복소수 z가 주어질 때, 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

29. $z=2-i$일 때, $z\bar{z}(z+\bar{z})$의 값을 구하여라.

30. $z=2-i$일 때, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$의 값을 구하여라.

31. $z=3+2i$일 때, $z^2+\bar{z}^2$의 값을 구하여라.

32. $z=1+3i$일 때, $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}$의 값을 구하여라.

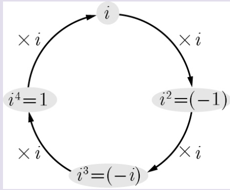
33. $z=1+i$일 때, $\dfrac{z}{\bar{z}}$의 값을 구하여라.

34. $z=3+4i$일 때, $z\bar{z}$의 값을 구하여라.

35. $z=1+2i$일 때, $\left(z-\dfrac{2}{z}\right)^2$의 값을 구하여라.

03 i의 거듭제곱

$i^2=-1$임을 이용하여 i, i^2, i^3, i^4, $\cdots$의 값을 차례로 구하면 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타난다.



◪ 다음을 계산하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

36. i^9

37. i^{18}

38. $(-i)^9$

39. $(-i)^{50}$

40. $i^{100}+i^{101}$

41. $i^{100}+i^{200}$

42. $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}$

43. $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{13}$

44. $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{19}$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

◪ 다음을 계산하여 $a+bi$(a, b는 실수)꼴로 나타내어라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

45. $\frac{1}{i}+i^2+\frac{1}{i^3}+i^4$

46. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$

47. $i+i^2+i^3+i^4$

48. $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{50}$

49. $1-i+i^2-i^3$

50. $1+i+i^2+\cdots+i^{100}$

51. $i+2i^2+3i^3+4i^4$

52. $i+i^2+i^3+\cdots+i^{30}$

53. $i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+20i^{20}$

54. $i+2i^2+3i^3+\cdots+100i^{100}$

55. $1+2i+3i^2+4i^3+5i^4+\cdots+100i^{99}$

56. $1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{2016}-i^{2017}$

57. $-i+2i^2-3i^3+4i^4-\ \cdots\ -2017i^{2017}$

58. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$

59. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\cdots+\frac{1}{i^{98}}$

60. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{100}}$

61. $1-\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}-\frac{1}{i^3}+\cdots-\frac{1}{i^{99}}$

◪ **다음을 계산하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)**

62. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{6}$

63. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

64. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$

65. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015}$

66. $\frac{1-i}{1+i}$

67. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2}$

68. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$

69. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{106}$

70. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2014}$

71. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}$

72. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{40}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{51}$

73. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{40}$

74. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1028}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1029}$

75. $\left(\frac{1-i}{i}\right)^{6}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}$

정답 및 해설

1) 6

⇨ $x+y=(2+i)+(2-i)=4$,

$xy=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot5=6$

2) $-1-4i$

⇨ $x^2+y^2=-4+(3-4i)=-1-4i$

3) 34

⇨ $x+y=(2+2i)+(3+i)=5+3i$, $\overline{x+y}=5-3i$

$\therefore$ $(x+y)(\overline{x+y})=(5+3i)(5-3i)=25+9=34$

4) -5

⇨ $x+y=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}+\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}=\dfrac{2}{2}=1$,

$xy=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}=\dfrac{1-7i^2}{4}=\dfrac{8}{4}=2$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=1^3-3\cdot2\cdot1=-5$

5) 10

⇨

$x+y=(1+2i)+(2-i)=3+i$, $\overline{x+y}=3-i$

$\therefore$ $(x+y)(\overline{x+y})=(3+i)(3-i)=10$

6) -11

⇨

$x+y=(2+i)+(2-i)=4$,

$xy=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=4^3-3\cdot5\cdot4=4$

$\therefore x^3+y^3-3xy=4-3\cdot5=-11$

7) $\dfrac{4}{5}$

⇨ $x+y=(2+i)+(2-i)=4$,

$xy=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$이므로

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{5}$

8) $-6\sqrt{2}i$

⇨

$x+y=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$

$x-y=(1+\sqrt{2}i)-(1-\sqrt{2}i)=2\sqrt{2}i$

$xy=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$

$\therefore x^2y-3x^2-xy^2+3y^2$

$=xy(x-y)-3(x^2-y^2)$

$=xy(x-y)-3(x+y)(x-y)$

$=3\cdot2\sqrt{2}i-3\cdot2\cdot2\sqrt{2}i=-6\sqrt{2}i$

9) 40

⇨

$x+y=\dfrac{5+3i}{2}+\dfrac{5-3i}{2}=5$

$xy=\dfrac{5+3i}{2}\cdot\dfrac{5-3i}{2}=\dfrac{25-9i^2}{4}=\dfrac{17}{2}$

$\therefore x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x+y)^3-2xy(x+y)$

$=5^3-2\cdot\dfrac{17}{2}\cdot5=40$

10) 6

⇨

$(4+xi)(\overline{2+3i})=(4+xi)(2-3i)$
$=(8+3x)+(2x-12)i$

실수가 되면 $2x-12=0$에서 $x=6$이다.

11) 8

⇨ 주어진 식을 전개하여 정리하면

$(4+2i)(x-4i)=4x-16i+2xi+8$
$=(4x+8)+(-16+2x)i$

실수가 되려면 (허수부분)$=0$이어야 하므로

$-16+2x=0$ ⇨ $2x=16$ $\therefore$ $x=8$

12) $-\dfrac{2}{3}$

⇨

$-(1-2xi)(3-4i)=-(3-8x)+(6x+4)i$이므로

$6x+4=0$ $\therefore$ $x=-\dfrac{2}{3}$

13) $x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=1$

⇨

$(1-2i)x^2-(3+i)x-4+3i$
$=(x^2-3x-4)-(2x^2+x-3)i$

실수가 되려면

$2x^2+x-3=0$, $(2x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=1$

14) $x=-2$ 또는 $x=2$

⇨

$z=(1-i)x^2-3x+2+4i$
$=(x^2-3x+2)-(x^2-4)i$

z가 실수가 되려면

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

15) $x=-2$ 또는 $x=1$

⇨

$z=(1+i)x^2-(4-i)x+3-2i$
$=(x^2-4x+3)+(x^2+x-2)i$

z가 실수가 되려면

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

16) -2

⇨ 주어진 식을 전개하여 정리하면

$(4+2i)(x-4i)=4x-16i+2xi+8$
$=(4x+8)+(-16+2x)i$

순허수가 되려면 (실수부분)$=0$이어야 하므로

$4x+8=0$ ⇨ $4x=-8$ $\therefore x=-2$

17) $\frac{3}{8}$

⇨

$-(1-2xi)(3-4i)=-(3-8x)+(6x+4)i$이므로

$3-8x=0$ $\therefore x=\frac{3}{8}$

18) 0, 허수부분, -2

⇨ $z=(1+i)x^2-(1+2i)x-6-3i$가 순허수가 되려면 (실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-6=0$ ⋯ ㉠

$x^2-2x-3\neq 0$ ⋯ ㉡

㉠에서 $(x+2)(x-3)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

㉡에서 $(x+1)(x-3)\neq 0$ $\therefore x\neq -1$, $x\neq 3$

따라서 구하는 x의 값은 $x=-2$

19) $x=1$

⇨

$z=(1+i)x^2-(3+i)x+2(1-i)$
$=(x^2-3x+2)+(x^2-x-2)i$

z가 순허수가 되려면

$x^2-3x+2=0$ ⋯ ㉠

$x^2-x-2\neq 0$ ⋯ ㉡

㉠에서 $(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

㉡에서 $(x+1)(x-2)\neq 0$ $\therefore x\neq -1$, $x\neq 2$

따라서 구하는 x의 값은 $x=1$

20) $x=2$

⇨

$x(3-i)+2(-3+2i)=(3x-6)+(-x+4)i$

순허수가 되려면

$3x-6=0, -x+4\neq 0$ $\therefore x=2, x\neq 4$

따라서 구하는 x의 값은 $x=2$

21) $x=1$

⇨

$(1-i)x^2+(2-i)x-3+6i=(x^2+2x-3)-(x^2+x-6)i$

순허수가 되려면

$x^2+2x-3=0$ ⋯ ㉠, $x^2+x-6\neq 0$ ⋯ ㉡

㉠에서 $(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

㉡에서 $(x+3)(x-2)\neq 0$ $\therefore x\neq -3, x\neq 2$

따라서 구하는 x의 값은 $x=1$

22) $x=1$

⇨

$z=(1+2i)x^2+2(1+3i)x-3$
$=(x^2+2x-3)+(2x^2+6x)i$

z가 순허수가 되려면

$x^2+2x-3=0$ ⋯ ㉠

$2x^2+6x\neq 0$ ⋯ ㉡

㉠에서 $(x-1)(x+3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=-3$

㉡에서 $2x(x+3)\neq 0$ $\therefore x\neq 0$, $x\neq -3$

따라서 구하는 x의 값은 $x=1$

23) ×

⇨ $z+w$, zw가 모두 실수이므로 $\overline{z}=w$, $\overline{w}=z$ 이다.

$z\overline{w}=\overline{z}w$ 는 거짓 (반례 : $z=1+i$, $w=1-i$)

24) ○

⇨ $z+w$, zw가 모두 실수이므로 $\overline{z}=w$, $\overline{w}=z$ 이다.

$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}=w+z$ 이므로 참

25) ○

⇨ $z+w$, zw가 모두 실수이므로 $\overline{z}=w$, $\overline{w}=z$ 이다.

$z-\overline{w}=\overline{w}-\overline{w}=0$, $\overline{z}-w=w-w=0$ 이므로 참

26) ○

27) ○

28) ×

⇨ $z_1=a+bi$이라 하면 $\overline{z_2}=a+bi$에서 $z_2=a-bi$

$z_1^2+z_2^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2$
$=(a^2+2abi-b^2)+(a^2-2abi-b^2)$
$=2(a^2-b^2)$

따라서 $a^2\neq b^2$이면 등식은 성립하지 않는다.

29) 20

⇨

$z=2-i, \overline{z}=2+i$이므로

$z+\overline{z}=(2-i)+(2+i)=4$

$z\overline{z}=(2-i)(2+i)=4-i^2=5$

$z\overline{z}(z+\overline{z})=5\cdot 4=20$

30) $\frac{4}{5}$

⇨

$z=2-i, \overline{z}=2+i$이므로

$z+\overline{z}=(2-i)+(2+i)=4$

$z\overline{z}=(2-i)(2+i)=4-i^2=5$

$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{4}{5}$

31) 10

⇨ $z=3+2i, \overline{z}=3-2i$이므로

$z^2+\overline{z}^2=(3+2i)^2+(3-2i)^2$
$=(5+12i)+(5-12i)=10$

32) $-\frac{8}{5}$

⇨

$z=1+3i,\ \overline{z}=1-3i$이므로

$z+\overline{z}=(1+3i)+(1-3i)=2$

$z\overline{z}=(1+3i)(1-3i)=1-9i^2=10$

$z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=2^2-2\cdot 10=-16$

$\therefore \dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2+\overline{z}^2}{z\overline{z}}=\dfrac{-16}{10}=-\dfrac{8}{5}$

33) i

⇨

$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(1+i)^2}{1^2-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$

34) 25

⇨

$z=3+4i$이므로 $\overline{z}=3-4i$이다.

$\therefore z\overline{z}=(3+4i)(3-4i)=9+16=25$

35) $\dfrac{-27+36i}{25}$

⇨

$\left(z-\dfrac{2}{z}\right)^2=\left(1+2i-\dfrac{2}{1-2i}\right)^2=\left\{1+2i-\dfrac{2(1+2i)}{5}\right\}^2$

$=\left(\dfrac{3+6i}{5}\right)^2=\dfrac{-27+36i}{25}$

36) i

⇨ $i^9=(i^4)^2\cdot i=i$

37) -1

⇨ $i^{18}=i^{4\cdot 4+2}=(i^4)^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$

38) $-i$

⇨

$(-i)^9=-i^9=-i^{4\cdot 2+1}=-(i^4)^2\cdot i$

$=-1\cdot i=-i$

39) -1

⇨

$(-i)^{50}=i^{50}=i^{4\cdot 12+2}=(i^4)^{12}\cdot i^2$

$=1\cdot(-1)=-1$

40) $1+i$

⇨ $i^{100}+i^{101}=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}\cdot i=1+i$

41) 2

⇨ $i^{100}+i^{200}=(i^4)^{25}+(i^4)^{50}=1+1=2$

42) $-i-1$

⇨ $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}=\dfrac{i+1}{i^2}=-i-1$

43) $-i$

⇨

$\dfrac{1}{i}=\dfrac{1\cdot i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i$이므로

$\left(\dfrac{1}{i}\right)^{13}=(-i)^{13}=-i^{13}=-i^{4\cdot 3+1}=-(i^4)^3\cdot i$

$=-1\cdot i=-i$

44) i

⇨

$\left(\dfrac{1}{i}\right)^{19}=(-i)^{19}=-i^{19}=-i^{4\cdot 4+3}=-(i^4)^4\cdot i^3$

$=-1\cdot(-i)=i$

45) 0

⇨ $\dfrac{1}{i}+i^2+\dfrac{1}{i^3}+i^4=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$

46) 0

⇨ $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$

47) 0

⇨

$i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1$

$=0$

48) $-1+i$

⇨

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{50}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{45}+i^{46}+i^{47}+i^{48})+i^{49}+i^{50}$

$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$

$=-1+i$

49) 0

⇨ $1-i+i^2-i^3=1-i+(-1)-(-i)=0$

50) 1

⇨

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$

$=(1+i+i^2+i^3)+\cdots+(i^{96}+i^{97}+i^{98}+i^{99})+i^{100}$

$=(1+i-1-i)+\cdots+(1+i-1-i)+1$

$=1$

51) $2-2i$

⇨ $i+2i^2+3i^3+4i^4=i-2-3i+4=2-2i$

52) $i-1$

⇨

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{30}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{25}+i^{26}+i^{27}+i^{28})+i^{29}+i^{30}$

$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$

$=i-1$

53) $10-10i$

⇨

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+20i^{20}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+\cdots+(17i^{17}+18i^{18}+19i^{19}+20i^{20})$

$=(i-2-3i+4)+\cdots+(17i-18-19i+20)$

$=(2-2i)+\cdots+(2-2i)$

$=5(2-2i)=10-10i$

54) $50-50i$

⇨

$i+2i^2+3i^3+\cdots+100i^{100}$
$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+\cdots+(97i^{97}+98i^{98}+99i^{99}+100i^{100})$
$=(i-2-3i+4)+\cdots+(97i-98-99i+100)$
$=(2-2i)+\cdots+(2-2i)$
$=25(2-2i)=50-50i$

55) $-50-50i$

⇨ 첫째항부터 4개의 항씩 묶어서 계산하면
$(1+2i-3-4i)+(5+6i-7-8i)+\cdots+(87+88i-99-100i)$
$=25(-2-2i)=-50-50i$

56) $1-i$

⇨ 4개의 항을 묶어서 계산하면
$1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{2016}-i^{2017}$
$=504(1-i+i^2-i^3)+1-i$
$=504(1-i-1+i)+1-i=1-i$

57) $1008-1009i$

⇨

$-i+2i^2-3i^3+4i^4=-i-2+3i+4=2+2i$
$-5i^5+6i^6-7i^7+8i^8=-5i-6+7i+8=2+2i$
$\vdots$
$-2013i^{2013}+2014i^{2014}-2015i^{2015}+2016i^{2016}$
$=-2013i-2014+2015i+2016=2+2i$

$\therefore$(주어진 식) $=504(2+2i)-2017i^{2017}$
$=1008+1008i-2017i$
$=1008-1009i$

58) 0

⇨

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$$

59) $-1-i$

⇨

(준식)

$$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{i^{93}}+\frac{1}{i^{94}}+\frac{1}{i^{95}}+\frac{1}{i^{96}}\right)+\left(\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1\right)$$
$$=-i-1$$

60) 0

⇨

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{100}}$$
$$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}+\frac{1}{i^{100}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)$$
$$=0$$

61) 0

⇨

$\frac{1}{i}=-i,\ \frac{1}{i^2}=-1,\ \frac{1}{i^3}=i,\ \frac{1}{i^4}=1$ 이므로

$1-\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}-\frac{1}{i^3}+\cdots-\frac{1}{i^{99}}$
$=1+i-1-i+\cdots-i$
$=0$

62) -1

⇨

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6=i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$

63) -1

⇨

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}=i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2=-1$

64) -1

⇨

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}=i^{102}=(i^4)^{25}\cdot i^2=-1$

65) $-i$

⇨ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015}=i^{2015}=(i^4)^{503}\cdot i^3=-i$

66) $-i$

⇨ $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

67) -1

⇨ $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=(-i)^2=-1$

68) -1

⇨ $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2=-1$

69) -1

⇨

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{106}=(-i)^{106}=i^{106}=(i^4)^{26}\cdot i^2=-1$

70) -1

⇨ $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2014}=(-i)^{2014}=(i^4)^{503}\cdot i^2=-1$

71) $i-1$

⇨

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i,$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}=i^{25}+(-i)^{30}=(i^4)^6\cdot i+(i^4)^7\cdot i^2$

$=i+i^2=i-1$

72) $1-i$

⇨

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i,$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{40}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{51}=i^{40}-(-i)^{51}=(i^4)^{10}+(i^4)^{12}\cdot i^3$

$=1+(-i)=1-i$

73) 0

⇨

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i,$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{40}=(-i)^{20}-i^{40}=i^{20}-i^{40}$

$=(i^4)^5-(i^4)^{10}=1-1=0$

74) $1-i$

⇨

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i,$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1028}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1029}=i^{1028}+(-i)^{1029}$

$=i^{1028}-i^{1029}$

$=(i^4)^{257}-(i^4)^{257}\cdot i$

$=1-i$

75) $1-8i$

⇨

$(\frac{1-i}{i})^2=2i$ 이므로 $(\frac{1-i}{i})^6=(2i)^3=-8i$

$\frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}=i^{20}=(i^4)^5=1$

(주어진 식) $=1-8i$