13

도형의 이동

예제 01

평행이동

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 점 $(3, -2)$가 점 $(1, 1)$로 옮겨질 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $(-1, 2)$가 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

(2) 직선 $2x-y-3=0$이 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식을 구하여라.

접근 방법

점 $(3, -2)$가 점 $(1, 1)$로 어떤 규칙에 의하여 평행이동하였는지 구한 후 그 규칙대로 도형을 옮깁니다. 도형은 평행이동에 의하여 모양과 크기가 바뀌지 않으므로 점은 점으로, 직선은 직선으로, 원은 원으로 옮겨집니다.

Bible

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동

(1) 점 : $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$

(2) 도형 : $f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-a, y-b)=0$

상세 풀이

점 $(3, -2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(1, 1)$이므로

$$3+a=1, \ -2+b=1$$

$$\therefore a=-2, b=3$$

(1) 점 $(-1, 2)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-1-2, 2+3) \qquad \therefore (-3, 5)$$

(2) 직선 $2x-y-3=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x+2)-(y-3)-3=0$$

$$\therefore 2x-y+4=0$$

정답 ➡ (1) $(-3, 5)$ (2) $2x-y+4=0$

보충 설명

일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이 일차함수 $y=ax+b$의 그래프이고, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프입니다.

풀이집 p.208

숫자 바꾸기

01-1 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 점 $(-1, 2)$가 점 $(3, 1)$로 옮겨질 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $(1, 2)$가 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

(2) 직선 $x-2y+3=0$이 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식을 구하여라.

표현 바꾸기

◆ 다른 풀이

01-2 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 원 $x^2+y^2+4x-2y+c=0$이 원 $x^2+y^2=1$로 옮겨질 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, c는 상수이다.)

개념 넓히기 ★★☆

01-3 직선 $y=ax+b$를 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-1, y+2)$에 의하여 옮겼더니 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$과 y축 위의 점에서 수직으로 만난다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

13

정답 **01-1** (1) $(5, 1)$ (2) $x-2y-3=0$ **01-2** 5
01-3 -2

대칭이동

예제 02

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$을 다음 점 또는 직선에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하여라.

(1) x축 (2) y축

(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

접근 방법

도형의 대칭이동 공식을 이용합니다. 이때, 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않습니다.

Bible 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

(1) x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$

상세 풀이

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$에

(1) y 대신 $-y$를 대입하면

$$(x-2)^2+\{(-y)-3\}^2=1 \qquad \therefore (x-2)^2+(y+3)^2=1$$

(2) x 대신 $-x$를 대입하면

$$\{(-x)-2\}^2+(y-3)^2=1 \qquad \therefore (x+2)^2+(y-3)^2=1$$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$$\{(-x)-2\}^2+\{(-y)-3\}^2=1 \qquad \therefore (x+2)^2+(y+3)^2=1$$

(4) x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$$(y-2)^2+(x-3)^2=1 \qquad \therefore (x-3)^2+(y-2)^2=1$$

정답 ⇒ (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ (2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$
(3) $(x+2)^2+(y+3)^2=1$ (4) $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

보충 설명

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 원의 대칭이동에 대한 문제는 원의 중심의 대칭이동으로도 생각할 수 있습니다.

풀이집 p.208

숫자 바꾸기

02-1 원 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$을 다음 점 또는 직선에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하여라.

(1) x축 (2) y축

(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

표현 바꾸기

02-2 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ ② $(x-1)^2+(y+2)^2=4$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ④ $(x+2)^2+(y-1)^2=4$
⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

개념 넓히기 ★★☆

02-3 포물선 $y=-2x^2+12x+a$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 최솟값이 10일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

13

정답 **02-1** (1) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ (2) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$
(3) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ (4) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$
02-2 ① **02-3** -28

예제 03

점에 대한 대칭이동

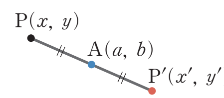
다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $(2,\ 1)$을 점 $(1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(2) 직선 $y=2x$를 점 $(1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하여라.

접근 방법

오른쪽 그림과 같이 두 점 $P(x,\ y)$, $P'(x',\ y')$이 점 $A(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 점 A는 선분 PP′의 중점이 됩니다.



Bible 점에 대한 대칭이동 ➡ 중점 조건을 이용한다.

상세 풀이

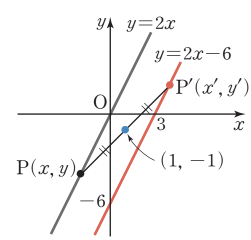
(1) 점 $(2,\ 1)$을 점 $(1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$$\frac{2+a}{2}=1,\ \frac{1+b}{2}=-1$$

$$\therefore a=0,\ b=-3$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -3)$입니다.

(2) 직선 $y=2x$ 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 점 $(1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라고 하면



$$\frac{x+x'}{2}=1,\ \frac{y+y'}{2}=-1$$

$$\therefore x=2-x',\ y=-2-y' \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠을 $y=2x$에 대입하면

$$-2-y'=2(2-x') \qquad \therefore y'=2x'-6$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-6$입니다.

정답 ➡ (1) $(0,\ -3)$ (2) $y=2x-6$

보충 설명

점에 대한 대칭이동을 정리하면 다음과 같습니다.

(1) 점 $P(x,\ y)$를 점 $A(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점 P′은

$$P'(2a-x,\ 2b-y)$$

(2) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 점 $A(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(2a-x,\ 2b-y)=0$$

풀이집 p.209

숫자 바꾸기

◆ 보충 설명

03-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $(-1,\ 3)$을 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(2) 직선 $x-2y-3=0$을 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하여라.

표현 바꾸기

03-2 점 $\mathrm{P}(5,\ a)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점이 $\mathrm{Q}(b,\ 4)$가 되었을 때, 선분 PQ의 길이는?

① $4\sqrt{6}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ 7

개념 넓히기 ★★☆

03-3 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$를 점 $(-1,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

13

정답 **03-1** (1) $(3,\ 1)$ (2) $x-2y+9=0$ **03-2** ③
03-3 18

직선에 대한 대칭이동

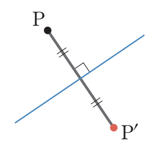
예제 04

다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 직선 $2x+y-2=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(2) 직선 $y=2x$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하여라.

접근 방법



오른쪽 그림과 같이 두 점 P, P′이 직선 l에 대하여 대칭이면 직선 l은 선분 PP′을 수직이등분합니다. 즉, 직선에 대한 대칭이동은

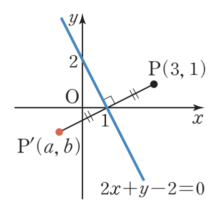
(i) 중점 조건 : 선분 PP′의 중점이 직선 l 위의 점이다.

(ii) 수직 조건 : $\overline{\mathrm{PP'}}\perp l$, 즉 ($\overline{\mathrm{PP'}}$의 기울기)$\times$($l$의 기울기)$=-1$

이 성립함을 이용하여 직선에 대하여 대칭이동한 점의 좌표나 도형의 방정식을 구합니다.

Bible 직선에 대한 대칭이동 ➡ 중점 조건과 수직 조건을 이용한다.

상세 풀이



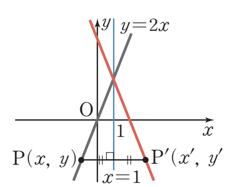
(1) 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 직선 $2x+y-2=0$, 즉 $y=-2x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P'}(a,\ b)$라고 하면 선분 PP′의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{3+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$이고, 이 점이 직선 $y=-2x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{b+1}{2}=-2\cdot\frac{a+3}{2}+2 \qquad \therefore\ 2a+b=-3 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

또한 직선 PP′이 직선 $y=-2x+2$와 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-3}\cdot(-2)=-1 \qquad \therefore\ a-2b=1 \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$이므로 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -1)$입니다.



(2) 직선 $y=2x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P'}(x',\ y')$이라고 하면 선분 PP′의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이고, 이 점이 직선 $x=1$ 위의 점이고, y좌표는 변하지 않으므로

$$\frac{x+x'}{2}=1,\ y'=y \qquad \therefore\ x=2-x',\ y=y'$$

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$$y'=2(2-x') \qquad \therefore\ y'=-2x'+4$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x+4$입니다.

정답 ➡ (1) $(-1,\ -1)$ (2) $y=-2x+4$

풀이집 p.210

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

04-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$를 직선 $x-2y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(2) 직선 $y=-2x+5$를 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하여라.

표현 바꾸기

04-2 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 $(4, 2)$, $(-1, 7)$이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$를 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

04-3 직선 $y=2x+2$를 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식이 $y=mx+n$일 때, 상수 m, n에 대하여 mn의 값은?

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 4

13

정답 **04-1** (1) $(3, -4)$ (2) $y=2x+1$　**04-2** (1) 4 (2) $(x+1)^2+(y+2)^2=4$
04-3 ③

최단거리

예제 05

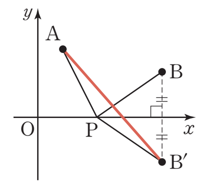
두 점 $A(-2,\ 3)$, $B(6,\ 3)$과 x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하여라.

접근 방법

두 점 A, B와 x축 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구합니다.

❶ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B′의 좌표를 구합니다.

❷ $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$이므로 구하는 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같음을 이용합니다.



Bible 꺾이는 선의 길이의 최솟값을 구하는 문제는 대칭이동을 이용한다.

상세 풀이

점 $B(6,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면

$$B'(6,\ -3)$$

오른쪽 그림에서 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

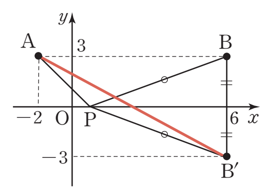
$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

즉, $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같습니다.

$$\therefore\ \overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB'}$$

$$=\sqrt{(6+2)^2+(-3-3)^2}=10$$

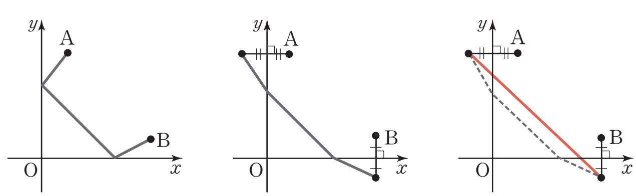
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 10입니다.



정답 ➡ 10

보충 설명

같은 원리로 제1사분면 위에 두 점 A, B가 주어져 있을 때, 점 A에서 y축과 x축을 지나서 점 B까지 가는 최단거리는 다음과 같이 구할 수 있습니다.



풀이집 p.211

숫자 바꾸기

05-1 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(11,\ 3)$과 x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하여라.

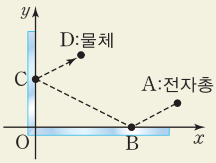
표현 바꾸기

05-2 두 점 $A(4,\ 2)$, $B(6,\ 2)$와 x축 위를 움직이는 점 P, 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은?

① $\sqrt{17}$　② $2\sqrt{17}$　③ $3\sqrt{17}$
④ $4\sqrt{17}$　⑤ $5\sqrt{17}$

개념 넓히기 ★★☆

05-3 오른쪽 그림과 같이 x축과 y축에 거울이 부착되어 있다. 점 $A(6,\ 1)$의 위치에 있는 전자총으로 x축 위의 점 B를 겨냥하여 쏘아서 점 $D(2,\ 3)$의 위치에 있는 물체를 맞추려고 할 때, 점 B의 좌표를 구하여라. (단, 전자총의 빛은 오른쪽 그림과 같이 반사되며, 빛이 들어 올 때와 반사되어 나갈 때 축과 이루는 각은 같다.)



13

정답 05-1 13　05-2 ②　05-3 $(4,\ 0)$

예제 06

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=|2x+4|$ (2) $y=|2x|+4$

접근 방법

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0보다 크거나 같은 경우와 0보다 작은 경우로 나누어 각 범위에서 그래프를 그립니다.

또는 두 함수 $y=f(x)$, $y=-f(x)$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭임을 이용하여 그릴 수도 있습니다.

Bible 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값 또는 y의 값을 기준으로 범위를 나누어 그래프를 그린다.

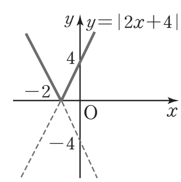
상세 풀이

(1) $y=|2x+4|$에서

(i) $2x+4\geq 0$, 즉 $x\geq -2$일 때 $y=2x+4$

(ii) $2x+4<0$, 즉 $x<-2$일 때 $y=-(2x+4)$

(i), (ii)에서 함수 $y=|2x+4|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.

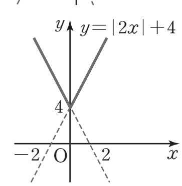


(2) $y=|2x|+4$에서

(i) $2x\geq 0$, 즉 $x\geq 0$일 때 $y=2x+4$

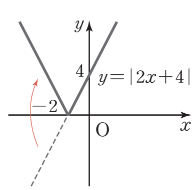
(ii) $2x<0$, 즉 $x<0$일 때 $y=-2x+4$

(i), (ii)에서 함수 $y=|2x|+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.

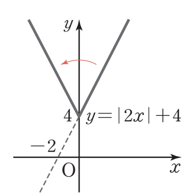


다른 풀이

(1) $y=2x+4$의 그래프를 그린 후, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동하여 그리면 오른쪽 그림과 같습니다.



(2) $y=2x+4$ $(x\geq 0)$을 그린 후, $x\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동하여 그리면 오른쪽 그림과 같습니다.



정답 ➡ 풀이 참조

보충 설명

(1) $y=|2x+4|=|2(x+2)|$의 그래프는 $y=|2x|$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것입니다.

(2) $y=|2x|+4$의 그래프는 $y=|2x|$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것입니다.

풀이집 p.212

숫자 바꾸기

06-1 함수 $f(x)=x^2-2x-3$에 대하여 다음 식의 그래프를 그려라.

(1) $y=f(x)$ (2) $y=|f(x)|$

(3) $y=f(|x|)$ (4) $|y|=f(x)$

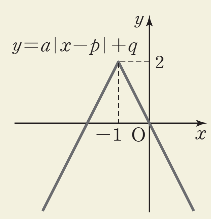
표현 바꾸기 ◆다른 풀이

06-2 다음 식의 그래프를 그려라.

(1) $|x|+|y|=1$ (2) $|x|-|y|=1$

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

06-3 함수 $y=a|x-p|+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p, q에 대하여 $a+p+q$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

정답 **06-1** p.491 참조 **06-2** p.491 참조 **06-3** ②

예제 07

절댓값 기호를 여러 개 포함한 식의 그래프

함수 $y=|x+1|+|x-1|$의 그래프를 그려라.

접근 방법

$y=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$와 같이 절댓값 기호를 두 개 포함한 식은 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값 a, b를 기준으로

$$x<a,\ a\le x<b,\ x\ge b$$

와 같이 x의 값의 범위를 나눈 다음, 각 범위에서 그래프를 그립니다.

마찬가지 방법으로 $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ $(a<b<c)$와 같이 절댓값 기호를 세 개 포함한 식은 x의 값의 범위를

$$x<a,\ a\le x<b,\ b\le x<c,\ x\ge c$$

로 나누어 그래프를 그리면 됩니다.

Bible 절댓값 기호가 2개 이상이면 꼭 범위를 나누자!

상세 풀이

$y=|x+1|+|x-1|$에서

(i) $x<-1$일 때, $|x+1|=-(x+1)$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$$y=-(x+1)-(x-1)=-2x$$

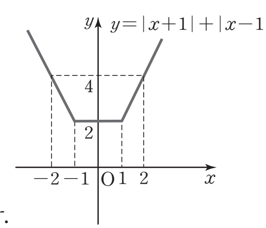
(ii) $-1\le x<1$일 때, $|x+1|=x+1$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$$y=(x+1)-(x-1)=2$$

(iii) $x\ge1$일 때, $|x+1|=x+1$, $|x-1|=x-1$이므로

$$y=(x+1)+(x-1)=2x$$

(i)~(iii)에서 함수 $y=|x+1|+|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같습니다.

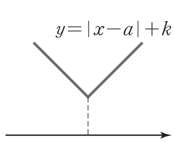


정답 ➡ 풀이 참조

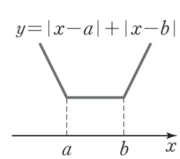
보충 설명

절댓값 기호의 개수에 따른 그래프의 개형은 다음과 같습니다. (단, a, b, k는 상수이다.)

① 절댓값 기호가 1개일 때



② 절댓값 기호가 2개일 때 (단, $a<b$)



풀이집 p.214

숫자 바꾸기

07-1 **다음 함수의 그래프를 그려라.**

(1) $y=|x+1|+x-1$　　(2) $y=|x+2|+2|x-2|$

표현 바꾸기

07-2 **함수 $f(x)=|x+2|+|x-4|$에 대하여 다음 물음에 답하여라.**

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-5)-1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

07-3 **함수 $f(x)=|x|-|x-2|$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는?**

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

13

정답 **07-1** p.491 참조　**07-2** (1) $a>6$ (2) $-2<m<-1$
07-3 ⑤