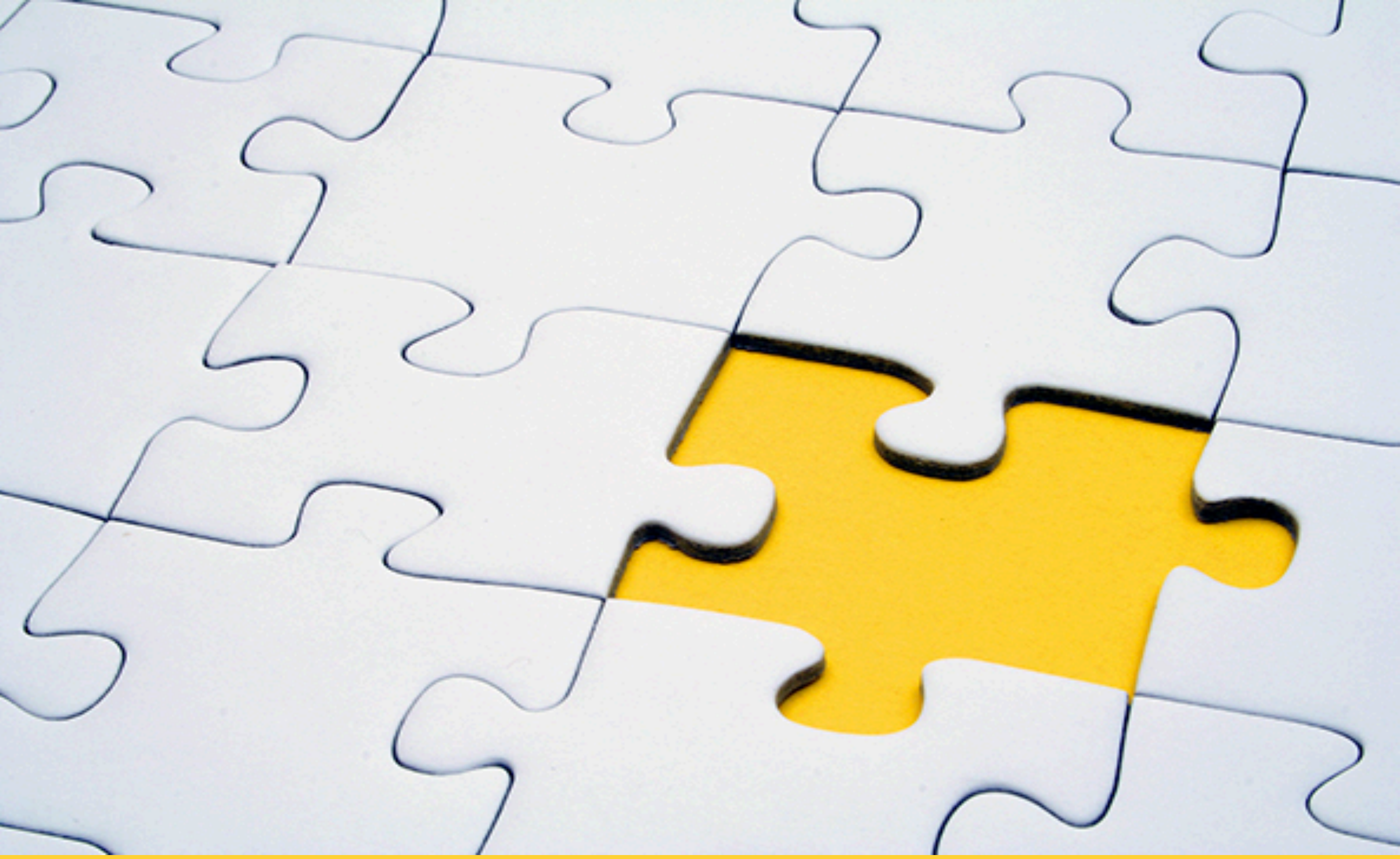


고등학교

기하

수악중독

고등학교 기하

이차곡선

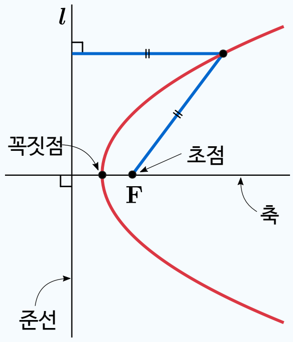
1

1. 이차곡선
2. 이차곡선과 직선

1 포물선의 방정식

포물선

평면 위에서 한 정직선 l과 그 위에 있지 않은 정점 F에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라고 한다. 이때, 정직선 l을 포물선의 준선, 정점을 포물선의 초점이라고 한다. 또한, 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축이라하고, 포물선과 그 축과의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.



포물선의 방정식

(1) 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$y^2 = 4px \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

(2) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

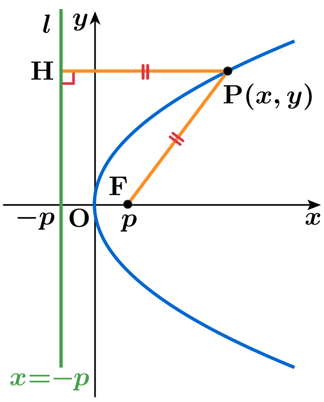
➤ 포물선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$가 된다. 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

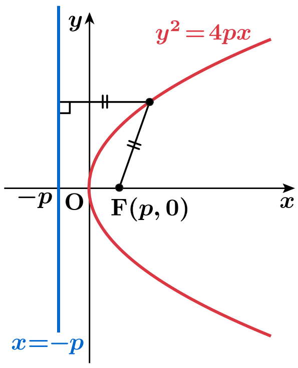
$$y^2 = 4px$$

를 얻을 수 있다.

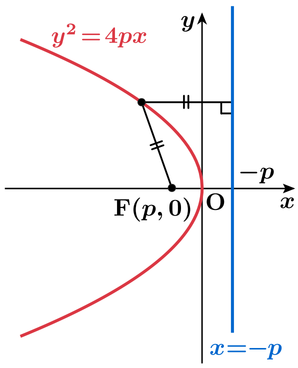


➤ $y^2 = 4px$에서 $p > 0,\ p < 0$인 경우의 포물선의 그래프는 다음과 같다.

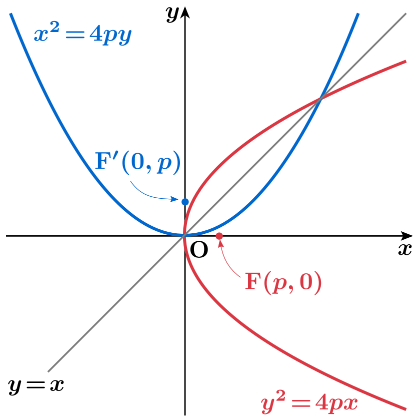
$p > 0$



$p < 0$

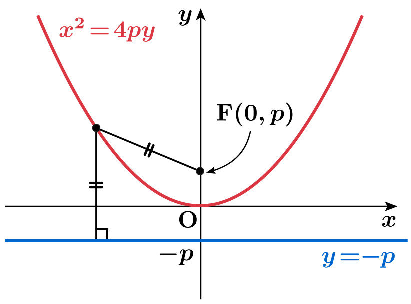


➤ 일반적으로 초점이 F$(p,\ 0)$ $(p \neq 0)$이고, 준선이 $x = -p$인 포물선 $y^2 = 4px$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동하면 초점이 F$'(0,\ p)$ $(p \neq 0)$이고 준선이 $y = -p$인 포물선 $x^2 = 4py$가 된다.

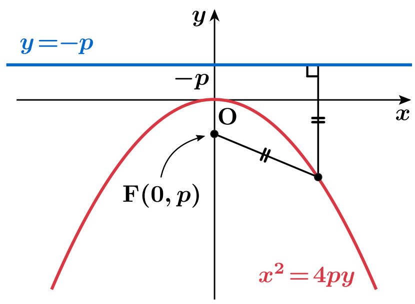


➤ $x^2 = 4py$에서 $p > 0,\ p < 0$인 경우의 포물선의 그래프는 다음과 같다.

$p > 0$



$p < 0$



예제1

다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

(1) $y^2 = 2x$ (2) $x^2 = -3y$

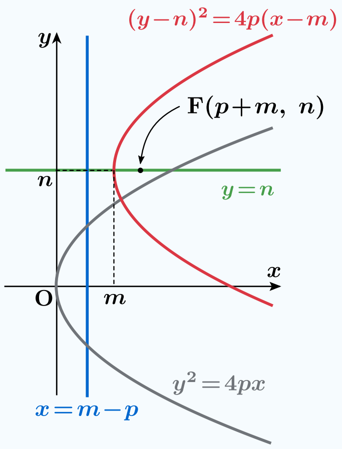
(1) $y^2 = 2x = 4 \times \frac{1}{2}x$ $\quad \therefore$ 초점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, 준선 $x = -\frac{1}{2}$

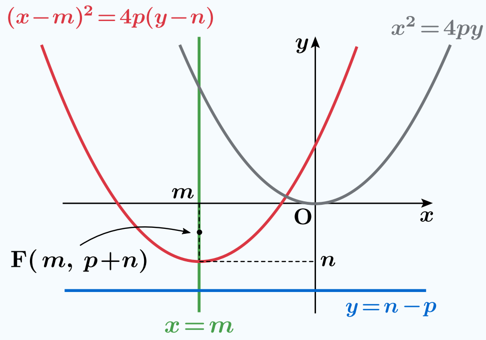
(2) $x^2 = 3y = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times y$ $\quad \therefore$ 초점 $\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)$, 준선 $y = \frac{3}{4}$

포물선의 평행이동

꼭짓점이 원점에 있는 포물선 $y^2 = 4px$, $x^2 = 4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 각각 $(y-n)^2 = 4p(x-m)$, $(x-m)^2 = rp(y-n)$이 되고, 초점과 준선 역시 다음과 같이 이동하게 된다.

	$(y-n)^2 = 4p(x-m)$	$(x-m)^2 = 4p(y-n)$
초점	$(p+m,\ n)$	$(m,\ p+n)$
준선	$x = m-p$	$y = n-p$
꼭짓점	$(m,\ n)$	$(m,\ n)$
축	$y = n$	$x = m$

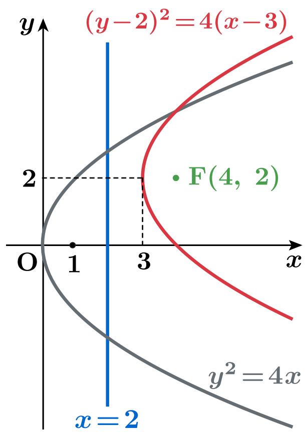




예제2

방정식 $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$에 대하여 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

주어진 방정식을 정리하면 $(y-2)^2 = 4(x-3)$인데, 이것은 포물선 $y^2 = 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$에서 $(4,\ 2)$로, 준선의 방정식은 $x = -1$에서 $x = 2$로 이동하게 되고, 그 그래프는 오른쪽과 같다.

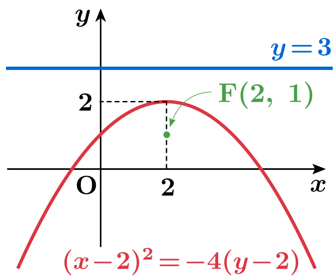


예제3

초점이 $\mathrm{F}(2,\ 1)$이고, 준선이 $y=3$인 포물선의 방정식을 구하시오.

초점에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 꼭짓점은 초점과 점 H의 중점이 되어 $(2,\ 2)$가 되고, 준선이 $y=3$이므로 $x^2=4py$가 x축, y축으로 모두 2만큼 평행이동했다고 볼 수 있다. 또한, 초점에서 준선까지의 거리가 2이고 준선이 초점보다 위쪽에 있으므로 $p=-1$이 되어 구하는 포물선의 방정식은 다음과 같다.

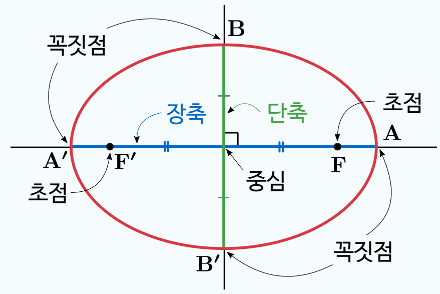
$$(x-2)^2=-4(y-2)$$



2 타원의 방정식

타원

평면 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 두 정점 F, F′을 타원의 초점이라고 한다.
오른쪽 그림과 같이 타원의 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, $\overline{\mathrm{FF'}}$의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′라고 할 때, 이 네 점을 타원의 꼭짓점이라 하고, $\overline{\mathrm{AA'}}$을 장축, $\overline{\mathrm{BB'}}$을 단축, 장축과 단축의 교점을 타원의 중심이라고 한다.



타원의 방정식

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a > c > 0)$인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = a^2 - c^2)$$

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$으로부터의 거리의 합이 $2b$ $(b > c > 0)$인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a^2 = b^2 - c^2)$$

➤ 두 초점 $\mathrm{F}(x,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 할 때, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 2a$이므로

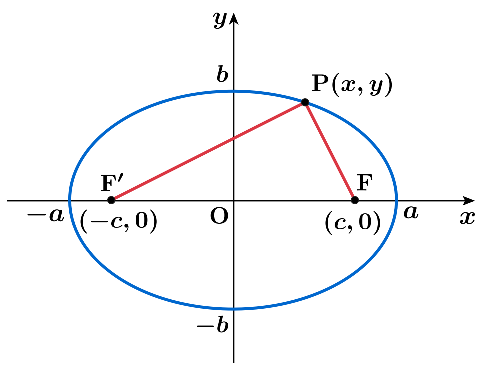
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

이 된다.



다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right)$$

을 얻을 수 있다. 이때, $a > c > 0$이므로 $a^2 - c^2 = b^2$ $(b > 0)$으로 놓으면 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$이 되고, 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단}, b^2 = a^2 - c^2)$$

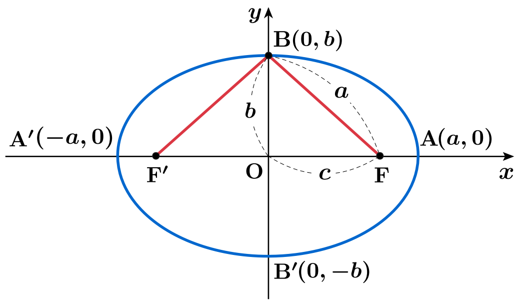
➤ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$에서 생각해보면 $a^2 - c^2 = b^2$이므로 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$이다. 따라서 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right)$$

이고, 꼭짓점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\quad \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$
$$\mathrm{B}(0,\ b),\quad \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

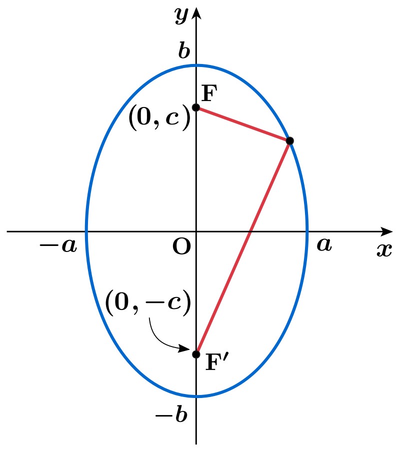
이다. 또 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'} = 2a$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'} = 2b$이다.



➤ 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터 거리의 합이 $2b$ $(b > c > 0)$인 타원의 방정식을 같은 방법으로 구하면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단}, a^2 = b^2 - c^2)$$

가 된다.



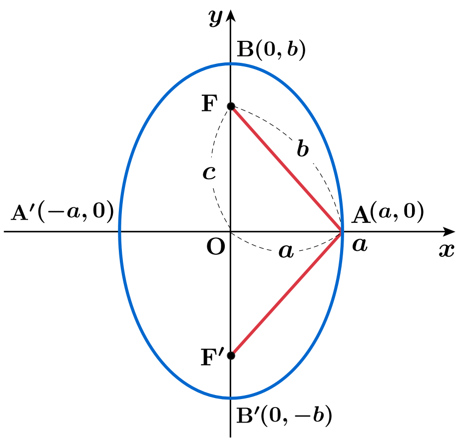
➤ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $b > a > 0$에서 생각해보면 $b^2 - c^2 = a^2$이므로 $c = \sqrt{b^2 - a^2}$이다. 따라서 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}\right),\ \mathrm{F}'\left(0,\ -\sqrt{b^2 - a^2}\right)$$

이고, 꼭짓점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\quad \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$
$$\mathrm{B}(0,\ b),\quad \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이다. 또, 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'} = 2b$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'} = 2a$이다.



예제4

두 점 $\mathrm{F}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$, $\mathrm{F}'\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ 으로부터의 거리의 합이 4인 타원의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라고 하자. 일정한 거리의 합이 4이므로

$$2a=4$$

에서 $a=2$임을 알 수 있다. 또한, 두 초점의 좌표가 $\left(\pm\sqrt{3},\ 0\right)$ 이므로

$$\left(\sqrt{3}\right)^2=a^2-b^2=2-b^2$$

에서 $b^2=1$임을 알 수 있다. 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$이다.

또한, 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 0),\ \mathrm{A}'(-2,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1),\ \mathrm{B}'(0,\ -1)$이다.

예제5

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 각각 구하시오.

타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $a^2=9,\ b^2=16$이고, $b>a>0$인 경우이므로

$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ 이 된다.

초점의 좌표 : $\left(0,\ \pm\sqrt{7}\right)$

장축의 길이 : $2b=2\times4=8$

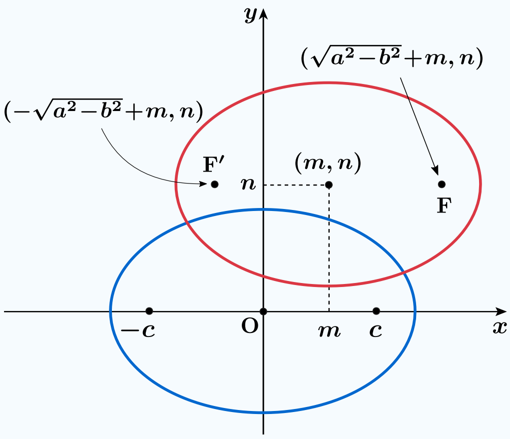
단축의 길이 : $2a=2\times3=6$

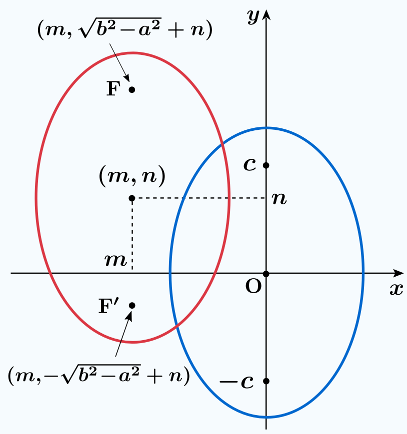
타원의 평행이동

중심이 원점에 있는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 다음과 같이 중심이 $(m,\ n)$인 타원이 된다.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점	$\begin{cases}(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0) & (a^2>b^2)\\(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}) & (a^2<b^2)\end{cases}$	$\begin{cases}(\pm\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n) & (a^2>b^2)\\(m,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}+n) & (a^2<b^2)\end{cases}$
중심	$(0,\ 0)$	$(m,\ n)$
꼭짓점	$(\pm a,\ 0),\ (0,\ \pm b)$	$(\pm a+m,\ n),\ (m,\ \pm b+n)$





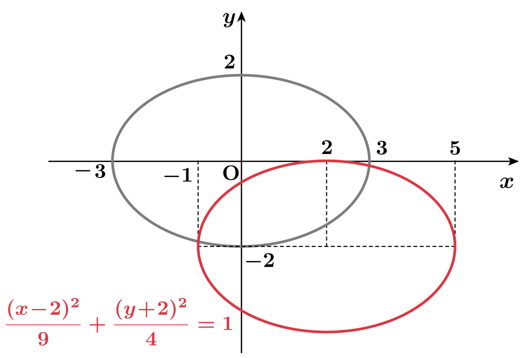
예제6

방정식 $4x^2+9y^2-16x+36y+16=0$이 나타내는 타원의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

주어진 방정식을 정리하면

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

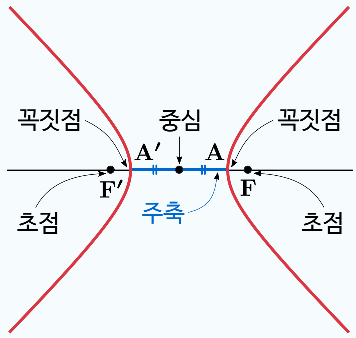
이다. 이것은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 타원이다. 따라서 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{5}+2,\ -2)$, 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -2)$, $(5,\ -2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ -4)$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3 쌍곡선의 방정식

쌍곡선

평면 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 정점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라고 한다.
오른쪽 그림과 같이 쌍곡선의 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점 A, A′를 쌍곡선의 꼭짓점이라 하고, $\overline{\mathrm{AA'}}$를 쌍곡선의 주축, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라고 한다.



쌍곡선의 방정식

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단}, c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$로부터 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1 \quad (\text{단}, c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

➤ 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 할 때, 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$이므로

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

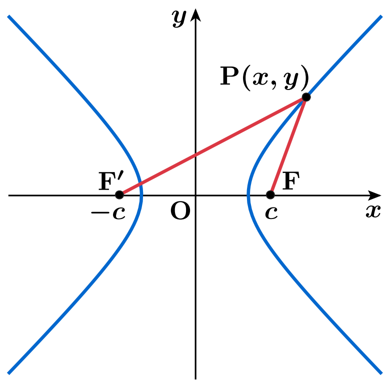
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

가 된다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2cx$$

가 되고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$



이 된다. 이때, $c > a > 0$이므로 $c^2 - a^2 = b^2\ (b > 0)$으로 놓으면

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

이 되고, 이식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = c^2 - a^2)$$

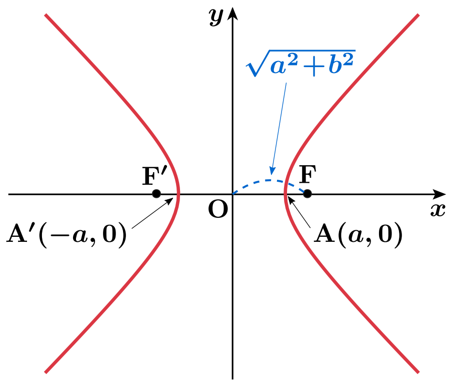
➤ 그림과 같이 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$의 두 초점 $\mathrm{F},\ \mathrm{F}'$의 좌표를 $a,\ b$로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$$

또, 쌍곡선의 꼭짓점의 좌표는

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$

이고, 주축의 길이는 $2a$, 중심은 원점이다.



➤ 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c),\ \mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 차가 $2b\ (c > b > 0)$인 쌍곡선의 방정식을 같은 방법으로 구하면

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a^2 = c^2 - b^2)$$

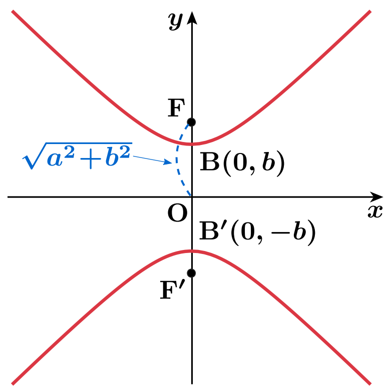
이다. 이때, 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\right),\ \mathrm{F}'\left(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

이고, 꼭짓점의 좌표는

$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이다. 또, 주축의 길이는 $2b$이고 중심은 원점이다.



예제7

두 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 8인 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이라고 하자.
일정한 거리의 차가 8이므로 $2a = 8$에서 $a = 4$임을 알 수 있다.
또한, 두 초점의 좌표가 $(\pm 5,\ 0)$이므로 $5^2 = a^2 + b^2$에서 $b^2 = 9$임을 알 수 있다.
따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$이다.

예제8

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = -1$의 초점의 좌표, 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하시오.

쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에서 $a^2 = 16,\ b^2 = 25$인 경우이므로
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$이다.

초점의 좌표 : $\left(0, \pm\sqrt{41}\right)$

꼭짓점의 좌표 : $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$

주축의 길이 : $2b = 2 \times 5 = 10$

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$$

➤ 쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 y에 대하여 풀면

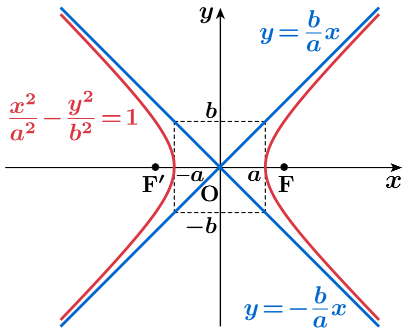
$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

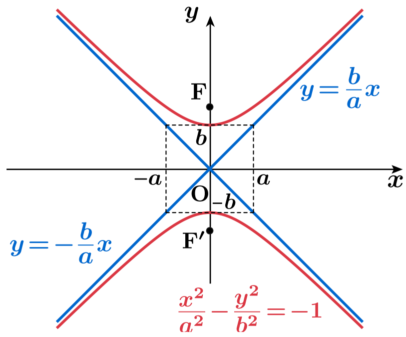
이다. 이때, $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\dfrac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 쌍곡선은 두 직선

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$$

에 한없이 가까워진다.

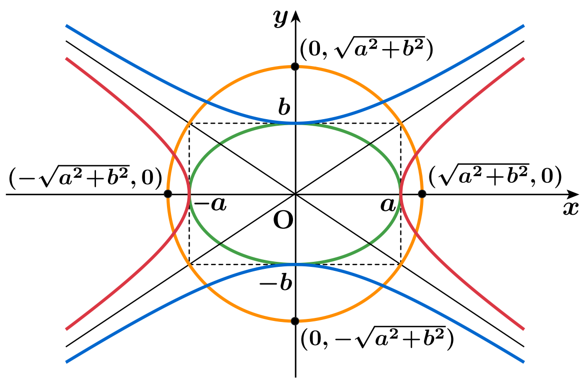
마찬가지로 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식도 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$임을 알 수 있다.





➤ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$의 그래프를 쉽게 그리기 위해서는 네 점 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$를 지나고 각 변이 x축 또는 y축에 평행한 직사각형을 먼저 그린다. 이 직사각형의 각 변을 연장한 직선은 쌍곡선의 꼭짓점에서 쌍곡선에 접하는 접선이 되고, 이 직사각형의 대각선을 연장한 직선은 쌍곡선의 점근선이 된다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 쉽게 쌍곡선을 그릴 수 있다.

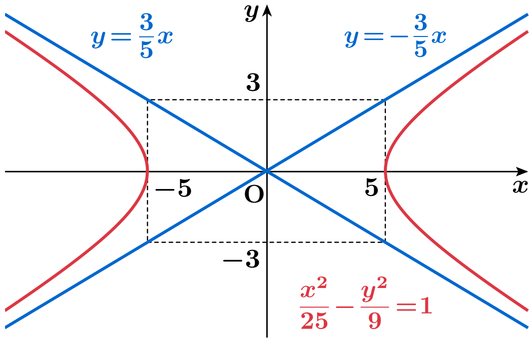
또한, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 이 직사각형에 내접하게 된다.



예제9

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식을 구하고, 쌍곡선의 그래프를 그리시오.

주어진 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$이므로 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{3}{5}$가 되고, 꼭짓점의 좌표가 $(\pm5,\ 0)$이므로 그래프는 아래와 같다.



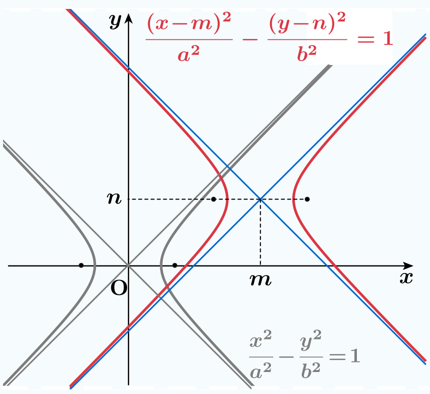
쌍곡선의 평행이동

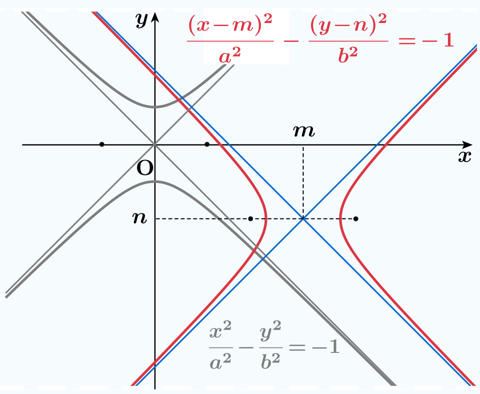
중심이 원점에 있는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 다음과 같이 중심이 $(m,\ n)$인 쌍곡선이 된다.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$$

	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점	$\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$	$\left(\pm\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n\right)$
중심	$(0,\ 0)$	$(m,\ n)$
꼭짓점	$(\pm a,\ 0)$	$(\pm a+m,\ n)$
점근선	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{b}{a}(x-m)+n$

	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=-1$
초점	$\left(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}\right)$	$\left(m,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}+n\right)$
중심	$(0,\ 0)$	$(m,\ n)$
꼭짓점	$(0,\ \pm b)$	$(m,\ \pm b+n)$
점근선	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{b}{a}(x-m)+n$

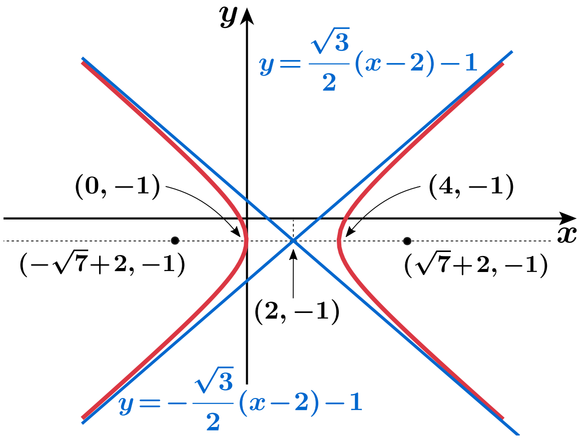




예제10

방정식 $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y - 4 = 0$이 나타내는 쌍곡선에 대하여 초점, 중심, 꼭짓점의 좌표와 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

주어진 방정식을 변형하면 $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{3} = 1$이 된다. 따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 쌍곡선이고, 그 그래프는 아래 그림과 같다.



초점 : $\left(\pm\sqrt{7}+2,\ -1\right)$
중심 : $(2,\ -1)$
꼭짓점 : $(0,\ -1)$, $(4,\ -1)$
점근선 : $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2) - 1$

1 이차곡선과 직선의 위치 관계

포물선과 직선의 위치 관계

포물선 $y^2 = 4px\ (p \neq 0)$와 직선 $y = mx + n\ (m \neq 0)$의 그래프의 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한 이차방정식

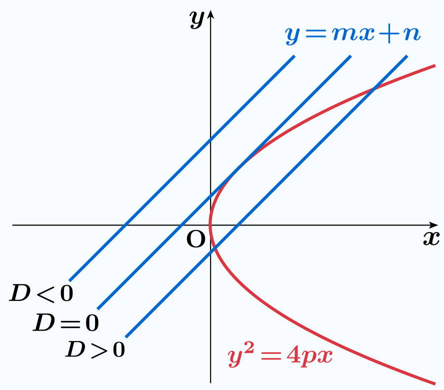
$$m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0$$

의 판별식 D로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) $D > 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D = 0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)

(3) $D < 0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



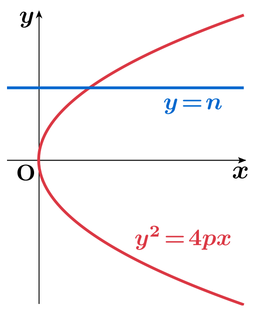
➤ 포물선과 직선의 방정식을 각각 $\begin{cases} y^2 = 4px\ (p \neq 0) & \cdots\cdots ① \\ y = mx + n\ (m \neq 0) & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 라고 하면, 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$가 된다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$(mx + n)^2 = 4px$$

$$m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0$$

이 되고, 이 이차방정식의 판별식 $D = 16p(p - mn)$의 부호에 따라 서로 다른 실근의 개수, 즉 주어진 포물선과 직선의 교점의 개수가 결정된다.

➤ $y = mx + n$에서 $m = 0$이면 포물선 $y^2 = 4px$와의 교점은 한 개가 된다.



예제11

포물선 $y^2=2x$와 직선 $y=x+k$의 k의 값에 따른 위치 관계를 조사하시오.

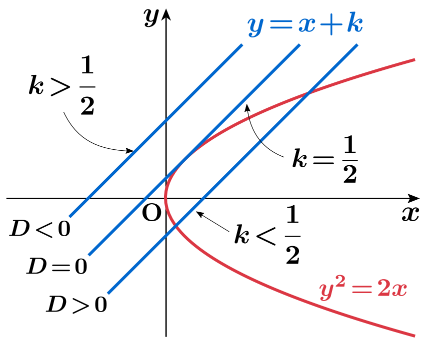
$y^2=2x$에 $y=x+k$를 대입하여 정리하면

$$x^2+2(k-1)x+k^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=-2k+1$$

이므로 k값에 따른 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



(1) $D>0$, 즉 $k<\frac{1}{2}$일 때

서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$, 즉 $k=\frac{1}{2}$일 때

한 점에서 만난다.(접한다)

(3) $D<0$, 즉 $k>\frac{1}{2}$일 때

만나지 않는다.

타원과 직선의 위치 관계

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 그래프의 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한 이차방정식

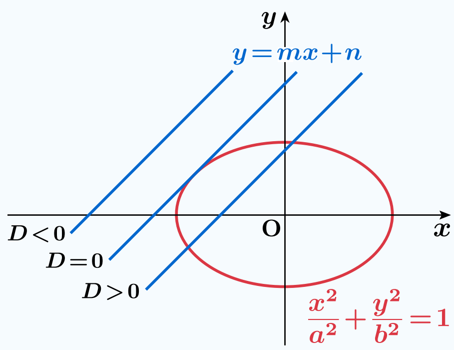
$$\left(a^2m^2+b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2-b^2\right)=0$$

의 판별식 D로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) $D>0$ $\Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ $\Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)

(3) $D<0$ $\Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



➤ 타원과 직선의 방정식을 각각 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \cdots\cdots ① \\ y=mx+n & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 라고 하면, 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$가 된다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

$$\left(a^2m^2+b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2-b^2\right)=0$$

이 되고, 이 이차방정식의 판별식 $D=4a^2b^2\left(a^2m^2-n^2+b^2\right)$의 부호에 따라 서로 다른 실근의 개수, 즉 주어진 타원과 직선의 교점의 개수가 결정된다.

예제12

타원 $9x^2+16y^2=144$와 직선 $y=x+k$의 k의 값에 따른 위치 관계를 조사하시오.

$9x^2+16y^2=144$에 $y=x+k$를 대입하여 정리하면

$$25x^2+32kx+16\left(k^2-9\right)=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(16k)^2-25\times16\left(k^2-9\right)=-144(k+5)(k-5)$$

이므로 k값에 따른 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0$, 즉 $-5<k<5$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$, 즉 $k=\pm5$일 때, 한 점에서 만난다.(접한다)

(3) $D<0$, 즉 $k<-5$ 또는 $k>5$일 때, 만나지 않는다.

쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 그래프의 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한 이차방정식

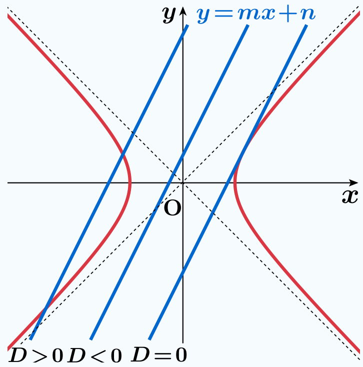
$$\left(a^2m^2-b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2+b^2\right)=0$$

$\left(\text{단, } m\neq\pm\dfrac{b}{a}\right)$의 판별식 D로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)

(3) $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



➤ 쌍곡선과 직선의 방정식을 각각 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \cdots\cdots ① \\ y=mx+n & \cdots\cdots ②\end{cases}$ 라고 하면, 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$가 된다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

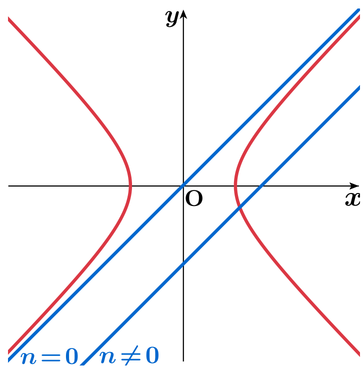
$$\left(a^2m^2-b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2+b^2\right)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이 된다.

(가) $a^2m^2-b^2=0$ 일 때

㉠ $n=0$일 때, 직선 ②는 쌍곡선 ①의 점근선 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$ 중 하나이므로 쌍곡선과 직선은 만나지 않는다.

㉡ $n\neq0$일 때, 직선 ②는 쌍곡선 ①의 점근선에 평행한 직선이므로 쌍곡선과 직선은 항상 한 점에서 만난다.



(나) $a^2m^2-b^2\neq0$일 때

이차방정식 ③의 판별식 $D=4a^2b^2\left(n^2+b^2-a^2m^2\right)$의 부호에 따라 서로 다른 실근의 개수, 즉 주어진 쌍곡선과 직선의 교점의 개수가 결정된다.

➤ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$과 직선 $y=mx+n$의 위치 관계도 같은 방식으로 확인할 수 있다.

예제13

쌍곡선 $4x^2 - 9y^2 = 36$과 직선 $y = x + k$의 k값에 따른 위치 관계를 조사하시오.

$4x^2 - 9y^2 = 36$에 $y = x + k$를 대입하여 정리하면

$$5x^2 + 18kx + 9\left(k^2 + 4\right) = 0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4} = (9k)^2 - 5 \times 9\left(k^2 + 4\right) = 36\left(k - \sqrt{5}\right)\left(k + \sqrt{5}\right)$$

이므로 k값에 따른 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D > 0$, 즉 $k < \sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D = 0$, 즉 $k = \pm\sqrt{5}$일 때, 한 점에서 만난다.(접한다)

(3) $D < 0$, 즉 $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$일 때, 만나지 않는다.

2 이차곡선의 접선

포물선의 접선

(1) 포물선 $y^2 = 4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

(2) 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

➤ 포물선 $y^2 = 4px$에 접하고 기울기가 m $(m \neq 0)$인 접선의 방정식을 $y = mx + n$이라고 하면

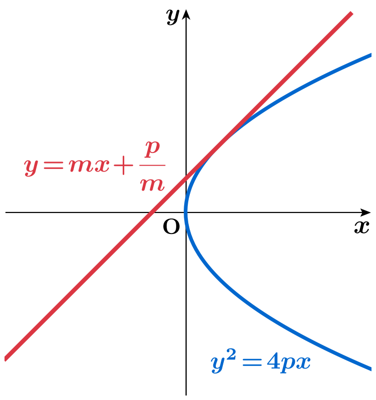
$y = mx + n$을 $y^2 = 4px$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식

$$m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

이 중근을 가져야 한다. 이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면

$$D = 16p(p - mn) = 0 \ \Rightarrow \ n = \frac{p}{m}$$

가 된다. 따라서 접선의 방정식은 $y = mx + \dfrac{p}{m}$ 이다.



➤ $x_1 \neq 0$일 때, 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \cdots\cdots ②$$

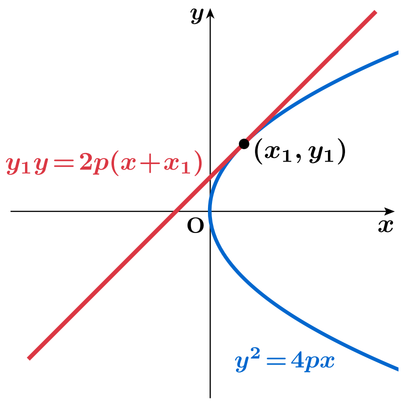
이다. 또한, 포물선 $y^2 = 4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{p}{m} \quad \cdots\cdots ③$$

이다. ③을 ②에 대입하여 정리하면

$$x_1m^2 - y_1m + p = 0$$

이고, 위 방정식으로부터 m의 값을 구하면



$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{(-y_1)^2 - 4px_1}}{2x_1} = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{2p}{y_1} \quad (\because y_1^2 = 4px_1)$$

이 된다. 이것을 ①에 대입하면

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

을 얻을 수 있다.

➤ 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 $x_1 = 0$이면 $y_1 = 0$이 되어 이 점에서의 접선의 방정식은 $x = 0$이 된다. 이 경우에도 접선의 방정식은 $y_1 y = 2p(x + x_1)$으로 구할 수 있다.

예제14

다음 물음에 답하시오.

(1) 포물선 $y^2 = 12x$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $(3,\ 6)$에서 포물선에 접하는 접선의 방정식을 구하시오.

$y^2 = 12x = 4 \times 3x$이므로

(1) 구하는 접선의 방정식은 $y = 2x + \dfrac{3}{2}$이다.

(2) 구하는 접선의 방정식은 $6y = 2 \times 3(x + 3)$, 즉 $y = x + 3$이다.

타원의 접선

(1) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

➤ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면 $y=mx+n$을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식

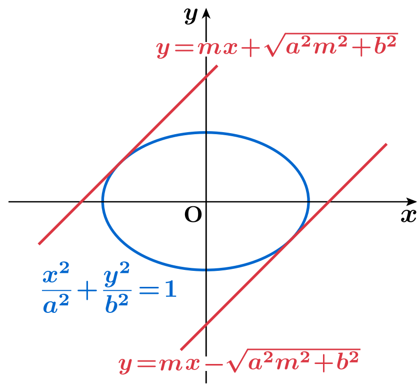
$$\left(a^2m^2+b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2-b^2\right)=0$$

이 중근을 가져야 한다. 위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4a^2b^2\left(a^2m^2+b^2-n^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\ n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

가 된다. 따라서 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.



➤ $y_1\neq0$일 때, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad\cdots\cdots①$$

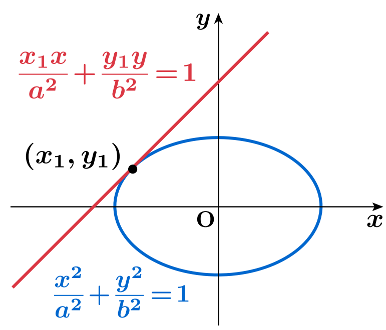
이다. 또한, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}\quad\cdots\cdots②$$

이다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$-mx_1+y_1=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

이고, 양변을 제곱하여 정리하면



$$\left(x_1^2 - a^2\right) m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

이 된다. 이때, $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$에서 $x_1^2 - a^2 = -\dfrac{a^2y_1^2}{b^2}$, $y_1^2 - b^2 = -\dfrac{b^2x_1^2}{a^2}$임을 알 수 있고, 이것을 ③에 대입하여 정리하면

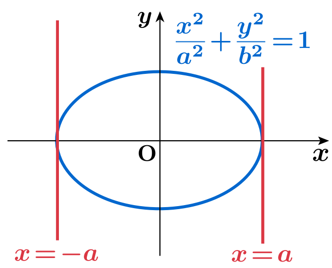
$$\frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2 + 2x_1y_1m + \frac{b^2x_1^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}y_1m + \frac{b}{a}x_1\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

가 된다. 이것을 ①에 대입하고 $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$을 이용하여 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

을 얻을 수 있다.

➤ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 $y_1 = 0$이면 접선의 방정식은 $x = \pm a$가 된다. 이 경우에도 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$로 구할 수 있다.



예제14

다음 물음에 답하시오.

(1) 타원 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서 타원에 접하는 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 구하는 접선의 방정식은 $y = x \pm \sqrt{1 \times 8 + 2} = x \pm \sqrt{10}$이다.

(2) 구하는 접선의 방정식은 $\dfrac{-2x}{8} + \dfrac{y}{2} = 1$, 즉 $2x - 4y + 8 = 0$이다.

쌍곡선의 접선

(1) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

(2) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$$

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

(4) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

➤ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면 $y=mx+n$을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식

$$\left(a^2m^2-b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2+b^2\right)=0$$

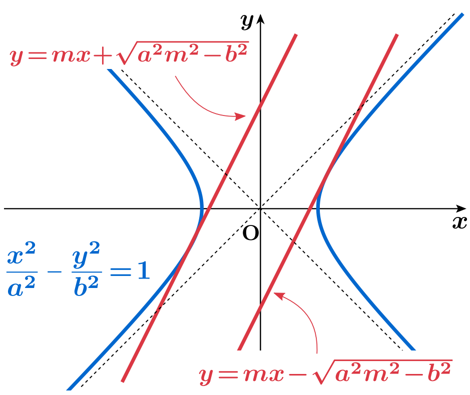
이 중근을 가져야 한다. 위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4a^2b^2\left(b^2-a^2m^2+n^2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \left(a^2m^2-b^2>0\right)$$

가 된다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

이다.



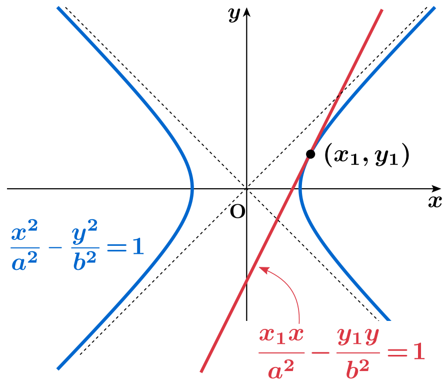
➤ $y_1 \neq 0$일 때, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 또한, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

이다.



②를 ①에 대입하여 정리하면

$$y_1 - mx_1 = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

이고, 양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(x_1^2 - a^2\right)m^2 - 2x_1y_1m + \left(b^2 + y_1^2\right) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

이 된다. 이때, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에서 $x_1^2 - a^2 = \dfrac{a^2y_1^2}{b^2}$, $b^2 + y_1^2 = \dfrac{b^2x_1^2}{a^2}$임을 알 수 있고, 이것을 ③에 대입하여 정리하면

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2 - 2x_1y_1m + \frac{b^2x_1^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{ay_1}{b}m - \frac{bx_1}{a}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

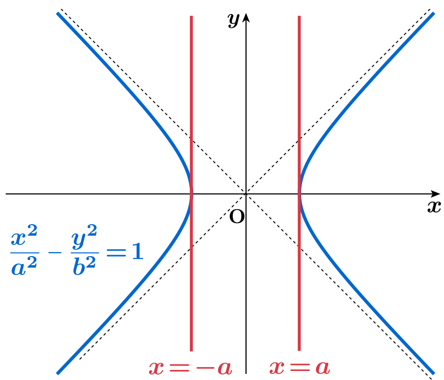
이 된다. 이것을 ①에 대입하고 $\dfrac{x^2}{a^1} - \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$을 이용하여 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

을 얻을 수 있다.

➤ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 $y_1 = 0$이면 접선의 방정식은 $x = \pm a$가 된다.

이 경우에도 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$로 구할 수 있다.



➤ 위와 같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2} \quad (\text{단, } b^2 - a^2m^2)$$

임을 보일 수 있다. 또한, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = -1$$

임을 보일 수 있다.

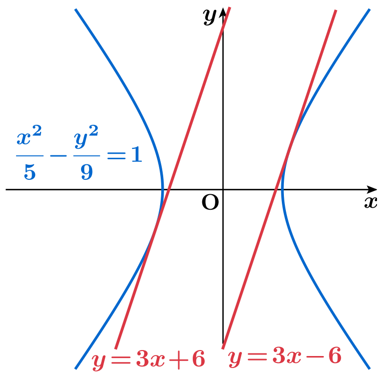
예제15

다음 물음에 답하시오.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = -1$ 위의 점 $\left(2,\ \frac{9}{\sqrt{5}}\right)$에서 쌍곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 구하는 접선의 방정식은 $y = 3x \pm \sqrt{5 \times 9 - 9} = 3x \pm 6$이다.



(2) 구하는 접선의 방정식은 $\frac{2x}{5} - \frac{\frac{9}{\sqrt{5}}y}{9} = -1$, 즉 $\frac{2}{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = -1$이다.

고등학교 기하

평면벡터

2

1. 벡터의 연산
2. 평면벡터의 성분과 내적

1 벡터의 뜻

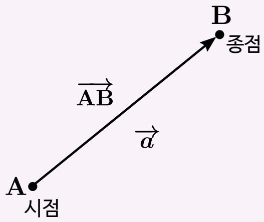
벡터

(1) 벡터의 뜻

물체의 운동 속도는 속력과 그 진행 방향으로 정해진다. 또, 물체에 작용하는 힘도 크기와 방향으로 정해진다. 이와 같이 크기와 방향의 두 요소를 갖는 양을 벡터라고 한다.

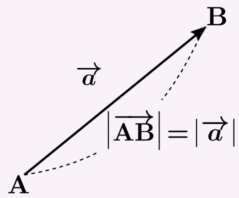
(2) 벡터의 표시

벡터는 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타낸다. 이 벡터를 기호로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 또는 $\vec{a}$와 같이 나타낸다. 이때, 점 A를 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 시점, 점 B를 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점이라고 한다.



(3) 벡터의 크기

선분 AB의 길이를 이 벡터의 크기라 하고, 기호로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ 또는 $|\vec{a}|$와 같이 나타낸다 특히, 크기가 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.

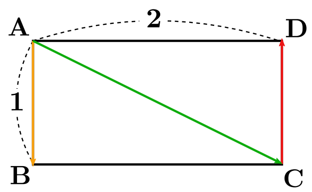


➤ $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 영벡터라고 하며, 이것을 기호로 $\vec{0}$으로 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고 방향은 생각하지 않는다.

➤ 평면에서의 벡터를 평면벡터라고 한다.

예제1

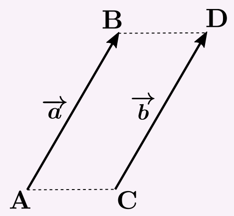
오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 직사각형에 대해서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 크기를 구하고, 이 중 단위벡터를 찾으시오.



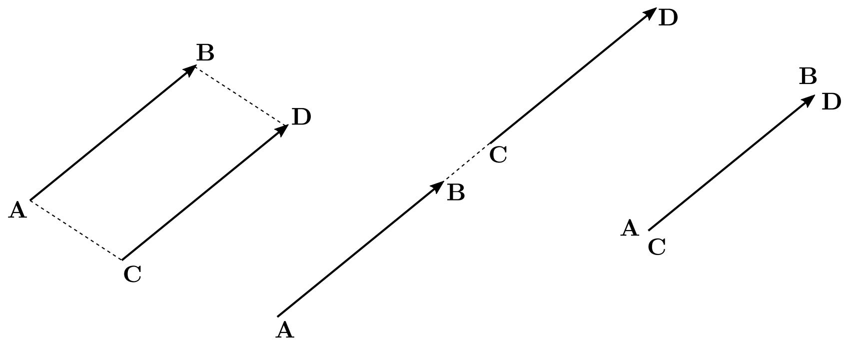
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{5}$이고, 이 중 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$는 단위벡터이다.

벡터

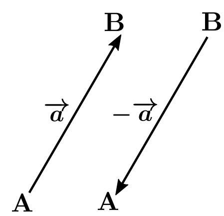
오른쪽 그림에서와 같이 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 크기와 방향이 각각 같을 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 같다고 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}=\vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$와 같이 나타낸다.



➤ 벡터는 크기와 방향만으로 정의되므로 크기와 방향이 같다면 위치에 관계없이 모두 같은 벡터이다. 즉, 선분 AB를 평행이동하여 선분 CD와 겹칠 수 있다면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$이다.

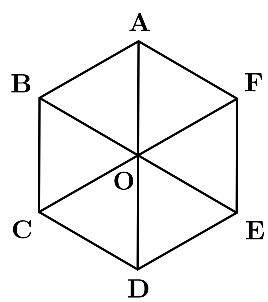


➤ 오른쪽 그림에서와 같이 $\vec{a}\left(=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다. 이때, $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$이고, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이다.



예제2

오른쪽 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{CF}}$의 교점을 O라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 같은 벡터를 모두 찾으시오.



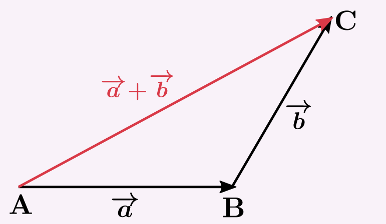
$\overrightarrow{\mathrm{FO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

2 벡터의 덧셈과 뺄셈

벡터의 덧셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$일 때, 두 벡터의 덧셈은 다음과 같이 정의한다.

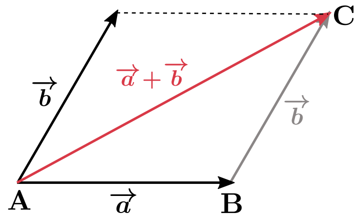
$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



➤ 삼각형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때는 $\vec{a}$의 종점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

➤ 벡터의 합은 평행사변형을 이용하여 나타낼 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$이므로

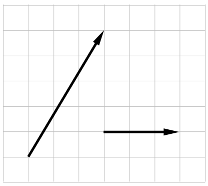
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{a} + \vec{b}$$

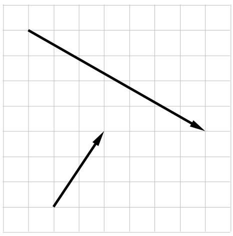


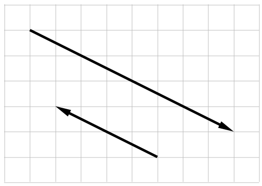
이다. 즉, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 성립한다. 평행사변형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때는 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

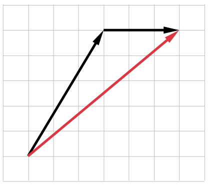
예제3

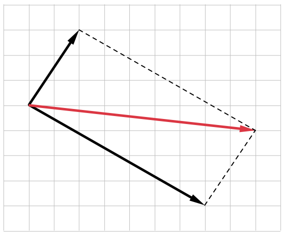
다음에 주어진 두 벡터의 합을 구하시오.

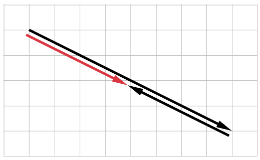
(1)


(2)


(3)


(1)


(2)


(3)


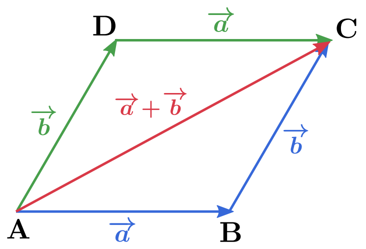
벡터의 덧셈에 대한 연산법칙

임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 교환법칙 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 결합법칙 : $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

➤ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면



$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

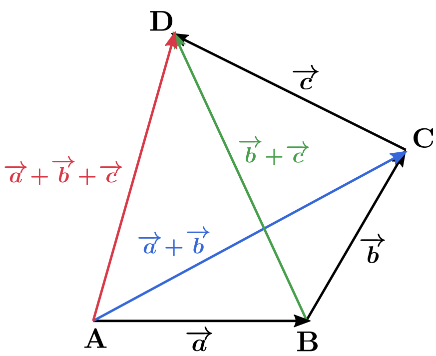
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

이다. 따라서

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

➤ 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡으면



$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

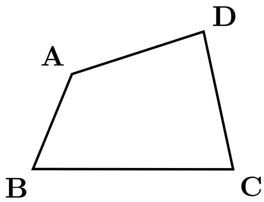
이다. 따라서

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

예제4

아래 그림과 같은 사각형 ABCD 에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$가 성립함을 보이시오.



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} &= \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)\\
&= \overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{BD}\\
&= \overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{BD}\\
&= \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{0}\\
&= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}
\end{aligned}
$$

임의의 점 P에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$

벡터의 덧셈에 대한 연산법칙

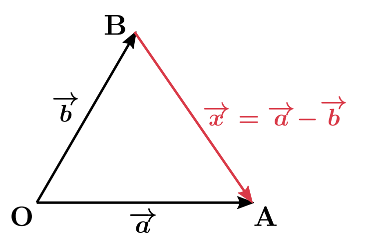
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$, $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라고 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}-\vec{b}$로 나타낸다.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

➤ 삼각형 OAB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때,

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

를 만족하는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라고 한다. 이때, $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$이다.



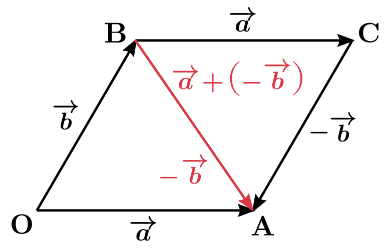
➤ 평행사변형 OABC에서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때, $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$이다. 이때,

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad -\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

이므로

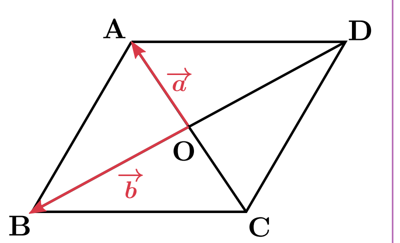
$$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

이다. 따라서 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$가 성립한다.



예제5

오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 대각선의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$$

2 벡터의 실수배

벡터의 실수배

실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$일 때

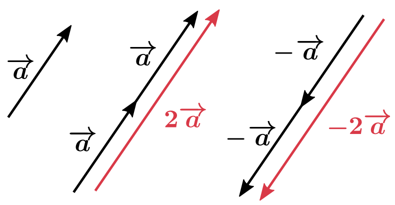
① $k > 0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터

② $k < 0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터

③ $k = 0$이면, $k\vec{a} = \vec{0}$

(2) $\vec{a} = \vec{0}$일 때, $k\vec{a} = \vec{0}$

➤ 영벡터가 아닌 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a} + \vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다. 이것을 $2\vec{a}$로 나타낸다. 또한, $(-\vec{a}) + (-\vec{a})$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다. 이것을 $-2\vec{a}$로 나타낸다.



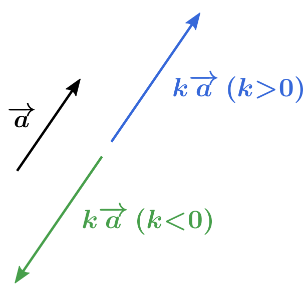
➤ 위와 같이 생각하면 $k\vec{a}$는

① k가 양수일 때, $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $|\vec{a}|$의 k배인 벡터를 나타낸다.

② k가 음수일 때, $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|\vec{a}|$의 $|k|$배인 벡터를 나타낸다.

③ $k = 0$일 때, $k\vec{a} = \vec{0}$이다.

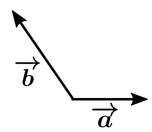
따라서 모든 실수 k와 $\vec{a}$에 대하여 $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$가 성립한다. 이와 같이 임의의 실수 k와 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $k\vec{a}$를 $\vec{a}$의 실수배라고 한다.



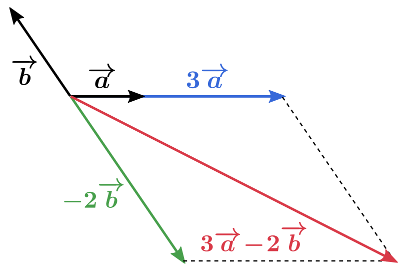
➤ 실수와 벡터의 곱은 벡터이다.

예제6

오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 주어져 있을 때, $3\vec{a}-2\vec{b}$ 를 구하시오.



$3\vec{a}-2\vec{b}=3\vec{a}+\left(-2\vec{b}\right)$ 이므로 두 벡터 $3\vec{a}$ 와 $-2\vec{b}$ 의 합을 구하면 된다.



벡터의 실수배에 대한 연산법칙

두 실수 k, l과 두 벡터 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$에 대하여

(1) 결합법칙 : $k\left(l\overrightarrow{a}\right) = (kl)\overrightarrow{a}$

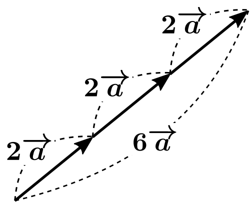
(2) 분배법칙 : $(k+l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{b}$, $\quad k\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$

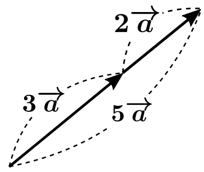
➤ 아래 그림에서와 같이 $\overrightarrow{a}$에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} = 3 \times \left(2\overrightarrow{a}\right) = (3 \times 2)\overrightarrow{a} = 6\overrightarrow{a}$$

➤ 아래 그림에서와 같이 $\overrightarrow{a}$에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

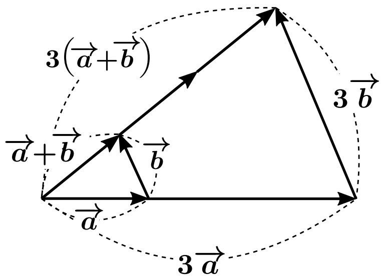
$$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} = (3+2)\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{a}$$

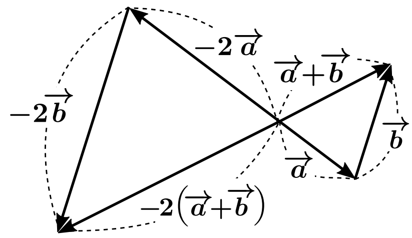




➤ 두 벡터 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$3\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} = 3\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right), \quad -2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} = -2\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)$$





예제7

$2\left(3\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)-4\left(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)$를 간단히 하시오.

$$\begin{aligned} 2\left(3\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)-4\left(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right) &= 6\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{c}-4\vec{a}+4\vec{b}-8\vec{c} \\ &= (6-4)\vec{a}+(-4+4)\vec{b}+(6-8)\vec{c} \\ &= 2\vec{a}-2\vec{c} \end{aligned}$$

예제8

등식 $-3\left(2\vec{a}-\vec{x}\right)-2\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)=\vec{0}$을 만족시키는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

$-6\vec{a}+3\vec{x}-8\vec{a}+10\vec{b}=\vec{0}$

$3\vec{x}=14\vec{a}-10\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\dfrac{14}{3}\vec{a}-\dfrac{10}{3}\vec{b}$

벡터의 평행

(1) 벡터의 평행

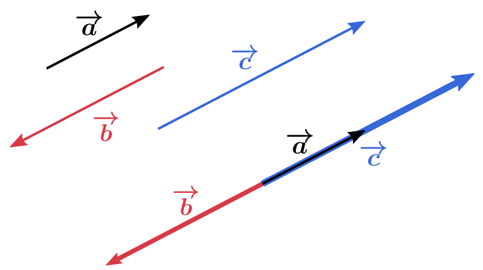
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며, 이것을 기호로 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

(2) 두 벡터가 평행할 조건

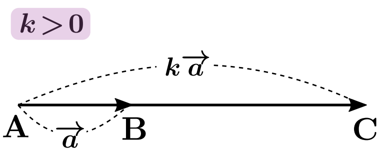
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립한다.

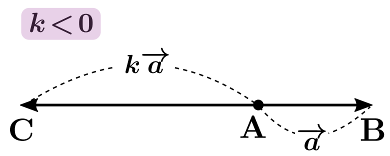
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = k\vec{a} \ (k\text{는 0이 아닌 실수})$$

- 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 시점을 일치시키면, 두 벡터가 평행할 필요충분조건이 '한 벡터가 다른 벡터의 실수배'임을 알 수 있다.
- 두 직선이 일치하는 경우에는 평행하다고 하지 않지만, 시점과 종점이 일치하는 두 벡터는 평행하다고 한다.



- 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$인 실수 k가 존재하면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 역으로 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$인 실수 k가 존재한다.





예제9

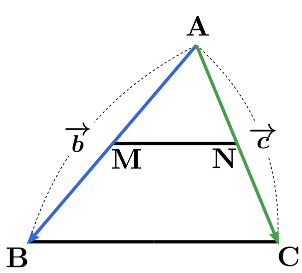
삼각형 ABC의 두 변 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$임을 보이시오.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$라고 하면

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$



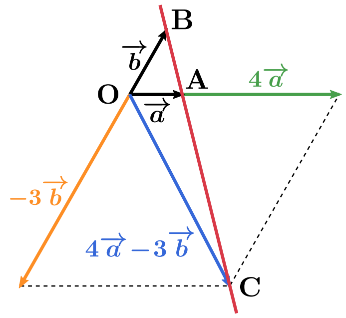
예제10

평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4\vec{a}-3\vec{b}$일 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 보이시오.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(4\vec{a}-3\vec{b}\right)-\vec{a}\\&=3\vec{a}-3\vec{b}\\&=-3\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



예제11

평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C와 실수 k에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\vec{a}-2\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=5\vec{a}+k\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.
(단, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 모두 영벡터가 아니고, 서로 평행하지 않다.)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}-3\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(5\vec{a}+k\vec{b}\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=4\vec{a}+(k-1)\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (t는 실수) 이어야 하므로

$4\vec{a}+(k-1)\vec{b}=2t\vec{a}-3t\vec{b}$ 에서

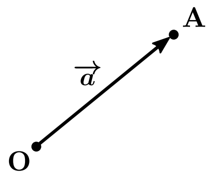
$4=2t$, $k-1=-3t$가 되어야 한다.

$\therefore t=2,\ k=-5$

1 위치벡터와 평면벡터의 성분

위치벡터

평면에서 한 정점 O를 시점으로 하는 벡터를 위치벡터라고 한다.



- 평면에서 한 점 O를 고정시키면 임의의 $\vec{a}$에 대하여 점 A의 위치를 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 되도록 정할 수 있다. 역으로, 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$인 $\vec{a}$가 유일하게 정해진다. 즉, 시점을 한 점 O로 고정하면 평면 위의 점 A와 이 점의 위치를 나타내는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 일대일대응한다. 이때, 고정된 점 O를 시점으로 하는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 점 A의 위치벡터라고 한다.
- 일반적으로 좌표평면에서 위치벡터의 시점은 원점 O로 정한다.
- 두 위치벡터가 서로 같으면 두 위치벡터의 종점이 같고, 두 위치벡터의 종점이 같으면 두 위치벡터는 서로 같은 벡터이다.

예제12

평면 위의 서로 다른 세 점 O, A, B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타내시오.

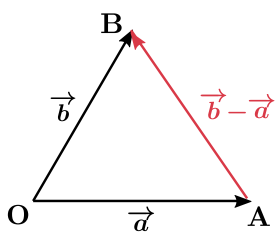
오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

이므로 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

와 같다.



예제13

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$를 구하시오. (단, $m > 0$, $n > 0$)

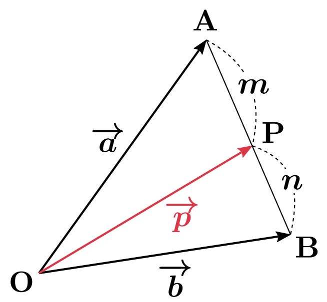
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ 이므로

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

이고, 따라서

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

이다.



예제14

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$를 구하시오. (단, $m > 0$, $n > 0$, $m \neq n$)

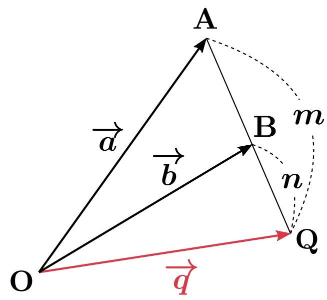
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \vec{q} - \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ 이므로

$$\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

이고, 따라서

$$\vec{q} = \vec{a} + \frac{m}{m-n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

이다. (오른쪽 그림은 $m > n > 0$인 경우를 보여준다.)



예제15

삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 위치벡터를 각각 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라고 할 때,

삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는 $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ 임을 보이시오.

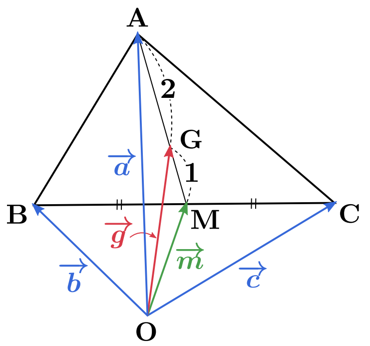
선분 BC의 중점을 M이라 하고, 점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$ 이라고 하면 $\vec{m} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ 이다. 이때, 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\vec{g} = \frac{2\vec{m}+\vec{a}}{2+1} = \frac{2\vec{m}+\vec{a}}{3}$$

이고, 위 식에 $\vec{m} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ 을 대입하여 정리하면

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

이 된다.



예제16

그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 할 때,

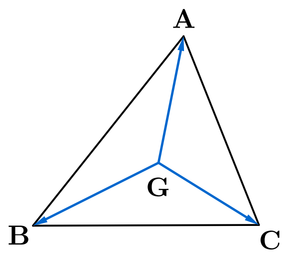
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

임을 보이시오.

점 A, B, C, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{g}$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= (\vec{a}-\vec{g}) + \left(\vec{b}-\vec{g}\right) + (\vec{c}-\vec{g}) \\ &= \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} - 3\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right) \\ &= \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} - \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.



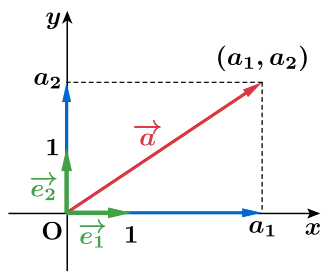
평면벡터의 성분

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하는 위치벡터 $\vec{a}$의 종점의 좌표가 $(a_1,\ a_2)$일 때,

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타내고, 실수 a_1, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라고 한다.

- 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$의 위치벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$라고 할 때, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 성분을 이용하여 나타내면 $\vec{e_1} = (1,\ 0)$, $\vec{e_2} = (0,\ 1)$이다. 이때, $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$는 오른쪽 그림에서



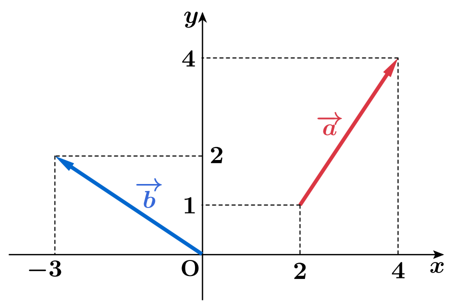
$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

즉, $(a_1,\ a_2) = a_1(1,\ 0) + a_2(0,\ 1)$임을 알 수 있다.

- $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$에서 a_1을 $\vec{a}$의 x성분, a_2를 y성분이라고 한다.
- $\vec{e_1}$은 x축의 양의 방향과 방향이 같고, 크기는 1인 단위벡터이고, $\vec{e_2}$는 y축의 양의 방향과 방향이 같고, 크기가 1인 단위벡터이다.

예제17

오른쪽 그림과 같은 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$를 성분으로 나타내시오.



벡터의 시점이 원점이 아닌 경우, 시점이 원점이 되도록 벡터를 평행이동한 후 생각한다.

$$\vec{a} = (2,\ 3), \quad \vec{b} = (-3,\ 2)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건

두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

➤ 두 점 $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$의 위치벡터 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$가 서로 같은 벡터가 되기 위해서는 그 종점의 좌표가 같아야 하므로 $\vec{a} = \vec{b} \ \Leftrightarrow\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$가 성립함을 알 수 있다.

예제18

두 벡터 $\vec{a} = (3 - m,\ n - 2)$, $\vec{b} = (m - 3,\ 4 - n)$에 대하여 $\vec{a} = \vec{b}$일 때, 상수 $m,\ n$의 값을 구하시오.

$\vec{a} = \vec{b}$이기 위해서는 $3 - m = m - 3,\ n - 1 = 4 - n$이어야 한다.

$\therefore m = 3,\ n = 3$

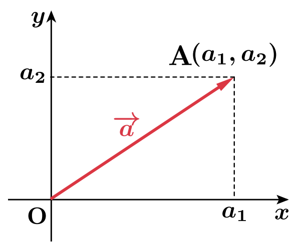
평면벡터의 크기

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$일 때, $\vec{a}$의 크기는 다음과 같다.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

➤ 오른쪽 그림에서 $\vec{a} = (a_1,\ a - 2)$일 때, 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같다.

$$|\vec{a}| = \overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



예제19

두 벡터 $\vec{a} = (-6,\ 8)$, $\vec{b} = (3,\ 4)$에 대하여 $|\vec{a}| - |\vec{b}|$를 구하시오.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$, $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$이므로 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = 10 - 5 = 5$이다.

평면벡터의 성분에 의한 연산

두 평면벡터 $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3) $k\overrightarrow{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

➤ 두 벡터 $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

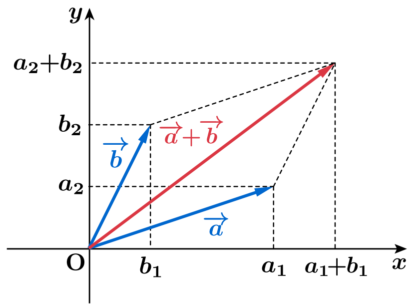
$$\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}$$

이므로 다음이 성립한다.

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\left(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}\right)+\left(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}\right)$

$=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}$

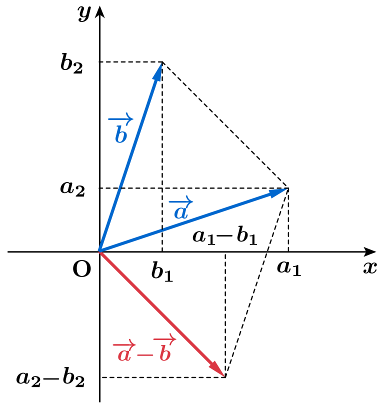
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$



(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\left(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}\right)-\left(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}\right)$

$=(a_1-b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2-b_2)\overrightarrow{e_2}$

$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

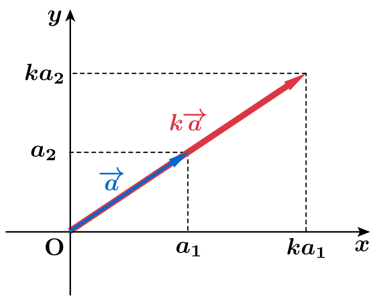


(3) 실수 k에 대하여

$k\overrightarrow{a}=k\left(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}\right)$

$=(ka_1)\overrightarrow{e_1}+(ka_2)\overrightarrow{e_2}$

$=(ka_1,\ ka_2)$



예제20

$\overrightarrow{a} = (2,\ 1)$, $\overrightarrow{b} = (1,\ 2)$일 때, $\overrightarrow{(}c) = (2,\ -5)$를 $k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{b}$의 꼴로 나타낼 때, 상수 k, l의 값을 구하시오.

$(2,\ -5) = k(2,\ 1) + l(1,\ 2) = (2k + l,\ k + 2l)$

따라서 연립방정식 $\begin{cases} 2k + l = 2 \\ k + 2l = -5 \end{cases}$ 을 풀면 $k = 3,\ l = -4$이다.

평면벡터의 성분과 크기

두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여

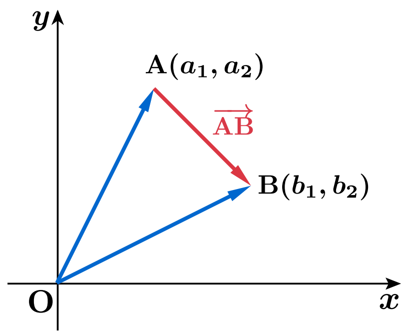
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

➤ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1,\ b_2)$이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 성분과 크기는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= (b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2) \\ &= (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



예제21

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 2) - (-2,\ 3) = (3,\ -1)$

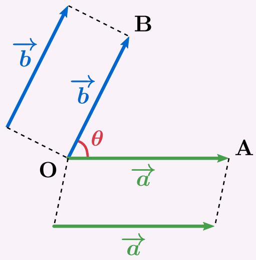
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

2 평면벡터의 내적

평면벡터의 내적

(1) 두 벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 한 점 O를 잡아서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$가 되도록 A, B를 정할 때, $\angle\mathrm{AOB}$의 크기 θ는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이때,



$$\theta=\angle\mathrm{AOB}\quad(0\le\theta\le\pi)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이라고 한다.

(2) 벡터의 내적

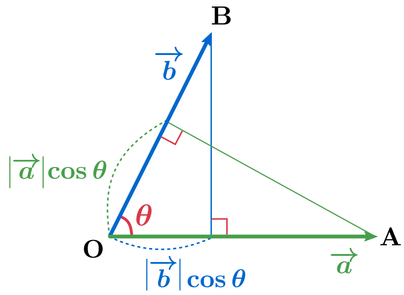
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적을 $|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta$로 정의하고, 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타낸다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

➤ $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $|\vec{a}|$와 $|\vec{b}|\cos\theta$의 곱 또는 $|\vec{b}|$와 $|\vec{a}|\cos\theta$의 곱이다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left(|\vec{b}|\cos\theta\right)=|\vec{b}|\left(|\vec{a}|\cos\theta\right)$$

따라서, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니라 스칼라, 즉 실수이다.

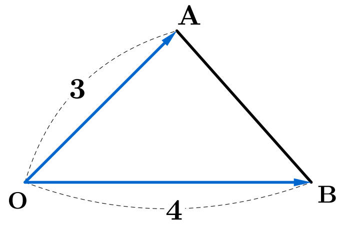


➤ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$

➤ $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

예제22

그림과 같이 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6\sqrt{2}$일 때, $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이를 구하시오.



$\angle\mathrm{AOB}=\theta$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\times4\times\cos\theta=6\sqrt{2}$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{4}$$

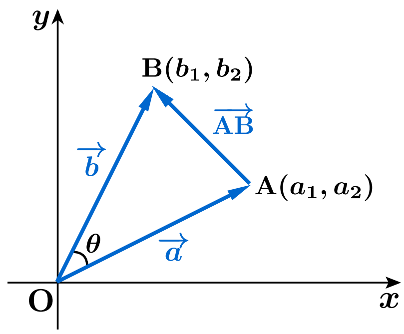
$$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\theta=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

성분으로 나타낸 평면벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$인 두 점 A, B를 잡으면 $\triangle\mathrm{OAB}$에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\cos\theta$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\times\cos\theta\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\end{aligned}$$

위의 등식을 성분으로 나타내면

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=\left(a_1^2+a_2^2\right)+\left(b_1^2+b_2^2\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

이므로 이것을 정리하면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이다. 또한, 이 식은 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에도 성립한다.

예제23

다음 물음에 답하시오.

(1) 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -2)$의 내적을 구하시오.

(2) 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(k,\ -6)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이 되는 실수 k의 값을 구하시오.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ 3)\cdot(1,\ -2)=(2\times1)+\{3\times(-2)\}=-4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,\ 1)\cdot(k,\ -6)=3k-6=0\quad\therefore k=2$

평면벡터의 내적의 성질

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

(1) 교환법칙 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) 분배 법칙 : $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(3) 결합법칙 : $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

➤ $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$, $\vec{c} = (c_1,\ c_2)$라고 하면

(1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2$이다.

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$가 성립한다.

(2) $\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1,\ b_2 + c_2)$에서

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$가 성립한다.

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$도 같은 방법으로 보일 수 있다.

(3) 임의의 실수 k에 대해서 $k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2)$, $k\vec{b} = (kb_1,\ kb_2)$이므로

$$\begin{aligned} (k\vec{a}) \cdot \vec{b} &= (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 \\ &= a_1(kb_1) + a_2(kb_2) \\ &= \vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) &= a_1(kb_1) + a_2(kb_2) \\ &= ka_1 b_1 + ka_2 b_2 \\ &= k(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\ &= k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \end{aligned}$$

이 성립한다.

예제24

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2$ 임을 보이시오.

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2&=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\\&=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\left|\vec{a}\right|^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$

예제25

$\left|\vec{a}\right|=4,\ \left|\vec{b}\right|=1$ 이고, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 일 때, $\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|^2&=\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\\&=9\left|\vec{a}\right|^2-12\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+4\left|\vec{b}\right|^2\\&=(9\times16)-\left(12\times4\times1\times\cos\frac{\pi}{3}\right)+(4\times1)\\&=124\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{124}=2\sqrt{31}$$

두 평면벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, 다음이 성립한다.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

➤ 좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}(a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \pi)$라고 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

이다. 이때, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$이므로

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

가 성립한다.

예제26

두 평면벡터 $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$가 이루는 각의 크기를 구하시오.

두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta = \frac{(3\times1)+(1\times2)}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다. 이때, $0 \le \theta \le \pi$이므로 $\theta = \frac{\pi}{4}$가 된다.

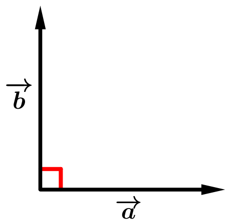
평면벡터의 수직 조건과 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 수직 조건 : $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) 평행 조건 : $\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$

➤ 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 수직이라고 하며, 이것을 기호로 $\vec{a} \perp \vec{b}$와 같이 나타낸다. 또한, $\vec{a} \perp \vec{b}$이면 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$이다. 따라서 $\vec{a} \perp \vec{b}$이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$이고, 그 역도 성립한다. 이때, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, ; b_2)$ 이면



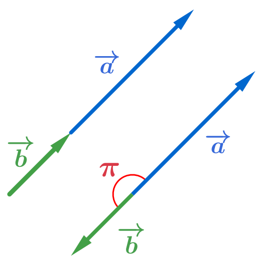
$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

이 성립한다.

➤ 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 다음과 같다.

① $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 같을 때, $\theta = 0$

② $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 반대일 때, $\theta = \pi$



즉, $\cos\theta = 1$ 또는 $\cos\theta = -1$이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \text{ 또는 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

이다. 따라서 $\vec{a} \parallel \vec{b}$이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$이고, 그 역도 성립한다.

예제27

두 벡터 $\vec{a} = (3,\ -6)$, $\vec{b} = (k,\ 2)$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

두 벡터가 서로 수직이 되어야 하므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3k - 12 = 0$에서 $k = 4$임을 알 수 있다.

예제28

벡터 $\overrightarrow{a} = (1,\ -2)$와 수직이고, 크기가 $3\sqrt{5}$인 벡터를 구하시오.

구하는 벡터를 $\overrightarrow{b} = (x,\ y)$라고 하면

(1) 두 벡터 $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$가 수직이므로 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$에서 $x - 2y = 0$ $\cdots\cdots$①

(2) $|\overrightarrow{b}| = 3\sqrt{5}$이므로 $\sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{5}$에서 $x^2 + y^2 = 45$ $\cdots\cdots$②

①과 ②를 연립하여 풀면 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}$ 를 얻을 수 있다.

따라서 구하는 벡터는 $\overrightarrow{b} = (6,\ 3)$ 또는 $\overrightarrow{b} = (-6,\ -3)$이다.

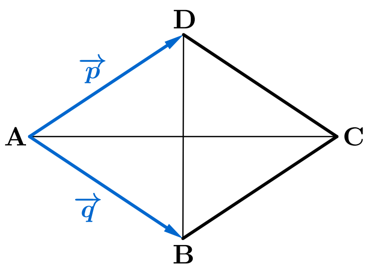
예제29

마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$ 임을 보이시오.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{q}$라고 하면,

$|\overrightarrow{p}| = |\overrightarrow{q}|$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}) \\ &= \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} \\ &= |\overrightarrow{p}| - |\overrightarrow{q}| \\ &= 0 \end{aligned}$$



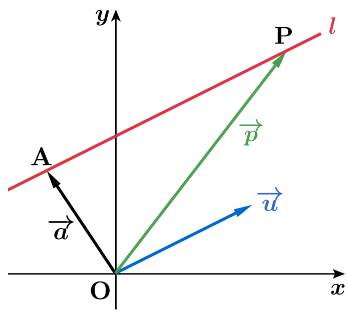
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ 즉, $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$가 성립한다.

방향벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2} \quad (\text{단, } u_1u_2\neq 0)$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(u_1,u_2)$에 평행한 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 할 때, 점 P와 점 A가 일치하지 않으면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\parallel\vec{u}$이므로



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$$

인 실수 t가 존재한다. 이때, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a},\ \vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\vec{a}$이므로 $\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$, 즉

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \quad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. 점 P가 점 A와 일치하면 $\vec{p}=\vec{a}$, 즉 $t=0$인 경우이므로 역시 ①이 성립한다. 역으로, 임의의 실수 t에 대하여 ①을 만족하는 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다. 이때, ①을 직선 l의 방정식이라 하고, 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 방향벡터라고 한다.

➤ 한편, 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내면

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(u_1,\ u_2)=(x_1+tu_1,\ y_1+tu_2)$$

이므로

$$x=x_1+tu_1,\quad y=y_1+tu_2 \quad \cdots\cdots ②$$

가 된다. 여기서 $u_1u_2\neq 0$일 때, t를 소거하면 다음과 같은 직선의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

➤ ②에서 $u_1=0,\ u_2\neq 0$이면 직선 l의 방정식은 $x=x_1$이 되고, $u_1\neq 0,\ u_2=0$이면 직선 l의 방정식은 $y=y_1$이 된다.

예제30

방향벡터가 $\vec{u} = (3,\ 1)$ 이고, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

구하는 직선의 방정식은 $\dfrac{x-0}{3} = \dfrac{y-3}{1}$, 즉 $y = \dfrac{1}{3}x + 3$ 이다.

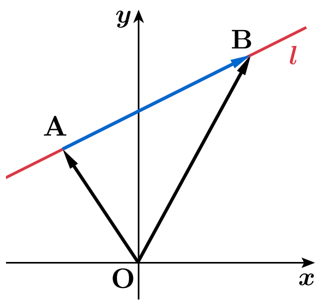
예제31

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식이

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

임을 보이시오. (단, $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$)

오른쪽 그림에서와 같이 좌표평면의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 를 지나는 직선 l 은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ 인 직선이므로 구하는 직선의 방정식은 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ 이다.

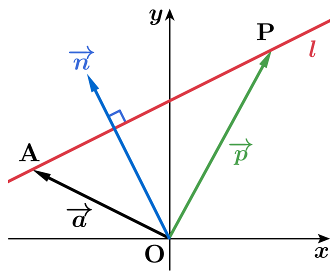


법선벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (n_1,\ n_2)$인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) = 0$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n} = (n_1, n_2)$에 수직인 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 할 때, 점 P와 점 A가 일치하지 않으면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$이므로



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$$

이 된다. 이때, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{p} - \vec{a}$이므로

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

이 된다. 점 P가 점 A와 일치하면 $\vec{p} = \vec{a}$, 즉 $\vec{0} \cdot \vec{n} = 0$이므로 역시 ①이 성립한다. 역으로, ①을 만족하는 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다. 이때, ①을 직선 l의 방정식이라 하고, 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 법선벡터라고 한다.

➤ 한편, 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내면

$$(x - x_1,\ y - y_1) \cdot (n_1,\ n_2) = 0$$
$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) = 0$$

이 된다.

예제32

법선벡터가 $\vec{n} = (1,\ 2)$이고 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

구하는 직선의 방정식은 $1 \times (x - 2) + 2 \times (y + 1) = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x$이다.

두 직선이 이루는 각의 크기

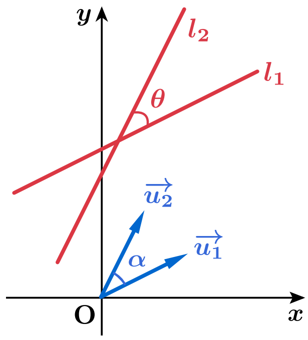
두 직선 $l_1,\ l_2$의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2,\ b_2)$일 때, 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

➤ 두 직선의 방향벡터 $\overrightarrow{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 α라고 하면 θ는 α와 $\pi-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽과 같다. 따라서

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$$

가 성립한다.



예제33

두 직선 $\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}=y-3$, $\dfrac{x-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{y+2}{\sqrt{3}+1}$가 이루는 예각의 크기를 구하시오.

직선 $\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}=y-3$의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면 $\vec{u}=\left(\sqrt{3},\ 1\right)$이고,

직선 $\dfrac{x-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{y+2}{\sqrt{3}+1}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라고 하면 $\vec{v}=\left(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1\right)$이다.

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\left|\left\{\sqrt{3}\times\left(\sqrt{3}-1\right)\right\}+\left\{1\times\left(\sqrt{3}+1\right)\right\}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\times\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$가 된다.

예제34

두 직선 $3x-2y=5$, $\dfrac{x+2}{a}=y-1$이 평행일 때와 수직일 때의 상수 a의 값을 각각 구하시오.

직선 $3x-2y=5 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-\frac{5}{2}}{3}$의 방향벡터를 $\overrightarrow{u}$라고 하면 $\overrightarrow{u}=(2,\ 3)$이고,

직선 $\dfrac{x+2}{a}=y-1$의 방향벡터를 $\overrightarrow{v}$라고 하면 $\overrightarrow{v}=(a,\ 1)$이므로

(1) 두 직선이 평행하려면 $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$ (단, k는 0이 아닌 실수)에서

$$(a,\ 1)=k(2,\ 3) \quad \Rightarrow \quad a=2k,\ 1=3k$$

이므로 $a=\dfrac{2}{3}$이다.

(2) 두 직선이 수직이려면 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$에서

$$2a+3=0$$

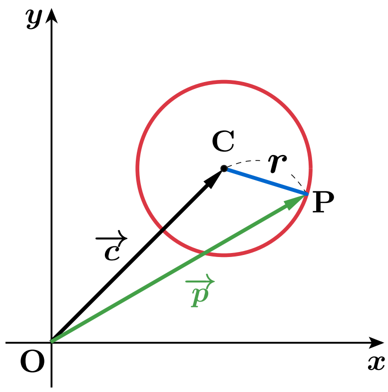
이므로 $a=-\dfrac{3}{2}$이다.

벡터를 이용한 원의 방정식

점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 한 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$의 크기는 r로 일정하다.



$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$$

이때, 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{p}-\vec{c}$이므로

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$
$$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$$
$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이 된다. 역으로, ①을 만족하는 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$을 만족시키는 원 위에 있다. 즉, ①은 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이다.

➤ 한편, 원의 방정식 ①을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$(x-a,\ y-b)\cdot(x-a,\ y-b)=r^2$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

예제35

점 $(3,\ 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 원의 중심을 $\mathrm{C}(3,\ 1)$이라 하고, 두 점 $\mathrm{C},\ \mathrm{P}$의 위치벡터를 각각 $\vec{c},\ \vec{p}$라고 하면

$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=2$$

이 성립한다. 이때, $\vec{p}-\vec{c}=(x-3,\ y-1)$이므로

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=2$$

이고, 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 이 된다.

예제36

두 점 $(4,\ -1),\ (2,\ 5)$를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 지름의 양 끝점을 각각 $\mathrm{A}(4,\ -1),\ \mathrm{B}(2,\ 5)$라 하고, 세 점 $\mathrm{P},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}$의 위치벡터를 각각 $\vec{p},\ \vec{a},\ \vec{b}$라고 하면, $\triangle\mathrm{PAB}$는 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\vec{p}-\vec{a})\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)=0$$

이 성립한다. 이때, $\vec{p}-\vec{a}=(x-4,\ y+1),\ \vec{p}-\vec{b}=(x-2,\ y-5)$이므로

$$x^2-6x+y^2-4y+3=0$$

이고, 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=10$이 된다.

고등학교 기하

공간도형과 공간좌표

3

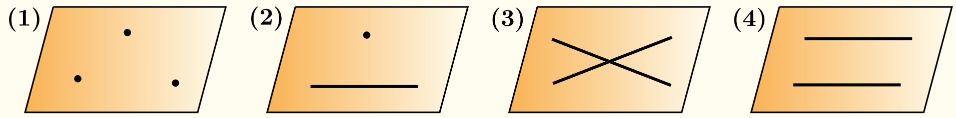
1. 공간도형
2. 공간좌표

1 직선, 평면의 위치 관계

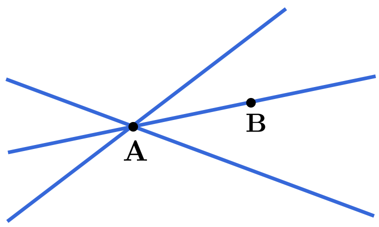
평면의 결정조건

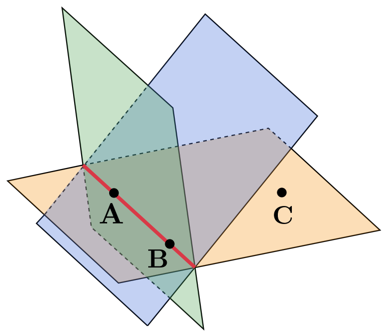
(1) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 (2) 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점

(3) 한 점에서 만나는 두 직선 (4) 평행한 두 직선



➤ 평면에서와 같이 공간에서도 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많지만, 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 뿐이다. 즉, 한 직선은 서로 다른 두 점에 의하여 결정된다. 또, 공간에서 서로 다른 두 점을 지나는 평면은 무수히 많지만, 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점을 지나는 평면은 오직 하나이다. 따라서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 단 하나의 평면을 결정한다. 이때, 두 점 A, B는 한 직선을 결정하므로 직선 AB와 직선 AB 위에 있지 않은 한 점 C는 한 평면을 결정한다.
또한, 공간의 한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하고, 평행한 두 직선도 한 평면을 결정한다.

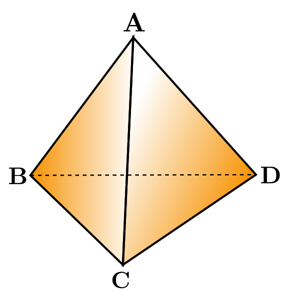




예제1

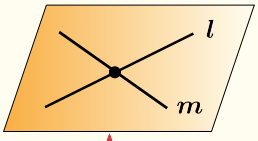
공간에서 한 평면 위에 있지 않은 네 점 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 이 네 점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.

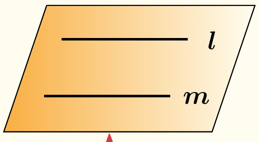
한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정하므로, 이 네점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수는 ${}_4C_3 = 4$이다. 이때, 네 점을 각각 A, B, C, D라고 하면 오른쪽 그림에서와 같이 평면은 4개가 결정되는 것을 알 수 있다.

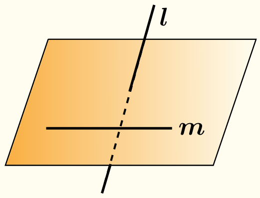


공간에서 두 직선의 위치 관계

(1) 만난다. (2) 평행하다. (3) 꼬인 위치에 있다.







한 평면 위에 있다. 한 평면 위에 있지 않다.

➤ 공간에서 서로 다른 두 직선이 한 평면 위에 있으면 이 두 직선은 서로 만나거나 평행하다. 그러나 두 직선이 한 평면 위에 있지 않으면 서로 만나지도 않고, 평행하지도 않은 경우가 있다. 이때, 두 직선은 꼬인 위치에 있다고 한다.

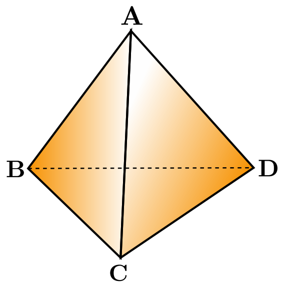
예제2

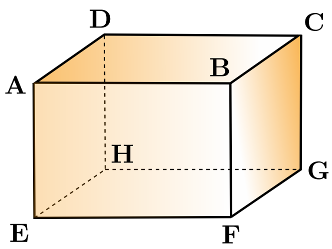
다음 물음에 답하시오.

(1) 아래 그림의 정사면체에서 서로 꼬인 위치에 있는 모서리를 모두 찾으시오.

(2) 오래 그림의 직육면체에서 모서리 AE와 평행한 모서리를 모두 찾으시오.

(3) 아래 그림의 직육면체에서 모서리 AE와 꼬인 위치에 있는 모서리를 모두 찾으시오.





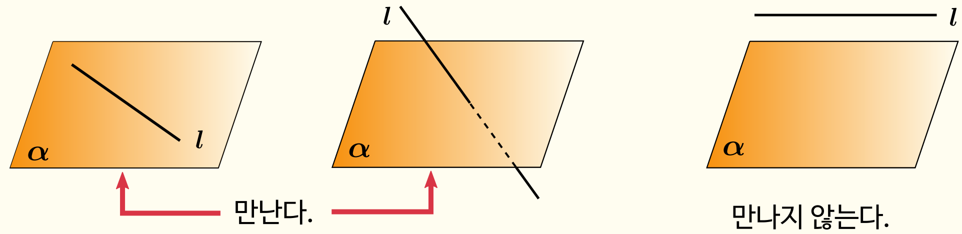
(1) 모서리 AB와 모서리 CD, 모서리 AC와 모서리 BD, 모서리 AD와 모서리 BC

(2) 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 DH

(3) 모서리 BC, 모서리 CD, 모서리 FG, 모서리 GH

직선과 평면의 위치 관계

(1) 포함된다. (2) 한 점에서 만난다. (3) 평행하다.



➤ 직선 l과 평면 α가 한 점만을 공유할 때, 직선 l과 평면 α가 한 점에서 만난다고 한다.

➤ 직선 l과 평면 α가 두 점 이상을 공유할 때, 직선 l 위의 모든 점은 평면 α 위에 있으므로 직선 l이 평면 α에 포함된다고 한다.

➤ 직선 l과 평면 α가 공유점을 갖지 않으면 직선 l과 평면 α는 평행하다고 하고, 기호로 $l \parallel \alpha$와 같이 나타낸다.

➤ 보통 점은 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \cdots$와 같이 알파벳 대문자로 나타내고, 직선은 $a,\ b,\ c,\ \cdots$ 와 같이 알파벳 소문자로 나타낸다. 또, 평면은 그리스 문자 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$ 로 나타낸다.

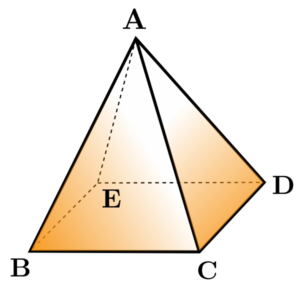
예제3

오른쪽 그림의 정사각뿔에서 다음을 찾으시오.

(1) 직선 BC를 포함하는 평면

(2) 직선 BC와 한 점에서 만나는 평면

(3) 직선 BC와 평행한 평면



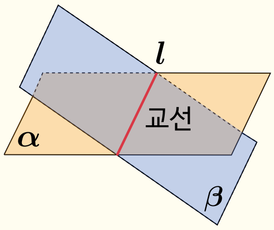
(1) 평면 BCDF, 평면 ABC

(2) 평면 ABE, 평면 ACD

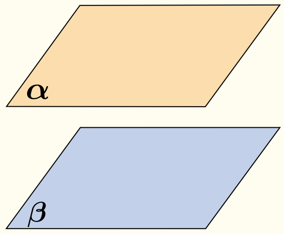
(3) 평면 ADE

평면과 평면의 위치 관계

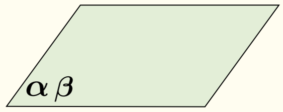
(1) 만난다.



(2) 평행하다.



(3) 일치한다.



➤ 공간에서 서로 다른 두 평면은 만나거나 만나지 않는다. 서로 다른 두 평면 α, β가 한 점을 공유하면 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다. 이때, 두 평면은 만난다고 하고, 공유하는 직선을 두 평면의 교선이라고 한다. 또한, 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면은 평행하다고 하고, 기호로 $\alpha \parallel \beta$와 같이 나타낸다.

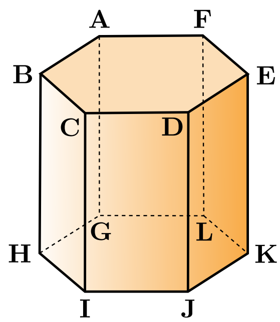
➤ 서로 다른 두 평면 α, β가 두 점 A, B를 공유하면 직선 AB가 두 평면 α, β의 교선이다.

예제4

오른쪽 그림과 같이 두 밑면이 정육각형인 육각기둥에서 다음을 찾으시오.

(1) 평면 CDJI와 평행한 평면

(2) 평면 BCIH와 평면 CDJI의 교선



(1) 평면 AFLG

(2) 직선 CI

직선과 평면의 평행에 대한 성질

(1) 평행한 두 평면 α, β가 다른 평면 γ와 만나서 생기는 교선을 각각 l, m이라고 할 때, l과 m은 서로 평행하다.

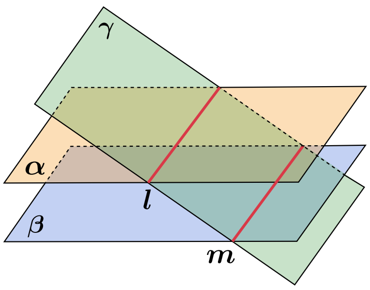
(2) 두 평면 α와 β가 평행하면 평면 α에 포함되는 직선은 평면 β와 평행하다.

(3) 두 직선 l과 m이 평행할 때, 직선 l을 포함하는 평면 α가 직선 m을 포함하지 않으면 직선 m과 평면 α는 평행하다.

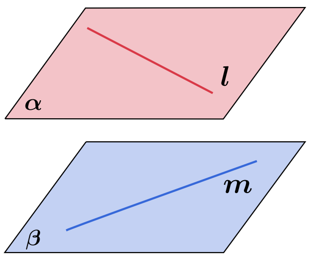
(4) 직선 l과 평면 α가 평행할 때, 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α가 교선 m을 가지면 두 직선 l, m은 서로 평행하다.

(5) 평면 α 위에 있지 않은 점 P를 지나고 평면 α에 평행한 서로 다른 두 직선 l, m에 의하여 결정되는 평면 β는 평면 α와 평행하다.

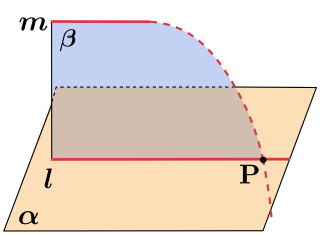
(1) 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다. 따라서, 평면 α에 포함된 직선 l과 평면 β에 포함된 직선 m도 만나지 않는다. 그런데, 두 직선 l, m은 모두 평면 γ 위에 있으므로 $l \parallel m$이다.



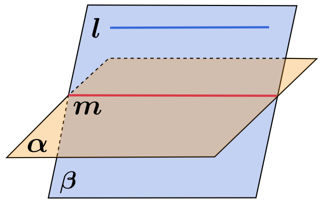
(2) 직선 l이 평면 β와 평행하지 않다면 직선 l과 평면 β는 적어도 하나의 공유점 P를 가지게 된다. 이때, 직선 l이 평면 α에 포함되므로 점 P는 두 평면 α와 β의 공유점이 되어 두 평면이 평행하다는 가정에 모순이다. 따라서 직선 l과 평면 β는 평행하다.



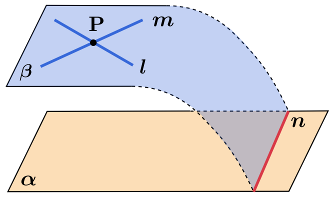
(3) 두 직선 l과 m은 평행하므로 한 평면 β를 결정한다. 직선 m과 평면 α가 점 P에서 만난다고 하면 직선 m이 평면 β에 포함되므로 점 P는 평면 β 위의 점이다. 따라서, 점 P는 두 평면 α와 β의 공유점이다.
한편, 직선 l은 서로 다른 두 평면 α와 β의 교선이므로 점 P는 직선 l 위의 점이 되어 두 직선 l과 m이 평행하다는 가정에 모순이다. 따라서 $m \parallel \alpha$이다.



(4) 직선 l과 평면 α는 평행하므로 만나지 않는다. 따라서, 직선 l은 평면 α 위에 있는 직선 m과 만나지 않는다. 그런데, 직선 l과 직선 m은 같은 평면 β 위에 있으므로 $l \parallel m$이다.



(5) 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 평행하지 않고, 교선 n을 공유한다고 가정하자. 이때, 교선 n은 평면 α에 포함되고 $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$이므로 직선 n은 두 직선 l, m과 만나지 않는다. 그런데 세 직선 l, m, n은 모두 평면 β에 포함되므로 $l \parallel n$, $m \parallel n$이고, 결국 $l \parallel m$이 된다. 이것은 두 직선 l, m이 점 P에서 만난다는 사실에 모순이다. 따라서 $\alpha \parallel \beta$이다.

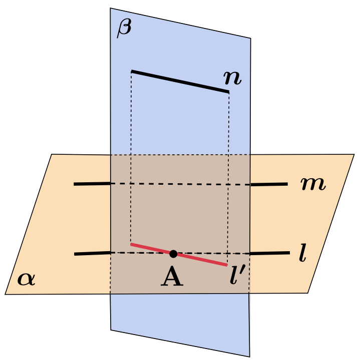


예제5

서로 다른 세 직선 l, m, n에 대하여 $l \parallel m$이고 $m \parallel n$이면 $l \parallel n$임을 보이시오.

i) 세 직선 l, m, n이 한 평면 위에 있을 때, 두 직선 l, n이 만나서 교점 A가 생기면 점 A를 지나고 직선 m과 평행한 직선이 2개가 되어 모순이다. 따라서, 두 직선 l, m은 만나지 않으므로 $l \parallel n$이다.

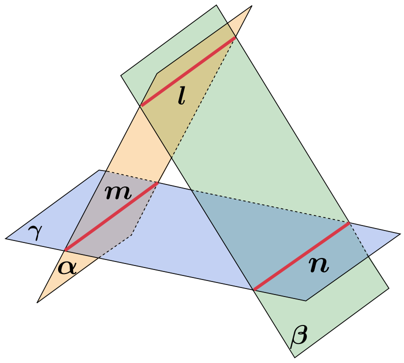
ii) 세 직선 l, m, n이 한 평면 위에 있지 않을 때, 평행한 두 직선 l, m이 결정하는 평면을 α라 하자. 이때, 직선 l 위의 한 점 A와 직선 n이 결정하는 평면을 β라고 하면 (3)에 의하여 $m \parallel \beta$이다. 또한, 두 평면 α, β의 교선을 l'라고 하면 $m \parallel \beta$이고, l'는 β 위에 있으므로 m과 l'는 만나지 않고, m과 l'은 모두 α 위에 있으므로 $l' \parallel m$이다. 그런데 평면 α 위의 두 직선 l, l'는 한 점 A를 지나면서 직선 m에 평행하므로 일치하고, $m \parallel n$이므로 (3)에 의하여 $n \parallel \alpha$이다. 따라서 직선 n은 평면 α 위의 직선 l'와 만나지 않는다. 또한, 두 직선 n, l'는 평면 β 위에 있으므로 $n \parallel l'$이 되어 $l \parallel n$임을 알 수 있다.



i), ii)에 의하여 $l \parallel n$이다.

예제6

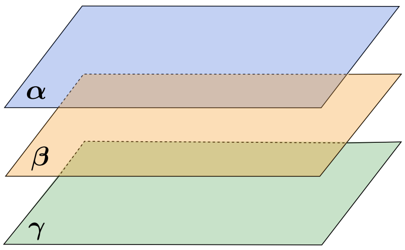
두 평면 α와 β의 교선 l과 평면 γ가 평행할 때, 두 평면 α와 γ의 교선 m과 두 평면 β와 γ의 교선 n이 평행함을 보이시오.



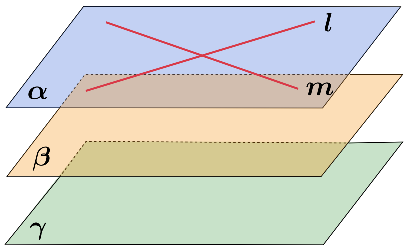
직선 l과 평면 γ는 평행하므로 서로 만나지 않는다. 따라서, 직선 l은 평면 γ 위에 있는 직선 m, n과 만나지 않는다. 그런데 직선 l과 직선 m은 같은 평면 α 위에 있으므로 서로 평행하다. 또한, 직선 l과 직선 n은 같은 평면 β 위에 있으므로 서로 평행하다. 즉, $l \parallel m$, $l \parallel n$이므로 $m \parallel n$이다.

예제7

오른쪽 그림과 같이 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$일 때, $\alpha \parallel \gamma$임을 보이시오.



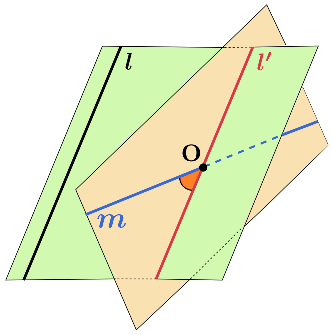
오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있고, 한 점에서 만나는 두 직선을 l, m이라고 하면 $\alpha \parallel \beta$이므로 $l \parallel \beta$, $m \parallel \beta$이다.
두 직선 l, m이 평면 γ와 만난다고 가정하면 $\beta \parallel \gamma$이므로 두 직선 l, m은 평면 β와도 만난다.
이것은 $l \parallel \beta$, $m \parallel \beta$에 모순이므로 $l \parallel \gamma$, $m \parallel \gamma$이고, 두 직선 l, m은 모두 평면 α 위에 있으므로 $\alpha \parallel \gamma$이다.



두 직선이 이루는 각

(1) 한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다.

(2) 꼬인 위치에 있는 두 직선 l과 m이 있을 때, l에 평행하면서 m과 만나는 직선 l'를 생각하여 두 직선 l'와 m이 이루는 각을 직선 l과 m이 이루는 각으로 정한다.



➤ 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'를 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때, 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라고 한다.

➤ 공간에서 두 직선이 이루는 각이 직각일 때, l, m은 수직 또는 직교한다고 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

➤ 두 직선이 이루는 두 개의 각 중 크지 않은 쪽을 두 직선이 이루는 각으로 정한다. 따라서 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.

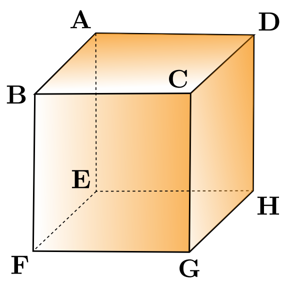
예제8

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.

(1) 직선 AB, 직선 DH

(2) 직선 AB, 직선 EG

(3) 직선 AC, 직선 FH



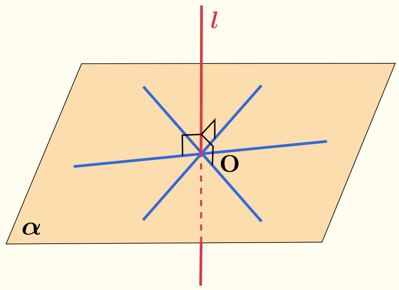
(1) 직선 AB, 직선 DH가 이루는 각은 직선 AE와 직선 AB가 이루는 각으로 정할 수 있다. 따라서 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

(2) 직선 AB, 직선 EG가 이루는 각은 직선 EF와 직선 EG가 이루는 각으로 정할 수 있다. 따라서 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$이다.

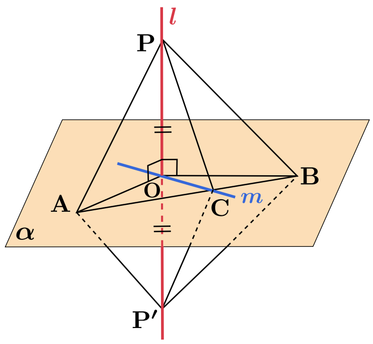
(3) 직선 AC, 직선 FH가 이루는 각은 직선 EG와 직선 FH가 이루는 각으로 정할 수 있다. 두 직선은 정사각형의 두 대각선이므로 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

직선과 평면의 수직

직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이라고 하고, 이것을 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다.



➤ 오른쪽 그림과 같이 직선 l이 평면 α와 만나는 점을 O라 하고 평면 α 위에 $l\perp\overline{\mathrm{OA}}$, $l\perp\overline{\mathrm{OB}}$인 두 점 A, B를 잡고, 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선을 m, 직선 m이 직선 AB와 만나는 점을 C라 하자.
직선 l 위에 $\overline{\mathrm{PO}} = \overline{\mathrm{P'O}}$인 두 점 P, $\mathrm{P'}$을 잡으면 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AP'}}$, $\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{BP'}}$이고, $\triangle\mathrm{ABP}$와 $\triangle\mathrm{ABP'}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$는 공통이므로 $\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ABP'}$이다. 따라서, $\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{P'AB}$, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AP'}}$가 된다.

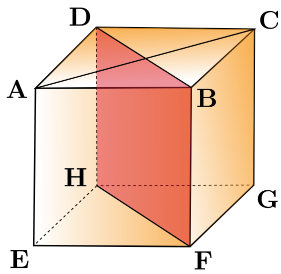


또한, $\triangle\mathrm{PAC}$와 $\triangle\mathrm{P'AC}$에서 $\angle\mathrm{PAC} = \angle\mathrm{P'AC}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}$는 공통이므로 $\triangle\mathrm{PAC} \equiv \triangle\mathrm{P'AC}$이고, 결국 $\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{P'C}}$이다. 이때, $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{P'O}}$이고 $\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{P'C}}$이므로 $\triangle\mathrm{CPP'}$는 이등변삼각형이 되고, $\overline{\mathrm{PP'}}\perp\overline{\mathrm{OC}}$, 즉 $l\perp m$이 된다. 따라서 l은 점 O를 지나는 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l\perp\alpha$이다.

➤ $l\perp\alpha$임을 보이려면 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선이 l과 수직임을 보이면 된다.

예제9

오른쪽 정육면체에서 윗 면의 대각선 $\overline{\mathrm{AC}}$와 평면 BFHD가 수직임을 보이시오.



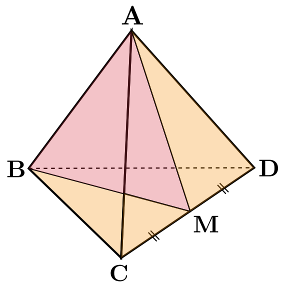
사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이다.

또한, $\overline{\mathrm{BF}} \parallel \overline{\mathrm{AE}}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AE}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BF}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}\perp$ (평면 BFHD)이다.

예제10

오른쪽 정사면체에서 모서리 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$임을 보이시오.



$\triangle$ACD가 정삼각형이고 점 M이 변 CD의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$이다. 또한, $\triangle$BCD가 정삼각형이고 점 M이 변 CD의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{BM}}$이다. 결국 직선 CD는 두 직선 AM, BM과 모두 수직이므로 두 직선이 만드는 평면 ABM과 수직이 된다. 따라서 직선 CD는 평면 ABM 위의 모든 직선과 수직이 되고, 평면 ABM 위의 직선 AB와도 수직이 된다.

2 삼수선의 정리

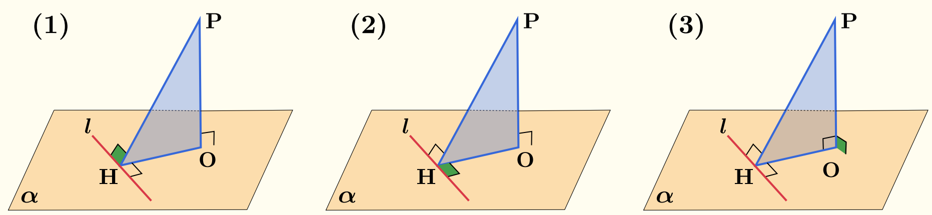
삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이다.

(3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{PO}} \perp l$, $\overline{\mathrm{P}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이다.



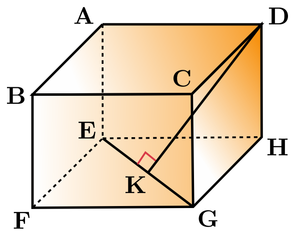
(1) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이면 직선 l이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}} \perp l$이다. 또한, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이므로 평면 PHO는 직선 l과 수직이다. 그런데 $\overline{\mathrm{PH}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이고, 직선 l이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}} \perp l$이다. 또한, $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이므로 평면 PHO는 직선 l과 수직이다. 그런데 $\overline{\mathrm{OH}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이다.

(3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이므로 평면 PHO는 직선 l과 수직이다. 그런데 $\overline{\mathrm{PO}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}} \perp l$이고, $\overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$이므로 직선 l과 $\overline{\mathrm{OH}}$는 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이다.

예제11

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AE}} = 2$, $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{5}$ 이라 하고, 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K 라고 할 때, 선분 DK의 길이를 구하시오.



$\overline{\mathrm{DH}}\perp$ 평면 EFGH, $\overline{\mathrm{DK}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HK}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이다. 이때, 삼각형 EGH의 넓이를 다음과 같이 두 가지 방법으로 구할 수 있다.

(1) $\triangle\mathrm{EGH} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{HG}} \times \overline{\mathrm{EH}} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$

(2) $\triangle\mathrm{EGH} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{EG}} \times \overline{\mathrm{HK}} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \overline{\mathrm{HK}}$

(1), (2)에서 $\overline{\mathrm{HK}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$임을 알 수 있다. 따라서 직각삼각형 DKH에서

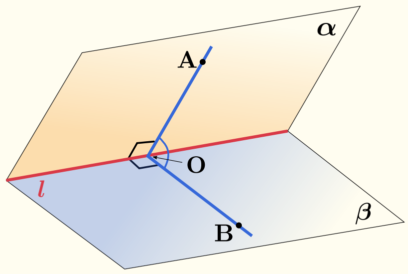
$$\overline{\mathrm{DK}} = \sqrt{\overline{\mathrm{DH}}^2 + \overline{\mathrm{HK}}^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{56}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{14}$$

이 된다.

이면각

(1) 이면각, 이면각의 변, 이면각의 면

오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라고 한다. 이때, 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 이면각의 면이라고 한다.



(2) 이면각의 크기

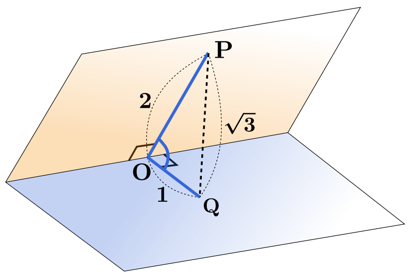
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다.

➤ 두 평면 α, β가 만드는 이면각의 크기 중에서 크지 않은 쪽을 두 평면이 이루는 각의 크기로 정한다. 따라서 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$이다.

➤ 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$일 때, 두 평면 α, β는 서로 수직이라고 하고 $\alpha \perp \beta$로 나타낸다.

예제12

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}} = 2$, $\overline{\mathrm{OQ}} = 1$, $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3}$ 일 때, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하시오.

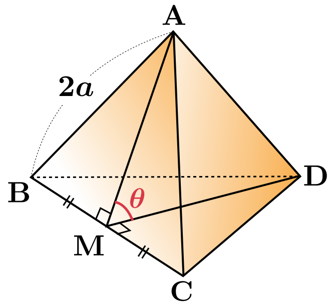


점 O를 지나는 두 평면의 교선을 l이라고 하면 $\overline{\mathrm{OP}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OQ}} \perp l$이므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기는 $\angle$POQ와 같고, $\triangle$POQ에서 $\overline{\mathrm{PO}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로 $\angle\mathrm{PQO} = \dfrac{\pi}{2}$이 된다. 이때, $\angle\mathrm{POQ} = \theta$라고 하면 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$가 된다.

따라서 두 평면이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

예제13

정사면체에서 두 면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



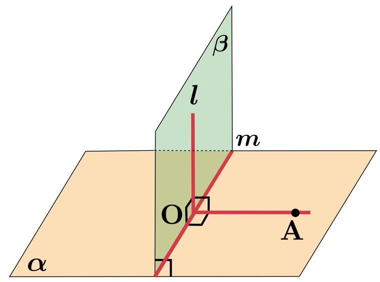
오른쪽 그림에서와 같이 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하자. 모서리 BC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{DM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\angle\mathrm{AMD}=\theta$이다.
또, $\triangle\mathrm{AMD}$에서 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{MD}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{DA}}=2a$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{MD}}^2-\overline{\mathrm{DA}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MD}}}=\frac{\left(\sqrt{3}a\right)^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2-(2a)^2}{2\times\sqrt{3}a\times\sqrt{3}a}=\frac{1}{3}$$

이 된다.

예제14

평면 α에 수직인 직선 l을 포함하는 평면을 β라고 할 때, $\alpha\perp\beta$임을 보이시오.



직선 l과 평면 α의 교점을 O라고 하고, 두 평면 α와 β의 교선을 m이라고 하자. 평면 α 위에서 점 O를 지나고 직선 m에 수직인 직선 OA를 그으면

$$\overleftrightarrow{\mathrm{OA}}\perp m,\quad l\perp m$$

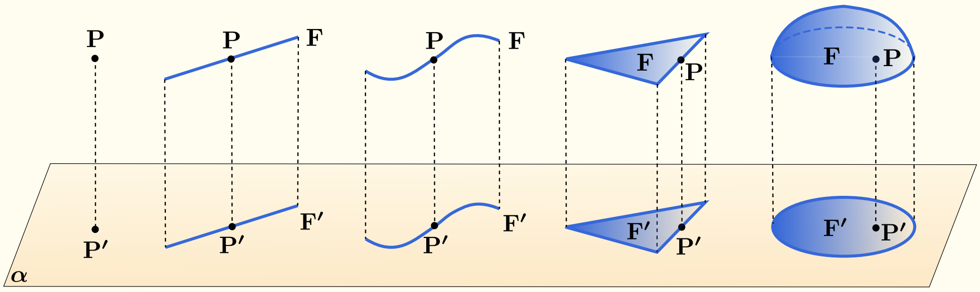
이므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기는 두 직선 OA와 l이 이루는 각의 크기이다. 그런데 $l\perp\alpha$이고, 직선 OA는 평면 α 위의 직선이므로 $l\perp\overleftrightarrow{\mathrm{OA}}$이다. 따라서 $\alpha\perp\beta$이다.

3 정사영

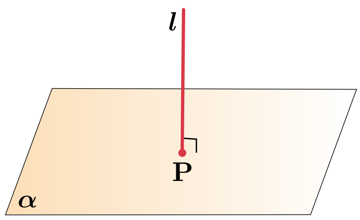
삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′를 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

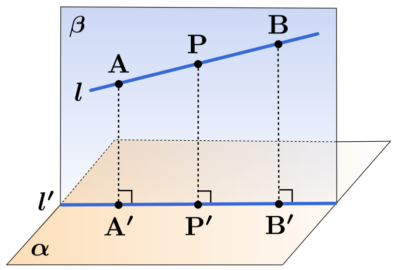
일반적으로 도형 F의 각 점에서 평면 α에 내린 수선의 발로 이루어진 도형 F′를 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



➤ 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 평면 α에 내린 정사영은 직선 l과 평면 α의 교점이 된다.

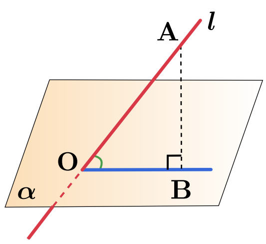


➤ 직선 l이 평면 α와 수직이 아닐 때, 직선 l 위에 있는 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′라 하면 $\overline{\mathrm{AA'}} \parallel \overline{\mathrm{BB'}}$이므로 두 직선 AA′, BB′는 한 평면 β를 결정하며, 이 평면 β는 평면 α와 수직이 된다. 이때, 직선 l은 평면 β 위에 있으므로 직선 l 위의 임의의 점 P의 평면 α 위로의 정사영 P′는 두 평면 α, β의 교선 l' 위에 놓이게 된다. 따라서 직선 l의 평면 α 위로의 정사영은 직선 l'이다.



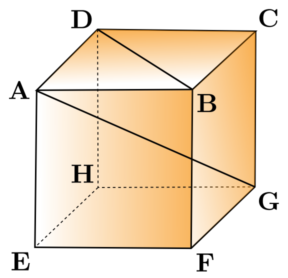
➤ 일반적으로 직선의 평면 위로의 정사영은 한 점 또는 직선이고, 다각형의 평면 위로의 정사영은 선분 또는 다각형이다.

➤ 직선 l과 평면 α가 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영 l'와 직선 l이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다. 즉, 직선 l과 평면 α의 교점을 O, 직선 l 위의 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B라고 할 때, $\angle\mathrm{AOB}$가 직선 l과 평면 α가 이루는 각이 된다.



예제15

오른쪽 그림과 같은 정육면체 ABCD – EFGH에 대하여 다음을 구하시오.



(1) 선분 AG의 평면 EFGH 위로의 정사영

(2) 선분 BD의 평면 AEFB 위로의 정사영

(3) 삼각형 BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영

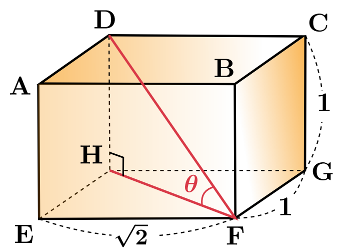
(1) 선분 EG

(2) 선분 AB

(3) 삼각형 EFH

예제16

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 대각선 DF가 밑면 EFGH와 이루는 각의 크기 θ를 구하시오.



$\overline{\mathrm{HF}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DF}} = 2$, $\angle\mathrm{DHF} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{6}$

정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

➤ $\overline{\mathrm{A'B'}}$는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 평면 α 위로의 정사영이므로

$$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\alpha,\quad \overline{\mathrm{BB'}}\perp\alpha,\quad \overline{\mathrm{AA'}} \parallel \overline{\mathrm{BB'}}$$

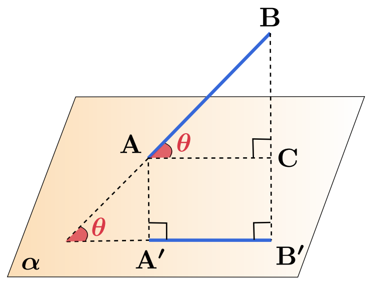
이다. 점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라고 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AC}},\quad \overline{\mathrm{A'B'}} \parallel \overline{\mathrm{AC}}$$

이다. 따라서 $\angle\mathrm{BAC} = \theta$이다. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이므로

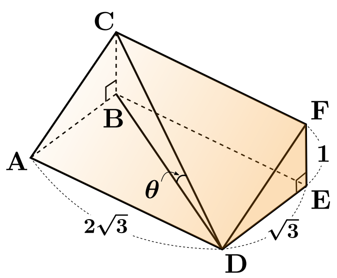
$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$$

가 된다.



예제17

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{EF}} = 1$이고, 두 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이 있다. $\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



$\overline{\mathrm{CD}}$의 평면 ABED 위로의 정사영이 $\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$가 된다.

$\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \left(\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2\right) = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 16 \quad \therefore \overline{\mathrm{CD}} = 4$

$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 15 \quad \therefore \overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{15}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

정사영의 넓이

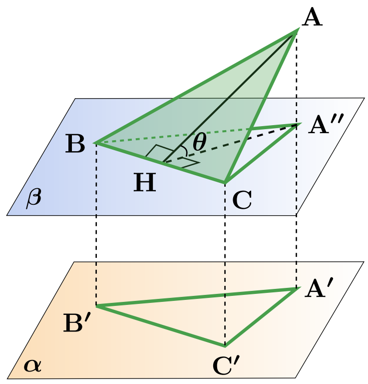
평면 α 위의 도형 F와 이 도형의 평면 β 위로의 정사영 F′의 넓이를 각각 S, S'라고 하고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 다음이 성립한다.

$$S' = S\cos\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 β라 하고, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때, 평면 β와 직선 AA′의 교점을 A″라고 하면, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{A''H}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이다. 따라서

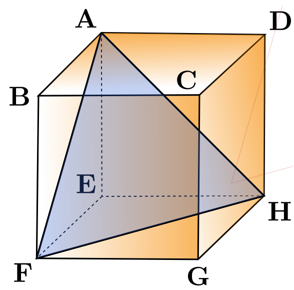
$$\begin{aligned} S' &= \triangle \mathrm{A'B'C'} = \triangle \mathrm{A''BC} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{A''H}} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{AH}} \times \cos\theta \\ &= S\cos\theta \end{aligned}$$

가 된다.



예제18

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 AFH와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



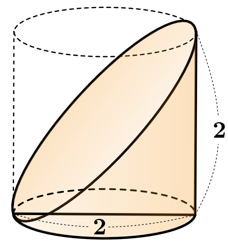
삼각형 AFH의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFH이므로 $\triangle\mathrm{EFH} = \triangle\mathrm{AFH}\cos\theta$이다. 정육면체의 한 모서리의 길이를 a로 놓으면 삼각형 AFH는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정삼각형이므로

$$\cos\theta = \frac{\triangle\mathrm{EFH}}{\triangle\mathrm{AFH}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이 된다.

예제19

오른쪽 그림과 같이 밑면의 지름과 높이가 모두 2인 원기둥을 잘라 부피가 절반이 되도록 하였다. 이때, 단면의 넓이를 구하시오.



단면의 넓이를 S', 밑면의 넓이를 S라고 하고, 단면을 포함하는 평면과 밑면을 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $S = S'\cos\theta$가 성립한다.

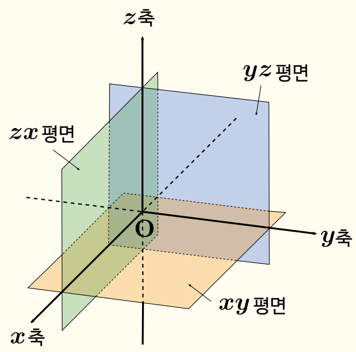
$$\therefore S' = \frac{S}{\cos\theta} = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi$$

1 점의 좌표

공간에서 점의 좌표

(1) 좌표축과 좌표평면

오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 점 O를 원점, 각각의 수직선을 x축, y축, z축이라 하고, 이 세 축을 좌표축이라고 한다. 또한

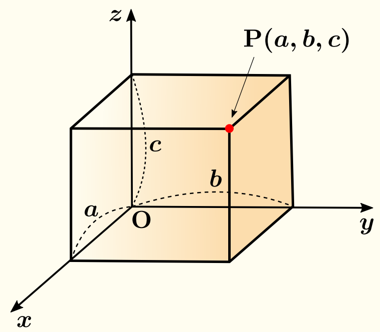


x축과 y축에 의하여 결정되는 평면을 xy평면
y축과 z축에 의하여 결정되는 평면을 yz평면
z축과 x축에 의하여 결정되는 평면을 zx평면

이라 하고, 이들을 좌표평면이라고 한다.

(2) 공간좌표와 좌표공간

공간에 있는 임의의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자. 이때, 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면, 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 정해진다. 역으로, 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 주어지면 공간의 한 점 P가 정해진다. 따라서, 공간의 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 사이에는 일대일대응의 관계가 성립한다.



이 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 점 P의 공간좌표 또는 좌표라고 하고, a, b, c를 차례로 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다. 점 P의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$$

와 같이 나타낸다. 이와 같이 임의의 점 P의 좌표가 주어진 공간을 좌표공간이라고 한다.

➤ xy평면은 $z=0$에서 z축과 수직으로 만나므로 xy평면 위의 모든 점의 z좌표는 0이다. 따라서 xy평면은 $z=0$으로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 yz평면은 $x=0$, zx평면은 $y=0$으로 나타낼 수 있다.

예제20

점 $\mathrm{P}(2,\ -4,\ 3)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 원점에 대하여 대칭인 점

(2) x축에 대하여 대칭인 점

(3) y축에 대하여 대칭인 점

(4) zx평면에 대하여 대칭인 점

(1) 점 $(x,\ y,\ z)$의 원점에 대한 대칭점의 좌표는 $(-x,\ -y,\ -z)$이므로 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 4,\ -3)$이다.

(2) 점 $(x,\ y,\ z)$의 x축에 대한 대칭점의 좌표는 $(x,\ -y,\ -z)$이므로 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 4,\ -3)$이다.

(3) 점 $(x,\ y,\ z)$의 y축에 대한 대칭점의 좌표는 $(-x,\ y,\ -z)$이므로 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ -4,\ -3)$이다.

(4) 점 $(x,\ y,\ z)$의 zx평면에 대한 대칭점의 좌표는 $(x,\ -y,\ z)$이므로 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 4,\ 3)$이다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

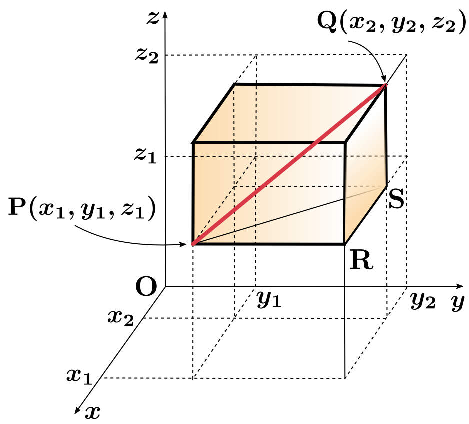
(1) 좌표공간의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$과 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(2) 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 선분 PQ가 세 좌표평면 중 어느 것과도 평행하지 않을 때, 선분 PQ를 대각선으로 하고, 각 면이 어느 한 좌표평면과 평행한 직육면체를 만들면



$$\overline{\mathrm{RS}} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{\mathrm{PR}} = |y_2 - y_1|$$
$$\overline{\mathrm{QS}} = |z_2 - z_1|$$

이때, 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \overline{\mathrm{PS}}^2 + \overline{\mathrm{QS}}^2 \\ &= \left(\overline{\mathrm{PR}}^2 + \overline{\mathrm{RS}}^2\right) + \overline{\mathrm{QS}}^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

이 성립한다. 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 세 좌표평면 중 어느 한 평면과 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

➤ 원점 O의 좌표는 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$이므로 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

가 된다.

예제21

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4,\ -3)$, $\mathrm{B}(-2,\ 3,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라고 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = (x-1)^2 + (0-4)^2 + \{0-(-3)\}^2 = x^2 - 2x + 26$$

$$\overline{\mathrm{BP}}^2 = (x+2)^2 + (0-3)^2 + (0-1)^2 = x^2 + 4x + 14$$

이다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이어야 하므로

$$x^2 - 2x + 26 = x^2 + 4x + 14$$

에서 $x = 2$임을 알 수 있다. 따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(2,\ 0,\ 0)$이다.

2 선분의 내분점과 외분점

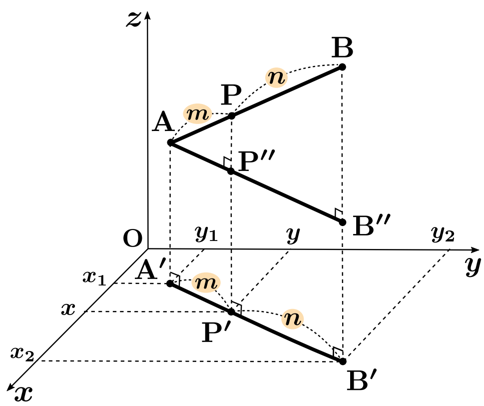
좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n\ (m > 0,\ n > 0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 하면 점 P, Q의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \quad (\text{단, } m \neq n)$$

➤ xy평면에 내린 세 점 A, B, P의 정사영을 각각 A', B', C'라고 하면 $\mathrm{A}'(x_1,\ y_1,\ 0)$, $\mathrm{B}'(x_2,\ y_2,\ 0)$, $\mathrm{P}'(x,\ y,\ 0)$이다. 두 선분 AB와 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$로 결정되는 평면 위에 점 A를 지나고 선분 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$에 평행한 직선을 그어서 두 선분 PP', BB'와 만나는 점을 각각 P'', B''라고 하면 $\triangle\mathrm{APP}''$와 $\triangle\mathrm{ABB}''$는 닮음이고



$$\overline{\mathrm{AP}''} = \overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}'},\quad \overline{\mathrm{P}''\mathrm{B}''} = \overline{\mathrm{P}'\mathrm{B}'}$$

이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}'} : \overline{\mathrm{P}'\mathrm{B}'} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$$

이다. 즉, 점 P'는 xy평면의 선분 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$를 $m : n$으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다. 마찬가지로 zx평면에 내린 정사영을 생각하면 점 P의 z좌표는

$$z = \frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

임을 알 수 있다.

예제22

삼각형 ABC에 대하여 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3,\ z_3)$일 때, 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

점 B와 점 C의 중점을 M이라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 점 A와 점 M을 $2:1$로 내분하는 점이다.

점 B와 점 C의 중점은 $\mathrm{M}\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2},\ \frac{z_2+z_3}{2}\right)$이므로 무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면

$$x=\frac{2\times\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$z=\frac{2\times\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

이다. 따라서 무게중심은 $\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다.

3 구의 방정식

구의 방정식

(1) 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

(2) 중심이 원점 O이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

➤ 공간에서 한 점 C로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구라고 한다. 이때, 점 C를 구의 중심, 일정한 거리를 구의 반지름의 길이라고 한다.

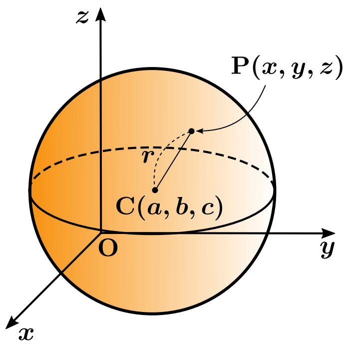
➤ 구 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

이 된다. 역으로, 이 방정식을 만족하는 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구 위에 있다. 따라서 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$은 구하는 구의 방정식이다.



➤ 구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

이다. 이때, $-2a=A,\ -2b=B,\ -2c=C,\ a^2+b^2+c^2-r^2=D$라고 하면 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 역으로, 위 식을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 이 식은 중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

예제23

중심이 $(1,\ 4,\ 0)$이고, 구 $x^2+y^2+z^2-6y+8z+23=0$에 외접하는 구의 방정식을 구하시오.

주어진 구의 방정식을 정리하면 $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=2$이다. 또한, 두 구의 중심 사이의 거리와 반지름들의 합이 같아야 하므로 구하는 구의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{2}+r$$

에서 $r=2\sqrt{2}$임을 알 수 있다. 따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-4)^2+z^2=8$$

이다.

예제24

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ -1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 1,\ 5)$를 지름의 양 끝점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.

선분 AB의 중점을 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$라고 하면

$$a=\frac{1+(-3)}{2}=-1,\quad b=\frac{3+1}{2}=2,\quad c=\frac{-1+5}{2}=2$$

이므로 구의 중심은 $\mathrm{C}(-1,\ 2,\ 2)$이다. 또, 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$$

이므로 구하는 구의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$$

이다.