01 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라 하며 $b^2=ac$가 성립한다.

참고 $a>0$, $c>0$일 때, $b=\sqrt{ac}$에서 b를 a와 c의 기하평균이라 한다.

◪ **다음 세 수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.**

1. $2,\ x,\ 8$

2. $2,\ 6,\ x$

3. $x,\ x^2-2,\ x^3$

4. $x-2,\ x+1,\ x-5$

5. $x-2,\ x,\ 2x+3$ (단, $x>0$)

6. $x+1,\ 2x,\ 4x-3$

7. $x-2,\ x+2,\ x+7$

8. $x,\ x+1,\ 4$

9. $3x,\ x-1,\ \frac{1}{12}x$ (단, $x>1$)

◪ **다음 물음에 답하여라.**

10. 서로 다른 세 수 4, a, b는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 4는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a, b의 값을 구하여라.

11. 세 수 a, b, 24가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 4, a, b가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a, b의 값을 각각 구하여라. (단, $ab>0$)

12. 서로 다른 두 수 a, b에 대하여 세 수 a, 3, b는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 3, a, b는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a, b의 값을 구하여라.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

13. 2와 12 사이에 두 양수 a, b를 넣으면 세 수 2, a, b는 이 순서로 등비수열을 이루고, 세 수 a, b, 12는 이 순서로 등차수열을 이룬다. 이때, a, b의 값을 구하여라.

14. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 세 수 -4, a, b는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, $16a$는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a, b의 값을 구하여라.

15. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 세 수 a, b, 9는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, $4a$는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a, b의 값을 구하여라.

16. 세 수 1, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 1이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 1이 아닌 실수 a, b의 값을 각각 구하여라.

17. 서로 다른 두 양수 a,b에 대하여 세 수 $3a,b,10$은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $2,a,b$는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

18. 세 수 a,b,c가 이 순서대로 등차수열을 이루고 세 수 $2c,a,4$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $a+b+c=0$일 때, $c-a$의 값을 구하여라.

19. 두 양수 a,b에 대하여 세 수 $a+3,3,b$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $\frac{2}{b},1,\frac{2}{a+3}$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 때, $b-a$의 값을 구하여라.

02 등비수열의 합

1. 등비수열의 합
 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq 0)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 다음과 같다.

(1) $r\neq 1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

참고 $r>1$일 때 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$,

$r<1$일 때 $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$을 이용하면 편리하다.

2. 수열의 합과 일반항 사이의 관계
 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$

◪ 첫째항 a와 공비 r가 다음과 같은 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 제10항까지의 합 S_{10}을 구하여라.

20. $a=\frac{1}{9}$, $r=\sqrt{3}$

21. $a=\sqrt{2}$, $r=\sqrt{2}$

22. $a=2$, $r=\frac{1}{3}$

23. $a=-3$, $r=-2$

◪ 다음을 만족시키는 등비수열의 합을 구하여라.

24. $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^9$

25. $2+2^3+2^5+2^7+2^9$

26. $4+(-2)+1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{128}\right)$

◪ 다음 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구하여라.

27. $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots$

28. $4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots$

29. $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \cdots$

30. $2,\ 8,\ 32,\ 128,\ \cdots$

31. $-27,\ -9\ -3,\ -1,\ \cdots$

32. $\frac{3}{2},\ -1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{9},\ \cdots$

33. $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots$

34. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

35. $\frac{2}{27},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{3},\ 2,\ \cdots$

◪ 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같이 주어질 때, 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구하여라.

36. $a_n=\frac{1}{3^n}$

37. $a_n=2^{2n-1}$

38. $a_n=5\cdot 2^{n-2}$

39. $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

◪ 다음 등비수열의 첫째항부터 주어진 항까지의 합 S_n을 구하여라.

40. 첫째항이 8, 공비가 -3, 끝항이 648

41. 첫째항이 9, 공비가 1, 항수가 11

42. 첫째항이 3, 공비가 2, 항수가 6

◪ 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

43. $a_1+a_2=1,\ a_3+a_4=3$이고 공비가 양수일 때, 첫째항부터 제6항까지의 합을 구하여라.

44. 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 처음으로 500보다 크게 되는 자연수 n의 값을 구하여라.

45. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1+a_2+a_3+a_4=6,\ a_5+a_6+a_7+a_8=12$일 때,
$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$의 값을 구하여라.

46. $a_1+a_2+a_3=1,\ a_4+a_5+a_6=8$이고 공비가 실수일 때, 첫째항부터 제$9$항까지의 합을 구하여라.

47. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고,
$a_1+a_2+a_3+a_4=5,\ a_5+a_6+a_7+a_8=10$일 때,
$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$의 값을 구하여라.

48. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_5=10,\ S_{10}=30$이다. 이때, S_{15}의 값을 구하여라.

49. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\dfrac{S_{20}}{S_{10}}=10$일 때, $\dfrac{a_{22}}{a_7}$의 값을 구하여라.

50. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21, 첫째항부터 제6항까지의 합이 189일 때, 첫째항부터 제8항까지의 합을 구하여라.

51. 첫째항부터 제4항까지의 합이 2, 첫째항부터 제8항까지의 합이 8인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제12항까지의 합을 구하여라.

52. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_{10}=5,\ S_{20}=20$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

53. 첫째항부터 등비수열을 이루는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = a \cdot 3^{n-1} + 3$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

54. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 20$, $a_4 + a_5 = 160$을 만족한다. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\dfrac{S_{10}}{S_5}$의 값을 구하여라.

55. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $\dfrac{S_4}{S_2} = 9$일 때, $\dfrac{a_5}{a_3}$의 값을 구하여라.

56. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_4 = 13S_2$가 성립한다. $\dfrac{a_7}{a_5}$의 값을 구하여라.

57. 첫째항이 2이고, 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\dfrac{S_6 - S_4}{S_2} = 36$이 성립한다. a_3의 값을 구하여라.

◪ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하고, 첫째항부터 등비수열을 이루는지 확인하여라.

58. $S_n = 3^{n+1}$

59. $S_n = 2^n + 1$

60. $S_n = 3 \cdot 5^n - 3$

61. $S_n = 2^n - 1$

62. $S_n = 3 \cdot 2^n - 3$

63. $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$

64. $S_n = 5^{n+1} - 5$

65. $S_n = 3^n - 1$

03 등비수열의 합의 활용

(1) 원리합계 : 원금과 이자를 합한 금액을 원리합계라 하고, 원금 a원을 연이율 r로 n년간 예금했을 때, 원리합계 S는 다음 두 가지 방법으로 계산한다.
① 단리법 : 원금에 대해서만 이자를 계산하는 방법
⇨ $S=a(1+rn)$(원)
② 복리법 : 원금에 이자를 합한 금액을 다시 원금으로 보고 이자를 계산하는 방법 ⇨ $S=a(1+r)^n$(원)

(2) 적금 : 일정한 금액을 일정한 기간마다 적립하는 것을 적금 또는 적립예금이라 하고, 연이율 r, 1년마다 복리로 a원씩 적립했을 때, n년째 말의 원리합계 S는 각각 다음과 같다.

① 매년 초에 적립하는 경우: $S=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$(원)

② 매년 말에 적립하는 경우: $S=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$(원)

◪ **다음과 같은 이율과 기간 동안 매년 초에 10만 원씩 n년 동안 적립할 때, n년 말에 적립되는 금액을 구하여라.**

66. **연이율 1%의 복리로 12년 동안 적립 (단, $1.01^{12}=1.13$로 계산한다.)**

67. **연이율 2%의 복리로 36년 동안 적립 (단, $1.02^{36}=2.04$로 계산한다.)**

68. **연이율 7%의 복리로 9년 동안 적립 (단, $1.07^{9}=1.84$로 계산한다.)**

69. **연이율 8%의 복리로 12년 동안 적립 (단, $1.08^{12}=2.52$로 계산한다.)**

70. **연이율 6%의 복리로 11년 동안 적립 (단, $1.06^{11}=1.9$로 계산한다.)**

71. **연이율 5%의 복리로 8년 동안 적립 (단, $1.05^{8}=1.48$로 계산한다.)**

◪ **다음 물음에 답하여라.**

72. **월이율 1%의 복리로 매월 초에 10만 원씩 24개월 동안 적립했을 때, 24개월 후에 적립되는 금액을 구하여라. (단, $1.01^{24}=1.27$로 계산한다.)**

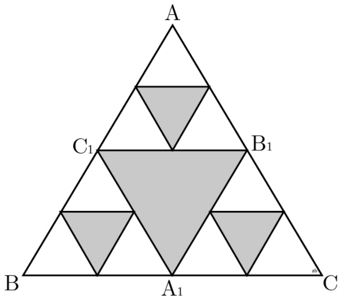
73. **갑은 여행경비 600만원을 마련하기 위해 2017년 1월 말부터 2018년 12월 말까지 매달 말 a원씩 적립하려고 한다. 이때 a의 값을 구하여라. (단, 월이율 1%의 복리, $1.01^{24}=1.27$으로 계산하여 천의 자리에서 버림한다.)**

74. **매월 1일에 1만 원씩 월이율 1%의 1개월마다의 복리로 적립해 나가려고 한다. 올해 1월 1일에 첫 적립금을 내었을 때, 내년 12월 31일에 받는 원리합계를 구하여라. (단, $1.01^{25}=1.28$로 계산한다.)**

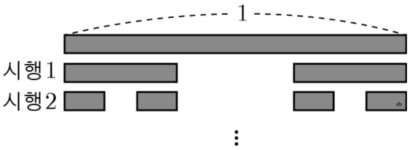
75. 연이율 6%의 복리로 매년 초에 30만 원씩 적립하면 10년 말에는 적립 총액이 얼마나 되는지 구하여라. (단, $1.06^{10}=1.79$로 계산한다.)

76. 2000만 원짜리 자동차를 구입하는 데 있어 모두 할부로 지불하기로 하였다. 구입한 날로부터 1개월 후부터 매달 일정한 금액을 36회로 나누어 갚는다면 매달 갚아야 하는 값을 구하여라. (단, $1.01^{36}=1.4$, 월이율은 1%, 1개월 마다의 복리로 계산한다.)

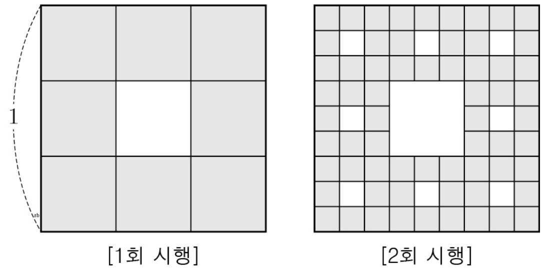
77. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 첫 번째 시행에서 각 변의 중점을 이어서 만든 정삼각형 $A_1B_1C_1$을 색칠하고, 두 번째 시행에서 첫 번째 시행 후 남은 3개의 정삼각형에서 같은 방법으로 만든 정삼각형을 색칠한다. 이와 같은 시행을 5회 반복했을 때, 색칠한 부분의 넓이의 합을 구하여라.



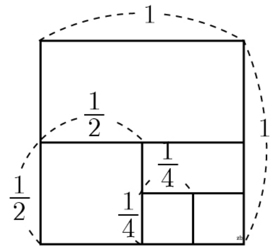
78. 길이가 1인 막대가 있다. 그림과 같이 이 막대를 3등분하여 가운데 부분을 잘라 내는 것을 시행1이라고 하자. 시행1 이후 남아 있는 두 막대를 각각 3등분하여 가운데 부분을 잘라내는 것을 시행2라고 하자. 이와 같은 시행을 10번 반복했을 때, 그동안 잘라 낸 모든 막대의 길이의 합을 구하여라.



79. 한 변의 길이가 1인 정사각형이 있다. 이 정사각형을 왼쪽 그림과 같이 9등분하여 중앙의 정사각형을 제거한다. 다음과 같이 나머지 정사각형 8개의 각각을 다시 9등분하여 중앙의 정사각형을 제거한다. 이 과정을 n회 반복하여 시행한 후 남은 정사각형들의 넓이의 합을 구하여라.



80. 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 종이가 있다. 그림과 같이 사각형의 절반을 오려내어 버리는 시행을 한다. 남은 사각형에 같은 시행을 반복한다고 했을 때, n번의 시행 후 버려진 사각형의 넓이의 총합을 구하여라.



I410-ECN-0199-2019-001-000244110

정답 및 해설

1) ± 4

⇨ $x^2=2\times 8=16$ $\therefore\ x=\pm 4$

2) 18

⇨ $36=2x$ $\therefore\ x=18$

3) ± 1

⇨ $(x^2-2)^2=x^4,\ -4x^2+4=0$ $\therefore\ x=\pm 1$

4) 1

⇨ $(x+1)^2=(x-2)(x-5)$이므로

$x^2+2x+1=x^2-7x+10$

$9x=9$ $\therefore\ x=1$

5) 3

⇨ $x^2=(x-2)(2x+3)$에서

$x^2-x-6=0$ $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=3$ $(\because\ x>0)$

6) 3

⇨ $4x^2=(x+1)(4x-3)$

$x-3=0$ $\therefore\ x=3$

7) 18

⇨ $(x+2)^2=(x-2)(x+7)$

$4x+4=5x-14$ $\therefore\ x=18$

8) 1

⇨ $(x+1)^2=4x,\ x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\therefore\ x=1$

9) 2

⇨ $(x-1)^2=3x\times\frac{1}{12}x$이므로 $x^2-2x+1=\frac{1}{4}x^2$

$3x^2-8x+4=0,\ (3x-2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

이때, $x>1$이므로 $x=2$

10) $a=1,\ b=-2$

⇨ $4,\ a,\ b$는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a=4+b$ …… ㉠

$a,\ b,\ 4$는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=4a$

$a=\frac{b^2}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{b^2}{2}=4+b,\ b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$ $\therefore\ b=-2$ 또는 $b=4$

이때, $b=4$이면 $a=4$가 되어 $a,\ b$는 서로 다른 수라는 조건에 모순된다.

따라서 $b=-2$이고 이때의 $a=1$

11) $a=8,\ b=16$

⇨ $a,\ b,\ 24$가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2b=a+24$ …… ㉠

$4,\ a,\ b$가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$a^2=4b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=2a+48$

$(a-8)(a+6)=0$

$\therefore\ a=8,\ b=16$ $(\because\ ab>0)$

12) $a=-6,\ b=12$

⇨ $a,\ 3,\ b$는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$6=a+b$ …… ㉠

$3,\ a,\ b$는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$a^2=3b$

$b=\frac{a^2}{3}$을 ㉠에 대입하여 풀면

$6=a+\frac{a^2}{3},\ a^2+3a-18=0$

$(a+6)(a-3)=0$ $\therefore\ a=-6$ 또는 $a=3$

이때, $a=3$이면 ㉠에서 $b=3$이 되어 $a,\ b$는 서로 다른 두 수라는 조건에 모순된다.

$\therefore\ a=-6,\ b=12$

13) $a=4,\ b=8$

⇨ $2,\ a,\ b$는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $a^2=2b$

$a,\ b,\ 12$는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2b=a+12$ …… ㉠

$2b=a^2$을 ㉠에 대입하여 풀면

$a^2=a+12,\ a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4$ $(\because\ a>0),\ b=8$

14) $a=2,\ b=8$

⇨ $-4,\ a,\ b$는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a=-4+b$ …… ㉠

$a,\ b,\ 16a$는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=16a^2$ $\therefore\ b=\pm 4a$

이때, $a,\ b$는 모두 양수이므로 $a,\ b$는 서로 같은 부호이다.

따라서 $b=4a$이고 이를 ㉠에 대입하면

$2a=4$ $\therefore\ a=2,\ b=8$

15) $a=3,\ b=6$

⇨ $a,\ b,\ 9$는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2b=a+9$ …… ㉠

$a,\ b,\ 4a$는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=a\cdot 4a=4a^2$ $\therefore\ b=\pm 2a$

이때, $a,\ b$는 모두 양수이므로 $a,\ b$는 서로 같은 부호이다.

따라서 $b=2a$이고 이를 ㉠에 대입하면

$4a=a+9$ $\therefore\ a=3,\ b=6$

16) $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$

⇨ 1, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a=1+b$ $\quad\therefore\ b=2a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

a, b, 1이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2a-1)^2=a$에서

$4a^2-5a+1=0$, $(4a-1)(a-1)=0$

$a\neq1$이므로 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

17) -20

⇨ b는 $3a$와 10의 등차중항이므로 $2b=3a+10$

a는 2와 b의 등비중항이므로 $a^2=2b$

연립하여 풀면 $a^2=3a+10$, $a>0$이므로

$a=5$, $b=\frac{25}{2}$

$\therefore a-2b=-20$

18) 16

⇨ b는 a와 c의 등차중항이므로 $2b=a+c$

a는 $2c$와 4의 등비중항이므로 $a^2=8c$

$a+b+c=0$에 $a+c=2b$를 대입하면 $b=0$

$\begin{cases}a^2=8c\\a+c=0\end{cases}$를 풀면 $a=-8$, $c=8$

$\therefore c-a=8-(-8)=16$

19) $3-2\sqrt{5}$

⇨ 3은 $a+3$과 b의 등차중항이므로 $a+3+b=6$

$a+b=3\cdots$ ①

1은 $\frac{2}{b}$와 $\frac{2}{a+3}$의 등비중항이므로 $\frac{4}{b(a+3)}=1$

$b(a+3)=4\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=\sqrt{5}$, $b=3-\sqrt{5}$

$\therefore b-a=3-\sqrt{5}-\sqrt{5}=3-2\sqrt{5}$

20) $\frac{121}{9}(\sqrt{3}+1)$

⇨ $S_{10}=\dfrac{\frac{1}{9}\times\{(\sqrt{3})^{10}-1\}}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{(3^5-1)(\sqrt{3}+1)}{9(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{121}{9}(\sqrt{3}+1)$

21) $31(2+\sqrt{2})$

⇨ $S_{10}=\dfrac{\sqrt{2}\times\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2^5-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=31(2+\sqrt{2})$

22) $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

⇨ $S_{10}=\dfrac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

23) 1023

⇨ $S_{10}=\dfrac{(-3)\times\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=2^{10}-1=1023$

24) $2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

⇨ 공비는 $\frac{1}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^9$을 제$n$항이라 하면

$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$ $\qquad\therefore\ n=10$

$\therefore\ S_{10}=\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

25) 682

⇨ $S_5=\dfrac{2\cdot(4^5-1)}{4-1}=\dfrac{2}{3}(4^5-1)=682$

26) $\frac{341}{128}$

⇨ 첫째항이 4, 공비가 $\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$-\frac{1}{128}$을 제n항이라고 하면

$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{128}=\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^9$ $\qquad\therefore\ n=10$

$\therefore\ S_{10}=\dfrac{4\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\frac{8}{3}\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}=\frac{341}{128}$

27) 2^n-1

⇨ 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$S_n=\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

28) $4n$

⇨ 첫째항이 4, 공비가 1이므로 $S_n=4n$

29) $\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

⇨ 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

30) $\frac{2}{3}(4^n-1)$

⇨ 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$$S_n=\frac{2\cdot(4^n-1)}{4-1}=\frac{2}{3}(4^n-1)$$

31) $-\frac{81}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

⇨ 첫째항이 -27, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{-27\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{81}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

32) $\frac{9}{10}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

⇨ 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $-\frac{2}{3}$이므로

$$S_n=\frac{\frac{3}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{9}{10}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

33) $\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$

⇨ 첫째항이 2, 공비가 -3이므로

$$S_n=\frac{2\times\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$$

34) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

⇨ 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

35) $\frac{1}{27}(3^n-1)$

⇨ 첫째항이 $\frac{2}{27}$, 공비가 3이므로

$$S_n=\frac{\frac{2}{27}\times(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{27}(3^n-1)$$

36) $\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

⇨ $a_n=\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$$S_n=\frac{\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

37) $\frac{2}{3}(4^n-1)$

⇨ $a_n=2^{2n-1}=2\cdot2^{2(n-1)}=2\cdot4^{n-1}$에서
첫째항이 2, 공비가 4이므로

$$S_n=\frac{2\times(4^n-1)}{4-1}=\frac{2}{3}(4^n-1)$$

38) $\frac{5}{2}(2^n-1)$

⇨ $a_n=5\cdot2^{n-2}=\frac{5}{2}\cdot2^{n-1}$에서

첫째항이 $\frac{5}{2}$, 공비가 2이므로

$$S_n=\frac{\frac{5}{2}\times(2^n-1)}{2-1}=\frac{5}{2}(2^n-1)$$

39) 3^n-1

⇨ 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$$S_n=\frac{2\times(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$$

40) 488

⇨ 648을 제n항이라고 하면
$8\times(-3)^{n-1}=648$이므로
$(-3)^{n-1}=81=(-3)^4$ $\quad\therefore\ n=5$

$$\therefore\ S_5=\frac{8\times\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=2\times(1+3^5)=488$$

41) 99

⇨ $S_{11}=9\times11=99$

42) 189

⇨ $S_6=\frac{3\times(2^6-1)}{2-1}=3\times63=189$

43) 13

⇨ 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$a_1+a_2=a+ar=1$에서
$a(1+r)=1$ …… ㉠
$a_3+a_4=ar^2+ar^3=3$에서
$ar^2(1+r)=3$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^2=3$
$\therefore\ r=\sqrt{3}\quad(\because\ r>0)$
㉠에서 $a(1+\sqrt{3})=1$ $\quad\therefore\ a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore\ S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\times\dfrac{3^3-1}{\sqrt{3}-1}=13$

44) 7

⇨ 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\dfrac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$

$S_n>500$에서 $5(2^n-1)>500$ $\therefore\ 2^n>101$

그런데 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $n\ge 7$

따라서 $n=7$일 때, 처음으로 500보다 크게 된다.

45) 24

⇨ $a_1+a_2+a_3+a_4=S_4=6$이고

$a_5+a_6+a_7+a_8=S_8-S_4=12$이므로

$S_8=S_4+12=18$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_4=6$에서 $\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=6$ …… ㉠

$S_8=18$에서 $\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=18$

즉, $\dfrac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=18$이고 ㉠을 대입하면

$r^4+1=3$ $\therefore\ r^4=2$

이때, $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8$이므로

$S_{12}=\dfrac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$

$=6(2^2+2+1)=42$

$\therefore\ a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8=42-18=24$

46) 73

⇨ 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=1$에서

$a(1+r+r^2)=1$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=ar^3+ar^4+ar^5=8$에서

$ar^3(1+r+r^2)=8$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore\ r=2$ ($\because$ r는 실수)

$r=2$을 ㉠에 대입하면 $7a=1$ $\therefore\ a=\dfrac{1}{7}$

$\therefore\ S_9=\dfrac{a(r^9-1)}{r-1}=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{2^9-1}{2-1}=73$

47) 20

⇨ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=S_4=5$에서

$\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=5$ …… ㉠

$a_1+a_2+\cdots+a_8=S_8=5+10=15$에서

$\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=15$

$\therefore\ \dfrac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^4+1=3$, 즉 $r^4=2$이므로

$S_{12}=\dfrac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$

$=5(2^2+2+1)=35$

$\therefore\ a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8=35-15=20$

48) 70

⇨ 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_5=10$에서 $\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}=10$ …… ㉠

$S_{10}=30$에서 $\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=30$

즉, $\dfrac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=30$이고 ㉠을 대입하면

$r^5+1=3$ $\therefore\ r^5=2$

$\therefore\ S_{15}=\dfrac{a(r^{15}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$

$=10(2^2+2+1)=70$

49) 27

⇨ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$$\frac{S_{20}}{S_{10}}=\frac{\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}}{\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}}=\frac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{(r^{10}-1)}=r^{10}+1=10$$

$\therefore r^{10}=9$

$\therefore\ \dfrac{a_{22}}{a_7}=\dfrac{ar^{21}}{ar^6}=r^{15}=9\sqrt{9}=27$

50) 765

⇨ 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_3=\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=21$ …… ㉠

$S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=189$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=9$이므로

$r^3=8=2^3$ $\therefore\ r=2$ ($\because$ r는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $7a=21$ $\therefore\ a=3$

$\therefore\ S_8=\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=\dfrac{3\times(2^8-1)}{2-1}=765$

51) 26

⇨ 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_4=\dfrac{a(1-r^4)}{1-r}=2$ …… ㉠

$S_8 = \dfrac{a(1-r^8)}{1-r} = \dfrac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = 8 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$1+r^4=4 \qquad \therefore\ r^4=3$

$\therefore\ S_{12} = \dfrac{a(1-r^{12})}{1-r} = \dfrac{a(1-r^4)}{1-r}(1+r^4+r^8)$

$= S_4(1+r^4+r^8) = 2\times(1+3+3^2) = 26$

52) 65

⇨ 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{10}=5$에서 $\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_{20}=20$에서 $\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=20$

즉, $\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=20$이고 ㉠을 대입하면

$r^{10}+1=4 \qquad \therefore\ r^{10}=3$

$\therefore\ S_{30} = \dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$=5(3^2+3+1)=65$

53) -9

⇨ $n\ge 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$=(a\cdot 3^{n-1}+3)-(a\cdot 3^{n-2}+3)$

$=2a\cdot 3^{n-2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_n = a\cdot 3^{n-1}+3$에서

$a_1 = S_1 = a+3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1 = \dfrac{2a}{3} = S_1 = a+3$을 만족시켜야 하므로 $-\dfrac{a}{3}=3 \qquad \therefore\ a=-9$

54) 33

⇨ 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$a_1+a_2 = a+ar = 20$

$a_4+a_5 = ar^3+ar^4 = r^3(a+ar) = 160$

$20r^3=160 \qquad \therefore\ r=2$

$\therefore \dfrac{S_{10}}{S_5} = \dfrac{\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}}{\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}} = \dfrac{(r^5-1)(r^5+1)}{(r^5-1)}$

$=r^5+1=2^5+1=33$

55) 8

⇨ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$\dfrac{S_4}{S_2} = \dfrac{\dfrac{a(1-r^4)}{1-r}}{\dfrac{a(1-r^2)}{1-r}} = \dfrac{1-r^4}{1-r^2} = \dfrac{(1+r^2)(1-r^2)}{1-r^2} = 1+r^2$

$1+r^2=9 \qquad \therefore r^2=8$

$\therefore \dfrac{a_5}{a_3} = \dfrac{ar^4}{ar^2} = r^2 = 8$

56) 12

⇨ 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$S_4 = \dfrac{a(r^4-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}$, $S_2 = \dfrac{a(r^2-1)}{r-1}$

$S_4 = 13S_2$에 대입하면

$\dfrac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1} = 13\cdot\dfrac{a(r^2-1)}{r-1}$, $r^2+1=13$,

$r^2=12$

$\therefore \dfrac{a_7}{a_5} = \dfrac{ar^6}{ar^4} = r^2 = 12$

57) 12

⇨ 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{S_6-S_4}{S_2} = \dfrac{a_6+a_5}{a_1+a_2} = \dfrac{2r^5+2r^4}{2+2r} = \dfrac{2r^4(r+1)}{2(r+1)} = r^4 = 36$

$r>0$이므로 $r^2=6$ 이다.

$\therefore a_3 = 2\bullet r^2 = 2\times 6 = 12$

58) $a_n = 2\cdot 3^n\ (n\ge 2)$, 제2항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$=3^n-3=2\cdot 3^n\ (n\ge 2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_1=9$와 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9이고, 제2항부터 공비가 3인 등비수열을 이룬다.

59) $a_1=3$, $a_n=2^{n-1}\ (n\ge 2)$, 제2항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$=2^n+1-(2^{n-1}+1)=2^{n-1}\ (n\ge 2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_1=3$과 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고, 제2항부터 공비가 2인 등비수열을 이룬다.

60) $a_n = 12\cdot 5^{n-1}\ (n\ge 1)$, 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$=3\cdot 5^n-3-(3\cdot 5^{n-1}-3)$

$=12\cdot 5^{n-1}\ (n\ge 2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_1=12$와 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 같으므로

$a_n = 12\cdot 5^{n-1}\ (n\ge 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

61) $a_n = 2^{n-1}\ (n\ge 1)$, 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1)$

$= 2^{n-1}\ (n \geq 2)$ …… ㉠

$S_1 = 2 - 1 = 1$과 ㉠에 $n = 1$을 대입한 값이 같으므로 $a_n = 2^{n-1}\ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

62) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}\ (n \geq 1)$, 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 3 \cdot 2^n - 3 - (3 \cdot 2^{n-1} - 3)$

$= 3 \cdot 2^{n-1}$

$S_1 = 3$, $a_1 = 3$

$n = 1$을 대입한 값이 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}\ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

63) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}\ (n \geq 1)$, 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2 \cdot 3^n - 2 - (2 \cdot 3^{n-1} - 2)$

$= 4 \cdot 3^{n-1}\ (n \geq 2)$ …… ㉠

$S_1 = 2 \cdot 3^1 - 2 = 4$와 ㉠에 $n = 1$을 대입한 값이 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 4 \cdot 3^{n-1}\ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

64) $a_n = 4 \times 5^n\ (n \geq 1)$, 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = 5^{n+1} - 5^n = 4 \times 5^n$ …… ㉠

한편, $a_1 = S_1 = 5^2 - 5 = 20$은 ㉠에 $n = 1$을 대입한 것과 같다. $\therefore\ a_n = 4 \times 5^n\ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

65) $a_n = 2 \times 3^{n-1}\ (n \geq 1)$, 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

⇨ $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1)$

$= 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$ …… ㉠

한편, $a_1 = S_1 = 3 - 1 = 2$는 ㉠에 $n = 1$을 대입한 것과 같다.

$\therefore\ a_n = 2 \times 3^{n-1}\ (n \geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

66) 131.3(만 원)

⇨ $10(1+0.01)^{12} + 10(1+0.01)^{11} + \cdots + 10(1+0.01)$

$= \dfrac{10 \times 1.01(1.01^{12} - 1)}{1.01 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.01(1.13 - 1)}{0.01} = 131.3$(만 원)

67) 530.4(만 원)

⇨ $10(1+0.02)^{36} + 10(1+0.02)^{35} + \cdots + 10(1+0.02)$

$= \dfrac{10 \times 1.02(1.02^{36} - 1)}{1.02 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.02(2.04 - 1)}{0.02}$

$= 530.4$(만 원)

68) 128.4(만 원)

⇨ $10(1+0.07)^{9} + 10(1+0.07)^{8} + \cdots + 10(1+0.07)$

$= \dfrac{10 \times 1.07(1.07^{9} - 1)}{1.07 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.07(1.84 - 1)}{0.07}$

$= 128.4$(만 원)

69) 205.2만원

⇨ $10(1+0.08)^{12} + 10(1+0.08)^{11} + \cdots + 10(1+0.08)$

$= \dfrac{10 \times 1.08(1.08^{12} - 1)}{1.08 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.08(2.52 - 1)}{0.08}$

$= 205.2$(만 원)

70) 159만원

⇨ $10(1+0.06)^{11} + 10(1+0.06)^{10} + \cdots + 10(1+0.06)$

$= \dfrac{10 \times 1.06(1.06^{11} - 1)}{1.06 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.06(1.9 - 1)}{0.06}$

$= 159$(만 원)

71) 100.8만원

⇨ $10(1+0.05)^{8} + 10(1+0.05)^{7} + \cdots + 10(1+0.05)$

$= \dfrac{10 \times 1.05(1.05^{8} - 1)}{1.05 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.05(1.48 - 1)}{0.05}$

$= 100.8$(만 원)

72) 272.7만원

⇨ $10(1+0.01)^{24} + 10(1+0.01)^{23} + \cdots + 10(1+0.01)$

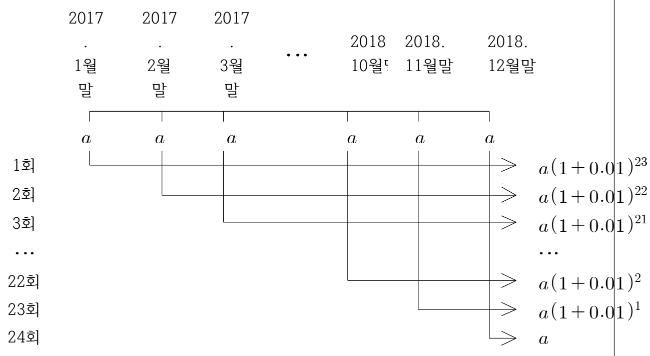
$= \dfrac{10 \times 1.01(1.01^{24} - 1)}{1.01 - 1}$

$= \dfrac{10 \times 1.01(1.27 - 1)}{0.01}$

$=272.7$(만 원)

73) 22만원

⇨ 매월말에 a만원씩 적립한 원리합계는 다음과 같다.



$a+a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{23}$

$=\dfrac{a(1.01^{24}-1)}{1.01-1}=\dfrac{a(1.27-1)}{0.01}=27a$(만원)

$27a=600 \quad \therefore a \fallingdotseq 22$(만원)

74) 27만 원

⇨ (첫 번째 적립) 1만 원 $\xrightarrow{24개월} 1\times1.01^{24}$

(두 번째 적립) 1만 원 $\xrightarrow{23개월} 1\times1.01^{23}$

(세 번째 적립) 1만 원 $\xrightarrow{22개월} 1\times1.01^{22}$

⋮ ⋮

(마지막 적립) 1만 원 $\xrightarrow{1개월} 1\times1.01$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$1\times1.01^{24}+1\times1.01^{23}+1\times1.01^{22}+\cdots+1\times1.01$

$=\dfrac{1.01\times(1.01^{24}-1)}{1.01-1}=\dfrac{1.01^{25}-1.01}{0.01}$

$=\dfrac{1.28-1.01}{0.01}=27$(만 원)

75) 4187000원

⇨ 매년 적립금의 10년 말의 원리합계는 다음 표와 같다.

	처음 1년 말…8년 말 9년 말 10년 말	원리합계
제1회	30 ―10년→	$30\times(1+0.06)^{10}$
제2회	30 ―9년→	$30\times(1+0.06)^9$
⋮	⋮	⋮
제9회	30 ―$\boxed{2년}$→	$30\times(1+0.06)^2$
제10회	30 $\boxed{1년}$→	$30\times(1+0.06)$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$30\times(1+0.06)^{10}+30\times(1+0.06)^9+$

$\cdots+30\times(1+0.06)^2+30\times(1+0.06)$

$=\dfrac{30\times1.06\times(1.06^{10}-1)}{1.06-1}$

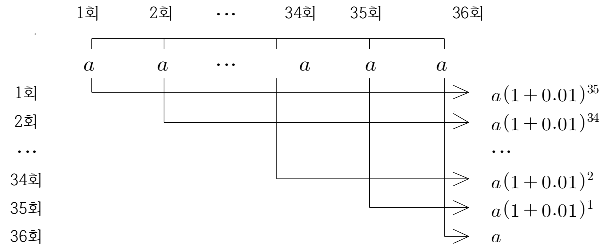
$=\dfrac{30\times1.06\times(1.79-1)}{0.06}$

$=418.7$(만 원) $=4187000$원

76) 70만원

⇨ 매달 갚아야 할 금액을 a만원이라 하자.

매달 a만원씩 36회 갚아야 할 원리합계는 다음과 같다.



$a+a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{35}$

$=\dfrac{a(1.01^{36}-1)}{1.01-1}=\dfrac{a(1.4-1)}{0.01}=40a$(만원)

2000만원의 원리합계는

$2000(1+0.01)^{36}=2000\times1.4=2800$(만원)

$\therefore 40a=2800,\ a=70$(만원)

77) $9\sqrt{3}\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right\}$

⇨ n번째 시행 후 색칠한 넓이를 a_n이라 하자.

$a_1=\triangle A_1B_1C_1=1\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot3^2\right)$,

$a_2=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

한번 시행할 때 정삼각형의 개수는 3배, 정삼각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{1}{2}$배가 되므로

$a_n=3^{n-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left\{3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{5}\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right\}}{1-\dfrac{3}{4}}$

$=9\sqrt{3}\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right\}$

78) $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$

⇨ 시행 n에서 잘라낸 막대의 길이를 a_n이라 하면

$a_1=\dfrac{1}{3},\ a_2=2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2,\ a_3=2^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3,\ \cdots$

$a_n=2^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{2}{3}}=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$

79) $\left(\frac{8}{9}\right)^n$

⇨ 1회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$\left(1-\frac{1}{9}\right)\times 1^2=\frac{8}{9}$

2회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\frac{8}{9}=\left(\frac{8}{9}\right)^2$

$\vdots$

따라서 n회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은 $\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}=\left(\frac{8}{9}\right)^n$

80) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

⇨ n번의 시행 후 버려진 사각형의 넓이의 총합은 첫째항이 $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$