01 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 하며 $b=\frac{a+c}{2}$가 성립한다.

참고 $b=\frac{a+c}{2}$에서 b를 두 수 a와 c의 산술평균이라 한다.

◪ 다음 수열이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x, y, z의 값을 각각 구하여라.

1. $x,\ -1,\ y,\ 11,\ z,\ \cdots$

2. $x,\ 13,\ y,\ 5,\ z,\ \cdots$

3. $-1,\ x,\ 5,\ y,\ 11,\ \cdots$

4. $32,\ x,\ 22,\ y,\ 12,\ \cdots$

◪ 다음 세 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.

5. $5,\ x,\ 11$

6. $8,\ 5,\ x$

7. $x,\ 2x,\ 9$

8. $1,\ x,\ 19$

9. $-3,\ x,\ 11$

10. $3x,\ x^2-2,\ 2x^2+5$

11. $2x-3,\ x^2,\ 3x+6$ (단, $x>0$)

12. $x+1,\ 3x-2,\ 2x-1$

◪ 다음 조건을 만족하는 세 수가 등차수열을 이룰 때, 세 수를 구하여라.

13. 세 수의 합은 9이고 세 수의 곱은 15이다.

14. 세 수의 합은 -3이고, 세 수의 곱은 15이다.

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

15. 세 수의 합은 9이고, 세 수의 곱은 -48이다.

16. 세 수의 합은 12이고, 세 수의 곱은 48이다.

17. 세 수의 합은 -15이고, 세 수의 곱은 -45이다.

18. 세 수의 합이 15이고 곱이 105이다.

19. 세 수의 합이 12이고 곱이 28이다.

20. 세 수의 합은 6이고, 세 수의 곱은 -10이다.

◪ 다음 조건을 만족하는 네 수가 등차수열을 이룰 때, 네 수를 구하여라.

21. 네 수의 합은 28이고, 가운데 두 수의 곱이 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱보다 72가 크다.

22. 네 수의 합은 8이고, 가운데 두 수의 곱이 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱보다 32가 크다.

23. 네 수의 합이 24이고 가운데 두 수의 곱이 처음 수와 마지막 수의 곱보다 32만큼 크다.

◪ x에 대한 다항식 $f(x)$를 세 일차식 $x+1,\ x-1,\ x-2$로 나누었을 때의 나머지가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 상수 a의 값을 구하여라.

24. $f(x)=ax^2+x-1$

25. $f(x)=x^2+ax+3a$

26. $f(x)=x^2-ax$

27. $f(x)=x^2+ax+a$

◪ 다음 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-1,\ x+1,\ x+2$로 나누었을 때의 나머지가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 상수 a의 값을 구하여라.

28. $f(x)=x^2+ax+a^2$

29. $f(x)=x^2+ax+9$

30. $f(x)=ax^2+x+3$

02 등차수열의 합

1. 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 다음과 같다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

2. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$

◪ **다음을 만족시키는 등차수열의 합을 구하시오.**

31. $2+5+8+\cdots+41$

32. $15+12+9+6+\cdots+(-42)$

33. $33+30+27+\cdots+3$

◪ **등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 1에서 100까지의 자연수에 대하여 다음을 구하여라.**

34. 2의 배수의 총합

35. 3의 배수의 총합

36. 5의 배수의 총합

◪ **첫째항 a와 제n항 l이 다음과 같은 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구하여라.**

37. $a=-8,\ l=-6,\ n=13$

38. $a=-3,\ l=12,\ n=8$

39. $a=1,\ l=99,\ n=50$

40. $a=2,\ l=18,\ n=15$

41. $a=3,\ l=17,\ n=10$

◪ **첫째항 a와 공차 d가 다음과 같은 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구하여라.**

42. $a=15,\ d=-3,\ n=12$

43. $a=4,\ d=3,\ n=12$

44. $a=2,\ d=3,\ n=10$

45. $a=3,\ d=2,\ n=10$

46. $a=2,\ d=2,\ n=30$

47. $a=4,\ d=-2,\ n=30$

48. $a=3,\ d=5,\ n=10$

◪ 다음과 같이 주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n의 최솟값을 구하여라.

49. $-33,\ -29,\ -25,\ -21,\ \cdots$

50. $a_3=-25,\ a_7=-17$

51. $a=-30,\ d=4$

52. $a=-37,\ d=5$

53. $a_6=-25,\ a_{17}=8$

◪ 다음과 같이 주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n의 최댓값을 구하여라.

54. $13,\ 11,\ 9,\ 7,\ \cdots$

55. $a_3=23,\ a_6=14$

56. $a_3=20,\ a_{10}=-1$

57. $a_1=50,\ d=-3$

58. $a_1=35,\ d=-4$

59. $a_1=15,\ d=-2$

60. $a_1=75,\ d=-8$

◪ 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 구하여라.

61. $a=23,\ S_{15}=-75$일 때, d의 값

62. $a=17,\ S_9=81$일 때, d의 값

63. $a=2,\ S_{12}=156$일 때, d의 값

64. $a=30,\ S_{10}=210$일 때, d의 값

65. $a=3,\ S_{8}=164$일 때, d의 값

66. $a=-3,\ S_{10}=285$일 때, d의 값

67. $a=5,\ S_{9}=81$일 때, a_9의 값

68. $a=42,\ S_{21}=-63$일 때, a_{21}의 값

69. $a=23,\ S_{16}=56$일 때, a_{16}의 값

70. $a=7,\ S_{14}=196$일 때, a_{14}의 값

71. $S_8=56,\ S_{18}=-54$일 때, S_{24}의 값

72. $S_{10}=50,\ S_{20}=200$일 때, S_{30}의 값

73. $S_5=-5,\ S_{10}=65$일 때, S_{15}의 값

◪ 다음을 구하여라.

74. 첫째항부터 제10항까지의 합이 140, 첫째항부터 제20항까지의 합이 480인 등차수열의 첫째항부터 제26항까지의 합

75. 첫째항부터 제10항까지의 합이 130이고, 제11항부터 제20항까지의 합이 330인 등차수열의 제21항부터 제30항까지의 합

76. -8과 30사이에 18개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

77. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, $a_1+a_2+a_3+a_4=8$, $a_5+a_6+a_7+a_8=16$일 때, $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$의 값을 구하여라.

◪ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때, a_1과 a_7을 각각 구하여라.

78. $S_n=3n^2-2n+1$

79. $S_n=2n^2+n-3$

80. $S_n=n^2+n+1$

81. $S_n=2n^2-n$

82. $S_n=n^2+2n$

◪ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하고, 첫째항부터 등차수열을 이루는지 확인하여라.

83. $S_n=2n^2-n+2$

84. $S_n=(n+1)^2$

85. $S_n=n^2-n$

86. $S_n=n^2+3n$

87. $S_n=2n^2+n+3$

88. $S_n=n^2-5n+6$

89. $S_n=n^2-5n$

90. $S_n=n^2-3n$

정답 및 해설

1) $x=-7,\ y=5,\ z=17$

⇨ y는 -1과 11의 등차중항이므로 $y=\frac{-1+11}{2}=5$

-1은 x와 y의 등차중항이므로

$-1=\frac{x+y}{2}=\frac{x+5}{2}$

$x+5=-2 \qquad \therefore\ x=-7$

11은 y와 z의 등차중항이므로

$11=\frac{y+z}{2}=\frac{5+z}{2}$

$5+z=22 \qquad \therefore\ z=17$

$\therefore\ x=-7,\ y=5,\ z=17$

2) $x=17,\ y=9,\ z=1$

⇨ y는 13과 5의 등차중항이므로 $y=\frac{13+5}{2}=9$

13은 x와 y의 등차중항이므로

$13=\frac{x+y}{2}=\frac{x+9}{2}$

$x+9=26 \qquad \therefore\ x=17$

5는 y와 z의 등차중항이므로 $5=\frac{y+z}{2}=\frac{9+z}{2}$

$9+z=10 \qquad \therefore\ z=1$

$\therefore\ x=17,\ y=9,\ z=1$

3) $x=2,\ y=8$

⇨ x는 -1과 5의 등차중항이므로 $x=\frac{-1+5}{2}=2$

y는 5와 11의 등차중항이므로 $y=\frac{5+11}{2}=8$

$\therefore\ x=2,\ y=8$

4) $x=27,\ y=17$

⇨ x는 32와 22의 등차중항이므로 $x=\frac{32+22}{2}=27$

y는 22와 12의 등차중항이므로 $y=\frac{22+12}{2}=17$

$\therefore\ x=27,\ y=17$

5) 8

⇨ $5,\ x,\ 11$이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$x=\frac{5+11}{2}=8$

6) 2

⇨ $8,\ 5,\ x$가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$5=\frac{8+x}{2} \qquad \therefore\ x=2$

7) 3

⇨ $2x=\frac{x+9}{2},\ 4x=x+9,\ 3x=9 \qquad \therefore\ x=3$

8) 10

⇨ x가 1과 19의 등차중항이므로 $x=\frac{1+19}{2}=10$

9) 4

⇨ $x=\frac{-3+11}{2}=4$

10) -3

⇨ $2(x^2-2)=3x+(2x^2+5),\ 3x=-9 \qquad \therefore\ x=-3$

11) 3

⇨ $2x^2=(2x-3)+(3x+6)$에서

$2x^2-5x-3=0,\ (2x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

12) $\frac{4}{3}$

⇨ $3x-2=\frac{(x+1)+(2x-1)}{2},\ 6x-4=3x$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$

13) $1,\ 3,\ 5$

⇨ 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면

세 수의 합이 9이므로 $(a-d)+a+(a+d)=9$

$3a=9 \qquad \therefore\ a=3$

따라서 세 수는 $3-d,\ 3,\ 3+d$이고,

세 수의 곱이 15이므로

$(3-d)\times 3\times(3+d)=15$

$9-d^2=5,\ d^2=4 \qquad \therefore\ d=\pm 2$

따라서 구하는 세 수는 $1,\ 3,\ 5$이다.

14) $-5,\ -1,\ 3$

⇨ 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면

세 수의 합이 -3이므로

$(a-d)+a+(a+d)=-3$

$3a=-3 \qquad \therefore\ a=-1$

따라서 세 수는 $-1-d,\ -1,\ -1+d$이고,

세 수의 곱이 15이므로

$(-1-d)\times(-1)\times(-1+d)=15$

$d^2-1=15 \qquad \therefore\ d=\pm 4$

따라서 구하는 세 수는 $-5,\ -1,\ 3$이다.

15) $-2,\ 3,\ 8$

⇨ 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면

세 수의 합이 9이므로

$(a-d)+a+(a+d)=9$

$3a=9 \qquad \therefore\ a=3$

따라서 세 수는 $3-d,\ 3,\ 3+d$이고, 세 수의 곱이 -48이므로 $(3-d)\times 3\times(3+d)=-48$

$9-d^2=-16 \qquad \therefore\ d=\pm 5$

따라서 구하는 세 수는 $-2,\ 3,\ 8$이다.

16) $2,\ 4,\ 6$

⇨ 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

세 수의 합이 12이므로
$(a-d)+a+(a+d)=12$
$3a=12 \quad \therefore a=4$
따라서 세 수는 $4-d,\ 4,\ 4+d$이고, 세 수의 곱이 48이므로 $(4-d)\times 4\times(4+d)=48$
$16-d^2=12 \quad \therefore d=\pm 2$
따라서 구하는 세 수는 2, 4, 6이다.

17) $-9,\ -5,\ -1$
⇨ 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면
세 수의 합이 -15이므로
$(a-d)+a+(a+d)=-15$
$3a=-15 \quad \therefore a=-5$
따라서 세 수는 $-5-d,\ -5,\ -5+d$이고,
세 수의 곱이 -45이므로
$(-5-d)\times(-5)\times(-5+d)=-45$
$25-d^2=9,\ d^2=16 \quad \therefore d=\pm 4$
따라서 구하는 세 수는 $-9,\ -5,\ -1$이다.

18) 3, 5, 7
⇨ 구하는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면
$(a-d)+a+(a+d)=15$ …… ㉠
$(a-d)\times a\times(a+d)=105$ …… ㉡
㉠에서 $3a=15$이므로 $a=5$
$a=5$를 ㉡에 대입하면
$(5-d)\times 5\times(5+d)=105$
$25-d^2=21,\ d^2=4 \quad \therefore d=\pm 2$
따라서 구하는 세 수는 3, 5, 7이다.

19) 1, 4, 7
⇨ 구하는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면
$(a-d)+a+(a+d)=12$ …… ㉠
$(a-d)\times a\times(a+d)=28$ …… ㉡
㉠에서 $3a=12$이므로 $a=4$
$a=4$를 ㉡에 대입하면
$(4-d)\times 4\times(4+d)=28$
$16-d^2=7,\ d^2=9 \quad \therefore d=\pm 3$
따라서 세 수는 1, 4, 7이다.

20) $-1,\ 2,\ 5$
⇨ 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면
세 수의 합이 6이므로 $(a-d)+a+(a+d)=6$
$3a=6 \quad \therefore a=2$
따라서 세 수는 $2-d,\ 2,\ 2+d$이고,
세 수의 곱이 -10이므로
$(2-d)\times 2\times(2+d)=-10$
$4-d^2=-5,\ d^2=9 \quad \therefore d=\pm 3$
따라서 구하는 세 수는 $-1,\ 2,\ 5$이다.

21) $-2,\ 4,\ 10,\ 16$
⇨ 네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$로 놓으면
네 수의 합이 28이므로
$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=28$
$4a=28 \quad \therefore a=7$
따라서 네 수는 $7-3d,\ 7-d,\ 7+d,\ 7+3d$이고, 가운데 두 수의 곱이 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱보다 72가 크므로
$(7-d)(7+d)=(7-3d)(7+3d)+72$
$49-d^2=49-9d^2+72 \quad \therefore d=\pm 3$
따라서 구하는 네 수는 $-2,\ 4,\ 10,\ 16$이다.

22) $-4,\ 0,\ 4,\ 8$
⇨ 네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$로 놓으면
네 수의 합이 8이므로
$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$
$4a=8 \quad \therefore a=2$
따라서 네 수는 $2-3d,\ 2-d,\ 2+d,\ 2+3d$이고, 가운데 두 수의 곱이 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱보다 32가 크므로
$(2-d)(2+d)=(2-3d)(2+3d)+32$
$4-d^2=4-9d^2+32 \quad \therefore d=\pm 2$
따라서 구하는 네 수는 $-4,\ 0,\ 4,\ 8$이다.

23) 0, 4, 8, 12
⇨ 구하는 네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$로 놓으면
$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=24$ …… ㉠
$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+32$ …… ㉡
㉠에서 $4a=24$이므로 $a=6$
$a=6$을 ㉡에 대입하면
$(6-d)(6+d)=(6-3d)(6+3d)+32$
$36-d^2=36-9d^2+32$
$8d^2=32 \quad \therefore d^2=4$
$\therefore d=\pm 2$
따라서 네 수는 0, 4, 8, 12이다.

24) $\frac{1}{3}$
⇨ $f(x)$를 $x+1,\ x-1,\ x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-1),\ f(1),\ f(2)$이다.
$f(-1)=a-2,\ f(1)=a,\ f(2)=4a+1$
따라서 세 수 $a-2,\ a,\ 4a+1$이 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2a=(a-2)+(4a+1) \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

25) 3
⇨ $f(x)=x^2+ax+3a$를 $x+1,\ x-1,\ x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-1),\ f(1),\ f(2)$이고
$f(-1)=2a+1,\ f(1)=4a+1,\ f(2)=5a+4$
따라서 세 수 $2a+1,\ 4a+1,\ 5a+4$가 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2(4a+1)=(2a+1)+(5a+4) \quad \therefore a=3$

26) -3
⇨ $f(x)$를 $x+1,\ x-1,\ x-2$로 나눌 때의 나머지는

각각 $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$이다.
$f(-1)=a+1$, $f(1)=-a+1$, $f(2)=-2a+4$
따라서 세 수 $a+1$, $-a+1$, $-2a+4$가 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2(-a+1)=(a+1)+(-2a+4)$ $\quad\therefore\ a=-3$

27) 3
⇨ $f(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$이다.
$f(-1)=1$, $f(1)=2a+1$, $f(2)=3a+4$
따라서 세 수 1, $2a+1$, $3a+4$가 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2(2a+1)=1+(3a+4)$ $\quad\therefore\ a=3$

28) -3
⇨ 다항식 $f(x)=x^2+ax+a^2$을 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각
$f(1)=1+a+a^2$, $f(-1)=1-a+a^2$,
$f(-2)=4-2a+a^2$
$1+a+a^2$, $1-a+a^2$, $4-2a+a^2$이 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2(1-a+a^2)=(1+a+a^2)+(4-2a+a^2)$
$2-2a+2a^2=5-a+2a^2$
$\therefore\ a=-3$

29) -3
⇨ $f(x)=x^2+ax+9$를 $x+2$, $x+1$, $x-1$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$이고
$f(-2)=-2a+13$, $f(-1)=-a+10$,
$f(1)=a+10$
따라서 세 수 $-2a+13$, $-a+10$, $a+10$이 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2(-a+10)=(-2a+13)+(a+10)$
$\therefore\ a=-3$

30) $-\dfrac{1}{3}$
⇨ 다항식 $f(x)=ax^2+x+3$을 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각
$f(1)=a+4$, $f(-1)=a+2$, $f(-2)=4a+1$
$a+4$, $a+2$, $4a+1$이 이 순서로 등차수열을 이루므로 $2(a+2)=(a+4)+(4a+1)$
$2a+4=5a+5$ $\quad\therefore\ a=-\dfrac{1}{3}$

31) 301
⇨ 공차는 3이므로 41을 제n항이라 하면
$a_n=2+3(n-1)=41$ $\quad\therefore\ n=14$
$S_{14}=\dfrac{14\times(2+41)}{2}=301$

32) -270
⇨ 첫째항이 15, 공차가 -3인 등차수열이므로
-42를 제n항이라고 하면
$15+(-3)\times(n-1)=-42$에서 $n=20$
$S_{20}=\dfrac{20\times(15-42)}{2}=-270$

33) 198
⇨ 공차는 -3이므로 3을 제n항이라 하면
$a_n=33-3(n-1)=3$ $\quad\therefore\ n=11$
$\therefore\ S_{11}=\dfrac{11\times(33+3)}{2}=198$

34) 2550
⇨ 1부터 100까지의 2의 배수는
2, 4, 6, 8, $\cdots$, 100으로 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.
이때, 항수는 50이므로 구하는 총합은
$S_{50}=\dfrac{50\times(2+100)}{2}=2550$

35) 1683
⇨ 1부터 100까지의 3의 배수는 3, 6, 9, 12, $\cdots$, 99로 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이다.
이때, 항수는 33이므로 구하는 총합은
$S_{33}=\dfrac{33\times(3+99)}{2}=1683$

36) 1050
⇨ 1부터 100까지의 5의 배수는
5, 10, 15, 20, $\cdots$, 100으로 첫째항이 5, 공차가 5인 등차수열이다.
이때, 항수는 20이므로 구하는 총합은
$S_{20}=\dfrac{20\times(5+100)}{2}=1050$

37) -91
⇨ $S_{13}=\dfrac{13\times\{(-8)+(-6)\}}{2}=-91$

38) 36
⇨ $S_8=\dfrac{8\times\{(-3)+12\}}{2}=36$

39) 2500
⇨ $S_{50}=\dfrac{50\times(1+99)}{2}=2500$

40) 150
⇨ $S_{15}=\dfrac{15\times(2+18)}{2}=150$

41) 100
⇨ $S_{10}=\dfrac{10\times(3+17)}{2}=100$

42) -18
⇨ $S_{12}=\dfrac{12\times\{2\times15+(12-1)\times(-3)\}}{2}=-18$

43) 246

⇨ $S_{12}=\dfrac{12\times\{2\times4+(12-1)\times3\}}{2}=246$

44) 155

⇨ $S_{10}=\dfrac{10\times\{2\times2+(10-1)\times3\}}{2}=155$

45) 120

⇨ $S_{10}=\dfrac{10\times\{2\times3+(10-1)\times2\}}{2}=120$

46) 930

⇨ $S_{30}=\dfrac{30\times\{2\cdot2+(30-1)\cdot2\}}{2}=930$

47) -750

⇨ $S_{30}=\dfrac{30\times\{2\cdot4+(30-1)\cdot(-2)\}}{2}=-750$

48) 255

⇨ $\mathrm{S}_{10}=\dfrac{10\times\{2\times3+(10-1)\times5\}}{2}=255$

49) -153

⇨ $a_n=-33+4(n-1)=4n-37$이므로

$a_n<0$이려면 $4n-37<0$에서 $n<\dfrac{37}{4}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제9항까지 음수이고, 제10항부터 양수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 S_n의 최솟값은

$S_9=\dfrac{9\times\{2\times(-33)+(9-1)\times4\}}{2}=-153$

50) -225

⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-25$에서 $a+2d=-25$ …… ㉠

$a_7=-17$에서 $a+6d=-17$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-29$, $d=2$이므로

$a_n=-29+(n-1)\times2=2n-31$

$a_n<0$이려면 $2n-31<0$에서 $n<\dfrac{31}{2}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제15항까지 음수이고, 제16항부터 양수이므로 첫째항부터 제15항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 S_n의 최솟값은

$S_{15}=\dfrac{15\{2\times(-29)+(15-1)\times2\}}{2}=-225$

51) -128

⇨ $a_n=-30+(n-1)\times4=4n-34$

$a_n<0$이려면 $4n-34<0$에서 $n<\dfrac{17}{2}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항까지 음수이고, 제9항부터 양수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 S_n의 최솟값은

$S_8=\dfrac{8\{2\times(-30)+(8-1)\times4\}}{2}=-128$

52) -156

⇨ $a_n=-37+5(n-1)=5n-42$이므로

$a_n<0$이려면 $5n-42<0$에서 $n<\dfrac{42}{5}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항까지 음수이고, 제9항부터 양수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 S_n의 최솟값은

$S_8=\dfrac{8\{2\times(-37)+(8-1)\times5\}}{2}=-156$

53) -287

⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=-25$에서 $a+5d=-25$ …… ㉠

$a_{17}=8$에서 $a+16d=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-40$, $d=3$이므로

$a_n=-40+3(n-1)=3n-43$

$a_n<0$이려면 $3n-43<0$에서 $n<\dfrac{43}{3}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제14항까지 음수이고, 제15항부터 양수이므로 첫째항이 제14항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 S_n의 최솟값은

$S_{14}=\dfrac{14\{2\times(-40)+(14-1)\times3\}}{2}=-287$

54) 49

⇨ $a_n=13+(n-1)\times(-2)=15-2n$이므로

$a_n>0$이려면 $15-2n>0$에서 $n<\dfrac{15}{2}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제7항까지 양수이고, 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 S_n의 최댓값은

$S_7=\dfrac{7\{2\times13+(7-1)\times(-2)\}}{2}=49$

55) 155

⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=23$에서 $a+2d=23$ …… ㉠

$a_6=14$에서 $a+5d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=29$, $d=-3$

$\therefore\ a_n=29+(n-1)\times(-3)=32-3n$

$a_n>0$이려면 $32-3n>0$에서 $n<\dfrac{32}{3}$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제10항까지 양수이고, 제11항부터 음수이므로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대이다.
따라서 구하는 S_n의 최댓값은
$$S_{10}=\frac{10\{2\times29+(10-1)\times(-3)\}}{2}=155$$

56) 126
⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=a+2d=20$, $a_{10}=a+9d=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=26$, $d=-3$이므로
$a_n=26+(n-1)\cdot(-3)=-3n+29$
$a_n>0$이려면 $-3n+29>0$에서 $n<\frac{29}{3}$
즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제9항까지 양수이고, 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.
따라서 구하는 S_n의 최댓값은
$$S_9=\frac{9\{2\times26+(9-1)\times(-3)\}}{2}=126$$

57) 442
⇨ S_n이 최대가 되는 것은 일반항 a_n이 $a_n\geq0$을 만족할 때이다.
첫째항이 50, 공차가 -3인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n=50+(n-1)\times(-3)=-3n+53\,a_n\geq0$,
즉 $-3n+53\geq0$에서 $n\leq\frac{53}{3}=17.6\cdots$
한편, n이 자연수이므로 $n=17$일 때, S_n의 값이 최대가 된다.
$$\therefore\ S_{17}=\frac{17\times\{2\times50+16\times(-3)\}}{2}=442$$

58) 171
⇨ $a_n=35+(n-1)\times(-4)=39-4n$이므로
$a_n>0$이려면 $39-4n>0$에서 $n<\frac{39}{4}$
즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제9항까지 양수이고, 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.
따라서 구하는 S_n의 최댓값은
$$S_n=\frac{9\{2\times35+(9-1)\times(-4)\}}{2}=171$$

59) 64
⇨ S_n이 최대가 되는 것은 일반항이 a_n이 $a_n\geq0$을 만족할 때이다.
첫째항이 15, 공차가 -2인 등차수열의 일반항은 a_n은 $a_n=15+(n-1)\times(-2)=-2n+17$
$a_n\geq0$, 즉 $-2n+17\geq0$에서
$n\leq\frac{17}{2}\qquad\therefore\ n\leq8.5$
한편, n은 자연수이므로 $n=8$일 때, S_n의 값이 최대가 된다.
따라서 구하는 S_n의 최댓값은
$$S_8=\frac{8\{2\times15+(8-1)\times(-2)\}}{2}=64$$

60) 390
⇨ $a_n=75+(n-1)\times(-8)=83-8n$이므로
$a_n>0$이려면 $83-8n>0$에서 $n<\frac{83}{8}$
즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제10항까지 양수이고, 제11항부터 음수이므로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대이다.
따라서 구하는 S_n의 최댓값은
$$S_{10}=\frac{10\{2\times75+(10-1)\times(-8)\}}{2}=390$$

61) -4
⇨ $S_{15}=\frac{15\{2\times23+(15-1)d\}}{2}=15(23+7d)$
$S_{15}=-75$이므로
$15(23+7d)=-75$, $23+7d=-5\qquad\therefore\ d=-4$

62) -2
⇨ $S_9=\frac{9\{2\times17+(9-1)d\}}{2}=9(17+4d)$
$S_9=81$이므로
$9(17+4d)=81$, $17+4d=9\qquad\therefore\ d=-2$

63) 2
⇨ $S_{12}=\frac{12\{2\times2+(12-1)d\}}{2}=6(4+11d)$
$S_{12}=156$이므로
$6(4+11d)=156$, $4+11d=26\qquad\therefore\ d=2$

64) -2
⇨ 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$S_{10}=\frac{10\{2\times30+(10-1)d\}}{2}=5(60+9d)=210$
$60+9d=42\qquad\therefore\ d=-2$

65) 5
⇨ $S_8=\frac{8\{2\times3+(8-1)d\}}{2}=4(6+7d)$
$S_8=164$이므로
$4(6+7d)=164$, $6+7d=41\qquad\therefore\ d=5$

66) 7
⇨ 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$$S_{10}=\frac{10\{2\times(-3)+(10-1)d\}}{2}$$
$$=5(-6+9d)=285$$

$-6+9d=57 \qquad \therefore\ d=7$

67) 13

⇨ $S_9=\dfrac{9(5+a_9)}{2}=81$에서

$5+a_9=18 \qquad \therefore\ a_9=13$

68) -48

⇨ $S_{21}=\dfrac{21(42+a_{21})}{2}=-63$에서

$42+a_{21}=-6 \qquad \therefore\ a_{21}=-48$

69) -16

⇨ $S_{16}=\dfrac{16(23+a_{16})}{2}=56$에서

$23+a_{16}=7 \qquad \therefore\ a_{16}=-16$

70) 21

⇨ $S_{14}=\dfrac{14(7+a_{14})}{2}=196$에서

$7+a_{14}=28 \qquad \therefore\ a_{14}=21$

71) -216

⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_8=56$에서

$\dfrac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=56$

$\therefore\ 2a+7d=14 \cdots\cdots$ ㉠

$S_{18}=-54$에서

$\dfrac{18\{2a+(18-1)d\}}{2}=-54$

$\therefore\ 2a+17d=-6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=14$, $d=-2$이므로

$S_{24}=\dfrac{24\{2\times14+(24-1)\times(-2)\}}{2}=-216$

72) 450

⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=50$에서

$\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=50$

$\therefore\ 2a+9d=10 \cdots\cdots$ ㉠

$S_{20}=200$에서

$\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=200$

$\therefore\ 2a+19d=20 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{2}$, $d=1$이므로

$S_{30}=\dfrac{30\left\{2\times\dfrac{1}{2}+(30-1)\times1\right\}}{2}=450$

73) 210

⇨ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=-5$에서

$\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=-5$

$\therefore\ 2a+4d=-2 \cdots\cdots$ ㉠

$S_{10}=65$에서

$\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=65$

$\therefore\ 2a+9d=13 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $d=3$

$\therefore\ S_{15}=\dfrac{15\{2\times(-7)+(15-1)\times3\}}{2}=210$

74) 780

⇨ 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=140$

$\therefore\ 2a+9d=28 \cdots\cdots$ ㉠

$S_{20}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=480$

$\therefore\ 2a+19d=48 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=2$

$\therefore\ S_{26}=\dfrac{26\times\{2\times5+(26-1)\times2\}}{2}=780$

75) 530

⇨ 첫째항부터 제10항까지의 합이 130, 제11항부터 제20항까지의 합이 330이므로 첫째항부터 제20항까지의 합은 460이다

즉, $S_{10}=130$, $S_{20}=460$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=130$에서

$2a+9d=26 \cdots\cdots$ ㉠

$S_{20}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=460$에서

$2a+19d=46 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=2$이므로

$S_{30}=\dfrac{30\{2\times4+(30-1)\times2\}}{2}=990$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$S_{30}-S_{20}=990-460=530$

76) 220

⇨ 첫째항이 -8, 끝항이 30, 항수가 20인 등차수열의 합이므로 $S_{20}=\dfrac{20\times(-8+30)}{2}=220$

77) 24

⇨ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=S_4=8$에서

$\dfrac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=8$

I410-ECN-0199-2019-001-000244110

$\therefore\ 2a+3d=4$ …… ㉠

$a_1+a_2+\cdots+a_8=S_8=8+16=24$에서

$\dfrac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=24$

$\therefore\ 2a+7d=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{5}{4}$, $d=\dfrac{1}{2}$이므로

$S_{12}=\dfrac{12\left\{2\times\dfrac{5}{4}+(12-1)\times\dfrac{1}{2}\right\}}{2}=48$

$\therefore\ a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8=48-24=24$

78) $a_1=2$, $a_7=37$

⇨ $a_1=S_1=2$, $a_7=S_7-S_6$

$=(3\cdot7^2-2\cdot7+1)-(3\cdot6^2-2\cdot6+1)=37$

79) $a_1=0$, $a_7=27$

⇨ $a_1=S_1=2\cdot1^2+1-3=0$

$a_7=S_7-S_6=(2\cdot7^2+7-3)-(2\cdot6^2+6-3)=27$

80) $a_1=3$, $a_7=14$

⇨ $a_1=S_1=3$

$a_7=S_7-S_6=(7^2+7+1)-(6^2+6+1)=14$

81) $a_1=1$, $a_7=25$

⇨ $a_1=S_1=2\cdot1^2-1=1$

$a_7=S_7-S_6=(2\cdot7^2-7)-(2\cdot6^2-6)=25$

82) $a_1=3$, $a_7=15$

⇨ $a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$

$a_7=S_7-S_6=(7^2+2\cdot7)-(6^2+2\cdot6)=15$

83) $a_n=4n-3\ (n\ge2)$, 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-n+2-\{2(n-1)^2-(n-1)+2\}$

$=2n^2-n+2-(2n^2-4n+2-n+1+2)$

$=4n-3\ (n\ge2)$ …… ㉠

$S_1=3$과 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 제2항부터 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

84) $a_n=2n+1\ (n\ge2)$, 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n+1)^2-n^2=2n+1\ (n\ge2)$ …… ㉠

$S_1=4$와 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 제2항부터 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

85) $a_n=2n-2\ (n\ge1)$, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=n^2-n-(n^2-2n+1-n+1)$

$=2n-2\ (n\ge2)$ …… ㉠

$S_1=1^2-1=0$과 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 같으므로 $a_n=2n-2\ (n\ge1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

86) $a_n=2n+2\ (n\ge1)$ 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=n^2+3n-(n^2-2n+1+3n-3)$

$=2n+2\ (n\ge2)$ …… ㉠

$S_1=1+3=4$와 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 같으므로 $a_n=2n+2\ (n\ge1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

87) $a_n=4n-1\ (n\ge2)$ 수열 $\{a_n\}$은 두 번째 항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n+3-\{2(n-1)^2+(n-1)+3\}$

$=2n^2+n+3-(2n^2-4n+2+n-1+3)$

$=4n-1\ (n\ge2)$ …… ㉠

$S_1=2\cdot1^2+1+3=6$과 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 다르므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_1=6$, $a_n=4n-1\ (n\ge2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 두 번째 항부터 등차수열을 이룬다.

88) $a_n=2n-6\ (n\ge2)$ 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-5n+6)-\{(n-1)^2-5(n-1)+6\}$

$=\{n+(n-1)\}\{n-(n-1)\}-5n+5(n-1)$

$=2n-1-5n+5n-5=2n-6$ …… ㉠

한편, $a_1=S_1=1^2-5\times1+6=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로 $a_1=2$, $a_n=2n-6\ (n\ge2)$

89) $a_n=2n-6\ (n\ge1)$ 수열 $\{a_n\}$은 제1항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-\{(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=\{n+(n-1)\}\{n-(n-1)\}-5n+5(n-1)$

$=2n-1-5n+5n-5=2n-6$ …… ㉠

한편, $a_1 = S_1 = 1^2 - 5 \times 1 = -4$는 ㉠에서 $n=1$을 대입한 것과 같다.

$\therefore\ a_n = 2n-6\ (n \geq 1)$

90) $a_n = 2n-4\ (n \geq 1)$ 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

⇨ $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$

$= n^2 - 3n - (n^2 - 2n + 1 - 3n + 3)$

$= 2n - 4\ (n \geq 2)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$와 ㉠에 $n=1$을 대입한 값이 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n-4\ (n \geq 1)$