	2022년 태성고 수학1 1학기 기말	DATE	
		NAME	
			GRADE

1. 첫째항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 2인 등비수열의 제 6항을 구하면? [5점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. $\sum_{k=1}^9 (2k+1)$ 의 값은? [5.1점]

① 97 ② 98 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

3. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 4$, $\sum_{k=1}^{20} b_k = 9$ 일 때, $\sum_{k=1}^{20} (5a_k + 3b_k + 1)$ 의 값은? [5.1점]

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

4. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{10} = 52$, $a_1 = 7$ 일 때, $\sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$ 의 값은?
[5.1점]

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

5. $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}}$ 의 값은? [5.2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $8a_2 = (a_6)^2$ 일 때, a_{10} 의 값은? [5.2점]

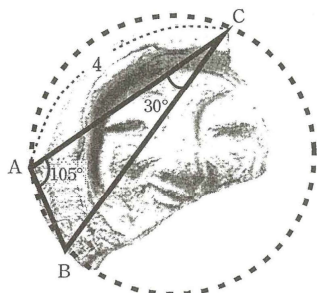
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

7. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_7 = 15$ 이고

$\sum_{k=5}^9 |3a_k - 45| = 45$ 이다. 이 때, a_{11} 의 값은? [5.3점]

- ① $\frac{35}{2}$ ② 20 ③ $\frac{45}{2}$ ④ 25 ⑤ $\frac{55}{2}$

8. 1934년 일제강점기시대에 경주에 살던 한 일본인이 읍내의 고물상에서 아주 귀중한 신라 시대의 유물 ‘얼굴무늬 수막새’ 기와를 발견했다. 하지만, 안타깝게도 얼굴의 일부가 사라져 버렸다. 이 수막새의 원형을 복원하기 위해 수막새의 테두리에 적당히 떨어진 세 점 A, B, C 를 찍은 뒤, 세 점을 이어 만든 삼각형의 바깥에 접하는 원을 이용하여 원래의 모양을 찾으려고 한다. $\overline{AC} = 4$, $\angle A = 105^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ 일 때, 이 원의 반지름을 구하면? [5.3점]



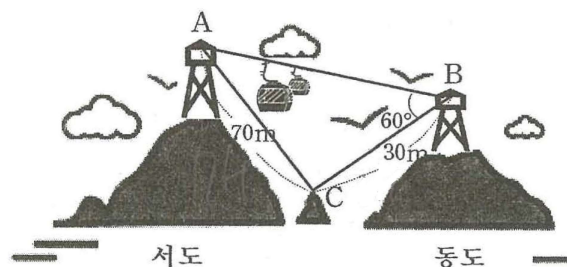
- ① 1 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

9. 부등식 $\sum_{k=1}^{10} k < \sum_{k=1}^n 2^{k-1} < \sum_{k=1}^{10} k^2$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은? [5.3점]

- ① 21 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 30

10. 독도의 서도와 동도를 연결하는 케이블카를 만들기 위해 아래 그림과 같이 거리와 각의 크기를 측정하였다.

$\overline{AC} = 70m$, $\overline{BC} = 30m$, $B = 60^\circ$ 일 때, 건설하려고 하는 케이블카의 케이블 \overline{AB} 의 길이는? [5.4점]



- ① 50m ② 60m ③ 70m ④ 80m ⑤ 90m

11. 어느 횃집 수족관에 물 400L가 들어있다. 생선의 신선도를 유지하기 위해 매일 수족관에 들어 있는 전날의 물의 $\frac{1}{4}$ 을 버리고 40L의 물을 새로 넣는다. n 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양을 a_n L라 할 때, a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하면? [5.4점]

- ① $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ ② $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 40$
 ③ $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 400$ ④ $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$
 ⑤ $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 40$

12. 공비가 양수이고 $a_1 = \frac{1}{4}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\frac{S_{10} - S_7}{a_8} = 7$ 일 때, a_6 의 값은? [5.5점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

13. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=7$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & (\sqrt{a_n} \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 2 & (\sqrt{a_n} \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{82} a_n$ 의 값은? [5.6점]

- ① 496 ② 487 ③ 480 ④ 475 ⑤ 472

14. 공차가 $\frac{1}{10}$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

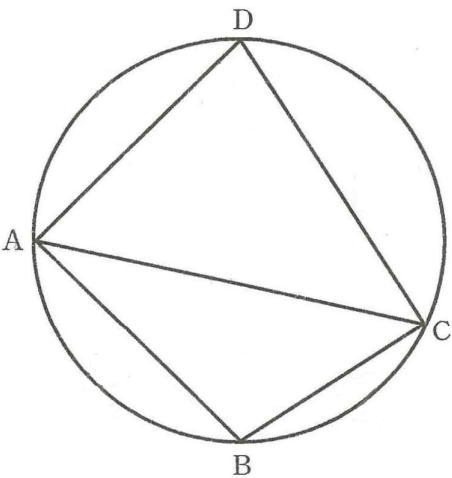
$$\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_1} = 10$$

일 때, a_{21} 의 값은? [5.7점]

- ① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{11}{5}$ ④ $\frac{13}{5}$ ⑤ 3

15. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에 대하여

$\overline{AB} = \overline{AD} = 4$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 5$ 이다. 두 삼각형 ABC , ACD 의 넓이의 합은? [5.8점]



- ① $3\sqrt{15}$ ② $4\sqrt{15}$ ③ $5\sqrt{15}$ ④ $6\sqrt{15}$ ⑤ $8\sqrt{15}$

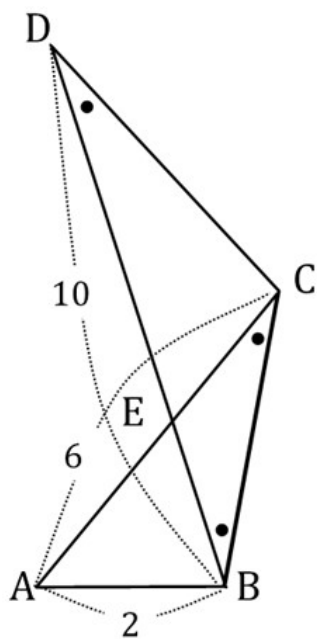
16. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2k-1} = n^2 + 2n$ 을

만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{a_k}$ 의 값을 구하시오. [6점]

17. 두 삼각형 ABC , BCD 가 아래 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BD} = 10$
 (나) $\angle BCA = \angle CDB = \angle DBC$ 이고 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 이다.

아래 그림과 같이 두 선분 AC , BD 가 점 E 에서 만날 때, 삼각형 BCE 의 외접원의 넓이를 구하시오. [7점]



18. 모든 자연수 n 에 대하여

$$2^n + 3^{3n-2}$$

이 5의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [7점]

1) ③

2) ④

3) ③

4) ⑤

5) ②

6) ⑤

7) ⑤

8) ②

9) ①

10) ④

11) ⑤

12) ④

13) ①

14) ②

15) ②

16) $\frac{30}{61}$

17) $\frac{1372}{75}\pi$

18)

18. 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^n + 3^{2n-1}$
이 5의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [7점]

$\frac{\sqrt{21}}{14}$

$5\sqrt{21}$

$n=1$, $2^1 + 3^1 = 5$ 성립

$n=k$, $2^k + 3^{2k-2}$ 가 5의 배수라고 하자

$2^k + 3^{2k-2} + 25 \cdot 3^{2k-2}$ 는 5의 배수.

$2^k + 3^{2k-2} + 25 \cdot 3^{2k-2} + 2^k - 2^k$ 는 5의 배수.

$\frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{2} + (2^k - 2) \cdot 3^{2k-2} + (2^k) \cdot 2^k$

$= 2^k + 2^k + 2^k \cdot 3^{2k-2} + 3^{2k-2} \cdot 2^k - 2^k \cdot 3^{2k-2} - 2^k$

$= 2^{k+1} + 3^{2k+1} - (2^k + 3^{2k-2})$

5의 배수 - 5의 배수 = 5의 배수이므로.

$2^{k+1} + 3^{2k+1}$ 는 5의 배수. 즉, $n=k+1$ 도 성립.

$\therefore 2^n + 3^{2n-2}$ 는 5의 배수이다.