(2)이차함수의 최대, 최소(2)

01 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대, 최소

'실수 x, y'의 조건이 있는 x, y에 대한 이차식 $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최댓값과 최솟값은

$\Rightarrow$ x, y에 대한 완전제곱꼴 $a(x-l)^2+b(y-m)^2+k$(a, b, l, m, k는 상수)꼴로 변형한 후 (실수)$^2 \geq 0$임을 이용한다.

① $a>0$, $b>0$이면 최솟값 k를 갖는다.

② $a<0$, $b<0$이면 최댓값 k를 갖는다.

◪ 실수 x, y에 대하여 다음 이차식의 최솟값을 구하여라.

1. $x^2-12x+y^2+4y+16$

2. $x^2+y^2-10x+10$

3. $2x^2+4x+y^2-6y+15$

4. $3x^2-6x+2y^2+16y+5$

02 치환을 이용한 최대, 최소

공통부분이 있으면 공통부분을 t로 치환하여 t에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

주의 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

◪ 다음 함수의 최댓값을 구하여라.

5. $y=-(x^2+2x-1)^2-2(x^2+2x)+5$

6. $y=-(x^2+2x+2)^2-4(x^2+2x)+1$

7. $y=-(x^2-4x+5)^2+4(x^2-4x)+20$

8. $y=-(x^2-2x+3)^2+6(x^2-2x)-5$

◪ 다음 함수의 최솟값을 구하여라.

9. $y=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-6$

10. $y=(x^2-2x+3)^2-6(x^2-2x+3)-1$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

11. $y=(x^2-6x+3)^2-4(x^2-6x)+10$

12. $y=(x^2-6x+7)^2+2(x^2-6x+1)+1$

◪ 주어진 x의 값의 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

13. $-2 \le x \le 2$에서
$y=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+1$

14. $2 \le x \le 4$에서
$y=(x^2-2x-1)^2+4(x^2-2x-1)+3$

15. $0 \le x \le 3$ 에서
$y=(x^2-4x+3)^2-2(x^2-4x+3)+5$

16. $-1 \le x \le 2$에서
$y=-(x^2-2x+2)^2+4(x^2-2x+2)+1$

17. $-3 \le x \le 0$에서
$y=(x^2+4x+1)^2-2(x^2+4x+1)+3$

03 조건을 만족하는 이차식의 최대, 최소

① 조건식을 결과식에 대입하여 하나의 문자로 정리한다.
② 정리한 식에 대한 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

◪ 두 실수 x, y에 대하여 주어진 식을 이용하여 [ ]안의 식의 최솟값을 구하여라.

18. $2x+y=2$ $[x^2+y^2]$

19. $2x-y=10$ $[x^2+y^2]$

◪ 두 실수 x, y에 대하여 주어진 식을 이용하여 [ ]안의 식의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

20. $2x^2+y^2=8$ $[4x-y^2]$

21. $x^2+y^2=16$ $[2x+y^2]$

04 이차함수의 최대, 최소의 활용

이차함수의 최대, 최소의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 풀이한다.
① 문제의 상황에 맞게 미지수를 정한다.
② 함수의 식을 세우고, 미지수의 값의 범위를 정한다.
③ 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

◪ 가로, 세로의 길이가 각각 $10cm$, $8cm$인 직사각형에서 가로의 길이를 $x cm$만큼 줄이고, 세로의 길이를 $2x cm$만큼 늘여서 새로운 직사각형을 만들었다. 다음 물음에 답하여라.

22. 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x로 나타내어라.

23. 새로운 직사각형의 넓이를 $y cm^2$라 할 때, y를 x에 대한 함수로 나타내어라.

24. 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라..

◪ 둘레의 길이가 $12m$인 직사각형을 만들 때, 다음 물음에 답하여라.

25. 직사각형의 가로의 길이를 $x m$라 할 때, 세로의 길이를 x로 나타내고 x의 범위를 구하여라.

26. 직사각형의 넓이를 $y m^2$라 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

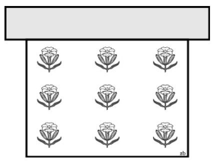
◪ 길이가 $16cm$인 철사를 구부려서 직사각형을 만들 때, 다음 물음에 답하여라.

27. 가로의 길이를 $x cm$라 할 때, 세로의 길이를 x로 나타내고 x의 범위를 구하여라.

28. 직사각형의 넓이를 $y cm^2$라 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

29. 직사각형의 넓이가 최대가 될 때, 이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 구하여라.

◪ 다음 그림과 같이 한 면이 벽면인 꽃밭에 길이가 $16m$인 밧줄을 이용하여 직사각형 모양의 경계를 표시하려고 한다. 물음에 답하여라.



30. 꽃밭의 세로의 길이를 $x m$라 할 때, 가로의 길이를 x로 나타내고 x의 범위를 구하여라.

31. 꽃밭의 넓이를 $y m^2$라 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

◪ 길이가 $60m$인 철망으로 직사각형 모양의 울타리를 만들 때, 다음 물음에 답하여라.

32. 울타리의 가로의 길이를 xm라 할 때, 세로의 길이를 x로 나타내고 x의 범위를 구하여라.

33. 울타리 안의 넓이를 ym^2라 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

◪ 휴대폰 부품을 생산하는 어느 회사에서는 판매 가격 x만 원과 판매 수익 y만 원 사이에 $y=-30x^2+300x$인 관계가 성립한다고 한다. 판매 가격을 4만 원 이상, 9만 원 이하로 했을 때, 다음 물음에 답하여라.

34. 판매 수익의 최댓값을 구하여라.

35. 판매 수익의 최솟값을 구하여라.

◪ 어느 공원의 현재의 공원 입장료는 1000원이고 하루 입장객 수는 2000명이다. 입장료를 $x\%$ 인상하면 하루 입장객 수가 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $0 \le x \le 100$)

36. 입장료를 $x\%$ 인상했을 때의 입장료와 하루 입장객 수를 x로 나타내어라.

37. 공원의 하루 입장료 수입을 y원이라 할 때, y를 x에 대한 함수로 나타내어라.

38. 공원의 하루 입장료 수입의 최댓값을 구하여라.

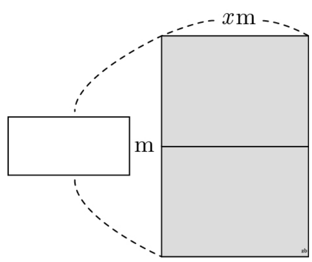
◪ 현재 빵 한 개에 2000원에 파는데 하루에 300개의 빵이 팔리는 집이 있다. 이 빵집에서 빵 한 개의 가격을 $x\%$ 인상하면 하루 판매량이 $\frac{x}{3}\%$ 줄어든다고 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $0 \le x \le 100$)

39. 빵 한 개의 가격을 $x\%$ 인상할 때의 빵 한 개의 가격과 하루 판매량을 x로 나타내어라.

40. 빵을 판매하여 얻을 수 있는 하루 매출액을 y원이라 할 때, y를 x에 대한 함수로 나타내어라.

41. 하루 매출액의 최댓값과 이때 빵 한 개의 가격을 구하여라.

◪ 재훈이네 반 학생들은 체육관에서 테이프를 이용하여 다음 그림과 같은 두 개의 직사각형 모양으로 피구장을 만들려고 한다. 사용할 수 있는 테이프의 전체 길이가 $36m$일 때, 물음에 답하여라.

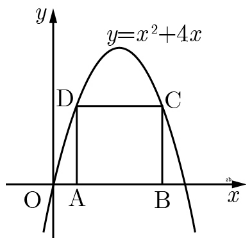


42. 피구장의 가로의 길이를 xm라 할 때, 세로의 길이를 x로 나타내고 x의 범위를 구하여라.

43. 피구장의 넓이를 ym^2라 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

44. 피구장의 넓이가 최대가 될 때, 피구장의 둘레의 길이를 구하여라.

◪ 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 점 A, B는 x축, 점 C, D는 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프 위의 점이다. 다음 물음에 답하여라.

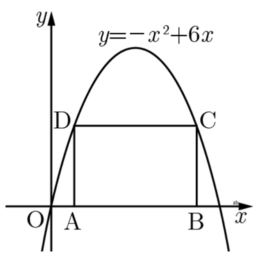


45. 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하여라.

46. 점 A의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, $\overline{AB}, \overline{AD}$의 길이를 a로 나타내어라.

47. 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

◪ 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 점 A, B는 x축, 점 C, D는 이차함수 $y=-x^2+6x$의 그래프 위의 점이다. 다음 물음에 답하여라.

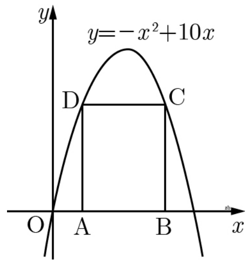


48. 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하여라.

49. 점 A의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 길이를 a로 나타내어라.

50. 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

◪ 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 점 A, B는 x축, 점 C, D는 이차함수 $y=-x^2+10x$의 그래프 위의 점이다. 다음 물음에 답하여라.

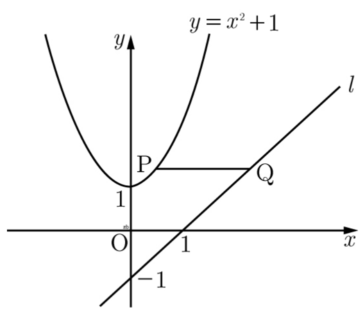


51. 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하여라.

52. 점 A의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 길이를 a로 나타내어라.

53. 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

◪ 다음 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+1$의 그래프 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 직선 l과 만나는 점을 Q라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



54. 직선 l의 방정식을 구하여라.

55. 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $\overline{PQ}$의 길이를 a로 나타내어라.

56. $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구하여라.

57. $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

◪ 지면에서 수직 방향으로 폭죽을 터뜨렸을 때, t초 후 지면으로부터의 폭죽의 높이를 ym라 하면 y와 t 사이에는 $y=-20t^2+60t$인 관계식이 성립한다고 한다. 다음 물음에 답하여라. (단, 폭죽은 발사 후 2초가 지나면 터진다.)

58. 폭죽이 지면으로부터 가장 높은 곳에 있을 때의 높이를 구하여라.

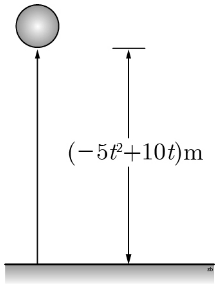
59. 폭죽이 지면으로부터 가장 높은 곳에 있을 때, 폭죽을 터뜨린 지 몇 초 후인지 구하여라.

◪ 형철이는 놀이공원의 지면으로부터 폭죽을 쏘아 올리는데, 폭죽을 쏘고 나서 t초 후의 폭죽의 높이가 $-20t^2+80t\,(m)$라고 한다. 쏘고 난 후 3초가 지나면 폭죽이 터진다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

60. 폭죽이 지면으로부터 가장 높은 곳에 있을 때의 높이를 구하여라.

61. 폭죽이 지면으로부터 가장 높은 곳에 있을 때, 폭죽을 터뜨린 지 몇 초 후인지 구하여라.

◪ 초속 $10m$로 지면에서 똑바로 위로 쏘아 올린 공의 t초 후의 높이는 $-5t^2+10t\,(m)$라고 한다. 다음 물음에 답하여라.



62. 공이 최고 높이에 도달 하는 데 걸리는 시간을 구하여라.

63. 공이 최고 높이에 도달할 때, 그 높이를 구하여라.

◪ 지면으로부터 $18m$의 높이에서 포물선의 모양으로 공을 던질 때, t초 후의 공의 높이 h는 지면으로부터 $h=-2t^2+16t+18\,(m)$라고 한다. 다음 물음에 답하여라.

64. 공이 지면에 떨어질 때의 시간을 구하여라.

65. 공이 최고 높이에 도달 하는 데 걸리는 시간을 구하여라.

66. 공이 최고 높이에 도달할 때, 그 높이를 구하여라.

◪ 지면으로부터 $9.8m$의 높이에서 처음 속도 $19.6m/$초로 수직으로 던져 올린 공의 t초 후의 높이를 hm라고 하면 $h=4.9(2+4t-t^2)m$라고 한다. 다음 물음에 답하여라.

67. 공이 지면에 떨어질 때의 시간을 구하여라.

68. 공이 최고 높이에 도달 하는 데 걸리는 시간을 구하여라.

69. 공이 최고 높이에 도달할 때, 그 높이를 구하여라.

◪ 지면으로부터 $1m$의 높이에서 수직 방향으로 공을 던졌을 때, t초 후 지면으로부터의 공의 높이를 ym라 하면 y와 t 사이에는 $y=-3t^2+9t+1$인 관계식이 성립한다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

70. 공이 지면으로부터 가장 높은 곳에 있을 때의 높이를 구하여라.

71. 공을 던진 후 1초부터 2.5초까지에서 공이 가장 낮은 곳에 있을 때의 높이를 구하여라.

정답 및 해설

1) -24

⇨ $x^2-12x+y^2+4y+16$
$=(x^2-12x+36)+(y^2+4y+4)-24$
$=(x-6)^2+(y+2)^2-24$

이때, x, y는 실수이므로

$(x-6)^2 \geq 0$, $(y+2)^2 \geq 0$

$\therefore x^2-12x+y^2+4y+16 \geq -24$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -24이다.

2) -15

⇨ $x^2+y^2-10x+10$
$=(x^2-10x+25)+y^2-15=(x-5)^2+y^2-15$

이때, x, y는 실수이므로

$(x-5)^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -15이다.

3) 4

⇨ $2x^2+4x+y^2-6y+15$
$=2(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)+4$
$=2(x+1)^2+(y-3)^2+4$

이때, x, y는 실수이므로

$(x+1)^2 \geq 0$, $(y-3)^2 \geq 0$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다.

4) -30

⇨ $3x^2-6x+2y^2+16y+5$

$=3(x^2-2x+1)+2(y^2+8y+16)-30$

$=3(x-1)^2+2(y+4)^2-30$

이때, x, y는 실수이므로

$(x-1)^2 \geq 0$, $(y+4)^2 \geq 0$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -30이다.

5) 4

⇨ $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-2$이므로 $t \geq -2$ $\cdots$ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=-t^2-2(t+1)+5=-t^2-2t+3$
$=-(t+1)^2+4$

따라서 ㉠의 범위에서 주어진 함수의 최댓값은 4이다.

6) 4

⇨ $y=-(x^2+2x+2)^2-4(x^2+2x)+1$

$x^2+2x=t$로 놓으면

$t=x^2+2x=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1$이므로

$t \geq -1$

주어진 함수는

$y=-(x^2+2x+2)^2-4(x^2+2x)+1$
$=-(t+2)^2-4t+1=-t^2-8t-3$
$=-(t+4)^2+13(t \geq -1)$

따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 4이다.

7) 4

⇨ $y=-(x^2-4x+5)^2+4(x^2-4x)+20$에서

$x^2-4x+5=t$로 놓으면

$t=(x-2)^2+1$이므로 $t \geq 1$ $\cdots$ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+4(t-5)+20=-t^2+4t$
$=-(t-2)^2+4$

따라서 ㉠의 범위에서 주어진 함수의 최댓값은 4이다.

8) -14

⇨ $y=-(x^2-2x+3)^2+6(x^2-2x)-5$

$x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로

$t \geq 2$

주어진 함수는

$y=-(x^2-2x+3)^2+6(x^2-2x)-5$
$=-t^2+6(t-3)-5=-t^2+6t-23$
$=-(t-3)^2-14(t \geq 2)$

따라서 $t=3$일 때 최댓값은 -14이다.

9) -7

⇨ $x^2+4x=t$로 놓으면

$t=x^2+4x=(x+2)^2-4$이므로

$t \geq -4$

주어진 함수는

$y=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-6$
$=t^2-2t-6$
$=(t-1)^2-7(t \geq -4)$

따라서 $t=1$일 때 최솟값은 -7이다.

10) -10

⇨ $y=(x^2-2x+3)^2-6(x^2-2x+3)-1$에서

$x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+2$이므로 $t \geq 2$ $\cdots$ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-6t-1=(t-3)^2-10$

따라서 ㉠의 범위에서 주어진 함수의 최솟값은 -10이다.

11) 18

⇨ $y=(x^2-6x+3)^2-4(x^2-6x)+10$

$x^2-6x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$이므로

$t \geq -6$

주어진 함수는

$y=(x^2-6x+3)^2-4(x^2-6x)+10$
$=t^2-4(t-3)+10$
$=t^2-4t+22$
$=(t-2)^2+18(t \geq -6)$

따라서 $t=2$일 때 최솟값은 18이다.

12) -12

⇨ $y=(x^2-6x+7)^2+2(x^2-6x+1)+1$에서

$x^2-6x+7=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2-2$이므로 $t\geq -2$ ⋯ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=t^2+2(t-6)+1=t^2+2t-11$
$=(t+1)^2-12$

따라서 ㉠의 범위에서 주어진 함수의 최솟값은 -12이다.

13) 최댓값: 33, 최솟값: -3

⇨ $y=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+1$에서

$x^2-2x=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-1$이므로

$-2\leq x\leq 2$에서 $-1\leq t\leq 8$ ⋯ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$이므로

㉠의 범위에서 $-3\leq y\leq 33$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 33, 최솟값은 -3이다.

14) 최댓값: 80, 최솟값: 0

⇨ $y=(x^2-2x-1)^2+4(x^2-2x-1)+3$에서

$x^2-2x-1=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-2$이므로

$2\leq x\leq 4$에서 $-1\leq t\leq 7$ ⋯ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=t^2+4t+3=(t+2)^2-1$이므로

㉠의 범위에서 $0\leq y\leq 80$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 80, 최솟값은 0이다.

15) 최댓값: 8, 최솟값: 4

⇨ $x^2-4x+3=t$로 놓으면

$t=(x-2)^2-1$이므로

$0\leq x\leq 3$에서 $-1\leq t\leq 3$ ⋯ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$이므로

㉠의 범위에서 $4\leq y\leq 8$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 8, 최솟값은 4이다.

16) 최댓값: 5, 최솟값: -4

⇨ $y=-(x^2-2x+2)^2+4(x^2-2x+2)+1$에서

$x^2-2x+2=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+1$이므로

$-1\leq x\leq 2$에서 $1\leq t\leq 5$ ⋯ ㉠

이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$이므로

㉠의 범위에서 $-4\leq y\leq 5$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이다.

17) 최댓값: 18, 최솟값: 2

⇨ $y=(x^2+4x+1)^2-2(x^2+4x+1)+3$에서

$x^2+4x+1=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-3$이므로

$-3\leq x\leq 0$에서 $-3\leq t\leq 1$ ⋯ ㉠

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$이므로

㉠의 범위에서 $2\leq y\leq 18$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 18, 최솟값은 2이다.

18) $\frac{4}{5}$

⇨ $2x+y=2$에서 $y=2-2x$

$y=2-2x$를 x^2+y^2에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(2-2x)^2\\&=5x^2-8x+4\\&=5\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{25}\right)+4-\frac{16}{5}\\&=5\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{4}{5}$일 때 최솟값은 $\frac{4}{5}$이다.

19) 20

⇨ $2x-y=10$에서 $y=2x-10$

$y=2x-10$를 x^2+y^2에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(2x-10)^2\\&=5x^2-40x+100\\&=5(x^2-8x+16)+100-80\\&=5(x-4)^2+20\end{aligned}$$

따라서 $x=4$일 때 최솟값은 20이다.

20) 최댓값: 8, 최솟값: -10

⇨ $2x^2+y^2=8$ $[4x-y^2]$

$2x^2+y^2=8$에서 $y^2=-2x^2+8$

y가 실수이므로

$-2x^2+8\geq 0$, $x^2\leq 4$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

$y^2=-2x^2+8$을 $4x-y^2$에 대입하면

$$\begin{aligned}4x-y^2&=4x-(-2x^2+8)\\&=2x^2+4x-8\\&=2(x^2+2x+1)-8-2\\&=2(x+1)^2-10\,(-2\leq x\leq 2)\end{aligned}$$

따라서 $x=-1$일 때 최솟값은 -10,

$x=3$일 때 최댓값은 8이다.

21) 최댓값: 17, 최솟값: -8

⇨ $x^2+y^2=16$ $[2x+y^2]$

$x^2+y^2=16$에서 $y^2=16-x^2$

y가 실수이므로

$16-x^2\geq 0$, $x^2\leq 16$

$\therefore -4\leq x\leq 4$

$y^2=16-x^2$을 $2x+y^2$에 대입하면

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

$2x+y^2=2x+(16-x^2)$
$=-x^2+2x+16$
$=-(x^2-2x+1)+16+1$
$=-(x-1)^2+17(-4\le x\le 4)$
따라서 $x=1$일 때 최댓값은 17, $x=-4$일 때 최솟값은 -8이다.

22) 가로의 길이: $(10-x)cm$, 세로의 길이: $(8+2x)cm$
⇨ 새로운 직사각형의 가로의 길이는 $(10-x)cm$, 세로의 길이는 $(8+2x)cm$이다.

23) $y=-2x^2+12x+80$
⇨ 새로운 직사각형의 넓이를 ycm^2라 하면
$y=(10-x)(8+2x)$
$=-2x^2+12x+80$

24) $98cm^2$
⇨ $y=-2x^2+12x+80$
$=-2(x^2-6x+9)+80+18$
$=-2(x-3)^2+98$
즉, $x=3$일 때 최댓값은 98이다.
따라서 구하는 넓이의 최댓값은 $98cm^2$이다.

25) 세로의 길이: $(6-x)m$, $0<x<6$
⇨ 직사각형의 가로의 길이를 xm라고 하면 세로의 길이는 $(6-x)m$이다.
이때, 길이는 양수이므로
$x>0$, $6-x>0$ $\therefore 0<x<6$

26) $9m^2$
⇨ 직사각형의 넓이를 ym^2라 하면
$y=x(6-x)=-x^2+6x$
$=-(x^2-6x+9)+9$
$=-(x-3)^2+9(0<x<6)$
즉, $x=3$일 때 최댓값은 9이다.
따라서 구하는 넓이의 최댓값은 $9m^2$이다.

27) 세로의 길이: $(8-x)cm$, $0<x<8$
⇨ 직사각형의 가로의 길이를 xcm라고 하면 세로의 길이는 $(8-x)cm$이다.
x와 $8-x$는 길이이므로
$x>0, 8-x>0$
$\therefore 0<x<8$

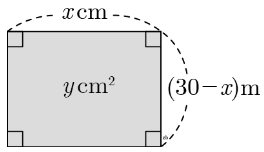
28) $16cm^2$
⇨ 직사각형의 넓이를 ycm^2라 할 때
$y=x(8-x)=-x^2+8x$
$=-(x^2-8x+16)+16$
$=-(x-4)^2+16(0<x<8)$
즉, $x=4$일 때 y의 최댓값은 16이다.

29) 가로의 길이: $4cm$, 세로의 길이: $4cm$
⇨ 직사각형의 넓이를 ycm^2라 할 때
$y=x(8-x)=-x^2+8x$
$=-(x^2-8x+16)+16$
$=-(x-4)^2+16(0<x<8)$
즉, $x=4$일 때 y의 최댓값은 16이다.
이때 구하는 가로의 길이는 $4cm$, 세로의 길이는 $4cm$이다.

30) 세로의 길이: $(16-2x)m$, $0<x<8$
⇨ 세로의 길이를 xm라 하면 가로의 길이는 $(16-2x)m$이다.
이때, 길이는 양수이므로
$x>0, 16-2x>0$ $\therefore 0<x<8$

31) $32m^2$
⇨ 꽃밭의 넓이를 ym^2라 하면
$y=x(16-2x)=-2x^2+16x$
$=-2(x-4)^2+32(0<x<8)$
따라서 $x=4$일 때 꽃밭의 넓이의 최댓값은 $32m^2$이다.

32) 세로의 길이: $(30-x)m$, $0<x<30$
⇨ 다음 그림에서 가로의 길이를 xm라 하면 세로의 길이는 $(30-x)m$이다. 이때, 길이는 양수이므로
$x>0, 30-x>0$
$\therefore 0<x<30$



33) $225m^2$
⇨ 울타리 안의 넓이를 ym^2이라 하면
$y=x(30-x)=-x^2+30x$
$=-(x-15)^2+225(0<x<30)$
$x=15$일 때 y의 최댓값은 225이다.
즉, 울타리 안의 넓이의 최댓값은 $225m^2$이다.

34) 750만 원
⇨ 판매 가격이 4만 원 이상, 9만 원 이하이므로
$4\le x\le 9$
$y=-30x^2+300x$
$=-30(x-5)^2+750$
이때, $4\le x\le 9$이므로 $x=5$일 때 최댓값 750이다.
따라서 판매 수익의 최댓값은 750만 원이다.

35) 270만 원
⇨ 판매 가격이 4만 원 이상, 9만 원 이하이므로
$4\le x\le 9$
$y=-30x^2+300x$
$=-30(x-5)^2+750$
이때, $4\le x\le 9$이므로 $x=9$일 때 최솟값 270을 갖는다.

따라서 판매 수익의 최솟값은 270만 원이다.

36) 입장료: $10(100+x)$, 하루 입장객 수: $10(200-x)$

⇨ 현재 입장료가 1000원이므로 x%인상한 입장료는

$1000\left(1+\frac{x}{100}\right)=10(100+x)$

입장료를 x% 인상했을 때 $\frac{x}{2}$%감소한 하루 입장객 수는

$2000\left(1-\frac{x}{200}\right)=10(200-x)$

37) $y=-100x^2+10000x+2000000$

⇨ 이 공원의 하루 입장료 수입을 y원이라 하면

$y=100(100+x)(200-x)$
$=100(-x^2+100x+20000)$
$=-100x^2+10000x+2000000$

38) 225만 원

⇨ $y=-100x^2+10000x+2000000$
$=-100(x^2-100x+2500)+2000000+250000$
$=-100(x-50)^2+2250000$

이때, $0 \le x \le 100$이므로 $x=50$일 때 최댓값은 2250000이다. 따라서 이 공원의 하루 입장료 수입의 최댓값은 2,250,000원, 즉 225만 원이다.

39) 빵 한 개의 가격: $20(100+x)$원, 하루 판매량: $(300-x)$개

⇨ 현재 빵 한 개의 가격이 2000원이므로 x% 인상한 가격은

$2000\left(1+\frac{x}{100}\right)=20(100+x)$

빵 한 개의 가격을 x% 인상했을 때 $\frac{x}{3}$% 감소한 하루 판매량은 $300\left(1-\frac{x}{300}\right)=300-x$

40) $y=-20x^2+4000x+600000$

⇨ 이 빵집의 하루 매출액을 y원이라 하면

$y=20(100+x)(300-x)$
$=20(-x^2+200x+30000)$
$=-20x^2+4000x+600000$

41) 하루 매출액의 최댓값: 800000원, 빵 한 개의 가격: 4000원

⇨ $y=-20x^2+4000x+600000$
$=-20(x^2-200x+10000)+600000+200000$
$=-20(x-100)^2+800000$

이때, $0 \le x \le 100$이므로 $x=100$일 때 최댓값은 800000이다.

따라서 이 빵집의 하루 매출액의 최댓값은 800000원이고, 이때 빵 한 개의 가격은 $20(100+100)=4000$(원)이다.

42) 세로의 길이: $\frac{1}{2}(36-3x)m$, $0<x<12$

⇨ 피구장의 가로의 길이를 xm라고 하면 세로의 길이는 $\frac{1}{2}(36-3x)m$이다.

x와 $\frac{1}{2}(36-3x)$는 길이이므로

$x>0$, $\frac{1}{2}(36-3x)>0$

$\therefore 0<x<12$

43) $54m^2$

⇨ 피구장의 넓이를 ym^2라 하면

$y=x\times\frac{1}{2}(36-3x)$

$=\frac{1}{2}(-3x^2+36x)$

$=-\frac{3}{2}(x^2-12x+36)+54$

$=-\frac{3}{2}(x-6)^2+54(0<x<12)$

즉, $x=6$일 때 y의 최댓값은 54이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 $54m^2$이다.

44) $30m$

⇨ $y=x\times\frac{1}{2}(36-3x)$

$=\frac{1}{2}(-3x^2+36x)$

$=-\frac{3}{2}(x^2-12x+36)+54$

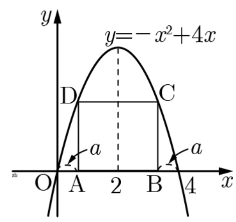
$=-\frac{3}{2}(x-6)^2+54(0<x<12)$

즉, $x=6$일 때 y의 최댓값은 54이다.

따라서 피구장의 가로의 길이는 $6m$, 세로의 길이는 $\frac{1}{2}(36-3\times6)=9(m)$이므로 피구장의 둘레의 길이는

$2(6+9)=30(m)$

45) 0, 4

⇨ 

이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=0$에서 $-x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

46) $\overline{AB}=4-2a$, $\overline{AD}=-a^2+4a$

⇨ 점 $A(a,0)(0<a<2)$이라 하면

$B(4-a,0)$, $D(a,-a^2+4a)$이므로

$\overline{AB}=4-2a$, $\overline{AD}=-a^2+4a$

47) 10

⇨ 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이는

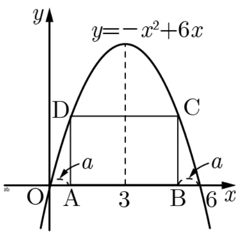
$2\{(4-2a)+(-a^2+4a)\}=-2a^2+4a+8$

$=-2(a-1)^2+10$

이때, $0<a<2$이므로 $a=1$일 때 최댓값 10을 갖는다.

따라서 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.

48) $0, 6$

⇨ 

이차함수 $y=-x^2+6x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+6x=0$에서 $-x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

49) $\overline{AB}=6-2a, \overline{AD}=-a^2+6a$

⇨ 점 $A(a,0)(0<a<3)$이라 하면

$B(6-a,0), D(a,-a^2+6a)$이므로

$\overline{AB}=6-2a, \overline{AD}=-a^2+6a$

50) 20

⇨ 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이는

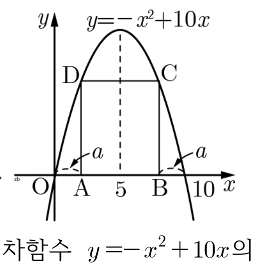
$2\{(6-2a)+(-a^2+6a)\}=-2a^2+8a+12$

$=-2(a-2)^2+20$

이때, $0<a<3$이므로 $a=2$일 때 최댓값 20을 갖는다.

따라서 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

51) $0, 10$

⇨ 

이차함수 $y=-x^2+10x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+10x=0$에서 $-x(x-10)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=10$

52) $\overline{AB}=10-2a, \overline{AD}=-a^2+10a$

⇨ 점 $A(a,0)(0<a<5)$이라 하면

$B(10-a,0), D(a,-a^2+10a)$이므로

$\overline{AB}=10-2a, \overline{AD}=-a^2+10a$

53) 52

⇨ 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이는

$2\{(10-2a)+(-a^2+10a)\}=-2a^2+16a+20$

$=-2(a-4)^2+52$

이때, $0<a<5$이므로 $a=4$일 때 최댓값 52를 갖는다.

따라서 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값은 52이다.

54) $y=x-1$

⇨ 직선 l의 방정식을 $y=ax+b$라 하면 직선이 두 점 $(1,0)$, $(0,-1)$을 지나므로

$a+b=0$, $b=-1$ $\quad \therefore a=1$

따라서 직선의 방정식은 $y=x-1$

55) $\overline{PQ}=a^2-a+2$

⇨ 점 P의 좌표를 (a,a^2+1)이라 하면 점 Q의 y좌표는 a^2+1이므로

$x-1=a^2+1 \quad \therefore x=a^2+2$

$\therefore \overline{PQ}=(a^2+2)-a=a^2-a+2$

56) $\frac{7}{4}$

⇨ $a^2-a+2=\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+2-\frac{1}{4}$

$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

즉, $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

57) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

⇨ $a^2-a+2=\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+2-\frac{1}{4}$

$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

즉, $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때, 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

58) $45m$

⇨ 폭죽은 발사 후 2초가 지나면 터지므로 $0\le t\le 2$

$y=-20t^2+60t$

$=-20\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+45$

$0\le t\le 2$의 범위에서 $t=\frac{3}{2}$일 때 y의 최댓값은 45이므로 폭죽은 최대 $45m$까지 올라간다.

59) $\frac{3}{2}$초 후

⇨ 폭죽은 발사 후 2초가 지나면 터지므로 $0 \le t \le 2$

$y=-20t^2+60t$

$=-20\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+45$

$0 \le t \le 2$의 범위에서 $t=\frac{3}{2}$일 때 y의 최댓값은 45 이므로 폭죽이 가장 높은 곳에 있을 때는 폭죽을 터뜨린 지 $\frac{3}{2}$초 후 이다.

60) $80m$

⇨ 폭죽을 쏘고 나서 t초 후의 높이를 hm라고 하면

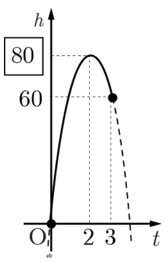
$h=-20t^2+80t=-20(t^2-4t+4)+80$

$=-20(t-2)^2+80$

t는 시간, h는 높이이므로

$0 \le t \le 3$, $h \ge 0$

이 범위에서 함수 $h=-20t^2+80t$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$t=2$일 때 h의 최댓값은 80이다.

따라서 폭죽은 최대 $80m$까지 올라간다.

61) 2초 후

⇨ 폭죽을 쏘고 나서 t초 후의 높이를 hm라고 하면

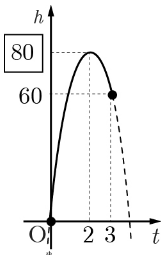
$h=-20t^2+80t=-20(t^2-4t+4)+80$

$=-20(t-2)^2+80$

t는 시간, h는 높이이므로

$0 \le t \le 3$, $h \ge 0$

이 범위에서 함수 $h=-20t^2+80t$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$t=2$일 때 h의 최댓값은 80이다.

따라서 폭죽이 가장 높은 곳에 있을 때, 터뜨린 지 2초 후이다.

62) 1초

⇨ 공의 t초 후의 높이를 hm라고 하면

$h=-5t^2+10t$

$=-5(t^2-2t+1)+5$

$=-5(t-1)^2+5$

이므로 $t=1$일 때 h의 최댓값은 5이다.

따라서 걸리는 시간은 1초이다.

63) $5m$

⇨ 공의 t초 후의 높이를 hm라고 하면

$h=-5t^2+10t$

$=-5(t^2-2t+1)+5$

$=-5(t-1)^2+5$

이므로 $t=1$일 때 h의 최댓값은 5이다.

따라서 공의 최고 높이는 $5m$이다.

64) 9초

⇨ $h=-2t^2+16t+18=0$

$t^2-8t-9=0$, $(t+1)(t-9)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=9$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

따라서 공은 9초 후에 지면에 떨어진다.

65) 4초

⇨ $h=-2t^2+16t+18$

$=-2(t^2-8t+16)+50$

$=-2(t-4)^2+50$

이므로 $t=4$일 때 h의 최댓값은 50이다.

따라서 공은 4초 후에 최고 높이에 도달한다.

66) $50m$

⇨ $h=-2t^2+16t+18$

$=-2(t^2-8t+16)+50$

$=-2(t-4)^2+50$

이므로 $t=4$일 때 h의 최댓값은 50이다.

따라서 공은 4초 후에 최고 높이 $50m$에 도달한다.

67) $(2+\sqrt{6})$초

⇨ 공이 지면에 떨어지는 경우는 높이 h가 $0m$일 때 이므로

$4.9(2+4t-t^2)=0$

$t^2-4t-2=0$

$\therefore t=2+\sqrt{6}\ (\because t>0)$

따라서 공은 $2+\sqrt{6}$초 후에 지면에 떨어진다.

68) 2초

⇨ $h=4.9(2+4t-t^2)$

$=-4.9(t^2-4t+4)+29.4$

$=-4.9(t-2)^2+29.4$

이므로 $t=2$일 때 h의 최댓값은 29.4이다.

따라서 공은 2초 후에 최고 높이에 도달한다.

69) $29.4m$

⇨ $h=4.9(2+4t-t^2)$

$=-4.9(t^2-4t+4)+29.4$

$=-4.9(t-2)^2+29.4$

이므로 $t=2$일 때 h의 최댓값은 29.4이다.

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

따라서 공은 2초 후에 최고 높이 $29.4m$에 도달한다.

70) $\frac{31}{4}m$

⇨ $y=-3t^2+9t+1$

$=-3\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$

$t=\frac{3}{2}$일 때 y의 최댓값은 $\frac{31}{4}$이므로

공이 가장 높은 곳에 있을 때의 높이는 $\frac{31}{4}m$이다.

71) $\frac{19}{4}m$

⇨ $y=-3t^2+9t+1$

$=-3\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$

$1 \le t \le 2.5$의 범위에서 $t=2.5$일 때 최솟값이 $\frac{19}{4}$이므로 공을 던진 후 1초부터 2.5초까지 공이 가장 낮은 곳에 있을 때의 높이는 $\frac{19}{4}m$이다.