10

등비수열

01 등비수열 381

예제

02 등비수열의 합 390

예제

기본 다지기 406

실력 다지기 408

예제 01 등비수열의 항 구하기

다음 물음에 답하여라.

(1) 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=24$, $a_6=-192$일 때, 이 수열의 첫째항과 공비의 합을 구하여라.

(2) 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2+a_3=3$, $a_4+a_5+a_6=18$일 때, $\dfrac{a_4+a_6}{a_1+a_3}$의 값을 구하여라.

접근 방법

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}$$

임을 이용합니다.

Bible 첫째항과 공비를 이용하여 주어진 조건을 식으로 나타낸다.

상세 풀이

(1) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=24$에서 $ar^2=24$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_6=-192$에서 $ar^5=-192$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$ $\quad\therefore r=-2$ ($\because r$는 실수)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$$4a=24 \qquad \therefore a=6$$

$$\therefore a+r=6+(-2)=4$$

(2) 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2+a_3=3$에서 $a_1+a_1r+a_1r^2=3$ $\quad\therefore a_1(1+r+r^2)=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_5+a_6=18$에서 $a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=18$ $\quad\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=18$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=6$

$$\therefore \frac{a_4+a_6}{a_1+a_3}=\frac{a_1r^3+a_1r^5}{a_1+a_1r^2}=\frac{a_1r^3(1+r^2)}{a_1(1+r^2)}=r^3=6$$

정답 ➡ (1) 4 (2) 6

보충 설명

등차수열 문제에서 첫째항과 공차를 이용하여 관계식을 세웠던 것처럼 등비수열 문제 역시 첫째항과 공비를 이용하는 것이 가장 기본입니다. 특히, 등차수열 문제에서는 주어진 조건을 이용하여 얻은 등식을 변끼리 빼서 접근했다면 등비수열 문제에서는 주어진 조건을 이용하여 얻은 등식을 변끼리 나누어서 접근한다는 점을 꼭 기억해 둡시다.

풀이집 p.191

숫자 바꾸기

01-1 **다음 물음에 답하여라.**

(1) 등비수열 $4,\ -12,\ 36,\ -108,\ \cdots$에서 -972는 제 몇 항인지 구하여라.

(2) 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_4=54$, $a_6=486$일 때, 이 수열의 첫째항과 공비의 합을 구하여라.

(3) 각 항이 실수인 등비수열에서 제2항이 6, 제5항이 48일 때, 1536은 제 몇 항인지 구하여라.

(4) 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$, $a_5+a_6+a_7+a_8=32$일 때, $\dfrac{a_5+a_8}{a_1+a_4}$의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

01-2 **제m항이 n, 제n항이 m인 등비수열에서 제$(2m-n)$항은? (단, $m>n$)**

① m^2n ② m^2-n ③ $\dfrac{n^2}{m}$

④ $\dfrac{2m}{n}$ ⑤ $2m-n$

10

개념 넓히기 ★★☆ ◆다른 풀이

01-3 **두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_9b_{12}=10$, $a_{16}b_{20}=20$이 성립할 때, a_2b_4의 값은?**

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4

④ 5 ⑤ $4\sqrt{2}$

정답 **01-1** (1) 제6항 (2) 5 (3) 제10항 (4) 8 **01-2** ③
01-3 ④

예제 02

등비중항

두 양수 p, q 사이에 두 양수 x, y를 넣었더니 네 개의 양수 p, x, y, q가 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) x, y를 p, q로 나타내어라.

(2) $p=8$, $q=27$일 때, 양수 x, y의 값을 각각 구하여라.

접근 방법

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 b가 a와 c의 등비중항임을 이용합니다.

Bible 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면
$b^2=ac$

상세 풀이

(1) x가 p, y의 등비중항이므로 $x^2=py$ ······ ㉠

y가 x, q의 등비중항이므로 $y^2=xq$ ······ ㉡

㉠을 제곱한 다음, ㉡을 대입하면

$$x^4=p^2y^2=p^2(xq),\ x^3=p^2q \qquad \therefore x=p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠에서 $y=\frac{1}{p}x^2$이므로 ㉢을 이 식에 대입하면

$$y=\frac{1}{p}(p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}})^2=p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}$$

(2) $p=8$, $q=27$이므로

$$x=8^{\frac{2}{3}}\times27^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=2^2\times3=12$$
$$y=8^{\frac{1}{3}}\times27^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times(3^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$=2\times3^2=18$$

정답 ➡ (1) $x=p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}}$, $y=p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}$ (2) $x=12$, $y=18$

보충 설명

(1) 세 수 a, b, c가 이 순서대로

① 등차수열을 이루면 $2b=a+c$ ← b는 a와 c의 등차중항

② 등비수열을 이루면 $b^2=ac$ ← b는 a와 c의 등비중항

(2) 수열 $\{a_n\}$이

① 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

② 등비수열이기 위한 필요충분조건은 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

풀이집 p.192

숫자 바꾸기

02-1 두 양수 p, q 사이에 세 양수 x, y, z를 넣었더니 다섯 개의 양수 p, x, y, z, q가 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) x, y, z를 p, q로 나타내어라.

(2) $p=16$, $q=81$일 때, 양수 x, y, z의 값을 각각 구하여라.

표현 바꾸기

02-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 세 수 1, x, 5는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값을 구하여라.

(2) 다섯 개의 실수 10, a, b, c, 90은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 다섯 개의 실수 10, d, e, f, 90은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $b+e$의 값을 구하여라.

10

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

02-3 서로 다른 세 수 4, p, q에 대하여 4, p, q는 이 순서대로 등차수열을 이루고, p, q, 4는 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 할 때, pq의 값을 구하여라.

정답 **02-1** (1) $x=p^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}}$, $y=p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$, $z=p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{3}{4}}$ (2) $x=24$, $y=36$, $z=54$
02-2 (1) 14 (2) 80 **02-3** -2

예제 03

등비수열을 이루는 세 수

삼차방정식 $x^3-px^2+156x-216=0$의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 p의 값을 구하여라.

접근 방법

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하고, 이를 이용하여 삼차방정식의 세 근을 나타낸 후, 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식을 세웁니다.

Bible 등비수열을 이루는 세 수 ➡ a, ar, ar^2

상세 풀이

세 근을 a, ar, ar^2이라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+ar+ar^2=p \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=156 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
$$a\times ar\times ar^2=216 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $(ar)^3=216$이므로 $ar=6$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $ar(a+ar+ar^2)=156$이므로 ㉠과 ㉣에서

$$6p=156 \qquad \therefore p=26$$

정답 ➡ 26

보충 설명

(1) 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라고 하면 그 합이 $3a$가 되어 a의 값을 쉽게 구할 수 있었던 것처럼, 등비수열을 이루는 세 수를 $\frac{a}{r}$, a, ar라고 하면 그 곱이 a^3이 되어 a의 값을 쉽게 구할 수 있습니다. 하지만 세 수의 곱이 주어지는 문제가 많지 않으므로 등비수열을 이루는 세 수에 대한 문제는 보통 a, ar, ar^2이라 하고 풉니다.

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

풀이집 p.193

숫자 바꾸기

03-1 삼차방정식 $x^3-px^2+105x-125=0$의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 p의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

03-2 두 곡선 $y=x^3+8$, $y=kx^2+6x$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 등비수열을 이룰 때, 실수 k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

10

개념 넓히기 ★★☆

03-3 등비수열을 이루는 세 실수의 합이 7이고 곱이 8일 때, 이 세 실수의 제곱의 합을 구하여라.

정답 03-1 21 03-2 ⑤ 03-3 21

예제 04

등비수열의 합

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 제2항과 제4항의 합이 10이고, 제4항과 제6항의 합이 40일 때, 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

접근 방법

등비수열의 일반항을 이용하여 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합을 구합니다.

Bible 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (\text{단, } r\neq 1)$$

상세 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_2+a_4=ar+ar^3=ar(1+r^2)=10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_4+a_6=ar^3+ar^5=ar^3(1+r^2)=40 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$r^2=4 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $10a=10$ $\qquad \therefore a=1$

따라서 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{1(2^{10}-1)}{2-1}=2^{10}-1=1023$$

정답 ➡ 1023

보충 설명

첫째항, 공차, 항의 개수를 이용하였던 등차수열의 합의 공식과 마찬가지로 등비수열의 합의 공식 역시

첫째항, 공비, 항의 개수

를 이용합니다.

특히, 다음 두 등비수열의 합에서 확인할 수 있듯이 등비수열의 합의 공식에서 n은 끝항의 지수를 의미하는 것이 아니라 수열의 항의 개수를 의미한다는 점에 유의합니다.

(1) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$ ← 항의 개수 : $n-1$

(2) $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$ ← 항의 개수 : n

풀이집 p.193

숫자 바꾸기

04-1 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 제2항과 제4항의 합이 30이고, 제4항과 제6항의 합이 270일 때, 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

표현 바꾸기

04-2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=189$일 때, n의 값을 구하여라.

(2) $a_1=\sqrt{3}-1$, $a_2=3-\sqrt{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_8의 값을 구하여라.

(3) 공비가 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_2=10$, $S_4=2570$일 때, 이 수열의 공비를 구하여라.

10

개념 넓히기 ★★☆

04-3 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항과 제4항의 합이 27이고, 첫째항부터 제4항까지의 합이 45일 때, a_1+a_2의 값을 구하여라.

정답 **04-1** $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$ **04-2** (1) 6 (2) 80 (3) 16 **04-3** 9 또는 36

예제 05

부분의 합이 주어진 등비수열의 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10}=10$, $S_{20}=30$이다. S_{30}의 값을 구하여라.

접근 방법

09 등차수열 단원의 **예제 07**과 마찬가지로 등비수열에서 차례대로 같은 개수만큼 묶어서 합을 구하면 그 합이 이루는 수열도 등비수열임을 이용합니다. 예를 들어, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 차례대로 2개씩 묶어서 만든 수열

$$\underbrace{a_1+a_2}_{a_1+a_1r},\ \underbrace{a_3+a_4}_{a_1r^2+a_1r^3=(a_1+a_1r)r^2},\ \underbrace{a_5+a_6}_{a_1r^4+a_1r^5=(a_1+a_1r)r^4},\ \cdots$$

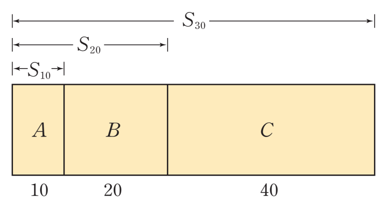
은 공비가 r^2인 등비수열입니다.

Bible 등비수열 $\{a_n\}$에서 차례대로 같은 개수만큼 묶어서 만든 수열도 등비수열이다.

상세 풀이

등비수열 $\{a_n\}$에서 차례대로 10개의 수를 각각 묶어 그 합을 구하면 이 합은 등비수열을 이룹니다. 즉,

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_{10},$$
$$B=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20},$$
$$C=a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}$$



이라고 하면 A, B, C는 이 순서대로 등비수열을 이룹니다.

이때, $S_{10}=10$, $S_{20}=30$이므로

$$A=S_{10}=10,\ \ B=S_{20}-S_{10}=30-10=20$$

따라서 $\dfrac{B}{A}=\dfrac{20}{10}=2$에서 $C=20\times2=40$이므로

$$S_{30}=A+B+C=10+20+40=70$$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10}=10$에서 $\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=10$ ······ ㉠

$S_{20}=30$에서 $\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=30$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $1+r^{10}=3$ $\quad\therefore r^{10}=2$

$$\therefore S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}\times(1+r^{10}+r^{20})=10(1+2+4)=70$$

정답 ➡ 70

풀이집 p.194

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

05-1 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_5=5$, $S_{10}=20$이다. S_{20}의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

05-2 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합이 36이고, 제$(n+1)$항부터 제$2n$항까지의 합이 144일 때, 제$(2n+1)$항부터 제$3n$항까지의 합을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

◆다른 풀이

05-3 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자. 자연수 k에 대하여 $S_{2k}=4S_k$가 성립할 때, S_{4k}는 S_k의 몇 배인가? (단, $a\neq0$, $r\neq1$)

① 8배　② 16배　③ 24배
④ 32배　⑤ 40배

정답 **05-1** 200　**05-2** 576　**05-3** ⑤

예제 06

등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=2\times3^n+k$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

접근 방법

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어질 때, 일반항 a_n을 찾는 문제이므로

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$$

임을 이용합니다. 이때, $a_1=S_1$이 $a_n=S_n-S_{n-1}$에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으면 $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 구한 일반항 a_n은 $n=1$일 때부터 성립합니다.

Bible 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$$

상세 풀이

$n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^n+k-(2\times3^{n-1}+k)$$
$$=2\times3^n-2\times3^{n-1}=2\times3^{n-1}(3-1)=4\times3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times3+k=6+k$ $\cdots\cdots$ ㉡

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값이 ㉡과 같아야 하므로 $4\times3^0=4\times1=4$

$$4=6+k \qquad \therefore k=-2$$

정답 ➡ -2

보충 설명

첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}\times r^n-\frac{a}{r-1}$$

이므로 다음과 같은 꼴로 나타낼 수 있습니다.

$$S_n=Ar^n-A\left(\text{단, } A=\frac{a}{r-1}\right)$$ ← 계수의 합이 0입니다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=Ar^n+B\ (r\neq1)$$

꼴일 때, $A+B=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룹니다.

하지만 자주 출제되는 유형은 아니므로 결과를 외우기보다는 위의 상세 풀이와 같이 푸는 것이 좋습니다.

풀이집 p.195

숫자 바꾸기

06-1 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=3^{n+k}-3$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

06-2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\log(S_n+1)=n$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=p\times q^{n-1}$이다. 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

개념 넓히기 ★★☆

06-3 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{n^2+2n}$$

이 성립할 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비의 합을 구하여라.

정답 **06-1** 1 **06-2** ⑤ **06-3** 12

예제 07 등차수열과 등비수열 사이의 관계

다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=2^{a_n}$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$은 어떤 수열인지 구하여라.

(2) 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\log_2 a_n$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$은 어떤 수열인지 구하여라.

접근 방법

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 후, 지수와 로그의 성질에 유의하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구합니다.

Bible
(1) 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 $a_n=pn+q$
(2) 수열 $\{b_n\}$이 등비수열이면 $b_n=pq^{n-1}$

상세 풀이

(1) 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$$

양변에 밑이 2인 지수를 취하면

$$b_n=2^{a_n}=2^{2n-1}$$
$$=2\times 2^{2(n-1)}=2\times 4^{n-1}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열입니다.

(2) 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_n=1\times 4^{n-1}=4^{n-1}$$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$b_n=\log_2 a_n=\log_2 4^{n-1}$$
$$=(n-1)\log_2 4=(n-1)\times 2$$
$$=2n-2$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열입니다.

정답 ➡ (1) 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열 (2) 첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열

보충 설명

등차수열의 일반항은 n에 대한 일차식이고, 등비수열의 일반항은 공비의 지수가 n에 대한 일차식이므로 위와 같은 결과를 얻을 수 있습니다.
양수 a에 대하여 위의 결과를 이용하여 일반화하면 다음과 같습니다.
(1) 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{a^{b_n}\}$은 등비수열이다.
(2) 수열 $\{b_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{\log_a b_n\}$은 등차수열이다. (단, $a\neq 1$)

풀이집 p.196

숫자 바꾸기

07-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 1, 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=3^{a_n}$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$은 어떤 수열인지 구하여라.

(2) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\log a_n$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$은 어떤 수열인지 구하여라.

표현 바꾸기

07-2 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 〈보기〉와 같이 정의된 세 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$에서 등비수열인 것만을 있는 대로 골라라.
(단, n은 자연수이다.)

보기

ㄱ. $b_n=a_{5n}$

ㄴ. $c_n=a_{n+1}-a_n$

ㄷ. $d_n=S_{5(n+1)}-S_{5n}$

10

개념 넓히기 ★★★

07-3 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 5로 나누었을 때 나머지가 4가 되는 수들을 차례대로 나열하여 만든 수열을 $\{b_n\}$이라고 할 때, $\log_3 b_1+\log_3 b_2+\cdots+\log_3 b_{20}$의 값을 구하여라.

정답 **07-1** (1) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열 (2) 첫째항이 0, 공차가 $\log\frac{1}{2}$인 등차수열

07-2 ㄱ, ㄴ, ㄷ **07-3** 800

예제 08

원리합계

월이율 1 %, 1개월마다 복리로 매월 초에 5만 원씩 적립할 때, 3년 후 월말의 적립금의 원리합계를 구하여라.

(단, $1.01^{36}=1.43$으로 계산하고, 만 원 미만은 버린다.)

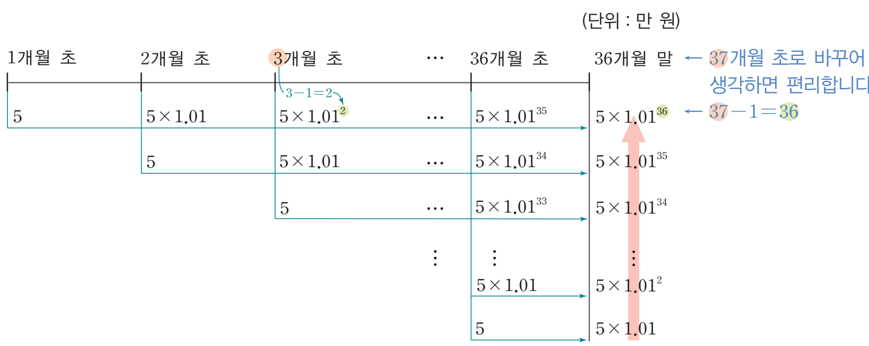
접근 방법

원금 a, 이율 r, 기간 n을 파악하여 그림으로 나타냅니다. 그림을 이용하여 매월 적립한 각각의 금액이 n개월 말에 얼마가 되는지를 계산한 후 등비수열의 합의 공식을 이용하여 그 총합을 구합니다.

Bible 마지막에 적립한 금액에 이자가 붙는지 안 붙는지에 유의한다.

상세 풀이

매월 초에 5만 원씩 적립하여 3년, 즉 36개월 후 월말의 원리합계를 그림으로 나타내면



따라서 36개월 말의 적립금의 원리합계를 S만 원이라고 하면

$$S=5(1+0.01)+5(1+0.01)^2+\cdots+5(1+0.01)^{35}+5(1+0.01)^{36}$$
$$=5\times1.01+5\times1.01^2+\cdots+5\times1.01^{35}+5\times1.01^{36}$$

이것은 첫째항이 5×1.01, 공비가 1.01인 등비수열의 첫째항부터 제36항까지의 합이므로

$$S=\frac{5\times1.01(1.01^{36}-1)}{1.01-1}=\frac{5\times1.01(1.43-1)}{0.01}=217.15(\text{만 원})$$

이때, 만 원 미만은 버리므로 3년 후 월말의 적립금의 원리합계는 217만 원입니다.

정답 ➡ 217만 원

보충 설명

복리법에 의한 원리합계는 위와 같이 그림을 그려 생각하는 것이 좋습니다. 또한 상용로그의 활용에서 배운 일정한 비율로 증가하거나 감소하는 실생활 문제와 마찬가지로 복리로 월이율이 1 %라는 것은 매월 원금과 이자의 합계인 원리합계가 $1+0.01=1.01$배씩 늘어난다는 것을 의미합니다.

풀이집 p.197

숫자 바꾸기

08-1 2020년부터 매년 10만 원씩 연이율 5 %, 1년마다 복리로 다음과 같이 적립할 때, 2031년 말의 적립금의 원리합계를 구하여라. (단, $1.05^{12}=1.8$로 계산한다.)

(1) 매년 초에 적립

(2) 매년 말에 적립

표현 바꾸기

08-2 매월 초에 a만 원씩 월이율 1 %, 1개월마다 복리로 5년 동안 적립하여 5년 후 월말의 원리합계가 404만 원이 되도록 하려고 할 때, a의 값을 구하여라. (단, $1.01^{60}=1.8$로 계산한다.)

개념 넓히기 ★★★

08-3 준이는 1010만 원짜리 자동차를 사기 위해 매월 납입금은 10만 원이고, 월이율 1 %로 1개월마다 복리로 계산되는 적금에 가입하려고 한다. 적금은 마지막 납입금을 낸 때부터 1개월 후에 지급받을 수 있을 때, 준이는 처음 납입금을 낸 때부터 몇 개월 후에 자동차를 살 수 있는지 구하여라. (단, $\log 2=0.3010$, $\log 1.01=0.0043$으로 계산하고, 자동차의 가격은 변동이 없는 것으로 생각한다.)

정답 **08-1** (1) 168만 원 (2) 160만 원 **08-2** 5 **08-3** 70개월