



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시

1) 제작연월일 : 2019-08-12

2) 제작자 : 교육지대(주)

3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 / 급수의 수렴과 발산

(1) 급수 : 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 +로연결한 식을 급수라 하고 기호로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다.

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(2) 부분합 : 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ 에서첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 이 급수의 제 n 항까지의 부분합이라고 한다.

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

(3) 급수의 수렴과 발산

① 급수의 수렴 : 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 일정한 값 S 에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ 일 때, 이 급수는 S 에 수렴한다고 한다.② 급수의 발산 : 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진수열 $\{S_n\}$ 이 발산할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다고 한다.

■ 다음 급수의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots$

2. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n + \cdots$

3. $(1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) + \cdots$
 $+ (\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}) + \cdots$

4.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

5.

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

6.

$$\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+2)} + \cdots$$

7.

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots$$

8.

$$\frac{1}{1^2+2} + \frac{1}{2^2+4} + \frac{1}{3^2+6} + \frac{1}{4^2+8} + \cdots$$

9.

$$3 + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \cdots$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+2)}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$20. 5+5+5+5+\dots$$

$$21. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4n-1}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$$

02 / 급수의 수렴, 발산과 일반항 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

▣ 다음 급수가 발산함을 증명하여라.

$$18. -2+1+4+7+10+\dots$$

$$19. 3+3^2+3^3+3^4+\dots$$

▣ 다음 급수가 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

28. $(a_1 - 2) + (a_2 - 2) + (a_3 - 2) + \dots + (a_n - 2) + \dots$

29. $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + \dots + (a_n - 1) + \dots$

30. $(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + (a_3 + 1) + \dots + (a_n + 1) + \dots$

31. $(a_1 + 3) + (a_2 + 3) + \dots + (a_n + 3) + \dots$

32. $(a_1 + 1) + \left(a_2 + \frac{3}{2}\right) + \left(a_3 + \frac{5}{3}\right) + \left(a_4 + \frac{7}{4}\right) + \dots$
 $+ \left(a_n + \frac{2n-1}{n}\right)$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2) = 4$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - 3) = 5$

▣ 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 값을 구하여라.

35.

$$(a_1 - 1) + \left(a_2 - \frac{3}{2}\right) + \left(a_3 - \frac{5}{3}\right) + \dots + \left(a_n - \frac{2n-1}{n}\right) + \dots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1)$ 의 값

36. $(a_1 + 1) + \left(\frac{a_2}{2} + 1\right) + \left(\frac{a_3}{3} + 1\right) + \dots + \left(\frac{a_n}{n} + 1\right) + \dots$ 이
 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + n}{3a_n - 2n}$ 의 값

37. $(a_1 - 2) + \left(\frac{a_2}{2} - 2\right) + \left(\frac{a_3}{3} - 2\right) + \dots + \left(\frac{a_n}{n} - 2\right) + \dots$ 가
 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + n}{5a_n - 2n}$ 의 값

38. $(a_1 + 2) + (2a_2 + 2) + (3a_3 + 2) + \dots + (na_n + 2) + \dots$
 가 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + 3n}{n + 1}$ 의 값

39. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1}$ 의 값

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5) = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{2}\right)$ 의 값

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} + 2\right) = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3a_n}{n + a_n}$ 의 값

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - a_n}{2} = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4na_n + 5}{n - 3}$ 의 값

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3^{n+1}}{3^{n-1} + 2^n}$ 의 값

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3^{n+1} - 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n+1}}$ 의 값

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2^n} - 5 \right) = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^n}{3^n + 2^n a_n}$ 의 값

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{5^n} - 1 \right) = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4^n}{5^{n+1} + 3^n}$ 의 값

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{4^n} - \frac{2n}{3n+2} \right) = 5$ 일 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n - 2^n}{4^{n+1} + 3^{n+1} + 2^{n+1}}$ 의 값

50. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 4b_n)$ 의 값

51. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (7a_n + 3b_n)$ 의 값

52. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -3$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n)$ 의 값

53. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{5}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (12a_n + 25b_n)$ 의 값

03 / 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c 는 상수)

▣ 수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 에 대하여 다음 급수의 합을 구하여라.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n)$ 의 값

49. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -3$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n)$ 의 값

54. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 6$ 일 때,
 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n)$ 의 값

55. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = 10$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 2$ 일 때,
 $\sum_{n=1}^{\infty} (5a_n + 3b_n)$ 의 값

56. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 12$ 일 때,
 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n)$ 의 값

57. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 11$ 일 때,
 $\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - b_n)$ 의 값

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - b_n) = 8$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 4$ 일 때,
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}a_n - 2b_n \right)$ 의 값

▣ 수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -2$ 에 대하여 다음 급수의 합을 구하여라.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n)$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n + 5b_n)$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} (-3a_n + 2b_n)$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{3} - \frac{b_n}{2} \right)$

▣ 수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$ 에 대하여 다음 급수의 합을 구하여라.

65. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n)$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 5b_n)$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n + 3b_n)$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{10} \right)$



정답 및 해설

1) 양의 무한대로 발산

⇒ 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

2) 양의 무한대로 발산

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = 2n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2k = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) = \infty \text{ (발산)}$$

3) 음의 무한대로 발산

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})$$

$$= (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) + \dots + (\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1})$$

$$= 1 - \sqrt{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{2n+1}) = -\infty \text{ (발산)}$$

4) 수렴, 1

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

5) 수렴, $\frac{1}{2}$

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

6) 수렴, $\frac{1}{4}$

⇒ 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{4}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{4}$ 이다.

7) 수렴, 2

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

8) 수렴, $\frac{3}{4}$

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \right. \\
&\quad \left. \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
\therefore S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

9) 수렴, 6

⇒ 제 n 항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} = \frac{2n+1}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{6}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
&= 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 6$$

10) 수렴, 1

⇒ 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

11) 수렴, $\frac{3}{4}$

⇒ 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고

$$\begin{aligned}
\text{하면 } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)
\end{aligned}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$ 이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{4}$ 이다.

12) 수렴, $\frac{15}{4}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

13) 수렴, 2

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = 2$$

14) 양의 무한대로 발산

⇒ 제 n 항 a_n 이

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{이므로}$$

첫째항부터 제 n 항까지의 부분합 S_n 은

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
&= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
&= \sqrt{n+1} - 1 \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty \text{ (발산)}
\end{aligned}$$

15) 양의 무한대로 발산

⇒ 제 n 항 a_n 이

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}{(2n+1) - (2n-1)} \\
&= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}
\end{aligned}$$

이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합 S_n 은

$$\begin{aligned}
S_n &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\
&= \sqrt{2n+1} - 1 \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - 1) = \infty \text{ (발산)}
\end{aligned}$$

16) 수렴, 1

⇒ 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고

$$\begin{aligned}
\text{하면 } S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

17) 양의 무한대로 발산

⇒ 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

18) 주어진 급수는 첫째항이 -2 , 공차가 3 인 등차수열의 합이므로 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n-5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n-5) = \infty \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

19) 주어진 급수는 첫째항이 3 , 공비가 3 인 등비수열의 합이므로 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

20) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면 $a_n = 5$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$$21) a_n = \frac{n}{n+1} \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{은 발산한다.}$$

22) 발산

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \text{은 발산한다.}$$

$$23) a_n = \frac{n+1}{2n-1} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{은 발산한다.}$$

$$24) a_n = \frac{n+1}{4n-1} \text{로 놓으면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$$25) a_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{으로 놓으면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} = 1 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

26) 발산

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{은 발산한다.}$$

27) 발산

$$\Rightarrow a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2} \text{이라고 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+2} \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}$$

28) 2

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2) \text{가 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

29) 1

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

30) -1

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

31) -3

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 3) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$$

32) -2

$$\Rightarrow a_n + \frac{2n-1}{n} = b_n \text{이라고 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n - \frac{2n-1}{n} \right) = -2$$

$$33) \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2) \text{가 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$$

$$34) \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - 3) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n - 3) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$$

$$35) 5$$

$$\Rightarrow a_n - \frac{2n-1}{n} = b_n \text{이라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$a_n = b_n + \frac{2n-1}{n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{2n-1}{n} \right) = 0 + 2 = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$36) \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n} + 1 = b_n \text{이라고 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다. 즉 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 1) = -1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + n}{3a_n - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \frac{a_n}{n} + 1}{3 \cdot \frac{a_n}{n} - 2} = \frac{4 \cdot (-1) + 1}{3 \cdot (-1) - 2}$$

$$= \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$37) \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n} - 2 = b_n \text{이라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 2) = 0 + 2 = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + n}{5a_n - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a_n}{n} + 1}{\frac{5a_n}{n} - 2}$$

$$= \frac{2 \times 2 + 1}{5 \times 2 - 2} = \frac{5}{8}$$

$$38) 1$$

$$\Rightarrow na_n + 2 = b_n \text{이라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (na_n + 2) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 2) = 0 - 2 = -2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + 3n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 3}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{-2 + 3}{1} = 1$$

$$39) 3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1} = \frac{2 \cdot 0 - 3}{0 + 1} = -3$$

$$40) -2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5) \text{가 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 5) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{2} \right) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2$$

$$41) -7$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n} + 2 = b_n \text{이라고 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 2) = -2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3a_n}{n + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3 \cdot \frac{a_n}{n}}{1 + \frac{a_n}{n}} = \frac{1 - 3 \cdot (-2)}{1 + (-2)}$$

$$= -7$$

$$42) 12$$

$$\Rightarrow \frac{3 - a_n}{2} = b_n \text{이라고 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - a_n}{2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - a_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4na_n + 5}{n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + \frac{5}{n}}{1 - \frac{3}{n}} = 4 \times 3 = 12$$

$$43) 9$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{3^n} = b_n \text{이라고 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3^{n+1}}{3^{n-1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{3^n} + 3}{\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 9$$

44) 9

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3^{n+1} - 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{3^n} + 3 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{\frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= 9 \end{aligned}$$

45) $\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{2^n} - 5 = b_n \text{이라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2^n} - 5 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 5) = 0 + 5 = 5$$

따라서 구해야 하는 식의 분자와 분모를 4^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^n}{3^n + 2^n a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{a_n}{2^n}} = \frac{1+0}{0+5} = \frac{1}{5}$$

46) $\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{5^n} - 1 = b_n \text{이라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{5^n} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4^n}{5^{n+1} + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{5^n} + \left(\frac{4}{5}\right)^n}{5 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ &= \frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

47) 1

$$\Rightarrow \frac{a_n}{4^n} - \frac{2n}{3n+2} = b_n \text{이라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{4^n} - \frac{2n}{3n+2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{2n}{3n+2} \right) = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n - 2^n}{4^{n+1} + 3^{n+1} + 2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times \frac{a_n}{4^n} - \left(\frac{2}{4}\right)^n}{4 + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{6 \times \frac{2}{3} - 0}{4 + 0 + 0} = 1$$

48) -3

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 1 - 2 \times 2 = -3 \end{aligned}$$

49) -7

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= -1 + 2 \times (-3) = -7 \end{aligned}$$

50) -1

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 4b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= -3 + 4 \times \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

51) 38

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (7a_n + 3b_n) &= 7 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 7 \times 5 + 3 \times 1 = 38 \end{aligned}$$

52) 11

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 4 - (-3) = 11 \end{aligned}$$

53) 13

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (12a_n + 25b_n) &= 12 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 25 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 12 \times \frac{2}{3} + 25 \times \frac{1}{5} = 8 + 5 = 13 \end{aligned}$$

54) 13

 \Rightarrow 두 급수가 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \text{ (단, } \alpha \text{와 } \beta \text{는 상수)로 놓자.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 4 \text{ 에서 } \alpha + \beta = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 6 \text{ 에서 } \alpha - \beta = 6 \cdots \textcircled{A}$$

⑦, ⑨을 연립하면

$$\textcircled{A} + \textcircled{C} \text{ 에서 } 2\alpha = 10 \quad \therefore \alpha = 5, \beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2\alpha - 3\beta \\ &= 2 \times 5 - 3 \times (-1) = 13 \end{aligned}$$

55) 8

⇒ 두 급수가 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \text{ (단, } \alpha \text{ 와 } \beta \text{ 는 상수)로 놓자.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = 10 \text{ 에서 } \alpha + 2\beta = 10 \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 2 \text{ 에서 } 2\alpha + \beta = 2 \cdots \textcircled{B}$$

⑦, ⑨을 연립하면

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \text{ 에서 } 3\alpha + 3\beta = 12, \text{ 즉 } \alpha + \beta = 4 \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{B} \text{ 에서 } \alpha = -2$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{C} \text{ 에서 } \beta = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (5a_n + 3b_n) &= 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 5\alpha + 3\beta \\ &= 5 \times (-2) + 3 \times 6 = 8 \end{aligned}$$

56) 26

⇒ 두 급수가 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (단, α, β 는 상수)로 놓자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 3 \text{ 에서 } 2\alpha - \beta = 3 \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 12 \text{ 에서 } \alpha + \beta = 12 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \text{ 에서 } 3\alpha = 15, \text{ 즉 } \alpha = 5$$

이 값을 ②에 대입하면 $\beta = 7$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + 3\beta \\ &= 5 + 3 \times 7 = 26 \end{aligned}$$

57) 23

⇒ 두 급수가 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (단, α, β 는 상수)로 놓자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 1 \text{ 에서 } 2\alpha + \beta = 1 \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 11 \text{ 에서 } \alpha - \beta = 11 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \text{ 에서 } 3\alpha = 12, \text{ 즉 } \alpha = 4$$

이 값을 ②에 대입하면 $\beta = -7$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - b_n) &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 4\alpha - \beta \\ &= 4 \times 4 - (-7) = 23 \end{aligned}$$

58) 0

⇒ 두 급수가 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \text{ (단, } \alpha \text{ 와 } \beta \text{ 는 상수)로 놓자.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - b_n) = 8 \text{ 에서 } 3\alpha - \beta = 8 \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 4 \text{ 에서 } \alpha + \beta = 4 \cdots \textcircled{B}$$

⑦, ⑨을 연립하면

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \text{ 에서 } 4\alpha = 12, \text{ 즉 } \alpha = 3$$

이 값을 ②에 대입하면 $\beta = 1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} a_n - 2b_n \right) &= \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{3} \alpha - 2\beta \\ &= \frac{2}{3} \times 3 - 2 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

59) 5

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 3 - (-2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

60) 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 3 + (-2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

61) -1

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 3 + 2 \times (-2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

62) 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (4a_n + 5b_n) &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 4 \times 3 + 5 \times (-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

63) -13

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-3a_n + 2b_n) &= -3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= -3 \times 3 + 2 \times (-2) \\ &= -13 \end{aligned}$$

64) 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{3} - \frac{b_n}{2} \right) &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= \frac{1}{3} \times 3 - \frac{1}{2} \times (-2) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

65) 14

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 4 + 10 = 14\end{aligned}$$

66) -6

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 4 - 10 = -6\end{aligned}$$

67) -2

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 4 - 10 = -2\end{aligned}$$

68) 54

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 5b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 4 + 5 \cdot 10 = 54\end{aligned}$$

69) 26

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n + 3b_n) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= -4 + 3 \cdot 10 = 26\end{aligned}$$

70) 1

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{10} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{10} \times 10 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1\end{aligned}$$