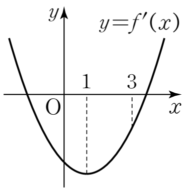
● 4회차

01 ③	02 ①	03 ④	04 ②	05 ①
06 ③	07 ③	08 ②	09 ③	10 ④
11 ①	12 ⑤	13 ④	14 ③	15 ②
16 ②	17 ②			

[서술형 1] (1) $f(x)=x^3-12x$ (2) 5
[서술형 2] 32
[서술형 3] $a=-\frac{3}{2}$, $f(3)=15$

01 $f(x)=x^3-3x^2+ax+1$에서
$f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$
함수 $f(x)$가 열린구간 $(0, 3)$에서 감소하려면 $0<x<3$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(3)=a+9\le 0$　　$\therefore a\le -9$
따라서 상수 a의 최댓값은 -9이다.

02 $f(x)=2x^3-8x^2+kx+2$에서
$f'(x)=6x^2-16x+k$
이때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 m을 가지므로
$f'(3)=0$, $f(3)=m$
$f'(3)=0$에서 $54-48+k=0$　　$\therefore k=-6$
즉 $f(x)=2x^3-8x^2-6x+2$이므로
$m=f(3)=54-72-18+2=-34$
$\therefore k+m=-6-34=-40$

03 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 ㈎에서 $3x^2+2ax+b=3x^2-2ax+b$이므로
$4ax=0$　　$\therefore a=0$
$\therefore f(x)=x^3+bx+c$, $f'(x)=3x^2+b$
조건 ㈏에서 $f'(-2)=0$, $f(-2)=11$이므로
$12+b=0$, $-8-2b+c=11$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $b=-12$, $c=-5$
즉 $f(x)=x^3-12x-5$에서
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	-21	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -21을 갖는다.

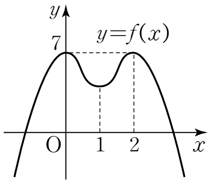
04 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$에서 $f'(x)=3x^2-6x+2$
이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$
$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=1$

05 $f(x)=x^3-15x^2+48x+65$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-30x+48=3(x-2)(x-8)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=8$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	8	$\cdots$	9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	65	↗	109	↘	1	↗	11

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 109, $x=8$에서 최솟값 1을 갖는다.
따라서 해수욕장을 방문한 사람의 수가 가장 많았을 때는 2시간이 지난 후이다.

06 조건 ㈎에서 $f(1+x)=f(1-x)$이므로 함수 $f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
또 조건 ㈏에서 $x=2$에서 극댓값 7을 가지므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극댓값 7, $x=1$에서 극솟값을 가지므로
$f'(0)=0$, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$, $f(0)=7$, $f(2)=7$
$f(x)$가 최고차항의 계수가 -1인 사차함수이므로
$f'(x)$는 최고차항의 계수가 -4인 삼차함수이다. 즉

$f'(x)=-4x(x-1)(x-2)=-4x^3+12x^2-8x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-4x^3+12x^2-8x)dx$

$=-x^4+4x^3-4x^2+C$

이때 $f(0)=7$이므로 $C=7$

따라서 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+7$이므로

$f(1)=-1+4-4+7=6$

오답 피하기

함수 $f(x)$에 대하여 $f(p-x)=f(p+x)$ (p는 실수)이면 함수 $f(x)$는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

07 $x^3-3x-a=0$에서 $x^3-3x=a$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=x^3-3x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 3개이어야 한다.

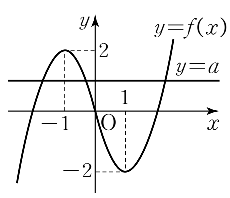
$f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 3개이려면



$-2<a<2$

따라서 정수 a는 $-1, 0, 1$로 그 개수는 3이다.

08 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=12t^3-48t=12t(t+2)(t-2)$

이때 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$12t(t+2)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 점 P가 운동 방향을 처음으로 바꾸는 시각은 $t=2$

09 $f(x)=\int(2x-1)^3(x+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-1)^3(x+1)$

$\therefore f'(2)=27\cdot 3=81$

10 $f(x)+g(x)=\int 2x\,dx+\int 3x^2\,dx$

$=\int(2x+3x^2)dx$

$=x^3+x^2+C$

11 $\int_{-1}^{3}(x^2-2x)dx-\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=\int_{-1}^{3}(x^2-2x)dx+\int_{3}^{2}(x^2-2x)dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{2}$

$=0$

12 $\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{4}(x^2-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{4}$

$=\frac{2}{3}+18=\frac{56}{3}$

13 $\int_{1}^{x}f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$의 양변에 $x=1$를 대입하면

$0=1-2a+a$ $\quad\therefore a=1$

즉 $\int_{1}^{x}f(t)dt=x^3-2x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+1$

$\therefore f(3)=27-12+1=16$

14 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)$$
$$=f(1)$$
$$=2-1+3=4$$

Lecture 정적분으로 정의된 함수의 극한

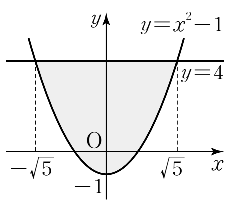
(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=f(a)$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

15 $x^2-1=4$에서 $x^2=5$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

즉 곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=4$의 교점의 x좌표는 $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\{4-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(-x^2+5)dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{5}}(-x^2+5)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+5x\right]_0^{\sqrt{5}}$$
$$=2\cdot\frac{10}{3}\sqrt{5}$$
$$=\frac{20}{3}\sqrt{5}$$

Lecture 정적분 $\int_{-a}^{a}x^n dx$의 계산

n이 자연수일 때, 정적분 $\int_{-a}^{a}x^n dx$에 대하여

(1) n이 짝수이면 $\int_{-a}^{a}x^n dx=2\int_0^a x^n dx$

(2) n이 홀수이면 $\int_{-a}^{a}x^n dx=0$

16 $f(x)=x^3+x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+1$

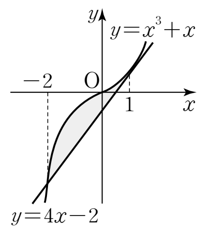
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-2=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x-2$

$x^3+x=4x-2$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=x^3+x$와 직선 $y=4x-2$의 교점의 x좌표는 $-2, 1$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{(x^3+x)-(4x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{27}{4}$$

17 ㄱ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=6$ 또는 $t=8$

즉 점 P는 운동 방향을 3번 바꾼다.

ㄴ. 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$$

시각 $t=6$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot2=-4$$

시각 $t=8$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^8 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2$$
$$=-2$$

시각 $t=9$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^9 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$
$$=-3$$

즉 점 P가 출발한 후 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 시각은 $t=6$이다.

ㄷ. 점 P가 출발한 후 $t=9$일 때까지 원점을 다시 지나는 순간은 1번 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

[서술형 1] (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)로 놓으면

$f(-x)=-f(x)$에서

$-x^3+ax^2-bx+c=-x^3-ax^2-bx-c$

이므로 $2ax^2+2c=0$ $\quad\therefore a=0,\ c=0$

$\therefore f(x)=x^3+bx,\ f'(x)=3x^2+b$

이때 $f'(2)=0$이므로

$12+b=0$ $\quad\therefore b=-12$

$\therefore f(x)=x^3-12x$

❶

(2) $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)\le0$에서 $3(x+2)(x-2)\le0$

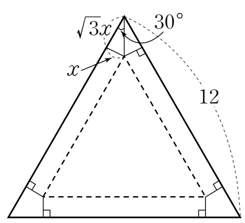
$\therefore -2\le x\le2$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2로 그 개수는 5이다.

❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	4점
❷ $f'(x)\le0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] 상자의 높이를 x라 하면 오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점과 자른 부분까지의 거리가



$x\tan60°=\sqrt{3}x$이다.

이때 $0<\sqrt{3}x<6$이므로

$0<x<2\sqrt{3}$

삼각기둥의 밑면의 한 변의 길이가 $12-2\sqrt{3}x$이므로 그 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2\sqrt{3}x)^2=3\sqrt{3}(2\sqrt{3}-x)^2$

따라서 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=3\sqrt{3}(2\sqrt{3}-x)^2\cdot x$

$\quad\ \ =3\sqrt{3}(x^3-4\sqrt{3}x^2+12x)$

❶

$\therefore V'(x)=3\sqrt{3}(3x^2-8\sqrt{3}x+12)$

$\qquad\qquad\ =3\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})(3x-2\sqrt{3})$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<x<2\sqrt{3}$)

x	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	32	↘	

즉 함수 $V(x)$는 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 최댓값 32를 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 32이다.

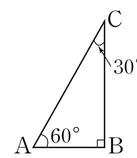
❷

채점 기준	배점
❶ 상자의 부피를 식으로 나타낼 수 있다.	4점
❷ 상자의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	3점

오답 피하기

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에 대하여 각 변의 길이의 비는

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:\sqrt{3}:2$



[서술형 3] $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$에서

$\int_1^x xf(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

❶

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+2ax$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3+2a$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

❷

따라서 $\int_1^x f(t)dt=3x^2-3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=6x-3$이므로

$f(3)=18-3=15$

❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 정리할 수 있다.	2점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	2점

오답 피하기

$\int_1^x xf(t)dt$에서 적분변수가 t이므로 x는 상수로 생각한다.

즉

$\frac{d}{dx}\int_1^x xf(t)dt=\frac{d}{dx}\left\{x\int_1^x f(t)dt\right\}$

$\qquad\qquad\qquad\quad=\int_1^x f(t)dt+xf(x)$