2016 / 11 / 27 (일) (1)

양자 역학 에서 continuity equation.

양자 역학 에서 globally conserved 되는 quantity 는

어느 곳에서든 입자를 발견할 total 확률이다.

증명을 위해서 고전적인 입장에서 continuity equation 과

양자 역학 에서 continuity equation 이 어떻게 해석되냐를

기술해 보자.

고전 적으로 우주 전체의 전하는 고정되어 있다. 보존되어 있다.

$Q(t) = \text{constant}$. , independent of t.

이것이 global conservation law 의 한 예이다.

전하는 또한 역시 local 하게도 conserved 된다.

사실 • continuity equation 이 말하는 것이 그것이다.

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}.$$

ρ, $\vec{J}$ charge and current density.

이 식을 공간에 대해 적분하면

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, d^3\vec{r} \underset{\text{Gauss' law.}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}.$$

이식의 의미는 어떤 볼륨 V 안의 전하의 감소는

전하가 그 공간으로 부터 빠져나 간다는 것을 의미한다.

전하가 새롭게 생성되거나 사라지는 것이 아니다.

이러한 continuity equation 은 입자가 한 공간에서 갑자기

사라졌다가 다른 공간에 즉시 나타나는 것과 같은 global conservation을

금지한다.

양자 역학 에서는 globally conserved 되는 quantity 는

우주 어디서든 입자를 발견할 total 확률이다.

이것은 파동함수의 norm 이 불변함을 통해서 증명할 수 있다.

$$\langle \psi(t) \mid \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) \mid U^{+}(t)\, U(t) \mid \psi(0) \rangle$$

$$= \langle \psi(0) \mid \psi(0) \rangle$$

즉 $\langle \psi(t) \mid \psi(t) \rangle =$ constant 이다 이것의 의미는.

$$\text{constant} = \langle \psi(t) \mid \psi(t) \rangle = \iiint \langle \psi(t) \mid x, y, z \rangle \langle x, y, z \mid \psi(t) \rangle\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int \langle \psi(t) \mid \vec{r} \rangle \langle \vec{r} \mid \psi(t) \rangle\, d^3\vec{r}$$

$$= \int \psi^*(\vec{r}, t)\, \psi(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r}$$

$$= \int P(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r}.$$

식에서 알수 있듯이 보존되는것은 어느 공간에 입자를 발견할 확률이다.

그럼 Schrödinger equation 을 통해서 continuity eq 이

양자 역학적으로 어떻게 표현되는지 확인해 보자.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi.$$

이 Schrödinger eq 을 conjugate 하면

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*.$$

양식에 ψ^* 와 ψ 를 곱해서 빼면,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\psi^*\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*) = -\frac{\hbar}{2mi}\vec{\nabla}\cdot\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right).$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right).$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}P(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}.$$

즉 $\vec{J}$ 확률 전류 밀도는 $\vec{J}$ 에 수직한 단위 면적 당 단위시간당 확률 flow 이다.

global conserved 를 확인하기 위해 전체공간에 대해 적분해 보면

$$\frac{\partial}{\partial t}\int P(t,\vec{r})\,d^3\vec{r} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,d^3\vec{r} = -\int_S \vec{J}\cdot dS$$

전형적인 파동함수는 (normalized to 1 되는)

$\vec{r} \to \infty$ 으로 감에 따라 $r^{3/2}\psi \to 0$.

surface integral of $\vec{J}$ on S vanishes.

반면 momentum eigenfunction 은 S_∞ 에서 사라지지 않는다.

$\boxed{\text{확률 전류 밀도의 해석.}}$

$\vec{J}\cdot d\vec{S}$ 는 rate 인데 단위면적 dS 를 지나는 확률 흐름이다.

만약 우리가 어떤 상태 $\psi(\vec{r},t)$ 에 있는 N개의 particle 의 ensemble 을 생각할때 $N\vec{J}\cdot d\vec{S}$ particle 이 입자 detector (dS 면적에 시간당)에 검출된다. N은 무한대 이고 $\vec{J}$ 는 $\psi(\vec{r},t)$ 와 관련된 전류라 가정할때.