개념check

[구간에 따라 다르게 정의된 정적분의 계산]

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \le c) \\ h(x) & (x \ge c) \end{cases}$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a<c<b$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c g(x)dx+\int_c^b h(x)dx$$

[우함수와 기함수의 정적분]

• 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $f(-x)=f(x)$이면, 즉 $f(x)$가 우함수이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

(2) $f(-x)=-f(x)$이면, 즉 $f(x)$가 기함수이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

[정적분으로 정의된 함수]

• 적분 구간이 상수인 경우

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$($a$, b는 상수)의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ $\int_a^b f(t)dt=k$(k는 상수)로 놓고 $f(x)=g(x)+k$임을 이용한다.

• 적분 구간에 변수가 있는 경우

(1) $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ 양변을 x에 대하여 미분하고 $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용한다.

(2) $\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$의 꼴일 때, 함수 $f(x)$는

⇨ 좌변을 $x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

기본문제

[예제]

1. 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt=x^2-3x-4$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 양수 a에 대하여 $f(a)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[문제]

2. 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt=x^2-4x+a$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $f(a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

[예제]

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x (t^2-4t+2)dt$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[문제]

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\int_0^x (t^2+3t+4)dt$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[예제]

5. 정적분 $\int_0^3 |2x-4|dx$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[문제]

6. 정적분 $\int_{-1}^{2} 3|x^2-1|dx$의 값은?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

평가문제

[중단원 학습 점검]

7. 함수 $f(x)=\int_{2}^{x}(t^2-1)(t+1)dt$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

[중단원 학습 점검]

8. 다음을 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값은?

$$f(x)=6x^2-4x+2\int_{0}^{1}f(x)dx$$

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[중단원 학습 점검]

9. 임의의 실수 x에 대하여
$\int_{1}^{x}f(t)dt=x^4+ax^2+3$을 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $f(a)$의 값은?

① -236 ② -232
③ -228 ④ -224
⑤ -220

[중단원 학습 점검]

10. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}3(t+1)(t-1)dt$의 극댓값을 a, 극솟값을 b라고 할 때, ab의 값은?

① -4 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 4

[중단원 학습 점검]

11. 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여

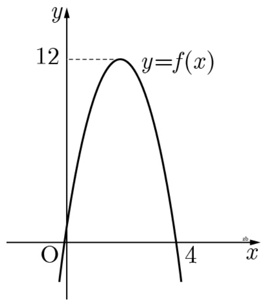
$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=-2,\ \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\frac{4}{3}$$

가 성립할 때, $f(-2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

[중단원 학습 점검]

12. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\int_{2}^{3}|f'(x)|dx$를 구하면?



① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

[중단원 학습 점검]

13. 연속함수 $f(x)$가 $x \geq 0$에서 $f(x) \geq 0$이고 다음을 모두 만족시킬 때, $\int_{2}^{3} f(x)dx$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.
(나) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 8$, $\int_{-3}^{1} f(x)dx = -9$
(다) $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -3$

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[대단원 학습 점검]

14. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_{1}^{x} (t^2 - 4t + 1)dt$는?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[대단원 학습 점검]

15. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = \begin{cases} -x+4 & (x < 2) \\ 2 & (x \geq 2) \end{cases}$이고 $f(0) = 0$일 때, $\int_{0}^{3} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{41}{3}$ ② 14
③ $\frac{43}{3}$ ④ $\frac{44}{3}$
⑤ 15

[대단원 학습 점검]

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 등식

$$\int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 6x^4 + 3x^2 + 2$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① -6 ② -5
③ -4 ④ -3
⑤ -2

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-3$

또, 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^2-3a-4=(a+1)(a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=4$

$\therefore f(a)=5$

2) [정답] ③

[해설] 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-4$

또, 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=a-3=0$

따라서 상수 $a=3$

$\therefore f(a)=2$

3) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^2-4x+2$로 놓고

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t^2-4t+2)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)$

$=-1$

4) [정답] ⑤

[해설] $f(x)=x^2+3x+4$로 놓고

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(t^2+3t+4)dt$

$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)$

$=4$

5) [정답] ③

[해설] $f(x)=|2x-4|$이라고 하면 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서

$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x<2)\\ 2x-4 & (2\le x\le 3)\end{cases}$

이므로

$\int_0^3|2x-4|dx$

$=\int_0^2(-2x+4)dx+\int_2^3(2x-4)dx$

$=\left[-x^2+4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^3$

$=4+1=5$

6) [정답] ④

[해설] $f(x)=3|x^2-1|$이라고 하면

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+3 & (-1\le x\le 1)\\ 3x^2-3 & (1<x\le 2)\end{cases}$

이므로

$\int_{-1}^2 3|x^2-1|dx$

$=\int_{-1}^1(-3x^2+3)dx+\int_1^2(3x^2-3)dx$

$=\left[-x^3+3x\right]_{-1}^1+\left[x^3-3x\right]_1^2$

$=4+4=8$

7) [정답] ④

[해설] $f(x)=\int_2^x(t^2-1)(t+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x^2-1)(x+1)$이므로

$f'(2)=(2^2-1)(2+1)=9$

8) [정답] ③

[해설] $\int_0^1 f(x)dx=a$로 놓으면

$f(x)=6x^2-4x+2a$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(6x^2-4x+2a)dx$

$=\left[2x^3-2x^2+2ax\right]_0^1=2a$

즉, $a=2a$이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=6x^2-4x$이다.

$\therefore f(1)=2$

9) [정답] ④

[해설] $\int_1^x f(t)dt=x^4+ax^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3+2ax$

$\int_1^x f(t)dt=x^4+ax^2+3$

의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+3$

즉, $a=-4$이므로 $f(x)=4x^3-8x$

$\therefore f(a)=-224$

10) [정답] ①

[해설] $f(x)=\int_0^x 3(t+1)(t-1)dt=\int_0^x(3t^2-3)dt$

$=x^3-3x$

함수 $f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

즉, $a=2$, $b=-2$이므로 $ab=-4$

11) [정답] ④

[해설] $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} (ax^2+bx)dx$

$=2\int_{0}^{1} ax^2 dx = \frac{2}{3}a$

$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} (ax^3+bx^2)dx$

$=2\int_{0}^{1} bx^2 dx = \frac{2}{3}b$

$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = -2$, $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$이므로

$\frac{2}{3}a=-2$, $\frac{2}{3}b=\frac{4}{3}$, 즉 $a=-3$, $b=2$

따라서 $f(x)=-3x+2$이므로 $f(-2)=8$

12) [정답] ③

[해설] 주어진 그래프에서 x절편의 값은 $0, 4$이므로

$f(x)=ax(x-4)$

꼭짓점의 좌표가 $(2, 12)$이므로

$12=-4a$

$a=-3$

$f(x)=-3x^2+12x$

$f'(x)=-6x+12$

닫힌구간 $[2, 3]$에서

$|f'(x)|=|-6x+12|=6x-12$

$\int_{2}^{3} |f'(x)|dx$

$=\int_{2}^{3} (6x-12)dx$

$=\left[3x^2-12x\right]_2^3=(-9)-(-12)=3$

13) [정답] ②

[해설] 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 원점에 대해 대칭이므로

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$이고

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{-\beta}^{-\alpha} f(x)dx$이다.

$\int_{0}^{1} f(x)dx = a$, $\int_{1}^{2} f(x)dx = b$,

$\int_{2}^{3} f(x)dx = c$로 놓으면

(ⅰ) $\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = a+b$

$a+b=8$ $\cdots$ ㉠

(ⅱ) $\int_{-3}^{1} f(x)dx$

$= \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx$

$=-\int_{2}^{3} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx = -b-c$

$b+c=9$ $\cdots$ ㉡

(ⅲ) $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{1} f(x)dx = -a$

즉, $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

$b=5$를 ㉡에 대입하면 $c=4$

$\therefore \int_{2}^{3} f(x)dx = 4$

14) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^2-4x+1$이라고 하고

$F(x)$를 $f(x)$의 한 부정적분이라고 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}(t^2-4t+1)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{F(x)-F(1)\}}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=-1$

15) [정답] ①

[해설] $f'(x)=\begin{cases}-x+4 & (x<2)\\ 2 & (x\ge 2)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+4x+C_1 & (x<2)\\ 2x+C_2 & (x\ge 2)\end{cases}$

$f(0)=0$이므로 $C_1=0$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=6$, $\lim_{x\to2+}f(x)=4+C_2$이므로

$C_2=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+4x & (x<2)\\ 2x+2 & (x\ge 2)\end{cases}$이므로

$\int_{0}^{3} f(x)dx$

$=\int_{0}^{2}(-\frac{1}{2}x^2+4x)dx+\int_{2}^{3}(2x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x^2\right]_0^2+\left[x^2+2x\right]_2^3$

$=-\frac{4}{3}+15=\frac{41}{3}$

16) [정답] ④

[해설] $\int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x)-6x^4+3x^2+2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-24x^3+6x$

$xf'(x)=24x^3-6x$이므로

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

$f'(x)=24x^2-6$

$f(x)=\int(24x^2-6)dx=8x^3-6x+C$ (단, C는 적분상수)

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-6x^4+3x^2+2$

의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$

$C=-1$

따라서 $f(x)=8x^3-6x-1$이다.

$\therefore f(-1)=-8+6-1=-3$

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125