01 삼각함수의 극한

1. 삼각함수의 극한: 임의의 실수 a에 대하여

(1) $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$

(2) $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$

(3) $\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$ (단, $a\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$, n은 정수)

2.삼각함수의 극한의 공식: x의 단위가 라디안일 때

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

◪ **다음 극한값을 구하여라.**

1. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$

2. $\lim_{x\to\frac{5}{4}\pi}\cos x$

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x$

4. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}(\tan x+\cos x)$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x-1}$

6. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan x$

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$

10. $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

11. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 극한값을 구하여라.

12. $\lim_{x\to0}\frac{\tan4x}{3x}$

13. $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x}$

14. $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{3x}$

15. $\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}$

16. $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{7x}$

17. $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{3x}$

18. $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}$

19. $\lim_{x\to0}\frac{\tan9x}{\tan3x}$

20. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2+x)}{x}$

21. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\tan2x}{x}$

22. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

23. $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

24. $\lim_{x\to0}\tan x\cos\frac{1}{x}$

25. $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}$

26. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{2x}$

27. $\lim_{x\to0}\sin x\sin\frac{1}{x^2}$

28. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 6x}$

29. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{x}$

30. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$

31. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

32. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

33. $\lim_{x \to \pi} \frac{\tan 3x}{\pi - x}$

34. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

35. $\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2-1}$

36. $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x+1}{x-\pi}$

37. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^2+2x)}{x^2+x}$

38. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(\tan x)}{2x}$

39. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$

40. $\lim_{x \to 0} \tan x \sin \frac{1}{x}$

41. $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

42. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

43. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$

44. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

45. $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{x-\frac{\pi}{6}}{\cot 3x}$

46. $\lim_{x \to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$

47. $\lim_{x \to \infty} x\tan\frac{1}{x}$

48. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 4x}$

49. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{\tan x}$

50. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x \sin x}{1-\cos x}$

51. $\lim_{x \to \frac{3}{4}\pi} \frac{1-\tan^2 x}{\cos x+\sin x}$

◪ 다음 식을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

52. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2x+a)}{\sin bx}=2$

53. $\lim_{x \to 0} \frac{3-a\cos x}{x\tan x}=b$

54. $\lim_{x \to 0} \frac{a-2\cos x}{x\tan x}=b$

55. $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{a+\sin x}{(2x+\pi)\cos x}=b$

56. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-a\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=b$

57. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{ax+\pi}{\cos x}=b$

58. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1+a\tan^2 x}{\sin x-\cos x}=b$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

◪ 다음 식을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

59. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin(ax+b)}=\frac{1}{3}$ (단, $0\le b<\frac{\pi}{2}$)

60. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax+b)}{\tan x}=2$ (단, $0\le b<\pi$)

61. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{ax+b}-2}=1$

62. $\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$

63. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+b)}{\tan ax}=3$

64. $\lim_{x\to0}\frac{a\cos^2 x+b}{x^2}=2$

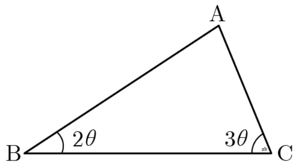
65. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-1}=6$

66. $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sqrt{ax+1}+b}=2$

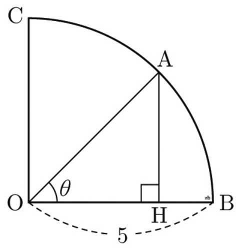
67. $\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{a\cos x+b}=4$

02 삼각함수의 극한의 활용

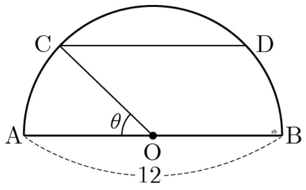
68. 그림의 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=2\theta$, $\angle\mathrm{ACB}=3\theta$일 때, $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값을 구하여라.



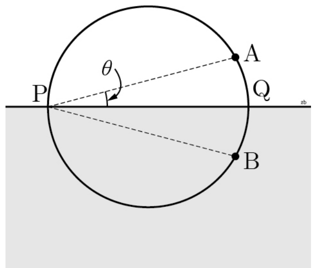
69. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 사분원 위의 한 점 A에서 반지름 OB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라고 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\theta^2}$의 값을 구하여라.



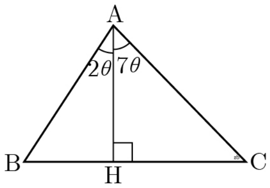
70. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 12인 반원에서 지름에 평행한 현 CD를 긋고 $\angle \mathrm{AOC}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 이때, 도형 OBDC의 넓이 $S(\theta)$에 대하여 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하여라.



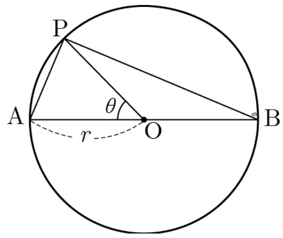
71. 그림은 지름이 $\overline{\mathrm{PQ}}$인 반원에 거울을 비춘 그림이다. 반원 위의 한 점 A가 거울에 비친 점을 B, $\angle \mathrm{APQ}=\theta$라 할 때, 극한값 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\widehat{\mathrm{AQB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값을 구하여라.



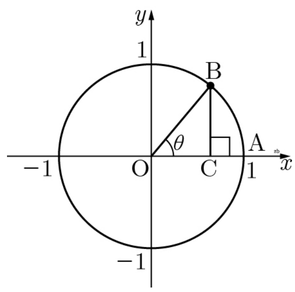
72. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle \mathrm{BAH}=2\theta$, $\angle \mathrm{CAH}=7\theta$를 만족할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}$의 값을 구하여라.



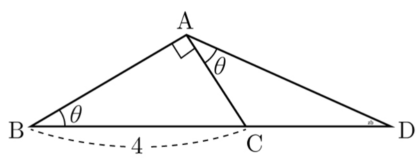
73. 다음 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{POA}=\theta$라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\widehat{\mathrm{AP}}}$의 값을 구하여라.



74. 다음 그림과 같이 점 A(1,0)과 단위원 위를 움직이는 점 B에 대하여 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하고 $\angle \mathrm{AOB}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\theta^2}$의 값을 구하여라.(단, 점 B는 제 1사분면 위의 점이다.)



75. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$의 연장선 위에 $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{CAD}$가 되도록 점 D를 잡는다. $\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\theta}$의 값을 구하여라. (단, $\angle \mathrm{ABC}<45^\circ$)



정답 및 해설

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⇨ $y=\sin x$는 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수이므로 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}\pi}\cos x=\cos\dfrac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

4) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

⇨ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}(\tan x+\cos x)=\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

5) -2

⇨ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2x}{\cos x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}(-1-\cos x)$

$=-1-1=-2$

6) 2

⇨ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos^2x}{1+\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\pi}(1-\cos x)$

$=1-\cos\pi=1-(-1)=2$

7) 2

⇨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2x}{1-\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)$

$=1+\sin\dfrac{\pi}{2}=1+1=2$

8) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⇨ $y=\tan x$는 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$의 범위에서 연속인 함수이고 $\dfrac{\pi}{6}$가 이 구간에 속하므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan x=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

⇨ $y=\cos x$는 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수이므로 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10) 0

⇨ $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여

$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le1$ 이므로

$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|,\ -|x|\le x\sin\dfrac{1}{x}\le|x|$

이때, $\lim\limits_{x\to0}|x|=\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

11) $\sqrt{2}$

⇨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}2\cos x$

$=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

12) $\dfrac{4}{3}$

⇨ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan4x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan4x}{4x}\times\dfrac{4}{3}$

$=1\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$

13) $\dfrac{3}{2}$

⇨ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}\times\dfrac{3}{2}=1\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

14) $\dfrac{2}{3}$

⇨ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\times\dfrac{2}{3}=1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

15) 3

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{3x}\times3=1\times3=3$

16) $\frac{2}{7}$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{2x}\times\frac{2}{7}=1\times\frac{2}{7}=\frac{2}{7}$

17) $\frac{5}{3}$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\times\frac{5}{3}=1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

18) $\frac{3}{5}$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times\frac{5x}{\sin5x}\times\frac{3}{5}$

$=1\times1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

19) 3

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\tan9x}{\tan3x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan9x}{9x}\times\frac{3x}{\tan3x}\times\frac{9}{3}$

$=1\times1\times3=3$

20) 1

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2+x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(2x^2+x)}{2x^2+x}\times\frac{2x^2+x}{x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(2x^2+x)}{2x^2+x}\times(2x+1)\right\}$

$=1\times1=1$

21) 3

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\tan2x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan2x}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan2x}{2x}\times2\right)$

$=1+1\times2=3$

22) -1

⇨ $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$

23) 1

⇨ $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\sin t=1$

24) 0

⇨ $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq1$ 이므로 $\left|\tan x\cos\frac{1}{x}\right|\leq|\tan x|$,

$-|\tan x|\leq\tan x\cos\frac{1}{x}\leq|\tan x|$

이때, $\lim_{x\to0}(-|\tan x|)=\lim_{x\to0}|\tan x|=0$이므로

$\lim_{x\to0}\tan x\cos\frac{1}{x}=0$

25) 2

⇨ $2x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin2x}{2x}=\lim_{t\to0}2\cdot\frac{\sin t}{t}=2$

26) $\frac{1}{2}$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$

27) 0

⇨ $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\leq1$ 이므로 $\left|\sin x\sin\frac{1}{x^2}\right|\leq|\sin x|$

$-|\sin x|\leq\sin x\sin\frac{1}{x^2}\leq|\sin x|$

이때, $\lim_{x\to0}(-|\sin x|)=\lim_{x\to0}|\sin x|=0$이므로

$\lim_{x\to0}\sin x\sin\frac{1}{x^2}=0$

28) $\frac{1}{3}$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin6x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}\cdot\frac{x}{\sin6x}$

$=\lim_{x\to0}2\frac{\sin2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{6}\frac{6x}{\sin6x}$

$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{6x}{\sin6x}$

$=2\cdot1\cdot\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{3}$

29) 3

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\tan3x}{3x}$

$=3\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{3x}=3\cdot1=3$

30) $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

31) 0

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$=1\cdot\frac{0}{2}=0$

32) 1

$\Rightarrow$ $\pi-x=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때, $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

33) -3

$\Rightarrow$ $\pi-x=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때, $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan 3x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(3\pi-3t)}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{-\tan 3t}{t}=-3\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3t}{3t}=-3$

34) -1

$\Rightarrow$ $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\sin t}=-1$

35) $-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $x-1=t$로 놓으면

$x\to 1$일 때 $t\to 0$이고 $x=1+t$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1+t)}{(2+t)t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{(2+t)t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{(2+t)t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\frac{\pi}{2}}{(2+t)}$

$=-1\times\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

36) 0

$\Rightarrow$ $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때, $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\pi+t)+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos t+1}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t(1+\cos t)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}$

$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)=1\cdot\frac{0}{2}=0$

37) 2

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2+2x)}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x^2+2x}{x^2+x}$

$=1\times\lim_{x\to 0}\frac{3x+2}{x+1}=1\times 2=2$

38) $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)}{\tan x}\times\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{2}$

$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

39) $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{2(1+\cos x)}$

$=1\times\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$

40) 0

$\Rightarrow$ $x\neq 0$일 때, $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$이므로

$-|\tan x|\leq\tan x\sin\frac{1}{x}\leq|\tan x|$

이때, $\lim_{x\to0}|\tan x|=\lim_{x\to0}(-|\tan x|)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\tan x\sin\frac{1}{x}=0$

41) 0

⇨ $x\neq0$일 때, $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq1$이므로

$-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq|x|$

이때, $\lim_{x\to0}|x|=\lim_{x\to0}(-|x|)=0$이므로

$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

42) 0

⇨ $x\to\infty$이므로 $x>0$이고

$-1\leq\sin x\leq1$이므로 $-\frac{1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

43) $-\frac{1}{2\pi}$

⇨ $x-\pi=t$로 놓으면

$x\to\pi$일 때 $t\to0$이고 $x=\pi+t$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x+\pi)(x-\pi)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{(2\pi+t)t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{(2\pi+t)t}$$
$$=-\lim_{t\to0}\frac{1}{2\pi+t}\times\frac{\sin t}{t}$$
$$=-\lim_{t\to0}\frac{1}{2\pi+t}\times\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}$$
$$=-\frac{1}{2\pi}$$

44) $-\frac{\pi}{2}$

⇨ $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이고 $x=\frac{\pi}{2}+t$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}$$
$$=-\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\times(-\sin t)}{t}$$
$$=-\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\times\left(-\frac{\sin t}{t}\right)$$
$$=1\times\frac{\pi}{2}\times1=\frac{\pi}{2}$$

45) $-\frac{1}{3}$

⇨ $x-\frac{\pi}{6}=t$로 치환하자.

$$\lim_{t\to0}\frac{t}{\cot\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{t}{-\tan3t}=-\frac{1}{3}$$

46) $\frac{\pi}{2}$

⇨ $1-x=t$로 놓으면

$x\to1$일 때 $t\to0$이고 $x=1-t$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\pi}{2}$$
$$=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

47) 1

⇨ $\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때 $t\to0$이고 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\tan t=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$$

48) $\frac{1}{2}$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\sin4x}{4x}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

49) 3

⇨ $\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{x}{\tan x}\times3\right\}=3$

50) 4

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan2x}{x}\frac{\sin x}{x}(1+\cos x)}{\frac{\sin^2x}{x^2}}=2\times2=4$$

51) $-2\sqrt{2}$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244110

⇨ $\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\dfrac{1-\tan^2 x}{\sqrt{2}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

$x-\dfrac{3}{4}\pi=t$로 치환하자.

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\tan^2\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

이때

$$\tan\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\tan t+(-1)}{1-\tan t(-1)}=\frac{\tan t-1}{1+\tan t}=1-\frac{2}{1+\tan t}$$

$\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin t$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{\left(1-\tan\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)\right)\left(1+\tan\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)\right)}{-\sqrt{2}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{2}{1+\tan t}\left(2-\frac{2}{1+\tan t}\right)}{-\sqrt{2}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{2}{1+\tan t}\left(\frac{2\tan t}{1+\tan t}\right)}{-\sqrt{2}\sin t}=\frac{\frac{2}{1+0}\times\frac{2}{1+0}}{-\sqrt{2}}=\frac{4}{-\sqrt{2}}$$

$$=-2\sqrt{2}$$

52) $a=1,\ b=1$

⇨ 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\ln(2x+a)=\ln a=0$ $\quad\therefore a=1$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times\frac{bx}{\sin bx}\times\frac{2}{b}$$

$$=1\times1\times\frac{2}{b}=2$$

$\therefore b=1$

53) $a=3,\ b=\dfrac{3}{2}$

⇨ 분모가 0에 수렴하므로 분자도 0에 수렴한다.

$3-a=0$ $\quad\therefore\ a=3$

$$\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos x}{x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3(1-\cos x)}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin^2 x}{x\tan x(1+\cos x)}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ b=\dfrac{3}{2}$

54) $a=2,\ b=1$

⇨ 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to0}(a-2\cos x)=a-2=0$

$\therefore a=2$

주어진 극한값을 풀면

$$\lim_{x\to0}\frac{a-2\cos x}{x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos^2 x)}{x\tan x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x\tan x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$=2\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1=b$$

55) $a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$

⇨ $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(a+\sin x)=0$이므로

$a-1=0$ $\quad\therefore\ a=1$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{(2x+\pi)\cos x}$에서 $x+\dfrac{\pi}{2}=t$라 하면 $t\to0$

$$\lim_{t\to0}\frac{1+\sin(-\frac{\pi}{2}+t)}{2t\cos(-\frac{\pi}{2}+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{2t\cos(\frac{\pi}{2}-t)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{2t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{2t\sin t(1+\cos t)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t(1+\cos t)}=\frac{1}{4}$$

56) $a=1,\ b=\sqrt{2}$

⇨ 주어진 극한값에서 분모가 0에 수렴하므로, 분자도 0에 수렴한다.

즉 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}a=0$ $\quad\therefore\ a=1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ b=\sqrt{2}$

57) $a=-2,\ b=2$

⇨ 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+\pi)=\dfrac{a\pi}{2}+\pi=0$

$\therefore a=-2$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2x+\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$

이때, $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이고 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}=-2\lim_{t\to0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$
$$=-2\lim_{t\to0}\frac{t}{-\sin t}=2$$

$\therefore b=2$

58) $a=-1,\ b=-2\sqrt{2}$

⇨ $1+a\tan^2\frac{\pi}{4}=0$이므로 $a=-1$

$$b=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x(\sin x-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x+\sin x)}{\cos^2x}=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

59) $a=3,\ b=0$

⇨ 극한값이 존재하고 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to0}\sin(ax+b)=\sin b=0$

$\therefore b=0\left(\because 0\le b<\frac{\pi}{2}\right)$

주어진 극한값을 풀면

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin ax}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{ax}{\sin ax}\cdot\frac{x}{ax}\right)$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a=3$

60) $a=2,\ b=0$

⇨ 주어진 극한값에서 분모가 0에 수렴하므로, 분자도 0에 수렴한다.

$\sin b=0\quad\therefore\ b=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\tan x}{x}}=a=2$$

61) $a=12,\ b=4$

⇨ 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-2)=\sqrt{b}-2=0\ \therefore b=4$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sqrt{ax+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+4}+2)\sin3x}{ax+4-4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+4}+2)\sin3x}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times\frac{3}{a}\times(\sqrt{ax+4}+2)$$
$$=1\times\frac{3}{a}\times4=\frac{12}{a}=1$$

$\therefore a=12$

62) $a=-\frac{1}{2},\ b=0$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$이므로

$\lim_{x\to0}(ax\sin x+b)=b=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{ax\sin x}{x^2}}{\frac{\cos x-1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{ax\sin x}{x^2}}{\frac{-\sin^2x}{x^2(\cos x+1)}}=\frac{a}{-\frac{1}{2}}=-2a=1$$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

63) $a=\frac{1}{3},\ b=1$

⇨ 분모가 0에 수렴하므로, 분자도 0에 수렴한다.

$\ln b=0\qquad\therefore\ b=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\tan ax}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{x}{\tan ax}=\frac{1}{a}=3,$$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

64) $a=-2,\ b=2$

⇨ $\lim_{x\to0}\frac{a\cos^2x+b}{x^2}=2$이므로

$\lim_{x\to0}(a\cos^2x+b)=a+b=0$이고, $b=-a$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{a(\cos^2x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-a\sin^2x}{x^2}=-a=2$$이므로

$a=-2$

65) $a=\frac{2}{3},\ b=1$

⇨ $\sin2x\to0$ $\therefore$ 분모도 0으로 수렴한다.

즉, $b=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x(\sqrt{ax+1}+1)}{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}=6$$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

66) $a=3,\ b=-1$

⇨ 분자가 0으로 수렴하므로 분모 역시 0으로 수렴

한다.

즉, $b=-1$이다.

주어진 식의 분모를 유리화 하면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}=2 \quad \therefore\ a=3$

67) $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

⇨ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{a\cos x+b}=4$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}(a\cos x+b)=a+b=0 \qquad \therefore\ b=-a$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{a\cos x+b}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{a(\cos x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x(\cos x+1)}{a(\cos x-1)(\cos x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x(\cos x+1)}{-a\sin^2 x}=\dfrac{2}{-a}=4$

68) $\dfrac{5}{3}$

⇨ 꼭짓점 B에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\sin(\pi-5\theta)}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\sin 3\theta}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin(\pi-5\theta)}{\sin 3\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 5\theta}{\sin 3\theta}=\dfrac{5}{3}$

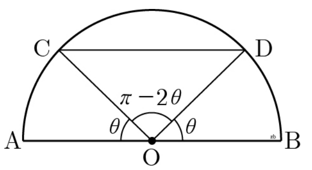
69) $\dfrac{5}{2}$

⇨ $\overline{\mathrm{BH}}=5-5\cos\theta$이므로

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{5(1-\cos\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{5\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{5\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos\theta}=\dfrac{5}{2}$

70) 54

⇨ 

$\angle\mathrm{AOC}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{BOD}=\theta(\because \overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{CD}})$

$\therefore\ \angle\mathrm{COD}=\pi-2\theta$

그림에서 도형 OBDC의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)$

$=$(부채꼴 BOD의 넓이)$+$(삼각형 COD의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\theta+\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$

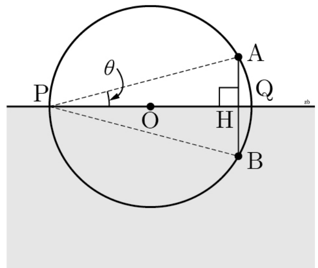
$=18(\theta+\sin 2\theta)$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{18(\theta+\sin 2\theta)}{\theta}$

$=18\lim\limits_{\theta\to 0+}\left(1+\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot 2\right)$

$=18(1+2)=54$

71) 1

⇨ 

원의 반지름의 길이를 r라 하자.

$\angle\mathrm{APQ}=\theta$에서 $\angle\mathrm{AOQ}=2\theta$,

$\angle\mathrm{AOB}=2\angle\mathrm{AOQ}=4\theta$

호 AQB에 대한 중심각의 크기가 4θ이므로

$\overset{\frown}{\mathrm{AQB}}=4r\theta$

직각삼각형 AOH에서 $\overline{\mathrm{AH}}=r\sin 2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2r\sin 2\theta$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AQB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{4r\theta}{2r\sin 2\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\theta}{\sin 2\theta}=1$

72) $\dfrac{2}{7}$

⇨ 직각삼각형 AHB에서 $\tan 2\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AH}}\tan 2\theta$

직각삼각형 AHC에서 $\tan 7\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$

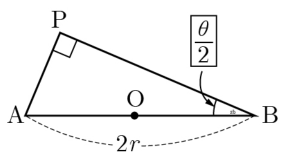
$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AH}}\tan 7\theta$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}\tan 2\theta}{\overline{\mathrm{AH}}\tan 7\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\tan 2\theta}{\tan 7\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\tan 2\theta}{2\theta}\times\dfrac{7\theta}{\tan 7\theta}\times\dfrac{2}{7}$

$=1\times 1\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{7}$

73) 1

⇨ 

원 O의 반지름의 길이가 r이므로 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=r\theta$

$\triangle\mathrm{PAB}$는 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\theta}{2}$인 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2r\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2r\sin\frac{\theta}{2}}{r\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}=1$

74) $\dfrac{1}{2}$

⇨ $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=1-\overline{\mathrm{OC}}=1-\cos\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

75) 4

⇨ $\overline{\mathrm{AD}}=x$, $\overline{\mathrm{CD}}=y$라 하고

$\overline{\mathrm{AB}}=4\cos\theta$, $\overline{\mathrm{AC}}=4\sin\theta$

$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{CAD}$이므로

$x:y=4+y:x$

$x:4\sin\theta=4+y:4\cos\theta$

$$\therefore x=\frac{4\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1-\tan^2\theta}=4$$