단원 ISSUE

이 단원에서는 **함수의 연속성을 판단하는 문제**가 자주 출제된다. 함수의 그래프 또는 주어진 함수식에서 좌극한, 우극한 그리고 함숫값이 동일한지를 판단하게 된다. 해당 과정에서 함수의 범위에 따라 함수식이 다르게 정의되어 있는 경우가 많으므로 연속성을 판단하는 과정에서 실수하지 않도록 한다.

평가문제

[스스로 마무리하기]

1. **모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^2-4)f(x)=2x^3+x^2-8x-4$을 만족시킬 때, $f(-2)+f(2)$의 값을 구하면?**

① 0
② 2
③ 4
④ 6
⑤ 8

[스스로 확인하기]

2. **다음 중 $x=-1$에서 연속인 함수는?**

① $f(x)=\sqrt{x}$

② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & (x\neq -1) \\ 2 & (x=-1) \end{cases}$

③ $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$

④ $f(x)=|x+1|$

⑤ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & (x\neq -1) \\ -3 & (x=-1) \end{cases}$

[스스로 확인하기]

3. **다음 중 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수를 <보기>에서 모두 고른 것은?**

<보기>

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & (x\neq 3) \\ 6 & (x=3) \end{cases}$

ㄴ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

ㄷ. $f(x)=x^2$

ㄹ. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

① ㄱ, ㄴ
② ㄴ, ㄷ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄷ, ㄹ
⑤ ㄴ, ㄹ

[스스로 마무리하기]

4. **함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x-5}{x-5} & (x\neq 5) \\ a & (x=5) \end{cases}$가 모든 실수 x에 대하여 연속일 때, 상수 a의 값을 구하면?**

① -3
② 0
③ 3
④ 6
⑤ 9

[스스로 확인하기]

5. **다음 중 $x=2$에서 연속인 함수는?**

① $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

② $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$

③ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2} & (x\neq 2) \\ -3 & (x=2) \end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & (x\geq 2) \\ 5x & (x<2) \end{cases}$

⑤ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2) \\ -4 & (x=2) \end{cases}$

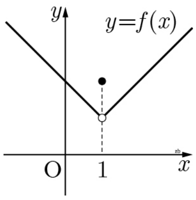
[스스로 확인하기]

6. 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+4x-5} & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{6}$
③ $\dfrac{1}{9}$ ④ $\dfrac{1}{18}$
⑤ $\dfrac{1}{36}$

[스스로 확인하기]

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $f(x)$가 $x=1$에서 불연속인 이유로 옳은 것은?



① 좌극한이 존재하지 않는다.
② 우극한이 존재하지 않는다.
③ 극한값이 존재하지 않는다.
④ 함숫값이 존재하지 않는다.
⑤ 극한값과 함숫값이 같지 않다.

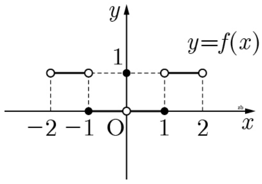
[스스로 마무리하기]

8. 다음 중 $x=3$에서 불연속인 함수는?

① $f(x)=2x^2+x+1$ ② $f(x)=\dfrac{1}{x}$
③ $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$ ④ $f(x)=\sqrt{x+5}$
⑤ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

[스스로 마무리하기]

9. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값의 개수를 a, $f(x)$가 불연속인 x의 값의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?



① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[스스로 마무리하기]

10. 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서
$f(x)=\begin{cases}4x & (0\leq x\leq 1)\\ x^2+ax+b & (1<x\leq 3)\end{cases}$ 로 정의되고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$를 만족시키는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(20)$의 값을 구하면? (단, a, b는 상수)

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[스스로 확인하기]

11. 함수 $f(x)=\begin{cases}2x+5 & (|x|<2)\\ x^2+ax+b & (|x|\geq 2)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-2,\ b=1$ ② $a=2,\ b=-1$
③ $a=2,\ b=1$ ④ $a=-2,\ b=-1$
⑤ $a=1,\ b=2$

[스스로 확인하기]

12. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^2-5x+6)f(x)=x^3+ax+b$를 만족시킬 때, $f(2)-f(3)$의 값을 구하면? (단, a, b는 상수)

① -1 ② 0
③ 1 ④ 2
⑤ 3

[스스로 확인하기]

13. 두 함수 $f(x)=x-1$과 $g(x)=x^2+x+1$에 대하여 불연속점이 존재하는 함수를 구하면?

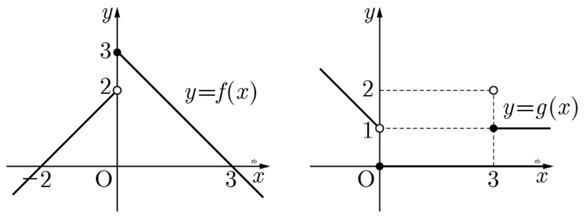
① $f(x)$ ② $g(x)$

③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

⑤ $f(x)g(x)$

[스스로 마무리하기]

14. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보기>
ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)\times \lim_{x\to 0-} g(x)=3$
ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ, ㄷ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[스스로 마무리하기]

15. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & (x<3) \\ x+2 & (x\ge 3)\end{cases}$, $g(x)=x+a$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② -1

③ 1 ④ 3

⑤ 5

[스스로 마무리하기]

16. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{7}{x+5}$의 최솟값을 a, 함수 $g(x)=\sqrt{2x+12}+3$의 최댓값을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 4 ② 5

③ 6 ④ 7

⑤ 8

[스스로 확인하기]

17. 방정식 $x^4-ax+1=0$이 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지기 위한 a의 범위를 구하면?

① $-2\le a$ ② $-2\le a\le 2$

③ $a\le -2$ 또는 $a\ge 2$ ④ $a<-2$ 또는 $a>2$

⑤ $a>2$

[스스로 확인하기]

18. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 $x=a$에서 연속일 때, $x=a$에서 반드시 연속이라 할 수 없는 함수를 모두 고르면?

① $7f(x)$ ② $f(x)+g(x)$

③ $f(x)-2g(x)$ ④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

⑤ $(f\circ g)(x)$

[스스로 확인하기]

19. 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^2+2x+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=32$일 때 상수 a의 값은?

① 7 ② 8

③ 9 ④ 10

⑤ 11

[스스로 확인하기]

20. 철수는 학교를 다녀오기 위하여 A 정류장을 출발하여 B 정류장에 정차한 후 다시 출발하여 C 정류장에 도착하였다. 이 버스가 A 정류장에서 B 정류장까지 갈 때와 B 정류장에서 C 정류장까지 갈 때의 최고 속력이 각각 시속 $70km$일 때, A 정류장에서 C 정류장으로 갈 때까지 이 버스의 속력이 시속 $35km$인 순간은 적어도 몇 번인지 구하면?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 확인하기]

21. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=2,\ f(3)=1$일 때 방정식 $x^2+1=x^2f(x)$의 실근은 $(0,\ 3)$에서 적어도 몇 개인지 구하면?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

22. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{5(x^3-8)}{(x^2-4)f(x)}=5$ 일 때, $f(2)$의 값을 구하면?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

23. 다항함수 $f(x)$가 $f(0)=k+1,\ \ f(1)=2k-3$을 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(0,\ 1)$에서 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

[스스로 마무리하기]

24. 다음 중에서 방정식 $x^3-2x^2-x+1=0$의 실근이 반드시 존재하는 구간을 모두 고르면?

① $(-3,\ -2)$
② $(-2,\ -1)$
③ $(-1,\ 0)$
④ $(0,\ 1)$
⑤ $(2,\ 3)$

[스스로 마무리하기]

25. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(-1)=1$, $f(1)=a^2-4a-1,\ f(2)=13$ 을 만족한다.
$f(x)-4x=0$이 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-1<a<5$
② $0<a<5$
③ $-1<a<0$
④ $a<-1$
⑤ $a<5$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

정답 및 해설

1) [정답] ②

[해설] 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{2x^3+x^2-8x-4}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)(2x+1)}{(x+2)(x-2)}=-3$

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{2x^3+x^2-8x-4}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)(2x+1)}{(x+2)(x-2)}=5$

2) [정답] ④

[해설] ① $f(x)=\sqrt{x}$ 는

$x=-1$에서 함숫값이 존재하지 않는다.

② $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1} & (x\neq-1)\\ 2 & (x=-1)\end{cases}$ 는

좌극한과 우극한이 같지 않다.

③ $f(x)=\frac{2}{x+1}$ 는

$x=-1$에서 함숫값이 존재하지 않는다.

⑤ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & (x\neq-1)\\ -3 & (x=-1)\end{cases}$ 는

극한값과 함숫값이 같지 않다.

3) [정답] ③

[해설] ㄴ. $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 는

$x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $f(x)=\frac{1}{x}$ 는

$x=0$에서 함숫값이 존재하지 않는다.

4) [정답] ④

[해설] $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-5}{x-5} & (x\neq5)\\ a & (x=5)\end{cases}$가

모든 실수에서 연속이므로

$\lim_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}=a$임을 알 수 있다.

따라서 $\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+1)}{x-5}=6=a$

5) [정답] ③

[해설] ③ $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-5)$

$=-3=f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

6) [정답] ⑤

[해설] 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+4x-5}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(x+5)(\sqrt{x+8}+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+5)(\sqrt{x+8}+3)}=\frac{1}{36}=a$

7) [정답] ⑤

[해설] 극한값과 함숫값은 존재하지만 같지 않다.

8) [정답] ③

[해설] ③ $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x-6}$은

$x=3$에서 함숫값이 존재하지 않는다.

9) [정답] ③

[해설] $x=0$일 때 극한값이 존재하지만

연속은 아니다. 그러므로 $a=2$, $b=3$

10) [정답] ④

[해설] 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이므로

$\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=4$ 에서

$1+a+b=4$

한편, $f(x)=f(x+3)$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=f(3)$이므로 $0=9+3a+b$,

두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x & (0\le x\le1)\\ x^2-6x+9 & (1<x\le3)\end{cases}$이고

$f(x)=f(x+3)$이므로

$f(20)=f(2)=4-12+9=1$

11) [정답] ③

[해설] $f(x)=\begin{cases}2x+5 & (|x|<2)\\ x^2+ax+b & (|x|\ge2)\end{cases}$에 대하여

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면

(ⅰ) $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$에서

$2\times(-2)+5=4-2a+b$, $2a-b=3$

(ⅱ) $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서

$9=4+2a+b$이므로 $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

12) [정답] ①

[해설] $(x^2-5x+6)f(x)=x^3+ax+b$에서

함수 $f(x)$가 연속이므로

$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)$, $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$임을 이용한다.

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$\lim_{x\to3}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)(x-3)}=f(3)$,

$\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)(x-3)}=f(2)$ 이므로

$\lim_{x\to3}(x^3+ax+b)=0$, $\lim_{x\to2}(x^3+ax+b)=0$ 이고

$x^3+ax+b=(x-2)(x-3)(x-\alpha)$라 하면

$\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)(x-\alpha)}{(x-2)(x-3)}=f(3)$ 이므로

$f(3)=3-\alpha$

$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)(x-\alpha)}{(x-2)(x-3)}=f(2)$ 이므로

$f(2)=2-\alpha$

그러므로 $f(2)-f(3)=2-\alpha-(3-\alpha)=-1$

13) [정답] ④

[해설] ④ $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x=1$에서 불연속이다.

14) [정답] ③

[해설] $\lim_{x\to0-}f(x)=2$, $\lim_{x\to0+}f(x)=3$, $f(0)=3$

$\lim_{x\to0-}g(x)=1$, $\lim_{x\to0+}g(x)=0$, $g(0)=0$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이고

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=0\neq\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=2$ 이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

15) [정답] ①

[해설] 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$f(3)=5$, $g(3)=3+a$이므로

$f(3)g(3)=15+5a$

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}(x+2)(x+a)$

$=15+5a$

$\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-5)(x+a)$

$=4(3+a)=12+4a$

따라서 $15+5a=12+4a$이므로 $a=-3$

16) [정답] ⑤

[해설] $[-2,\ 2]$에서 $f(x)=\frac{7}{x+5}$의 최솟값은

$x=2$일 때 $f(2)=1$ 이므로 $a=1$,

$g(x)=\sqrt{2x+12}+3$의 최댓값은

$x=2$일 때 $g(2)=7$ 이므로 $b=7$ 이다.

17) [정답] ④

[해설] 사잇값 정리에 의하여

$(1+a+1)(1-a+1)<0$

$(a+2)(-a+2)<0$

$(a+2)(a-2)>0$

그러므로 $a<-2$ 또는 $a>2$

18) [정답] ④, ⑤

[해설] ④ $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는

$f(a)=0$인 경우 함숫값이 존재하지 않는다.

⑤ $(f\circ g)(x)$ 는

$f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속인지 알 수 없다.

19) [정답] ①

[해설] $f(x)=x^2+2x+a$는 연속함수이므로

닫힌구간에서 최대, 최솟값을 갖는다.

$f(x)=(x+1)^2+a-1$이므로 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 $f(1)=a+3$은 최솟값, $f(3)=a+15$는 최댓값이다. 최솟값과 최댓값의 합이 32이므로

$2a+18=32$에서 $a=7$

20) [정답] ④

[해설] 버스가 A정류장을 출발한지 t초 후의 속력을 $f(t)$라고 하면 B정류장에 갈 때까지 걸린 시간이 a초일 때 $f(t)$는 $[0,\ a]$에서 연속이다.

이때 $f(t)=35$인 순간은 적어도 2번이다.

또한 B정류장에서 C정류장에 갈 때까지 걸린 시간이 b일 때에도 위 경우와 마찬가지로

$f(t)=35$인 순간은 적어도 2번이다.

그러므로 A 정류장에서 C 정류장으로 갈 때까지 $f(t)=35$인 순간은 적어도 4번이다.

21) [정답] ②

[해설] $g(x)=x^2+1-x^2f(x)$라 하면

$g(x)$는 연속함수이고,

$g(0)=1>0$, $g(1)=1+1-3=-1<0$

$g(2)=4+1-8<0$, $g(3)=9+1-9>0$

그러므로 $(0,\ 1)$에서 적어도 1개의 근을,

$(2,\ 3)$에서 적어도 1개의 근을 갖는다.

따라서 $x^2+1=x^2f(x)$은

$(0,\ 3)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

22) [정답] ③

[해설] $\lim_{x\to2}\frac{5\times(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)f(x)}=\frac{5\times12}{4\times f(2)}=5$

그러므로 $f(2)=3$

23) [정답] ②

[해설] 사잇값 정리에 의하여 $(k+1)(2k-3)<0$

이면 실근을 가지므로

$-1<k<\frac{3}{2}$을 만족하는 정수는 0, 1 이다.

따라서 $f(x)=0$이 열린구간 $(0,\ 1)$에서

실근을 갖도록 하는 정수 k의 값은 2개다.

24) [정답] ③, ④, ⑤

[해설] $f(x)=x^3-2x^2-x+1$이라 하면

$f(-3)=-27-18+3+1<0$

$f(-2)=-8-8+2+1<0$

$f(-1)=-1-2+1+1<0$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574

$f(0)=1>0$
$f(1)=1-2-1+1<0$
$f(2)=8-8-2+1<0$
$f(3)=27-18-3+1>0$
그러므로 $x^3-2x^2-x+1=0$은 열린구간
$(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$에서 실근을 갖는다.

25) [정답] ①
[해설] $g(x)=f(x)-4x$라 하면
함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$이
열린구간 $(-1,\ 1)$에서 각각 적어도 하나의
실근을 가지려면
$g(-1)g(1)<0$ 이어야 한다. 이때
$g(-1)=f(-1)+4=5$이므로
$g(1)<0$이어야 한다.
$g(1)=f(1)-4$
$=a^2-4a-5=(a-5)(a+1)<0$
에서 $-1<a<5$

I410-ECN-0199-2021-001-001401574