08

사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙과 코사인법칙 311
예제
02 삼각형의 넓이 326
예제
기본 다지기 334
실력 다지기 336

예제 01 **사인법칙 (1)**

삼각형 ABC에서 다음을 구하여라.

(1) $a=6,\ A=60^\circ,\ C=75^\circ$일 때, b의 값과 외접원의 반지름의 길이 R의 값

(2) $a=3,\ c=6,\ A=30^\circ$일 때, b의 값과 외접원의 반지름의 길이 R의 값

접근 방법

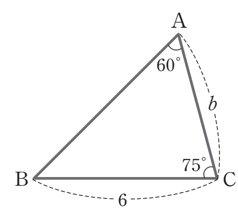
주어진 삼각형에서는 한 변의 길이와 마주 보는 각의 사인함수의 값의 비가 외접원의 지름의 길이로 일정하므로 사인법칙에 의하여 변의 길이와 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있습니다.

Bible 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

상세 풀이

(1) $A+B+C=180^\circ$이므로 $B=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

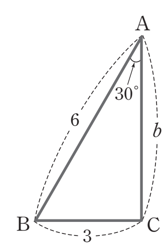


사인법칙에 의하여 $\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=2R$이므로

$$b=\frac{6\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=6\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$$

$$2R=\frac{6}{\sin 60^\circ}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}\qquad \therefore R=2\sqrt{3}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6}{\sin C}$이므로



$$3\sin C=6\sin 30^\circ,\ 3\sin C=6\times\frac{1}{2},\ \sin C=1\qquad \therefore C=90^\circ$$

$A+B+C=180^\circ$이므로 $B=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=2R$이므로

$$b=\frac{3\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=3\sqrt{3},\ 2R=\frac{3}{\sin 30^\circ}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6\qquad \therefore R=3$$

정답 ➡ (1) $b=2\sqrt{6},\ R=2\sqrt{3}$ (2) $b=3\sqrt{3},\ R=3$

보충 설명

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 다음과 같이 사인법칙을 변형하여 사용할 수 있습니다.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \iff \begin{cases} a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C \\ \sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R} \end{cases}$$

풀이집 p.151

숫자 바꾸기

01-1 삼각형 ABC에서 다음을 구하여라.

(1) $b=4$, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$일 때, a의 값과 외접원의 반지름의 길이 R의 값

(2) $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $B=30^\circ$일 때, a의 값과 외접원의 반지름의 길이 R의 값

표현 바꾸기

01-2 삼각형 ABC에서 다음 물음에 답하여라.

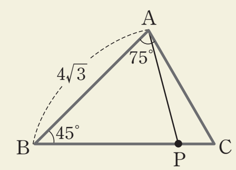
(1) $(a+b):(b+c):(c+a)=5:6:7$일 때, $\sin A:\sin B:\sin C$를 구하여라.

(2) $A:B:C=1:1:2$일 때, $a:b:c$를 구하여라.

08

개념 넓히기 ★★☆

01-3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$, $A=75^\circ$, $B=45^\circ$인 삼각형 ABC에서 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\dfrac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$의 최솟값을 구하여라.



정답 **01-1** (1) $a=2\sqrt{2}$, $R=2\sqrt{2}$ (2) $a=1$ 또는 $a=2$, $R=1$
01-2 (1) $3:2:4$ (2) $1:1:\sqrt{2}$ **01-3** $4\sqrt{2}$

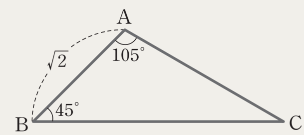
예제 02

사인법칙 (2)

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서

$$A=105^\circ,\ B=45^\circ,\ \overline{AB}=\sqrt{2}$$

일 때, 변 BC의 길이를 구하여라.

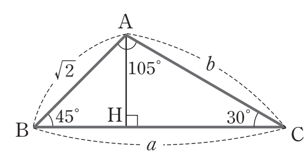


접근 방법

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 105^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$이고, 이 식에서 a의 값은 $\sin 105^\circ$의 값을 알아야만 구할 수 있지만, b의 값은 주어진 식만으로 구할 수 있으므로 b의 값을 이용하여 a의 값을 구합니다.

> **Bible** 삼각형 ABC의 한 꼭짓점에서 대변에 수선을 내리면 다음이 항상 성립한다.
> $a=b\cos C+c\cos B,\ b=c\cos A+a\cos C,\ c=a\cos B+b\cos A$

상세 풀이



$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b$라고 하면

$A+B+C=180^\circ$에서

$$C=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore b=\frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=2$$

이때, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$a=\overline{BH}+\overline{HC}$$

이므로

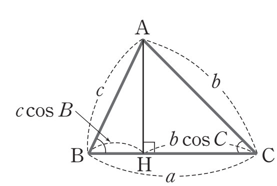
$$a=\sqrt{2}\cos 45^\circ+2\cos 30^\circ=1+\sqrt{3}$$

정답 ➡ $1+\sqrt{3}$

보충 설명

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 한 꼭짓점에서 대변에 수선을 내려 변의 길이를 두 부분으로 나누어 생각하면 삼각형 ABC에서 세 각의 크기와 세 변의 길이 사이에 다음이 항상 성립함을 알 수 있습니다.

$$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=a\cos B+b\cos A$$



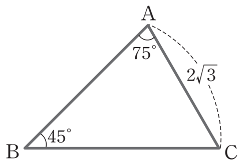
풀이집 p.152

숫자 바꾸기

02-1 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서

$$A=75^\circ,\ B=45^\circ,\ \overline{AC}=2\sqrt{3}$$

일 때, 변 BC의 길이를 구하여라.



표현 바꾸기

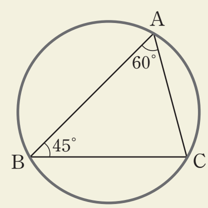
02-2 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$이고, $\cos B=\frac{1}{2}$, $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, 변 BC의 길이는?

① $1+\sqrt{10}$　② $1+\sqrt{15}$　③ $2+\sqrt{10}$
④ $2+\sqrt{15}$　⑤ $1+2\sqrt{10}$

08

개념 넓히기 ★★☆　◆다른 풀이

02-3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $A=60^\circ$, $B=45^\circ$일 때, 변 AB의 길이를 구하여라.



정답 **02-1** $3+\sqrt{3}$　**02-2** ④　**02-3** $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

예제 03

코사인법칙

삼각형 ABC에서 다음 물음에 답하여라.

(1) $b=2\sqrt{7}$, $c=4$, $B=60^\circ$일 때, a의 값을 구하여라.

(2) $a=\sqrt{6}$, $b=2$, $c=\sqrt{3}+1$일 때, A의 크기를 구하여라.

접근 방법

(1)에서는 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어져 있으므로 나머지 한 변의 길이를 코사인법칙에 의하여 구할 수 있습니다. (2)에서는 삼각형의 세 변의 길이가 주어져 있으므로 코사인법칙의 변형에 의하여 세 각에 대한 코사인함수의 값을 각각 구할 수 있습니다.

Bible $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

상세 풀이

(1) 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

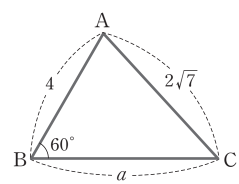
$$(2\sqrt{7})^2=4^2+a^2-2\times4\times a\times\cos60^\circ$$

따라서 이 식을 정리하면

$$a^2-4a-12=0,\ (a+2)(a-6)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=6$$

그런데 $a>0$이므로 $a=6$

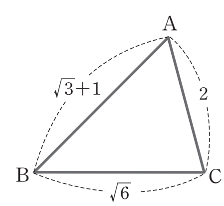


(2) 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2}$$

따라서 $0^\circ<A<180^\circ$에서 $A=60^\circ$



정답 ➡ (1) 6 (2) 60°

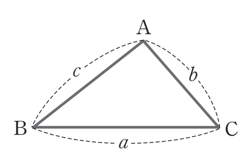
보충 설명

코사인법칙을 이용하면 삼각형 ABC에서 세 각의 크기와 세 변의 길이 사이에 다음이 성립합니다. 삼각형에서 변의 길이와 각의 크기를 구할 때 많이 이용하므로 꼭 기억해 두도록 합시다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



풀이집 p.153

숫자 바꾸기

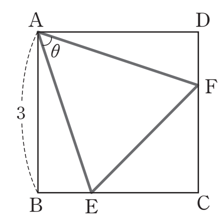
03-1 삼각형 ABC에서 다음 물음에 답하여라.

(1) $a=2$, $c=\sqrt{3}$, $B=45^\circ$일 때, b^2의 값을 구하여라.

(2) $a=4$, $b=5$, $c=6$일 때, $\cos A : \cos B : \cos C$를 구하여라.

표현 바꾸기

03-2 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD의 두 변 BC, CD의 삼등분점 중 두 점 B, D에 가까운 점을 각각 E, F라고 하자. $\angle EAF=\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

④ $\dfrac{3}{5}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

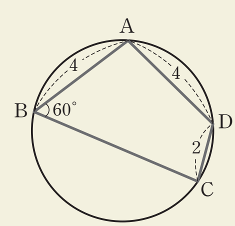
08

개념 넓히기 ★★☆

03-3 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD가

$$\overline{AB}=\overline{AD}=4,\ \overline{CD}=2,\ \angle ABC=60^\circ$$

를 만족시킬 때, 변 BC의 길이를 구하여라.

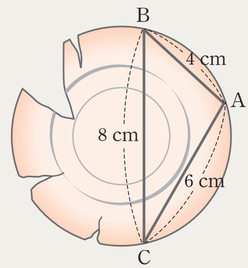


정답 **03-1** (1) $7-2\sqrt{6}$ (2) $12:9:2$ **03-2** ④
03-3 6

예제 04

사인법칙의 활용

어느 고분에서 원판 모양인 접시의 깨어진 조각이 출토되었다. 오른쪽 그림과 같이 이 접시의 깨어지지 않은 세 지점으로 삼각형을 만들어 각 변의 길이를 재어 보았더니 길이가 각각 **4 cm**, **6 cm**, **8 cm**이었을 때, 이 접시의 반지름의 길이를 구하여라.



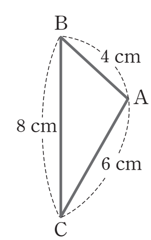
접근 방법

주어진 삼각형의 세 변의 길이에서 한 각의 코사인함수의 값을 구하고, 원판 모양의 접시의 반지름의 길이를 구해야 하므로 사인함수의 값을 구한 후 사인법칙에 의하여 외접원의 반지름(접시의 반지름)의 길이를 구하도록 합니다.

Bible 삼각형의 외접원의 반지름(또는 지름)의 길이는 사인법칙을 이용한다.

상세 풀이

오른쪽 그림과 같이 세 지점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여



$$\cos A=\frac{6^2+4^2-8^2}{2\times 6\times 4}=-\frac{1}{4}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}$$

$$\therefore R=\frac{\overline{BC}}{2\sin A}=\frac{8}{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{16}{\sqrt{15}}=\frac{16\sqrt{15}}{15}$$

따라서 구하는 접시의 반지름의 길이는 $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm입니다.

정답 ➡ $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm

보충 설명

주어진 삼각형 ABC에서 $\cos B=\frac{11}{16}$, $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$이므로

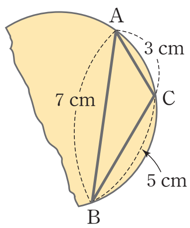
$$2R=\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{6}{\frac{3\sqrt{15}}{16}} \qquad \therefore R=\frac{16\sqrt{15}}{15}$$

풀이집 p.153

숫자 바꾸기

04-1

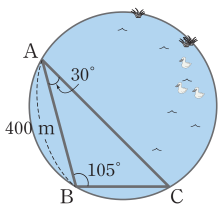
어느 고고학자가 원 모양으로 추정되는 깨어진 장신구를 발견하였다. 이 장신구의 세 지점 A, B, C를 오른쪽 그림과 같이 정하여 세 변 AB, AC, BC의 길이를 재어 보았더니 각각 7 cm, 3 cm, 5 cm이었다. 이 장신구의 반지름의 길이를 구하여라.



표현 바꾸기

04-2

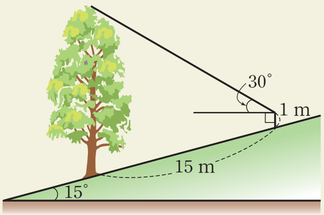
원 모양의 호수의 지름의 길이를 구하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 호숫가의 세 지점 A, B, C를 잡아 두 지점 A, B 사이의 거리와 ∠CAB, ∠ABC의 크기를 측정하였더니 $\overline{AB}=400$ m, $A=30^\circ$, $B=105^\circ$이었다. 이 호수의 지름의 길이를 구하여라.



개념 넓히기 ★★★

04-3

다음 그림과 같이 지표면과 15°의 경사를 이루는 비탈길 위에 나무가 지표면에 수직으로 서 있다. 이 나무로부터 비탈길을 따라 15 m 올라간 지점에서 지표면에 수직으로 설치된 높이가 1 m인 받침대 위에서 각도 측정기로 나무의 꼭대기를 올려다 본 각의 크기를 재었더니 30°이었다. 이 나무의 높이를 구하여라. (단, $\sqrt{6}=2.45$로 계산한다.)

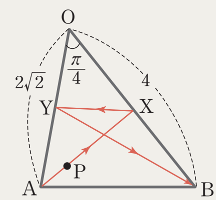


정답 04-1 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm　04-2 $400\sqrt{2}$ m　04-3 13.25 m

예제 05

코사인법칙의 활용

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=4$, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4}$인 삼각형 OAB가 있다. 움직이는 점 P가 점 A에서 출발하여 두 변 OB, OA 위의 두 점 X, Y를 차례대로 거쳐 점 B까지 도달할 때, 점 P가 이동한 거리의 최솟값을 구하여라.



접근 방법

삼각형 OAB의 두 변 OA, OB에 대하여 대칭이동하여 움직이는 거리의 최솟값은 코사인법칙을 이용하여 구할 수 있습니다.

Bible 꺾이는 선의 길이의 최솟값은 대칭이동에 의하여 직선으로 생각한다.

상세 풀이

오른쪽 그림과 같이 선분 OA에 대한 점 B의 대칭점을 B′이라 하고, 선분 OB에 대한 점 A의 대칭점을 A′이라고 하면 두 선분 OB, OA 위의 임의의 두 점 X, Y에 대하여

$\overline{\mathrm{AX}}=\overline{\mathrm{A'X}}$, $\overline{\mathrm{BY}}=\overline{\mathrm{B'Y}}$

이므로 오른쪽 그림에서 점 P가 이동한 거리는

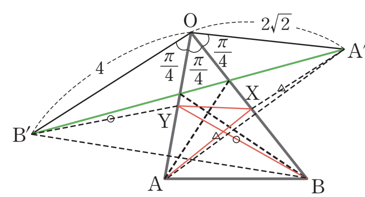
$\overline{\mathrm{AX}}+\overline{\mathrm{XY}}+\overline{\mathrm{BY}}=\overline{\mathrm{A'X}}+\overline{\mathrm{XY}}+\overline{\mathrm{B'Y}}$

이고, 그 최솟값은 네 점 B′, Y, X, A′이 한 직선 위에 있을 때이므로

$\overline{\mathrm{AX}}+\overline{\mathrm{XY}}+\overline{\mathrm{BY}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

따라서 삼각형 OB′A′에서 코사인법칙에 의하여

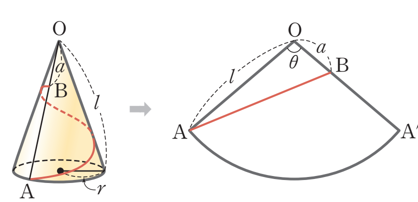
$$\overline{\mathrm{A'B'}}^2=4^2+(2\sqrt{2})^2-2\times4\times2\sqrt{2}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$
$$=16+8+16=40$$
$$\therefore \overline{\mathrm{A'B'}}=2\sqrt{10}$$



정답 ➡ $2\sqrt{10}$

보충 설명

입체도형에서의 이동 거리의 최솟값(최단거리)을 생각할 때에는 전개도에서 직선 거리를 생각하도록 합니다.
즉, 오른쪽 그림의 원뿔에서 밑면 위의 한 점 A에서 출발하여 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 B까지 가는 최단경로는 원뿔의 옆면의 전개도에서 선분 AB와 같습니다.



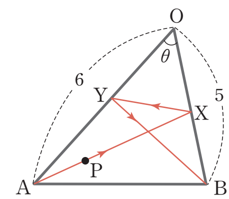
풀이집 p.154

숫자 바꾸기

05-1

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}=6$, $\overline{OB}=5$인 삼각형 OAB가 있다. 움직이는 점 P가 점 A에서 출발하여 두 변 OB, OA 위의 두 점 X, Y를 차례대로 거쳐 점 B까지 도달한다. 점 P가 이동한 거리의 최솟값이 $\sqrt{91}$일 때, θ의 크기를 구하여라.

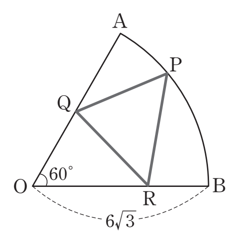
$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



표현 바꾸기

05-2

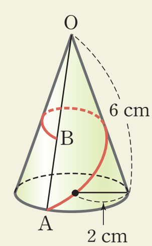
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 $6\sqrt{3}$이고 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 OAB에서 호 AB 위에 한 점 P를 잡고, 두 선분 OA, OB 위에 각각 두 점 Q, R를 잡을 때, 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.



개념 넓히기 ★★☆

05-3

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2 cm이고 모선의 길이가 6 cm인 원뿔이 있다. 모선 OA의 중점을 B라 하고 점 A에서 점 B까지 실로 원뿔의 옆면을 한 바퀴 감을 때, 실의 길이의 최솟값을 구하여라.



정답 **05-1** $\frac{2}{9}\pi$ **05-2** 18 **05-3** $3\sqrt{7}$ cm

예제 06

삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 다음 물음에 답하여라.

(1) $a=8$, $b=6$, $c=4$일 때, 삼각형 ABC의 넓이 S를 구하여라.

(2) $b=2$, $c=2\sqrt{7}$, $C=60^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 넓이 S를 구하여라.

접근 방법

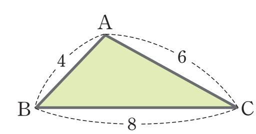
(1)에서는 세 변의 길이가 주어져 있으므로 코사인법칙의 변형에 의하여 한 각의 코사인함수의 값을 구하고, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$에 의하여 사인함수의 값을 구하여 삼각형의 넓이를 구합니다. (2)에서는 변 BC의 길이를 코사인법칙에 의하여 구하고 삼각형의 넓이를 구합니다.

Bible 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

상세 풀이

(1) $a=8$, $b=6$, $c=4$이므로 코사인법칙의 변형에 의하여



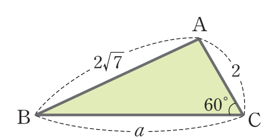
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+4^2-8^2}{2\times6\times4}=-\frac{1}{4}$$

또한 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$이고 $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$$

(2) 코사인법칙에 의하여



$$(2\sqrt{7})^2=a^2+2^2-2\times a\times2\times\cos60^\circ,\ 28=a^2+4-2a$$

$$a^2-2a-24=0,\ (a+4)(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times2\times\sin60^\circ=3\sqrt{3}$$

정답 ➡ (1) $3\sqrt{15}$ (2) $3\sqrt{3}$

보충 설명

삼각형의 세 변의 길이를 알 때 삼각형의 넓이를 구하는 다른 방법으로 다음과 같은 헤론의 공식이 있습니다.

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

삼각형 ABC에서 세 변의 길이가 (1)과 같이 $a=8$, $b=6$, $c=4$로 주어진 경우 삼각형의 넓이 S를 헤론의 공식을 이용하여 구해 보면 $s=\frac{8+6+4}{2}=9$이므로

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)}=\sqrt{9\times1\times3\times5}=3\sqrt{15}$$

풀이집 p.155

숫자 바꾸기

◆다른 풀이

06-1 삼각형 ABC에서 다음 물음에 답하여라.

(1) $a=3$, $b=5$, $c=7$일 때, 삼각형 ABC의 넓이 S를 구하여라.

(2) $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $A=30^\circ$, $B=45^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 넓이 S를 구하여라.

표현 바꾸기

06-2 다음 물음에 답하여라.

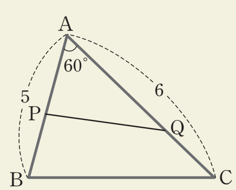
(1) 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $A=60^\circ$, $B=30^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

(2) 삼각형 ABC에서 $a:b:c=3:4:5$이고 외접원의 반지름의 길이가 2일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

08

개념 넓히기 ★★☆

06-3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$이고 $A=60^\circ$인 삼각형 ABC에서 두 선분 AB, AC 위에 각각 두 점 P, Q를 잡을 때, 선분 PQ에 의하여 삼각형 ABC의 넓이가 이등분된다고 한다. 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하여라.

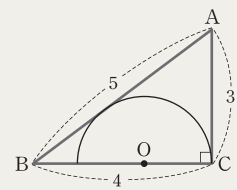


정답 **06-1** (1) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ (2) $1+\sqrt{3}$ **06-2** (1) $2\sqrt{3}$ (2) $\frac{96}{25}$ **06-3** $\sqrt{15}$

예제 07

삼각형의 내접원의 반지름의 길이와 넓이

오른쪽 그림과 같이 세 변의 길이가 3, 4, 5이고 $C=90°$인 직각삼각형에 반원이 내접해 있다. 이 반원의 반지름의 길이를 구하여라.



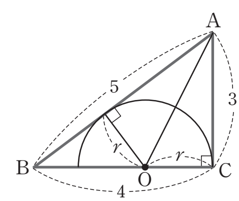
접근 방법

삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 구할 때에는 원의 중심에서 내린 수선과 삼각형의 각 변이 수직으로 만나므로 삼각형의 넓이를 이용합니다.

Bible 삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 구할 때에는 삼각형의 넓이를 이용한다.

상세 풀이

오른쪽 그림과 같이 두 점 O, A를 잇는 선분을 그어 생각해 보면 삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABO, ACO의 넓이의 합과 같습니다.



즉, $\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle ACO$이고 반원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times4=6,$$

$$\triangle ABO=\frac{5}{2}r,\ \triangle ACO=\frac{3}{2}r$$

이므로 $\frac{5}{2}r+\frac{3}{2}r=6 \qquad \therefore r=\frac{3}{2}$

다른 풀이

삼각형 ABC의 넓이를 헤론의 공식을 이용하여 구하면 $s=\frac{3+4+5}{2}=6$

$$\therefore \triangle ABC=\sqrt{6\times(6-3)\times(6-4)\times(6-5)}=6$$

따라서 $\frac{5}{2}r+\frac{3}{2}r=6$이므로 $r=\frac{3}{2}$

정답 ➡ $\frac{3}{2}$

보충 설명

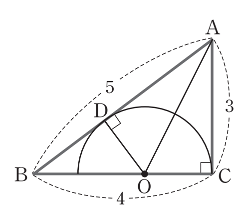
반원의 중심 O에서 변 AB에 내린 수선의 발을 D라고 하면

$\overline{AD}=\overline{AC}=3$이므로 $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=2$이고

$$\angle OBD=\angle ABC,\ \angle BDO=\angle BCA=90°$$

에서 $\triangle OBD\backsim\triangle ABC$이므로

$$\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{OD}:\overline{AC},\ 2:4=\overline{OD}:3 \qquad \therefore \overline{OD}=\frac{3}{2}$$

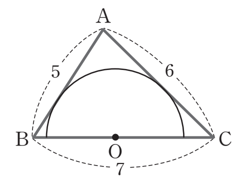


이와 같이 삼각형의 내접원의 반지름의 길이는 직각삼각형의 닮음을 이용하여 구할 수도 있습니다.

풀이집 p.156

숫자 바꾸기

07-1 오른쪽 그림과 같이 세 변의 길이가 5, 6, 7인 삼각형에 반원이 내접해 있다. 이 반원의 반지름의 길이를 구하여라.

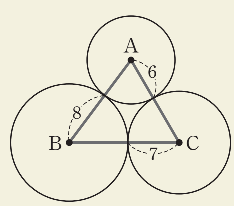


표현 바꾸기

07-2 직각삼각형 ABC의 외접원과 내접원의 반지름의 길이가 각각 3, 1일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

07-3 오른쪽 그림과 같이 서로 외접하는 세 원의 반지름의 길이가 각각 6, 7, 8일 때, 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이와 내접원의 반지름의 길이의 차를 구하여라.



정답 **07-1** $\frac{12\sqrt{6}}{11}$ **07-2** 7 **07-3** $\frac{33}{8}$