01 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

◪ 임의의 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 참이면 명제 $p(n+2)$가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표를 (　)안에 써넣어라.

1. $p(1)$이 참이면 모든 홀수 $2n+1$에 대하여 $p(2n+1)$이 참이다. (　　)

2. $p(2)$가 참이면 모든 짝수 $2n$에 대하여 $p(2n)$이 참이다. (　　)

3. $p(1)$, $p(2)$가 참이면 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다. (　　)

◪ 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 참이 명제는 ○표, 참이 아닌 명제는 ×표를 (　)안에 써넣어라.

(가) $p(1)$은 참이다.
(나) $p(n)$이 참이면 $p(3n)$이 참이다.
(다) $p(n)$이 참이면 $p(4n)$이 참이다.

4. $p(36)$ (　　)

5. $p(40)$ (　　)

6. $p(48)$ (　　)

7. $p(52)$ (　　)

◪ 다음 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 구하여라.

8. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때,
(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$
따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립하다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$
위의 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을 더하면
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{(가)}$
$=\frac{k}{k+1}+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

9. 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ …… $P(n)$이 성립함을 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 $P(n)$이 성립한다.
(ⅱ) $\boxed{(가)}$ 일 때 $P(n)$이 성립한다고 가정하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$이다.
등호의 좌우변에 $\boxed{(나)}$ 를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(나)}=k^2+\boxed{(나)}$
$=\boxed{(다)}$
이 성립한다. 따라서 $\boxed{(라)}$ 일 때도 $P(n)$이 성립한다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$이 성립함을 알 수 있다.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

10. **다음은 5이상의 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n-1>n^2$이 성립함을 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=5$일 때,
$(\text{좌변})=31$, $(\text{우변})=25$
이므로 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k\,(k\geq 5)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k-1>k^2$
$n=k+1$일 때,
$2^{k+1}-1=2(\boxed{(가)})+1>\boxed{(나)}+1$
이때
$\boxed{(나)}+1>\boxed{(다)}$
$\therefore 2^{k+1}-1>\boxed{(다)}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

11. **다음은 x가 1이 아닌 양수일 때, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식**

$$(1+x)^n < 2^{n-1}(1+x^n)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=2$일 때,
$(\text{좌변})=(1+x)^2=1+2x+x^2$,
$(\text{우변})=2(1+x^2)$
이 때, $(\text{우변})-(\text{좌변})=\boxed{(가)}>0$이므로 성립한다.
(ⅱ) $n=k$ (k는 2이상의 자연수)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$(1+x)^k<2^{k-1}(1+x^k)$
위의 부등식의 양변에 $1+x$를 곱하면
$(1+x)^{k+1}<2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$
이 때,
$\boxed{(나)}-2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$
$=2^{k-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\cdot\boxed{(다)}>0$
이므로
$(1+x)^{k+1}<2^{k-1}(1+x^k)(1+x)<\boxed{(나)}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

12. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, $1+5=6$이므로 n^3+5n은 6의 배수이다.
(ⅱ) $n=k$일 때, k^3+5k이 6의 배수라고 가정하면
$k^3+5k=6m$(m은 자연수)이므로
$(k+1)^3+5(k+1)=($ (가) $)+3k(k+1)$
이 때 $3k(k+1)$은 6의 배수이므로
$n=($ (나) $)$일 때도 6의 배수이다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 n^3+5n은 모든 자연수 n에 대하여 6의 배수이다.

13. **다음은 $h>0$이고, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $(1+h)^n>1+nh$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) ((가))일 때,
$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=(\text{우변})$
따라서 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k(k\geq 2)$일 때,
주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k>1+kh$
$(1+h)>0$이므로 위 식의 양변에 ((나))을 곱하면
$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h)>(1+kh)(1+h)$
그런데
$(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2($ (다) $)1+(k+1)h$
$\therefore (1+h)^{k+1}($ (다) $)+(k+1)h$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

14. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식**

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(n^2+k)=n^3+(n+1)^3$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때,
(좌변)= $\boxed{(가)}$, (우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ⅱ) $n=m\ (m\geq 1)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하자.

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)+1}\{(m+1)^2+k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{2m+1}\{(m+1)^2+k\}+\boxed{(나)}$$

$$=\sum_{k=1}^{2m+1}(m^2+k)+\sum_{k=1}^{2m+1}(2m+1)+\boxed{(나)}$$

$$=\boxed{(다)}+(2m+1)^2+\boxed{(나)}$$

$$=(m+1)^3+(m+2)^3$$

그러므로 $n=m+1$일 때에도 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

15. **다음은 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $2^n>n^2$… ㉠이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=($ (가) $)$ 일 때,
(좌변)$=32$, (우변)$=25$
따라서 (좌변)$>$(우변)이므로 $n=($ (가) $)$일 때, 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=($ (나) $)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^k>k^2$$

위 부등식의 양변에 ((다))를 곱하면

$$2^{k+1}>2k^2$$

그런데 $2k^2-(k+1)^2=(k-1)^2-2>0$이고
$k\geq 5$이므로 $2k^2>($ (라) $)^2$
$\therefore 2^{(\text{(라)})}>($ (라) $)^2$
따라서 $n=($ (라) $)$일 때에도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 ㉠은 5이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

16. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식**

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}<2\sqrt{n}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때,
(좌변)$=\boxed{(가)}<2=$(우변)이므로 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt{k}$$

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}$$

$$<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}$$

이때,

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-\boxed{(나)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$$

이때,

$$\left(2\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+k}+1\right)^2-\{2\sqrt{2}(k+1)\}^2\ \boxed{(다)}\ 0$$

이므로 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

17. **다음은 $a_1=1,\ a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=1=\dfrac{1+1}{2\cdot 1}$이므로 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, $a_k=($ (가) $)$이라고 가정하면

$$a_{k+1}=(\ (나)\ )=\frac{(\ (다)\ )}{2k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$이다.

◪ 다음을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

18. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

19. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

20. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

21. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

22. $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$2^n>n^2$$

23. $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

24. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

25. $n \ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \cdot n > 2^n$$

26. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

27. $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$(1+h)^n > 1+nh \text{ (단, } h>0)$$

28. $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

29. $n \ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$2^n > 2n+1$$

30. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$3^n > 3n+2$$

31. 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라

$$3^n > n+1$$

32. $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라

$$2^n > n^2$$

33. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

34. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

35. $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$3^n > 3n+7$$

36. 자연수 n에 대하여 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$으로 정의할 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1)$

37. 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

◪ 다음 물음에 답하여라.

38. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $n^3 - n$이 3의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

39. 모든 자연수 n에 대하여
$2^{3^n} + 1$은 3^{n+1}으로 나누어 떨어진다. ……①
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

40. 모든 자연수 n에 대하여 $7^n + 5^{n-1}$이 2의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

41. 자연수 n에 대하여 등식
$\sum_{i=1}^{2n-1} \{i + (n-1)^2\} = (n-1)^3 + n^3$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

◪ 다음 물음에 답하여라.

42. **자연수 n에 대하여**

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ … ㉠**이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. 이 때, (A) 안에 들어갈 식을 $f(k)$라 할 때, $f(3)$의 값을 구하여라.**

> (ⅰ) $n=1$일 때,
>
> $(\text{좌변})=1^3=1$, $(\text{우변})=\frac{1}{4}\times 1^2\times 2^2=1$
>
> 따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
>
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$
>
> 양변에 (A)을 더하면
>
> $1^3+2^3+\cdots+k^3+(\mathrm{A})$
>
> $=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(\mathrm{A})$
>
> $=\frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2$
>
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

43. **다음은 $n\ge 0$인 정수 n에 대하여 $2^{3^n}+1$이 항상 3^{n+1}의 배수인 것을 수학적 귀납법으로 보이는 과정이다. (단, $2^{3^a}=2^{3\times3\times\cdots\times3}$, 3은 a개다.)**

> (ⅰ) $n=0$일 때, $3^1=2^1+1$이므로 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k$일 때, ((가))이 3^{k+1}의 배수라고 가정하면
>
> ((가)) $=p\times 3^{k+1}$로 표현할 수 있다.
>
> (단, p는 임의의 자연수)
>
> $2^{3^{k+1}}+1=($ (가) $)\times($ (나) $)$
>
> 2^{2m-1} (단, m은 자연수)은 3으로 나누었을 때의 나머지가
>
> 항상 2이므로 $(2^{2m-1})^2-2^{2m-1}+1$은 3의 배수이다.
>
> ((나))는 3의 배수이고 ((가)) 는 3^{k+1}의
>
> 배수이므로 $2^{3k+1}+1$는 3^{k+2}의 배수이다.
>
> 그러므로 $n\ge 0$인 모든 정수 n에 대하여 $2^{3^n}+1$은 항상 3^{n+1}의 배수이다.

(가)에 들어갈 식을 $f(k)$, (나)에 들어갈 식을 $g(k)$라고 할 때, $f(2)+g(1)$의 값을 구하여라.

44. **다음은 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}\ \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

> (ⅰ) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{4}{3}$
>
> $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$ 따라서 $n=2$일 때, ①이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k(k\ge p)$일 때, ①이 성립한다고 가정하면
>
> $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$
>
> 이 부등식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
>
> $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{(가)}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{(가)}$
>
> 이때 $k\ge p$에서
>
> $\frac{2k}{k+1}+\boxed{(가)}>\boxed{(나)}$ 이 성립한다.
>
> 따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.
>
> 그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때, $p+4f(3)+3g(4)$의 값을 구하여라.

45. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

> (ⅰ) $n=1$일 때, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$이므로 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k$일 때, $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$이 성립한다고 가정하면,
>
> (ⅲ) $n=k+1$일 때,
>
> $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$
>
> $>\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}+\left(\text{(가)}\right)$
>
> $=\frac{2}{\text{(나)}}+1>1$
>
> 그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(0)+g(0)$의 값을 구하여라.

46. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ······㉠이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.**

> (ⅰ) $n=1$일 때,
> (좌변)$=$(우변)$=\boxed{(가)}$
> 따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
> $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ······㉡
> 이므로 ㉡의 양변에 $\boxed{(나)}$를 더하면
> $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k+\boxed{(나)}$
> $=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\boxed{(나)}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$
> 위 등식은 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 c, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$이라 할 때, $cf(2)$의 값을 구하여라.

47. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n}+6^{n+1}$을 5로 나눈 나머지는 2임을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.**

> (ⅰ) $n=1$일 때
> $2^4+6^2=16+36=52=5\cdot 10+2$
> (ⅱ) $n=k$일 때
> $2^{4k}+6^{k+1}=5m+2$(m은 자연수)라고 가정하면
> (ⅲ) $n=k+1$일 때
> $2^{4(k+1)}+6^{(k+1)+1}$
> $=(\ \ (가)\ \ )\cdot 2^{4k}+(\ \ (나)\ \ )\cdot 6^{k+1}$
> $=5(6m+(\ \ (다)\ \ )\cdot 2^{4k}+2)+2$
> 따라서 $n=k+1$일 때도 5로 나눈 나머지는 2이다.
> (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n}+6^{n+1}$을 5로 나눈 나머지는 2이다.

이 때, (가)+(나)+(다)의 값을 구하여라.

48. **다음은 모든 자연수 n에 대하여**

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)2^{k-1}=2^{n+1}-n-2$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때
> (좌변)$=1$, (우변)$=2^2-1-2=1$
> 이므로 주어진 식이 성립한다.
> (ⅱ) $n=m$일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하면
> $\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)2^{k-1}=2^{m+1}-m-2$
> $n=m+1$일 때
> $\sum_{k=1}^{m+1}(\boxed{(가)}-k)2^{k-1}$
> $=\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)2^{k-1}+\boxed{(나)}$
> $=2^{m+1}-m-2+\boxed{(나)}$
> $=\cdots$ (이하 생략)

위의 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식을 차례로 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)+g(4)$의 값을 구하여라.

49. **다음은 n이 자연수일 때, $3^{n+1}+4^{2n-1}$은 13으로 나누어 떨어지는 것을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.**

> (ⅰ) $f(n)=3^{n+1}+4^{2n-1}$으로 놓으면
> $f(1)=3^2+4=13$이므로 $f(1)$은 13으로 나누어 떨어진다.
> (ⅱ) $f(k)$가 13으로 나누어 떨어진다고 가정하면
> $f(k+1)=3^{k+2}+4^{2k+1}$
> $=\boxed{(가)}f(k)+\boxed{(나)}\cdot 4^{2k-1}$
> 이므로 $f(k+1)$도 13으로 나누어 떨어진다.
> 따라서 임의의 자연수 n에 대하여 $3^{n+1}+4^{2n-1}$은 13으로 나누어 떨어진다.

위의 증명 과정 중에서 $\boxed{(나)}-\boxed{(가)}$의 값을 구하여라.

50. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\boxed{(가)}=2-\frac{k+2}{2^k}+\boxed{(가)}$$

$$=2-\boxed{(나)}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$이 성립한다.

위의 증명과정에서 $\boxed{(가)}$, $\boxed{(나)}$에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라고 할 때, $f(2)+g(1)$의 값을 구하여라.

51. **다음은 수학적 귀납법을 이용해 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명한 것이다.**

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)=n^3 \cdots\cdots ㉠$$

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\sum_{k=1}^{1}(3k^2-3k+1)=1$이고

(우변)$=1^3=1$이다.

따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}(3k^2-3k+1)=m^3$이다.

이 때, 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$\sum_{k=1}^{m+1}(3k^2-3k+1)=m^3+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$이므로

$n=m+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 명제는 참이다.

(가)에 해당하는 식을 $f(m)$, (나)에 해당하는 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(4)+g(2)$의 값을 구하여라.

52. **다음은 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n>3n-2$ ……㉠가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=8$, (우변)$=7$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 3)$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>3k-2$

양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면 $2^{k+1}>6k-4$

이때 $(6k-4)-(\boxed{(나)})=3k-5>0$이므로

$6k-4>\boxed{(나)}$

$2^{k+1}>6k-4>\boxed{(나)}=3(\boxed{(다)})-2$

즉, $2^{k+1}>3(\boxed{(다)})-2$이다.

따라서 부등식 ㉠은 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 부등식 ㉠은 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 들어갈 수를 a, (나)에 들어갈 식을 $f(k)$, (다)에 들어갈 식을 $g(k)$라고 할 때, $af(2)g(4)$의 값을 구하여라.

53. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n이 3의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=1^3+3\cdot 1^2+2\cdot 1=6$

따라서 a_1은 3의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때, a_k가 3의 배수라고 가정하면

$a_k=k^3+3k^2+2k=3m$(m은 자연수)

$n=k+1$일 때

$(가)^3+3(가)^2+2(가)$

$=(k^3+3k^2+2k)+3k^2+9k+6$

$=3m+3(나)$

$=3(m+(나))$

따라서 $n=k+1$일 때에도 a_n은 3의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 3의 배수이다.

다음 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $f(9)+g(2)$의 값을 구하여라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

54. **다음은 2이상인 자연수 n에 대하여**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}\ \cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=$ (가) 인 경우 ㉠이 성립함을 보이자.

(좌변)$=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{4}{3}$

이므로 $n=$ (가) 인 경우 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$인 경우 ㉠이 성립한다고 하자.

즉, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}\ \cdots ㉡$

가 성립한다고 한다. $n=k+1$인 경우 ㉠이 성립함을 보이기 위해 ㉡의 양변에 (나) 를 더해주고 우변을 정리하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{(나)}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{(나)}$$
$$>\boxed{(다)}$$

이므로 $n=k+1$인 경우 ㉠이 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 2이상인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고 (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(p-1)+g(p)$의 값을 구하여라.

55. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 6^n-1이 5의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, $6^1-1=5$는 5의 배수이다.

따라서 $n=1$일 때 6^n-1은 5의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때 6^k-1이 5의 배수라고 가정하면

$6^k-1=5a$(a는 자연수)이므로 $6^k=5a+1$

$n=k+1$일 때,

$$\begin{aligned}6^{k+1}-1&=6\cdot6^k-1\\&=6(\boxed{(가)})-1\\&=5(\boxed{(나)})\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 6^n-1은 5의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 6^n-1은 5의 배수이다.

(가),(나)에 알맞은 식을 각각 $f(a), g(a)$라고 할 때, $f(1)\times g(2)$의 값을 구하여라.

56. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식**

$$\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\cdots+\frac{3}{n(n+1)}=\frac{3n}{n+1}\ \cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{3}{1\cdot2}=\frac{3}{2}$,

(우변)$=\frac{3\cdot1}{1+1}=\frac{3}{2}$

따라서 $n=1$일 때, 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면,

$\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3}{2\cdot3}+\cdots+\frac{3}{k(k+1)}=\frac{3k}{k+1}\ \cdots ㉡$

㉡의 양변에 ((가))를 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3}{2\cdot3}+\cdots+\frac{3}{k(k+1)}+(\ (가)\ )\\&=\frac{3k}{k+1}+(\ (가)\ )\\&=(\ (나)\ )\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

다음 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(2)+g(4)$의 값을 구하여라.

57. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 $4^{2n-1}+1$이 5로 나누어 떨어짐을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때

$4^{2-1}+1=4+1=5$

이므로 5로 나누어 떨어진다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $4^{2k-1}+1$이 5로 나누어 떨어진다고 가정하면

$4^{2k-1}+1=5m$ (m은 자연수)이다.

$n=k+1$일 때,

$4^{2k+1}+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}\times5m-15=5\times\boxed{(다)}$

즉 $n=k+1$일 때도 $4^{2n-1}+1$는 5로 나누어 떨어진다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)로부터 모든 자연수 n에 대하여 $4^{2n-1}+1$은 5로 나누어 떨어진다.

위의 (가), (나)에 알맞은 값을 각각 a, b, (다)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $f\left(\frac{b}{a}\right)$의 값을 구하여라.

58. **모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$ ⋯ ①이 성립함을 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, $4>2+1$이므로 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k \geq 2)$일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$2^{k+1} > ($ (가) $)+1$ ⋯ ②

②의 양변에 ((나))를 곱하면

$2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$

$2(k^2+k+1)-($ (다) $)=k^2-k-1$

$k \geq 2$일 때, $k^2-k-1>0$이므로

$\therefore 2^{k+2} > ($ (다) $)$

따라서 ①은 $n=($ (라) $)$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 부등식 ①은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 $f(k)$, a, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $af(3)+g(2)h(4)$의 값을 구하여라.

59. **다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 ((가))을(를) 더하면

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+($ (가) $)=2-\frac{k+2}{2^k}+($ (가) $)$

$=2-($ (나) $)$

이므로 $n=($ (다) $)$일 때도 주어진 등식은 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

다음 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $\frac{f(2)h(6)}{g(4)}$의 값을 구하여라.

60. **다음은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ ⋯⋯ ㉠이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.**

(ⅰ) $n=$ (가) 일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 $n=$ (가) 일 때 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

$n=k+1$일 때,

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+$ (나) $<2-\frac{1}{k}+$ (나)

이때 $k \geq 2$이므로

$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}-$ (다)

$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

즉, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (1), (2)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\alpha \times \frac{1}{f(5)} \times g(5)$의 값을 구하여라.

정답 및 해설

1) ○

⇨ $p(1)$이 참이면 $p(1+2)=p(3)$이 참
$p(3)$이 참이면 $p(3+2)=p(5)$가 참
$p(5)$가 참이면 $p(5+2)=p(7)$이 참
……
$p(2n-1)$이 참이면 $p(2n-1+2)=p(2n+1)$이 참이다.
따라서 $p(1)$이 참이면 모든 홀수 $2n+1$에 대하여 $p(2n+1)$이 참이다.

2) ○

⇨ $p(2)$가 참이면 $p(2+2)=p(4)$가 참
$p(4)$가 참이면 $p(4+2)=p(6)$이 참
$p(6)$이 참이면 $p(6+2)=p(8)$이 참
……
$p(2n-2)$가 참이면 $p(2n-2+2)=p(2n)$이 참
따라서 $p(2)$가 참이면 모든 짝수 $2n$에 대하여 $p(2n)$이 참이다.

3) ○

⇨ 1번, 2번 문제에 의해 $p(1)$, $p(2)$가 참이면 모 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다.

4) ○

⇨ $p(1)$이 참이면 $p(3)$도 참이다.
$p(3)$이 참이면 $p(3^2)$도 참이다.
⋮
$\therefore p(3^n)$는 참이다.
$p(3^n)$이 참이면 $p(4\cdot 3^n)$도 참이다.
$p(4\cdot 3^n)$이 참이면 $p(4^2\cdot 3^n)$도 참이다.
⋮
$\therefore p(4^m\cdot 3^n)$도 참이다. (단, m, n은 자연수)
$\therefore 36=4\times 3^2$이므로 $p(36)$은 참이다.

5) ×

⇨ $40=4\times 10$이므로 $p(40)$는 참이 아니다.

6) ○

⇨ $48=4^2\cdot 3$이므로 $p(48)$은 참이다.

7) ×

⇨ $52=4\times 13$이므로 $p(52)$는 참이 아니다.

8) (가) $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ (나) $\dfrac{k+1}{k+2}$

⇨ $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$
위의 식의 양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\boxed{\frac{k+1}{k+2}}$$

9) (가) $n=k$ (나) $2k+1$ (다) $(k+1)^2$
(라) $n=k+1$

10) (가) 2^k-1 (나) $2k^2$ (다) $(k+1)^2$

⇨ (ⅰ) $n=5$일 때
(좌변)$=2^5-1=31$, (우변)$=5^2=25$이므로 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k\ (k\geq 5)$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k-1>k^2$
$n=k+1$ 일 때,
$2^{k+1}-1=2\bullet 2^k-1=2((가)(2^k-1))+1>(나)(2k^2)+1$
이때, $k\geq 5$ 이므로 양변에 k를 곱하면
$k^2\geq 5k$
이때, $5k=2k+3k>2k+1$
$(나)(2k^2)+1=k^2+k^2+1>k^2+2k+1=(다)(k+1)^2$
$\therefore 2^{k+1}-1>(다)(k+1)^2$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
$\therefore$ (가) : 2^k-1, (나) : $2k^2$, (다) : $(k+1)^2$

11) (가) $(x-1)^2$ (나) $2^k(1+x^{k+1})$ (다) $(x-1)^2$

⇨ (ⅰ) $n=2$ 일 때,
(좌변)$=(1+x)^2=1+2x+x^2$
(우변)$=2(1+x^2)$
이 때,
(우변)$-$(좌변)$=x^2-2x+1=(가)(x-1)^2>0$ 이므로 성립한다.
(ⅱ) $n=k$ (k는 2이상의 자연수)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$(1+x)^k<2^{k-1}(1+x^k)$
위의 부등식의 양변에 $1+x$를 곱하면
$(1+x)^{k+1}<2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$
이 때,
$(나)(2^k(1+x^{k+1}))-2^{k-1}(1+x^k)(1+x)$
$=2^{k-1}(2+2x^{k+1}-1-x-x^k-x^{k+1})$
$=2^{k-1}(x^{k+1}-x^k-x+1)$
$=2^{k-1}\{x(x^k-1)-(x^k-1)\}$
$=2^{k-1}(x^k-1)(x-1)$

$=2^{k-1}\frac{(x^k-1)}{x-1}(x-1)^2$

$=2^{k-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\cdot$ (다)$((x-1)^2)>0$

이므로

$(1+x)^{k+1}<2^{k-1}(1+x^k)(1+x)<$ (나)$(2^k(1+x^{k+1}))$

(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 주어진 부등식은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가) : $(x-1)^2$, (나) : $2^k(1+x^{k+1})$, (다) : $(x-1)^2$

12) (가) $6(m+1)$ (나) $k+1$

⇨ $(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+8k+6$

$=6(m+1)+3k(k+1)$

이 때 $3k(k+1)$은 6의 배수이므로 $n=k+1$일 때도 6의 배수이다.

따라서 (가)는 $6(m+1)$이고 (나)는 $k+1$이다.

13) (가) $n=2$ (나) $1+h$ (다) $>$

⇨ (ⅰ) 수학적 귀납법에서 $n=2$일 때 성립하는지 확인해야 하므로 (가)는 $\boxed{n=2}$이다.

(ⅱ) $(1+h)^k>1+kh$에서 양변에 $(1+h)$를 곱하면 $(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h)>(1+kh)(1+h)$가 성립하므로 (나)는 $\boxed{1+h}$이다.

$kh^2>0$이므로 $1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$이다.

따라서 (다)는 $\boxed{>}$이다.

14) (가) 9 (나) $2m^2+8m+7$ (다) $m^3+(m+1)^3$

⇨ (좌변) $=\sum_{k=1}^{3}(1+k)=3+\frac{3\cdot4}{2}=9$

(우변) $=1^3+2^3=9$ $\therefore$ (가) $=9$

$\sum_{k=1}^{2(m+1)+1}\{(m+1)^2+k\}$

$=\sum_{k=1}^{2m+1}\{(m+1)^2+k\}+(m+1)^2+2m+2+(m+1)^2+2m+3$

$=\sum_{k=1}^{2m+1}\{(m+1)^2+k\}+(2m^2+8m+7)$

$=\sum_{k=1}^{2m+1}(m^2+k)+\sum_{k=1}^{2m+1}(2m+1)+(2m^2+8m+7)$

$=m^3+(m+1)^3+(2m+1)^2+(2m^2+8m+7)$

$=(m+1)^3+(m+2)^3$

$\therefore$ (나) $=2m^2+8m+7$, (다) $=m^3+(m+1)^3$

15) (가) 5 (나) k (다) 2 (라) $k+1$

⇨ (가) $n\geq5$일 때 성립함을 증명하는 것이므로 먼저 $\boxed{n=5}$일 때 성립하는지 확인한다.

따라서 (가)는 $\boxed{n=5}$이다.

(나) 수학적 귀납법에서 $\boxed{n=k}$일 때 성립한다고 가정하므로 (나)는 $\boxed{n=k}$이다.

(다) $n=k+1$일 때 성립하는지 확인하기 위해 부등식의 양변에 $\boxed{2}$를 곱하므로 (다)는 $\boxed{2}$이다.

(라) $k\geq5$일 때 $2k^2>\boxed{(k+1)^2}$이므로 (라)는 $\boxed{(k+1)}$이다.

16) (가) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (나) $2\sqrt{k+1}$ (다) $<$

⇨ (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)= (가)$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<2=$(우변) 이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt{k}$

$n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}$

$<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}$

이때,

$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-$ (나)$(2\sqrt{k+1})$

$=\frac{2\sqrt{k}\sqrt{2k+2}+1-2\sqrt{k+1}\sqrt{2k+2}}{\sqrt{2k+2}}$

$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$

이때,

$(2\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+k}+1)^2-\{2\sqrt{2}(k+1)\}^2$

$=(2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k})^2+4\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-\{2\sqrt{2}(k+1)\}^2$

$=8(k^2+k)+4\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-8(k^2+2k+1)$

$=4\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-8(k+1)$

(다)$(<)0$

이므로 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가) : $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (나) : $2\sqrt{k+1}$, (다) : $<$

17) (가) $\frac{k+1}{2k}$ (나) $\frac{4a_k-1}{4a_k}$ (다) $k+2$

⇨ (ⅰ) $a_n=\frac{n+1}{2n}$에서 $n=k$를 대입하면

(가)는 $\boxed{\frac{k+1}{2k}}$이다.

(ⅱ) $a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}$에서 $n=k$를 대입하면

$a_{k+1}=1-\frac{1}{4a_k}=\boxed{\frac{4a_k-1}{4a_k}}$에서 (나) 는 $\boxed{\frac{4a_k-1}{4a_k}}$이다.

(ⅲ) $a_k=\frac{k+1}{2k}$을 $a_{k+1}=\frac{4a_k-1}{4a_k}$에 대입하면

$\frac{4\left(\frac{k+1}{2k}\right)-1}{4\left(\frac{k+1}{2k}\right)}=\frac{\boxed{k+2}}{2k+2}$이므로 (다)는 $\boxed{k+2}$이다.

18) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$

(우변)$=\frac{1\times 2}{2}=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $k+1$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

19) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=2$, (우변) $=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=2$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k\cdot(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ … ㉠

㉠의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k\cdot(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

20) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ … ㉠

㉠의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

21) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$

$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)$

$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

22) (i) $n=5$일 때

(좌변)$=2^5=32$

(우변)$=5^2=25$

$32>25$이므로 $n=5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$ …… ㉠

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$ …… ㉡

한편

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$이므로

$2k^2>(k+1)^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$2^{k+1}>(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 부등식은 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

23) (i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$,

(우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$ …… ㉠

한편, $k\geq 2$이므로

$\left\{2-\frac{1}{(k+1)}\right\}-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$

$\therefore\ 2-\frac{1}{k+1}>2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

24) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$

(우변)$=1^2=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $2k+1$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$

$=(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

25) (ⅰ) $n=4$일 때,

(좌변)$=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

(우변)$=2^4=16$

$24>16$이므로 $n=4$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdot k>2^k$ …… ㉠

㉠의 양변에 $k+1$을 곱하면

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot k\cdot(k+1)>2^k\cdot(k+1)$

$>2^{k+1}$ ($\because$ $k\geq 4$이므로 $k+1>2$)

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 부등식은 $n\geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

26) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$

(우변)$=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

27) 성립한다.

⇨ (ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$

(우변)$=1+2h$

$1+2h+h^2>1+2h$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ …… ㉠

㉠의 양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$

$=1+(k+1)h+kh^2$

$>1+(k+1)h$ ($\because$ $kh^2>0$)

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

28) (ⅰ) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$

$\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$이므로 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$

$=\frac{2k+1}{k+1}$

이때, $\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}>0$이므로

$\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

29) (ⅰ) $n=3$일 때,

(좌변)$=2^3=8$, (우변)$=2\times 3+1=7$

따라서 $n=3$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>2k+1$

양변에 2를 곱하면 $k\geq 3$이므로

$2^{k+1}>2(2k+1)>2(k+1)+1$

$\therefore$ $2^{k+1}>2(k+1)+1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

30) (ⅰ) $n=2$일 때

(좌변)$=3^2=9$, (우변)$=3\times 2+2=8$

따라서 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k>3k+2$

양변에 3을 곱하면 $k\geq 2$이므로

$3^{k+1}>3(3k+2)>3(k+1)+2$

$\therefore$ $3^{k+1}>3(k+1)+2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

31) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=3$, (우변)$=1+1=2$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k>k+1$

양변에 3을 곱하면 $k\geq 1$이므로

$3^{k+1}>3(k+1)>(k+1)+1$

$\therefore$ $3^{k+1}>(k+1)+1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

32) (ⅰ) $n=5$일 때,

(좌변)$=2^5=32$,

(우변)$=5^2=25$

따라서 $n=5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 5)$일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$ …… ㉠

한편, $k\geq 5$일 때,

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$이므로

$2k^2>(k+1)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

33) (ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1^2\times 2^2}{4}=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}$

$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$=\frac{(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2}{4}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

34) (ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1^2$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

양변에 $(2k+1)$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)$

$=(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

35) (ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=3^3=27$,

(우변) $=3\cdot3+7=16$, (좌변) $>$ (우변)이므로 주어진 부등식은 $n=3$일 때 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k\geq3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k>3k+7$의 양변에 3을 곱하면

$3^{k+1}>3(3k+7)=9k+21$

이때 $k\geq3$이면 $9k+21>3k+10$이므로

$3^{k+1}>3k+10=3(k+1)+7$

$\therefore n=k+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 3이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

36) (ⅰ) $n=2$일 때, (좌변) $=a_1=1$

(우변) $=2(a_2-1)=2(1+\frac{1}{2}-1)=1$

$\therefore n=2$일 때, 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k\geq2)$일 때, 성립한다고 가정하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=k(a_k-1)$, $a_{k+1}-a_k=\frac{1}{k+1}$

$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k=k(a_k-1)+a_k=(k+1)a_k-k$

$=(k+1)(a_{k+1}-\frac{1}{k+1})-k=(k+1)a_{k+1}-1-k$

$=(k+1)(a_{k+1}-1)$

$\therefore n=k+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

37) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^3=1$

(우변)$=\left\{\frac{1(1+1)}{2}\right\}^2=1$

따라서 $n=1$일 때, 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

등식의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$

$=(k+1)^2\left\{\frac{k^2}{4}+(k+1)\right\}$

$=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)$

$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

38) (ⅰ) $n=2$일 때

$2^3-2=6=3\cdot2$

따라서 $n=2$일 때, n^3-n은 3의배수이다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq2)$일 때, k^3-k가 3의 배수라고 가정하면 $k^3-k=3N$ (N은 자연수)으로 놓을 수 있다.

$n=k+1$이면

$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+2k$

$=(k^3-k)+3(k^2+k)$

$=3N+3(k^2+k)$

$=3(N+k^2+k)$

따라서 $n=k+1$일 때도 n^3-n은 3의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 n^3-n은 3의 배수이다.

39) (ⅰ) $n=1$일 때, $2^3+1=9=3^2$

따라서 $n=1$일 때, 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 성립한다고 가정하면

$2^{3^k}+1=3^{k+1}\cdot m$(m은 자연수), $2^{3^k}=3^{k+1}\cdot m-1$

$2^{3^{k+1}}+1=2^{3^k\cdot3}+1=(2^{3^k})^3+1=(3^{k+1}\cdot m-1)^3+1$

$=3^{3k+3}\cdot m^3-3\cdot3^{2k+2}\cdot m^2+3\cdot3^{k+1}\cdot m+1-1$

$=3^{k+2}(3^{2k+1}\cdot m^3-3^{k+1}m^2+m)$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

40) (ⅰ) $n=1$일 때,

$7^1+5^{1-1}=7+1=8=2\cdot4$

따라서 $n=1$일 때, 7^n+5^{n-1}은 2의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 7^k+5^{n-1}이 2의 배수라고 가정하면 $7^k+5^{k-1}=2N$(N은 자연수)으로 놓을 수 있다.

$n=k+1$이면

$7^{k+1}+5^k=7\cdot7^k+5\cdot5^{k-1}$

$=7(7^k+5^{k-1})-2\cdot5^{k-1}$

$=7\cdot2N-2\cdot5^{k-1}$

$=2(7N-5^{k-1})$

따라서 $n=k+1$일 때도 7^n+5^{n-1}은 2의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 7^n+5^{n-1}은 2의 배수이다.

41) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변) $=1+(1-1)^2=1$

(우변) $=(1-1)^3+1^3=1$

따라서 $n=1$일 때, 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}=(k-1)^3+k^3$

$\sum_{i=1}^{2k+1}\{i+k^2\}=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+k^2\}+(2k+k^2)+(2k+1+k^2)$

$=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2+2k-1\}+(2k^2+4k+1)$

$= \sum_{i=1}^{2k-1} \{i+(k-1)^2\}+(2k-1)^2+(2k^2+4k+1)$

$=(k-1)^3+k^3+(6k^2+2)=(k+1)^3+k^3$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

42) 64

⇨ $n=k+1$일 때 성립하는지 확인하기 위해 양변에 $\boxed{(k+1)^3}$을 더하면

$1^3+2^3+\cdots+k^3+\boxed{(k+1)^3}=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+\boxed{(k+1)^3}$

$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}$

$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2$

이 성립하므로

$f(k)=(k+1)^3$이고 $f(3)=64$이다.

43) 570

⇨ $f(k)=2^{3^k}+1$ 이므로 $f(2)=2^{3^2}+1=2^9+1=513$

$g(k)=\frac{2^{3^{k+1}}+1}{2^{3^k}+1}$이므로 $g(1)=\frac{2^{3^2}+1}{2^3+1}=\frac{513}{9}=57$

$\therefore\ f(2)+g(1)=570$

44) 8

⇨(ⅱ) $n=k\ (k\ge 2)$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$ 이므로

이 부등식의 양변에 (가)$\left(\frac{1}{k+1}\right)$ 을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k+1}\right)>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$

이때 $k\ge p=(2)$에서

$\frac{2k}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)=\frac{2k+1}{k+1}$ 이므로

$\frac{2k+1}{k+1}-$(나)$\left(\frac{2(k+1)}{k+2}\right)$

$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

이므로 $\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k+1}\right)>\frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

$\therefore f(k)=\frac{1}{k+1}$, $g(k)=\frac{2k+2}{k+2}$

$\therefore p+4f(3)+3g(4)=2+4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{10}{6}=8$

45) 24

⇨

(ⅰ) $n=1$일 때

$a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$ 이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때

$a_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$

이라고 가정하면

$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+3}$

$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}\right)$

$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}\right)$

(ⅲ) $n=k+1$ 일 때

$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$

$=a_{k+1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+4}$

$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+4}$

$=\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}+a_k-\frac{1}{k+1}$

$>\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}+$(가)$\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}+1$

$=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}-\frac{2}{3(k+1)}+1$

$=\frac{2}{(나)(3(k+1)(3k+2)(3k+4))}+1>1$

이므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore f(k)=1-\frac{1}{k+1}$, $g(k)=3(k+1)(3k+2)(3k+4)$

$\therefore f(0)+g(0)=0+24=24$

46) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

⇨ (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)=(우변)=(가)$\left(\frac{1}{2}\right)$

따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ $\cdots$ ㉡

이므로 ㉡의 양변에 (나)$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$을 더하면

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k+$(나)$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k+$(나)$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

위 등식은 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore c=\dfrac{1}{2}$, $f(k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$

$\therefore cf(2)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4}$

47) 24

⇨ $n=k+1$에서 성립하는지 확인하기 위해 $2^{4n}+6^{n+1}$에 대입하면

$2^{4(k+1)}+6^{(k+1)+1}=\boxed{(가)\,2^4}\cdot 2^{4k}+\boxed{(나)\,6}\cdot 6^{k+1}$

$=5\left(6\cdot\dfrac{2^{4k}+6^{k+1}-2}{5}\right)+10\cdot 2^{4k}+12$

$=5\left(6m+\boxed{(다)\,2}\cdot 2^{4k}+2\right)+2$

따라서 $n=k+1$일 때 도 성립한다.
이상에서 (가)+(나)+(다)$=16+6+2=24$이다.

48) 37

⇨ (ⅱ) $n=m$일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)2^{k-1}=2^{m+1}-m-2$

$n=m+1$ 일 때

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}((가)(m+2)-k)2^{k-1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(m-k+2)2^{k-1}+\{(m+2)-(m+1)\}2^{m+1-1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(m-k+2)2^{k-1}+2^{m}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)2^{k-1}+\sum_{k=1}^{m}2^{k-1}+2^{m}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)2^{k-1}+\frac{2^{m}-1}{2-1}+2^{m}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)2^{k-1}+(나)\left(2^{m+1}-1\right)$

$=2^{m+1}-m-2+(나)\left(2^{m+1}-1\right)$

$=\cdots$ (이하 생략)

$\therefore f(m)=m+2$, $g(m)=2^{m+1}-1$

$\therefore f(4)+g(4)=6+31=37$

49) 10

⇨ $f(k)=3^{k+1}+4^{2k-1}$

$f(k+1)=3^{k+2}+4^{2k+1}=3\cdot 3^{k+1}+16\cdot 4^{2k-1}$

$=3(3^{k+1}+4^{2k-1})+13\cdot 4^{2k-1}$

$\therefore$ (나)$-$(가)$=13-3=10$

50) $\dfrac{11}{8}$

⇨ (가) $f(k)=\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$ (나) $g(k)=\dfrac{k+3}{2^{k+1}}$

$\therefore f(2)+g(1)=\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^2}=\dfrac{11}{8}$

51) 88

⇨ (가) $3(m+1)^2-3(m+1)+1=3m^2+3m+1$

$\therefore f(m)=3m^2+3m+1$

(나) $m^3+3m^2+3m+1=(m+1)^3$

$\therefore g(m)=(m+1)^3$

$\therefore f(4)+g(2)=61+27=88$

52) 70

⇨ $n=k\ (k\geq 3)$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>3k-2$

양변에 (가)(2)를 곱하면 $2^{k+1}>6k-4$

$3n-2$에 $n=k+1$을 대입하면 $3k+1$이다.

이때 $(6k-4)-$(나)$(3k+1)=3k-5>0$이므로

$6k-4>$(나)$(3k+1)$

$2^{k+1}>6k-4>$(나)$(3k+1)=3$(다)$(k+1)-2$

즉, $2^{k+1}>3$(다)$(k+1)-2$ 이다.

따라서 부등식 ㉠은 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

$\therefore a=2,\ f(k)=3k+1,\ g(k)=k+1$

$\therefore af(2)g(4)=2\times 7\times 5=70$

53) 22

⇨ (ⅱ) $n=k$ 일 때, a_k가 3의 배수라고 가정하면

$a_k=k^3+3k^2+2k=3m$ (m은 자연수)

$n=k+1$일 때,

$a_{k+1}=$(가)$(k+1)^3+3$(가)$(k+1)^2+2$(가)$(k+1)$

$=k^3+3k^2+3k+1+3k^2+6k+3+2k+2$

$=(k^3+3k^2+2k)+3k^2+9k+6$

$=3m+3$(나)(k^2+3k+2)

$=3(m+$(나)$(k^2+3k+2))$

따라서 $n=k+1$일 때에도 a_n은 3의 배수이다.

$\therefore f(k)=k+1,\ g(k)=k^2+3k+2$

$\therefore f(9)+g(2)=(9+1)+(2^2+3\cdot 2+2)=22$

54) 2

⇨ $p=2,\ f(k)=\dfrac{1}{k+1},\ g(k)=\dfrac{2(k+1)}{k+2}$

$\therefore f(p-1)+g(p)=f(1)+g(2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{4}=2$

55) 78

⇨ (가) $f(a)=5a+1$ (나) $g(a)=6a+1$

$\therefore f(1)\times g(2)=6\times 13=78$

56) $\dfrac{11}{4}$

⇨ 가: $f(k)=\dfrac{3}{(k+1)(k+2)}$

나: $g(k)=\dfrac{3k}{k+1}+\dfrac{3}{(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{3k(k+2)+3}{(k+1)(k+2)}=\frac{3(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{3(k+1)}{k+2}$$

$$\therefore f(2)+g(4)=\frac{11}{4}$$

57) 253

⇨ $n=k+1$일 때,

$4^{2k+1}+1=16\times4^{2k-1}+1=16(4^{2k-1}+1)-15$

$=16\times5m-15=5(16m-3)$

따라서 $a=1$, $b=16$ $f(m)=16m-3$이므로

$f\left(\frac{b}{a}\right)=f(16)=16\times16-3=253$

58) 89

⇨ $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$2^{k+1}>\boxed{k(k+1)}+1$

$n=k+1$에 성립하는지 확인하기 위해

양변에 $\boxed{2}$를 곱하면

$2^{k+2}>2(k^2+k+1)$

$2(k^2+k+1)-\boxed{(k^2+3k+3)}=k^2-k-1>0$이므로

$2^{k+2}>\boxed{(k+1)(k+2)+1}$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 성립한다.

이상에서 $f(k)=k(k+1)$, $a=2$, $g(k)=k^2+3k+3$, $h(k)=k+1$이므로 $af(3)+g(2)h(4)=24+65=89$이다.

59) 12

⇨ (ⅰ) $n=k+1$일 때 성립하는지 확인하기 위해

㉠의 양변에 $\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$을 더하여야 하므로 (가)는

$\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$이다.

(ⅱ) $2-\frac{2k+4}{2^{k+1}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\boxed{\frac{k+3}{2^{k+1}}}$이므로 (나)는

$\boxed{\frac{k+3}{2^{k+1}}}$이다.

(ⅲ) 앞의 (ⅱ)에서 $2-\frac{k+3}{2^{k+1}}=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$이므로

$n=\boxed{k+1}$일 때 성립한다. 따라서 (다)는 $\boxed{k+1}$이다.

즉 $f(k)=\frac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k)=\frac{k+3}{2^{k+1}}$, $h(k)=k+1$이므로

$$\frac{f(2)h(6)}{g(4)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot7}{\frac{7}{32}}=12\text{이다.}$$

60) 132

⇨ $n=\boxed{2}$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이때, $\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $n=\boxed{2}$일 때 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$n=k+1$ 일 때,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+(\text{나})\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)<2-\frac{1}{k}+\boxed{\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)} \quad \cdots ㉡$$

이때 $k\ge2$이므로

$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}-(\text{다})\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$

$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$

$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$

$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

$\therefore 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1} \quad \cdots ㉢$

㉡, ㉢에서

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

$\therefore \alpha=2$, $f(k)=\frac{1}{(k+1)^2}$, $g(k)=2-\frac{1}{k+1}$

$\therefore \alpha\times\frac{1}{f(5)}\times g(5)=2\times6^2\times\left(2-\frac{1}{6}\right)=132$