01 일대일 대응

(1) **일대일함수**: 함수 $f : X \to Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

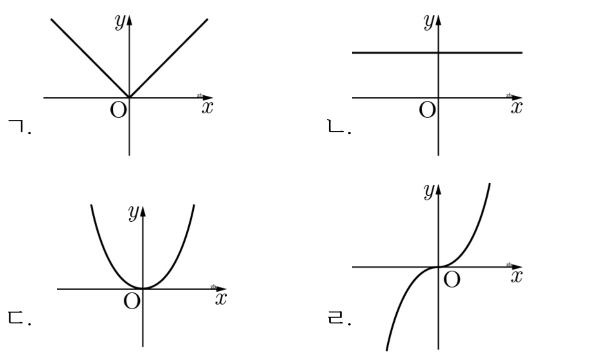
(2) **일대일 대응**: 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수 $f : X \to Y$에서

① x_1, $x_2 \in X$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

② $\{f(x) \mid x \in X\} = Y$

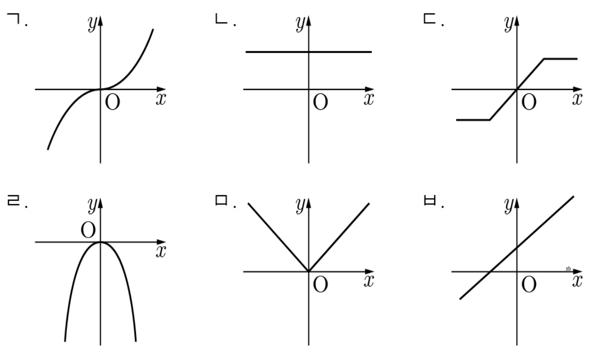
1. 실수 전체의 집합에서 정의된 <보기>의 함수의 그래프 중 일대일 대응인 함수를 모두 골라라.

<보기>



2. 실수 전체의 집합에서 정의된 <보기>의 함수의 그래프 중 일대일대응인 함수를 모두 골라라.

<보기>



3. 함수 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+2 & (x \geq 0) \\ (a+1)x+2 & (x < 0) \end{cases}$이 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

4. 두 집합 $\mathrm{X} = \{x \mid 1 \leq x \leq a\}$, $\mathrm{Y} = \{y \mid 3 \leq y \leq 9\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x) = 2x + b$가 일대일 대응일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

◪ 다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 일대일함수, 일대일대응을 모두 골라라.

<보기>

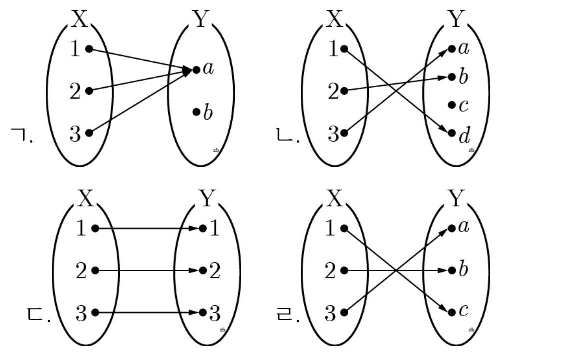
ㄱ. $y = -x$	ㄴ. $y = 3$	ㄷ. $y = 2x - 1$
ㄹ. $y = x$	ㅁ. $y = x^2$	ㅂ. $y = 0$

5. 일대일함수

6. 일대일대응

◪ 다음 <보기> 중 해당하는 함수인 것만을 있는 대로 고르시오.

<보기>

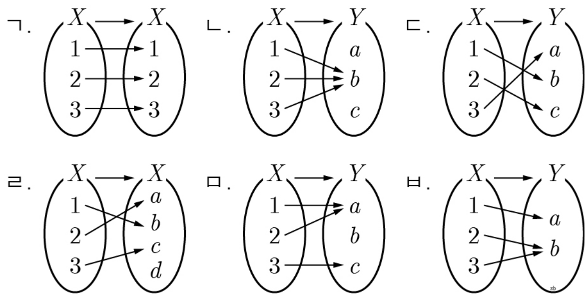


7. 일대일함수

8. 일대일대응

◪ 다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 일대일함수, 일대일대응을 모두 골라라.

<보기>



9. 일대일 함수

10. 일대일대응

◪ 다음 함수의 그래프의 개형을 그려 보고, 일대일대응인 것에는 ○표, 아닌 것에는 ×표를 하여라.

11. $y=|x|$ (　　)

12. $y=-2x$ (　　)

13. $x=4$ (　　)

14. $y=2x^2-16x+3$ (　　)

15. $y=2$ (　　)

◪ 다음 함수 중 일대일대응인 것을 찾고, 일대일대응이 아닌 것은 그 이유를 설명하여라.

16. $f(x)=x+2$

17. $f(x)=x^2$

18. $f(x)=x^2-5$

19. $f(x)=3x-2$

20. $f(x)=2$

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

21. $\mathrm{X}=\{x-1 \le x \le 2\}$, $\mathrm{Y}=\{y|-3 \le y \le 3\}$

(1) $a>0$일 때 (2) $a<0$일 때

22. $\mathrm{X}=\{x|-4 \le x \le 4\}$, $\mathrm{Y}=\{y|1 \le y \le 17\}$

(1) $a>0$일 때 (2) $a<0$일 때

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 함수 $f(x)$가 집합 X에서 집합 Y로의 일대일대응이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

23. $\mathrm{X}=\{x|x \ge k\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \le k-2\}$
$f(x)=-x^2+2x$

24. $\mathrm{X}=\{x|x \le k\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \ge k+2\}$
$f(x)=x^2+2x$

25. $\mathrm{X}=\{x|x \le k\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \ge k+6$
$f(x)=x^2-4x$

26. $\mathrm{X}=\{x|x \ge k\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \le 2k-5\}$
$f(x)=-x^2+2x-1$

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

27. $\mathrm{X}=\{x|x \ge 3\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \ge 2\}$
$f(x)=x^2-2x+k$

28. $\mathrm{X}=\{x|x \ge 1\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \le 0\}$
$f(x)=-x^2-2x+k$

29. $\mathrm{X}=\{x|x \ge 4\}$, $\mathrm{Y}=\{y|y \ge 5\}$
$f(x)=2x^2-4x+k$

◪ 다음 함수가 일대일 대응인지를 판단하고, 일대일 대응이 <u>아닌</u> 것은 그 이유를 설명하여라.

30. $f(x)=3x+1$

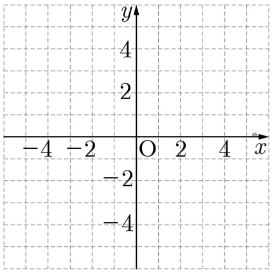
31. $f(x)=2$

32. $f(x)=x^2+1$

33. $f(x)=x^3-1$

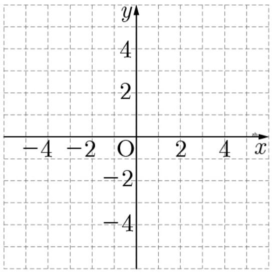
◪ 다음 함수의 그래프를 그려 보고, 일대일 대응인 것에는 ○표, 일대일 대응이 아닌 것에는 ×표를 ( ) 안에 써넣어라.

34. $y=2x$



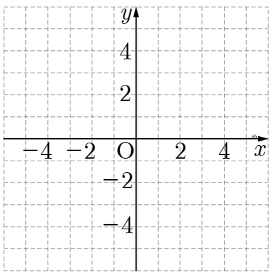
( )

35. $y=(x-1)^2+1$



( )

36. $y=\begin{cases} x+2 & (x \geq 0) \\ 2 & (x<0) \end{cases}$



( )

◪ 실수 전체의 집합에서 정의된 다음 함수가 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

37. $f(x)=\begin{cases} -x-2 & (x \geq 0) \\ ax-2 & (x<0) \end{cases}$

38. $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{3}{2}-a & (x \geq 1) \\ x+\dfrac{1}{2} & (x<1) \end{cases}$

39. $f(x)=\begin{cases} x-4 & (x \geq -1) \\ (a+2)x-3+a & (x<-1) \end{cases}$

40. $f(x)=\begin{cases} (a-1)x+3-2a & (x \geq 2) \\ -x+3 & (x<2) \end{cases}$

◪ 집합 X에 대하여 함수 $f:\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

41. $\mathrm{X}=\{x \mid x \geq 2\}$
$f(x)=x^2+2x+k$

42. $\mathrm{X}=\{x \mid x \leq 2\}$
$f(x)=-x^2+6x+k$

◪ 두 집합 $\mathrm{X}=\{x \mid 2 \le x \le 3\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid -1 \le y \le 3\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

43. $a>0$일 때

44. $a<0$일 때

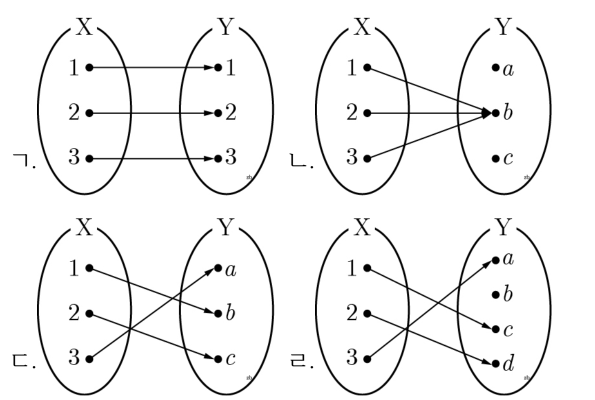
◪ 두 집합 X, Y에 대하여 함수 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

45. $\mathrm{X}=\{x \mid x \ge 3\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid y \ge 2\}$
$f(x)=x^2-4x+k$

46. $\mathrm{X}=\{x \mid x \le 0\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid y \le 2\}$
$f(x)=-x^2+2x+k$

◪ <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 다음 함수를 모두 골라라.

<보기>



47. 일대일함수

48. 일대일 대응

◪ 실수 전체의 집합에서 정의된 다음 함수가 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

49. $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x \ge 0) \\ ax-1 & (x<0) \end{cases}$

50. $f(x)=\begin{cases} (a+1)x-4-3a & (x \ge 3) \\ -x+2 & (x<3) \end{cases}$

◪ 다음 두 집합에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

51. $\mathrm{X}=\{x \mid x \ge 4\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid y \ge 1\}$
$f(x)=x^2-6x+k$

52. $\mathrm{X}=\{x \mid x \ge -1\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid y \le 5\}$
$f(x)=-x^2-4x+k$

◪ 다음 두 집합에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f(x)=ax+b(a>0)$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

53. $\mathrm{X}=\{x \mid -2 \le x \le 2\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

54. $\mathrm{X}=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le 3\right\}$, $\mathrm{Y}=\{y \mid -2 \le y \le 5\}$

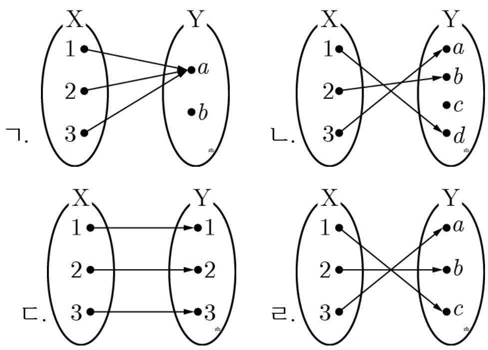
02 항등함수와 상수함수

(1) **항등함수**: 정의역과 공역이 같고, 정의역의 각 원소에 자기 자신이 대응하는 함수
즉, $f: X \to X,\ f(x)=x\ (x \in X)$

(2) **상수함수**: 정의역의 모든 원소가 공역의 단 하나의 원소로만 대응하는 함수
즉, $f: X \to Y,\ f(x)=c\ (x \in X,\ c \in Y,\ c$는 상수$)$

◪ **다음 <보기> 중 해당하는 함수인 것만을 있는 대로 고르시오.**

<보기>

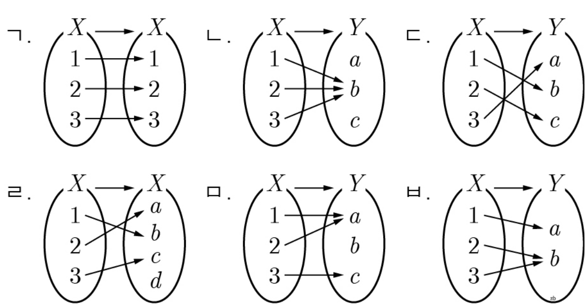


55. 항등함수

56. 상수함수

◪ **다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 항등함수, 상수함수를 모두 골라라.**

<보기>



57. 항등함수

58. 상수함수

◪ **다음 <보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 항등함수, 상수함수를 모두 골라라.**

<보기>

ㄱ. $y=-x$	ㄴ. $y=3$	ㄷ. $y=2x-1$
ㄹ. $y=x$	ㅁ. $y=x^2$	ㅂ. $y=0$

59. 항등함수

60. 상수함수

◪ **집합 X에서 집합 Y로의 세 함수 $f,\ g,\ h$는 각각 상수함수, 항등함수, 일대일대응일 때, 다음을 구하여라.**

61. $\mathrm{X}=\{0,\ 1,\ 2\}$
$f(0)=g(2)=h(1),\ 2h(2)=h(0)+h(1)$일 때,
$f(2)+g(1)+h(0)$의 값

62. $\mathrm{X}=\{-1,\ 0,\ 1\}$
$f(0)=g(1)=h(-1),\ h(-1)+h(1)=h(0)$일 때,
$f(0)g(-1)h(1)$의 값

◪ **집합 $\mathrm{X}=\{-1,\ 1\}$에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 다음 함수 중 항등함수인 것은 '항등', 상수함수인 것은 '상수'를 ( ) 안에 써넣어라.**

63. $f(x)=x$ ( )

64. $f(x)=x^3$ ( )

65. $f(x)=x^2$ ( )

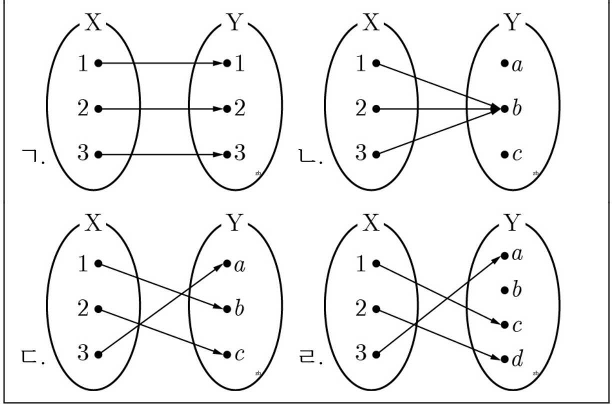
◪ **집합 X에서 집합 X로의 세 함수 f, g, h가 각각 상수함수, 항등함수, 일대일 대응일 때, 다음을 구하여라.**

66. $X=\{0,\ 1,\ 2\}$
$f(0)=g(2)=h(2)$, $h(2)=2h(0)+h(1)$**일 때,**
$f(2)+g(1)+h(0)$**의 값**

67. $X=\{2,\ 3,\ 6\}$
$f(3)=g(2)=h(6)$, $h(6)h(3)=h(2)$**일 때,**
$f(2)+g(6)+h(3)$**의 값**

◪ **<보기>와 같이 주어진 함수에 대하여 다음 함수를 모두 골라라.**

<보기>



68. **항등함수**

69. **상수함수**

03 함수의 개수

집합 X의 원소가 m개, 집합 Y의 원소가 n개일 때
(1) X에서 Y로의 함수의 개수
⇨ n^m개
(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수
⇨ $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)$개
(단, $n \geq m$)
(3) X에서 Y로의 일대일 대응의 개수
⇨ $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2 \cdot 1$개 (단, $n=m$)

70. **다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.**

집합 X의 원소의 개수가 m, 집합 Y의 원소의 개수가 n일 때,
(1) X에서 Y로의 함수의 개수 → $\boxed{}$개
(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수 → $\boxed{}$개
(단, $n \geq m$)
(3) X에서 Y로의 일대일대응의 개수 → $\boxed{}$개
(단, $n=m$)
(4) X에서 Y로의 상수함수의 개수 → $\boxed{}$개

71. **집합** $X=\{1,\ 2,\ 3\}$**에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 함수 중 일대일대응의 개수를** l, **항등함수의 개수를** m, **상수함수의 개수를** n**이라고 할 때,** $l+m+n$**의 값을 구하여라.**

72. **두 집합** $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$**에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수를** l, **이 함수 중 상수함수의 개수를** m, **일대일함수의 개수를** n**이라고 할 때,** $l+m+n$**의 값을 구하여라.**

73. 두 집합 $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\mathrm{Y}=\{y\,|\,y$는 12의 양의 약수$\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수를 l, 상수함수의 개수를 m, 일대일함수의 개수를 n이라 할 때, $l+m+n$의 값을 구하여라.

◪ 집합 X를 정의역으로 하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 f가 항등함수가 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하여라. (단, $\mathrm{X}\neq\varnothing$)

74. $f(x)=x^2-12$

75. $f(x)=x^3-2x^2+2$

76. $f(x)=x^2-6$

◪ 다음 집합 X에서 집합 $\mathrm{Y}=\{x+y\,|\,x\in\mathrm{X},\ y\in\mathrm{X}\}$로의 함수 중 상수함수의 개수를 구하여라.

77. $\mathrm{X}=\{-1,\ 0,\ 1\}$

78. $\mathrm{X}=\{-1,\ 1\}$

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중 일대일함수의 개수를 구하여라.

79. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\mathrm{Y}=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

80. $\mathrm{X}=\{a,\ b,\ c\}$, $\mathrm{Y}=\{d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$

81. $\mathrm{X}=\{1,\ 2\}$, $\mathrm{Y}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

82. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\mathrm{Y}=\{a,\ b,\ c,\ d\}$

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수를 구하여라.

83. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\mathrm{Y}=\{a,\ b,\ c,\ d\}$

84. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\mathrm{Y}=\{1,\ 2,\ 3\}$

85. $\mathrm{X}=\{1,\ 2\}$, $\mathrm{Y}=\{a,\ b,\ c,\ d\}$

◪ 다음 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 일대일 대응의 개수를 구하여라.

86. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\mathrm{Y}=\{a,\ b,\ c\}$

87. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\mathrm{Y}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

정답 및 해설

1) ㄹ

⇨ 임의의 실수 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이면 그 함수는 일대일 대응이다.
따라서 일대일 대응인 것은 ㄹ뿐이다.

2) ㄱ, ㅂ

3) $a<-1$ 또는 $a>1$

⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.
(ⅰ) 함수 $f(x)$가 증가함수일 때
$a-1>0$이고 $a+1>0$이므로 $a>1$
(ⅱ) 함수 $f(x)$가 감소함수일 때
$a-1<0$이고 $a+1<0$이므로 $a<-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $a<-1$ 또는 $a>1$

4) 5

⇨ $f(x)$는 증가함수이고,
이 함수가 일대일 대응이 되려면
$f(1)=3$에서 $2+b=3$　　$\therefore\ b=1$
$f(a)=9$에서 $2a+1=9$　　$\therefore\ a=4$
$\therefore\ a+b=5$

5) ㄱ, ㄷ, ㄹ

6) ㄱ, ㄷ, ㄹ

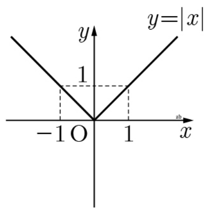
7) ㄴ, ㄷ, ㄹ

8) ㄷ, ㄹ

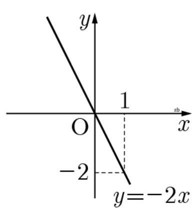
9) ㄱ, ㄷ, ㄹ

10) ㄱ, ㄷ

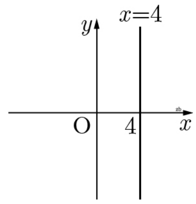
11) ×

⇨ 

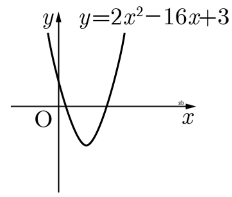
12) ○

⇨ 

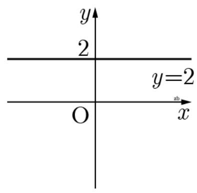
13) ×

⇨ 

14) ×

⇨ 

15) ×

⇨ 

16) 일대일대응

⇨ 함수 $f(x)=x+2$는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$, 즉 $x_1+2=x_2+2$이면 $x_1=x_2$이다.
또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다.
따라서 이 함수는 일대일대응이다.

17) 일대일대응이 아니다.

⇨ 함수 $f(x)=x^2$은 $x_1=-1$, $x_2=1$일 때,
$f(x_1)=f(-1)=1$, $f(x_2)=f(1)=1$
즉, $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$인
두 실수 x_1, x_2가 존재한다.
따라서 이 함수는 일대일대응이 아니다.

18) 일대일대응이 아니다.

⇨ 함수 $f(x)=x^2-5$는 $x_1=-1$, $x_2=1$일 때,
$f(x_1)=f(-1)=-4$, $f(x_2)=(f)1=-4$
즉, $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$인
두 실수 x_1, x_2가 존재한다.
따라서 이 함수는 일대일대응이 아니다.

19) 일대일대응

⇨ 함수 $f(x)=3x-2$는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$, 즉 $3x_1-2=3x_2-2$이면 $x_1=x_2$이다.
또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다.
따라서 이 함수는 일대일대응이다.

20) 일대일대응이 아니다.

⇨ 함수 $f(x)=2$는 $x_1\neq x_2$일 때,

$f(x_1)=f(x_2)=2$이므로 일대일대응이 아니다.

21) (1) $a=2,\ b=-1$ (2) $a=-2,\ b=1$

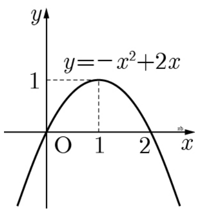
⇨ (1) $a>0$이므로 x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
이 함수가 일대일대응이 되려면
$f(-1)=-3,\ f(2)=3$
$-a+b=-3,\ 2a+b=3$
$\therefore\ a=2,\ b=-1$
(2) $a<0$이므로 x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값은 감소한다.
이 함수가 일대일대응이 되려면
$f(-1)=3,\ f(2)=-3$
$-a+b=3,\ 2a+b=-3$
$\therefore\ a=-2,\ b=1$

22) (1) $a=2,\ b=9$ (2) $a=-2,\ b=9$

⇨ (1) $a>0$이므로 x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
이 함수가 일대일대응이 되려면
$f(-4)=1,\ f(4)=17$
$-4a+b=1,\ 4a+b=17$
$\therefore\ a=2,\ b=9$
(2) $a<0$이므로 x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값은 감소한다.
이 함수가 일대일대응이 되려면
$f(-4)=17,\ f(4)=1$
$-4a+b=17,\ 4a+b=1$
$\therefore\ a=-2,\ b=9$

23) 2

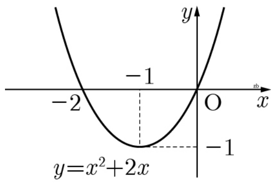
⇨ $f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$이므로
그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 집합 X에서 집합 Y로의
일대일대응이 되려면 $k\geq 1$이어야 한다.
$f(k)=k-2$
$-k^2+2k=k-2$ ⇨ $k^2-k-2=0$
$(k+1)(k-2)=0$ $\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2$
그런데 $k\geq 1$이어야 하므로 $k=2$

24) −2

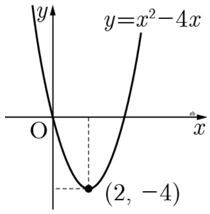
⇨ $f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로
그래프는 다음과 같다.
함수 $f(x)$가 집합 X에서 집합 Y로의
일대일대응이 되려면 $k\leq -1$이어야 한다.



$f(k)=k+2$
$k^2+2k=k+2$ ⇨ $k^2+k-2=0$
$(k+2)(k-1)=0$ $\therefore\ k=-2$ 또는 $k=1$
그런데 $k\leq -1$이어야 하므로 $k=-2$

25) −1

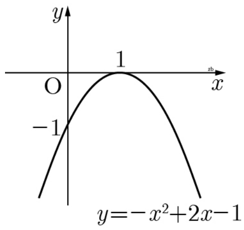
⇨ $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로
그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 집합 X에서 집합 Y로의
일대일대응이 되려면 $k\leq 2$이어야 한다.
$f(k)=k+6,\ k^2-4k=k+6$
$k^2-5k-6=0$
$(k-6)(k+1)=0$ $\therefore\ k=-1$ 또는 $k=6$
그런데 $k\leq 2$이어야 하므로 $k=-1$

26) 2

⇨ $f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로
그래프는 다음과 같다. 함수 $f(x)$가 집합 X에서
집합 Y로의 일대일대응이 되려면 $k\geq 1$이어야 한다.



$f(k)=2k-5$
$-k^2+2k-1=2k-5$ ⇨ $k^2=4$
$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=2$
그런데 $k\geq 1$이어야 하므로 $k=2$

27) −1

⇨ $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$이므로
$x\geq 3$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면
$f(3)=2$이어야 하므로 $3^2-2\cdot 3+k=2$
$\therefore\ k=-1$

28) 3

⇨ $f(x)=-x^2-2x+k=-(x+1)^2+k+1$이므로

$x \geq 1$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값은 감소한다.
따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면
$f(1)=0$이어야 하므로 $-1-2+k=0$ $\quad\therefore\ k=3$

29) -11
⇨ $f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$이므로
$x \geq 4$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면
$f(4)=5$이어야 하므로 $2 \cdot 4^2-4 \cdot 4+k=5$
$\therefore\ k=-11$

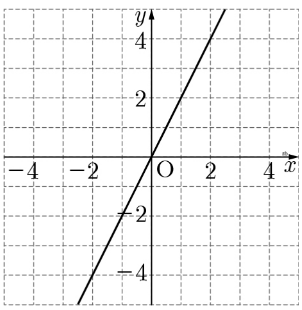
30) 일대일 대응이다.
⇨ 함수 $f(x)=3x+1$은 임의의
두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$,
즉, $3x_1+1=3x_2+1$이면 $x_1=x_2$이다.
또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다.
따라서 이 함수는 일대일 대응이다.

31) 일대일 대응이 아니다.
⇨ 함수 $f(x)=2$는 $x_1=0$, $x_2=1$일 때,
$f(x_1)=f(0)=2$, $f(x_2)=f(1)=2$
즉, $x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$인
두 실수 x_1, x_2가 존재한다.
따라서 이 함수는 일대일 대응이 아니다.

32) 일대일 대응이 아니다.
⇨ 함수 $f(x)=x^2+1$은 $x_1=-1$, $x_2=1$일 때,
$(x_1)=f(-1)=2$, $f(x_2)=f(1)=2$
즉, $x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$인
두 실수 x_1, x_2가 존재한다.
따라서 이 함수는 일대일 대응이 아니다.

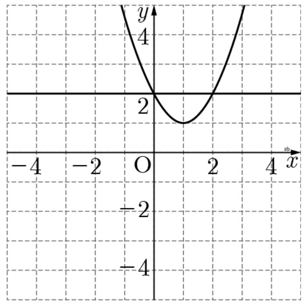
33) 일대일 대응이다.
⇨ 함수 $f(x)=x^3-1$은
임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$
즉, ${x_1}^2-1={x_2}^3-1$이면 $x_1=x_2$이다.
또, 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이다.
따라서 이 함수는 일대일 대응이다.

34) ○

⇨ 

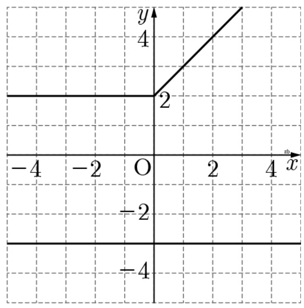
x축에 평행한 직선을 그으면 항상 한 점에서
만나므로 일대일 대응이다.

35) ×

⇨ 

x축에 평행한 직선 $y=2$를 그으면 교점이 2개이므로
일대일 대응이 아니다.

36) ×

⇨ 

x축에 평행한 직선 $y=-3$을 그으면
교점이 없으므로 일대일 대응이 아니다.

37) $a<0$
⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$x \geq 0$인 범위에서 x의 값이 증가할 때,
$f(x)$의 값이 감소하므로
$x<0$인 범위에서도 x와 값이 증가할 때
$f(x)$의 값이 감소하여야 한다.
$\therefore\ a<0$

38) $a>0$
⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$x<1$인 범위에서 x의 값이 증가할 때
$f(x)$의 값이 증가하므로 $x \geq 1$인 범위에서도
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하여야 한다.
$\therefore\ a>0$

39) $a>-2$
⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$x \geq -1$인 범위에서 x의 값이 증가할 때
$f(x)$의 값이 증가하므로 $x<-1$인 범위에서도
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하여야 한다.
$a+2>0$ $\qquad \therefore\ a>-2$

40) $a<1$
⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$x<2$인 범위에서 x의 값이 증가할 때
$f(x)$의 값이 감소하므로 $x \geq 2$인 범위에서도
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소하여야 한다.

$a-1<0$　　　$\therefore a<1$

41) -6

⇨ $f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로
$x\geq 2$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$f(2)=2$이어야 하므로
$2^2+2\cdot 2+k=2$　　　$\therefore k=-6$

42) -6

⇨ $f(x)=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$이므로
$x\leq 2$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$f(2)=2$이어야 하므로
$-2^2+6\cdot 2+k=2$　　　$\therefore k=-6$

43) $a=4,\ b=-9$

⇨ $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이고,
이 함수가 일대일 대응이 되려면
$f(2)=-1$에서 $2a+b=-2$
$f(3)=3$에서 $3a+b=3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-9$

44) $a=-4,\ b=11$

⇨ $a<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소함수이고,
이 함수가 일대일 대응이 되려면
$f(2)=3$에서 $2a+b=3$
$f(3)=-1$에서 $3a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=11$

45) 5

⇨ $f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$이므로
$x\geq 3$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$f(3)=2$이어야 하므로
$3^2-4\cdot 3+k=2$　　　$\therefore k=5$

46) 2

⇨ $f(x)=-x^2+2x+k=-(x-1)^2+k+1$이므로
$x\leq 0$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$f(0)=2$이어야 하므로 $k=2$

47) ㄱ, ㄷ, ㄹ

48) ㄱ, ㄷ

49) $a>0$

⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$x\geq 0$인 범위에서 x의 값이 증가할 때
$f(x)$의 값이 증가하므로 $x<0$인 범위에서도
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하여야 한다.
$\therefore a>0$

50) $a<-1$

⇨ 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$x<3$인 범위에서 x의 값이 증가할 때
$f(x)$의 값이 감소하므로 $x\geq 3$인 범위에서도
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소하여야 한다.
$a+1<0$　　　$\therefore a<-1$

51) 9

⇨ $f(x)=-x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$이므로
$x\geq 4$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$f(4)=1$이어야 하므로 $-8+k=1$　　　$\therefore k=9$

52) 2

⇨ $f(x)=-x^2-4x+k=-(x+2)^2+k+4$이므로
$x\geq -1$일 때, x의 값이 증가하면
$f(x)$의 값은 감소한다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면
$f(-1)=5$이어야 하므로 $k+3=5$　　　$\therefore k=2$

53) $a=\frac{1}{2},\ b=3$

⇨ $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이고,
이 함수가 일대일 대응이 되려면
$f(-2)=2$에서 $-2a+b=2$
$f(2)=4$에서 $2a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=3$

54) $a=2,\ b=-1$

⇨ $a>0$이 되려면 함수 $f(x)$는 증가함수이고,
이 함수가 일대일 대응이 되려면
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$에서 $-\frac{1}{2}a+b=-2$
$f(3)=5$에서 $3a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

55) ㄷ

56) ㄱ

57) ㄱ

58) ㄴ

59) ㄹ

60) ㄴ, ㅂ

61) 3

⇨ 함수 g는 항등함수이므로 $g(x)=\boxed{x}$이고 $g(2)=2$

$\therefore\ f(0)=g(2)=h(1)=2$
함수 f는 상수함수이므로 $f(x)=\boxed{2}$
함수 h는 일대일대응이고, $h(1)=2$이므로
$2h(2)=h(0)+h(1)$을 만족하려면
$h(0)=0,\ h(2)=\boxed{1}$이 되어야 한다.
$\therefore\ f(2)+g(1)+h(0)=2+1+0=\boxed{3}$

62) 1
⇨ 함수 g는 항등함수이므로 $g(x)=x$이고, $g(1)=1$
$\therefore\ f(0)=g(1)=h(-1)=1$
따라서 함수 f는 상수함수이므로 $f(x)=1$
함수 h는 일대일대응이고, $h(-1)=1$이므로
$h(-1)+h(1)=h(0)$을 만족하려면
$h(0)=0,\ h(1)=-1$
$\therefore\ f(0)g(-1)h(1)=1\cdot(-1)\cdot(-1)=1$

63) 항등
⇨ $f(-1)=-1,\ f(1)=1$이므로 항등함수이다.

64) 항등
⇨ $f(-1)=-1,\ f(1)=1$이므로 항등함수이다.

65) 상수
⇨ $f(-1)=1,\ f(1)=1$이므로 상수함수이다.

66) 4
⇨ $g(x)$는 항등함수이므로 $g(2)=2$
$f(x)$는 상수함수이고 $f(0)=g(2)$이므로 $f(x)=2$
$h(x)$는 일대일 대응이고, $h(2)=2$이므로
$h(2)=2h(0)+h(1)$을 만족하려면
$h(0)=1,\ h(1)=0$
$\therefore\ f(2)+g(1)+h(0)=2+1+1=4$

67) 11
⇨ $g(x)$는 항등함수이므로 $g(2)=2$
$f(x)$는 상수함수이고 $f(3)=g(2)$이므로 $f(x)=2$
$h(x)$는 일대일 대응이고, $h(6)=2$이므로
$h(6)h(3)=h(2)$를 만족하려면
$h(3)=3,\ h(2)=6$
$\therefore\ f(2)+g(6)+h(3)=2+6+3=11$

68) ㄱ

69) ㄴ

70) (1) n^m (2) $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$
(3) $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$ (4) n

71) 10
⇨ 주어진 대응을 함수 f : X → Y라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 2개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$의 값을 제외한 1개
따라서 일대일대응의 개수는 $l=3\times2\times1=6$(개)
항등함수의 개수는 $m=1$(개)
상수함수의 개수는 $n=3$(개)
$\therefore\ l+m+n=10$(개)

72) 92
⇨ 함수의 개수 : $l=4^3=64$(개)
상수함수의 개수 : $m=4$(개)
일대일함수의 개수 : $n=4\times3\times2=24$(개)
$\therefore\ l+m+n=92$

73) 342
⇨ 두 집합 X={1, 2, 3}, Y={1, 2, 3, 4, 6, 12}에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f : X → Y라고 하면
(ⅰ) f가 함수일 때,
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개,
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개이므로 함수의 개수는
$l=6\times6\times6=6^3=216$(개)
(ⅱ) 상수함수의 개수는 $m=6$(개)
(ⅲ) f가 일대일함수일 때,
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 5개,
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$의 값을 제외한 4개이므로
일대일함수의 개수는 $n=6\times5\times4=120$(개)
$\therefore\ l+m+n=216+6+120=342$

74) 3
⇨ $f(x)$가 항등함수이어야 하므로 $f(x)=x^2-12=x$
$x^2-x-12=0,\ (x+3)(x-4)=0$
$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=4$
따라서 구하는 집합 X는
{−3}, {4}, {−3, 4}의 3개다.

75) 7
⇨
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$
$f(x)$가 항등함수이어야 하므로
$f(x)=x^3-2x^2+2=x$
$x^3-2x^2-x+2=0$
$(x-1)(x^2-x-2)=0$
$(x-1)(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
따라서 구하는 집합 X는
{−1}, {1}, {2}, {−1, 1},

$\{-1,\ 2\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{-1,\ 1,\ 2\}$의 7개다.

76) 3
⇨ $f(x)$가 항등함수이어야 하므로
$f(x)=x^2-6=x$
$x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$
따라서 구하는 집합 X는
$\{-2\}$, $\{3\}$, $\{-2,\ 3\}$의 3개다.

77) 5
⇨ $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$이므로
$(-1)+(-1)=-2,\ (-1)+0=-1,\ (-1)+1=0$
$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+1=2$
$\therefore\ Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
따라서 구하는 상수함수는 5개다.

78) 3
⇨ $X=\{-1,\ 1\}$이므로
$(-1)+(-1)=-2,\ (-1)+1=0,\ 1+1=2$
$\therefore\ Y=\{-2,\ 0,\ 2\}$
따라서 구하는 상수함수는 3개다.

79) 360
⇨ 주어진 대응을 함수 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은
5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 5개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 4개
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 3개
따라서 구하는 일대일함수의 개수는
$6\times5\times4\times3=360$(개)이다.

80) 60
⇨ $f(a)$가 될 수 있는 것은 $d,\ e,\ f,\ g,\ h$의 5개
$f(b)$가 될 수 있는 것은 $f(a)$를 제외한 4개
$f(c)$가 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$를 제외한 3개
따라서 구하는 일대일함수의 개수는
$5\times4\times3=60$(개)이다.

81) 12개
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개,
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 3개이므로
일대일함수의 개수는 $4\times3=12$(개)

82) 24
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4개,
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 3개,
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개이므로
일대일 함수의 개수는 $4\times3\times2=24$(개)

83) 64
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4개,
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$a,\ b,\ c,\ d$의 4개이므로 함수의 개수는
$4\times4\times4=4^3=64$(개)

84) 81개
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개.
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개,
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개,
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개이므로
함수의 개수는 $3\times3\times3\times3=3^4=81$(개)

85) 16개
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$a,\ b,\ c,\ d$의 4개이므로 함수의 개수는
$4\times4=4^2=16$(개)

86) 6개
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$의 3개,
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 2개,
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개이므로
일대일 대응의 개수는 $3\times2\times1=6$(개)

87) 24개
⇨ 주어진 함수를 $f:X\to Y$라고 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개,
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$의 값을 제외한 3개,
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개,
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개이므로
일대일 대응의 개수는 $4\times3\times2\times1=24$(개)