단원 ISSUE

이 단원에서는 **미분계수를 이용하는 문제**가 자주 출제된다. **평균변화율과 미분계수**를 비교하는 문제의 경우 문제에서 주어진 조건을 놓치지 않고 풀어야 한다. 또한 함수를 도함수의 정의를 통하여 미분하는 경우 **미분법의 공식**에 대한 반복학습이 필요하다.

평가문제

[중단원 학습 점검]

1. 함수 $f(x)=-x^3+ax$의 $x=-3$에서 $x=1$까지의 평균변화율이 -5일 때, a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[중단원 학습 점검]

2. 다음 중 $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수를 <보기>에서 모두 고르면?

<보기>

ㄱ. $f(x)=x^2-2x$

ㄴ. $g(x)=|x-2|$

ㄷ. $h(x)=x|x-2|$

ㄹ. $k(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \geq 2) \\ -x+7 & (x \leq 2) \end{cases}$

① ㄱ ,ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ　④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

[중단원 학습 점검]

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+2)-7}{x^2-4}=1$일 때, $f(4)-f'(4)$의 값을 구하면?

① -1　② -3　③ -5　④ 3　⑤ 7

[대단원 학습 점검]

4. $\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-n}{x(x-1)(x+1)}$의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(4)$의 값은?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

[중단원 학습 점검]

5. 함수 $f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$에 대하여 $f'(-1)$의 값은?

① 28　② 30　③ 32　④ 34　⑤ 36

[대단원 학습 점검]

6. 미분가능한 함수

$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<0) \\ a(x-1)^2+b & (x \geq 0) \end{cases}$에 대하여 $f(1)$의 값은 ? (단, a, b는 상수이다)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

[중단원 학습 점검]

7. 함수 $f(x)=x^3-5x^2+9x+7$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$의 값을 구하면?

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

[중단원 학습 점검]

8. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에 대하여 $f(2)=-7$, $f'(2)=2$일 때, $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면? (단, a, b는 상수이다.)

① -1　② -3　③ -5　④ 3　⑤ 7

[중단원 학습 점검]

9. n차 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(x^n+3)f'(x)=f(x)$ 를 만족하고 $f(1)=4$일 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① -4　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 6

[대단원 학습 점검]

10. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2$ 일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[중단원 학습 점검]

11. 다음 함수들의 $x=1$에서의 미분계수의 합을 구하면?

- $f(x)=2x^2+3x+5$
- $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+1$
- $h(x)=(x^2-2x+4)(3x-1)$

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

[대단원 학습 점검]

12. 다항함수 $f(x)=x^2-2x+4$, $g(x)=(x^3-x)^2$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x^2-1}$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 3

[중단원 학습 점검]

13. 두 함수 $f(x)=x^3+2x^2-7x+5$, $g(x)=2x^2+3x+4$에 대하여 $f'(-2)+g'(1)$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

실전문제

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=3$, $f'(1)=4$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3f(1)-f(1+h)}{h}$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

15. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}=15$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하면?

① 4　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

16. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=2$일 때, $\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}$의 값은?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

17. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=6$을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 9
⑤ 12

18. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x<1) \\ -x^2+bx & (x\ge1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $f(0)+f(2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 2
③ 6 ④ 10
⑤ 14

19. x에 대한 삼차다항식 $f(x)$가 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=24$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-6$일 때, 다항식 $f(x)$에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르시오.

<보기>
ㄱ. $f(x)$의 최고차항의 계수는 -2이다.
ㄴ. $f(x)$의 세 근의 합은 2이다.
ㄷ. $f(x)$의 세 근 중 적어도 하나는 정수가 아니다.
ㄹ. $f(x)$의 세 근의 곱은 -6이다.
ㅁ. $f(x)$의 상수항은 12이다.

① ㄴ, ㅁ ② ㄱ, ㄴ, ㅁ
③ ㄹ, ㅁ ④ ㄷ, ㄹ
⑤ ㄴ, ㄹ

20. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ 54-f(x) & (x\ge-3)\end{cases}$가 $x=-3$에서 미분가능할 때, $g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 9
③ 18 ④ 27
⑤ 36

21. 함수 $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2+3 & (x\ge1) \\ ax+b & (x<1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, $f(0)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설] $x=-3$에서 $x=1$까지의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=\frac{(-1+a)-(27-3a)}{4}$$

$=-7+a=-5$

$\therefore a=2$

2) [정답] ④

[해설] ㄱ. $f(x)=x^2-2x$는 $x=2$에서 연속이고 미분가능하다. (거짓)

ㄴ. $g(x)=|x-2|$는 $x=2$에서 연속이고 미분불가능하다. (참)

ㄷ. $h(x)=x|x-2|$는 $x=2$에서 연속이고 미분불가능하다. (참)

ㄹ. $k(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\geq 2)\\ -x+7 & (x\leq 2)\end{cases}$는 $x=2$에서 연속이고 미분불가능하다. (참)

3) [정답] ④

[해설] $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x+2)-7}{x^2-4}=1$이고 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to 2}\{f(x+2)-7\}=0$이다. 즉, $f(4)=7$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x+2)-7}{x^2-4}=\frac{1}{4}f'(4)=1$ 이므로

$f'(4)=4$, 따라서 $f(4)-f'(4)=3$이다.

4) [정답] ⑤

[해설] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-n}{x(x-1)(x+1)}$에서

$g(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-n$이라 하면 주어진 식은

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x(x+1)}=\frac{g'(1)}{2}$ 이다.

$g'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+1$ 에서

$g'(1)$

$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$,

따라서 $f(n)=\frac{n(n+1)}{4}$이므로 $f(4)=5$이다.

5) [정답] ①

[해설] $f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$에서

$f'(x)=6x^2(x-1)^2+(2x^3+1)\times 2(x-1)$

$\therefore f'(-1)=6\times 1\times 4+(-1)\times 2\times(-2)=28$

6) [정답] ②

[해설] $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x<0)\\ a(x-1)^2+b & (x\geq 0)\end{cases}$에서

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 $a+b=1$ …… ㉠

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{-h+1-1}{h}=-1$

$\lim\limits_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{a(h-1)^2+b-(a+b)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{a(h^2-2h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}a(h-2)=-2a$ 에서

$-1=-2a$, $a=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면 $b=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore f(1)=b=\frac{1}{2}$

7) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^3-5x^2+9x+7$에서

$f'(x)=3x^2-10x+9$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3=3f'(1)=6$

8) [정답] ③

[해설] $f(2)=-7$이므로

$f(2)=8+4a+2b+1=-7$

즉, $2a+b=-8$ … ㉠

또, $f'(2)=2$이고 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(2)=12+4a+b=2$

즉, $4a+b=-10$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-6$ 이므로

$f(x)=x^3-x^2-6x+1$이고,

$x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=1-1-6+1=-5$ 이다.

9) [정답] ⑤

[해설] $f(x)$를 n차 다항함수라고 하면

$f'(x)$는 $n-1$차 함수이고

좌변의 최고차항은 $2n-1$차, 우변은 n차 이므로

$2n-1=n$, $n=1$ 이다.

$f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$라 하자.

$(x^n+3)f'(x)=f(x)$ 에서

$a(x+3)=ax+b$ $\therefore$ $b=3a$ … ㉠

$f(1)=4$에서 $a+b=4$ … ㉡

㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$ 이고

$f(x)=x+3$ 이므로 $f(3)=6$이다.

10) [정답] ②

[해설] $f(x)=x^4+ax^2+b$, $f'(x)=4x^3+2ax$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2$이고, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이다.

즉, $f(1)=2$, $1+a+b=2$

$a+b=1$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=f'(1)=2$

$f'(1)=4+2a=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$ 이므로

$f(x)=x^4-x^2+2$에서

$f(-1)=1-1+2=2$ 이다.

11) [정답] ④

[해설] $f(x)=2x^2+3x+5$, $f'(x)=4x+3$이므로

$f'(1)=7$ 이고

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+1$, $g'(x)=x^2-2x+2$

이므로 $g'(1)=1$ 이다.

$h(x)=(x^2-2x+4)(3x-1)$

$h'(x)=(2x-2)(3x-1)+3(x^2-2x+4)$ 에서

$h'(1)=9$ 이므로 $7+1+9=17$

12) [정답] ②

[해설] $h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}h'(1)$

$h(x)=(x^2-2x+4)(x^3-x)^2$에서

$h'(x)=(2x-2)(x^3-x)^2$

$+2(x^2-2x+4)(x^3-x)(3x^2-1)$

따라서 $h'(1)=0$이므로

$\frac{1}{2}h'(1)=0$

13) [정답] ④

[해설] $f(x)=x^3+2x^2-7x+5$에서

$f'(x)=3x^2+4x-7$

$f'(-2)=12-8-7=-3$

$g(x)=2x^2+3x+4$에서 $g'(x)=4x+3$

$g'(1)=4+3=7$ 이므로 $-3+7=4$ 이다.

14) [정답] ③

[해설] $g(x)=3x^3$라 하면

$g(1)=3$이고, $g'(x)=9x^2$이다.

$\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3f(1)-f(1+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3(1+h)^3-3-f(1+h)+3}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=g'(1)-f'(1)$

$=9-4=5$

15) [정답] ⑤

[해설] $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-3h)-f(1)}{-h}\right\}$

$=5f'(1)=15$

$\therefore f'(1)=3$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x^3)-f(1)\}(x^2+x+1)}{x^3-1}$

$=3f'(1)=9$

16) [정답] ④

[해설] $\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+3x)-f(1-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1+3x)-f(1)}{x}+\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}\right\}=4f'(1)$

$\therefore \lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}=8$

17) [정답] ⑤

[해설] $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}=6$이므로

$f'(1)=12$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12$

18) [정답] ③

[해설] $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

$\lim_{x\to1-}(x^2+a)=\lim_{x\to1+}(-x^2+bx)$ $\quad\therefore b=a+2$

도함수 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x<1)\\ -2x+b & (x\geq1)\end{cases}$에서

$a=2$, $b=4$

$\therefore f(0)+f(2)=a-4+2b=6$

19) [정답] ③

[해설] 문제 조건에 의해 상수 a와 k에 대해서

$f(x)=a(x+1)(x-2)(x+k)$로 나타낼 수 있다.

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}a(x-2)(x+k)=-3a(k-1)=24$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}a(x+1)(x+k)=3a(k+2)=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $k=-3$

따라서 옳은 것은 ㄹ, ㅁ이다.

20) [정답] ④

[해설] 문제 조건에 의해

$\lim_{x\to-3}g(x)=g(-3)$, $\lim_{x\to-3-}g'(x)=\lim_{x\to-3+}g'(x)$

즉 $54-f(-3)=f(-3)$에서

$f(-3)=27$ $\quad\therefore 3a-b=18$ ⋯㉠

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<-3) \\ -f'(x) & (x\geq -3) \end{cases}$이므로

$f'(-3)=-f'(-3)$에서 $f'(-3)=0$

$\therefore 6a-b=27$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$

$\therefore g(3)=27$

21) [정답] ③

[해설] $\lim_{x\to 1+}\{(x-1)^2+3\}=\lim_{x\to 1-}(ax+b)$에서 $a+b=3$

또 $f'(x)=\begin{cases} 2(x-1) & (x\geq 1) \\ a & (x<1) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1-}f'(x)$에서 $a=0$

따라서 $a=0$, $b=3$이므로

$f(0)=3$