1-4-2.로그함수의 최대, 최소_천재(류희찬)

개념check

[로그함수 $y=\log_a x$의 최대 · 최소]

• 로그함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$은 정의역이 $\{x|m\le x\le n\}$일 때,

(1) $a>1$인 경우
$x=m$일 때 최솟값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

(2) $0<a<1$인 경우
$x=m$일 때 최댓값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

[함수 $y=\log_a f(x)$꼴의 최대 · 최소]

• 함수 $y=\log_a f(x)$꼴의 최대 • 최소 구하는 방법

① 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

② ①에서 구한 $f(x)$의 최댓값과 최솟값에서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

기본문제

[예제]

1. 정의역이 $\{x|1\le x\le 41\}$인 함수 $y=\log_5(3x+2)+2$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

[문제]

2. 정의역이 $\{x|-1\le x\le 17\}$인 함수 $y=\log_3(x+10)+2$의 최댓값을 a, 정의역이 $\{x|9\le x\le 24\}$인 함수 $y=-\frac{1}{2}\log_2(x-8)+1$의 최솟값을 b라 할 때, $a+2b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

평가문제

[스스로 확인하기]

3. 정의역이 $\{x|a\le x\le 11\}$인 함수 $y=2\log_3(x-2)-1$의 최댓값과 최솟값의 합은 2일 때, a의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 9　⑤ 11

[스스로 마무리하기]

4. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+b)$는 $x=1$일 때, 최댓값 -3을 갖는다. 이때, $\log_3(x^2-2ax+b+4)$의 최솟값은? (단, a, b는 실수)

① -2　② 0　③ $\log_3 2$　④ 2　⑤ $2\log_3 2$

유사문제

5. 함수 $y=2+\log_a(x^2-6x+12)$의 최솟값이 4일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{3}$　⑤ 9

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

6. 정의역이 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{3}{2} \le x \le 2\right\}$일 때, 함수 $y=\log_2(x+2)-1$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

7. 함수 $y=\log_3(3-2x)+\log_3(2x+5)$의 최댓값은?

① $\log_3 12$ ② $\log_3 14$
③ $4\log_3 2$ ④ $\log_3 18$
⑤ $\log_3 20$

8. 정의역이 $\left\{x \,\middle|\, -3 \le x \le \frac{1}{2}\right\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 1 ② 3
③ 5 ④ -3
⑤ -1

9. $4 \le x \le 10$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+a$의 최댓값이 4일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

10. 함수 $y=\log_2 x+\log_2(4-x)$의 최댓값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125

정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설] 정의역이 $\{x|1 \le x \le 41\}$인

함수 $y=\log_5(3x+2)+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=41$일 때

최댓값 $\log_5(123+2)+2=3+2=5$

$x=1$일 때

최솟값 $\log_5(3+2)+2=3$

따라서 $a=5$, $b=3$이므로

$a+b=8$

2) [정답] ①

[해설] 함수 $y=\log_3(x+10)+2$는 x값이 증가하면 y값도 증가하므로 최댓값은 $x=17$일 때, 5이다.

함수 $y=-\frac{1}{2}\log_2(x-8)+1$는 x값이 증가하면 y값은 감소하므로 최솟값은 $x=24$일 때, -1이다.

따라서 $a=5$, $b=-1$이므로 $a+2b=3$

3) [정답] ②

[해설] 함수 $y=2\log_3(x-2)-1$는 x값이 증가하면 y값도 증가한다.

따라서 최솟값은 $x=a$일 때, $2\log_3(a-2)-1$,

최댓값은 $x=11$일 때, 3이다

최댓값과 최솟값의 합이 2이므로

최솟값 $2\log_3(a-2)-1=-1$, $2\log_3(a-2)=0$

$\therefore a=3$

4) [정답] ④

[해설] 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+b)$가 $x=1$일 때 최댓값 -3을 가지므로 이차함수 $y=x^2+ax+b$는 $x=1$일 때 최솟값을 가져야 한다.

$y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$에서

$-\frac{a}{2}=1$, 즉 $a=-2$

또 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+b)$에서 $x=1$일 때의 함숫값이 -3이므로

$-3=\log_{\frac{1}{2}}(1-2+b)$

$-1+b=8$, 즉 $b=9$

따라서 $y=\log_3(x^2-2ax+b+4)$은

$y=\log_3(x^2+4x+13)$이고, 최솟값은 $x^2+4x+13$이 최소일 때이므로

$x=-2$일 때, 최솟값은 $\log_3 9=2$이다.

5) [정답] ②

[해설] $y=2+\log_a(x^2-6x+12)$

$=2+\log_a\{(x-3)^2+3\}$

이차식 $(x-3)^2+3$은 최솟값이 존재하고

함수 $y=2+\log_a(x^2-6x+12)$도

최솟값이 존재하므로 $a>1$이다.

$(x-3)^2+3$이 최소일 때

함수 $y=2+\log_a(x^2-6x+12)$는

최솟값 4를 가지므로 $2+\log_a 3=4$이다.

$\log_a 3=2$, $a^2=3$에서 $a=\sqrt{3}$이다.

6) [정답] ①

[해설] $y=\log_2(x+2)-1$은 밑이 $2>1$이므로 증가함수이다. 따라서 $x=2$일 때 최댓값을, $x=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값을 갖는다.

최댓값: $\log_2(2+2)-1=1$, 즉, $a=1$

최솟값: $\log_2(-\frac{3}{2}+2)-1=-2$, 즉, $b=-2$

그러므로 $ab=-2$이다.

7) [정답] ③

[해설] 로그의 진수의 조건에 의해

$3-2x>0$, $2x+5>0$, 즉, $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$

$y=\log_3(3-2x)+\log_3(2x+5)$

$=\log_3(3-2x)(2x+5)$

$=\log_3(-4x^2-4x+15)$

$=\log_3\left\{-4(x+\frac{1}{2})^2+16\right\}$이므로

$x=-\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\log_3 16=4\log_3 2$

8) [정답] ③

[해설] $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)+3$은 증가함수이므로

$x=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값을 갖고, $x=-3$일 때, 최솟값을 갖는다.

최댓값 M: $\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)+3=4$

최솟값 m: $\log_{\frac{1}{2}}(1+3)+3=1$

따라서 $M+m=4+1=5$이다.

9) [정답] ⑤

[해설] 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+a$는 x의 값이 커질 때, y의 값은 작아진다.

따라서 $x=4$일 때 최댓값을 갖는다.

최댓값: $\log_{\frac{1}{3}}(4-1)+a=4$이므로 $a=5$

10) [정답] ②

[해설] $y=\log_2 x+\log_2(4-x)$에서

진수의 조건에 의해 $x>0$, $4-x>0$이므로

$0<x<4$이다.
$y=\log_2 x+\log_2(4-x)$
$=\log_2(4x-x^2)=\log_2\{-(x-2)^2+4\}$
즉, 주어진 함수는 밑이 1보다 큰 양수이므로
$0<x<4$에서 $-(x-2)^2+4$가 최대일 때
최댓값을 갖는다.
따라서 $y=\log_2 x+\log_2(4-x)$ 는
$x=2$에서 최댓값 $\log_2 4=2$ 를 갖는다.

I410-UCI(KEPA)-0199-2019-001-000244125