● 2회차

01 ⑤	**02** ⑤	**03** ①	**04** ①	**05** ④
06 ②	**07** ①	**08** ②	**09** ⑤	**10** ①
11 ④	**12** ③	**13** ④	**14** ④	**15** ③
16 ③	**17** ②			

[서술형 1] (1) $f(x)=x^4-2x^2+5$ (2) 5
[서술형 2] 49
[서술형 3] 40

01 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+a+6$
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이어야 한다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)\leq 0$
$a^2-3a-18\leq 0$, $(a-6)(a+3)\leq 0$
$\therefore -3\leq a\leq 6$
따라서 정수 a의 최댓값은 6이다.

02 $f(x)=-x^4+4x^3$에서
$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	27	↘

즉 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3)$에서 증가하고 구간 $(3, \infty)$에서 감소한다.
따라서 $a\leq 3$이므로 실수 a의 최댓값은 3이다.

03 $f(x)=x^3+ax^2+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2ax$
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로
$f'(1)=0$, $f(1)=-2$
$3+2a=0$, $1+a+b=-2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$
$\therefore a-b=-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

04 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

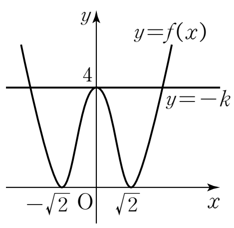
05 $f(x)=2x^3-3x^2+6kx$에서
$f'(x)=6x^2-6x+6k$
이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-6\cdot 6k>0$ $\quad\therefore k<\frac{1}{4}$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 a, b $(a<b)$라 하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지므로
$f(a)+f(b)=-4$
$2a^3-3a^2+6ka+(2b^3-3b^2+6kb)=-4$
$\therefore 2(a^3+b^3)-3(a^2+b^2)+6k(a+b)=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 이차방정식 $f'(x)=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=1$, $ab=k$이므로
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=1-3\cdot k\cdot 1$
$=1-3k$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2k$
위의 식을 ㉠에 대입하면
$2(1-3k)-3(1-2k)+6k\cdot 1=-4$
$6k=-3$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{2}$

06 $x^4-4x^2+4+k=0$에서
$x^4-4x^2+4=-k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^2+4$와 직선 $y=-k$의 교점이 3개이어야 한다.
$f(x)=x^4-4x^2+4$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘	0	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점이 3개이려면



$-k=4$ $\therefore k=-4$

07 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t$이므로

$a=v(1)=3-12=-9$

또 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $3t^2-12t=0$, $3t(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$), 즉 $b=4$

$\therefore a+b=-9+4=-5$

08 $f(x)=\int(x+1)(x^2-x+1)dx$

$=\int(x^3+1)dx$

$=\dfrac{1}{4}x^4+x+C$

이때 $f(1)=1$이므로 $\dfrac{1}{4}+1+C=1$

$\therefore C=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x-\dfrac{1}{4}$이므로

$2f(0)=2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

09 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+f'(x)$

$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)$

즉 $3f'(x)=3x^2-6x+9$이므로

$f'(x)=x^2-2x+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-2x+3)dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+1$이므로

$f(1)=\dfrac{1}{3}-1+3+1=\dfrac{10}{3}$

10 $F(x)=xf(x)+3x^4+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+12x^3+2x$

$xf'(x)=-12x^3-2x$

$\therefore f'(x)=-12x^2-2$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-12x^2-2)dx$

$=-4x^3-2x+C$

이때 $f(1)=0$이므로 $C-6=0$ $\therefore C=6$

따라서 $f(x)=-4x^3-2x+6$이므로

$f(2)=-32-4+6=-30$

11 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=-4$에서 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$

$\therefore f(2)=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=-4$

또 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$이므로

$f'(x)=ax^2(x-3)$ $(a\neq0)$으로 놓을 수 있다.

$f'(2)=-4$에서 $-4a=-4$ $\therefore a=1$

즉 $f'(x)=x^2(x-3)=x^3-3x^2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3-3x^2)dx$

$=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+C$

이때 ㉠에서 $f(2)=3$이므로

$4-8+C=3$ $\therefore C=7$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+7$이므로

$f(1)=\frac{1}{4}-1+7=\frac{25}{4}$

12 $\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8)dx$

$=2\Big[x+x^3+x^5+x^7+x^9\Big]_0^1$

$=2\cdot5=10$

13 $\int_{-2}^{2}(|x^2|-x+|x|)dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^2-x-x)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x+x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}x^2dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-2}^{0}+\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^2$

$=\frac{20}{3}+\frac{8}{3}=\frac{28}{3}$

오답 피하기

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분의 값을 구할 때는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 적분 구간을 나누어 계산한다.

14 함수 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^2}f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to1}(x+1)$

$=2F'(1)$

$=2f(1)$

$=2\cdot6=12$

15 $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$로 놓으면

$\int_{0}^{x}f(t)dt=x^3-2x^2-2kx$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x-2k$ ...... ㉠

㉠을 $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$에 대입하면

$\int_{0}^{1}(3t^2-4t-2k)dt=k$

$\Big[t^3-2t^2-2kt\Big]_0^1=k$

$-2k-1=k$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$이므로

$f(0)=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore 60a=60\cdot\frac{2}{3}=40$

다른 풀이

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_{0}^{1}f(t)dt=1-2-2\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\therefore \int_{0}^{1}f(t)dt=-\frac{1}{3}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\int_{0}^{x}f(t)dt=x^3-2x^2+\frac{2}{3}x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$이므로

$f(0)=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore 60a=60\cdot\frac{2}{3}=40$

16 $f(x)=-x^3+3x$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

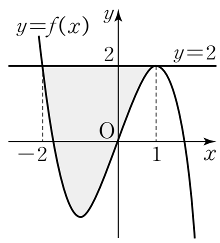
즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -2, $x=1$에서 극댓값 2를 가지므로 $m=2$

$-x^3+3x=2$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=-x^3+3x$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 -2, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{2-(-x^3+3x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{27}{4}$$

17 출발한 지 20분 후의 열기구의 지면으로부터의 높이는

$$100+\int_{0}^{20}v(t)dt$$
$$=100+\int_{0}^{10}t\,dt+\int_{10}^{20}(30-2t)dt$$
$$=100+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{10}+\left[30t-t^2\right]_{10}^{20}$$
$$=100+50+0$$
$$=150\ (\mathrm{m})$$

[서술형 1] (1) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 실수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

(가)에서 $-f'(x)=f'(-x)$이므로

$-4x^3-3ax^2-2bx-c=-4x^3+3ax^2-2bx+c$

$6ax^2+2c=0$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로 $a=0$, $c=0$

$\therefore f(x)=x^4+bx^2+d$, $f'(x)=4x^3+2bx$

(다)에서 $f(0)=5$이므로 $d=5$

(나)에서 $f'(-1)=0$이므로

$-4-2b=0$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore f(x)=x^4-2x^2+5$

❶

(2) $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗	5	↘	4	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 5를 갖는다.

❷

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	4점
❷ 함수 $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $f(x)=x^4-32x+a$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-32=4(x-2)(x^2+2x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x^2+2x+4>0$)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-48$	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a-48$을 갖는다.

❶

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $a-48>0$ $\quad\therefore a>48$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 49이다.

❷

채점 기준	배점
❶ $x^4-32x+a$의 최솟값을 구할 수 있다.	3점
❷ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=12x^5-4x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=12x^5-4x^3$

$\therefore f'(x)=12x^3-4x$

❶

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-1+2\int_{1}^{1}tf(t)dt=1$

❷

이때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^3-4x)dx$

$\quad=3x^4-2x^2+C$

이므로 $f(1)=1$에서 $3-2+C=1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=3x^4-2x^2$이므로

$f(-2)=48-8=40$

❸

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	3점