



◇「콘텐츠산업 진흥법 시행령」제33조에 의한 표시
 1) 제작연월일 : 2019-03-11
 2) 제작자 : 교육지대(주)
 3) 이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.

◇「콘텐츠산업 진흥법」외에도「저작권법」에 의하여 보호되는 콘텐츠의 경우, 그 콘텐츠의 전부 또는 일부를 무단으로 복제하거나 전송하는 것은 콘텐츠산업 진흥법 외에도 저작권법에 의한 법적 책임을 질 수 있습니다.

01 미분계수를 이용한 극한값의 계산

다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \quad (c \text{는 상수}) \Leftrightarrow f'(a) = c$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = c \quad (c \text{는 상수})$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

$$\Leftrightarrow f'(a) = c$$

■ 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 값을 구하여라.

1. 함수 $f(x) = x^3 + 9x + 2$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{의 값}$$

2. 함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ 의 값

3. 함수 $f(x) = x^2 + 5$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값

4. 함수 $f(x) = x^2 + 4x$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{2h} \text{의 값}$$

5. 함수 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} \text{의 값}$$

6. 함수 $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} \text{의 값}$$

7. 함수 $f(x) = x^3 - x$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h} \text{의 값}$$

8. 함수 $f(x) = 2x^2 + ax$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6 \text{일 때, 상수 } a \text{의 값}$$

9. 함수 $f(x) = 2x^2 + ax$ 에 대하여

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = 3 \text{일 때, 상수 } a \text{의 값}$$

10. 함수 $f(x) = 2x^3 + ax + b$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 12}{x - 1} = 9 \text{일 때, 두 상수 } a, b \text{의 값}$$

11. 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 8 \text{일 때, 상수 } a \text{의 값}$$

12. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 2$ 일 때,
 $f'(2) + f(2)$ 의 값

13. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ 일 때,
 $f(-1) + f'(-1)$ 의 값

14. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = 3$ 일 때,
 $\frac{f'(1)}{f(1)}$ 의 값

15. 함수 $f(x)$ 가 $f(x+2) - f(2) = x^3 + 6x^2 + 14x$ 를
 만족시킬 때, $f'(2)$ 의 값

16. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{x^2-1} = 4$ 일 때, $f'(2) + f(2)$ 의 값

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-8}{x^2-4} = 5$ 일 때,
 $f(3) + f'(3)$ 의 값

18. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 2$ 일 때,
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ 의 값

19. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-2}{h} = 9$ 일 때,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-xf(1)}{x^2-1}$ 의 값

20. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = -1$ 일
 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}$ 의 값

▣ 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 다음을 만족할 때, 상수 a, b, c
 의 값을 구하여라.

21. $f(0) = 2, f'(1) = 5, f'(-1) = -7$

22. $f(0) = -2, f'(1) = 3, f'(-1) = -5$

23. $f(0) = 3, f'(1) = -2, f'(-1) = -6$

24. $f(0) = -1, f'(-1) = -1, f'(2) = 11$

25. $f(0) = 3, f'(1) = -1, f'(-1) = 3$

26. $f(0) = 5, f'(1) = 2, f'(-1) = 6$

27. $f(1) = -6, f'(2) = -11, f'(-3) = 19$

28. $f(2)=6, f'(0)=2, f'(1)=4$

29. $f(2)=13, f'(0)=1, f'(1)=5$

30. 이차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=1, f'(0)=-5, f'(1)=1$ 을 만족할 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

02 미분가능할 조건

다항함수 $g(x), h(x)$ 에 대하여 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$ 가

$x=a$ 에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} h(x) = g(a)$$

② $f'(x)=\begin{cases} g'(x) & (x \geq a) \\ h'(x) & (x < a) \end{cases}$ 이고, 함수 $f(x)$ 는

$x=a$ 에서 미분가능

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a-} h'(x)$$

31. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 2) \\ ax+b & (x < 2) \end{cases}$ 가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

32. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+2 & (x \geq 1) \\ 2x+b & (x < 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

33. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ ax+b & (x < 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

34. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & (x \leq 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

35. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \leq 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$ 가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

36. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & (x \leq 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

37. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+2 & (x \geq 2) \\ 2x+b & (x < 2) \end{cases}$ 가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

38. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x < 1) \\ bx^2+x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

39. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & (x \geq -1) \\ x^3+x^2+bx & (x < -1) \end{cases}$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

40. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x < 0) \\ a(x-1)^2+b & (x \geq 0) \end{cases}$ 가 모든 실수에 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

41. 함수 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & (x < 1) \\ x^3 + ax^2 + bx & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 모든 실수

에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

42. 함수 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & (x \geq 1) \\ -x^3 - 1 & (x < 1) \end{cases}$ 가 모든 실수에

서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

43. 함수 $f(x) = \begin{cases} ax^3 - x & (x \geq 2) \\ 4x^2 + bx & (x < 2) \end{cases}$ 가 모든 실수에서

미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

44. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx & (x \geq 1) \\ 2x^2 + 1 & (x < 1) \end{cases}$ 가 모든 실수

에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

45. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + b & (x < a) \\ 2x & (x \geq a) \end{cases}$ 가 모든 실수에서

미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 값을 구하여라.

03 미분의 항등식에의 활용

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 사이의 관계식이 주어진 경우

① $f(x)$ 와 $f'(x)$ 사이의 관계식을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 차수를 구한다.

② ①에서 구한 차수에 맞도록 함수 $f(x)$ 를 임의로 놓는다.

③ $f'(x)$ 를 구하여 주어진 관계식에 대입한다.

■ 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x)$ 가 등식 $f'(x)\{f'(x)+1\}=6f(x)+4x^2-4$ 를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

46. $f(x)$ 의 차수를 구하여라.

47. $f(x)$ 를 구하여라.

■ 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x)$ 가 등식 $f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2-5$ 를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

48. $f(x)$ 의 차수를 구하여라.

49. $f(x)$ 를 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

50. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $(2x+1)f(x)-x^2f'(x)-1=0$ 을 만족하는 이차함수 $f(x)$ 를 구하여라.

51. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $(2x+1)f'(x) - 4f(x) + 3 = 0$ 을 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하여라.

52. 함수 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이다. 모든 실수 x 에 대하여 $(x+1)f'(x) - 2f(x) - 4 = 0$ 을 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하여라.

53. 이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $x^2f'(x) - xf(x) = x^3$ 을 만족시킨다. $f'(2) = 6$ 일 때, $f(x)$ 를 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

54. 다항함수 $f(x)$ 가 $f(x)f'(x) = 4x+6$ 을 만족시킬 때, $f(1)f(2)$ 의 값을 구하여라.

55. 다항함수 $f(x)$ 가 $f(x)f'(x) = 9x+12$ 를 만족할 때, $f(1)f(2)$ 의 값을 구하여라.

56. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 $f(x)f'(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ 을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

■ 다음 물음에 답하여라.

57. 함수 $f(x) = x^2 + x$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $xf'(x) + af(x) + x = 0$ 을 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

58. 함수 $f(x) = x^3 + x$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $af(x) = x\{f'(x) + b\}$ 를 만족시킬 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

59. 함수 $f(x) = x^3 + ax + b$ 에 대하여 등식 $3f(x) = x\{f'(x) + 2\}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b 의 값을 구하여라.

60. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) - f(x) = f'(x+k)$ 를 만족시킬 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

04 / 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용

- (1) 다항식 $f(x)$ 를 이차식 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 일차식 $ax+b$ 이다.
 (2) 다항식 $f(x)$ 가 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누어떨어지면
 $f(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)$ 에서 $f(\alpha) = 0$
 $f'(x) = 2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x)$ 에서 $f'(\alpha) = 0$

■ 다음 물음에 답하여라.

61. 다항식 $x^8 + x^5 - 2x^3 - 1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

62. 다항식 $x^{10} - x^5 + 1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

63. 다항식 $x^{10} - 3x + 1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하여라.

64. x^{10} 을 $x(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(-1)$ 의 값을 구하여라.

65. 다항식 $x^5 + ax^2 + bx + 8$ 이 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라.

66. 다항식 $ax^3 + x^2 + bx - 5$ 가 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라.

67. 다항식 $x^{20} + ax + 19$ 가 $(x+b)^2$ 으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라. (단, $b > 0$)

68. 다항식 $x^8 + ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3x+5$ 일 때, $b-a$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

69. 다항식 $x^{100} - 2x^3 + 4$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

70. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어질 때, $2f(2) + 3f'(2)$ 의 값을 구하여라.



정답 및 해설

1) 12

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때, $f(x) = x^3 + 9x + 2$ 이므로 $f'(x) = 3x^2 + 9$
 $\therefore f'(1) = 3 + 9 = 12$

2) 4

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$ 에서 $f(1) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때, $f(x) = x^2 + 2x$ 이므로 $f'(x) = 2x + 2$
 $\therefore f'(1) = 2 + 2 = 4$

3) 2

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

이때, $f(x) = x^2 + 5$ 이므로 $f'(x) = 2x$ $\therefore f'(1) = 2$

4) 3

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f'(1)$$

이때, $f(x) = x^2 + 4x$ 에서 $f'(x) = 2x + 4$ 이므로
 $f'(1) = 2 + 4 = 6$

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

5) 2

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \cdot (-2) = -2f'(1)$$

이때 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 에서 $f'(x) = 2x - 3$ 이므로
 $f'(1) = -1$

따라서 구하는 값은 $-2f'(1) = -2 \times (-1) = 2$

6) 24

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \cdot 2 = 2f'(1)$$

이때, $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ 에서 $f'(x) = 4x^3 + 8x$ 이므로
 $f'(1) = 4 + 8 = 12$

따라서 구하는 값은 $2f'(1) = 2 \cdot 12 = 24$

7) 3

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} f'(1)$$

이때, $f(x) = x^3 - x$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 1$ 이므로
 $f'(1) = 3 - 1 = 2$

따라서 구하는 값은 $\frac{3}{2} f'(1) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$

8) 2

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \text{이므로 } f'(1) = 6$$

이때, $f(x) = 2x^2 + ax$ 에서 $f'(x) = 4x + a$ 이므로
 $f'(1) = 4 + a = 6 \therefore a = 2$

9) -2

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{2\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{3\Delta x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} f'(1)$$

즉 $\frac{3}{2} f'(1) = 3$ 이므로 $f'(1) = 2$

이때 $f'(x) = 4x + a$ 이므로

$$4 + a = 2 \therefore a = -2$$

10) $a = 3, b = 7$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 12}{x - 1} = 9 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 12\} = 0$ 이므로 $f(1) = 12$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 12}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 9$$

$f(x) = 2x^3 + ax + b$ 에서 $f'(x) = 6x^2 + a$

$f(1) = 12$ 에서 $2 + a + b = 12$

$f'(1) = 9$ 에서 $6 + a = 9$

$$\therefore a = 3, b = 7$$

11) 5

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(a+h) - f(a)\} - \{f(a-h) - f(a)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \cdot (-1)$$

$$= f'(a) + f'(a) = 2f'(a)$$

이므로 $2f'(a) = 8 \therefore f'(a) = 4$

이때, $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 에서 $f'(x) = 2x - 6$ 이므로
 $f'(a) = 2a - 6 = 4$

$$\therefore a = 5$$

12) 3

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 1\} = 0$ 이므로 $f(2) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 2$$

$$\therefore f'(2) + f(2) = 2 + 1 = 3$$

13) 2

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = \frac{1}{2} \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-3\} = 0 \text{이므로 } f(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}f'(1)$$

$$\text{이므로 } -\frac{1}{2}f'(-1) = \frac{1}{2} \quad \therefore f'(-1) = -1$$

$$\therefore f(-1) + f'(-1) = 2$$

14) 3

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\} = 0 \text{이므로 } f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}f'(1)$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{2}f'(1) = 3 \quad \therefore f'(1) = 6$$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

15) 14

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$\text{이때, } f(x+2) - f(2) = x^3 + 6x^2 + 14x \text{에서}$$

$$f(2+h) - f(2) = h^3 + 6h^2 + 14h \text{이므로}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 14h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 14) = 14$$

16) 10

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{x^2-1} = 4 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x+1)-2\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 2$$

 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-f(2)}{t(t-2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-f(2)}{t-2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2}f'(2)$$

$$\text{즉 } \frac{1}{2}f'(2) = 4 \text{이므로 } f'(2) = 8$$

$$\therefore f'(2) + f(2) = 8 + 2 = 10$$

17) 28

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-8}{x^2-4} = 5 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x+1)-8\} = 0 \text{이므로 } f(3) = 8$$

 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때, $t \rightarrow 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-8}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-8}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t)-f(3)}{(t+1)(t-3)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t)-f(3)}{t-3} \cdot \frac{1}{t+1} = \frac{1}{4}f'(3)$$

$$\text{즉, } \frac{1}{4}f'(3) = 5 \quad \therefore f'(3) = 20$$

$$\therefore f(3) + f'(3) = 8 + 20 = 28$$

18) 4

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-1\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) \text{이므로}$$

$$f'(2) = 2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2+h)-f(2)\} - \{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \cdot (-1)$$

$$= f'(2) + f'(2) = 2f'(2)$$

$$= 2 \cdot 2 = 4$$

19) $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-2}{h} = 9 \text{에서 } h \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{h \rightarrow 0} \{f(1+3h)-2\} = 0 \text{이므로 } f(1) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \cdot 3 = 3f'(1)$$

$$\text{이므로 } 3f'(1) = 9 \quad \therefore f'(1) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-xf(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-xf(1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}f'(1) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}f'(1) - \frac{1}{2}f(1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

20) 14

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{2} f'(1) = -1 \therefore f'(1) = -2$$

$$\begin{aligned} &\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+5h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1-2h) - f(1)\} - \{f(1+5h) - f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \cdot (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} \cdot 5 \\ &= -2f'(1) - 5f'(1) = -7f'(1) = -7 \cdot (-2) = 14 \end{aligned}$$

21) $a=3, b=-1, c=2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{에서 } f'(x) = 2ax + b \\ &f(0) = 2 \text{이므로} \\ &c = 2 \\ &f'(1) = 5 \text{에서} \\ &2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ &f'(-1) = -7 \text{에서} \\ &-2a + b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ &\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 3, b = -1 \\ &\therefore a = 3, b = -1, c = 2 \end{aligned}$$

22) $a=2, b=-1, c=-2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{에서} \\ &f(0) = -2 \text{이므로 } c = -2 \\ &\text{이때, } f'(x) = 2ax + b \text{이므로} \\ &f'(1) = 3 \text{에서 } 2a + b = 3 \quad \dots \textcircled{1} \\ &f'(-1) = -5 \text{에서 } -2a + b = -5 \quad \dots \textcircled{2} \\ &\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 2, b = -1 \\ &\therefore a = 2, b = -1, c = -2 \end{aligned}$$

23) $a=1, b=-4, c=3$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{에서 } f(0) = 3 \text{이므로 } c = 3 \\ &f'(x) = 2ax + b \text{에서 } f'(1) = -2, f'(-1) = -6 \text{이므로} \\ &2a + b = -2, -2a + b = -6 \\ &\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = 1, b = -4 \\ &\therefore a = 1, b = -4, c = 3 \end{aligned}$$

24) $a=2, b=3, c=-1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{이므로} \\ &f(0) = -1 \text{에서 } c = -1 \\ &\text{이때, } f'(x) = 2ax + b \text{이므로} \\ &f'(-1) = -1 \text{에서 } -2a + b = -1 \quad \dots \textcircled{1} \\ &f'(2) = 11 \text{에서 } 4a + b = 11 \quad \dots \textcircled{2} \\ &\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 3 \\ &\therefore a = 2, b = 3, c = -1 \end{aligned}$$

25) $a=-1, b=1, c=3$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{이므로} \\ &f(0) = 3 \text{에서 } c = 3 \end{aligned}$$

이때, $f'(x) = 2ax + b$ 이므로

$$f'(1) = -1 \text{에서 } 2a + b = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(-1) = 3 \text{에서 } -2a + b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 1$

$$\therefore a = -1, b = 1, c = 3$$

26) $a=-1, b=4, c=5$

$$\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{이므로}$$

$$f(0) = 5 \text{에서 } c = 5$$

이때, $f'(x) = 2ax + b$ 이므로

$$f'(1) = 2 \text{에서 } 2a + b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(-1) = 6 \text{에서 } -2a + b = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$

$$\therefore a = -1, b = 4, c = 5$$

27) $a=-3, b=1, c=-4$

$$\Rightarrow f(1) = -6 \text{에서 } a + b + c = -6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = 2ax + b$ 이므로

$$f'(2) = -11 \text{에서 } 4a + b = -11 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f'(3) = 19 \text{에서 } -6a + b = 19 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $a = -3, b = 1$

이것을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $c = -4$

28) $a=1, b=2, c=-2$

$$\Rightarrow f(2) = 6 \text{이므로 } 4a + 2b + c = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = 2ax + b$ 에서

$$f'(0) = 2 \text{이므로 } b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(1) = 4 \text{이므로 } 2a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $a = 1, b = 2, c = -2$

29) $a=2, b=1, c=3$

$$\Rightarrow f(2) = 13 \text{이므로 } 4a + 2b + c = 13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = 2ax + b$ 에서

$$f'(0) = 1 \text{이므로 } b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(1) = 5 \text{이므로 } 2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $a = 2, b = 1, c = 3$

30) 3

$$\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \text{라고 하면 } f(0) = c = 1$$

$$f'(x) = 2ax + b \text{에서 } f'(0) = b = -5$$

$$f'(1) = 2a + b = 1 \text{이므로 } a = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \therefore f(2) = 3$$

31) $a=4, b=-4$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = f(2)$$

$$\therefore 2a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (4+h) = 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a(2+h)+b-(2a+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{ah}{h} = a$$

$$\therefore a = 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{O}, \textcircled{L} \text{에서 } a=4, b=-4$$

$$32) a=4, b=3$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$2+b = -1+a+2 \quad \therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{O}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \begin{cases} -2x+a & (x \geq 1) \\ 2 & (x < 1) \end{cases} \text{이고 함수 } f(x) \text{가}$$

$x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$$

$$-2+a=2 \quad \therefore a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{O} \text{에 대입하면 } b=3$$

$$33) a=2, b=-1$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (ax+b) = f(1)$$

$$\therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

또 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (2+h) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{ah}{h} = a \quad \therefore a=2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{O}, \textcircled{L} \text{에서 } a=2, b=-1$$

$$34) a=4, b=-2$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$2 = a+b \quad \dots\dots \textcircled{O}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & (x \leq 1) \\ a & (x > 1) \end{cases} \text{에서 함수 } f(x) \text{가 } x=1 \text{에서}$$

미분가능하므로

$$a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{O} \text{에 대입하면 } b=-2$$

$$35) a=4, b=-3$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$$

$$2a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{O}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \leq 2) \\ a & (x > 2) \end{cases} \text{이고 함수 } f(x) \text{가 } x=2$$

에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f'(x)$$

$$\therefore a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{O} \text{에 대입하면 } b=-3$$

$$36) a=1, b=0$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

$$a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{O}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \leq 1) \\ a & (x > 1) \end{cases} \text{이고 함수 } f(x) \text{가}$$

$x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$$

$$\therefore a=1$$

$$a=1 \text{을 } \textcircled{O} \text{에 대입하면 } b=0$$

$$37) a=6, b=6$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{이므로 } 4+b = -4+2a+2$$

$$\therefore 2a-b=6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\text{이때, } f'(x) = \begin{cases} -2x+a & (x > 2) \\ 2 & (x < 2) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f'(x)$$

$$\text{즉, } -4+a=2 \text{이므로 } a=6$$

$$a=6 \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } 12-b=6 \quad \therefore b=6$$

$$\therefore a=6, b=6$$

$$38) a=4, b=3$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉 } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{에서}$$

$$b+1+1=1+a \quad \therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{b(1+h)^2+(1+h)+1-b-1-1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{bh^2+(2b+1)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (bh+2b+1) = 2b+1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(1+h)^3+a(1+h)-1-a}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^3+3h^2+(3+a)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (h^2+3h+3+a) = 3+a$$

$$\text{에서 } 2b+1=3+a \quad \therefore a-2b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{O}, \textcircled{L} \text{을 연립하여 풀면 } a=4, b=3$$

$$39) a=2, b=-5$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$a+3=-1+1-b \quad \therefore a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & (x \geq -1) \\ 3x^2+2x+b & (x < -1) \end{cases} \text{에서}$$

함수 $f'(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로
 $-2a=3-2+b \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \dots \textcircled{C}$
 \textcircled{A} 과 \textcircled{C} 을 연립하여 풀면 $a=2, b=-5$

$$40) a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=f(0)$ 이므로 $1=a+b \quad \dots \textcircled{A}$

$$\text{이때, } f'(x)=\begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 2a(x-1) & (x > 0) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$$

$$\text{즉, } -2a=-1 \text{이므로 } a=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 1=\frac{1}{2}+b \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

$$41) a=-1, b=5$$

\Rightarrow (i) $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$3+2=1+a+b \quad \therefore a+b=4 \quad \dots \textcircled{A}$$

(ii) $f'(x)=\begin{cases} 6x & (x < 1) \\ 3x^2+2ax+b & (x \geq 1) \end{cases}$ 이고 $f(x)$ 는
 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$x=1 \text{일 때, } 6=3+2a+b \quad \therefore 2a+b=3 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=5$

$$42) a=-1, b=-1$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=f(1)$$

$$-2=a+b \quad \dots \textcircled{A}$$

이때 $f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & (x \geq 1) \\ -3x^2 & (x < 1) \end{cases}$ 이고 함수 $f(x)$ 는
 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$2a+b=-3 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-1$

$$43) a=1, b=-5$$

\Rightarrow (i) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

$$8a-2=16+2b, 8a-2b=18 \quad \therefore 4a-b=9 \quad \dots \textcircled{A}$$

(ii) $f'(x)=\begin{cases} 3ax^2-1 & (x \geq 2) \\ 8x+b & (x < 2) \end{cases}$ 이고 $f(x)$ 는 $x=2$

에서 미분가능하므로

$$12a-1=16+b \quad \therefore 12a-b=17 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-5$

$$44) a=-1, b=3$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=f(1)$$

$$3=a+b+1 \quad \therefore a+b=2 \quad \dots \textcircled{A}$$

이때 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax+b & (x \geq 1) \\ 4x & (x < 1) \end{cases}$ 이고 함수

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x)=\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$$

$$3+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=1 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

$$45) a=1, b=1$$

\Rightarrow 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)=f(a)$$

$$a^2+b=2a \quad \therefore b=-a^2+2a \quad \dots \textcircled{A}$$

이때 $f'(x)=\begin{cases} 2x & (x < a) \\ 2 & (x \geq a) \end{cases}$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $x=1$
 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)=\lim_{x \rightarrow a-} f'(x)$$

$$2a=2 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 \textcircled{A} 에 대입하면 $b=1$

$$46) 2\text{차}$$

$\Rightarrow f(x)$ 를 n 차 함수라고 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수이다.

이때, $n=1$ 이면 좌변은 상수함수이고 우변은 이차함수이므로 $n \geq 2$

따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$, 우변의 차수는 n 이므로 $2n-2=n \quad \therefore n=2$

$$47) f(x)=2x^2-2x+1$$

$\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 정수, $a \neq 0$)로 놓으면

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f'(x)\{f'(x)+1\}=6f(x)+4x^2-4 \text{에서}$$

$$(2ax+b)(2ax+b+1)=6(ax^2+bx+c)+4x^2-4$$

위의 식은 x 에 대한 항등식이므로 계수를 비교하면

$$4a^2=6a+4, 4ab+2a=6b, b^2+b=6c-4$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-2, c=1 \quad (\because a, b, c \text{는 정수})$$

$$\therefore f(x)=2x^2-2x+1$$

$$48) 2\text{차}$$

$\Rightarrow f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수이다. 이때, $n=1$ 이면 좌변은 상수함수이고 우변은 이차함수이므로 $n \geq 2$

따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$,

우변의 차수는 n 이므로 $2n-2=n$

$$\therefore n=2$$

따라서 다항함수 $f(x)$ 의 차수는 2이다.

$$49) f(x)=3x^2-3x+1$$

$\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 정수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2-5 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 (2ax+b)(2ax+b+2) &= 8(ax^2+bx+c)+12x^2-5 \\
 4a^2x^2+4(ab+a)x+b^2+2b \\
 &= 4(2a+3)x^2+8bx+8c-5 \\
 \text{위 식은 } x \text{에 대한 항등식이므로} \\
 a^2 &= 2a+3, \quad ab+a=2b, \quad b^2+2b=8c-5 \\
 \text{위 세 식을 연립하여 풀면} \\
 a=3, \quad b=-3, \quad c=1 \quad (\because a, b, c \text{는 정수}) \\
 \therefore f(x) &= 3x^2-3x+1
 \end{aligned}$$

$$50) f(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면 $f'(x) = 2ax + b$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x), f'(x) \text{를 주어진 등식에 대입하면} \\
 (2x+1)(ax^2+bx+c) - x^2(2ax+b) - 1 &= 0 \\
 \therefore (a+b)x^2 + (b+2c)x + c - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

이 등식이 임의의 실수 x 에 대하여 성립하므로
 $a+b=0, \quad b+2c=0, \quad c-1=0$
 이 식을 연립하여 풀면 $a=2, \quad b=-2, \quad c=1$
 $\therefore f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

$$51) f(x) = x^2 + x + 1$$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면
 $f'(x) = 2x + a$ 이므로 주어진 등식은
 $(2x+1)(2x+a) - 4(x^2+ax+b) + 3 = 0$
 $\therefore -2(a-1)x + (a-4b+3) = 0$
 이 식은 x 에 대한 항등식이므로
 $a-1=0, \quad a-4b+3=0$
 따라서 $a=1, \quad b=1$ 이므로 $f(x) = x^2 + x + 1$

$$52) f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면
 $f'(x) = 2x + a$ 이므로 주어진 등식은
 $(x+1)(2x+a) - 2(x^2+ax+b) - 4 = 0$
 $\therefore (2-a)x + a - 2b - 4 = 0$
 이 식은 x 에 대한 항등식이므로
 $2-a=0, \quad a-2b-4=0$
 따라서 $a=2, \quad b=-1$ 이므로
 $f(x) = x^2 + 2x - 1$

$$53) f(x) = x^2 + 2x$$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 라 하면
 $f'(x) = 2ax + b$ 이므로 주어진 등식은
 $x^2(2ax+b) - x(ax^2+bx+c) = x^3$
 $\therefore (a-1)x^3 - cx = 0$
 이 식은 x 에 대한 항등식이므로 $a-1=0, \quad c=0$
 $\therefore a=1, \quad c=0$
 한편, $f'(2)=6$ 에서 $4+b=6$ 이므로 $b=2$
 $\therefore f(x) = x^2 + 2x$

$$54) 35$$

$\Rightarrow f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수

이므로 $f(x)f'(x)$ 는 $n+(n-1)=2n-1$ 에서
 $(2n-1)$ 차 함수이다.

이때, $4x+6$ 은 일차식이므로 $2n-1=1$ 에서 $n=1$
 즉, $f(x)$ 는 일차함수이므로 $f(x) = ax+b (a \neq 0)$ 이라
 하면

$$f(x)f'(x) = (ax+b)a = a^2x+ab = 4x+6$$

계수비교법에 의하여 $a^2=4, \quad ab=6$

$$\therefore a=2, \quad b=3 \quad \text{또는} \quad a=-2, \quad b=-3$$

따라서 $f(x) = 2x+3$ 또는 $f(x) = -2x-3$ 이므로

$$f(1)f(2) = 35$$

$$55) 70$$

$\Rightarrow f(x)$ 를 n 차식이라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차식이므로
 좌변 $f(x)f'(x)$ 는 $n+(n-1)$ 차식이고, 우변
 $9x+12$ 는 1차식이므로

$$n+(n-1)=1 \quad \therefore n=1$$

즉, $f(x)$ 는 일차식이므로 $f(x) = ax+b (a \neq 0)$ 로 놓
 으면 $f(x)f'(x) = (ax+b)a = a^2x+ab = 9x+12$
 위의 식은 x 에 대한 항등식이므로 계수를 비교하면
 $a=3, \quad b=4$ 또는 $a=-3, \quad b=-4$

따라서 $f(x) = 3x+4$ 또는 $f(x) = -3x-4$ 이므로

$$f(1)f(2) = 70$$

$$56) 3$$

$\Rightarrow f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수
 이므로 $f(x)f'(x)$ 는 $n+(n-1)=2n-1$ 에서
 $(2n-1)$ 차 함수이다. 이때, $2x^3+3x^2-5x-3$ 은
 삼차식이므로

$$2n-1=3 \text{에서 } n=2$$

즉, $f(x)$ 는 이차함수이므로 $f(x) = x^2+ax+b$ 라 하면
 $f'(x) = 2x+a$ 이고 주어진 등식은

$$\begin{aligned}
 (x^2+ax+b)(2x+a) &= 2x^3+3x^2-5x-3 \text{에서} \\
 2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab &= 2x^3+3x^2-5x-3 \\
 \text{계수비교법에 의하여 } 3a=3, \quad a^2+2b &= -5, \quad ab=-3 \\
 \text{따라서 } a=1, \quad b=-3 \text{이므로 } f(x) &= x^2+x-3 \\
 \therefore f(2) &= 2^2+2-3=3
 \end{aligned}$$

$$57) -2$$

$\Rightarrow f(x) = x^2+x$ 에서 $f'(x) = 2x+1$ 이므로 주어진 등
 식은 $x(2x+1)+a(x^2+x)+x=0$
 $\therefore (a+2)x^2+(a+2)x=0$
 위의 식은 x 에 대한 항등식이므로 $a+2=0$
 $\therefore a=-2$

$$58) 5$$

$\Rightarrow f(x) = x^3+x$ 에서 $f'(x) = 3x^2+1$ 이므로 주어진
 등식은 $a(x^3+x) = x(3x^2+1+b)$

$$\therefore (a-3)x^3+(a-b-1)x=0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a-3=0, \quad a-b-1=0$$

따라서 $a=3, \quad b=2$ 이므로 $a+b=5$

59) $a=1, b=0$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a$ 이므로

$3f(x) = x\{f'(x) + 2\}$ 에서

$3(x^3 + ax + b) = x\{(3x^2 + a) + 2\}$

$3x^3 + 3ax + 3b = 3x^3 + (a+2)x$

$(2a-2)x + 3b = 0$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$2a-2=0, 3b=0 \quad \therefore a=1, b=0$

60) $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ 에서 $f'(x) = 2ax + b$ 이므로 주어진 등식은

$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2a(x+k) + b$

$2ax + a + b = 2ax + 2ak + b \quad \therefore a = 2ak$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$

61) $-9x-8$

$\Rightarrow x^8 + x^5 - 2x^3 - 1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$x^8 + x^5 - 2x^3 - 1 = (x+1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$-a+b=1 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$8x^7 + 5x^4 - 6x^2 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a \quad \dots\dots ㉢$

㉢의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=-9$

$a=-9$ 를 ㉡에 대입하면 $b=-8$

따라서 구하는 나머지는 $-9x-8$

62) $5x-4$

$\Rightarrow x^{10} - x^5 + 1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$x^{10} - x^5 + 1 = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$a+b=1 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$10x^9 - 5x^4 = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a \quad \dots\dots ㉢$

㉢의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $10-5=a \quad \therefore a=5$

$a=5$ 를 ㉡에 대입하면 $b=-4$

따라서 구하는 나머지는 $5x-4$

63) -1

$\Rightarrow x^{10} - 3x + 1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax + b$ 라고 하면

$x^{10} - 3x + 1 = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a+b=-1 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$10x^9 - 3 = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a \quad \dots\dots ㉢$

㉢의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a=7$

$a=7$ 을 ㉡에 대입하면 $b=-8$

따라서 $R(x) = 7x - 8$ 이므로 $R(1) = 7 - 8 = -1$

64) 17

$\Rightarrow x^{10}$ 을 $x(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$x^{10} = x(x-1)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=0$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$1 = a + b + c \quad \therefore a + b = 1 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$10x^9 = (x-1)^2 Q(x) + 2x(x-1)Q'(x) + x(x-1)^2 Q''(x) + 2ax + b \quad \dots\dots ㉢$

㉢의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $10 = 2a + b \quad \dots\dots ㉣$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=9, b=-8$

따라서 $R(x) = 9x^2 - 8x$ 이므로 $R(-1) = 9 + 8 = 17$

65) $a=-30, b=40$

$\Rightarrow x^5 + ax^2 + bx + 8$ 을 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$x^5 + ax^2 + bx + 8 = (x-2)^2 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$

로 놓고 $x=2$ 를 대입하면

$32 + 4a + 2b + 8 = 0 \quad \therefore 2a + b + 20 = 0 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$5x^4 + 2ax + b = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x)$

$x=2$ 를 대입하면

$80 + 4a + b = 0 \quad \dots\dots ㉢$

㉡, ㉢에서 $a=-30, b=40$

66) $a=3, b=-7$

$\Rightarrow ax^3 + x^2 + bx - 5$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$ax^3 + x^2 + bx - 5 = (x+1)^2 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $-a+1-b-5=0$

$\therefore a+b=-4 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$3ax^2 + 2x + b = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) \quad \dots\dots ㉢$

㉢의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$3a-2+b=0 \quad \therefore 3a+b=2 \quad \dots\dots ㉣$

㉡, ㉣에서 $a=3, b=-7$

67) $a=20, b=1$

$\Rightarrow x^{20} + ax + 19$ 를 $(x+b)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$x^{20} + ax + 19 = (x+b)^2 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=-b$ 를 대입하면

$b^{20} - ab + 19 = 0 \quad \dots\dots ㉡$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$20x^{19} + a = 2(x+b)Q(x) + (x+b)^2 Q'(x) \quad \dots\dots ㉢$

㉢의 양변에 $x=-b$ 를 대입하면

$-20b^{19} + a = 0 \quad \therefore a = 20b^{19} \quad \dots\dots ㉣$

이것을 ㉡에 대입하면 $b^{20} - 20b^{20} + 19 = 0, b^{20} = 1$

$$\therefore b=1 (\because b>0), a=20 (\because \textcircled{B})$$

68) 17

$\Rightarrow x^8+ax+b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$x^8+ax+b=(x-1)^2Q(x)+3x+5 \dots\dots\textcircled{A}$$

\textcircled{A} 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a+b=7 \dots\dots\textcircled{B}$

\textcircled{A} 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$8x^7+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+3$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a=-5$

$a=-5$ 를 \textcircled{B} 에 대입하면 $b=12$

$$\therefore b-a=12-(-5)=17$$

69) 185

$\Rightarrow x^{100}-2x^3+4$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$x^{100}-2x^3+4=(x-1)^2Q(x)+ax+b \dots\dots\textcircled{A}$$

\textcircled{A} 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3=a+b \dots\dots\textcircled{B}$$

\textcircled{A} 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$100x^{99}-6x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$94=a \dots\dots\textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서 $a=94, b=-91$

$$\therefore a-b=94-(-91)=185$$

70) 0

\Rightarrow 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $f(x)=(x-2)^2Q(x) \dots\dots\textcircled{A}$

\textcircled{A} 의 양변에 $x=2$ 을 대입하면 $f(2)=0$

\textcircled{A} 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x) \dots\dots\textcircled{B}$$

\textcircled{B} 의 양변에 $x=2$ 을 대입하면 $f'(2)=0$

$$\therefore 2f(2)+3f'(2)=0$$