11

합의 기호 $\sum$와 여러 가지 수열

예제 01

$\sum$의 계산

다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^3$의 값을 구하여라.

(2) $\sum_{k=1}^{10}a_k^2=15$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=5$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2$의 값을 구하여라.

접근 방법

$\sum$의 성질을 이용하여 두 개의 $\sum$ 기호를 하나로 정리합니다.

Bible

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

제n항까지 / 일반항 / 첫째항부터

상세 풀이

(1) $$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^3=\sum_{k=1}^{10}(k^3+3k^2+3k+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^3-3k^2+3k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^3+3k^2+3k+1)-(k^3-3k^2+3k-1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(6k^2+2)=6\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}2$$
$$=6\times\frac{10\times11\times21}{6}+2\times10=2330$$

(2) $$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^2+4a_k+1)-\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+4a_k+4)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{(4a_k^2+4a_k+1)-(a_k^2+4a_k+4)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(3a_k^2-3)=3\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=3\times15-3\times10=15$$

정답 ➡ (1) 2330 (2) 15

보충 설명

(2)의 경우 상세 풀이와 같이 두 개의 $\sum$ 기호를 하나로 합쳐서 계산하지 않고 각각의 $\sum$의 값을 구하여 답을 구할 수도 있습니다. 그러나 보통은 상세 풀이와 같이 푸는 것이 계산 과정이 줄어 들어 더 수월합니다.

예를 들어, (2)에서 상세 풀이와 같이 계산하면 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2$의 값만 필요하지만 각각의 $\sum$의 값을 구하는 경우에는

$$(\text{주어진 식})=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1-\left(\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4\right)$$
$$=4\times15+4\times5+1\times10-(15+4\times5+4\times10)=15$$

와 같이 $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값도 이용해야 합니다.

한편, 두 개의 $\sum$ 기호를 하나로 합칠 때에는 $\sum$의 첫째항과 끝항이 같은지 반드시 확인해야 합니다.

풀이집 p.212

숫자 바꾸기

01-1 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k+5)(k-2)-\sum_{k=1}^{10}(k-5)(k+2)$

(3) $\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+1)^3}{k}+\sum_{n=1}^{10}\frac{(n-1)^3}{n}$

(4) $\sum_{k=1}^{10}(2^k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)^2$

표현 바꾸기

01-2 다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)(a_k+1)=30$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)$가 $f(10)=50$, $f(1)=3$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=2}^{10}f(k-1)$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆ ◆보충 설명

01-3 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{6}\left(\sum_{l=1}^{4}kl\right)$

(2) $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k+1)\right\}$

(3) $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}ij\right)$

(4) $\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{j}(i+j)\right\}$

정답
01-1 (1) 3100 (2) 330 (3) 830 (4) $2^{13}-8$
01-2 (1) 15 (2) 47
01-3 (1) 210 (2) 275 (3) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$ (4) $\frac{n(n+1)^2}{2}$

11

예제 02

자연수의 거듭제곱의 합을 이용한 수열의 합

다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $1\times2,\ 3\times4,\ 5\times6,\ 7\times8,\ \cdots$

(2) $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ \cdots$

접근 방법

주어진 수열의 일반항을 구하여 합을 $\sum$로 나타낸 후 자연수의 거듭제곱의 합을 이용합니다.

Bible $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

상세 풀이

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=(2n-1)\times2n$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}2k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-2k)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k\\&=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}\end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

정답 ➡ (1) $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$ (2) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

보충 설명

(1)에서 주어진 수열은 두 수의 곱으로 이루어져 있는데 앞의 수로 이루어진 수열은 1부터 차례대로 홀수가 나열되어 있고, 뒤의 수로 이루어진 수열은 2부터 차례대로 짝수가 나열되어 있습니다. 이때, 앞의 수열과 뒤의 수열을 각각 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$이라고 하면 $p_n=2n-1$, $q_n=2n$이므로 주어진 수열의 일반항 a_n은 $a_n=(2n-1)\times2n$입니다.

(2)에서 주어진 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 자연수 전체의 집합에서

a_1 : 첫 번째 홀수인 1

a_2 : 첫 번째 홀수인 1부터 두 번째 홀수인 3까지의 홀수의 합

a_3 : 첫 번째 홀수인 1부터 세 번째 홀수인 5까지의 홀수의 합

⋮

a_n : 첫 번째 홀수인 1부터 n번째 홀수인 $(2n-1)$까지의 홀수의 합

$\therefore\ a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\dfrac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$

풀이집 p.213

숫자 바꾸기

02-1 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $1\times3,\ 2\times5,\ 3\times7,\ 4\times9,\ \cdots$

(2) $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \cdots$

표현 바꾸기

02-2 다음을 계산하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{99}\{(-1)^{n+1}\times n^2\}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=2}^{12}k+\cdots+\sum_{k=11}^{12}k+\sum_{k=12}^{12}k$

개념 넓히기 ★★☆

02-3 수열 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10}$이 10개의 자연수 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 순서를 바꾸어 늘어놓은 것일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(x_k-k)^2+\sum_{k=1}^{10}(x_k+k-11)^2$의 값은?

① 300 ② 310 ③ 320
④ 330 ⑤ 340

11

정답
02-1 (1) $\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ (2) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
02-2 (1) 4950 (2) 650 **02-3** ④

예제 03

수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하여라.

접근 방법

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어졌을 때 일반항을 찾는 문제로 생각할 수 있으므로

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$$

임을 이용합니다.

Bible 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$$

상세 풀이

주어진 식

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $n=1$일 때, $a_1=1\times2\times3=6$

$n\geq 2$일 때, ㉠에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)n(n+1) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$na_n=3n(n+1)$$

$$\therefore a_n=3(n+1)\ (n\geq 2) \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때, $a_1=6$은 ㉢에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n=3(n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{20} 3(k+1)=3\sum_{k=1}^{20} k+\sum_{k=1}^{20} 3=3\times\frac{20\times21}{2}+3\times20=690$$

정답 ➡ 690

보충 설명

수열의 합에서 일반항을 구하는 문제는 등차수열과 등비수열에서 했던 것처럼 n 대신 $n-1$을 대입하여 변끼리 빼서 a_n에 대한 식을 구합니다.

풀이집 p.214

숫자 바꾸기

03-1 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하여라.

(1) $\frac{a_1}{1}+\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=n^2$

(2) $na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n=n(n+1)(n+2)$

표현 바꾸기

◆ 보충 설명

03-2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값을 구하여라.

(2) $\sum_{n=1}^{100} na_n=500$, $\sum_{n=1}^{99} na_{n+1}=200$일 때, $\sum_{n=1}^{100} a_n$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

03-3 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$P_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$$

이라고 하자. $P_n=3^{n(n-1)}$일 때, $a_{100}=3^m$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 192 ② 194 ③ 196
④ 198 ⑤ 200

11

정답 **03-1** (1) 780 (2) 1260 **03-2** (1) 420 (2) 300 **03-3** ④

예제 04

계차수열

다음 수열의 일반항 a_n과 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구하여라.

(1) 2, 3, 6, 11, 18, $\cdots$　　　　(2) 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$

접근 방법

주어진 수열이 등차수열이나 등비수열이 아닌 경우에는 각 항 사이의 차를 구해 봅니다.

Bible 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k\ (n\geq 2)$

상세 풀이

(1) 주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$\begin{array}{l} \{a_n\} : 2,\ \ 3,\ \ 6,\ \ 11,\ \ 18,\ \cdots \\ \{b_n\} : \ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \ \cdots \end{array}$$

$$b_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$=2+2\times\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=n^2-2n+3$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}+3n=\frac{n(2n^2-3n+13)}{6}$$

(2) 주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$\begin{array}{l} \{a_n\} : 1,\ \ 3,\ \ 7,\ \ 15,\ \ 31,\ \cdots \\ \{b_n\} : \ \ 2,\ \ 4,\ \ 8,\ \ 16,\ \cdots \end{array}$$

$$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1} 2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

정답 ➡ (1) $a_n=n^2-2n+3$, $S_n=\dfrac{n(2n^2-3n+13)}{6}$　(2) $a_n=2^n-1$, $S_n=2^{n+1}-n-2$

보충 설명

계차수열을 이용하여 일반항을 구할 때, a_1에 계차수열의 제n항까지의 합을 더하는 것이 아니라 제$(n-1)$항까지의 합을 더하는 것임에 주의합니다. 또한 일반적으로 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k\ (n\geq 2)$를 이용하여 구한 일반항에 $n=1$을 대입하여 얻은 값은 a_1과 같으므로 $n=1$인 경우를 따로 확인하지 않아도 됩니다.

$$\begin{array}{l} a_1\quad a_2\quad a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}\quad a_n \\ \quad b_1\quad b_2\quad \cdots\quad b_{n-1} \end{array}$$

풀이집 p.216

숫자 바꾸기

04-1 다음 수열의 일반항 a_n과 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구하여라.

(1) 1, 2, 4, 7, 11, ⋯　　　　(2) 2, 3, 5, 9, 17, ⋯

표현 바꾸기

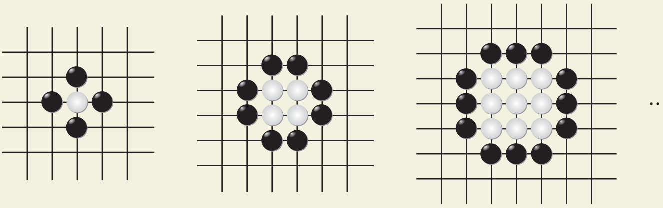
04-2 수열 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ⋯이

$$f(1)=1,\ f(n+1)-f(n)=2n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 같이 정의될 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆　　◆ 다른 풀이

04-3 10개의 바둑판에 다음 그림과 같은 규칙으로 차례대로 흰 돌과 검은 돌을 놓을 때, 10개의 바둑판에 놓인 흰 돌과 검은 돌의 개수의 총합을 구하여라.



정답 **04-1** (1) $a_n=\frac{n^2-n+2}{2}$, $S_n=\frac{n(n^2+5)}{6}$ (2) $a_n=2^{n-1}+1$, $S_n=2^n+n-1$

04-2 340　**04-3** 605

11

예제 05 분수 꼴로 주어진 수열의 합

다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\times3},\ \frac{1}{2\times4},\ \frac{1}{3\times5},\ \frac{1}{4\times6},\ \cdots$

(2) $\frac{1}{3^2-1},\ \frac{1}{5^2-1},\ \frac{1}{7^2-1},\ \frac{1}{9^2-1},\ \cdots$

접근 방법

분모가 두 수의 곱으로 이루어진 분수 꼴의 수열의 합은 일반항을 구하여 부분분수로 변형한 다음 합을 전개한 식에서 소거되는 항을 정리하여 구합니다.

Bible $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

상세 풀이

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

정답 ➡ (1) $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ (2) $\frac{n}{4(n+1)}$

보충 설명

다음과 같이 분모에 세 수 또는 세 식 이상이 곱해져 있는 분수도 두 부분분수의 차로 나타낼 수 있습니다.

$\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$ (단, $A\neq C$)

풀이집 p.217

숫자 바꾸기

05-1 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{2\times4}, \frac{1}{4\times6}, \frac{1}{6\times8}, \frac{1}{8\times10}, \cdots$

(2) $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \frac{1}{8^2-1}, \cdots$

(3) $\frac{1}{1\times2\times3}, \frac{1}{2\times3\times4}, \frac{1}{3\times4\times5}, \frac{1}{4\times5\times6}, \cdots$

(4) $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \frac{1}{1+2+3+4}, \cdots$

표현 바꾸기

05-2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+2n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

개념 넓히기 ★★☆

05-3 x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근을 α_n, β_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{10}{7}$

④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

11

정답

05-1 (1) $\frac{n}{4(n+1)}$ (2) $\frac{n}{2n+1}$ (3) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ (4) $\frac{2n}{n+1}$

05-2 (1) $\frac{n}{3(2n+3)}$ (2) $\frac{n}{n+1}$ **05-3** ④

예제 06 분모에 근호가 포함된 수열의 합

다음을 계산하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$

접근 방법

분모에 근호가 포함된 수열의 합은 일반항의 분모를 유리화한 후 합을 전개한 식에서 소거되는 항을 정리하여 구합니다.

Bible 분모에 근호가 포함된 수열의 합 ➡ 분모를 유리화!

상세 풀이

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}&=\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\\&=(\cancel{1}-0)+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})\\&=\sqrt{100}=10\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\dfrac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})\\&=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots\\&\qquad+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{47}})+(\sqrt{50}-\cancel{\sqrt{48}})\}\\&=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50})=3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

정답 ➡ (1) 10 (2) $3+2\sqrt{2}$

보충 설명

주어진 식의 모양에 따라 다음과 같이 분모를 유리화할 수 있습니다.

(1) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

(2) $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

(3) $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

풀이집 p.219

숫자 바꾸기

06-1 다음을 계산하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{16} \frac{3}{\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2}}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$

표현 바꾸기

06-2 함수 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}=6$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

06-3 양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=n^2 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{60} \frac{1}{a_k+a_{k+1}}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

정답
06-1 (1) $\frac{1}{2}(9-\sqrt{2}+3\sqrt{11})$ (2) 4 (3) $4\sqrt{2}$ (4) $\frac{9}{10}$
06-2 48 **06-3** ④

11

예제 07

(등차수열)×(등비수열) 꼴의 수열의 합

다음 수열의 합을 구하여라.

$$1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$$

접근 방법

주어진 수열은 등차수열 1, 3, 5, $\cdots$, $2n-1$과 등비수열 1, x, x^2, $\cdots$, x^{n-1}을 서로 대응하는 항끼리 곱하여 만든 수열의 합, 즉 멱급수이므로 수열의 합을 S라 하고

$S-$(등비수열의 공비)$\times S$

를 이용하여 수열의 합을 구합니다.

Bible 멱급수 ➡ $S-rS$를 계산한다.

상세 풀이

주어진 수열의 합을 S라고 하면

$$S=1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 x를 곱하면

$$xS=x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-1)x^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1} \\ -) & xS= & \quad\ \ x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-3)x^{n-1}+(2n-1)x^n \\ \hline & (1-x)S= & 1+2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^{n-1} \qquad -(2n-1)x^n \end{array}$$

(i) $x\neq1$일 때,

$$(1-x)S=1+(2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^{n-1})-(2n-1)x^n$$

$$=1+\frac{2x(1-x^{n-1})}{1-x}-(2n-1)x^n=\frac{1+x-2x^n}{1-x}-(2n-1)x^n$$

$$\therefore S=\frac{1+x-2x^n}{(1-x)^2}-\frac{(2n-1)x^n}{1-x}$$

(ii) $x=1$일 때, ㉠에 $x=1$을 대입하면

$$S=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$$

정답 ➡ $x\neq1$일 때 $\dfrac{1+x-2x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{(2n-1)x^n}{1-x}$, $x=1$일 때 n^2

보충 설명

위와 같이 공비가 문자로 주어진 경우에는 공비가 1이 아닌 경우와 1인 경우로 나누어 풀어야 합니다.

풀이집 p.220

숫자 바꾸기

07-1 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+n\times2^{n-1}$

(2) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$ (단, $x\neq1$)

표현 바꾸기

07-2 등식 $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = a+b\left(\frac{1}{2}\right)^n + cn\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$을 만족시키는 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

개념 넓히기 ★★☆

07-3 오른쪽과 같이 수를 나열할 때, 나열된 모든 수의 합은?

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & \\
 & 3^2 & & 3^2 & & 3^2 & \\
3^3 & & 3^3 & & 3^3 & & 3^3 \\
 & & & \vdots & & & \\
3^{10} & 3^{10} & 3^{10} & \cdots & 3^{10} & 3^{10} & 3^{10}
\end{array}
$$

① $\frac{1}{4}(21\times3^{11}-1)$ ② $\frac{1}{4}(21\times3^{11}+1)$
③ $\frac{1}{2}(21\times3^{11}+1)$ ④ $\frac{1}{4}(23\times3^{11}-1)$
⑤ $\frac{1}{2}(23\times3^{11}+1)$

정답

07-1 (1) $(n-1)2^n+1$ (2) $\frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

07-2 ② **07-3** ②

예제 08

정수로 이루어진 군수열

다음 수열의 첫째항부터 제150항까지의 합을 구하여라.

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \cdots$$

접근 방법

주어진 수열은

$$1\ /\ 1,\ 2,\ 1\ /\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1\ /\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\ /\ \cdots$$

과 같이 1과 1 사이에 2, 3, 4, ⋯ 을 기준으로 좌우 대칭을 이루면서 1씩 줄어드는 꼴입니다. 이때, 각 군의 합을 각각 A_1, A_2, A_3, A_4, ⋯라고 하면 제1군부터 제n군까지의 총합 S_n은 $S_n=\sum_{k=1}^{n} A_k$입니다.

Bible 군수열의 합은 각 군의 합을 수열로 만들어 푼다.

상세 풀이

주어진 수열을 군으로 묶으면

$$(1),\ (1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1),\ \cdots$$

이때, 제n군은 $(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n,\ n-1,\ \cdots,\ 3,\ 2,\ 1)$이므로 제$n$군의 항의 개수는 $2n-1$이고, 제n군에 속하는 항들의 합을 A_n이라고 하면

$$A_n=1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$$

한편, 제150항이 제n군에 속한다고 하면

$$\{\text{제}(n-1)\text{군까지의 항의 개수}\}<150\le(\text{제}n\text{군까지의 항의 개수})$$

이므로

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)<150\le1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

$$(n-1)^2<150\le n^2 \qquad \therefore n=13 \quad \leftarrow 12^2=144,\ 13^2=169$$

즉, 제150항은 제13군에 속하고 제12군까지의 항의 개수는 $12^2=144$이므로 제150항은 제13군의 6번째 항입니다.

따라서 구하는 합을 S라고 하면

$$S=\sum_{n=1}^{12} n^2+(1+2+3+4+5+6)=\frac{12\times13\times25}{6}+21=671$$

정답 ➡ 671

보충 설명

군수열 문제를 해결할 때 가장 중요한 것은 각 군의 항의 개수입니다. 몇 번째 항을 구하는 문제이든 어떤 수가 몇 번째 항인지를 구하는 문제이든 항상 각 군의 항의 개수를 이용하여 몇 번째 군에 속하는지를 찾습니다.

풀이집 p.221

숫자 바꾸기

◆ 보충 설명

08-1 다음 수열의 첫째항부터 제150항까지의 합을 구하여라.

$$1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 1,\ \cdots$$

표현 바꾸기

08-2 다음 물음에 답하여라.

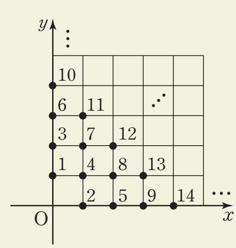
(1) 수열 $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \cdots$에서 제500항을 구하여라.

(2) 수열 $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, \cdots$의 첫째항부터 제100항까지의 곱이 2^m일 때, 자연수 m의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

◆ 보충 설명

08-3 오른쪽 그림과 같이 원점을 제외하고 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 모든 점 $(x,\ y)$에 자연수를 규칙적으로 대응시킬 때, 160에 대응되는 점의 좌표를 구하여라.



정답 **08-1** 418 **08-2** (1) 23 (2) 87 **08-3** (7, 10)

예제 09

분수 형태의 군수열

다음 수열의 제100항을 구하여라.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots$$

접근 방법

분모가 같은 수끼리 군으로 묶은 후 각 군의 규칙과 항의 개수를 파악합니다.

Bible 분수로 이루어진 군수열에서는 분모(또는 분자)가 같은 수끼리 묶거나 분자, 분모의 합이 같은 수끼리 묶는다.

상세 풀이

주어진 수열을 분모가 같은 수끼리 군으로 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \cdots$$

이때, 제n군은 $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right)$이므로 n개의 항으로 이루어져 있습니다.

한편, 제100항이 제n군에 속한다고 하면

{제$(n-1)$군까지의 항의 개수}$<100\leq$(제n군까지의 항의 개수)

이므로

$$1+2+3+\cdots+(n-1)<100\leq 1+2+3+\cdots+n$$

$$\frac{n(n-1)}{2}<100\leq\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore n=14 \quad \leftarrow \frac{13\times 14}{2}=91,\ \frac{14\times 15}{2}=105$$

즉, 제100항은 제14군에 속하고 제13군까지의 항의 개수는 $\frac{13\times 14}{2}=91$이므로

제100항은 제14군의 9번째 항입니다. ← 제14군 : 분모가 14, 9번째 항 : 분자가 9

따라서 제100항은 $\frac{9}{14}$입니다.

정답 ➡ $\frac{9}{14}$

보충 설명

예제 08에서와 같이 군수열의 합을 구할 때에는 각 군의 합을 항으로 하는 수열을 생각합니다.

이때, **예제 09**에서 주어진 수열의 제n군에 속하는 항들의 합 A_n은

$$A_n=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}=\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

이므로 이 수열의 첫째항부터 제91항(제1군부터 제13군)까지의 합은 $\sum_{k=1}^{13}A_k=\sum_{k=1}^{13}\frac{k+1}{2}=52$입니다.

풀이집 p.223

숫자 바꾸기

09-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\cdots$에서 제250항을 구하여라.

(2) 수열 $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$에서 제150항을 구하여라.

(3) 수열 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{1}$, $\cdots$에서 제65항을 구하여라.

표현 바꾸기

09-2 아래와 같이 주어진 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \cdots$$

(1) a_{200}의 값을 구하여라.

(2) $a_n=\frac{10}{23}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

09-3 수열 $\frac{1^2}{3}$, $\frac{1^2}{5}$, $\frac{2^2}{5}$, $\frac{1^2}{7}$, $\frac{2^2}{7}$, $\frac{3^2}{7}$, $\frac{1^2}{9}$, $\frac{2^2}{9}$, $\frac{3^2}{9}$, $\frac{4^2}{9}$, $\cdots$에서 첫째항부터 제45항까지의 합을 구하여라.

정답 **09-1** (1) $\frac{19}{22}$ (2) $\frac{4}{14}$ (3) $\frac{19}{2}$ **09-2** (1) $\frac{10}{11}$ (2) 506 **09-3** 55

11

예제 10

나머지로 정의된 수열

다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$에서 a_n을 7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지로 정의할 때, a_{2000}의 값을 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$에서 a_n을 3^n+4^n의 일의 자리의 숫자로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값을 구하여라.

접근 방법

지금까지 배웠던 수열의 꼴, 즉 등차수열이나 등비수열, 계차수열, 분수식, 무리식 꼴의 수열이 아닌 새로운 형태의 수열입니다. 이와 같은 새로운 형태의 수열은 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 나열한 후, 수열의 규칙성을 찾아 풉니다.

Bible 자연수의 거듭제곱에서 일의 자리의 숫자는 반드시 반복된다.

상세 풀이

(1) 7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지는 7^n의 일의 자리의 숫자와 같으므로 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 a_n을 구해 보면

$$a_1=7,\ a_2=9,\ a_3=3,\ a_4=1,\ a_5=7,\ a_6=9,\ a_7=3,\ a_8=1,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 7, 9, 3, 1이 순서대로 반복되는 수열이므로 $2000=500\times4+0$에서

$$a_{2000}=a_4=1$$

(2) 3^n과 4^n의 일의 자리의 숫자를 각각 b_n, c_n이라고 하면 3^n+4^n의 일의 자리의 숫자 a_n은 다음과 같습니다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
b_n	3	9	7	1	3	9	7	1	…
c_n	4	6	4	6	4	6	4	6	…
a_n	7	5	1	7	7	5	1	7	…

따라서 수열 $\{a_n\}$은 7, 5, 1, 7이 순서대로 반복되는 수열이므로 $50=12\times4+2$에서

$$\sum_{n=1}^{50} a_n=(7+5+1+7)\times12+7+5=252$$

정답 ➡ (1) 1 (2) 252

보충 설명

(2)와 같이 새로운 형태의 수열이 나오는 문제에서 합을 구하는 경우에는 일정한 주기마다 같은 값이 반복되는 규칙성이 있는 경우가 많으므로 먼저 규칙성을 찾도록 합니다.

풀이집 p.224

숫자 바꾸기

10-1 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$에서 a_n을 8^n을 10으로 나누었을 때의 나머지로 정의할 때, a_{4321}의 값을 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$에서 a_n을 2^n+9^n의 일의 자리의 숫자로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{100} a_n$의 값을 구하여라.

표현 바꾸기

10-2 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(n)$과 $g(n)$을 각각

$f(n)=(9^n$을 10으로 나누었을 때의 나머지$)$,

$g(n)=(8^n$을 10으로 나누었을 때의 나머지$)$

로 정의할 때, 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=f(n)-g(n)$이라고 하자. $\sum_{n=1}^{2002} a_n$의 값을 구하여라.

개념 넓히기 ★★☆

10-3 자연수 n에 대하여

$$n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$$

으로 정의할 때, $n!$을 10으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{1000} a_n$의 값을 구하여라.

11

정답 **10-1** (1) 8 (2) 500 **10-2** -2 **10-3** 13