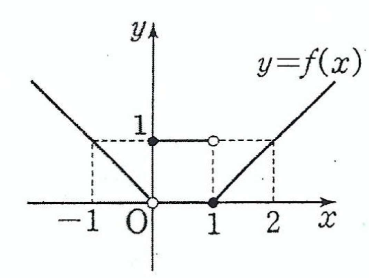
2021년 삼계고 수학2 중간고사

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 2+}f(x)-\lim_{x\to 0-}f(x)$의 값은? [4.2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. 등식 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-2x}=3$이 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [4.4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

3. $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$의 값은? [4.5점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4. 좌표평면 위의 점 $O(0,0)$, $A(-2,0)$, $B(-2,-2)$, $C(0,-2)$, $D(0,2)$과 점 $P(t,0)$ $(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 $OABC$의 넓이와 직각삼각형 DOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 기울기를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}f(t)$의 값은? [4.9점]

① $2-\sqrt{2}$ ② $3-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $3+\sqrt{2}$

5. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x+1<f(x)<x+2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{x^2+2}$의 값은? [4.4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4.6점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

7. 두 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=x^2+2$에 대하여 다음 함수 중 모든 실수에서 연속인 함수가 아닌 것은? (단, $f(x)$의 치역은 $g(x)$의 정의역에 포함된다.) [4.1점]

① $f(x)-g(x$ ② $f(x)g(x)$ ③ $2g(f(x))$ ④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ⑤ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

8. 좌표평면에 세 점 $O(0,0)$, $A(\sqrt{2},0)$, $B(0,\sqrt{2})$가 있다. 점 O를 중심으로 원 C의 반지름의 길이가 t일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수인 원 C위의 점 P의 개수를 함수 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.) [4.8점]

<보기>

ㄱ. $f(1)=4$

ㄴ. $a>0$인 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a-}f(t)\neq\lim_{t\to a+}f(t)$를 만족하는 a는 자연수이다.

ㄷ. $a>0$인 실수 a에 대하여 $2f(a)=\lim_{t\to a-}f(t)+\lim_{t\to a+}f(t)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

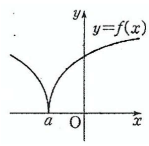
9. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=a$, $f(1)=a-4$일 때, 방정식 $f(x)=3$의 실근이 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재하도록 하는 정수 a를 모두 더한 값은? [4.7점]

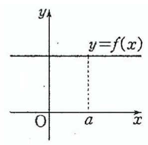
① 12 ② 15 ③ 18 ④ 22 ⑤ 25

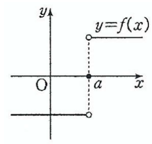
10. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(3)=4$일 때, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [4.3점]

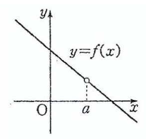
① -12 ② -10 ③ 4 ④ 10 ⑤ 12

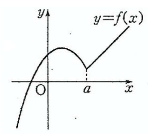
11. 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프 중 $x=a$에서 미분 가능한 것은? [4.0점]

①


②


③


④


⑤


12. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-x & (x\le 1) \\ ax^2+b & (x>1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 상수 a,b에 대하여 $b-a$의 값은? [4.5점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

13. 두 함수 $f(x)=x^3+2x+3$, $g(x)=x^2+x$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$일 때, $h'(0)$의 값은? [4.3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

14. 함수 $f(x)=x(x^2+ax+a)$가 역함수를 갖도록 하는 정수 a를 모두 더한 값은? [4.7점]

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 10 ⑤ 15

15. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수 $f(x)=-x^3+9x$,

$g(x)=\begin{cases} mx-\dfrac{2}{m^3} & (x<0) \\ -\dfrac{6}{m}x-\dfrac{2}{m^3} & (x\ge 0)\end{cases}$ 이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

<보기>

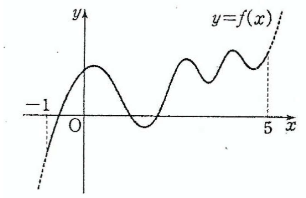
ㄱ. $m=1$일 때, $h(1)=-8$
ㄴ. $m=1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 4이다.
ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 음수 m의 최댓값은 -1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 점 $(2,0)$을 지나고 곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4.8점]

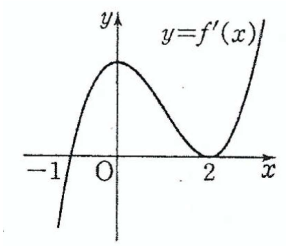
① $\frac{123}{2}$ ② 62 ③ $\frac{125}{2}$ ④ 63 ⑤ $\frac{127}{2}$

17. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 닫힌구간 $[-1,5]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 개수는? [4.2점]



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

18. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은? [4.1점]



① $(-\infty,-1]$ ② $(-\infty,2]$ ③ $[-1,2]$
④ $[-1,\infty)$ ⑤ $[2,\infty)$

19. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-24x+5$의 극댓값은? [4.6점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 38

20. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.0점]

<보기>

ㄱ. $f(x)=-x^3+x$이면 $g(t)=3$이기 위한 실수 t의 범위는 $-2<t<2$이다.

ㄴ. $f(x)=x^3-6x^2+11x+1$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수가 아니면, $t=a$에서 불연속이 되는 실수 a의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[논술형 1~3] 두 함수 $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$에 관한 물음에 답하시오.

[논술형1] 연속의 정의를 이용하여 두 함수의 $x=0$에서의 연속성을 판단하고 그 이유를 논술하시오. [4.0점]

[논술형2] 미분계수의 정의를 이용하여 두 함수의 $x=0$에서의 미분가능성을 판단하고 그 이유를 논술하시오. [4.0점]

[논술형3] 위의 두 결과를 토대로 미분가능성과 연속성의 관계에 대해 논술하시오. [2.0점]

1) ④

2) ④

3) ①

4) ②

5) ②

6) ②

7) ⑤

8) ④

9) ②

10) ⑤

11) ②

12) ①

13) ④

14) ③

15) ③

16) ③

17) ⑤

18) ①

19) ③

20) ⑤

21) [논술형1]

(1) 함수 $f(x)$의 연속성

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0$이고 $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} x = 0$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$이다. 또한, $f(0) = 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

(2) 함수 $g(x)$의 연속성

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$이고 $g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

22) [논술형2]

(1) 함수 $f(x)$의 미분가능성

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$이므로

$x = 0$에서의 미분계수 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 미분가능하지 않다.

(2) 함수 $g(x)$의 미분가능성

$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0+} x = 0$, $\lim_{x \to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0-} x = 0$ 이므로

$x = 0$에서의 미분계수 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ 이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 미분가능하다.

23) [논술형3]

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이다. 그러나 역은 성립하지 않는다.