01 켤레복소수

복소수 $a+bi$(a,b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하고, 이것을 기호로 $\overline{a+bi}$로 나타낸다. 즉 $\overline{a+bi}=a-bi$

참고 • 복소수의 켤레복소수를 $\bar{z}$로 나타내고 이를 'z bar' 라고 읽는다.
• 주어진 복소수와 허수부분의 부호를 바꾼 수가 켤레복소수이다.

◪ **다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)**

1. $3+2i$

2. $-4i+1$

3. -8

4. $15i$

5. $3-4i$

6. $i-7$

7. $2i-1$

8. $2-i$

9. $-i$

10. -2

11. $-5i$

12. $3+2i$

13. $-3i+2$

14. $4+i$

15. $\sqrt{5}+\sqrt{3}i$

16. $-5+4i$

17. $-1+i$

18. $-\sqrt{2}i$

19. $1+i$

20. $(\sqrt{2}+1)i$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

◪ 다음을 구하여라.

21. $\overline{1}$

22. $\overline{3-2i}$

23. $\overline{2+3i}$

24. $\overline{2i}$

25. $\overline{-4i}$

26. $\overline{7+i}$

27. $\overline{3+8i}$

28. $\overline{-2+3i}$

29. $\overline{\sqrt{3}i-8}$

30. $\overline{i+9}$

31. $\overline{-2i-1}$

32. $\overline{-\sqrt{3}i}$

33. $\overline{-21}$

34. $\overline{\sqrt{11}}$

35. $\overline{12-4i}$

◪ 복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 복소수 z를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

36. $2i\overline{z}+z=2+i$

37. $3iz+2\overline{z}=8+7i$

38. $iz+3\overline{z}=8+2i$

39. $2z+3i\overline{z}=3+7i$

40. $3iz+2\overline{z}=8+7i$

41. $2z-i\overline{z}=3+3i$

42. $(2+i)z+i\overline{z}=8i$

43. $(1+i)z+i\overline{z}=1+3i$

44. $\overline{z}+(2-i)z=-3+5i$

I410-ECN-0199-2017-001-000057208

45. $(1+i)z+3i\overline{z}=2+8i$

46. $(1+2i)z+2i\overline{z}=2+5i$

47. $(1+i)z+(3+2i)\overline{z}=14+5i$

48. $\overline{z-zi}=5-i$

49. $4iz+(3-i)\overline{z}=3i-1$

50. $(1+i)z-3\overline{z}=-4+9i$

51. $(1-i)\overline{z}+iz=-2+7i$

52. $(1+i)z+2i\overline{z}=1+5i$

53. $(1+i)\overline{z}+3iz=-3+2i$

54. $iz+(3+i)\overline{z}=-3-5i$

55. $(1+2i)z+3i\overline{z}=4+16i$

56. $(1-i)z+3i\overline{z}=8-5i$

57. $z(1-i)-(2-3i)\overline{z}=2-4i$

58. $(1-2i)z+(-2+5i)\overline{z}=13+9i$

59. $(1-i)z-i\overline{z}=1+i$

60. $(1+i)z+i\overline{z}=1+i$

61. $(2+i)z+i\overline{z}=4-6i$

62. $(1+i)z+3i\overline{z}=2+i$

63. $(1-i)z+3i\overline{z}=6-2i$

◪ 다음 등식을 만족하는 실수 x, y의 값을 각각 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

64. $(x+y)+(x-y)i=\overline{2+4i}$

65. $(3+2i)x+(2-i)y=\overline{5-i}$

66. $x(2+i)+y\overline{(1+3i)}=7i$

67. $\overline{(x+1)+(y-3)i}=2+2i$

68. $(2x+y)+(-x+y)i=\overline{6-3i}$

69. $x(1+i)+y(1-3i)=\overline{5+7i}$

70. $\overline{x+yi}=3+(x+2y)i$

71. $(x+yi)(3-i)=\overline{3+11i}$

◪ 다음 물음에 답하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

72. $\overline{(a+b)-(a-b)i}=5+7i$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

73. $(1+3i)-\overline{(2+i)}=a+bi$일 때, ab의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

74. 복소수 $\alpha=2+3i$일 때, $\alpha+\overline{\alpha}$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수)

75. 복소수 $z=4-2i$에 대해 $z+\overline{z}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수, $i=\sqrt{-1}$)

76. 등식 $(1+i)z-i\overline{z}=7-2i$를 만족하는 복소수 z에 대하여, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

77. 복소수 $z=(1-2i)x^2+(3-3i)x+2-i$에 대하여 $z+\overline{z}=0$일 때, 실수 x의 값을 구하여라. (단, $z\neq 0$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

78. 복소수 z에 대하여 $(1-i)z+(2-i)\overline{z}=3+4i$일 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

79. 복소수 z에 대하여 $(1+i)\overline{z}+(1+2i)z=3i$일 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

80. 다음 등식이 성립하도록 하는 복소수 z에 대하여 $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

$$\boxed{(1+i)z+(2-i)\overline{z}=6-3i}$$

정답 및 해설

1) $3-2i$
⇨ $\overline{3+2i}=3-2i$

2) $1+4i$
⇨ $\overline{-4i+1}=\overline{1-4i}=1+4i$

3) -8
⇨ $\overline{-8}=-8$

4) $-15i$
⇨ $\overline{15i}=-15i$

5) $3+4i$

6) $-i-7$

7) $-1-2i$

8) $2+i$

9) i

10) -2

11) $5i$

12) $3-2i$

13) $3i+2$

14) $4-i$

15) $\sqrt{5}-\sqrt{3}i$

16) $-5-4i$

17) $-1-i$

18) $\sqrt{2}i$

19) $1-i$

20) $-(\sqrt{2}+1)i$

21) 1

22) $3+2i$
⇨ $z=3-2i$의 켤레 복소수는 $3+2i$

23) $2-3i$

24) $-2i$

25) $4i$

26) $7-i$

27) $3-8i$

28) $-2-3i$

29) $-\sqrt{3}i-8$

30) $-i+9$

31) $2i-1$

32) $\sqrt{3}i$

33) -21

34) $\sqrt{11}$

35) $12+4i$

36) i
⇨ $z=a+bi(a,b$는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$2i(a-bi)+(a+bi)=2+i$
$(a+2b)+(2a+b)i=2+i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$a+2b=2, 2a+b=1$이므로 $a=0, b=1$
$\therefore z=i$

37) $1-2i$
⇨ $z=a+bi(a,b$는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$3i(a+bi)+2(a-bi)=8+7i$
$(2a-3b)+(3a-2b)i=8+7i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$2a-3b=8, 3a-2b=7$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$
$\therefore z=1-2i$

38) $\frac{11}{4}+\frac{1}{4}i$
⇨ $z=a+bi$라 하면
$iz+3\overline{z}=(ai-b)+3(a-bi)$
$=(3a-b)+(a-3b)i$
$=8+2i$에서
$3a-b=8$이고 $a-3b=2$이다.
두 식을 연립하면 $a=\frac{11}{4}, b=\frac{1}{4}$

39) $3-i$
⇨ $z=x+yi$라 하면
$2z+3i\overline{z}=2(x+yi)+3i(x-yi)$
$=(2x+3y)+i(3x+2y)=3+7i$이므로
$2x+3y=3,\ 3x+2y=7$
이를 연립하여 풀면 $x=3, y=-1$이므로 $z=3-i$

40) $1-2i$
⇨ $z=a+bi$로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$3iz+2\overline{z}=3i(a+bi)+2(a-bi)$
$=(2a-3b)+(3a-2b)i$
에서 $2a-3b=8, 3a-2b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,b=-2$
$\therefore z=1-2i$

41) $3+3i$
⇨ $z=a+bi(a,b$는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$2(a+bi)-i(a-bi)=3+3i$
$(2a-b)+(-a+2b)i=3+3i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$2a-b=3,-a+2b=3$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=3$
$\therefore z=3+3i$

42) $4i$

43) $1+i$
⇨ $z=a+bi$라 하면
$(1+i)z+i\overline{z}=(1+i)(a+bi)+i(a-bi)$
$=(a-b)+(a+b)i+ai+b$
$=a+(2a+b)i$
$=1+3i$에서
$a=1$이고 $b=1$이다.
따라서 $z=1+i$이다.

44) $z=-2+3i$
⇨ $z=a+bi$라고 하면 $\overline{z}=a-bi$
$\overline{z}+(2-i)z=a-bi+(2-i)(a+bi)$
$=a-bi+2a+2bi-ai+b$
$=(3a+b)+(b-a)i$
$=-3+5i$
$\therefore \begin{cases}3a+b=-3 & \cdots ㉠\\ -a+b=5 & \cdots ㉡\end{cases}$
㉠−㉡을 하면 $\therefore a=-2$, $b=3$

45) 2
⇨ $z=a+bi$ 라고 하자.
$(1+i)z+3i\overline{z}=(1+i)(a+bi)+3i(a-bi)$
$=a+bi+ai-b+3ai+3b$
$=(a+2b)+(4a+b)i$
$=2+8i$
$\therefore \begin{cases}a+2b=2\\ 4a+b=8\end{cases}$
연립하여 풀면
$\therefore a=2$, $b=0$
$\therefore z=2$

46) $2-3i$
⇨ $z=a+bi$라 하면
$(1+2i)z+2i\overline{z}$
$=(1+2i)(a+bi)+2i(a-bi)$
$=a+(4a+b)i$
$=2+5i$에서
$a=2$이고 $4a+b=5$이므로 $b=-3$이다.

47) $3+2i$
⇨ $z=a+bi,\overline{z}=a-bi$로 두면
$(1+i)z+(3+2i)\overline{z}=(1+i)(a+bi)+(3+2i)(a-bi)$
$=4a+b+(3a-2b)i=14+5i$
$\therefore 4a+b=14, 3a-2b=5$
두식을 연립하면 $a=3,b=2$
따라서 $z=3+2i$이다.

48) $2+3i$
⇨ $\overline{z-zi}=5-i$에서 $z-zi=5+i$이고
$z=a+bi$라 하면
$a+bi-(a+bi)i=(a+b)+(b-a)i$이므로
$a+b=5,\ -a+b=1$을 연립하면
$a=2,\ b=3$

49) $3+2i$

50) $1+2i$
⇨ $z=a+bi$(단, a,b는 실수)라고 두면
$\overline{z}=a-bi$이므로
$(1+i)(a+bi)-3(a-bi)=-4+9i$
$a-b+(a+b)i-3a+3bi=-4+9i$
$(-2a-b)+(a+4b)i=-4+9i$
$-2a-b=-4,\ a+4b=9\ \ \therefore a=1,b=2$
따라서 $z=a+bi=1+2i$이다.

51) $-16-7i$
⇨ $z=a+bi$(단, a,b는 실수)라고 두면
$\overline{z}=a-bi$이므로
$(1-i)(a-bi)+i(a+bi)=-2+7i$
$a-b-(a+b)i+ai-b=-2+7i$
$(a-2b)-bi=-2+7i$
$a-2b=-2,\ -b=7\ \ \therefore a=-16,b=-7$
따라서 $z=a+bi=-16-7i$이다.

52) $z=2-i$
⇨ $z=a+bi,\overline{z}=a-bi$라고 하면
$(1+i)(a+bi)+2i(a-bi)=1+5i$
$a+ai+bi-b+2ai+2b=1+5i$
$a+b+(3a+b)i=1+5i$
$a+b=1,3a+b=5$
연립방정식을 풀면 $a=2,b=-1$

53) $1+2i$
⇨ $z=a+bi(a,b$는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$(1+i)(a-bi)+3i(a+bi)=-3+2i$
$(a-2b)+(4a-b)i=-3+2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$a-2b=-3,4a-b=2$이므로 $a=1,b=2$
$\therefore z=1+2i$

54) $-1+i$

55) $3+i$
⇨ $z=a+bi$로 놓으면
$\overline{z}=a-bi$ 이고 이를 주어진 등식

$(1+2i)z+3i\bar{z}=4+16i$,
즉 $z+2iz+3i\bar{z}=4+16i$에 대입하여 정리하면
$(a+b)+(5a+b)i=4+16i$이므로
$a+b=4$, $5a+b=16$의 두 식을 연립하면
$a=3$, $b=1$
따라서 구하는 복소수 z는 $3+i$

56) $-4+3i$
⇨ $z=a+bi(a, b$는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1-i)(a+bi)+3i(a-bi)=8-5i$
$(a+4b)+(2a+b)i=8-5i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$a+4b=8, 2a+b=-5$이므로 $a=-4, b=3$
$\therefore z=-4+3i$

57) -2
⇨ $z=a+bi$ $(a,\ b:$ 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로
(좌변)$=(a+bi)(1-i)-(2-3i)(a-bi)$
$=-a+4b+(2a+3b)i$
(우변)$=2-4i$
(좌변)=(우변)이므로
$-a+4b=2$, $2a+3b=-4$을 동시에 만족해야 한다.
따라서 $a=-2$, $b=0$이다.

58) $1+2i$
⇨ $z=a+bi$라고 하자
$(1-2i)z+(-2+5i)\bar{z}$
$=(1-2i)(a+bi)+(-2+5i)(a-bi)$
$=a+bi-2ai+2b-2a+2bi+5ai+5b$
$=(-a+7b)+(3a+3b)i$
$=13+9i$
$\therefore \begin{cases}-a+7b=13\\3a+3b=9\end{cases}$
연립하여 풀면
$\therefore a=1$, $b=2$
$\therefore z=1+2i$.

59) $1+3i$
⇨ $(1-i)z-i\bar{z}=1+i$에서 $z-(z+\bar{z})i=1+i$
$z=a+bi$라 하면 $a=1, b-2a=1$에서 $b=3$
따라서 $z=1+3i$이다.

60) $1-i$
⇨$z=a+bi$(단, a, b는 실수)라고 두면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1+i)z+i\bar{z}=1+i$에서
$(1+i)(a+bi)+i(a-bi)=1+i$
$a-b+(a+b)i+ai+b=1+i$
$a+(2a+b)i=1+i$이므로
$a=1, 2a+b=1$ $\therefore$ $a=1$, $b=-1$
따라서 $z=a+bi=1-i$이다.

61) $2-5i$
⇨ $z=a+bi$라고 하면
$(2+i)(a+bi)+i(a-bi)=4-6i$
$(2a+2b)i+2a=4-6i$
$2a=4$, $a=2$
$2a+2b=-6$, $b=-5$
$\therefore z=2-5i$

62) i
⇨ $z=a+bi(a, b$는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1+i)(a+bi)+3i(a-bi)=2+i$
$(a+2b)+(4a+b)i=2+i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$a+2b=2, 4a+b=1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$
$\therefore z=i$

63) $-2+2i$
⇨ $z=a+bi(a, b$는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1-i)(a+bi)+3i(a-bi)=6-2i$
$(a+4b)+(2a+b)i=6-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의해
$a+4b=6, 2a+b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=2$
$\therefore z=-2+2i$

64) $x=-1, y=3$

65) $x=1$, $y=1$
⇨ $(3+2i)x+(2-i)y=\overline{5-i}$를 정리하면
$(3x+2y)+(2x-y)i=5+i$이므로
$3x+2y=5$이고 $2x-y=1$이므로 연립하면
$x=1$, $y=1$이다.

66) $x=1$, $y=-2$
⇨ $2x+xi+y(1-3i)=7i$
$2x+y+(x-3y)i=7i$
$2x+y=0$, $x-3y=7$
두 식을 연립하면 $x=1$, $y=-2$

67) $x=1$, $y=1$
⇨ x, y가 실수이므로
$\overline{(x+1)+(y-3)i}=(x+1)-(y-3)i=2+2i$에서
$x+1=2$에서 $x=1$이고
$-(y-3)=2$에서 $y=1$이다.

68) $x=1, y=4$
⇨ $\overline{6-3i}=6+3i$이므로 $(2x+y)+(-x+y)i=6+3i$에서 $2x+y=6, -x+y=3$ $\therefore x=1, y=4$

69) $x=2$, $y=3$
⇨ $x(1+i)+y(1-3i)=(x+y)+(x-3y)i$
$=5-7i$
$\therefore \begin{cases}x+y=5\\x-3y=-7\end{cases}$
연립하여 풀면
$\therefore x=2$, $y=3$

70) $x=3, y=-1$

⇨ $\overline{x+yi}=x-yi$이므로 $x-yi=3+(x+2y)i$에서
$x=3,\ -y=x+2y\quad \therefore x=3, y=-1$

71) $x=2,\ y=-3$

72) -6

73) -4

⇨ $(1+3i)-(\overline{2+i})=(1+3i)-(2-i)$
$=(1-2)+\{3-(-1)\}i$
$=-1+4i$
따라서 $a=-1, b=4$이므로 $ab=-4$

74) 4

⇨ $\alpha=2+3i$, $\overline{\alpha}=2-3i$
$\alpha+\overline{\alpha}=(2+3i)+(2-3i)=4$

75) 8

76) 13

77) -2

⇨ $z=(x^2+3x+2)-(2x^2+3x+1)i$
이때 $z+\overline{z}=0$이 되기 위해서는 복소수 z의 실수 부분은 0이 되어야 한다.
즉, $x^2+3x+2=0$, $(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-2$
이때, $x=-1$이면 $z=0$이 되므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 구하는 x의 값은 -2이다.

78) 37

⇨ $z=a+bi$라 하면
$(1-i)z+(2-i)\overline{z}=3+4i$에서
$(1-i)(a+bi)+(2-i)(a-bi)=3+4i$을 정리하면
$3a+(-2a-b)i=3+4i$이므로 $a=1, b=-6$이다.
$\therefore\ z\overline{z}=a^2+b^2=37$

79) 5

80) 25

⇨ $z=a+bi$라 하면
$(1+i)z+(2-i)\overline{z}=6-3i$에서
$(1+i)(a+bi)+(2-i)(a-bi)=6-3i$를 정리하면
$(3a-2b)+(-b)i=6-3i$이므로 $a=4, b=3$이다.
따라서 $z\overline{z}=a^2+b^2=25$이다.