개념check

[부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질]

• 두 실수 a, b에 대하여

(1) $a>b \iff a-b>0$

(2) $a>0,\ b>0 \iff a+b>0,\ ab>0$

(3) $a^2 \ge 0,\ a^2+b^2 \ge 0$

(4) $a^2+b^2=0 \iff a=0, b=0$

(5) $a>0,\ b>0$일 때, $a>b \iff a^2>b^2 \iff \sqrt{a}>\sqrt{b}$

(6) $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

[절대부등식]

• **절대부등식**: 문자를 포함한 부등식에서 그 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식

• **여러 가지 절대부등식의 예**

(1) a, b가 실수일 때, $a^2 \pm ab+b^2 \ge 0$
(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

(2) a, b, c가 실수일 때, $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(3) a, b가 실수일 때, $|a|+|b| \ge |a+b|$
(단, 등호는 $ab \ge 0$일 때 성립)

기본문제

[문제]

1. 다음은 증명법의 정의를 서술한 것이다. (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ) 에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

* 대우를 이용한 명제의 증명: 명제가 참이면 그 $\boxed{(ㄱ)}$도 참이므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 $\boxed{(ㄱ)}$(이/가) 참임을 보이는 증명법이다. * 귀류법: 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제 또는 명제의 결론을 $\boxed{(ㄴ)}$하여 $\boxed{(ㄷ)}$임을 보이는 증명법이다.

① (ㄱ) 역　(ㄴ) 유지　(ㄷ) 모순
② (ㄱ) 역　(ㄴ) 부정　(ㄷ) 참
③ (ㄱ) 대우　(ㄴ) 유지　(ㄷ) 모순
④ (ㄱ) 대우　(ㄴ) 부정　(ㄷ) 참
⑤ (ㄱ) 대우　(ㄴ) 부정　(ㄷ) 모순

[예제]

2. 다음은 명제 'n이 자연수일 때, n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'를 증명하는 과정이다.

자연수 k에 대하여 $n=\boxed{(ㄱ)}$ 이라 하면 $n^2=2\boxed{(ㄴ)}-1$ 이 되고 $\boxed{(ㄴ)}\ge 1$이므로 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $2k-1$, (ㄴ) : $2k^2-2k$
② (ㄱ) : $2k-1$, (ㄴ) : $2k^2-2k+1$
③ (ㄱ) : $2k+1$, (ㄴ) : $2k^2-2k$
④ (ㄱ) : $2k+1$, (ㄴ) : $2k^2-2k+1$
⑤ (ㄱ) : $2k+1$, (ㄴ) : $2k^2+2k$

[문제]

3. 다음 명제
'n이 자연수일 때, n이 5의 배수이면 n^2도 5의 배수이다.'
가 참임을 증명하는 과정이다.

n이 5의 배수이면 $n=\boxed{(ㄱ)}$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $n^2=5\times\boxed{(ㄴ)}$ 즉 n^2은 5의 배수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $5k$　(ㄴ) : $5k^2$
② (ㄱ) : $5k$　(ㄴ) : $5k^2-1$
③ (ㄱ) : $5k-1$　(ㄴ) : $5k^2$
④ (ㄱ) : $5k-1$　(ㄴ) : $5k^2-3k+1$
⑤ (ㄱ) : $5k-2$　(ㄴ) : $5k^2-4k+4$

[예제]

4. **다음은 명제 'n^2이 홀수이면 n도 홀수이다' 가 참임을 증명하는 과정이다.**

주어진 명제의 $\boxed{(ㄱ)}$ 가(이) 'n이 짝수이면, n^2도 짝수이다.' $n=2k$ (k는 자연수)라 하면 $n^2=2\times\boxed{(ㄴ)}$ 따라서 n^2은 짝수이므로 주어진 명제도 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 역　(ㄴ) : $2k^2$

② (ㄱ) : 역　(ㄴ) : $4k^2$

③ (ㄱ) : 대우　(ㄴ) : k^2

④ (ㄱ) : 대우　(ㄴ) : $2k^2$

⑤ (ㄱ) : 대우　(ㄴ) : $4k^2$

[문제]

5. **다음은 명제**
'n이 자연수일 때, n^2이 7의 배수가 아니면 n도 7의 배수가 아니다.'
가 참임을 증명하는 과정의 일부이다.

주어진 명제의 $\boxed{(ㄱ)}$는(은) 'n이 7의 배수이면 n^2도 7의 배수이다.' 이므로 n이 7의 배수이면 $n=7k$ (k는 자연수)일 때 $n^2=7\times\boxed{(ㄴ)}$ 즉 n^2은 7의 배수이다. 따라서 주어진 명제도 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 역　(ㄴ) : $7k^2$

② (ㄱ) : 역　(ㄴ) : $7k^2-1$

③ (ㄱ) : 대우　(ㄴ) : $7k^2$

④ (ㄱ) : 대우　(ㄴ) : $7k^2-4k+1$

⑤ (ㄱ) : 대우　(ㄴ) : $7k^2-5k+4$

[예제]

6. **다음은 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다'가 참임을 증명하는 과정이다.**

$\sqrt{2}$가 유리수이면 $\sqrt{2}=\boxed{(ㄱ)}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면 $n^2=2m^2\cdots$㉠ 즉 n^2이 $\boxed{(ㄴ)}$의 배수이므로 n도 $\boxed{(ㄴ)}$의 배수이다.$\cdots$㉡ $n=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2k^2=m^2$ 즉 m^2이 $\boxed{(ㄴ)}$의 배수이므로 m도 $\boxed{(ㄴ)}$의 배수이다. $\cdots$㉢ ㉡, ㉢에서 m, n이 모두 $\boxed{(ㄴ)}$의 배수이므로, 이것은 m, n이 서로소인 자연수라는 가정에 $\boxed{(ㄷ)}$이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $\frac{n}{m}$　(ㄴ) : 2　(ㄷ) : 참

② (ㄱ) : $\frac{n}{m}$　(ㄴ) : 4　(ㄷ) : 모순

③ (ㄱ) : $\frac{n}{m}$　(ㄴ) : 2　(ㄷ) : 모순

④ (ㄱ) : $\frac{m}{n}$　(ㄴ) : 2　(ㄷ) : 모순

⑤ (ㄱ) : $\frac{m}{n}$　(ㄴ) : 4　(ㄷ) : 참

[문제]

7. **다음은 $\sqrt{5}$이 무리수임을 증명하는 과정이다.**

$\sqrt{5}$가 $\boxed{(ㄱ)}$이면 $\sqrt{5}=\frac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{(ㄴ)}$인 자연수)으로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면 $n^2=5m^2$　$\cdots$㉠ 즉 n^2이 5의 배수이므로 n도 5의 배수이다.　$\cdots$㉡ $n=5k$ (k는 자연수)라 하면 $5k^2=m^2$ 즉 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.　$\cdots$㉢ ㉡, ㉢에서 m, n이 모두 5의 배수이므로, 이것은 m, n이 $\boxed{(ㄴ)}$인 자연수라는 가정에 모순이다. 따라서 귀류법에 의해 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 정수　(ㄴ) : 서로소

② (ㄱ) : 정수　(ㄴ) : 홀수

③ (ㄱ) : 유리수　(ㄴ) : 서로소

④ (ㄱ) : 유리수　(ㄴ) : 홀수

⑤ (ㄱ) : 무리수　(ㄴ) : 서로소

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[문제]

8. 다음 중에서 절대부등식인 것을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $4x-1<4x$
ㄴ. $x^2+2x-4\geq 0$
ㄷ. $-x^2\leq 2x+1$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[예제]

9. a, b가 실수일 때, 다음은 부등식 $a^2+b^2\geq -ab$이 성립함을 증명하는 과정이다.

$a^2+b^2+ab\geq 0$임을 보이면 된다. 이때 $a^2+b^2+ab=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{(\text{ㄱ})}b^2$이고 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$, $\boxed{(\text{ㄱ})}b^2\geq 0$이므로 $a^2+b^2+ab\geq 0$ 즉 $a^2+b^2\geq -ab$ 여기서 등호는 $a=b=\boxed{(\text{ㄴ})}$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $\frac{1}{4}$ (ㄴ) : 0
② (ㄱ) : $\frac{3}{4}$ (ㄴ) : 0
③ (ㄱ) : $\frac{1}{4}$ (ㄴ) : 1
④ (ㄱ) : $\frac{3}{4}$ (ㄴ) : 1
⑤ (ㄱ) : $\frac{1}{4}$ (ㄴ) : -1

[문제]

10. a, b가 실수일 때, 다음은 부등식 $a^2+10b^2\geq 6ab$이 성립함을 증명하는 과정이다.

$a^2+10b^2-6ab\geq 0$임을 보이면 된다. 이때 $a^2+10b^2-6ab=(a-\boxed{(\text{ㄱ})}b)^2+\boxed{(\text{ㄴ})}b^2$이고 우변의 각 항은 0보다 크거나 같으므로 $a^2+10b^2-6ab\geq 0$ 즉 $a^2+10b^2\geq 6ab$ 이 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 값을 p, q라 할 때, $p+q^2$의 값은?

① 0 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

[예제]

11. $a>0$, $b>0$일 때, 다음은 부등식 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 가 성립함을 증명하는 과정이다.

$\frac{a+b}{2}>0$, $\sqrt{ab}>0$이므로 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq(\sqrt{ab})^2$, 즉 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2\geq 0$임을 보이면 된다. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$ $=\frac{\boxed{(\text{ㄱ})}}{4}\geq 0$ 즉 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq(\sqrt{ab})^2$이므로 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$이다. 여기서 등호는 $a-b=\boxed{(\text{ㄴ})}$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $a-b$ (ㄴ) : 0
② (ㄱ) : $(a-b)^2$ (ㄴ) : 0
③ (ㄱ) : $(a+b)^2$ (ㄴ) : 0
④ (ㄱ) : $(a-b)^2$ (ㄴ) : 1
⑤ (ㄱ) : $(a+b)^2$ (ㄴ) : 1

[문제]

12. a, b가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a|+|b|\geq|a-b|$이 성립함을 증명하는 과정이다.

$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\geq 0$, $\lvert a-b\rvert\geq 0$이므로 $(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2\geq\lvert a-b\rvert^2$, 즉 $(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2-\lvert a-b\rvert^2\geq 0$임을 보이면 된다. 이때 $(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2-\lvert a-b\rvert^2$ $=a^2+2\lvert ab\rvert+b^2-(a^2-2ab+b^2)=2(\boxed{(\text{ㄱ})})$ 그런데 $\boxed{(\text{ㄱ})}\geq 0$이므로 $(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2-\lvert a-b\rvert^2\geq 0$ 즉 $(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2\geq\lvert a-b\rvert^2$ 따라서 $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\geq\lvert a-b\rvert$이다. 여기서 등호는 $\boxed{(\text{ㄱ})}=0$, 즉 $ab\boxed{(\text{ㄴ})}0$일 때 성립한다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $\lvert ab\rvert+ab$ (ㄴ) : $\geq$
② (ㄱ) : $\lvert ab\rvert+ab$ (ㄴ) : $\leq$
③ (ㄱ) : $\lvert ab\rvert+ab$ (ㄴ) : $=$
④ (ㄱ) : $\lvert ab\rvert-ab$ (ㄴ) : $\geq$
⑤ (ㄱ) : $\lvert ab\rvert-ab$ (ㄴ) : $\leq$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

평가문제

[스스로 확인하기]

13. 다음 중 (ㄱ), (ㄴ) 안에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

> * 명제가 참임을 증명하기 위하여 명제의 대우가 참임을 보이는 증명법을 $\boxed{(ㄱ)}$이라 한다.
>
> * 부등식이 참이 되게 하는 진리집합이 전체집합이 될 때, 이 부등식을 $\boxed{(ㄴ)}$이라 한다.

① (ㄱ) : 대우를 이용한 증명 (ㄴ) : 절대부등식

② (ㄱ) : 대우를 이용한 증명 (ㄴ) : 코시-슈바르츠 부등식

③ (ㄱ) : 귀류법 (ㄴ) : 절대부등식

④ (ㄱ) : 귀류법 (ㄴ) : 코시-슈바르츠 부등식

⑤ (ㄱ) : 귀납법 (ㄴ) : 절대부등식

[스스로 확인하기]

14. 다음은 명제 '두 자연수 a, b에 대하여 ab가 짝수이면 a 또는 b가 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다. 다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

> 주어진 명제의 대우
> '두 자연수 a, b에 대하여 $\boxed{(ㄱ)}$이/가 홀수이면
> ab는 $\boxed{(ㄴ)}$(이)다.'가 참임을 보이면 된다.
> $a=2m-1,\ b=2n-1\ (m, n$은 자연수)이면
> $ab=2(mn-m-n+1)-1$이므로
> ab는 $\boxed{(ㄴ)}$(이)다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로
> 주어진 명제도 참이다.

① (ㄱ) : a 와 b (ㄴ) : 홀수

② (ㄱ) : a 와 b (ㄴ) : 짝수

③ (ㄱ) : a 또는 b (ㄴ) : 홀수

④ (ㄱ) : a 또는 b (ㄴ) : 짝수

⑤ (ㄱ) : a 또는 b (ㄴ) : 자연수

[스스로 확인하기]

15. 다음은 귀류법을 이용하여 $2+\sqrt{3}$가 유리수가 아님을 증명하는 과정이다.

> 명제를 부정하여 $2+\sqrt{3}$가 유리수라 하자.
> $2+\sqrt{3}=a$ (a는 유리수)라 하면
> $\sqrt{3}=\boxed{(ㄱ)}$이고 유리수끼리의 뺄셈은 $\boxed{(ㄴ)}$이므로
> $\boxed{(ㄱ)}$은 유리수이다.
> 그런데 $\sqrt{3}$는 유리수가 아니므로 모순이다.
> 따라서 $2+\sqrt{3}$는 유리수가 아니다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : $a-2$ (ㄴ) : 유리수

② (ㄱ) : $a-2$ (ㄴ) : 무리수

③ (ㄱ) : $a-2$ (ㄴ) : 정수

④ (ㄱ) : $a+2$ (ㄴ) : 유리수

⑤ (ㄱ) : $a+2$ (ㄴ) : 무리수

[스스로 확인하기]

16. a, b가 실수일 때, 다음은 부등식 $a^2+3>a$을 증명하는 과정이다.

> $a^2+\boxed{(ㄱ)}>0$임을 보이면 된다.
> 이때 (좌변)$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\boxed{(ㄴ)}$이고
> $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, $\boxed{(ㄴ)}>0$이므로
> $a^2+\boxed{(ㄱ)}>0$ 즉, $a^2+2>a$

(ㄱ)에 들어갈 식을 $f(a)$, (ㄴ)에 들어갈 값을 p라 할 때, $f(4p)$의 값은?

① -10 ② -8

③ -6 ④ -4

⑤ -2

[스스로 확인하기]

17. 어느 도시에 새로 조성된 공원에 관해 다음의 정보를 입수하였다.

> (가) 공원은 직사각형 모양이다.
> (나) 공원은 지름이 $4km$인 원 모양의 땅에 내접한다.
> (다) 공원의 넓이는 위의 두 조건을 만족시키면서 넓이가 최대가 되도록 조성되었다.

이 정보를 토대로 구한 공원의 넓이는?

① $2\,km^2$ ② $4\,km^2$

③ $6\,km^2$ ④ $8\,km^2$

⑤ $10\,km^2$

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

[스스로 마무리 하기]

18. 다음은 a, b, x, y가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$이 성립함을 증명하는 과정이다.

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-\boxed{(ㄱ)} \geq 0$임을 보이면 된다. 이때 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-\boxed{(ㄱ)}=(\boxed{(ㄴ)})^2$ 그런데 $(\boxed{(ㄴ)})^2 \geq 0$이므로 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ): $(ax+by)^2$ (ㄴ): $ay+bx$
② (ㄱ): $(ax+by)^2$ (ㄴ): $ay-bx$
③ (ㄱ): $(ax+by)^2$ (ㄴ): $ax-by$
④ (ㄱ): $(ax-by)^2$ (ㄴ): $ay+bx$
⑤ (ㄱ): $(ax-by)^2$ (ㄴ): $ay-bx$

[스스로 마무리 하기]

19. $ab=6$일 때, $3a+8b$의 최솟값은? (단, a, b는 양수이다.)

① 18 ② 21
③ 24 ④ 27
⑤ 30

[스스로 마무리 하기]

20. 다음은 명제
'두 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2 \neq 0$이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이다.'
가 참임을 증명하는 과정의 일부이다.

주어진 명제의 $\boxed{(ㄱ)}$는(은) '$a=0$ $\boxed{(ㄴ)}$ $b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다.'이므로 $0^2+0^2=0$에 의해 참이다. 따라서 주어진 명제도 참이다.

다음 중 (ㄱ), (ㄴ)에 들어갈 내용으로 알맞은 것은?

① (ㄱ) : 역 (ㄴ) : 이고
② (ㄱ) : 역 (ㄴ) : 또는
③ (ㄱ) : 대우 (ㄴ) : 이고
④ (ㄱ) : 대우 (ㄴ) : 또는
⑤ (ㄱ) : 대우 (ㄴ) : 이거나

[스스로 확인하기]

21. $x>0$, $y>0$일 때, $(9x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)$의 최솟값은?

① 23 ② 24
③ 25 ④ 26
⑤ 27

[스스로 마무리 하기]

22. $a>4$인 실수 a에 대하여 $a+\frac{9}{a-4}$의 최솟값을 α, 이때 a의 값을 β라 하면, $\alpha+\beta$의 값은?

① 16 ② 17
③ 18 ④ 19
⑤ 20

I410-UCI(KEPA)-0199-2020-001-000224240

정답 및 해설

1) [정답] ⑤
[해설] * 대우를 이용한 명제의 증명:
명제가 참이면 그 대우도 참이므로
어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 보이는 증명법이다.
* 귀류법:
어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제 또는 명제의 결론을 부정하여 모순임을 보이는 증명법이다.

2) [정답] ②
[해설] 자연수 k에 대하여 $n=2k-1$이라 하면
$n^2=4k^2-4k+1$
$n^2=2(2k^2-2k+1)-1$이 되고
$2k^2-2k+1=2k(k-1)+1 \geq 1$이므로
n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.

3) [정답] ①
[해설] n이 5의 배수이면
$n=5k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$n^2=(5k)^2=25k^2=5\times(5k^2)$
즉 n^2은 5의 배수이다.

4) [정답] ④
[해설] 주어진 명제의 대우가
'n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'
$n=2k$ (k는 자연수)라 하면
$n^2=2\times(2k^2)$
따라서 n^2은 짝수이므로 주어진 명제도 참이다.

5) [정답] ③
[해설] 주어진 명제의 대우는
'n이 7의 배수이면 n^2도 7의 배수이다.'
이므로 n이 7의 배수이면
$n=7k$ (k는 자연수)일 때
$n^2=7\times(7k^2)$ 즉 n^2은 7의 배수이다.
따라서 주어진 명제도 참이다.

6) [정답] ③
[해설] $\sqrt{2}$가 유리수이면 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$
(m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다.
$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$의 양변을 제곱하면 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로
$n^2=2m^2$ …㉠
즉 n^2이 2의 배수이므로
n도 2의 배수이다. …㉡
$n=2k$ (k는 자연수)라 하면
㉠에서 $4k^2=2m^2$이므로 $2k^2=m^2$
즉 m^2이 2의 배수이므로
m도 2의 배수이다. …㉢
㉡, ㉢에서 m, n이 모두 2의 배수이므로, 이것은 m, n이 서로소인 자연수라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

7) [정답] ③
[해설] $\sqrt{5}$가 유리수이면 $\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다.
양변을 제곱하여 정리하면 $n^2=5m^2$ …㉠
즉 n^2이 5의 배수이므로 n도 5의 배수이다.
…㉡
$n=5k$ (k는 자연수)라 하면 $5k^2=m^2$
즉 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.
…㉢
㉡, ㉢에서 m, n이 모두 5의 배수이므로, 이것은
m, n이 서로소인 자연수라는 가정에 모순이다.
따라서 귀류법에 의해 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

8) [정답] ④
[해설] ㄱ. $-1<0$이므로 절대부등식이다.
ㄴ. $(x+1)^2 \geq 5$
$x<-1-\sqrt{5}$ 또는 $x>-1+\sqrt{5}$
따라서 절대부등식이 아니다.
ㄷ. $(x+1)^2 \geq 0$이므로 절대부등식이다.
따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9) [정답] ②
[해설] $a^2+b^2+ab \geq 0$임을 보이면 된다.
이때 $a^2+b^2+ab=a^2+ab+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{3}{4}b^2$
$=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$이고
$\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, $\dfrac{3}{4}b^2 \geq 0$이므로
$a^2+b^2+ab \geq 0$ 즉 $a^2+b^2 \geq -ab$
여기서 등호는 $a+\dfrac{b}{2}=0$, $b=0$,
즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

10) [정답] ⑤
[해설] $a^2+10b^2-6ab \geq 0$임을 보이면 된다.
이때 $a^2+10b^2-6ab=(a-3b)^2+b^2$이고
우변의 각 항은 0보다 크거나 같으므로
$a^2+10b^2-6ab \geq 0$ 즉 $a^2+10b^2 \geq 6ab$
이 성립한다.
따라서 $p=3$, $q=1$이므로 $p+q^2=4$

11) [정답] ②
[해설] $\dfrac{a+b}{2}>0$, $\sqrt{ab}>0$이므로
$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$, 즉 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2 \geq 0$임

을 보이면 된다.

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$

$=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4}\geq 0$

즉 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geq(\sqrt{ab})^2$이므로 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$이다.

여기서 등호는 $a-b=0$일 때 성립한다.

12) [정답] ②

[해설] $|a|+|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$이므로

$(|a|+|b|)^2\geq|a-b|^2$,

즉 $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2\geq 0$임을 보이면 된다.

이때 $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)=2(|ab|+ab)$

그런데 $|ab|+ab\geq 0$이므로

$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2\geq 0$

즉 $(|a|+|b|)^2\geq|a-b|^2$

따라서 $|a|+|b|\geq|a-b|$이다.

여기서 등호는 $|ab|+ab=0$, 즉 $ab\leq 0$일 때 성립한다.

13) [정답] ①

[해설] * 명제가 참임을 증명하기 위하여 명제의 대우가 참임을 보이는 증명법을 대우를 이용한 명제의 증명이라 한다.

* 부등식이 참이 되게 하는 진리집합이 전체집합이 될 때, 이 부등식을 절대부등식이라 한다.

14) [정답] ①

[해설] 주어진 명제의 대우

'두 자연수 a, b에 대하여 a와 b가 홀수이면 ab는 홀수이다.'가 참임을 보이면 된다.

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이면

$ab=2(mn-m-n+1)-1$이므로

ab는 홀수이다. 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

15) [정답] ①

[해설] 명제를 부정하여 $2+\sqrt{3}$가 유리수라 하자.

$2+\sqrt{3}=a$ (a는 유리수)라 하면 $\sqrt{3}=a-2$이고 유리수끼리의 뺄셈은 유리수이므로 $a-2$은 유리수이다. 그런데 $\sqrt{3}$는 유리수가 아니므로 모순이다. 따라서 $2+\sqrt{3}$는 유리수가 아니다.

16) [정답] ②

[해설] $a^2+3-a>0$임을 보이면 된다.

이때 $a^2+3-a=a^2-a+\dfrac{1}{4}+\dfrac{11}{4}=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

이고 $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2\geq 0$, $\dfrac{11}{4}>0$이므로

$a^2+3-a>0$ 즉, $a^2+3>a$

따라서 $f(a)=3-a$, $p=\dfrac{11}{4}$이므로

$f(4p)=f(11)=3-11=-8$이다.

17) [정답] ④

[해설] 공원의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 피타고라스 정리에 의해

$a^2+b^2=4^2=16$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}$

$a>0$, $b>0$이므로

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq ab$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$a^2+b^2=16$이므로 $ab\leq\dfrac{16}{2}=8$

따라서 구하는 공원의 넓이는 $8km^2$이다.

18) [정답] ②

[해설] $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\geq 0$임을 보이면 된다. 이때

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$

그런데 $(ay-bx)^2\geq 0$이므로

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

19) [정답] ③

[해설] $3a>0$, $8b>0$이므로

$3a+8b\geq 2\sqrt{24ab}=2\sqrt{24\times 6}=24$

(단, 등호는 $3a=8b$일 때 성립한다.)

따라서 $3a+8b$의 최솟값은 24이다.

20) [정답] ③

[해설] 주어진 명제의 대우는

'$a=0$ 이고 $b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다.'

이므로 $0^2+0^2=0$에 의해 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

21) [정답] ③

[해설] $(9x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=9+4+\dfrac{y}{x}+\dfrac{36x}{y}$

$\geq 13+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\times\dfrac{36x}{y}}=25$

따라서 최솟값은 25이다.

22) [정답] ②

[해설] $a+\dfrac{9}{a-4}=a-4+\dfrac{9}{a-4}+4$

$\geq 2\sqrt{(a-4)\times\dfrac{9}{a-4}}+4=10$

따라서 최솟값은 10이므로 $\alpha=10$이다.

등호 성립 조건에 의해 $a-4=\dfrac{9}{a-4}$

$a-4=3$, $a=7$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $\beta=7$이므로 $\alpha+\beta=17$이다.