1-2-2.연속함수의 성질_지학사(홍성복)

개념check

[연속함수의 성질]

• 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

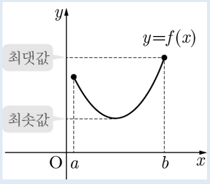
(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

[최대·최소 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

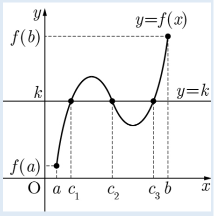


[사잇값의 정리]

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$f(c)=k$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



기본문제

[문제]

1. 함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$이 $x=a$에서 불연속일 때, 가능한 상수 a의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[문제]

2. 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{12}{x+2}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[문제]

3. 닫힌구간 $[2, 5]$에서 함수 $f(x)=x^2-8x+12$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 4

[예제]

4. 방정식 $x^3+2x+k=0$은 단 하나의 실근을 갖는다. 이 실근이 열린구간 $(0,\ 2)$에서 존재할 때, 가능한 정수 k의 개수는?

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

[문제]

5. 방정식 $x^4+4x-k=0$이 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가질 때, 가능한 정수 k의 개수는?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[문제]

6. 다음은 어느 도시의 하루 동안의 기온을 6시간 간격으로 측정하여 나타낸 표이다.

시각(시)	0	6	12	18	24
기온(℃)	15	13	24	21	16

기온을 측정한 날, 이 도시의 기온이 18 ℃인 시각은 적어도 몇 번 있었는가?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

평가문제

[중단원 학습 점검]

7. 닫힌구간 $[2,5]$에서 함수 $f(x)=\sqrt{6-x}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -3 ② -1
③ 1 ④ 3
⑤ 5

[중단원 학습 점검]

8. 사차방정식 $x^4-x^3+3x-1=0$이 열린구간 $(-1, k)$에서 적어도 하나의 실근을 가질 때, 가능한 정수 k의 최솟값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[중단원 학습 점검]

9. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x<2)\\ x-3 & (x\ge 2)\end{cases},\quad g(x)=x^2+ax$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① -4 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 4

[중단원 학습 점검]

10. 함수 $f(x)=x^2-4$, $g(x)=x^2+ax+10$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

[중단원 학습 점검]

11. 다음은 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 방정식
$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$이 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이는 과정이다. 다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것을 고르면?

> $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$
> 로 놓으면 $f(x)$는 이차함수이므로
> 모든 실수 x에서 연속이다.
> $f(a)=(a-b)(a-c)>0$
> $f(b)=(b-c)(b-a)\boxed{\text{(ㄱ)}}0$
> $f(c)=(c-a)(c-b)>0$
> 이므로 $\boxed{\text{(ㄴ)}}$의 정리에 의하여
> 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$, $(b,\ c)$에서
> 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
> 따라서 방정식 $f(x)=0$은
> 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① (ㄱ) : $>$, (ㄴ) : 최솟값
② (ㄱ) : $>$, (ㄴ) : 사잇값
③ (ㄱ) : $=$, (ㄴ) : 최솟값
④ (ㄱ) : $<$, (ㄴ) : 사잇값
⑤ (ㄱ) : $<$, (ㄴ) : 최솟값

[대단원 학습 점검]

12. 방정식 $x^3+4x-7=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간은?

① $(-3,\ -2)$ ② $(-2,\ -1)$
③ $(-1,\ 0)$ ④ $(0,\ 1)$
⑤ $(1,\ 2)$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

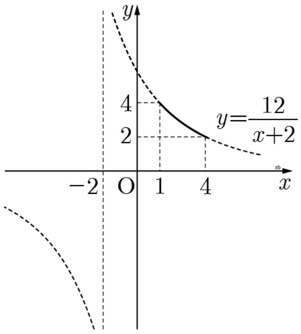
1) [정답] ③

[해설] 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=-3$에서 함숫값이 정의되지 않으므로 불연속이다.

가능한 상수 a의 값은 2개다.

2) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

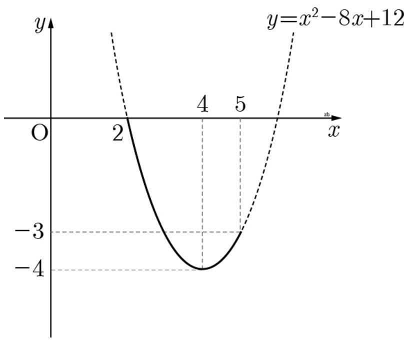


따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 4, $x=4$일 때 최솟값 2를 갖는다.

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은 6

3) [정답] ①

[해설] 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 5]$에서 연속이고 닫힌구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 0, $x=4$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은 -4

4) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^3+2x+k$로 놓으면

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이다.

$f(0)f(2)<0$이면

사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나 존재한다.

즉, $k(12+k)<0$에서 $-12<k<0$

따라서 가능한 정수 k의 개수는 11이다.

5) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^4+4x-k$로 놓으면

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이다.

$f(0)f(1)<0$이면

사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

즉, $-k(5-k)<0$에서 $0<k<5$

따라서 가능한 정수 k의 개수는 4이다.

6) [정답] ③

[해설] 시각 t에 따른 도시의 기온을 $f(t)$라 하면 함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[0, 24]$에서 연속이다.

$f(6)=13<18$, $f(12)=24>18$이고

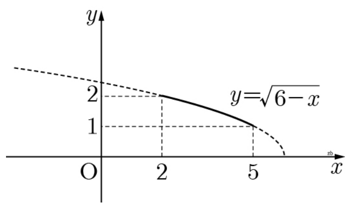
$f(18)=21>18$, $f(24)=16<18$이므로

6시에서 12시, 18시에서 24시 사이에 이 도시의 기온이 18 ℃인 시각이 각각 적어도 한 번 존재한다.

따라서 기온을 측정한 날 이 도시의 기온이 18 ℃인 시각은 적어도 두 번 존재한다.

7) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 5]$에서 연속이고 닫힌구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 2, $x=5$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은 3

8) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x)=x^4-x^3+3x-1$로 놓으면

$f(x)$는 $f(-1)=1+1-3-1=-2<0$

$f(0)=-1<0$

$f(1)=2>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 사차방정식 $x^4-x^3+3x-1=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\therefore$ 정수 k의 최솟값은 1

9) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$이어야 한다.

$f(2)g(2)=-(4+2a)$,

$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-}(-2x+1)(x^2+ax)$

$=-3(4+2a)$

$\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}(x-3)(x^2+ax)=-(4+2a)$

따라서 $-(4+2a)=-3(4+2a)$

$4+2a=0$이므로 $a=-2$

10) [정답] ③

[해설] 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \neq 0$이어야 한다.
방정식 $x^2+ax+10=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=a^2-40<0$, 즉 $-2\sqrt{10}<a<2\sqrt{10}$
즉, $-6 \leq a \leq 6$이므로 가능한 정수 a의 개수는 13이다.

11) [정답] ④
[해설] $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)$
$+(x-c)(x-a)$
로 놓으면 $f(x)$는 이차함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
$f(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f(b)=(b-c)(b-a)<0$
$f(c)=(c-a)(c-b)>0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$, $(b,\ c)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

12) [정답] ⑤
[해설] $f(x)=x^3+4x-7$으로 놓으면
함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
$f(-3)<0$, $f(-2)<0$, $f(-1)<0$, $f(0)<0$,
$f(1)<0$, $f(2)>0$이므로
사잇값의 정리에 의하여 방정식
$x^3+4x-7=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도
하나의 실근을 갖는다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125