03

인수분해

예제 01

공통 인수 묶기

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x(2y-3)-2(3-2y)$ (2) $2xy-x^2y+4xy^2$

(3) $(a+b)^2-ac-bc$ (4) $a^2b+(a+b)(a-2b)-2ab^2$

접근 방법

(1)에서 $3-2y=-(2y-3)$으로 고치면 $2y-3$이 공통 인수임을 알 수 있고, (2)에서는 xy가 공통 인수입니다. (3)에서는 $-ac-bc=-c(a+b)$로 고치면 $a+b$가 공통 인수입니다. 또한 (4)에서는 먼저 a^2b-2ab^2에서 공통 인수를 묶어 낸 다음 $(a+b)(a-2b)$와 공통 인수를 찾아봅니다.

Bible 각 항의 공통 인수를 묶어 내어 인수분해한다.

$$am+bm-cm=m(a+b-c)$$

상세 풀이

(1) $x(2y-3)-2(3-2y)=x(2y-3)+2(2y-3)$
$=(2y-3)(x+2)$

(2) $2xy-x^2y+4xy^2=xy\cdot 2-xy\cdot x+xy\cdot 4y$
$=xy(2-x+4y)$

(3) $(a+b)^2-ac-bc=(a+b)^2-c(a+b)$
$=(a+b)(a+b-c)$

(4) $a^2b+(a+b)(a-2b)-2ab^2=a^2b-2ab^2+(a+b)(a-2b)$
$=ab(a-2b)+(a+b)(a-2b)$
$=(a-2b)(ab+a+b)$

정답 ➡ (1) $(2y-3)(x+2)$ (2) $xy(2-x+4y)$
(3) $(a+b)(a+b-c)$ (4) $(a-2b)(ab+a+b)$

보충 설명

인수분해의 가장 기본은 분배법칙을 이용하여 공통 인수를 찾아내어 묶는 것입니다. 인수분해를 할 때에는 공통 인수가 남지 않도록 모두 묶어 냅니다.

풀이집 p.29

숫자 바꾸기

01-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x(y-2)-3(2-y)$ (2) $xy+x^2y+2xy^2$

(3) $(a-b)^2-ac+bc$ (4) $a^2b+(a-b)(2a+b)-ab^2$

03

표현 바꾸기

01-2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ax+by-ay-bx$ (2) $xy^3+xy+y+y^3$

(3) $ab+a+b+1$ (4) $ab-a-b+1$

개념 넓히기 ★★☆

01-3 삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $ac^3+abc^2-a^2bc-a^2c^2=0$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하여라.

정답 **01-1** (1) $(y-2)(x+3)$ (2) $xy(1+x+2y)$ (3) $(a-b)(a-b-c)$ (4) $(a-b)(ab+2a+b)$
01-2 (1) $(x-y)(a-b)$ (2) $y(x+1)(y^2+1)$ (3) $(b+1)(a+1)$ (4) $(b-1)(a-1)$
01-3 $a=c$인 이등변삼각형

예제 02

이차식의 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $9x^2-24x+16$　　(2) $2x^2+5x+2$

(3) $5ax^2+30axy+45ay^2$　　(4) $6y^2+11yz-10z^2$

접근 방법

(1), (3)에서는 인수분해 공식 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$을 이용합니다.

(2), (4)에서는 인수분해 공식 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$를 이용합니다.

Bible

(1) $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

(2) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(3) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

상세 풀이

(1) $9x^2-24x+16=(3x)^2-2\cdot3x\cdot4+4^2=(3x-4)^2$

(2) $2x^2+5x+2=(x+2)(2x+1)$

$$\begin{array}{ccccc} x & \times & 2 & \longrightarrow & 4x \\ 2x & & 1 & \longrightarrow & x \\ \hline 2x^2 & & 2 & & 5x \end{array}$$

(3) $5ax^2+30axy+45ay^2=5a(x^2+6xy+9y^2)=5a\{x^2+2\cdot x\cdot3y+(3y)^2\}=5a(x+3y)^2$

(4) $6y^2+11yz-10z^2=(2y+5z)(3y-2z)$

$$\begin{array}{ccccc} 2y & \times & 5z & \longrightarrow & 15yz \\ 3y & & -2z & \longrightarrow & -4yz \\ \hline 6y^2 & & -10z^2 & & 11yz \end{array}$$

정답 ➡ (1) $(3x-4)^2$　(2) $(x+2)(2x+1)$　(3) $5a(x+3y)^2$　(4) $(2y+5z)(3y-2z)$

보충 설명

다음 인수분해 공식

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

에서 오른쪽의 방법으로 계수를 찾는 연습을 충분히 해두어야 합니다.

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

풀이집 p.29

숫자 바꾸기

02-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $16x^2+40x+25$

(2) $7x^2-5x-2$

(3) $18bx^2+12bxy+2by^2$

(4) $8x^2+10xy-3y^2$

표현 바꾸기

02-2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2-(2a+3b)x+6ab$

(2) $12x^2-2(3a+b)x+ab$

(3) $x^2+\frac{5}{2}x+1$

(4) $3x^2-\frac{11}{2}x+2$

개념 넓히기 ★☆☆

02-3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^2-(y+7)x-(y-3)(y+2)$

(2) $2x^2+(8-y)x-(y^2-y-6)$

정답

02-1 (1) $(4x+5)^2$ (2) $(7x+2)(x-1)$ (3) $2b(3x+y)^2$ (4) $(2x+3y)(4x-y)$

02-2 (1) $(x-2a)(x-3b)$ (2) $(6x-b)(2x-a)$ (3) $(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (4) $(3x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

02-3 (1) $(x-y-2)(2x+y-3)$ (2) $(x-y+3)(2x+y+2)$

예제 03

A^2-B^2 꼴의 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2-(b-c)^2$　　(2) a^4-1

(3) $x^2-4xy+4y^2-z^2$　　(4) $4a^2(x-y)+b^2(y-x)$

접근 방법

(1)에서는 $b-c$를 한 문자로 보고, (4)에서는 공통 인수 $x-y$로 묶어 내어 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 인수분해합니다.

Bible $\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

상세 풀이

(1) $a^2-(b-c)^2=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=(a+b-c)(a-b+c)$

(2) $a^4-1=(a^2)^2-1=(a^2+1)(a^2-1)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$

(3) $x^2-4xy+4y^2-z^2=(x-2y)^2-z^2=(x-2y+z)(x-2y-z)$

(4) $4a^2(x-y)+b^2(y-x)=4a^2(x-y)-b^2(x-y)=(x-y)(4a^2-b^2)$

$$=(x-y)\{(2a)^2-b^2\}=(x-y)(2a+b)(2a-b)$$

정답 ➡ (1) $(a+b-c)(a-b+c)$　(2) $(a^2+1)(a+1)(a-1)$
(3) $(x-2y+z)(x-2y-z)$　(4) $(x-y)(2a+b)(2a-b)$

보충 설명

x^4+ax^2+b (a, b는 상수) 꼴의 다항식은 다음과 같이 적당히 이차식을 더하거나 빼서 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해합니다. 예를 들어,

$$\begin{aligned}a^4+a^2b^2+b^4&=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2\\&=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}\\&=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

풀이집 p.30

숫자 바꾸기

03-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(a+b)^2-(b+c)^2$

(2) $16-a^4$

(3) $x^2+2xy+y^2-4z^2$

(4) $x^2(a-b)+9y^2(b-a)$

표현 바꾸기

03-2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4-x^2+16

(2) $x^4+4x^2y^2+16y^4$

개념 넓히기 ★☆☆

03-3 〈보기〉에서 x^4+4의 인수인 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. x^2+2

ㄴ. x^2+2x+2

ㄷ. x^2+2x-2

ㄹ. x^2-2x+2

정답

03-1 (1) $(a+2b+c)(a-c)$ (2) $(a^2+4)(2+a)(2-a)$
(3) $(x+y+2z)(x+y-2z)$ (4) $(a-b)(x+3y)(x-3y)$

03-2 (1) $(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$ (2) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

03-3 ㄴ, ㄹ

예제 04

삼차식의 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+8 (2) $24-3x^3$

(3) $a^3-(b+c)^3$ (4) a^3+3a^2+3a+1

접근 방법

(1)에서는 x^3+2^3과 같이 생각하여 세제곱의 합의 형태로 인수분해 공식을 적용하고, (2)에서는 공통 인수 3으로 묶어 내면 $3(2^3-x^3)$이므로 세제곱의 차의 형태로 인수분해 공식을 적용합니다. (3)에서는 $b+c$를 한 문자로 생각하여 세제곱의 차의 형태로 인수분해 공식을 적용하고, (4)에서는 인수분해 공식 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$을 적용합니다.

Bible

(1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
(2) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
(3) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

상세 풀이

(1) $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$

(2) $24-3x^3=3(8-x^3)=3(2^3-x^3)=3(2-x)(2^2+2\cdot x+x^2)=-3(x-2)(x^2+2x+4)$

(3)
$$\begin{aligned}a^3-(b+c)^3&=\{a-(b+c)\}\{a^2+a\cdot(b+c)+(b+c)^2\}\\&=(a-b-c)(a^2+ab+ac+b^2+2bc+c^2)\\&=(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+2bc+ca)\end{aligned}$$

(4) $a^3+3a^2+3a+1=a^3+3\cdot a^2\cdot 1+3\cdot a\cdot 1^2+1^3=(a+1)^3$

정답 ⇒ (1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (2) $-3(x-2)(x^2+2x+4)$
(3) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+2bc+ca)$ (4) $(a+1)^3$

보충 설명

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$는 다음과 같이 유도할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

풀이집 p.30

숫자 바꾸기

04-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3-64 (2) $8a^3+b^3c^6$

(3) $(a-b)^3+c^3$ (4) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

표현 바꾸기

04-2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $8x^3+y^3-27z^3+18xyz$ (2) $a^3+8b^3-6ab+1$

개념 넓히기 ★☆☆

04-3 〈보기〉에서 x^6+1의 인수인 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. x^2+1 ㄴ. x^3+1

ㄷ. x^4+x^2+1 ㄹ. x^4-x^2+1

정답

04-1 (1) $(x-4)(x^2+4x+16)$ (2) $(2a+bc^2)(4a^2-2abc^2+b^2c^4)$
(3) $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab+bc-ca)$ (4) $(2x-3y)^3$

04-2 (1) $(2x+y-3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy+3yz+6zx)$
(2) $(a+2b+1)(a^2+4b^2+1-2ab-2b-a)$

04-3 ㄱ, ㄹ

치환에 의한 인수분해

예제 05

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4-13x^2+36

(2) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3$

(3) $(x+y)^2+6(x+y)z+9z^2$

(4) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$

접근 방법

(1)에서는 $x^2=X$로 치환하고 (2)에서는 $x^2+5x=X$, (3)에서는 $x+y=X$로 치환하여 인수분해합니다. (4)에서는 공통부분이 생기도록 일차식을 두 개씩 짝지어 전개한 후 공통부분을 치환하여 인수분해합니다.

Bible 공통부분이 있을 때에는 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

상세 풀이

(1) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-13x^2+36=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$$
$$=(x^2-4)(x^2-9)=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$$

(2) $x^2+5x=X$로 놓으면

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3=(X+4)(X+6)-3=X^2+10X+21$$
$$=(X+7)(X+3)=(x^2+5x+7)(x^2+5x+3)$$

(3) $x+y=X$로 놓으면

$$(x+y)^2+6(x+y)z+9z^2=X^2+6Xz+9z^2=(X+3z)^2=(x+y+3z)^2$$

(4) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+1$
$$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1$$

$x^2-5x=X$로 놓으면

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1=(X+4)(X+6)+1$$
$$=X^2+10X+25=(X+5)^2$$
$$=(x^2-5x+5)^2$$

정답 ➡ (1) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$ (2) $(x^2+5x+7)(x^2+5x+3)$ (3) $(x+y+3z)^2$ (4) $(x^2-5x+5)^2$

보충 설명

(1)에서 인수분해 과정이 익숙해지면

$$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$$

과 같이 굳이 치환으로 식을 바꾸지 않고도 바로 x^2에 대한 이차식으로 생각하여 인수분해할 수 있습니다.

풀이집 p.31

숫자 바꾸기

◆ 보충 설명

05-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $4x^4+7x^2-36$

(2) $(x^2+3x-4)(x^2+3x+6)+16$

(3) $9(x-y)^2-6(x-y)z+z^2$

(4) $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+25$

표현 바꾸기

05-2 x에 대한 사차식 $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$를 인수분해하였더니 $(x+2)(x-2)(x+a)(x+b)$가 되었다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

개념 넓히기 ★★☆

05-3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$

(2) $(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)-10$

정답
05-1 (1) $(2x+3)(2x-3)(x^2+4)$ (2) $(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)$
(3) $(3x-3y-z)^2$ (4) $(x^2+x-7)^2$
05-2 ②
05-3 (1) $(x^2-18)(x^2-4x-18)$ (2) $(x^2+6x+10)(x^2+6x+3)$

예제 06

여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ (2) $a^2-2ab+4ca+b^2-4bc+4c^2$

접근 방법

(1)과 (2)에서 세 문자 a, b, c의 차수가 모두 같으므로 한 문자 a에 대하여 내림차순으로 정리합니다.

Bible 한 문자에 대한 내림차순으로 정리하고 공통 인수를 찾는다.

상세 풀이

세 문자 a, b, c의 차수가 모두 같으므로 문자 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

(1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$

$=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)$ ← a에 대한 내림차순으로 정리

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$ ← $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$의 순서로 나타내기

(2) $a^2-2ab+4ca+b^2-4bc+4c^2=a^2-2(b-2c)a+b^2-4bc+4c^2$

$=a^2-2(b-2c)a+(b-2c)^2$

$=\{a-(b-2c)\}^2$

$=(a-b+2c)^2$

정답 ➡ (1) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (2) $(a-b+2c)^2$

보충 설명

여러 개의 문자를 포함하고 있는 복잡한 다항식의 경우 다항식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해합니다. 문자의 차수가 모두 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리합니다.

풀이집 p.32

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

06-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ (2) $x^2+4xy+4y^2-12yz+9z^2-6zx$

표현 바꾸기

06-2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ (2) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

개념 넓히기 ★★☆

06-3 다음 식을 인수분해하여라.

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$$

정답 **06-1** (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)$ (2) $(x+2y-3z)^2$
06-2 (1) $(a+b)(b+c)(c+a)$ (2) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
06-3 $(a+b)(b+c)(c+a)$

예제 07

인수정리를 이용한 인수분해

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3-4x^2+x+6 (2) $x^4-9x^2-4x+12$

접근 방법

(1)에서 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하고 $\pm$(6의 양의 약수)에 해당되는 ±1, ±2, ±3, ±6의 값을 차례대로 x에 대입해 보면 $f(-1)=-1-4-1+6=0$이므로 인수정리에 의하여 $x+1$은 $f(x)$의 인수입니다. 따라서 $f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어지므로 조립제법에 의하여 인수분해할 수 있습니다. (2)에서도 마찬가지 방법을 이용하여 인수분해합니다.

> **Bible** 삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때에는 먼저 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 구한 후, 조립제법을 이용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 나타낸다.

상세 풀이

(1) $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라고 하면 $f(-1)=-1-4-1+6=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수입니다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

(2) $f(x)=x^4-9x^2-4x+12$라고 하면 $f(1)=0$, $f(-2)=0$이므로 $x-1$, $x+2$는 $f(x)$의 인수입니다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)(x+2)(x^2-x-6) \\ &=(x-1)(x+2)(x+2)(x-3) \\ &=(x+2)^2(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -8 & -12 & \boxed{0} \\ & & -2 & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

정답 ➡ (1) $(x+1)(x-2)(x-3)$ (2) $(x+2)^2(x-1)(x-3)$

보충 설명

(1)에서 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하고 $x-a$ (a는 정수)가 $f(x)$의 인수이면

$$f(x)=x^3-4x^2+x+6=(x-a)(x^2+bx+c)\ (b,\ c\text{는 정수})$$

로 나타낼 수 있습니다. 우변을 전개하여 상수항을 비교하면

$$-ac=6 \qquad \therefore\ a=\pm(6\text{의 양의 약수})$$

풀이집 p.33

숫자 바꾸기

07-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+2x+3

(2) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

표현 바꾸기

07-2 다항식 $2x^3+x^2+ax+2$가 세 일차식의 곱 $(x+2)(2x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

◆ 보충 설명

07-3 〈보기〉에서 x^4-4x+3의 인수인 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $x-1$

ㄴ. x^2-2x+1

ㄷ. x^2+x+3

ㄹ. x^2+2x+3

정답 **07-1** (1) $(x+1)(x^2-x+3)$ (2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

07-2 -7

07-3 ㄱ, ㄴ, ㄹ