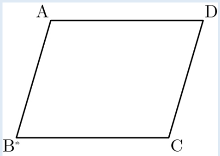
5-1-2.평행사변형이 되는 조건_비상(김원경)

개념check

[평행사변형이 되는 조건]

사각형 ABCD가 어느 한 조건을 만족하면 그 사각형은 평행사변형이 된다.



(1) 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.	⇨ $\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$
(2) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.	⇨ $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{DC}$
(3) 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.	⇨ $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$
(4) 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.	⇨ $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$
(5) 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.	⇨ $\overline{AD}//\overline{BC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$

[평행사변형의 넓이]

평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라 할 때,

(1) 평행사변형의 넓이는 한 대각선에 의해 이등분된다.

⇨ 대각선 AC에 의해 $\triangle ABC=\triangle CDA=\frac{1}{2}\square ABCD$

⇨ 대각선 BD에 의해 $\triangle BCD=\triangle DAB=\frac{1}{2}\square ABCD$

(2) 평행사변형의 넓이는 두 대각선에 의해 사등분된다.

⇨ $\triangle ABO=\triangle BCO=\triangle CDO=\triangle DAO=\frac{1}{4}\square ABCD$

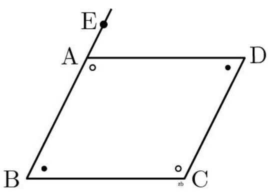
(3) 평행사변형 ABCD의 내부의 임의의 한 점 P에 대하여

⇨ $\triangle PAB+\triangle PCD=\triangle PDA+\triangle PBC=\frac{1}{2}\square ABCD$

기본문제

[예제]

1. 다음은 $\square ABCD$에서 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$이면 $\square ABCD$는 평행사변형임을 설명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 것을 순서대로 바르게 나열한 것은? (단, 점 E는 $\overline{BA}$의 연장선 위에 있다.)



사각형에서 내각의 크기의 합은 360°이므로
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$
그런데 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$이므로
$\angle A+\angle B=180^\circ$
한편 $\angle DAB+\angle EAD=180^\circ$이다.
따라서 $\angle B=$ (가) 이므로
평행선과 동위각의 성질에 의하여 (나)
또 $\angle B=\angle D$이므로 $\angle EAD=$ (다)
즉, 평행선과 엇각의 성질에 의하여 $\overline{AB}//\overline{DC}$
따라서 $\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$이므로
$\square ABCD$는 평행사변형이다.

① (가): $\angle EAD$ (나): $\overline{AD}=\overline{BC}$ (다): $\angle D$

② (가): $\angle EAD$ (나): $\overline{AD}//\overline{BC}$ (다): $\angle C$

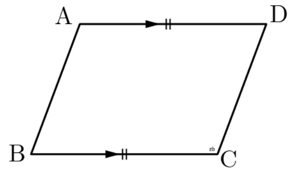
③ (가): $\angle EAD$ (나): $\overline{AD}//\overline{BC}$ (다): $\angle D$

④ (가): $\angle ADC$ (나): $\overline{AD}=\overline{BC}$ (다): $\angle C$

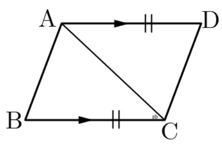
⑤ (가): $\angle ADC$ (나): $\overline{AD}//\overline{BC}$ (다): $\angle C$

[문제]

2. 다음은 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같은 $\square ABCD$는 평행사변형임을 증명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?



다음 그림과 같이 대각선 AC를 그으면



$\triangle ABC$와 $\triangle CDA$에서
$\angle BCA=$ (가) (엇각) ⋯ ㉠
$\overline{BC}=$ (나) ⋯ ㉡
(다) 는 공통인 변 ⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의해 두 대응변의 길이가 각각 같고,
그 끼인 각의 크기가 같으므로 $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$이다.
따라서 $\angle BAC=$ (라), 즉 엇각의 크기가 같으므로
(마) 이다.
그러므로 $\square ABCD$는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로
평행사변형이다.

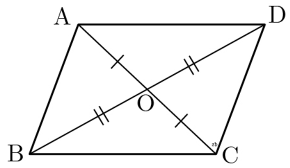
① (가): $\angle DAC$ ② (나): $\overline{DA}$

③ (다): $\overline{AC}$　　　④ (라): $\angle DCA$

⑤ (마): $\overline{AB}=\overline{CD}$

[문제]

3. **다음은 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라고 할 때, $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$이면 □ABCD는 평행사변형임을 증명하는 과정이다. 빈 칸에 들어갈 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?**



△OAD와 (가) 에서

$\overline{OA}=\overline{OC}$ ⋯ ㉠

$\overline{OD}=\overline{OB}$ ⋯ ㉡

$\angle AOD=\angle COB$(맞꼭지각) ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해 두 대응변의 길이가 각각 같고,

그 끼인 각의 크기가 같으므로 △OAD ≡ (가) 이다.

따라서 $\angle OAD=\angle OCB$, 즉 엇각의 크기가 같으므로

(나) 이다 ⋯ ㉣

같은 방법으로 △OAB와 △OCD에서

$\angle OAB=\angle OCD$, 즉 엇각의 크기가 같으므로

(다) 이다 ⋯ ㉤

따라서 ㉣, ㉤에 의해 □ABCD는 평행사변형이다.

① (가): △OAB　(나): $\overline{AB}//\overline{DC}$　(다): $\overline{AD}=\overline{BC}$

② (가): △OAB　(나): $\overline{AB}//\overline{DC}$　(다): $\overline{AD}//\overline{BC}$

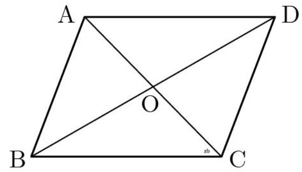
③ (가): △OCB　(나): $\overline{AD}//\overline{BC}$　(다): $\overline{AB}//\overline{DC}$

④ (가): △OCB　(나): $\overline{AD}//\overline{BC}$　(다): $\overline{AD}=\overline{BC}$

⑤ (가): △OCB　(나): $\overline{AD}=\overline{BC}$　(다): $\overline{AB}//\overline{DC}$

[문제]

4. **다음 <보기> 중에서 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 하는 조건은 모두 몇 개인가? (단, 점 O는 두 대각선의 교점이다.)**



<보기>

ㄱ. $\overline{AD}=\overline{BC}=6\text{cm}$, $\overline{AB}=\overline{CD}=3\text{cm}$

ㄴ. $\overline{AD}//\overline{BC}$, $\angle BAC=\angle DCA$

ㄷ. $\overline{OA}=\overline{OB}=3\text{cm}$, $\overline{OC}=\overline{OD}=4\text{cm}$

ㄹ. $\overline{AB}=\overline{CD}=9\text{cm}$, $\angle DAC=\angle BCA$

ㅁ. $\angle A=\angle C=60^\circ$, $\angle D=120^\circ$

① 1개　　② 2개

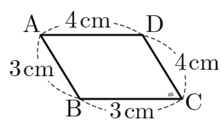
③ 3개　　④ 4개

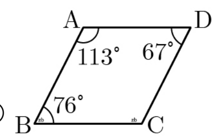
⑤ 5개

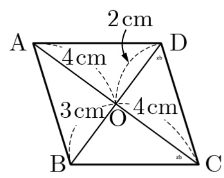
평가문제

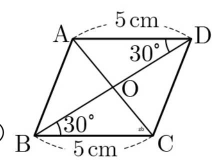
[중단원 학습 점검]

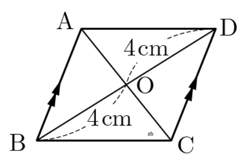
5. **다음에서 □ABCD가 평행사변형인 것을 고르면? (정답 2개)**

① 

② 

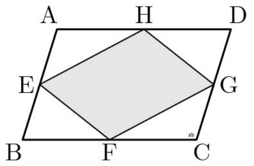
③ 

④ 

⑤ 

[중단원 학습 점검]

6. **다음은 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 중점을 각각 E, F, G, H라고 할 때, □EFGH는 평행사변형임을 설명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?**



△AEH와 △CGF에서
$\overline{AE}=\overline{CG}$, ∠HAE = ∠FCG, $\overline{AH}=\overline{CF}$이므로
△AEH ≡ △CGF ((가) 합동)
△EBF와 △GDH에서
$\overline{EB}=\overline{GD}$, ∠EBF = ∠GDH, $\overline{BF}=\overline{DH}$이므로
△EBF ≡ △GDH ((나) 합동)
△AEH ≡ △CGF이므로 (다) = $\overline{GF}$
△EBF ≡ △GDH이므로 $\overline{EF}$= (라)
따라서 (마)
□EFGH는 평행사변형이다.

① (가): SAS ② (나): AA

③ (다): $\overline{EH}$ ④ (라): $\overline{GH}$

⑤ (마): 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로

[단원 마무리]

7. **다음 <보기> 중에서 □ABCD가 평행사변형이 되는 것을 모두 고르면?**

<보기>
ㄱ. ∠A = ∠B = 60°, ∠C = ∠D = 180°
ㄴ. $\overline{AB}=\overline{CD}$=6cm, $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$
ㄷ. $\overline{AD}=\overline{BC}$=4 cm, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
ㄹ. $\overline{AD}=\overline{BC}$=6 cm, $\overline{AB}=\overline{CD}$=9cm

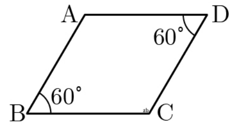
① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ

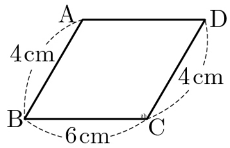
③ ㄱ, ㄹ ④ ㄴ, ㄷ

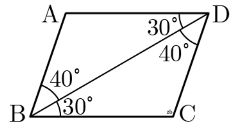
⑤ ㄴ, ㄹ

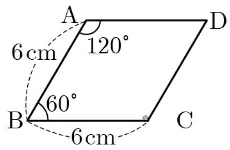
유사문제

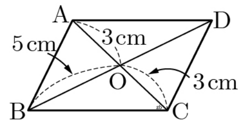
8. **다음 중 □$ABCD$가 평행사변형인 것은?**

①


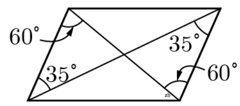
②


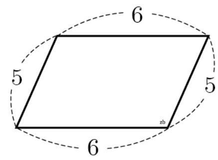
③


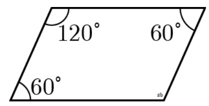
④


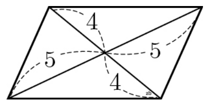
⑤


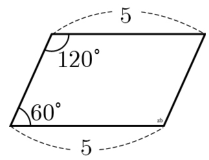
9. **다음 사각형 중 평행사변형이 아닌 것은?**

①


②


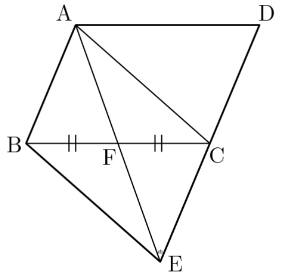
③


④


⑤


I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224255

10. **평행사변형 $ABCD$에서 $\overline{BC}$의 중점을 F, $\overline{AF}$와 $\overline{DC}$의 연장선의 교점을 E라 하면 $\square ABEC$는 평행사변형이 됨을 설명하는 과정이다. <보기>의 (가)~(마) 중 잘못된 것은?**



<보기>

$\triangle ABF$와 $\triangle ECF$에서

$\boxed{\text{(가)}}$, $\boxed{\text{(나)}}$, $\boxed{\text{(다)}}$

$\therefore$ $\triangle ABF \equiv \triangle ECF$ $\boxed{\text{(라)}}$

따라서 $\overline{AB} // \overline{CE}$, $\boxed{\text{(마)}}$ 이므로

$\square ABEC$는 평행사변형이다.

① (가) - $\overline{BF} = \overline{CF}$

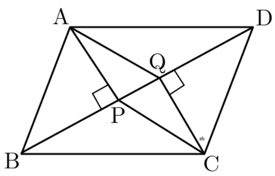
② (나) - $\angle AFB = \angle EFC$ (맞꼭지각)

③ (다) - $\angle ABF = \angle ECF$ (엇각)

④ (라) - ASA합동

⑤ (마) - $\overline{AC} = \overline{BE}$

11. **아래는 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 꼭짓점 A, C에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, □APCQ가 평행사변형인 이유를 설명한 것이다. ㉠~㉤에 들어갈 알맞은 내용을 짝지은 것으로 옳지 않은 것은?**



두 직각삼각형 ABP와 CDQ에서

$\overline{AB} =$ $\boxed{㉠}$, $\angle ABP =$ $\boxed{㉡}$

이다. 이때 $\boxed{㉢}$ 하므로

$\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$이다.

그러므로 $\overline{AP} = \overline{CQ}$이다. ……①

또 $\angle APQ = \angle CQP = 90°$ (엇각)이므로

$\overline{AP}$ $\boxed{㉣}$ $\overline{CQ}$이다. ……②

따라서 ①, ②에서 □APCQ는 $\boxed{㉤}$ 하므로 평행사변형이다.

① ㉠ : $\overline{CD}$

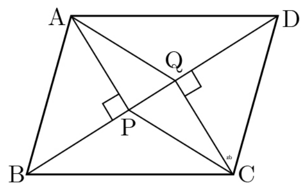
② ㉡ : $\angle CDQ$

③ ㉢ : ‘두 직각삼각형의 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같다.’가 성립

④ ㉣ : //

⑤ ㉤ : ‘한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.’가 성립

12. **다음 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 꼭짓점 A, C에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, □APCQ가 평행사변형인 이유를 설명한 것이다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 내용으로 옳은 것은?**



두 직각삼각형 ABP와 CDQ에서

$\overline{AB} =$ $\boxed{①}$ (대변)

$\angle ABP =$ $\boxed{②}$ (엇각)

이다. 이때 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로

$\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$이다.

그러므로 $\overline{AP} =$ $\boxed{③}$ 이다. …㉠

또 $\angle APQ =$ $\boxed{④}$ $= 90°$ (엇각)이므로

$\overline{AP} // \overline{CQ}$이다. …㉡

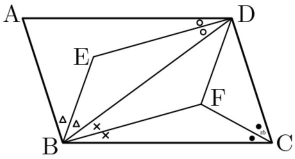
따라서 ㉠, ㉡에서 □APCQ는 $\boxed{⑤}$ 하고 그 길이가 같으므로 평행하다.

① $\overline{EC}$
② $\angle DCQ$
③ $\overline{CQ}$
④ $\angle AQD$
⑤ 두 쌍의 대변이 평행

13. **다음 그림의 평행사변형 $ABCD$에서 $\angle ABD$의**

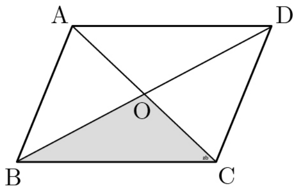
I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224255

이등분선과 $\angle ADB$의 이등분선의 교점을 E, $\angle C$의 이등분선과 $\angle CBD$의 이등분선의 교점을 F라 할 때, $\square EBFD$는 어떤 사각형인가?



① 등변사다리꼴
② 직사각형
③ 평행사변형
④ 마름모
⑤ 정사각형

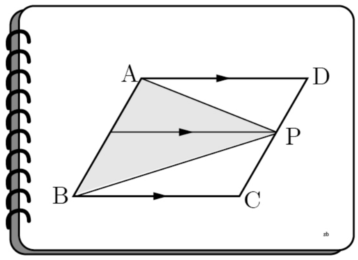
14. 다음 그림과 같은 평행사변형 $ABCD$의 넓이가 $40\,\text{cm}^2$일 때, $\triangle OBC$의 넓이를 구하면? (단, 점 O는 두 대각선의 교점이다.)



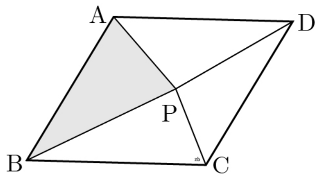
① $6\,\text{cm}^2$
② $7\,\text{cm}^2$
③ $8\,\text{cm}^2$
④ $9\,\text{cm}^2$
⑤ $10\,\text{cm}^2$

15. $\boxed{}$ 안의 글을 참고하여 물음에 답하시오.

색칠한 부분의 넓이는
평행사변형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이야.



평행사변형 $ABCD$의 넓이는 $90\,\text{cm}^2$, $\triangle CDP$의 넓이는 $18\,\text{cm}^2$일 때, $\triangle ABP$의 넓이는?



① $18\,\text{cm}^2$
② $24\,\text{cm}^2$
③ $27\,\text{cm}^2$
④ $36\,\text{cm}^2$
⑤ $45\,\text{cm}^2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224255

정답 및 해설

1) [정답] ③
[해설] (가): $\angle \mathrm{EAD}$
(나): $\overline{\mathrm{AD}}//\overline{\mathrm{BC}}$
(다): $\angle \mathrm{D}$

2) [정답] ⑤
[해설] (마): $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{CD}}$

3) [정답] ③
[해설] $\triangle \mathrm{OAD} \equiv \triangle \mathrm{OCB}$이므로 (가): $\triangle \mathrm{OCB}$
$\angle \mathrm{OAD} = \angle \mathrm{OCB}$ (엇각)이므로 (나): $\overline{\mathrm{AD}}//\overline{\mathrm{BC}}$
$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{OCD}$ (엇각)이므로 (다): $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{DC}}$

4) [정답] ③
[해설] ㄱ. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
ㄴ. $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{DCA}$이면 $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{CD}}$이므로 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
ㅁ. 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
따라서 평행사변형이 되도록 하는 조건은 ㄱ, ㄴ, ㅁ으로 3개다.

5) [정답] ④, ⑤
[해설] ④ $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AD}}//\overline{\mathrm{BC}}$이므로 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 평행사변형이다.
⑤ 대각선인 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$가 서로를 이등분하므로 평행사변형이다.

6) [정답] ②
[해설] (나): SAS

7) [정답] ⑤
[해설] ㄴ. 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.
ㄹ. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

8) [정답] ③
[해설] ③$\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$

9) [정답] ①
[해설] ① 한 쌍의 대변이 평행하므로 평행사변형이 아니다.
② 두 쌍의 대변의 길이가 같으므로 평행사변형이다.
③ 두 쌍의 대각의 크기가 같으므로 평행사변형이다.
④ 두 대각선이 서로 이등분하므로 평행사변형이다.
⑤ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 평행사변형이다.

10) [정답] ⑤
[해설] (라) 두 삼각형의 한 쌍의 대변의 길이가 같고 대응하는 양 끝 각의 크기가 같으므로 두 삼각형은 ASA합동이며
대응변의 길이가 같으므로 (마) $\overline{AB}=\overline{CE}$

11) [정답] ③
[해설] ㉢'두 직각삼각형의 빗변의 길이와 다른 한 예각의 크기가 각각 같다.'가 성립

12) [정답] ③
[해설] ① $\overline{CD}$
② $\angle CDQ$
④ $\angle CQP$
⑤ 한 쌍의 대변이 평행

13) [정답] ③
[해설] $\angle ABD = \angle BDC$(엇각), 점 F는 $\triangle BCD$의 내심이므로 $\angle BDC = 2\angle BDF$
또, $\angle ABD = 2\angle EBD$이므로 $\angle BDF = \angle EBD$이다. 따라서 $\overline{EB}//\overline{DF}$이다.
$\angle ADB = \angle DBC$(엇각), $\angle DBC = 2\angle DBF$,
$\angle ADB = 2\angle EDB$이므로 $\angle DBF = \angle EDB$이다.
따라서 $\overline{ED}//\overline{BF}$이다.
그러므로 $\square EBFD$는 평행사변형이다.

14) [정답] ⑤
[해설] $\triangle OBC = \frac{1}{4}\square ABCD = \frac{1}{4}\times 40 = 10(cm^2)$

15) [정답] ③
[해설] $\triangle ABP + \triangle CDP = \frac{1}{2}\square ABCD$이므로
$\triangle ABP + 18 = \frac{1}{2}\times 90$
$\therefore \triangle ABP = 45 - 18 = 27(cm^2)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224255