collection Lycée – voie générale et technologique
série Accompagnement des programmes

Mathématiques

classes de première des séries générales

Ministère de l'Éducation nationale
Direction de l'Enseignement scolaire

Centre national de documentation pédagogique

Ce document a été rédigé par le groupe d'experts sur les programmes scolaires de mathématiques.

Présidente

Claudine ROBERT
professeure des universités, université Joseph-Fourier de Grenoble

Membres

Pierre ARNOUX
professeur des universités, Institut de mathématiques de Luminy (CNRS) et université de la Méditerranée

Gilles GODEFROY
directeur de recherche, CNRS-université Paris-VI

Nicolas ROUCHE
professeur émérite, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Belgique

Antoine BODIN
professeur, expert de l'OCDE, spécialiste de l'évaluation des compétences en mathématiques

Françoise CELLIER
professeure, lycée Charlemagne de Paris

Philippe CLAROU
professeur, IUFM de Grenoble

André LAUR
professeur, lycée E.-Mounier de Grenoble

Jean-Paul QUELEN
professeur, lycée J.-Monnet de Strasbourg

Johan YEBBOU
professeur en CPGE, lycée Charlemagne de Paris

Jean MOUSSA
inspecteur général de l'Éducation nationale

Erick ROSER
IA-IPR, académie de Poitiers

Consultante pour les technologies de l'information et de la communication
Anne HIRLIMANN, experte auprès de la SDTETIC (direction de la Technologie)

Coordination et suivi éditorial
Jérôme GIOVENDO, bureau du contenu des enseignements (direction de l'Enseignement scolaire)

Suivi éditorial : Magali Flori
Maquette de couverture : Catherine Villoutreix
Maquette : Fabien Biglione
Mise en pages : Michelle Bourgeois

ISBN : 2-240-00756-7
ISSN : 1624-5393

Sommaire

Préambule 5

Classe de première ES

Orientations générales 9
- Un apprentissage actif 9
- Expression et raisonnement 10
- Importance de l'acquisition de quelques automatismes 10
- L'aide des outils de calcul 10

À propos du titre « Traitement des données et probabilités » 11
- Pourcentages 11
- Nature des données 11
- Effets de structure 12
- Diagrammes en boîtes 13
- Étude fréquentielle de tableaux à double entrée 13
- Loi de probabilité 14
- Modélisation d'expériences de référence 15
- Modélisation à partir de fréquences 15
- Simulation 16
- Cahier de statistique 16

À propos du titre « Algèbre et analyse » 17
- Algèbre 17
- Généralités sur les fonctions 17
- Tableau des variations d'une fonction 17
- Dérivation 18
- Limites et comportement asymptotique 18

À propos de l'option 20
- Compléments sur les fonctions 20
- Géométrie dans l'espace 21
- Calcul matriciel 24

Classe de première L

Orientations générales 31

Le chapitre « Information chiffrée » 32
- Pourcentages 32
- Feuilles automatisées de calcul 32

Représentations graphiques 33
Arbres et diagrammes 33
Le chapitre « Statistique » 34
Le chapitre « Exemples de types de croissance » 36
Le chapitre « Activités d'ouverture » 38
Annexe : À propos des données gaussiennes 39

Classe de première S

Orientations générales 45
À propos d'une formation scientifique en première et terminale S : des exemples 47
À propos de la démonstration 50
Mémorisation et automatismes 54
Organisation et évaluation 56
L'organisation du travail des élèves 56
Le problème de l'évaluation 57
À propos des items du programme 58
Géométrie dans l'espace 58
Angles orientés et repérage polaire 58
Barycentre 59
Produit scalaire dans le plan 59
Transformations 60
Lieux géométriques 60
Généralités sur les fonctions 60
Dérivée 61
Méthode d'Euler 63
Limites et comportement asymptotique 65
Fonctions disponibles pour la classe terminale 65
Suites 66
Statistique et probabilités 66
Annexe 1 : Statistique et probabilités 67
Annexe 2 : Lieux géométriques dans le plan 75
Annexe 3 : Exemples de suites 80

Annexe commune aux séries ES, L et S

Boîtes et quantiles 83

Préambule

Ce fascicule regroupe les documents d'accompagnement des programmes de première S et ES, applicables à partir de septembre 2001 et du programme de première L, appliqué à la rentrée 2000.
Les trois séries abordent les mathématiques sous des angles différents ; une lecture comparative des trois documents, au-delà des contenus, pourra permettre de saisir ces différences ainsi que les fondements mathématiques communs, tant culturels que techniques. Cependant, les exemples traités dans une série pourront éventuellement être source d'activités dans une autre.
Ces documents d'accompagnement visent à éclairer l'esprit dans lequel ont été rédigés les programmes sans pour autant en donner un protocole d'application ni une ligne de conduite unique : les acteurs participant à l'enseignement ont pour mission de transformer le programme en séquences d'enseignement. Cette tâche est difficile ; elle l'est d'autant plus que les élèves de première auront eu un cursus mathématique différent de celui des élèves des années antérieures. Promouvoir un enseignement de mathématiques adapté aux élèves d'aujourd'hui, qui tout à la fois forme l'esprit de tous et prépare à des études supérieures : tel est le défi que la communauté mathématique doit relever et que ces documents souhaitent soutenir.
Le cédérom joint à ce document contient, entre autres, les programmes et les documents d'accompagnement de seconde et première, des animations relatives aux programmes des classes de première, ainsi que les programmes des classes terminales applicables à la rentrée 2002. On y trouvera par ailleurs des activités mettant en œuvre les technologies de l'information et de la communication.

Classe de première ES

Orientations générales

Les objectifs de l'enseignement des mathématiques en classe de première ES figurent de façon détaillée dans le programme publié dans le *BO* hors série n° 8 du 31 août 2000. Le paragraphe 4 précise les domaines mathématiques à traiter en première ES : les deux premières colonnes (contenus et modalités de mise en œuvre) s'imposent à chacun, la troisième fournit quelques commentaires que le présent document vient compléter.
L'objectif de ce document d'accompagnement est d'aider à la compréhension du texte du programme et d'illustrer par des exemples les objectifs visés sur certains points particuliers. Il a pour fonction de faciliter les échanges et de permettre des régulations entre les acteurs concernés par l'application du programme ; une trop grande directivité, qui irait à l'encontre du maintien de l'espace de liberté pédagogique laissé à l'enseignant, n'est pas souhaitable. Il n'est bien sûr pas obligatoire de traiter les exemples et exercices proposés : ceux-ci peuvent être remplacés par d'autres situations relevant du même esprit.
Ce document prend en compte les résultats de la consultation du dernier trimestre 2000 sur les programmes de première et explicite certains items ; il sera mis à jour et complété en ligne, sur le site Eduscol (www.education.eduscol.fr). En effet, si les exégèses d'un programme convergent au bout d'un certain temps, ce n'est pas le cas lors de sa parution (sauf à transformer le programme en libellé d'un protocole éducatif strictement technique) ; le document d'accompagnement permettra un recentrage par rapport aux diverses interprétations et fera ainsi office d'outil de régulation de la mise en œuvre du programme.

Comme indiqué en introduction du programme, il a été choisi de proposer un enseignement de mathématiques consistant et adapté à la spécificité de la série ES.
On a donc privilégié quelques outils indispensables au traitement mathématique de l'information chiffrée ; d'où les deux grands titres fédérant les diverses notions abordées dans la partie obligatoire du programme : traitement des données et probabilités, d'une part, algèbre et analyse, d'autre part.

Il est conseillé de prévoir un tiers de l'horaire annuel sur le titre « *Traitement des données et probabilités* » et deux tiers sur « *Algèbre et analyse* ».

Pour l'option, les thèmes abordés sont relativement indépendants de la partie obligatoire ; ils sont en revanche partiellement corrélés à ceux de la spécialité de terminale : l'élève désirant choisir la spécialité « mathématiques » en terminale aura donc intérêt à suivre l'option de première (une telle position est cohérente avec le souci de responsabiliser les élèves dans leur choix de formation : la première n'est plus une classe d'orientation et il est normal que les choix faits pour la classe de première aient une incidence jusqu'en terminale).

Un apprentissage actif

Le passage à l'abstraction mathématique présente parfois quelques difficultés pour les élèves de cette section : il importe donc de veiller au caractère progressif et actif de l'apprentissage proposé à chaque élève. Questions et exemples seront systématiquement utilisés pour introduire les nouveaux concepts. Ces concepts seront alors mis en œuvre dans des exercices et problèmes qui en montreront la portée.

Expression et raisonnement

Les résultats acquis (théorèmes, techniques opératoires, etc.) seront clairement énoncés et leur statut explicité (admis ou démontré). On veillera à la qualité des raisonnements effectués. Dans le champ mathématique, les modalités du raisonnement sont variées ; la plupart ne sont pas propres aux mathématiques : formulation des questions et argumentation logique se retrouvent ainsi dans la dissertation en français, en philosophie et lors de travaux en enseignement scientifique. Par ailleurs, dans toutes les disciplines, c'est la même langue que l'on utilise, avec ses règles syntaxiques, ses mots de liaison logique ; à ce titre, le professeur de mathématiques participe au travail de maîtrise de la langue française, tout particulièrement de la syntaxe, et il importe que les élèves en aient conscience.

Importance de l'acquisition de quelques automatismes

Qu'il soit numérique, algébrique ou vectoriel, le calcul est une activité qui, dans sa diversité, est assez spécifique des mathématiques et sa pratique régulière est indispensable pour progresser. Calculs simples et règles opératoires mués en automatismes libèrent la pensée, facilitent la compréhension et permettent de se consacrer à d'autres tâches. La pratique régulière et individuelle des calculs que l'on peut faire à la main est une part indispensable et un moyen irremplaçable d'accéder à une bonne compréhension. Il ne s'agit pas de rechercher la virtuosité : calculatrices et ordinateurs ont rendu cet objectif inutile. Il ne suffit pas pour autant d'obtenir des résultats sur une machine : il faut d'abord anticiper un calcul, au moins dans sa forme, pour percevoir l'intérêt de sa mise en œuvre, puis savoir interpréter les résultats, juger de leur validité et de leur limite.

L'aide des outils de calcul

La mise en œuvre anticipée du programme de seconde dans une vingtaine de lycées durant l'année 1999-2000 a confirmé le grand intérêt de l'usage d'outils logiciels (ordinateurs et calculatrices) pour faciliter l'approche et l'assimilation de certains concepts. D'où, entre autres, les invitations nombreuses du programme à utiliser ces outils : l'expérience et la généralisation d'une telle pratique devraient permettre d'en tirer tout le bénéfice attendu.
Les derniers développements des calculatrices laissent présager un accès banal à des logiciels de calcul formel. Il s'agit de bien les intégrer à l'ensemble de la démarche d'apprentissage. Sans qu'ils détournent de l'entraînement nécessaire à la maîtrise des calculs les plus courants, ils peuvent représenter un moyen précieux de vérification pour des élèves conduisant encore difficilement sans erreurs un calcul élaboré.

À propos du titre « Traitement des données et probabilités »

Le choix a été fait de donner, pour la série ES, un rôle important aux séries chronologiques, particulièrement fréquentes dans les cours d'économie ; on veillera cependant à ce que les questions et exemples traités mènent à une réflexion conceptuelle, ce qui constitue une bonne préparation à d'éventuelles études ultérieures centrées davantage sur les pratiques professionnelles.

Pourcentages

Les élèves sont régulièrement confrontés à des informations chiffrées produites par d'autres : journalistes, historiens, géographes, économistes, etc. Ce paragraphe sur les pourcentages vise à développer la démarche intellectuelle et indispensable pour appréhender des données numériques, pour les déchiffrer avec précision et pour en comprendre le sens, la portée et les limites. Comme on l'indique dans le programme, il ne s'agit pas d'aborder ici quelques connaissances techniques nouvelles, mais d'entretenir des compétences de base qui pourront s'exercer tout au long de l'année dans de nombreux titres du programme : statistique (fréquences, données en pourcentage, évolution de séries chronologiques, etc.), suites géométriques (obtenues par augmentations ou baisses successives à pourcentage d'évolution constant), dérivation (approximation affine), etc.
On entraînera « à une pratique aisée des techniques élémentaires de calcul » ; en particulier, on travaillera sur le passage d'une formulation additive, souvent utilisée pour communiquer, à une formulation multiplicative plus adaptée au calcul, et réciproquement.
En ce qui concerne les pourcentages décrivant le rapport d'une partie au tout, on s'intéressera, sur des exemples, à différentes explications de la variation d'un pourcentage (variation de l'ensemble de référence ou de la partie étudiée) ; on observera que l'ordre des pourcentages rapportés à des ensembles de référence différents n'est pas toujours identique à celui des données absolues ; enfin, on calculera des pourcentages de pourcentages en relation avec l'étude des tableaux croisés.
En ce qui concerne les pourcentages d'évolution, on dégagera l'intérêt du coefficient multiplicatif dans les augmentations ou diminutions successives, dont la formulation additive est parfois trompeuse. Les calculs de prix hors taxes, de prix avant une réduction ou de pourcentages moyens d'évolution en seront autant d'occasions. On formulera aussi ces évolutions en terme d'indice (comparaison à la valeur prise une année choisie comme base 100). Enfin, en relation avec le chapitre sur la dérivation, on pourra utiliser les tableurs pour illustrer que 10 accroissements de 0,2 %, par exemple, peuvent être considérés comme un accroissement de 2 %, alors que 10 accroissements de 10 % ne peuvent pas être assimilés à un accroissement de 100 %.

Nature des données

On a parfois prôné, pour l'enseignement de la statistique, le recueil de données par les élèves eux-mêmes, cette pratique étant considérée comme motivante et permettant de percevoir le champ de l'aléatoire. La perception de l'aléatoire s'acquiert aussi par la simulation. Par ailleurs, pour de nombreuses questions que l'on peut se poser dans le cadre scolaire, des données existent : elles sont réactualisées chaque année, leur contenu est riche et elles sont accessibles dans des banques de données. Sans exclure complètement un recueil ponctuel de données par les élèves, à condition qu'il ne prenne pas beaucoup de temps, on s'appuiera avant tout sur des données existantes. L'élève devra prendre l'habitude de réfléchir sur la nature des données traitées : certaines sont des données brutes (par exemple, la série des hauteurs d'un fleuve mesurées en un point géographique précis tous les jours à la même heure) ; d'autres sont obtenues en prenant des moyennes de mesures brutes (séries des températures mensuelles en un point géographique précis, évolution sur une période de dix ans des dépenses de logement suivant les catégories socioprofessionnelles) ; certaines encore sont des moyennes mobiles : par exemple, dans la présentation des mesures de température quotidienne à une heure donnée en un point donné, on remplace parfois les températures brutes $x_0,\ldots, x_n$ par la série des moyennes mobiles $y_k,\ldots, y_{n-k}$, calculées ainsi :

$$y_i = \frac{1}{2k+1}\sum_{i-k}^{i+k} x_j \text{ , pour } i = k,\ldots, n-k.$$

On parlera de moyennes mobiles d'ordre $(2k + 1)$.

On montrera sur des exemples, avec $k = 1$, 2 ou 3, que la courbe obtenue en remplaçant les données brutes par les moyennes mobiles est plus lisse.

Effets de structure

Exemple 1

Le revenu moyen global des individus actifs d'une population (par exemple, la population parisienne) peut augmenter avec le temps alors que dans toutes les catégories socioprofessionnelles (CSP) le revenu baisse, l'augmentation globale étant liée à un changement de la répartition en CSP (à Paris, les CSP à faible revenu ont eu tendance à déménager en banlieue). La structure à une date donnée est ici la répartition des CSP à cette date.

Exemple 2 (d'après un exemple réel)

Une étude est faite sur la consommation et le succès de deux anti-migraineux A et B ; on trouvera ci-dessous les résultats d'un essai sur 1 600 personnes régulièrement atteintes de migraines.

Globalement, cet essai semble favorable à A, d'autant plus que les statisticiens notent que la différence des pourcentages de succès entre A (50 % de succès) et B (37,5 % de succès) n'est très probablement pas le fait de fluctuations d'échantillonnage.

	Succès	Échec	Totaux
A	600	600	**1 200**
B	150	250	**400**
Totaux	**750**	**850**	**1 600**

Parmi les 1 600 patients ayant participé à cet essai, il y a 900 femmes et 700 hommes. Regardons les résultats selon le sexe du patient :

	Succès	Échec	Totaux
A	100	300	**400**
B	80	220	**300**
Totaux	**180**	**520**	**700**

Hommes

	Succès	Échec	Totaux
A	500	300	**800**
B	70	30	**100**
Totaux	**570**	**330**	**900**

Femmes

Chez les hommes comme chez les femmes, le pourcentage de succès de A est légèrement inférieur à celui de B. Le renversement de tendance entre l'étude par sexe et l'étude globale tient au fait qu'une très forte proportion de femmes utilise A et que le succès des deux anti-migraineux est plus grand chez les femmes que chez les hommes : l'influence du sexe est ici au moins aussi importante que celle du choix du médicament et masque le rôle de ce choix au niveau des 1 600 patients. Il convient de ne considérer que les résultats des deux derniers tableaux ; pour chacun d'eux, les différences entre les proportions de succès de A et de B sont faibles et des calculs de statistique permettent de dire qu'ils peuvent être attribués à la simple fluctuation d'échantillonnage.

Diagrammes en boîtes

Il ne s'agit pas là d'un élément à part ; il sera introduit à l'occasion du traitement de données expérimentales ou d'activités de simulation. On trouvera en annexe quelques précisions sur les conventions utilisées à leur propos.

Étude fréquentielle de tableaux à double entrée

Les commentaires sur les pourcentages des lignes (resp. des colonnes) se feront simplement à partir des distributions de fréquences associées aux marges horizontales (resp. verticales). On ne construira pas les « tableaux théoriques » (on n'introduira pas de façon formelle les notions de sur et sous-représentation, celles-ci n'ayant vraiment de sens que si elles sont « significatives » au sens statistique).

Exemple 1

Sherlock Holmes, invité au manoir de Guildhall par la duchesse de Clifford, se voit proposer de résoudre une bien étrange question.

De nombreuses études historiques fort documentées et détaillées, à propos de quelques condamnations à la peine capitale, qui avaient fait grand bruit au XVI[e] siècle, semblaient clairement prouver que les juges manquaient d'impartialité lorsque l'accusé n'était pas dans la mouvance du parti politique du duc de Clifford. Or, dans ses archives, la duchesse de Clifford venait de trouver des registres tenus par un de ses aïeux, passionné de justice et de statistique. Dans ces registres, on pouvait lire qu'entre 1515 et 1530, dans le comté d'York, il avait été prononcé 131 peines capitales pour meurtre. Parmi ces condamnés, 55 % étaient du parti du duc, alors que seulement 47 % des suspects jugés pour un meurtre pendant la même période l'étaient. La duchesse trouve ces chiffres en contradiction avec les études historiques classiques et demande donc à Sherlock Holmes où est « la vérité ».

« Élémentaire, mon cher Holmes », lui dit Watson, inversant leurs rôles pour cette étrange enquête. Il convient bien sûr de s'intéresser aussi aux opinions politiques de la victime.

1 – Entre 1515 et 1530, il y a eu 2 433 meurtres dans le comté d'York, dont la victime était du parti du duc. Le tableau ci-dessous donne les détails suivant que le suspect est du parti du duc de Clifford ou non (C ou NC), les colonnes indiquant la sentence (PC : peine capitale ; AS : autre sentence).

	PC	AS	Totaux
NC	48	239	**287**
C	72	2 074	**2 146**
Totaux	**120**	**2 313**	**2 433**

Comment Watson a-t-il construit le tableau ci-dessous et qu'en conclure ?

	PC	AS	Totaux
NC	16,7	83,3	**100,0**
C	3,4	96,6	**100,0**
Totaux	**4,9**	**95,1**	**100,0**

Remarque : les différences de pourcentages de condamnation à la peine capitale suivant que le suspect est C ou NC sont ici trop grandes pour être imputées à la fluctuation d'échantillonnage.

2 – En regardant les registres de l'aïeul de la duchesse de Clifford, Watson vit qu'entre 1515 et 1530, il y avait eu 4 764 meurtres. Le tableau ci-dessous donne les détails suivant que le suspect est C ou NC, les colonnes indiquant la sentence (PC : peine capitale ; AS : autre sentence).

	PC	AS	Totaux
NC	59	2 448	2 507
C	72	2 185	2 257
Totaux	**131**	**4 633**	**4 764**

Construire un tableau analogue au deuxième tableau de la question 1 et le commenter. Faire l'étude lorsque la victime est NC.
Remarque : les différences de pourcentages de condamnation à la peine capitale suivant que le suspect est C ou NC, sans tenir compte du même caractère pour la victime, ou lorsque la victime est NC, peuvent être imputées à la fluctuation d'échantillonnage, *i.e.* ne peuvent pas être interprétées en faveur d'une partialité des condamnations.
Sherlock Holmes fit aussi remarquer qu'il suffisait, pour conforter les analyses des historiens, de constater qu'un meurtre dont la victime était du parti du duc de Clifford donnait beaucoup plus souvent lieu à une condamnation à la peine capitale qu'un meurtre dont la victime ne l'était pas. Quantifier et commenter cette opinion. Pour avoir le dernier mot, Watson rajouta qu'à cette époque et dans ce lieu, 90 % des habitants étaient du parti du duc de Clifford…

Exemple 2
Que signifient les tableaux ci-dessous et comment sont-ils déduits du premier d'entre eux ?
Les données concernent la répartition suivant le sexe et le poste (AS : agent spécial ; P : personnel autre) des emplois au FBI au 31 janvier 1997.

	H	F	Totaux
AS	9 199	1 617	**10 816**
P	4 535	10 165	**14 700**
Totaux	**13 734**	**11 782**	**25 516**

	H	F	Totaux
AS	36,1	6,3	**42,4**
P	17,8	39,8	**57,6**
Totaux	**53,9**	**46,1**	**100,0**

	H	F	Totaux
AS	85,0	15,0	**100,0**
P	30,9	69,1	**100,0**
Totaux	**53,8**	**46,2**	**100,0**

	H	F	Totaux
AS	67,0	13,7	**42,4**
P	33,0	86,3	**57,6**
Totaux	**100,0**	**100,0**	**100,0**

Loi de probabilité

On recensera les propriétés mathématiques élémentaires de l'objet « distributions de fréquences » (cf. tableau ci-dessous) et on définira une loi de probabilité comme un objet mathématique ayant les mêmes propriétés.

Distribution de fréquences sur E = $\{x_1,\dots, x_r\}$	Loi de probabilité sur E = $\{x_1,\dots, x_r\}$
$(f_1,\dots, f_r)$ $f_i \geq 0$; $\sum f_i = 1$ A$\subset$ E, fréquence de A : $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$ Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$ Événements A et B disjoints : $f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$	$(p_1,\dots, p_r)$ $p_i \geq 0$; $\sum p_i = 1$ A$\subset$ E, probabilité de A : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$ Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Événements A et B disjoints : $P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$

Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité. Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales, alors que la probabilité d'un événement est un « nombre théorique ». Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques et indépendantes varient (fluctuent), alors que la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience.

L'objectif est que les élèves comprennent à l'aide d'exemples (cf. « Modélisation d'expériences de référence » ci-dessous) que modéliser, c'est ici choisir une loi de probabilité. Il ne s'agit cependant en aucun cas de tenir des discours généraux sur les modèles et la modélisation.

En classe de première, une loi de probabilité P sur un ensemble fini est la liste des probabilités des éléments de E. À partir de cette liste, on définit naturellement les probabilités d'événements, c'est-à-dire implicitement une application de $\mathcal{P}(E)$ dans [0 ;1], qui sera encore désignée par P ; on fera remarquer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour des événements disjoints et que $P(E) = 1$.

Il est inutilement complexe, pour le cas des ensembles finis, de partir d'une application de $\mathcal{P}(E)$ dans [0 ; 1], vérifiant certains axiomes, puis de montrer que cette application est entièrement caractérisée par $(p_1,..., p_r)$.

Si tous les éléments d'un ensemble E ont la même probabilité, la loi de probabilité est dite *équirépartie* ; dans ce cas, la probabilité d'un événement est le quotient de son nombre d'éléments par le nombre d'éléments de l'ensemble.

L'expression « choisir au hasard » (resp. « selon une loi de probabilité P ») un nombre dans un ensemble fini E est admise et a même sens que : « on considère la loi de probabilité *équirépartie* sur E » (resp. la loi de probabilité P sur E). Par exemple, pour parler du modèle associé au lancer d'un dé, on dira que l'on choisit un nombre au hasard dans {1,…, 6}.

On évitera tout développement théorique sur le langage des événements et le calcul ensembliste qui en découle : ces notions et la pratique de la logique qu'ils impliquent (étude du complémentaire de l'événement « A ou B » ou de l'événement « A et B ») s'acquièrent au fil d'exercices.

Remarque : nous avons choisi pour l'enseignement secondaire d'employer le terme de loi de probabilité sur un ensemble, que celle-ci soit ou non la loi d'une variable aléatoire.

Modélisation d'expériences de référence

Modéliser une expérience aléatoire à valeurs dans un espace E, c'est choisir une loi de probabilité P sur E. Ce choix est en général délicat, sauf dans certains cas où des considérations propres au protocole expérimental conduisent à proposer *a priori* un modèle. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés, pour lesquels des considérations de symétrie conduisent au choix d'un modèle où la loi de probabilité est équirépartie. Sans faire une liste de conventions terminologiques, on indiquera clairement que les termes « équilibré » et « hasard » indiquent un choix du modèle de l'expérience où intervient « quelque part » une probabilité équirépartie.

Modélisation à partir de fréquences

On se contentera, pour certains exercices, de fournir un modèle en indiquant dans un premier temps que des techniques statistiques ont permis de le déterminer et de le valider à partir de nombreuses données expérimentales. Pour déterminer et/ou valider un modèle probabiliste, le premier outil dont on dispose est un théorème de mathématiques appelé « loi des grands nombres », dont un énoncé intuitif est :

Dans le monde théorique défini par une loi de probabilité P sur un ensemble E, les fréquences des éléments de E dans une suite de n expériences identiques et indépendantes tendent vers leur probabilité quand n augmente indéfiniment.

Ou encore :

Si on choisit n éléments selon une loi de probabilité P, indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est voisine de P lorsque n est grand.

Simulation

L'exemple ci-dessous montre comment mêler diverses composantes d'un travail mathématique : observation, premières conjectures, expérimentation à plus grande échelle, puis obtention et preuve de certains résultats.

Exemple : somme de deux dés

En répétant cent fois de suite le lancer de deux dés et en effectuant la somme des points obtenus, on observe que certains résultats s'obtiennent plus souvent que d'autres.
À l'aide d'un tableur, par exemple, il est possible d'expérimenter à plus grande échelle : simulation d'un plus grand nombre de lancers de deux dés et construction du tableau des effectifs. L'inégale répartition des fréquences de chaque résultat est flagrante.
L'algorithme de simulation du lancer de deux dés sera conçu par l'élève et d'éventuelles erreurs (simuler un lancer de dé et doubler le résultat, simuler une loi uniforme sur {2,…, 12}) seront analysées.
La recherche d'un modèle théorique permet ensuite de faire les calculs.

Résultats pour 5 séries de 100 lancers

2	0,02	0,02	0,01	0,03	0,01
3	0,03	0,02	0,09	0,06	0,04
4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,1
5	0,11	0,11	0,12	0,09	0,11
6	0,17	0,13	0,1	0,11	0,11
7	0,15	0,15	0,12	0,14	0,2
8	0,12	0,2	0,1	0,13	0,22
9	0,15	0,1	0,12	0,13	0,06
10	0,09	0,1	0,14	0,1	0,08
11	0,06	0,05	0,06	0,09	0,06
12	0,02	0,04	0,06	0,04	0,01

Cahier de statistique

Dans le document d'accompagnement de seconde, il était suggéré que l'élève ait un cahier de statistique où figurent les expériences et les simulations faites en classe ou à la maison, à la demande de l'enseignant ou selon sa propre initiative. L'élève pourra alors revenir en première sur des questions posées en seconde, compléter certaines expériences de l'année précédente et enrichir son cahier de nouvelles simulations, observations et questions concernant aussi bien les probabilités que la statistique et la simulation.

À propos du titre « Algèbre et analyse »

Le programme reprend pour l'essentiel le programme antérieur. L'usage du tableau de variations est cependant précisé ci-dessous.

Algèbre

Les systèmes d'équations linéaires de deux équations à deux inconnues ont été vus en seconde. Comme il est indiqué dans le programme, il s'agit de consolider l'interprétation géométrique de ces systèmes 2×2 à travers quelques exemples significatifs. C'est aussi à travers des exemples simples de problèmes de programmation linéaire que l'on amènera l'étude d'inéquations linéaires à deux inconnues et par là, la caractérisation d'un demi-plan.
De nombreux problèmes simples, mais comportant de vraies questions, conduisent assez naturellement à la résolution d'une équation du second degré. En gardant le même esprit qu'en seconde, cette résolution se fait en liaison avec la fonction trinôme et sa représentation graphique (« développer conjointement les traitements graphique, numérique et algébrique »). Certaines figures doivent être intériorisées et pour cela, il faut pratiquer des lectures graphiques : l'élève devra associer mentalement à un trinôme du second degré une figure (une parabole « tournée vers le haut ou vers le bas »), association qui permet de retrouver ou contrôler le signe du trinôme.

Généralités sur les fonctions

Un objectif de ce paragraphe est la manipulation explicite de sommes et produits de fonctions à travers quelques exemples et leurs représentations graphiques associées. On met en évidence le fait que, dans certains cas, on peut rapidement conclure sur les variations des fonctions obtenues et dans d'autres non, ce qui prépare ainsi la recherche de nouveaux outils pour étudier les variations d'une fonction. Toutefois, aucune étude systématique des variations de $u + v$ ni de uv n'est à mener.
La mise en évidence de quelques compositions de fonctions permet une meilleure compréhension des expressions algébriques et des règles de priorités, de la notion de variable et de celle de fonction. Interpréter $(x - 5)^2$ comme l'image de $x - 5$ par la fonction carré prépare la notion de composition de fonction formalisée en terminale. De même, illustrer le fait que composer une fonction avec une fonction croissante n'en modifie pas les variations permet de mieux comprendre la notion même de fonction croissante.

Tableau des variations d'une fonction

On admettra les conventions décrites dans l'exemple qui suit.
Supposons que l'étude des variations d'une fonction permette d'aboutir au tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

On considérera que le tableau de variations est une forme stylisée de représentation graphique. On admettra qu'il n'y a pas de « sauts » dans la courbe représentative sur un intervalle donné (notion intuitive de continuité qui sera précisée en terminale) et qu'une flèche inclinée correspond à une stricte monotonie. On pourra alors en déduire sans discours supplémentaire :
– des encadrements d'images ;
– le nombre de zéros de f.

Remarque : la notion de fonction a été approchée au collège et explicitée en seconde. Les élèves ont toujours des difficultés à se faire une idée précise et opérationnelle de ce nouvel objet souvent noté f. Ils confondent souvent les deux notations f et $f(x)$. Leur expérience des expressions algébriques dans lesquelles figure une inconnue est plus ancienne que celle des problèmes spécifiques aux fonctions. Au cours du cycle terminal, il y a de nombreuses occasions (dérivée, intégrale, etc.) de faire la distinction entre f et $f(x)$; la notion de fonction prendra donc peu à peu sa place dans l'esprit des élèves et la distinction entre fonction et image d'un point deviendra plus signifiante. Tout en visant cet objectif pédagogique, on évitera tout purisme excessif ; on expliquera et autorisera, à l'occasion, certains abus de langage (tels « la fonction $ax + b$ », « la fonction $x^2 + 1$ »), utilisés spontanément par les élèves, usuels en physique ou dans l'enseignement supérieur.

Dérivation

Dans le programme, il est suggéré d'éviter une approche préalable de la notion de limite d'une fonction en un point mais de s'appuyer sur une approche intuitive. Pour les quelques exemples de calcul traités, il suffit de préciser que les fonctions rencontrées au lycée ne présentent pas de saut et qu'une petite variation de la variable induit une petite variation de l'image.
Le programme évoque plusieurs approches possibles de la notion de dérivée en un point : passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée, zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice, lien avec la notion de coût marginal. Une certaine pluralité d'éclairages paraît indispensable pour bien appréhender cette question : pour ce faire, on pourra y revenir à plusieurs moments dans l'année de première ou de terminale.

Limites et comportement asymptotique

La notion de limite apparaît à deux reprises dans le programme : à propos de la dérivée et lors de l'étude du comportement asymptotique de certaines fonctions.
Comme déjà dit plus haut pour l'introduction de la dérivée, l'intuition suffira pour établir que $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$ pour les fonctions f « régulières » (polynômes, rationnelles ou avec radicaux) ; on fera observer aux élèves que cela correspond à un tracé de la courbe représentant la fonction sans lever le crayon (le terme de fonction continue sera introduit en terminale : il peut néanmoins déjà être utilisé ici de façon naïve). Dans tous les calculs de dérivée, on aboutit – après simplification par h – à ce type de fonction (comme d'habitude, on ne soulèvera aucune difficulté sur la présence sous-jacente d'un prolongement en 0 du taux d'accroissement simplifié par h).
On ne s'intéresse au comportement à l'infini que pour des fonctions très simples (voir programme). On s'appuiera là aussi sur l'intuition ; à partir de manipulations numériques (en donnant à x des valeurs successivement égales à 10^3, 10^6…) et de représentations graphiques, on donnera la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ des fonctions de référence x, x^2, x^3, $1/x$… On observera très vite que le comportement asymptotique d'un polynôme est donné par son terme de plus haut degré : on énoncera la règle opératoire correspondante. Pour les fonctions rationnelles, on se limitera à des exemples de fonctions se mettant facilement sous la forme indiquée par le programme : $ax + b + \varepsilon(x)$ (avec numérateurs et dénominateurs de degré au plus 2).
La représentation graphique de la fonction inverse faite en seconde donne une première approche de la limite de $1/x$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ou

par valeurs inférieures et de la notion d'asymptote « verticale » ; en première, on s'appuiera sur quelques manipulations numériques pour établir que si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, alors le quotient tend vers l'infini, le signe étant à préciser.
À l'occasion de l'une de ces recherches de limite (dérivée, à l'infini ou en une borne finie pour une fonction rationnelle), on mentionnera les règles opératoires usuelles pour la limite d'une somme ou d'un produit.

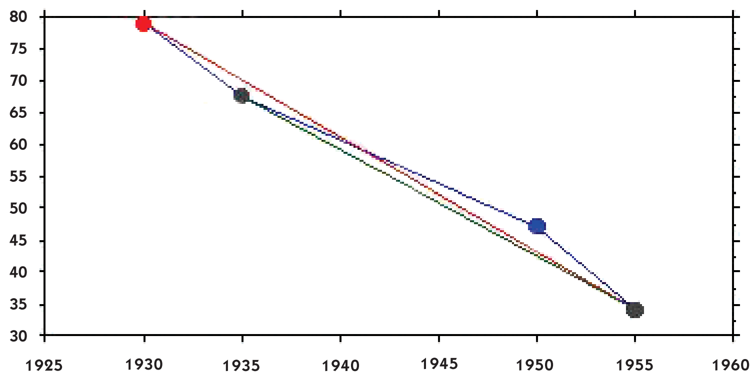
À propos de l'option

Compléments sur les fonctions

On recherchera des exemples de fonctions affines par morceaux dans les diverses disciplines de la série ES, mathématiques comprises. On pourra envisager quelques cas de recollement de morceaux par continuité (tels que la fonction « impôt sur le revenu ») et on s'appuiera pour ce faire sur l'intuition graphique. Il pourra être intéressant dans certains cas de faire rechercher aux élèves l'expression explicite de $f(x)$ sur chaque « morceau ».
En liaison avec le paragraphe statistique, on représentera la fonction $x \mapsto \Sigma|x - x_i|$ dans le cas d'une série (x_i) de petite taille et on vérifiera que la moyenne ne minimise pas nécessairement cette fonction.

Interpolation linéaire

Exemple 1
Les taux de mortalité infantile en 1930, 1935, 1950, 1955 sont respectivement 78,8 ; 67,6 ; 47,2 ; 34,2 ‰. Il manque les taux de mortalité en 1940 et 1945.
1 – Au vu du nuage des quatre points correspondant aux données, un élève estime ces deux taux par interpolation linéaire entre 1935 et 1950, un autre par interpolation linéaire entre 1930 et 1955, un autre entre 1935 et 1955. Calculer ces résultats et les comparer.
2 – Un quatrième élève estime que si l'on ne dispose pas des données en 1940 et en 1945, ce n'est pas fortuit, et qu'en conséquence l'interpolation linéaire n'est peut-être pas pertinente… Qu'en pensez-vous ?
3 – D'autres sources confirment les données pour 1930, 1935, 1950, 1955 et fournissent aussi les taux en 1940 et 1945 : 87,6 et 110 ‰. Pouvez-vous donner un sens à la différence entre les valeurs calculées en 1 et les valeurs réellement observées ?

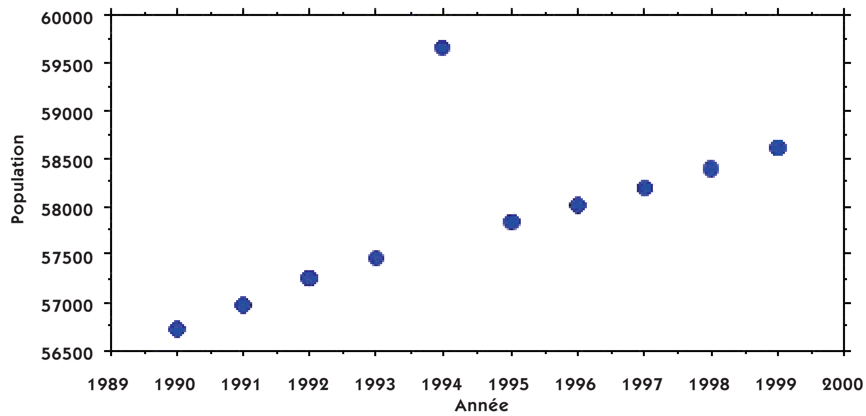


Exemple 2
L'INED (www.ined.fr) fournit des données annuelles sur la population française. Les recensements n'étant organisés que tous les six à neuf ans (les derniers datent de 1999, 1990, 1982, 1975, 1968, 1962), détermine-t-on par interpolation linéaire les données pour les années hors recensement ?

Voici pour information les « chiffres » de la population française (en milliers) fournis par l'INED pour les dix dernières années et recopiés :

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
56 710	56 978	57 242	57 470	59 661	57 847	58 029	58 210	58 398	58 620

– La représentation graphique montre qu'il semble y avoir une erreur de recopie de données en 1994. Un élève suggère de remplacer cette donnée par la moyenne des années 1993 et 1995, un autre par la moyenne des données de 1990 et 1998, un autre par la moyenne des quatre années précédentes et des quatre années suivantes. Comparer les résultats.
– Un élève retourne sur le site et lit, pour l'année 1994, une population de 57 661. Il lit aussi sur le site que des recensements n'ont été faits qu'en 1990 et 1999 ; pour les autres années, on a appliqué les formules données par un modèle. Quels seraient les chiffres si comme modèle on avait pris celui d'une croissance parfaitement linéaire entre 1990 et 1999 ?



Géométrie dans l'espace

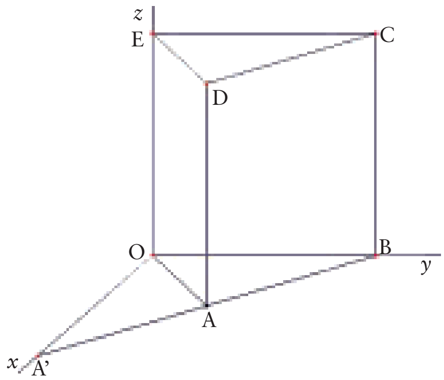
Il s'agira avant tout, dans le fil de ce qui a été fait en classe de seconde, de géométrie « repérée ». L'objectif est d'aider à une meilleure vision des objets de l'espace et de parvenir au traitement analytique de quelques problèmes. La difficulté liée à la représentation des objets de l'espace est grande : on évitera donc de multiplier les situations à traiter à la main et on s'appuiera autant que faire se peut sur des dessins fournis par des logiciels ou préparés par l'enseignant.
Pour traiter cette partie, on peut utiliser des logiciels de construction géométrique dans l'espace et des logiciels de calcul formel disponibles sur ordinateur ou sur calculatrice. Des exemples de séquences mettant en œuvre ces logiciels peuvent être consultés sur le site Educnet, à l'adresse : www.educnet.education.fr/math/reforme.htm.

Exemple 1 : élections au pays des Cartes

(« Réécriture d'un énoncé » de J. Lubczanski, dans *Les Maths au jour le jour,* Éditions Cedic, 1985.)
Argine, Judith, Pallas et Rachel sont les quatre prétendantes au titre de Reine des reines. Au premier tour, Pallas obtient 19 % des suffrages, Judith 33 %, Rachel 16 % et Argine 32 %.
Seules les deux candidates arrivées en tête peuvent se maintenir pour le second tour ; tous les prévisionnistes de la politique se plongent dans les calculs pour anticiper les résultats définitifs. Ils admettent que :
– il n'y a pas de nouveaux électeurs au second tour et les électeurs ayant voté au premier tour pour Argine ou Judith ne modifieront pas leur vote au second tour ;
– parmi les électeurs ayant voté pour Pallas au premier tour, une proportion x reportera ses voix sur Judith au second tour, une proportion y, plus grande que x, se reportera sur Argine et les autres s'abstiendront ;

– parmi les électeurs ayant voté pour Rachel au premier tour, une proportion z votera pour Judith au second tour et les autres s'abstiendront.

1 – La donnée de (x ; y ; z) suffit donc pour déterminer le vote du second tour. Dans la représentation ci-dessous, on a visualisé graphiquement l'ensemble des situations de vote possibles au second tour [le repère $(O, \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ est orthonormal] : décrire cet ensemble et contrôler le dessin.



2 – Quelles relations entre les trois variables x, y et z traduisent le fait que Judith est élue au second tour ?

3 – À quelles situations de vote correspondent les points A, D et C ?

4 – À quelles régions de l'espace correspondent les situations suivantes :

a) Judith est élue ?

b) Judith et Argine sont *ex æquo* ?

c) Argine est élue ?

5 – Certains prévisionnistes assurent que :

a) si plus de 48 % des électeurs de Pallas votent pour Judith, alors Judith est élue ;

b) si plus de 95 % des électeurs de Pallas votent pour Argine, alors Argine est élue.

Leurs prévisions vous semblent-elles correctes ? Quelle est la plus petite valeur m de x qui garantit l'élection de Judith ?

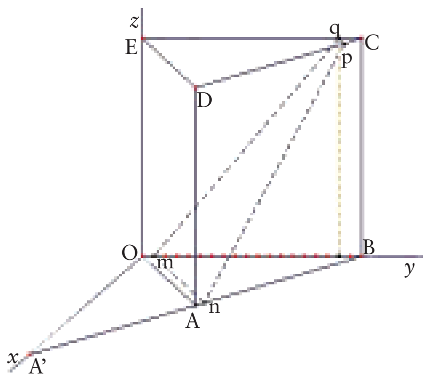
Donner un encadrement des votes que peut avoir Argine lorsque $x = m$.

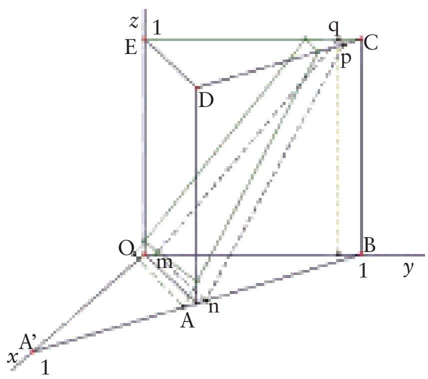
Quelle est la plus petite valeur de y qui garantit l'élection d'Argine ?

6 – Résultats :

En fait, le résultat du second tour a donné 51,5 % pour Judith et 48,5 % pour Argine (il s'agit des suffrages exprimés, c'est-à-dire que A/J = 48,5/51,5).

Trouver l'équation de l'ensemble des situations de vote correspondant à ce résultat.





Remarques : la recherche d'un tel problème permet la mise en œuvre de nombreux aspects de la géométrie dans l'espace comme les notions de plans parallèles aux axes de coordonnées, d'équations de plans, d'équations de droites dans un plan, d'intersection de plan et de droites, etc. À cette occasion, on admettra la propriété de régionnement de l'espace par un plan.

L'équation du plan des situations *ex æquo* paraîtra peut-être compliquée à certains élèves. On simplifiera éventuellement les calculs en considérant x, y et z comme des proportions de la population initiale : x représentera donc la proportion des suffrages exprimés au premier tour, qui étaient en faveur de Pallas au premier tour et qui seront reportés sur Judith au second…

Exemple 2 : un problème de « programmation linéaire »

(en complément de ce qui est traité dans l'enseignement obligatoire)

La résolution pourrait suivre une trame analogue à la trame ci-dessous :

Un polygone des contraintes dans le plan Oxy.

Une fonction coût ou bénéfice du type $z = ax + by + c$.

Dans l'espace,

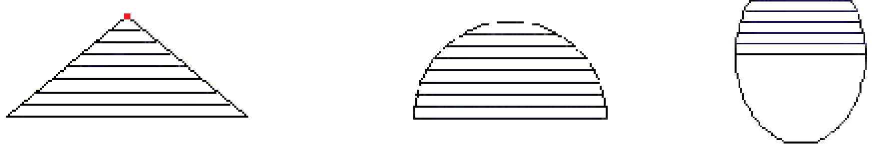
– le « cylindre » des solutions admissibles en (x,y) ;

– le plan d'équation $z = ax + by + c$ et ses lignes de niveau représentés dans le plan Oxy ;

– le point le plus haut de ce plan dans le « cylindre ».

Exemple 3 : courbes de niveau sur un cône, sur une sphère, sur un « ballon de rugby »

On considère un cône de révolution, une demi-sphère et un ballon de rugby sur lesquels on a tracé des courbes de niveau.

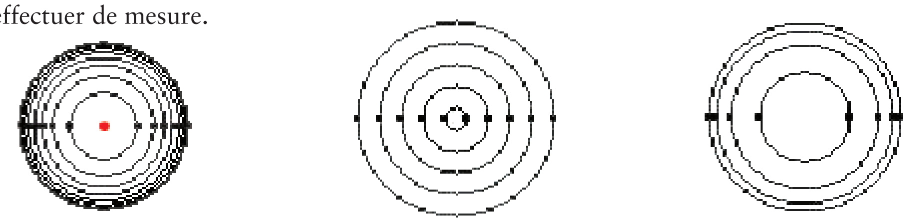


Voici, dans le désordre, comment ces courbes de niveau peuvent apparaître à un observateur placé au-dessus.

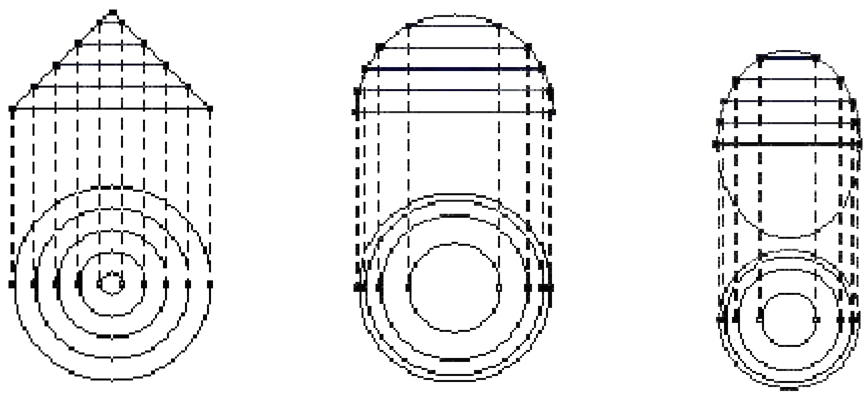
On peut être étonné de la différence des dessins.

À quel solide faut-il attribuer chacun des dessins ci-contre ?

Un logiciel de géométrie dynamique permet de les construire géométriquement sans effectuer de mesure.



Le calcul permet de préciser la suite des rayons obtenus dans le cas du cône et de la demi-sphère. Pour le ballon de rugby, le calcul n'est pas du niveau de la classe de première.



Cet exemple permet d'aborder, à partir d'objets géométriques élémentaires tels que le cône ou la sphère, la notion de fonction de deux variables, ici $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, de lire en contrôlant par le calcul quelques courbes de niveau et de comprendre jusqu'à quel point on peut reconstituer un objet de l'espace à partir de coupes parallèles à un plan donné.

Calcul matriciel

L'objectif est ici la description puis la résolution bien comprise de problèmes faisant intervenir de nombreuses données numériques. Dans un premier temps, on montrera l'intérêt de tableaux de nombres pour présenter certaines informations chiffrées : tableau à 1 ligne ou 1 colonne que l'on appellera vecteur-ligne ou vecteur-colonne, tableau à n lignes et p colonnes que l'on appellera matrice d'ordre $n \times p$. On prendra du temps pour poser correctement l'interprétation matricielle de la situation à décrire et il ne faudra pas hésiter, dans cette phase initiale, à légender le tableau de nombres pour en faciliter la compréhension.

Des exemples permettront ensuite d'introduire et d'illustrer les opérations (addition, multiplication par un nombre, multiplication) sur ces matrices : nous donnons quelques exemples ci-dessous. Il importe que les premiers calculs soient faits avec soin à la main : on n'utilisera qu'ultérieurement les outils de calcul (calculatrice, tableur, logiciel de calcul). Les premières propriétés de ces opérations sur les matrices, notamment l'associativité et la non-commutativité du produit de matrices carrées, seront mises en évidence.

Les matrices seront ensuite utilisées en complément du programme de la partie commune du programme de première ES pour résoudre des problèmes conduisant à des systèmes d'équations linéaires. Dans le cas où la solution est unique, on sera amené à rechercher l'inverse d'une matrice, mais aucune technicité ne sera exigée en la matière.

Les matrices interviendront dans le programme de spécialité de terminale ES pour résoudre des problèmes de théorie des graphes.

Vecteur-ligne (ou colonne) ou *n*-uplet

Exemples :

– le portrait scolaire d'un élève en fin de premier trimestre : (10, 7, 9, 12, 15, 10), où l'on a les notes de cet élève en français, mathématiques, économie, histoire-géographie, LV1 et EPS ;

– le travail d'une station-service durant une journée : (2 500, 500, 1 800, 3 000), donnant les quantités (en litres) d'essence SP95, essence SP98, super et gasoil ;

– le portrait politique d'un arrondissement : (15, 10, 3), donnant le nombre (en milliers) d'électeurs des partis A, B et C.

D'où la définition d'un vecteur ou n-uplet de réels $A = (a_1, a_2..., a_n)$ (que l'on pourra aussi noter en colonne).

Dimension d'un vecteur ; égalité de deux vecteurs ; somme de deux vecteurs ; multiplication par un réel ; propriétés de ces opérations.

Exercices : le travail d'une station-service durant une semaine ; le portrait politique d'un département, d'une région ; le portrait politique en pourcentage ; etc.

Matrices

Exemples :

– notes de cinq élèves d'une classe ;

– travail des quatre stations-service d'une agglomération ;

– répartition des élèves d'un lycée selon l'orientation et la CSP du père ; etc.

Définition d'une matrice $n \times p$ à n lignes et p colonnes (ou tableau de nombres) ; notation (a_{ij}).

Égalité de deux matrices ; matrice transposée ; un vecteur est une matrice $1 \times p$ ou $n \times 1$; matrice carrée, matrice carrée unité.

Addition de deux matrices de même dimension ; multiplication par un scalaire.

Multiplication de matrices

Exemple 1 : chiffre d'affaires de n stations-service.
Définition de AX où A est une matrice $n \times p$ et X un vecteur-colonne de dimension p (donc une matrice de dimension $p \times 1$).

Exemple 2 : matrice A, 4×3, représentant le nombre de pièces de trois produits P_1, P_2 et P_3, fabriquées par 4 artisans durant un an ; matrice B, 3×2, donnant le nombre d'heures et le prix de la matière première pour fabriquer une pièce de chacun des produits P_1, P_2 et P_3. Comment obtenir le nombre d'heures et le prix de matière première par artisan par année ?
On définit ici le produit de deux matrices.

Exercices :
– Calcul de A^2, où A est une matrice de « connaissance » ou d'« incidence » : $a_{ij} = 1$ si i « connaît » ou « est relié à » j pour $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ sinon. Interprétation.
– Recherche de l'inverse d'une matrice 2×2 : position du problème, exemples simples.
– Puissances d'une matrice diagonale et exemples d'application.

Applications

Exemple 1 : portrait scolaire d'élèves
On pourra dresser le « portrait » scolaire d'un élève, noté en cinq matières, sous la forme d'un vecteur à cinq éléments représentant la moyenne en fin de premier trimestre dans les cinq matières ; deux autres vecteurs représentent cet élève aux deuxième et troisième trimestres et la moyenne de ces trois vecteurs constituera le portrait scolaire annuel de cet élève.
Cet exemple pourra être repris pour avoir le portrait d'un groupe d'élèves. Ainsi, pour un groupe de quinze élèves, on pourra le représenter d'abord par le tableau 15×5 ci-dessous, où l'on a légendé les lignes et les colonnes, puis simplement par la matrice M.

	M	A	Φ	F	EPS
E1	16	16	6	14	18
E2	12	15	5	9	14
E3	11	16	2	6	14
E4	18	13	2	10	15
E5	5	13	6	5	10
E6	13	16	6	10	15
E7	15	14	6	11	14
E8	16	15	6	11	15
E9	20	14	6	13	16
E10	12	15	3	8	14
E11	9	18	5	7	15
E12	12	17	2	7	15
E13	12	15	3	7	14
E14	8	16	6	7	13
E15	15	17	6	15	19

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 6 & 14 & 18 \\ 12 & 15 & 5 & 9 & 14 \\ 11 & 16 & 2 & 6 & 14 \\ 18 & 13 & 2 & 10 & 15 \\ 5 & 13 & 6 & 5 & 10 \\ 13 & 16 & 6 & 10 & 15 \\ 15 & 14 & 6 & 11 & 14 \\ 16 & 15 & 6 & 11 & 15 \\ 20 & 14 & 6 & 13 & 16 \\ 12 & 15 & 3 & 8 & 14 \\ 9 & 18 & 5 & 7 & 15 \\ 12 & 17 & 2 & 7 & 15 \\ 12 & 15 & 3 & 7 & 14 \\ 8 & 16 & 6 & 7 & 13 \\ 15 & 17 & 6 & 15 & 19 \end{pmatrix}$$

Si les matières envisagées ont des coefficients respectifs 4, 3, 2, 1, 1, on peut définir la matrice-colonne P des coefficients, puis la matrice-colonne P' des coefficients normalisés :

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } P' = \frac{1}{11} P$$

La matrice produit R = M × P' donne alors les notes finales des quinze élèves.

Remarque : si M est la matrice-ligne correspondant à un seul élève, M × P' donne la note moyenne de cet élève.

$$R = \begin{pmatrix} 14{,}182 \\ 11{,}574 \\ 10{,}465 \\ 12{,}682 \\ 7{,}810 \\ 12{,}570 \\ 12{,}835 \\ 13{,}539 \\ 14{,}784 \\ 10{,}997 \\ 10{,}894 \\ 11{,}598 \\ 10{,}863 \\ 10{,}033 \\ 14{,}273 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : portrait électoral

On dispose, pour une ville de 2 800 habitants, pour deux tranches d'âge (J : moins de 45 ans ; NJ : plus de 45 ans) et trois modes de vie (H_1, H_2, H_3), des pourcentages de vote pour trois candidats A, B, C au poste de maire :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 25 & 55 & 20 \\ 20 & 50 & 30 \end{pmatrix} \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \\ 40 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

Soient K_i les matrices définies par : $K_i = H_i/100$, $i = 1, 2, 3$.
Les répartitions entre jeunes et non jeunes selon les modes de vie H_1, H_2 et H_3 sont respectivement :

$$(100 \quad 100) \qquad (1\,000 \quad 500) \qquad (100 \quad 1\,000)$$

Considérons les trois matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1\,000 & 0 \\ 0 & 500 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1\,000 \end{pmatrix}$$

Interpréter les termes des matrices ($M_i \times K_i$), pour $i = 1, 2, 3$ ainsi que ceux de la somme S de ces trois matrices et ceux de la matrice D × S, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1/1\,200 & 0 \\ 0 & 1/1\,600 \end{pmatrix}$$

Au vu des matrices H_1, H_2 et H_3, l'équipe du candidat A dit que les jeunes ont mieux voté pour A que les non-jeunes. Pourtant, au vu des résultats globaux, les candidats B et C réfutent ces commentaires puisque parmi les 1 200 jeunes, 27,5 % votent pour A alors que parmi les 1 600 non-jeunes, 32,8 % votent pour A.
Qu'en pensez-vous ?

Exemple 3 : évolution d'un système

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20 % des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges.
Partant d'une population (c_0, b_0), quelle est la population deux ans après ? On introduira l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \text{ soit } E_1 = A \times E_0.$$

E_i représentant l'état de la population la *i*-ème année, on montre que $E_2 = A \times A \times E_0 = A^2 \times E_0$, puis que $E_3 = A^3 \times E_0$, etc., en faisant un produit de matrices carrées ligne par colonne pour calculer les puissances successives d'une matrice. On pourra étudier l'évolution sur n années ($n < 30$) suivant certains états initiaux et chercher pour quels états initiaux l'état du système est stable, en réfléchissant sur cette notion de stabilité : le nombre d'habitants respectifs de la capitale et du reste de l'île sont stables au cours du temps mais il y a toujours des gens qui partent de la capitale tandis que d'autres arrivent. On montrera que si un état d'équilibre s'installe, c'est un état stable. Cette notion de stabilité n'est pas au programme de première – il s'agit d'une première approche – : elle a un sens intuitif très fort dont il serait dommage de se priver et qui motive l'étude proposée.

Exemple 4 : les boîtes de céréales

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales. Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois images, a déclaré mensongère la publicité : « *Les images sont également réparties dans les paquets* ». Que penser de ce qu'il affirme ?

Considérons donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte. Au bout d'une semaine, elles auront toutes une image. L'état E_n du système la n-ième semaine est un vecteur colonne à trois lignes : la première composante est le nombre a_n de personnes ayant une seule sorte d'images, la seconde est le nombre b_n de personnes ayant exactement deux images distinctes, la troisième est le nombre b_n de personnes ayant les trois images. On a : $a_1 = 1000$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$. On admettra, à partir d'une justification heuristique, que pour $n > 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= (1/3)\, a_{n-1} \\ b_n &= (2/3)\, a_{n-1} + (2/3)\, b_{n-1} \\ c_n &= (1/3)\, b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}$$

Écrire ces trois équations à l'aide d'une seule équation matricielle et observer l'évolution du système sur 12 semaines. On utilisera la calculatrice pour faire les calculs.

Commenter l'accusation de l'inspecteur des fraudes.

Ce type de problème sera repris dans l'option de terminale.

Classe de première L

Orientations générales

Pour bon nombre d'élèves qui s'orientent en série L, la classe de première sera une fin d'étude en mathématiques au lycée.
On a donc voulu ici assurer à tous ces élèves une *culture de base en mathématiques*; celle-ci concerne essentiellement l'information chiffrée ou graphique, qui ne doit pas être reçue passivement mais plutôt interprétée, critiquée et reformulée.
On privilégiera l'intuition plus que la rigueur formelle, la signification des calculs plus que les techniques opératoires, les applications plus que les développements théoriques. De même, lors des enseignements en classe ou en demi-classe, on favorisera les activités individuelles ou en petits groupes de façon à rendre ces élèves aussi autonomes que possible dans le travail mathématique demandé.
Ce programme comporte une dimension informatique voulue lors de la mise en place de la réforme. Cette dimension peut améliorer la motivation des élèves. Elle entre par ailleurs actuellement dans la *culture mathématique* évoquée ci-dessus : chaque élève sortant de la formation initiale doit avoir la maîtrise mathématique nécessaire à un usage élémentaire des ordinateurs. L'usage de tableurs et d'autres logiciels se généralise depuis la classe de quatrième; en seconde, le renvoi à l'utilisation d'outils informatiques est fréquent dans le programme; en première L, les exigences du programme en matière informatique sont modestes, un entraînement relativement rapide de chaque enseignant devrait lui permettre de remplir son contrat.
L'enseignant est libre de l'approche culturelle du contenu mathématique de ce programme, approche qui doit tenir compte de la spécificité de cette série.

Le programme est présenté en quatre chapitres afin d'en faciliter la lecture; mais ces quatre chapitres s'interpénètrent de façon naturelle et l'enseignant a toute liberté de combiner autrement les différents contenus pour construire une progression. Quelques pistes sont proposées dans la suite de ce document.

Le chapitre « Information chiffrée »

Les élèves sont régulièrement confrontés à des informations chiffrées produites par d'autres : journalistes, historiens, géographes, économistes, etc. Ce chapitre vise à développer la démarche intellectuelle indispensable pour appréhender des données numériques, pour les déchiffrer avec précision et pour en comprendre le sens, la portée et les limites.

Pourcentages

On entretiendra les compétences acquises antérieurement sur le coefficient multiplicatif associé à un pourcentage d'évolution et on dégagera l'intérêt de ce coefficient dans les augmentations ou diminutions successives dont la formulation additive est parfois trompeuse. On pourra utiliser les tableurs pour illustrer que 10 accroissements de 0,2 %, par exemple, peuvent être considérés comme un accroissement de 2 %, alors que 10 accroissements de 10 % ne peuvent pas être considérés comme un accroissement de 100 %. Les calculs de prix hors taxes, de prix avant une réduction ou de pourcentages moyens d'évolution (sur trois ou quatre valeurs en utilisant la racine carrée ou cubique) seront autant d'occasions de montrer l'intérêt du coefficient multiplicatif.
On s'intéressera, sur des exemples, à différentes explications de la variation d'un pourcentage (variation de l'ensemble de référence ou de la partie étudiée) ; on observera que l'ordre des pourcentages rapportés à des ensembles de référence différents n'est pas toujours identique à celui des données absolues ; enfin, on calculera des pourcentages de pourcentages en relation avec l'étude des tableaux croisés.

Feuilles automatisées de calcul

Non dédiés à un domaine spécifique, les tableurs sont des logiciels généralistes, les plus utilisés avec les traitements de texte. Les feuilles de calcul qui apparaissent à l'écran sont des tableaux dont les cases ne sont généralement pas remplies une à une ; le plus souvent, leur construction résulte en partie de l'application de formules mathématiques définies par l'utilisateur ou données par le logiciel. Travailler sur des feuilles automatisées de calcul est donc un moyen pour l'élève, d'une part, de revenir sur les notions de variables et de fonctions introduites en seconde et de faire fonctionner des formules, et, d'autre part, de s'approprier un outil très répandu.
Dans un premier temps, on explorera une feuille de calcul déjà réalisée et on identifiera les liens entre diverses cellules. Sur une feuille de facturation, par exemple, comportant des prix unitaires hors taxes, des effectifs ou des quantités, des prix partiels hors taxes, des taux de taxes, des montants hors taxes, des montants de taxe et des montants TTC, on pourra découvrir ces liens de façon dynamique et analyser les modifications entraînées par la modification d'une valeur.
Dans un deuxième temps, on réalisera une telle feuille à partir d'un document comportant les données nécessaires et quelques règles simples comme l'affichage de certains montants partiels, le regroupement de données d'un certain type, etc. À l'occasion de ce travail, les élèves utiliseront les possibilités de dénomination de certaines cellules et la recopie de formules ; cet apprentissage sera réinvesti dans le chapitre « Exemples de types de croissance », p. 36.
L'objectif n'est pas d'étudier un tableur, mais de pouvoir utiliser un tableau dynamique pour résoudre des problèmes mettant en jeu des calculs corrélés, explorer des suites, simuler des phénomènes aléatoires élémentaires. Dans l'environnement où il

aura travaillé, l'élève devra savoir éditer une formule élémentaire, recopier une cellule ou une formule, utiliser un adressage relatif ou absolu, mettre en œuvre quelques fonctions élémentaires disponibles (tirage aléatoire, maximum, minimum, partie entière, somme, moyenne, écart type, condition du type *si… alors, etc.*), insérer un graphique. Pour exploiter certaines simulations, l'élève pourra trouver avantage à utiliser d'autres fonctions intégrées simples (telles que dénombrement conditionnel ou contrôle de parité).

Représentations graphiques

Ce travail est une reprise de celui effectué en classe de seconde à propos des représentations graphiques de fonctions : lecture d'une valeur, d'un extremum, de variations*, etc*. Les élèves devront savoir interpréter, correctement et avec les réserves nécessaires, les informations lisibles sur un graphique ; ils se souviendront en particulier qu'une lecture graphique ne donne le plus souvent que des valeurs approchées. L'utilisation de changements de fenêtre graphique permettra la recherche d'une approximation d'un extremum ou d'une solution d'une équation. Des exemples de changements de fenêtre graphique modifiant complètement l'allure d'une courbe inciteront les élèves à garder un esprit critique par rapport aux lectures graphiques. En liaison avec des exemples de types de croissance, tels que ceux que les économistes utilisent, on développera la lecture qualitative de courbes : description des variations, reconnaissance du ralentissement ou de l'accélération de la croissance ou de la décroissance d'une fonction, comparaison de représentations graphiques.
Sur quelques exemples bien choisis, on travaillera la lecture d'informations et la reconnaissance d'une surface à partir de lignes de niveaux ; on initiera à ce propos au repérage de points par trois coordonnées. L'objectif est de proposer ici quelques lectures élémentaires de données en dimension trois.

Arbres et diagrammes

On aura pu, lors de travaux sur les pourcentages, exploiter quelques représentations ensemblistes. Il s'agit ici de faire percevoir l'utilité d'une organisation en tableau ou en arbre, pour résoudre des problèmes simples de dénombrement. Ce thème pourra être l'occasion d'une réflexion plus spécifique sur le *et*, le *ou*, voire le *si… alors, etc.*

Le chapitre « Statistique »

Ce chapitre se divise en trois parties. Dans la première, l'objectif est de voir sur des exemples qu'une question peut trouver une réponse dans le champ de la statistique sous réserve, éventuellement, de transformer la question initiale. À partir de cette nouvelle question, on réfléchira simultanément sur les données à recueillir et sur le traitement statistique que l'on peut envisager pour ces données.

Exemples

Considérons la question : *Quel est le nombre de battements cardiaques à la minute ?* La question est trop imprécise et il convient au moins de spécifier si c'est au repos ou après un effort clairement défini. Il peut se poser alors de nouvelles questions : sur la comparaison des données au repos ou après effort, par exemple. Les élèves peuvent aussi proposer que chacun étudie son propre pouls en faisant plusieurs mesures (il y a alors à la fois la variabilité individuelle de la fréquence cardiaque et les erreurs de mesure qui s'ajoutent) ou faire une étude sur une classe entière.

Considérons une autre question : *Sait-on estimer à l'œil une longueur ?* Cette question est, elle aussi, trop imprécise. Au niveau de la population visée, s'adresse-t-on à des gens de tous âges ? de tous métiers ? Par ailleurs, que signifie « estimer une longueur » ? S'agit-il de petites longueurs ou de grandes distances ? Lorsque cette situation a été expérimentée dans des classes, la question initiale s'est transformée pour devenir par exemple : *Si on demande à un élève de première de couper 20 cm d'une ficelle sans appareil de mesure, que se passe-t-il ?* On peut alors mettre en place un protocole expérimental qui permettra d'observer des données liées à cette question.

L'objectif est donc ici de montrer la diversité des questions qui se posent ainsi que le soin nécessaire à la définition et au recueil des données. Il s'agit aussi de montrer aux élèves qu'une première expérience permet de préciser et de reformuler la question initiale et que, si l'on veut apporter des réponses, généraliser ce qui est fait et interpréter des différences, il faut faire un traitement statistique plus sophistiqué et tenir compte en particulier de la fluctuation d'échantillonnage. Le résumé des données observées pourra se faire à l'aide de diagrammes en boîtes (souvent appelés boîtes à moustaches ou boîtes à pattes), éventuellement accompagnés de la moyenne ou d'une moyenne élaguée.

On trouvera à la fin de ce document une annexe relative aux diagrammes en boîtes donnant toutes les indications nécessaires sur les paramètres utiles (médianes, quartiles), sur les modes de construction de ces diagrammes, ainsi que sur leur utilisation. L'essentiel, dans un tel diagramme, est la construction de la boîte contenant la moitié des valeurs de la série ; pour les « moustaches », on pourra choisir les premier et neuvième déciles ou les valeurs extrêmes, comme l'indique l'annexe citée : en première L, on privilégiera l'utilisation des valeurs extrêmes ; dans tous les cas, les élèves devront légender leur schéma. Le tableur servira avant tout ici à ordonner les valeurs de la série observée et éventuellement à les numéroter : les élèves effectueront ensuite « à la main » le calcul de la médiane et des quartiles ainsi que la construction de la boîte.

Dans la seconde partie, on pourra d'abord définir l'écart type d'une série. On remarquera que l'écart type et la moyenne sont sensibles aux valeurs extrêmes alors que la médiane et l'écart interquartile ne le sont pas. On travaillera ensuite selon l'esprit décrit dans l'annexe ci-dessous relative aux données gaussiennes.

La troisième partie est consacrée à l'étude de tableaux croisés. On trouvera dans le document d'accompagnement de première ES (page 12 et suivantes) quelques exemples d'études de tableaux à double entrée. On s'intéressera aussi à des situations pour lesquelles l'enseignant sait qu'il n'y a pas indépendance entre les deux caractères qualitatifs étudiés sur la population (tableaux présentés lors d'élections, par exemple). Cette partie pourrait aussi bien figurer dans le chapitre « Information chiffrée » : elle a été mise dans le chapitre « Statistique » afin que l'enseignant puisse indiquer (sans le justifier) que les fluctuations des distributions des fréquences d'une ligne à l'autre (resp. d'une colonne à l'autre) sont éventuellement d'une ampleur que la fluctuation d'échantillonnage ne peut seule expliquer.

Le travail réalisé dans ce chapitre sera rédigé dans le cahier de statistique commencé en seconde.

Le chapitre « Exemples de types de croissance »

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre aux élèves à reconnaître les divers types de croissance qui peuvent affecter certains phénomènes, à les différencier et à les nommer.
Les diverses notions du chapitre seront mises en œuvre avant tout avec des suites concernant des phénomènes mesurés à des dates ou des instants différents (séries chronologiques) : ce sont celles qui apparaissent le plus souvent dans l'information chiffrée fournie par les médias.
L'étude de quelques exemples bien choisis (phénomènes augmentant chaque année d'une même quantité, ou augmentant à taux constant) amènera aux notions de suites arithmétiques ou géométriques : la croissance sera dite linéaire dans le premier cas, exponentielle dans l'autre. Pour chacun des deux types, les élèves devront savoir reconnaître la nature de la suite à partir de la relation entre deux termes consécutifs, calculer les termes successifs de la suite et exprimer le terme d'indice n en fonction du terme initial.
Les termes *raison* et *relation de récurrence* (utilisés ci-dessous par commodité) pourront être employés dans la classe : on s'attachera plus au sens qu'ils véhiculent qu'à leurs définitions formelles. La notation indicielle est d'un usage fréquent en statistique ou dans d'autres disciplines : les élèves la rencontreront et il faut donc qu'ils la comprennent ; l'enseignant pourra néanmoins privilégier la notation fonctionnelle en usage systématique dans les calculatrices et les ordinateurs.
L'utilisation d'un tableur est particulièrement bienvenue ici. Le calcul des termes d'une suite définie par récurrence y est immédiat et la notion de récurrence prend tout son sens ; la mise en place de ce type de calcul, est par ailleurs, très révélatrice du mode de fonctionnement d'un tableur. On peut ensuite aisément placer sur des colonnes côte à côte des suites différant soit par le terme initial, soit par la raison, soit par la nature de la relation de récurrence : les comparaisons sont alors faciles à faire et les différences de comportement apparaissent aisément. Le tableur permet aussi de donner instantanément une représentation graphique d'une ou plusieurs suites de nombres : les notions de croissance linéaire et exponentielle sont visualisées graphiquement. De telles manipulations font émerger des questions et permettent de trouver des réponses ; par exemple, dans l'étude d'une suite, on pourra calculer automatiquement la différence entre deux termes consécutifs et/ou le coefficient multiplicateur et observer ce qui se passe. La lecture critique de documents issus des médias et décrivant des phénomènes de croissance pourra susciter questions et expérimentations.
Le tableur permet de simuler facilement d'autres types de croissance avec des suites également définies par une relation de récurrence ; l'exemple de suites ayant des différences secondes constantes, proposé par le programme, permet des prolongements intéressants : le choix de bons premiers termes (0, 1 et 4) amène à la suite (n^2) ; le travail peut être poursuivi avec d'autres choix des premiers termes. L'intérêt de telles suites est multiple : ce travail met en évidence des comportements qui ne sont ni linéaires, ni exponentiels ; ce type de suites peut être présenté comme une extension des suites arithmétiques (lesquelles sont à différence première constante, et donc à différence seconde nulle) et un premier intermédiaire entre les suites arithmétiques et géométriques (ces dernières n'ayant jamais de différences secondes ni troisièmes… constantes). L'utilisation du tableur rend ces suites immédiatement accessibles, permet une

visualisation graphique frappante et facilite la compréhension de l'importance des conditions initiales; ce travail permet, par ailleurs, d'intégrer une dimension historique, par exemple à travers les travaux de Galilée.

Qu'appelle-t-on différences premières et différences secondes d'une suite ?
Le tableau suivant donne la réponse :

Suite $u(n)$	$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$	$u(3)$	$u(4)$
Différence première $\Delta(n)$	$\Delta(0)= u(1)-u(0)$	$\Delta(1)= u(2)-u(1)$	$\Delta(2)= u(3)-u(2)$	$\Delta(3)= u(4)-u(3)$	…
Différence seconde	$\Delta(1) - \Delta(0)$	$\Delta(2) - \Delta(1)$	$\Delta(3) - \Delta(2)$	$\Delta(4) - \Delta(3)$	…

Texte de Galilée : extrait des *Dialogues*, « Deuxième journée : loi de la chute des corps. »

« L'accélération du mouvement rectiligne des corps pesants se fait selon les nombres impairs en commençant par un, c'est-à-dire que si l'on prend des intervalles de temps égaux et si dans le premier intervalle, partant du repos, le mobile a accompli un certain parcours, par exemple une aune, dans le second intervalle il en parcourra trois, dans le troisième, cinq, dans le quatrième sept et ainsi selon les nombres impairs successifs. C'est en somme la même chose de dire que les espaces parcourus par le mobile, partant du repos, sont en raison du carré des temps dans lesquels les espaces ont été parcourus. »

Voir Galilée. Opere di Galileo Galilei *édité par A. Favaro chez C. Barbera, Florence, 1890-1909, nouvelle édition en 1964, cité dans : R. Zouckerman,* Galilée penseur libre, *Édition de l'Union rationaliste, 1968.*

On notera enfin le lien étroit entre le premier chapitre et celui-ci concernant les pourcentages, lectures graphiques et tableurs.

Le chapitre « Activités d'ouverture »

Deux activités dites d'ouverture sont proposées : il s'agit de maintenir pour les élèves désirant choisir l'option mathématique en classe terminale une pratique (modeste) des figures géométriques et d'éveiller leur curiosité sur des contenus dépassant la *culture minimale en mathématiques,* évoquée au début de ce document.

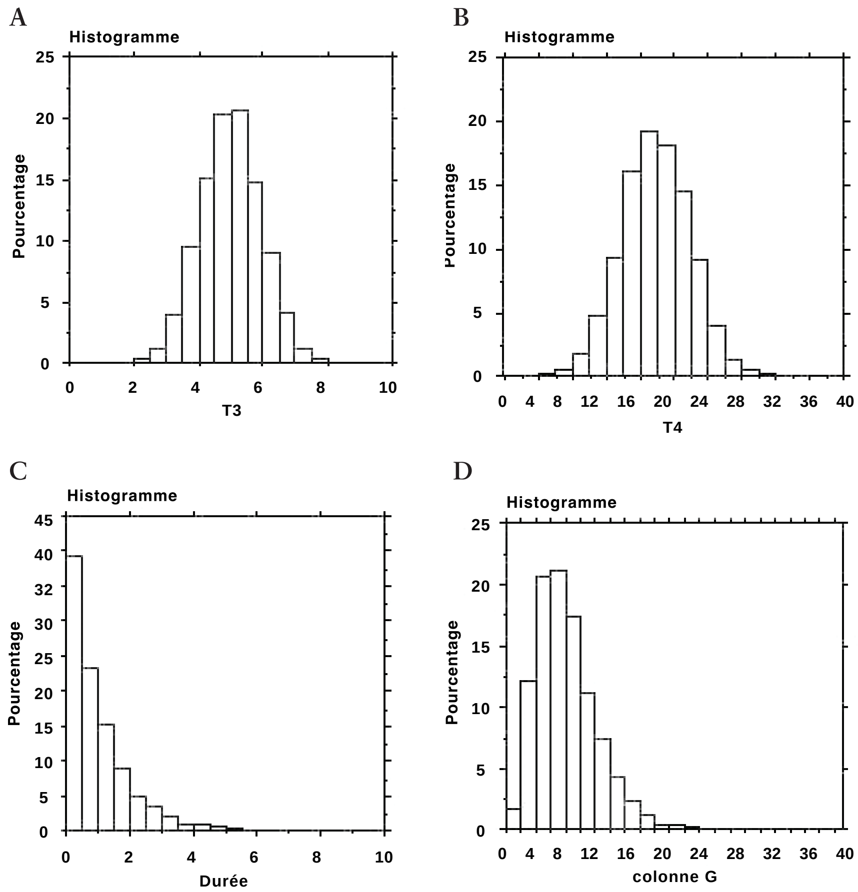
Les commentaires du programme justifient le choix de la première activité ; il reste à souligner l'intérêt d'un traitement informatique pour le dessin, pour des calculs d'aires et de périmètres aux diverses étapes de l'itération et pour la mise en évidence de comportements limites.

Comme l'indique le programme, le contenu de ce dernier chapitre ne sera pas pris en compte pour l'épreuve anticipée de mathématiques au baccalauréat et pourra n'être traité que par une partie de la classe.

Annexe : à propos des données gaussiennes

Exemple 1 : bilan de santé

Pour faire le bilan de l'activité thyroïdienne d'un individu, on mesure les quantités de « T3 libre » (tri – iodo thyronine libre) et « T4 libre » (thyroxine libre) ; ces mesures sont exprimées en pmol/litre (pmol signifie pico-mole, soit 10^{-12} mole, une mole étant composée d'environ $6{,}02.10^{23}$ molécules). Les résultats de deux séries de 5 000 mesures chez des individus dont la thyroïde fonctionne normalement sont résumés par les histogrammes A et B ; ces histogrammes ont la même allure dite en cloche, nettement différente de celle des histogrammes C et D (ces deux derniers correspondent à des données simulées).



Les deux séries obtenues lors de ces bilans thyroïdiens correspondent à des « données gaussiennes » ; pour de telles données on peut déterminer un modèle (modèle gaussien) à partir de deux paramètres m et σ calculés sur une série de référence aussi longue que possible :

– la moyenne m de la série de référence : $m = \frac{1}{n}\sum x_i$

– l'écart type de la série de référence : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(x_i - m\right)^2}$

Pour les mesures de T4L, on trouve sur la série de référence (ici de taille 5 000) :

$m = 16{,}7$ et $\sigma = 4{,}0$ (les unités étant des pmol/litre).

Pour les mesures de T3L, on trouve sur la série de référence (ici de taille 5 000) :

$m = 4{,}9$ et $\sigma = 0{,}9$ (les unités étant des pmol/litre).

À partir de ce modèle, on montre que pour des mesures ultérieures de données analogues :
– environ 68 % des mesures sont dans l'intervalle $[m - \sigma\,;\, m + \sigma]$; environ 16 % seront inférieures à $(m - \sigma)$ et environ 16 % seront supérieures à $(m + \sigma)$;
– environ 95 % des mesures sont dans l'intervalle $[m - 2\sigma\,;\, m + 2\sigma]$; environ 2,5 % seront inférieures à $(m - 2\sigma)$ et environ 2,5 % seront supérieures à $(m + 2\sigma)$;
– environ 99,8 % des mesures sont dans l'intervalle $[m - 3\sigma\,;\, m + 3\sigma]$; environ 0,1 % seront inférieures à $(m - 3\sigma)$ et environ 0,1 % seront supérieures à $(m + 3\sigma)$.

Dans l'exemple des analyses biologiques de dosages de T3L et T4L, et dans de nombreux examens, l'intervalle $[m - 2\sigma\,;\, m + 2\sigma]$ est appelé « plage de normalité » : il contient environ 95 % des valeurs observées chez des individus non-malades. Les plages de normalité sont ici :

– [3,1 ; 6,7] pour le dosage de T3L ;

– [9,7 ; 25,7] pour le dosage de T4L.

(Les plages de normalité sont indiquées par les laboratoires sur les comptes rendus d'analyse biologique. Ces plages de normalité sont voisines mais pas nécessairement identiques d'un laboratoire à l'autre ; elles sont en effet calculées à partir de séries de référence traitées par l'appareil de mesure du laboratoire.)

Si on faisait des dosages de T3L chez des personnes choisies au hasard dans une population donnée, environ une sur vingt aurait une valeur sortant de la plage de normalité. Cela dit, les personnes à qui l'on fait de tels dosages (les individus de la série de référence mis à part) ne sont pas choisies au hasard et présentent en général des symptômes justifiant cet examen ; sortir de la plage de normalité constitue un symptôme de plus en faveur d'une maladie de la thyroïde (symptôme d'autant plus marqué que l'on s'éloigne beaucoup de la moyenne : il est classique pour certaines pathologies de dépasser la moyenne de dix écarts types).

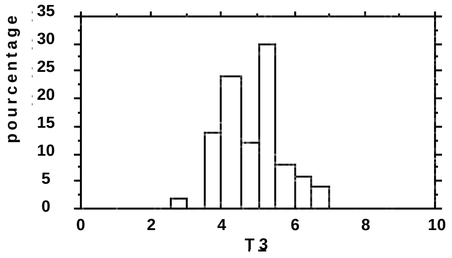
Exemple 2 : taille

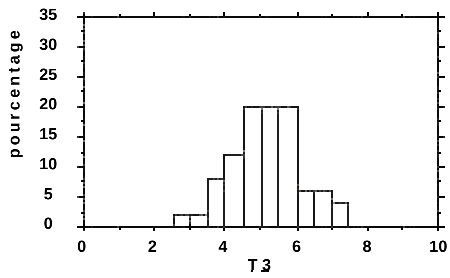
Les tailles de garçons (resp. de filles) nés la même année constituent des données gaussiennes, et les courbes situées à la fin du carnet de santé des enfants donnent, entre autres, pour chaque âge une plage de normalité égale à $[m - 2\sigma\,;\, m + 2\sigma]$, où les paramètres m et σ pour un âge donné sont calculés sur des séries de référence (malheureusement, ces séries sont anciennes et ne sont plus vraiment des séries de référence pour les enfants qui naissent aujourd'hui). On notera que dans la population concernée par la série de référence, pour chaque âge, environ un individu sur vingt sort de la plage de normalité.

Commentaires

L'objectif essentiel du paragraphe relatif aux données gaussiennes est de faire comprendre, à partir d'exemples, d'une part, le type d'information qu'apporte l'écart type et, d'autre part, la notion de plage de normalité, en particulier pour une lecture correcte de certains examens biologiques ou des courbes de croissance présentes dans les carnets de santé.
On s'est longtemps demandé pourquoi de nombreuses données (mesures biologiques, erreurs de mesure) pouvaient être qualifiées de « gaussiennes » ; un théorème de mathématiques appelé « théorème central limite » en propose une explication. Ce théorème est totalement hors programme. De même, est totalement hors programme la reconnaissance du caractère gaussien de données : on dira aux élèves que des études statistiques ont prouvé qu'il en était ainsi et on leur apprendra simplement à comprendre et utiliser cette information.

On sera attentif à la formulation des conclusions : la normalité évoquée ici est une normalité statistique et il y a une chance sur vingt pour qu'un individu « normal » choisi au hasard soit en dehors de la plage de normalité ! De même, un échantillon de petite taille pris au hasard peut s'écarter sensiblement de la forme « en cloche », comme le montrent les deux histogrammes ci-dessous relatifs à deux échantillons de taille cinquante, pris au hasard dans la série de l'exemple 1.





On pourra prolonger la réflexion en simulant, par exemple, la situation suivante où n personnes choisies au hasard dans une population de gens en parfaite santé subissent quatre examens médicaux indépendants : on constate alors qu'environ une personne sur cinq a au moins un examen qui sort de la plage de normalité ! Pour faire cette simulation avec une calculatrice, il suffit de disposer de huit chiffres au hasard, de les prendre deux par deux pour fabriquer quatre nombres entre 00 et 99, puis de compter 1 si l'un au moins de ces quatre nombres est supérieur ou égal à 95, 0 sinon ; la proportion de 1 est de l'ordre de 1/5 !

Classe de première S

Orientations générales

Le programme publié dans le *BO* hors série n° 7 du 31 août 2000 expose de façon détaillée les objectifs de l'enseignement des mathématiques en classe de première S ; le présent document ne reprend donc pas les éléments de présentation générale largement explicités dans les premiers paragraphes du programme.

L'objectif de ce document d'accompagnement est d'aider à la compréhension du texte du programme et d'illustrer par des exemples les objectifs visés. Il est à l'usage des enseignants : ceux-ci pourront adapter certains exemples ou exercices pour leur classe ; en revanche, quelques prolongements ou approfondissements, destinés aux enseignants, ne doivent pas donner lieu *a priori* à des activités pour des élèves.

Ce document a pour fonction de faciliter les échanges et de permettre des régulations entre les acteurs concernés par l'application du programme ; une trop grande directivité, qui irait à l'encontre du maintien de l'espace de liberté pédagogique laissé à l'enseignant, n'est pas souhaitable. Il n'est bien sûr pas obligatoire de traiter les exemples et exercices proposés : ceux-ci peuvent être remplacés par d'autres situations relevant du même esprit.

Ce document prend en compte les résultats de la consultation du dernier trimestre 2000 sur les programmes de première et explicite certains items ; il sera mis à jour et complété en ligne sur le site Eduscol (www.education.eduscol.fr). En effet, si les exégèses d'un programme convergent au bout d'un certain temps, ce n'est pas le cas lors de sa parution (sauf à transformer le programme en libellé d'un protocole éducatif strictement technique) ; le document d'accompagnement permettra un recentrage par rapport aux diverses interprétations et fera ainsi office d'outil de régulation de la mise en œuvre du programme.

Ce document ne fournit pas de liste des compétences exigibles : une telle liste est toujours de nature technique et ne pourrait concerner que les savoir-faire et non les savoirs ; de plus, elle n'a jamais figuré dans un document officiel en mathématiques à ce niveau et le groupe chargé de l'élaboration des programmes a préféré s'en tenir à cette pratique. En effet, la publication d'une telle liste, derrière le côté rassurant qui faciliterait à très court terme la lecture et la mise en œuvre du nouveau programme, placerait les enseignants dans un rôle passif vis-à-vis des mathématiques qu'ils ont à enseigner. Le système de contraintes lié à une spécification précise des compétences exigibles bloquerait à la fois la créativité du corps enseignant et l'évolution des pratiques ; détacher d'emblée les savoir-faire techniques qui peuvent faire l'objet d'une interrogation à l'examen des notions et concepts en jeu, irait à l'encontre de l'enseignement de qualité que souhaite toute la communauté mathématique.

• Un large consensus s'est dégagé auprès des acteurs concernés par l'enseignement des mathématiques dans une filière scientifique pour que les grands objectifs suivants soient retenus :

- apprendre à diversifier les raisonnements et les démonstrations ;
- acquérir la maîtrise de techniques de calcul ;
- renforcer les passages entre les divers champs mathématiques ;
- introduire la modélisation ;
- utiliser à bon escient les outils informatiques.

C'est dans cette perspective que les concepts suivants sont introduits en classe de première S : dérivée et suites en analyse ; repérage et description d'objets du plan et de l'espace et calcul vectoriel ; variable aléatoire en statistique et probabilités.

• Ce programme se situe dans la ligne des programmes antérieurs de la série scientifique : on y retrouve les mêmes concepts de base, mais avec des éclairages différents ou des points de vue nouveaux.
Il rejoint en particulier le programme précédent dans lequel étaient évoquées « capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique », capacités déclinées sous les différents aspects suivants : « formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé. »

• Le schéma initial du programme propose une représentation simplifiée des sciences mathématiques. Il a pour fonction de résumer et structurer l'information traitée et permet d'en avoir une vision non linéaire ; il peut aider les élèves, les parents et toutes les personnes intéressées par le système éducatif à situer l'enjeu de l'enseignement des mathématiques au lycée. À ce titre, il participe à un travail de vulgarisation aujourd'hui absolument nécessaire.
Ce schéma s'adresse aussi à tous les enseignants, par son invitation à choisir des problématiques suffisamment riches, issues de la réalité ou de domaines déjà familiers aux élèves – mathématiques ou autres –, pour aboutir à de nouveaux concepts et à des résultats nouveaux : les élèves doivent pouvoir se rendre compte que l'étude d'une notion se fait à partir de questions et permet d'élaborer des éléments de réponse.
Pour information, on rejoint ici le point de vue adopté par des experts de l'OCDE qui définissent « la culture mathématique (*mathematical litteracy*) » comme « l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie présente et future en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi » (Programme international pour le suivi des acquis des élèves – PISA – visant à évaluer régulièrement les savoirs et compétences acquis par les jeunes de quinze ans d'une trentaine de pays).

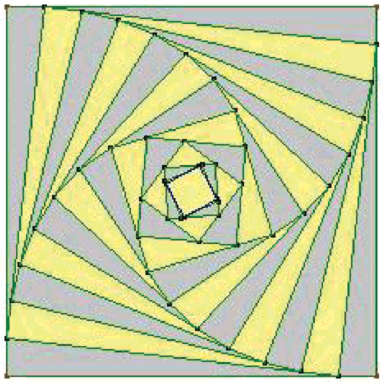
• Comme dans l'ensemble du système scolaire, ce programme prend en compte l'intégration des TICE, dans la continuité des programmes de collège et de seconde.
On trouvera sur le site Educnet à l'adresse www.educnet.education.fr/math des exemples de séquences pour lesquels l'outil logiciel facilite la résolution de la question traitée et l'appropriation de nouveaux concepts, et permet de revisiter un domaine déjà vu.

À propos d'une formation scientifique en première et terminale S : des exemples

Le programme explicite quatre composantes de l'activité mathématique (observer, abstraire, expérimenter, démontrer) : partagés avec de nombreuses autres sciences, ces différents aspects se conjuguent spécifiquement en mathématiques. Les deux exemples qui suivent illustrent cette spécificité.
Bien sûr, il ne s'agit pas de faire du repérage de ces composantes un objectif d'enseignement, ni d'en faire la base de grilles de lecture systématique des activités des élèves : l'enseignant veillera simplement à ce que s'établisse peu à peu une dynamique entre chacune d'elles.

Exemple 1

On part d'un carré de côté 10 unités. Sur chaque côté, en tournant dans le même sens, on place un point situé à la distance 1 de chaque sommet du carré. Et on itère…
Établir que l'on obtient bien ainsi un nouveau carré. On note K_2 ce nouveau carré et k_2 son côté.



En **observant** cette figure, on peut se demander si le dessin s'arrête et comment évoluent les côtés et les aires des carrés.

On peut **expérimenter** numériquement et vérifier que les résultats numériques se stabilisent.
La question se pose alors de savoir si le processus se stabilise effectivement sur un carré et si les observations graphiques et numériques pourtant cohérentes donnent une vision exacte du phénomène.

n	k (n)	n	k (n)
1	10	9	2,80034534815394
2	9,05538513813742	10	2,05942792362819
3	8,11721810251056	11	1,45684162672651
4	7,18712693074945	12	1,09941087492808
5	6,26741889913265	13	1,00492911294975
6	5,36150182868008	14	1,00001214800345
7	4,47467297146727	15	1,00000000007379
8	3,61570909485887	16	1,00000000000000

Une première **abstraction** consiste à associer à ce problème de construction de carrés la suite infinie (k_n) des mesures des côtés et à étudier les points suivants :

- Monotonie de la suite (k_n).
- Peut-on avoir un terme de la suite strictement plus petit que 1 ?
- Existe-t-il un entier r tel que $k_r = 1$?

• Les expériences graphiques et numériques conduisent aussi à étudier la suite (u_n) avec $u_n = k_n - 1$:
– (u_n) est décroissante ; tous les u_n sont strictement positifs ;
– on a aussi $u_n < (u_{n-1})^2/2$; comme $u_{11} < 1$, on a $u_{12} < (u_{11}/2)$ et $u_{n+11} < u_{11}/2^n$. Donc (u_n) converge vers 0, et (k_n) vers 1.

Cet exercice peut être repris en terminale en partant d'un carré de côté k quelconque ; la suite étant décroissante positive converge vers une limite l qui vérifie $l = \sqrt{(l-1)^2 + 1}$, soit $l = 1$ et la suite (u_n) converge vers 0.
On remarquera alors que : $0 < (k_n - 1) < (k_{n-1} - 1)^2$,
donc si $k_r - 1 < 10^{-1}$, alors $k_{r+1} - 1 < 10^{-2}$, $k_{r+2} - 1 < 10^{-4}$, $k_{r+3} - 1 < 10^{-8}$, $k_{r+4} - 1 < 10^{-16}$: la précision double à chaque fois ; ainsi, pour $k_0 = 10$, $k_{12} - 1 < 10^{-1}$ et on peut prévoir, au-delà des chiffres donnés par la calculatrice ou l'ordinateur, que k_{16} vaudra 1 à moins de 10^{-16} près.

Exemple 2 : somme de deux dés

En répétant 100 fois de suite le lancer de deux dés et en effectuant la somme des points obtenus, on observe que certains résultats s'obtiennent plus souvent que d'autres.
On simule un plus grand nombre de lancers de deux dés (en réfléchissant à la pertinence de l'algorithme de simulation) et on construit le tableau des effectifs ou des distributions des fréquences : l'inégale répartition des fréquences de chaque résultat est flagrante.
La recherche d'un modèle théorique adapté avec une loi de probabilité équirépartie permet ensuite calculs et démonstrations : on prouve que les résultats sont inégalement probables et on détermine précisément leur probabilité.

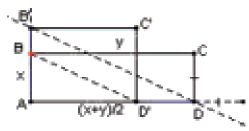
Résultats pour 5 séries de 100 lancers

2	0,02	0,02	0,01	0,03	0,01
3	0,03	0,02	0,09	0,06	0,04
4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,1
5	0,11	0,11	0,12	0,09	0,11
6	0,17	0,13	0,1	0,11	0,11
7	0,15	0,15	0,12	0,14	0,2
8	0,12	0,2	0,1	0,13	0,22
9	0,15	0,1	0,12	0,13	0,06
10	0,09	0,1	0,14	0,1	0,08
11	0,06	0,05	0,06	0,09	0,06
12	0,02	0,04	0,06	0,04	0,01

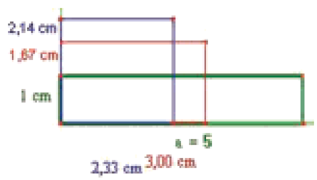
Le programme incite aussi à la diversité des points du vue sur une même question : on trouvera à ce propos un exemple classique du passage du géométrique au numérique, de l'ancien au moderne. Un tel exemple peut être le support de plusieurs exercices à différents moments de l'année, ou d'un devoir à la maison de synthèse.

Exemple 3

1 – L'algorithme de Babylone vise à construire un carré d'aire égale à celle d'un rectangle donné ABCD ; on construit pour cela le rectangle A'B'C'D' dont une dimension est la moyenne des dimensions de ABCD et dont l'aire est égale à celle de ABCD. À l'aide de la figure ci-contre, on montrera comment construire A'B'C'D'. On recommence cette construction à partir de A'B'C'D', etc.



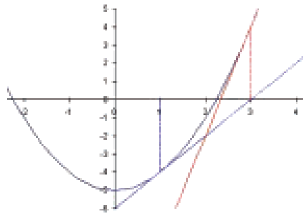
2 – Dans l'exemple ci-dessous, on observe que trois itérations suffisent pour obtenir pratiquement un carré.



3 – On peut passer dans le champ numérique et expérimenter en calculant les premiers termes des suites donnant les dimensions x_n et y_n du rectangle de l'étape n. Un tel calcul a été expliqué par Héron d'Alexandrie dans ses *Métriques* (Ier siècle après J.–C.). On observera sur les résultats ci-dessous la rapidité de la convergence.

racine à calculer		5
1	5	1
2	3	1,666666667
3	2,333333333	2,142857143
4	2,238095238	2,234042553
5	2,236068896	2,236067059
6	2,236067977	2,236067977
7	2,236067977	2,236067977

4 – On peut aussi relier cette méthode à la méthode « moderne » de Newton (XVIIe siècle) d'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - a$; la suite des approximations est la même que celle trouvée en 2 et 3.



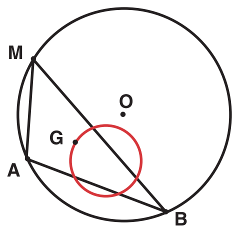
La mise en œuvre anticipée du programme de seconde dans une vingtaine de lycées durant l'année 1999-2000 a confirmé le grand intérêt de l'usage d'outils logiciels pour améliorer l'approche et l'assimilation de certains concepts (les deux exemples précédents illustrent déjà cette observation) ; l'exemple qui suit y revient et montre le changement de point de vue induit par l'expérimentation informatique. L'expérimentation devient si facile que la question : « Est-ce vrai ? », qui motive la démonstration, est souvent remplacée par : « Pourquoi est-ce ainsi ? ». La démonstration non seulement confirmera certains aspects des observations, mais sera ici l'unique outil qui permettra de comprendre, d'expliquer, de préciser et de quantifier, voire d'aller plus loin.

Exemple 4 : recherche d'un lieu géométrique

Les logiciels de géométrie dynamique permettent de déplacer les éléments ayant servi de points de départ de la figure. Ils permettent donc facilement d'observer la trace des points dont on cherche le lieu. À partir des conjectures que l'on peut ainsi effectuer sur la nature du lieu, le questionnement mathématique conduit à s'interroger sur la caractérisation géométrique de ce lieu et à chercher une démonstration. Dans l'élaboration de cette démonstration, l'élève est amené à faire de fréquents allers-retours entre l'observation et le domaine mathématique. Le raisonnement peut d'ailleurs l'amener à affiner son observation.

Que devient le centre de gravité d'un triangle ABM lorsque le point M décrit un cercle passant par A et B ? Le logiciel fait apparaître ce lieu comme un cercle. Est-ce une simple apparence ? Tous les points du cercle sont-ils des points du lieu ? Comment déterminer le centre et le rayon ?

Des connaissances géométriques sont nécessaires pour trouver comment le centre du lieu peut se déduire des points A, B et O ayant servi de points de départ de la figure, pour porter l'attention sur l'observation de certains invariants (invariant de direction ou d'alignement) et pour les interpréter.



Il est souhaitable que l'enseignant garde toujours le souci de donner à ses élèves une vision élargie de ce qui est fait dans la classe (donner du sens et du souffle !) : le plus souvent, les problèmes abordés ne sont pas clos et il ne faut pas hésiter à proposer des ouvertures dont certaines seulement peuvent être traitées. Même si tous les élèves ne sont pas au même degré de maturité et ne sont pas tous prêts à comprendre, quelque chose passe et restera ; il faut continuer à tout faire pour éviter de donner des mathématiques une vision étriquée réduite à des techniques… Ce souci d'ouverture n'est pas à opposer à la nécessité d'un travail de détail : c'est ce dernier qui est le plus contraignant. C'est à ce moment-là que se révèle la maîtrise des techniques de base au service d'une bonne compréhension.

À propos de la démonstration

Observons tout d'abord que les moyens d'expression de la pensée mathématique sont variés. D'ailleurs, un certain nombre d'entre eux ne sont pas propres aux mathématiques : argumenter, convaincre, etc. et se retrouvent aussi bien dans la dissertation en français, en philosophie ou en histoire que lors de travaux en sciences expérimentales. Par ailleurs, dans toutes les disciplines, c'est la même langue que l'on utilise, avec ses règles syntaxiques, ses mots de liaison logique. À ce titre, le professeur de mathématiques participe au travail de maîtrise de la langue française, tout particulièrement de la syntaxe, et il importe que les élèves en aient conscience.

Comme il est dit dans le programme, la démonstration est constitutive de l'activité mathématique; elle doit donc être largement présente lors des cours et travaux demandés aux élèves.

La démonstration soigneusement rédigée sous la forme d'un texte linéaire a été entrevue au collège; tout lycéen de première doit la maîtriser, au moins dans des cas élémentaires tel celui de l'exemple 1 ci-dessous. Dans d'autres cas, notamment en analyse, on se contentera d'argumentations visuelles ou graphiques, convaincantes et révélatrices d'une bonne compréhension du problème posé, telles celles en jeu dans l'exemple 3.

Une place particulière est réservée en mathématiques au langage symbolique : on en évitera tout excès ; mieux vaut privilégier le langage français usuel. L'abus d'expressions symboliques amène certains élèves à confondre symboles mathématiques et système d'abréviations, voire — cas extrême — à croire que c'est faire des mathématiques que d'habiller un texte de symboles ou de termes spécifiques.

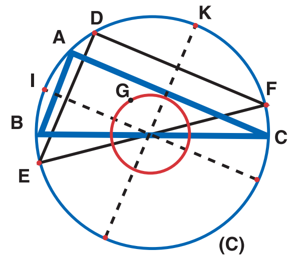
La rigueur du discours mathématique doit s'exercer à bon escient et, lors de la rédaction de démonstrations, on convient d'adopter systématiquement certains raccourcis, tels celui du tableau de variations évoqué dans l'exemple 2 ci-après.

Démontrer, c'est aussi calculer en respectant des règles. En analyse, l'utilisation du concept de limite d'une fonction en un point ou à l'infini repose sur l'intuition et la pratique de certains calculs et il n'est pas indispensable à ce niveau de définir formellement ce concept; on peut ensuite dégager un certain nombre de règles opératoires qui seront directement mises en œuvre dans les calculs de limite. S'il convient de dire aux élèves que ces règles correspondent à des théorèmes démontrables dans un cadre formel qui sera développé ultérieurement, il n'y a pas lieu d'en justifier systématiquement l'emploi.

Enfin, le discours mathématique, contrairement au discours usuel, est toujours complètement cohérent (pas d'« exception qui confirme la règle »); il est important de savoir repérer, et même chercher, les incohérences révélatrices d'erreurs et de remonter à la source de la contradiction. L'élève apprendra ainsi que le bon mathématicien n'est pas forcément celui qui ne fait jamais d'erreurs de calcul, mais bien plutôt celui qui, parce qu'il a bien compris la situation, possède de multiples façons de vérifier que son résultat n'est pas absurde et qui saura, si besoin est, corriger ses erreurs. Par exemple, si le calcul d'un carré donne un nombre négatif, on sait que ce résultat est impossible et qu'il vient probablement d'une erreur de calcul; de nombreuses autres situations donnent lieu à un contrôle simple par le signe. Si la probabilité d'un ensemble est supérieure à 1, l'impossibilité du résultat doit être immédiatement perçue et au moins commentée, etc. Une telle recherche de vraisemblance n'est pas automatique chez l'élève : l'acquérir est un objectif de l'enseignement de mathématiques et ne peut venir que d'un entraînement régulier.

Exemple 1 (démonstration complètement rédigée)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [BC], de centre O, A un point de $\mathcal{C}$ distinct de B et C, I et J (respectivement K et L) les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du diamètre perpendiculaire à (AB) (resp. à (AC)). À tout point D de $\mathcal{C}$ distinct de I, J, K et L, on associe E (resp. F) deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à (AB) (resp. à (AC)) passant par D.
Déterminer le lieu géométrique de l'isobarycentre G du triangle DEF.



(Cet énoncé, très proche de celui de l'exemple 4, p. 49, correspond à un sujet classique de contrôle ; dans un autre cadre, les précisions sur I, J, K et L pourraient être supprimées.)

[BC] étant un diamètre de $\mathcal{C}$, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Leurs parallèles respectives passant par D sont aussi perpendiculaires : le triangle DEF (lorsqu'il existe) est donc rectangle en D ; on en déduit que [EF] est un diamètre de $\mathcal{C}$. Le point G, isobarycentre du triangle DEF, vérifie alors $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$; G est donc l'image du point D par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

Le point D décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé des points I, J, K et L ; l'énoncé sous-entend en effet que les points E et F sont alors tous deux distincts de D. (On peut le justifier : E est confondu avec D si et seulement si la parallèle à (AB) passant par D coupe le cercle en le seul point D, c'est-à-dire si et seulement si cette parallèle est tangente au cercle en D ; les tangentes au cercle parallèles à (AB) sont perpendiculaires au diamètre [IJ] : il existe exactement deux telles tangentes et elles sont obtenues quand D est en I ou en J. E est donc distinct de D quand D est distinct de I et J. De même, D est distinct de F quand D est distinct de K et L.)

Or, l'image par h d'un cercle de centre Ω et de rayon r (respectivement privé d'un ou plusieurs points) est un cercle de centre h(Ω) et de rayon $\frac{1}{3}r$ (respectivement privé du ou des points images).

Quand D décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OB, privé des points I, J, K et L, G décrit donc le cercle $\mathcal{C}$' image de $\mathcal{C}$ par h, centré en O (car h(O) = O) et de rayon $\frac{1}{3}$ OB, privé des points h(I), h(J), h(K) et h(L).

Une telle forme achevée dépend bien sûr du niveau d'études où l'on se trouve, certains arguments indispensables au niveau d'études n devenant triviaux et donc implicites et inutiles au niveau $n + 1$. La « démonstration linéaire achevée » n'est par ailleurs que la dernière étape d'un processus, la dernière mise en forme ; elle est indispensable car elle participe à la structuration des acquis, constitue le mode de communication le plus achevé et valide tout le travail qui précède ; l'expérience seule permet d'en faire l'économie : si on ne la rédige pas intégralement, on sait qu'en cas de besoin, on pourra le faire. Il est à noter que, pour la plupart des élèves, le lycée sera le seul lieu où un travail de cette nature est systématiquement conduit. Mais il convient d'être raisonnable et progressif dans les exigences académiques : par ailleurs, les chemins de pensée qui mènent peu à peu à la possibilité de telles rédactions doivent aussi être reconnus comme un vrai travail.

Exemple 2 : utilisation du tableau de variations d'une fonction

Supposons que l'étude des variations d'une fonction permette d'aboutir au tableau de variations suivant.

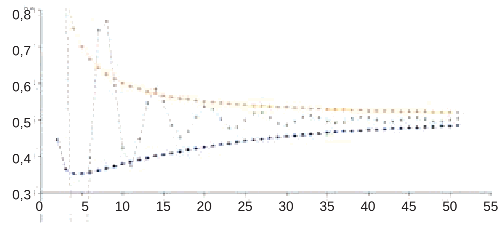
x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

On convient que le tableau de variations est une forme stylisée de représentation graphique : le plus souvent, elle pourra suffire au niveau des productions des élèves, sauf cas particuliers mettant en jeu des tangentes, asymptotes ou autres courbes indispensables pour la bonne réalisation de l'étude. La calculatrice graphique donnera un tracé plus précis.
On suppose par cette convention qu'il n'y a pas de « sauts » dans la courbe représentative sur un intervalle donné (notion intuitive de continuité qui sera précisée en terminale) et qu'une flèche inclinée correspond à une stricte monotonie.
On pourra alors en déduire sans discours supplémentaire :
– des encadrements d'images ;
– le nombre de zéros de f.

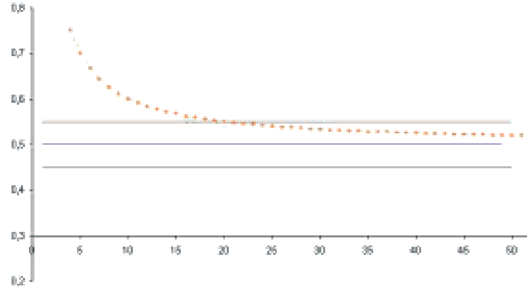
Remarque : la notion de fonction a été approchée au collège et explicitée en seconde. Les élèves ont toujours des difficultés à se faire une idée précise et opérationnelle de ce nouvel objet généralement noté f. Ils confondent souvent les deux notations f et $f(x)$. Leur expérience des expressions algébriques dans lesquelles figure une inconnue est plus ancienne que celle des problèmes spécifiques aux fonctions. Au cours du cycle terminal, on aura de nombreuses occasions (dérivée, intégrale, équation différentielle, etc.) d'expliciter la distinction entre f et $f(x)$; la notion de fonction prendra donc peu à peu sa place dans l'esprit des élèves et la distinction fonction/image d'un point deviendra plus signifiante. Cependant, tout en visant cet objectif pédagogique, on évitera tout purisme excessif ; on expliquera et autorisera à l'occasion certains abus de langage (tels « la fonction $ax + b$ », « la fonction $x^2 + 1$ »), utilisés spontanément par les élèves, usuels en physique ou dans l'enseignement supérieur (comme le reconnaît Bourbaki lui-même dans *Théorie des ensembles*, E.R.6).

Exemple 3 : théorème des « gendarmes » pour les suites

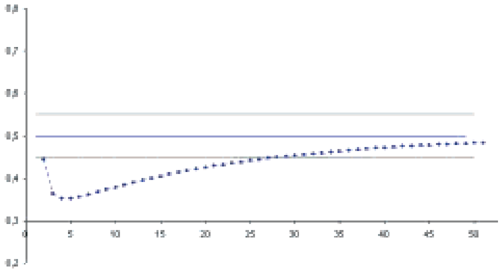
On sait que (u_n) et (v_n) ont une même limite l (ici $l = 0{,}5$) et que, à partir d'un certain rang, w_n est encadré par u_n et v_n (ici $u_n < w_n < v_n$ à partir du rang 14). On veut prouver que (w_n) a aussi pour limite l, c'est-à-dire que, quel que soit le « tuyau » centré sur la droite d'équation $y = l$, tous les w_n finissent par rentrer dans ce « tuyau ».
Ce qui suit (textes et dessins associés) peut être considéré comme une « démonstration graphique » (cela constitue une première approche de la définition en termes de N et ε qui sera amenée dans l'enseignement post-baccalauréat) : une telle démonstration suffit à ce niveau. *Les dessins réalisés ici à l'aide d'un tableur peuvent être remplacés par des croquis faits à la main (on pourrait se contenter d'un seul des deux dessins 2 et 3).*
1 – La suite (w_n) — en noir — est encadrée à partir d'un certain rang (le rang 14) par la suite (u_n) — en orange — et par la suite (v_n) — en bleu.



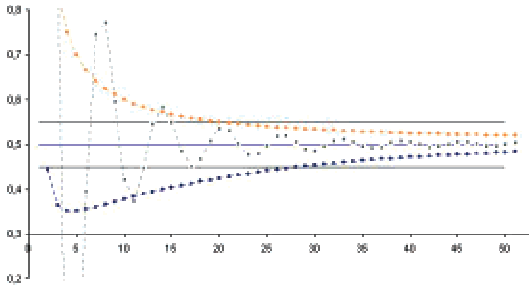
2 – On se donne un « tuyau » centré sur $l = 0{,}5$ (ici c'est le « tuyau » $]0{,}45 ; 0{,}55[$).
À partir d'une certain rang (ici 20), tous les u_n rentrent dans le tuyau (car (u_n) converge vers l).



De même, à partir d'un certain rang (ici 30), tous les v_n rentrent dans le tuyau (car (v_n) converge vers l).

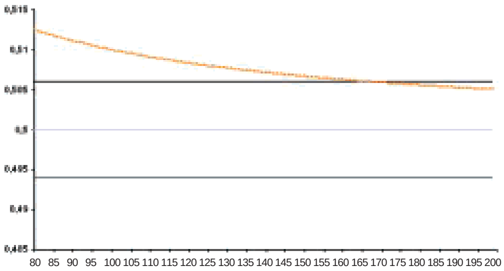


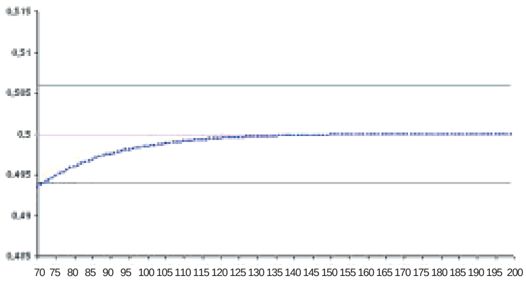
D'où, à partir d'un certain rang (le rang 30), tous les w_n rentrent dans le tuyau.

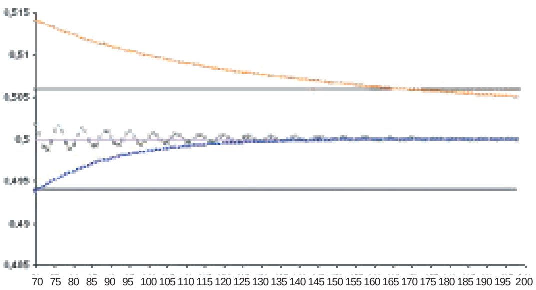


3 – Ceci marche pour n'importe quel « tuyau », par exemple pour le « tuyau plus fin »]0,495 ; 0,505[.

Remarque : l'intérêt de ce deuxième tuyau est bien sûr heuristique et non logique.







Mémorisation et automatismes

Bien que les mathématiques ne se réduisent pas au calcul, celui-ci est une activité qui dans sa diversité est assez spécifique de cette discipline ; qu'il soit numérique, algébrique ou vectoriel, il est omniprésent et sa pratique régulière est indispensable pour progresser et réussir. Calculs simples et règles opératoires mués en automatismes libèrent la pensée, facilitent la compréhension et permettent de se consacrer à d'autres tâches ; par exemple, la non-linéarité de la fonction racine doit être assimilée au point de devenir un réflexe. Lors de l'étude d'une notion donnée, telle celle de dérivée, un certain niveau de maîtrise du calcul est indispensable pour aborder les problèmes l'introduisant et ne pas engluer la réflexion dans des aspects techniques faisant perdre de vue l'objectif poursuivi : dans le cas cité de la dérivée, il faut être capable de résoudre sans difficulté une équation du second degré, de déterminer rapidement l'équation d'une droite passant par deux points, de simplifier une expression, etc. Mais imposer comme un *a priori* indispensable une technicité poussée est peu motivant ; ainsi, on a voulu éviter de poser l'étude des limites en 0 comme un préalable à l'approche de la dérivée : il est possible de s'appuyer sur une simple approche intuitive et il est plus pertinent d'attendre une situation où ces questions se posent vraiment. On ne peut oublier que c'est aussi en interaction avec des questions posées que se forge une part des outils nécessaires pour avancer.

Il s'agit de viser une certaine aisance, au-delà de laquelle calculatrices et ordinateurs prennent le relais. Dans le registre du calcul automatisé, il ne suffit pas d'obtenir des résultats : il faut d'abord anticiper quelque peu un calcul, au moins dans sa forme, pour percevoir l'intérêt de sa mise en œuvre, puis savoir interpréter les résultats et juger de leur validité et de leur limite.

Les derniers développements des calculatrices laissent présager un accès banal à des logiciels de calcul formel. Il s'agit de bien les intégrer à l'ensemble de la démarche d'apprentissage. En complémentarité avec l'entraînement nécessaire à la maîtrise des calculs les plus courants, ils peuvent représenter un moyen précieux de vérification, mais aussi d'investigation, ouvrant la voie à des situations mathématiques plus riches.

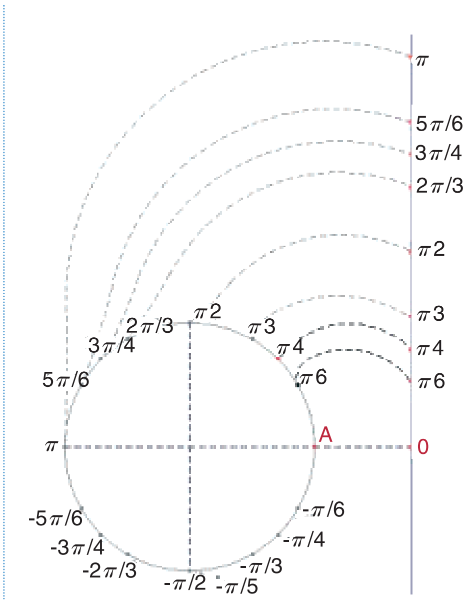
Prendre l'habitude d'une pratique régulière et individuelle de nombreux petits calculs à la main, à propos de questions variées, est un objectif général dans tout l'enseignement des mathématiques ; cela permet, outre l'acquisition d'automatismes, d'allier apprentissage et compréhension. Il ne s'agit pas pour autant de rechercher la virtuosité : calculatrices et ordinateurs ont rendu cet objectif inutile.

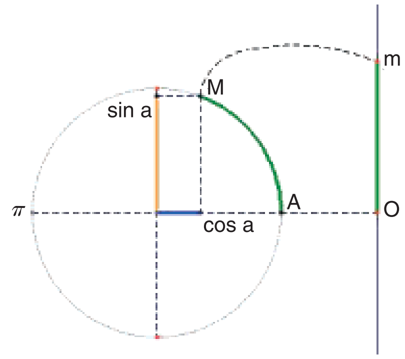
C'est par la mémorisation et l'acquisition d'automatismes que chaque élève peut rendre des objets mentaux familiers et disponibles et se construire un paysage mathématique dans lequel prendront place les nouveaux objets ou théories.

La connaissance et la familiarisation avec les objets du plan et de l'espace retenus par le programme relèvent de la même intention.

Exemple 1 : le cercle trigonométrique

Être familier du cercle trigonométrique, c'est voir l'« enroulement » de la droite réelle sur le cercle, l'enchaînement de cet enroulement avec les projections pour définir le sinus et le cosinus d'un réel, le « déroulement » correspondant pour comprendre la périodicité du sinus et du cosinus…





On peut (et on doit) aller plus loin dans ce propos. Il est indispensable que les élèves connaissent par cœur et avec la plus grande précision un certain nombre de formules ou théorèmes de base : ceux-ci doivent leur être immédiatement disponibles.

Organisation et évaluation

Dans la série S, l'année de première est, à plus d'un titre, une année charnière pour l'enseignement des mathématiques. Elle s'inscrit dans le prolongement des années antérieures : le programme de première S s'appuie en effet sur le socle de connaissances mis en place au collège et en seconde, sur les démarches de recherche et de raisonnement demandées par les programmes et explicitées dans les documents d'accompagnement et sur l'utilisation des divers outils de travail à la disposition de l'élève d'aujourd'hui. Elle marque par ailleurs un saut qualitatif important, inévitable en cette première année d'une filière spécifiquement scientifique.
L'enseignant, pour chaque chapitre et en fonction de sa classe, trouvera un équilibre entre les apprentissages techniques et conceptuels. La dialectique entre ces deux pôles est constitutive de la formation visée au lycée; techniques et réflexion de fond doivent interagir en permanence dans le cours, se soutenir mutuellement, s'équilibrer de façon dynamique, pour que chaque élève puisse avancer à son rythme (la manipulation de règles techniques constitue pour certains élèves une étape nécessaire précédant une compréhension plus profonde, parfois plusieurs semaines ou plusieurs mois plus tard, voire l'année suivante).

Par ailleurs, l'enseignant se trouve au cœur de difficultés qui concernent directement sa pratique professionnelle :
– contradiction entre les attentes naturelles des élèves privilégiant les routines, l'entraînement mécanique, la parcellisation, etc. pour la réussite à l'examen, et la volonté de l'institution de proposer une formation générale dépassant le moment de l'examen, voire le temps scolaire;
– changement de culture entre des enseignants qui ont accédé au savoir à travers l'écrit et les lycéens d'aujourd'hui qui ont grandi dans un monde dominé par l'image;
– difficulté de concilier l'accès à des filières scientifiques pour un grand nombre de jeunes et le maintien d'un bon niveau de formation.

Ces problèmes existent; l'institution ne peut y apporter à elle seule une réponse complètement satisfaisante. Néanmoins, elle doit faire au mieux dans un environnement qu'elle ne contribue aujourd'hui que partiellement à créer.

L'organisation du travail des élèves

Le programme précise (paragraphe 4) les divers types de travaux à prévoir durant la classe ou en dehors.
Seule une évaluation effectuée *a posteriori* peut permettre d'éventuelles régulations de la mise en œuvre du programme (la perspective de l'examen final rend très difficile, pour l'instant, une expérimentation préalable à ce niveau du cursus). Rappelons ici que l'efficacité de l'enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière, en demi-classe ou en travail personnel.

À titre indicatif, le temps à consacrer aux différents chapitres pourrait être de 1/7 pour la statistique et les probabilités, le reste se répartissant à peu près équitablement entre géométrie et analyse.

Le problème de l'évaluation

Ce problème est central dans tout processus de formation : il concerne aussi bien l'évaluation en cours de formation, permettant à l'élève de se situer et à l'enseignant d'adapter ses exigences, que l'évaluation terminale certifiant des acquis pour le passage en classe supérieure ou pour la fin des études secondaires et l'entrée dans l'enseignement supérieur.

Le programme propose quelques pistes en fin de son paragraphe 4. Comme expliqué plus haut, les contenus ne sont pas déclinés en termes de « compétences exigibles » (cf. programme de collège) ou de « capacités attendues » (cf. programme de seconde).

À propos des items du programme

Si le programme précise les contenus à traiter dans chaque paragraphe, il n'impose pas la façon de les aborder : celle-ci est laissée au choix du professeur. Le préambule du programme et de nombreux paragraphes de ce document rappellent néanmoins que la démarche souhaitée est le plus souvent d'aller d'une question ou d'un problème à une notion, l'élève étant partie prenante de l'élaboration de cette notion et de l'explicitation de ses propriétés. Le champ des problèmes et des techniques que les élèves ont à étudier à cette occasion ou en application des notions introduites est en général indiqué dans la colonne « modalités du programme » ; quelques précisions sont apportées ci-dessous.

Géométrie dans l'espace

Un travail a déjà été mené en classe de troisième sur la nature géométrique et la représentation de certaines sections planes de solides (cube, sphère, cylindre, cône et pyramide). Ce travail est repris ici dans deux directions :
– construire en justifiant les sections planes d'un cube et d'un tétraèdre ; cela doit permettre, d'une part, de réactiver les acquis de seconde (vision et représentation de l'espace, axiomes d'incidence, orthogonalité) et, d'autre part, d'introduire le repérage cartésien de l'espace. On en restera à des exemples simples ;
– établir une équation cartésienne en repère orthonormal de certains objets de l'espace.
On observera ici la double signification que prennent en fin de première les mots « cône » et « cylindre » : solide limité ou réunion de droites selon le contexte. L'équation demandée concerne l'objet « réunion de droites » : les élèves doivent savoir en retrouver le mode de calcul.
La géométrie dans l'espace se retrouve également dans un cadre vectoriel dans les paragraphes relatifs au barycentre et aux homothéties et translations : l'essentiel du travail pourra être conduit dans le plan, mais on veillera à proposer quelques exercices ou applications simples dans l'espace.

Angles orientés et repérage polaire

Le programme a ici fait le choix d'une vision dynamique : se repérer en polaire signifie se ramener à un pôle et à un axe polaire et décrire le mouvement pour rejoindre le point visé. On utilisera les coordonnées polaires usuelles (r,θ) avec $r > 0$; on conviendra que le pôle a pour coordonnées polaires $(0,\theta)$ avec θ arbitraire.
On pourra, lors de la mise en place de ce repérage ou à l'occasion d'exercices ou problèmes, utiliser le vocabulaire des rotations introduit en troisième et repris à l'occasion de certaines activités de seconde (cf. document d'accompagnement de seconde et programme de troisième). Dans le programme de troisième, l'une des compétences exigibles est : *« construire l'image par une rotation donnée d'un point, d'un cercle, d'une droite, d'un segment et d'une demi-droite »* ; les commentaires correspondants précisent : *« Les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles seront dégagées des propriétés d'une rotation (conservation des longueurs, des alignements, des angles, des aires). Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices simples de construction* […] »
Le mot « angle orienté » a été introduit en seconde (cf. document d'accompagnement)
– en liaison avec l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique,

avec les rotations (vues en collège) et avec une première observation de l'orientation des figures –, mais aucune compétence n'était exigée en seconde à leur propos. Le terrain est néanmoins prêt pour caractériser un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs non nuls, pour les mesurer et présenter la relation de Chasles : on s'appuiera pour cela sur le cercle trigonométrique (en particulier pour souligner la correspondance bijective entre angles orientés et les réels de l'intervalle $]-\pi,\pi]$).

On évitera ici à la fois le formalisme excessif et les confusions préjudiciables à la mise en œuvre ; on acceptera les abus de langage et de notations usuels confondant un angle et l'une de ses mesures, tels $(Ox,Ox') = \pi$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ en faisant observer aux élèves à la fois leur intérêt (simplification de l'écriture) et leurs risques (par exemple, lors d'exercices de recherche d'un angle â dont l'angle double mesure α ou dans l'écriture de suites d'égalités qui aboutiraient, par exemple, à $\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$). On n'oubliera pas que le souci de rigueur formelle a, dans un passé récent, détourné un certain nombre d'enseignants et d'élèves de l'utilisation régulière de cet objet de base, d'un abord pourtant si naturel et si indispensable dans de nombreuses disciplines. On pourra, selon l'intérêt des classes, envisager une réflexion épistémologique sur la nature des objets angle/mesure (en évoquant les notions de segment, longueur et mesure) et observer le caractère particulier des angles : sans dimension dans les formules des physiciens (ils peuvent en effet être définis comme quotients de deux longueurs : portion de circonférence/rayon), ils sont pourtant mesurés avec une unité. Pour cette dernière, on montrera en quoi le radian est la « bonne » unité pour les mathématiciens ; ceci pourra être signalé lors de la présentation de la dérivée des fonctions sinus et cosinus et de l'illustration de la dérivée de sinus en 0.

Repérage polaire et repérage cartésien sont à relier : les élèves retrouveront ce lien et un mode efficace de travail sur ces notions lors de l'étude des nombres complexes en classe terminale.

Angles orientés et angles géométriques interviennent à de nombreuses reprises dans le programme : lors de la définition du produit scalaire, à l'occasion des formules trigonométriques, dans les calculs de grandeurs géométriques ou la recherche de certains lieux géométriques.

Barycentre

On définira d'abord le barycentre de deux points pondérés et on étendra cette définition à trois ou quatre points, les coefficients étant toujours numériques (non littéraux). Ce paragraphe sera l'occasion de proposer aux élèves des calculs vectoriels signifiants ; on n'oubliera pas que la place de ces derniers a été notablement réduite en classe de seconde. Comme indiqué dans le programme, on appliquera le barycentre à la recherche d'alignement ou de points de concours dans le plan et l'espace, et l'on évitera toute technicité.

Produit scalaire dans le plan

La définition attendue est soit celle utilisant la projection orthogonale, soit celle utilisant le cosinus mais les deux formes doivent être connues. On notera que la notion de projection orthogonale n'a jamais été introduite comme telle dans les années antérieures : cela ne doit pas empêcher d'utiliser le mot (comme cela a pu être fait lors de la mise en place du repérage d'un point dans le plan ou dans l'espace, ou bien à propos de perspective cavalière) sans faire de développement théorique sur cette application. La plupart des résultats et applications cités par le programme dans ce paragraphe peuvent être démontrés à ce niveau ; ceci étant fait (selon les modalités, magistrales ou autres, les plus favorables à la compréhension des élèves), la plus grande partie du temps sera consacrée au traitement d'exercices et de problèmes.

On traitera quelques exemples simples de détermination de lieux géométriques à l'aide du produit scalaire (conditions de distances et d'angles, points liés à une configuration mobile, etc.). Mais il n'y a pas à entreprendre en cours une étude systématique

des différentes lignes de niveau : $M \mapsto \vec{k} \bullet \overrightarrow{AM}$, $M \mapsto MA^2 + MB^2$, $M \mapsto MA^2 - MB^2$ ou $M \mapsto \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$.
On mettra en évidence l'apport spécifique du produit scalaire pour les calculs de longueurs, d'aires ou d'angles, sans négliger pour autant les outils vus les années antérieures (les formules reliant les sinus des angles, les côtés et l'aire d'un triangle sont dans le fil de ces outils : elles seront éventuellement introduites dans des problèmes).

Transformations

Deux familles de transformations sont proposées à l'étude systématique : celle des translations et celle des homothéties. Il est à noter qu'aucune transformation nouvelle n'a été introduite en seconde : les élèves y ont utilisé leurs seuls acquis du collège sur les translations, symétries et rotations dans le plan ; ces transformations étaient perçues avant tout comme agissant sur des figures et non comme des applications ponctuelles du plan sur lui-même.
L'étude demandée des translations et des homothéties sera faite simultanément dans le plan et dans l'espace. Les invariants usuels seront introduits à travers des exercices ou des manipulations faites avec un logiciel de géométrie, avant d'être énoncés avec précision ; comme pour toutes les autres parties du programme, l'enseignant reste libre de démontrer en totalité ou en partie les divers résultats : dans tous les cas, le statut (démontré ou admis) de chaque énoncé doit toujours être clairement précisé. On peut observer, à ce propos, que certaines réciproques (par exemple, pour montrer que l'image d'une droite est une droite) paraissent inutiles aux yeux de la plupart des élèves : peut-être vaut-il mieux y revenir plus tard lorsque certaines recherches de lieux géométriques auront montré le caractère indispensable de cette réciproque (cf. exemple 1, p. 51).
On soulignera le caractère bijectif des homothéties et des translations (lors de cette première rencontre de la notion de bijection, on gardera une approche intuitive : aucune définition formelle n'est demandée) et on présentera la transformation réciproque.
Là aussi, la plus grande partie du temps sera consacrée au traitement d'exercices et de problèmes. Le programme demande que les transformations (y compris toutes celles utilisées auparavant) soient mises en œuvre, en particulier dans la recherche de lieux géométriques.

Lieux géométriques

Cette partie est détaillée en annexe (p. 75).

Généralités sur les fonctions

L'un des objectifs de ce paragraphe est de montrer comment on peut définir de nouvelles fonctions à partir de celles déjà étudiées en classe de seconde ; dans certains cas, on peut conclure rapidement sur leurs variations, dans d'autres non et la recherche de nouveaux outils (en particulier la dérivée) trouve naturellement sa place.
Le terme de polynôme n'est ici introduit que pour permettre de qualifier aisément les fonctions polynômes ; aucun travail algébrique spécifique n'est exigé, si ce n'est la résolution de l'équation du second degré. En particulier, aucune connaissance n'est exigible en matière de factorisation par $(x - a)$ – sauf dans le cas du trinôme – ou d'unicité de l'écriture polynomiale : celle-ci sera admise en cas de besoin dans certains exercices.
Les contenus cités dans ce paragraphe doivent permettre le développement d'habiletés dans divers domaines : calcul algébrique (lors d'opérations algébriques sur les fonctions), inégalités (sens de variation de $u + \lambda$, de λu, etc.), représentations graphiques, utilisation d'un grapheur, raisonnement (contre-exemple), mise en équation de problèmes, etc.
Aucune étude systématique des variations de $u + v$ et de uv à partir de celles de u et v n'est demandée ; en revanche, sur quelques exemples, on illustrera la diversité des comportements. On ne perdra pas de vue qu'aucun résultat sur la somme ou le produit d'inégalités n'a été donné en seconde : les exemples traités ici en donneront donc un aperçu.

Comme indiqué dans le programme et explicité plus haut dans ce document (« Mémorisation et automatismes », p. 54), on motivera l'introduction de chaque nouvelle notion ou calcul. Quelques « gammes » calculatoires, déclarées comme telles, devront néanmoins être exécutées, réparties tout au long de l'année, mais en évitant les difficultés gratuites ou les pièges (c'est en réussissant à faire des calculs que les élèves pourront y prendre goût) ; il est, par exemple, indispensable que les élèves acquièrent suffisamment d'aisance dans le traitement du trinôme du second degré pour que celui-ci soit immédiatement disponible lors d'études de variations de fonctions ou d'intersections de courbes.
Pour les représentations graphiques, quelques constructions à la main s'imposent ; on privilégiera néanmoins l'utilisation systématique d'un grapheur (calculatrice graphique ou ordinateur). Le programme demande de justifier les symétries observées ; on pourra utiliser les adjectifs « pair » et « impair », mais aucune connaissance théorique n'est exigée en la matière.

Dérivée

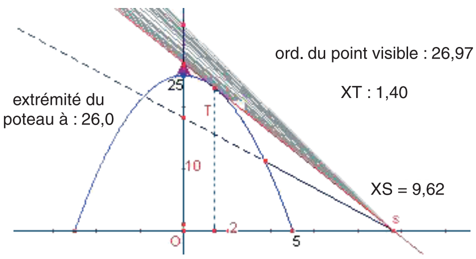
Le programme cite plusieurs approches possibles de la dérivée. Il suggère d'éviter l'introduction préalable de la notion de limite d'une fonction en un point, et d'adopter au départ un langage intuitif : le nombre dérivé de f en un réel a étant, par exemple, ce vers quoi « tend » le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h « tend » vers 0. À l'expérience de nombreux enseignants dont c'était déjà la pratique, cette absence d'usage préalable de la notion de limite n'est pas une gêne lors de l'introduction du nombre dérivé ; au contraire, cette irruption de la notion de limite justifie un paragraphe ultérieur de mise au point sur la notion de limite en 0 : l'intuition suffira pour établir un certain nombre de résultats relatifs à la limite quand h tend vers 0 d'expressions du type $f(a + h)$ pour des fonctions f « régulières » (polynômes, rationnelles ou avec radicaux), ainsi qu'à la limite d'une somme, d'un produit ou d'un inverse.
Le programme demande que soient justifiés un certain nombre de résultats. « Justifier » signifie ici « convaincre » (au sens d'« éclairer » et non de « contraindre » par un raisonnement déductif imparable) à l'aide d'arguments calculatoires (calcul du taux d'accroissement de $1/u$ ou de uv), graphiques (pour la monotonie) ou « intuitifs » (pour la limite de $u(a + h)$ ou le produit de limites).
Ainsi, pour $1/u$, il s'agit d'écrire que :

$$\frac{1/u(a+h)-1/u(a)}{h}=-\frac{u(a+h)-u(a)}{hu(a+h)u(a)}$$

et de conclure en faisant des raisonnements « intuitifs » sur les limites et leurs produits.
On trouvera ci-dessous quelques situations permettant soit une approche possible de la notion de dérivée et de tangente, soit un éclairage *a posteriori*.

Situation 1 (approche) : le terril

(D'après un document du groupe AHA, Approche heuristique de l'analyse, université de Louvain-la-Neuve, Namur.)
Au sommet d'un terril de 25 m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut. On admet que la ligne de pente de ce terril est une portion de la parabole d'équation $y = -x^2 + 25$.



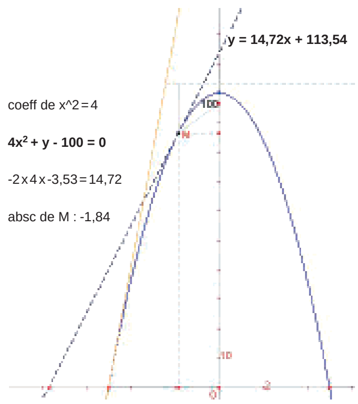
À quelle distance du pied du terril faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton de 1 mètre de haut ?
L'illustration ci-dessus représente une modélisation de cette situation et aide les élèves à bien situer le problème.
Placé trop près, on ne pourra pas voir le sommet du bâton. En un point d'abscisse s de l'axe des abscisses, la direction du regard doit « frôler » le flanc du terril.

En considérant le point H(0 ; 26) qui représente le sommet du bâton et une droite passant par ce point, on est amené à caractériser les différentes possibilités d'intersection de cette droite et de la parabole. La mise en équation donne la condition d'existence de solutions et le cas « limite » d'une seule solution.

Situation 2 : intersections

Toujours avec la même parabole ou une autre ayant une équation du même type (par exemple, avec celle d'équation $y = 100 - 4x^2$ pour faire le lien avec la situation du freinage qui sera étudiée ensuite), en divers points d'abscisse connue de cette parabole, on détermine l'équation de la droite ayant un seul point en commun avec la parabole ; on compare la valeur des coefficients directeurs de ces droites particulières et les abscisses des points de « contact ». On calcule le coefficient directeur en fonction de l'abscisse x_0 du point de contact.

On peut faire le lien avec le calcul de ce même coefficient directeur en prenant une sécante passant par les points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$ en s'appuyant sur une approche intuitive de la limite lorsque h tend vers 0.



Il est intéressant alors de mettre en évidence une propriété utile pour construire très simplement n'importe quelle tangente : on calcule l'ordonnée du point d'intersection T de la tangente avec l'axe des ordonnées, celle du sommet S de la parabole, celle du point de contact M et on établit ainsi que S est le milieu du segment joignant ce point T au projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

Situation 3 : quelle vitesse instantanée ?

La situation ci-dessous est le compte-rendu d'un travail effectivement réalisé dans une classe ; c'est sur proposition des élèves que l'on s'est orienté vers la dérivée symétrique : il est bien sûr inutile de l'amener artificiellement. Dans le cas où l'enseignant aboutit à un déroulement analogue dans sa classe, celui-ci pourra faire observer que c'est la méthode utilisée par un certain nombre de calculatrices et que le rapport tend plus vite vers une valeur limite que celui de la définition classique.

Les élèves connaissent bien la notion de vitesse moyenne et savent la définir (distance parcourue/temps de parcours) ; l'expérience de la voiture fait que chacun a aussi l'intuition d'une vitesse instantanée : comment définir cette deuxième notion ?

La démarche suivante peut être proposée (en liaison avec l'étude de la chute des corps faite en physique).

Soit un mobile dont la distance à un point origine est donnée en fonction du temps par la fonction $d : t \mapsto t^2$.

On sait calculer la vitesse moyenne entre les instants 1 et 2, 1 et 3, 2 et 5, etc.

On constate que la vitesse moyenne entre les instants t et t +1 augmente quand t augmente.

Comment définir une vitesse à l'instant 2 ? Le calcul de la vitesse moyenne entre deux instants symétriques par rapport à 2 (1 et 3 ; 1,5 et 2,5 ; 1,9 et 2,1 ; 1,99 et 2,05; etc.) amène à s'intéresser à un quotient du type $\dfrac{(2+h)^2-(2-h)^2}{2h}$ qui vaut toujours 4 ! D'où une première méthode pour trouver la vitesse instantanée.

Le choix d'une autre fonction, $d : t \mapsto t^3$, par exemple, et les mêmes calculs à l'instant 2 amènent à considérer le quotient $\dfrac{(2+h)^3-(2-h)^3}{2h} = 12 + h^2$ et envisager ce qui se passe quand h prend des valeurs égales à 0,1, puis 0,01, puis 0,001, etc.

On aborde ici pour la première fois la notion de « tend vers » ; il serait dommage d'arrêter le travail en cours pour parler de limites (leur intérêt n'apparaîtra que plus tard) ; on en restera à un vocabulaire très intuitif : « $12 + h^2$ tend vers 12 quand h tend vers 0 » ; d'où la vitesse instantanée à l'instant 2.

Traduction graphique
Après avoir représenté chacune des fonctions d précédentes, on peut demander aux élèves de lire graphiquement les vitesses moyennes calculées précédemment et de procéder à une première association intuitive entre « pente » de la courbe et « vitesse ». Le passage de vitesse moyenne à vitesse instantanée opéré plus haut se traduit alors par une recherche de position limite de sécante, que l'on convient d'appeler tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

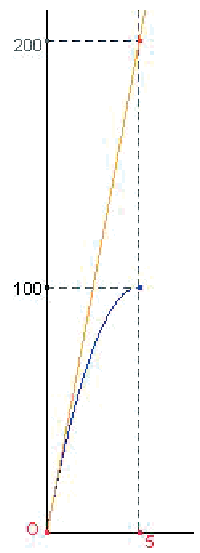
Ces deux situations (vitesse instantanée et tangente) justifient l'introduction d'un mot nouveau : le nombre dérivé de f en a, défini comme le nombre vers lequel « tend » $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ quand h « tend » vers 0 (h restant positif) ; ce nombre caractérisera désormais la vitesse instantanée ou la pente de la tangente.

Un tel nombre est-il toujours calculable pour les fonctions déjà connues (polynômes de degré inférieur à 3, $x \mapsto \sqrt{ax+b}$) ?
Confrontation à la fonction valeur absolue, en 0 : pas de tangente et pourtant un « nombre dérivé ».

D'où la recherche d'une nouvelle définition rompant apparemment avec la « symétrie » conservée jusque-là et l'utilisation (tant pour la recherche d'une vitesse instantanée que pour celle de la tangente) du rapport : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Effet sur les calculs précédents (complication ou simplification ?), h pouvant être positif ou négatif, on ne perd pas la « symétrie » évoquée plus haut.
Utilisation éventuelle de l'expression « limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ».
Introduction de la fonction dérivée.

Situation 4 : freinage

Supposons que lors d'un freinage, la décélération d'une voiture soit constante en fonction du temps et que la distance parcourue par la voiture à partir de l'instant de freinage s'exprime alors par une expression de la forme :
$d = -kt^2 + v_0t$. Ainsi, pour une voiture roulant à une certaine vitesse et s'arrêtant en 5 s sur une distance de 100 m, on a obtenu :
$d = -4\ (t-5)^2 + 100$.
À partir de là, on peut se poser quelques questions :
– à quelle vitesse roulait la voiture juste avant le début du freinage ?
– quelle distance aurait parcouru cette même voiture dans le même laps de temps de 5 s si elle n'avait pas freiné ?
– à quelle vitesse arrive-t-elle sur un obstacle situé à 50 m du début du freinage ? à 80 m ?

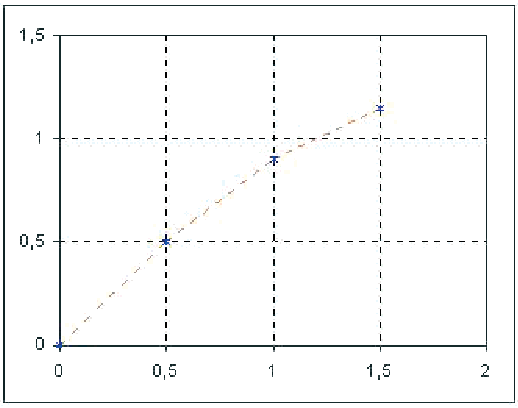


Méthode d'Euler

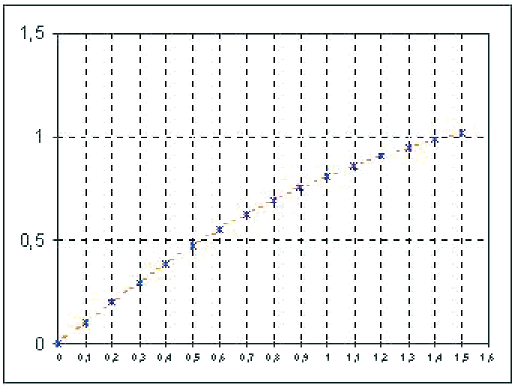
À propos de l'item du programme : « on construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\ \Delta t$ », on considère par exemple la fonction f définie par : $t \mapsto f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et on souhaite construire point par point une approximation de la fonction F vérifiant : $F'(t) = f(t)$ et $F(0) = 0$.

En classe de première on ne pourra pas démontrer l'existence d'une telle fonction mais on signalera que ce problème sera abordé en terminale.

Sur papier millimétré, on approche successivement $F(0{,}5)$ et $F(1)$.
On a : $F(0{,}5) - F(0) \approx 0{,}5\, F'(0)$, soit : $F(0{,}5) - F(0) \approx 0{,}5\, f(0)$. Ainsi, $F(0{,}5) \approx 0{,}5$.



On réitère à partir de $F(0{,}5)$: $F(1) - F(0{,}5) \approx 0{,}5\, f(0{,}5)$, etc.
Au tableur, on peut affiner le pas h en exploitant les coordonnées définies par les relations de récurrence suivantes : $x_n = nh$ et $y_{n+1} = y_n + h \times \dfrac{1}{1+(nh)^2}$.
Ci-dessous une représentation graphique pour $h = 0{,}1$.



Ce travail prépare la méthode d'Euler sur les équations différentielles qui permet de représenter des approximations de solutions d'équations différentielles sans les avoir déterminées analytiquement.
On trouvera sur ce sujet une animation plus élaborée sur le cédérom joint.

Limites et comportement asymptotique

La notion de limite apparaît à deux reprises dans le programme : à propos de la dérivée et lors de l'étude du comportement asymptotique de certaines fonctions.
Comme déjà dit plus haut pour l'introduction de la dérivée, l'intuition suffira pour établir que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ pour les fonctions f « régulières » (polynômes, rationnelles ou avec radicaux).
On fera observer aux élèves que cela correspond à un tracé de la courbe représentant la fonction sans lever le crayon (le terme de fonction continue sera introduit en terminale : il peut néanmoins déjà être utilisé ici de façon naïve). Dans tous les calculs de dérivée, on aboutit – après simplification par h – à ce type de fonction. Comme d'habitude, on ne soulèvera aucune difficulté sur la présence sous-jacente d'un prolongement en 0 du taux d'accroissement simplifié par h.
On ne s'intéresse au comportement à l'infini que pour des fonctions polynômes de degré au plus 3 ou des fonctions rationnelles simples (voir programme) ; on s'appuiera là aussi sur l'intuition. À partir de manipulations numériques (en donnant à x des valeurs successivement égales à 10^3, 10^6…) et de représentations graphiques, on donnera la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ des fonctions de référence x, x^2, x^3, $\dfrac{1}{x}$, etc.

On observera très vite que le comportement asymptotique d'un polynôme (respectivement d'une fonction rationnelle) est donné par son terme de plus haut degré (resp. par le quotient de ses termes de plus haut degré). Ces observations donneront lieu à la mise au point de règles opératoires, suffisantes pour toutes les études exigibles de comportement asymptotique, et l'obtention des droites asymptotes « horizontales » ou «obliques ».
La représentation graphique de la fonction inverse faite en seconde donne une première approche de la limite de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures et de la notion d'asymptote « verticale » ; en première, on s'appuiera sur quelques manipulations numériques pour établir que si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, alors le quotient tend vers l'infini, le signe étant à préciser.

À l'occasion de l'une de ces recherches de limite (dérivée, à l'infini ou en une borne finie pour une fonction rationnelle), on mentionnera les règles opératoires usuelles pour la limite d'une somme ou d'un produit.

Fonctions disponibles pour la classe terminale

Les études de fonctions seront orientées vers la résolution d'un problème, la recherche d'un extremum, d'un encadrement, etc. Un certain nombre d'acquis devront néanmoins être disponibles pour la classe terminale.
À l'issue de la classe de première, les élèves devront savoir étudier les variations et les limites aux bornes d'un intervalle de définition d'une fonction polynôme de degré au plus 3 et d'une fonction rationnelle simple (avec mise en évidence de ses asymptotes).
Pour les fonctions irrationnelles, les élèves devront savoir calculer la dérivée d'une fonction du type $\sqrt{ax+b}$ et étudier ses variations, la représentation graphique pouvant s'en déduire ou être obtenue à l'aide d'un grapheur en passant de $\sqrt{x}$ à $\sqrt{ax+b}$.
Aucune étude de limite n'est exigée (la notion intuitive de continuité suffisant pour les limites donnant accès au nombre dérivé).
Pour les fonctions trigonométriques, les élèves devront savoir calculer les dérivées des fonctions sinus et cosinus, et d'éventuelles autres fonctions simples construites à partir de celles-ci, mais on évitera les exercices de calcul artificiels. Les fonctions sinus et cosinus ont été représentées en classe de seconde ; en liaison avec le travail sur les angles orientés, on définira la périodicité de ces fonctions. On étudiera sur un grapheur le passage de la représentation de sinus ou cosinus à celle d'une fonction qui s'en déduit simplement ; on étudiera quelques exemples très simples de fonctions pour lesquelles on peut, par lecture sur le cercle trigonométrique, conclure quant aux zéros ou au signe de la dérivée sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (comme la fonction $\cos^2 x$ ou $\cos^2 x - \cos x$).

Suites

L'étude des suites arithmétiques et géométriques inclut naturellement le calcul de la somme des n premiers termes ; ce calcul fait partie intégrante de l'étude de ces suites dans une section scientifique.
On ne soulèvera pas de difficultés formelles en classe de première sur la notion de raisonnement par récurrence. La définition d'une suite par récurrence, l'éventuelle identification de deux suites ayant le(s) même(s) premier(s) terme(s) et vérifiant la même relation de récurrence, seront autant d'occasions de se familiariser avec ce nouveau concept mathématique : celui-ci sera formalisé en classe terminale.
En première, on étudie surtout l'évolution « en temps fini » des termes d'une suite, la limite jouant le rôle d'un « point sur la ligne d'horizon », point qu'il convient de regarder pour ne pas se tromper complètement de direction. Le travail sur les suites sera d'abord d'en reconnaître un peu partout (en géométrie comme en dehors du champ des mathématiques) – cf. l'annexe sur les suites. À l'occasion de ce travail, l'élève se sensibilisera aux critères de lecture des résultats fournis par des calculatrices ou des ordinateurs : monotonie, oscillations, stationnarité, rapidité de convergence, etc. (le cas échéant, tous ces termes seront utilisés dans un sens intuitif, sans définition for-

melle) ; cette lecture sera complétée par des calculs algébriques (encadrements, formules à établir).
Il y a lieu, pour ces exemples de suites, d'utiliser largement les possibilités des tableurs et calculatrices. Par ailleurs, l'étude des suites est un terrain propice pour comprendre la nécessité et l'efficacité de faire des allers et retours entre l'ordinateur ou la calculatrice et le « papier-crayon ». Comme il est indiqué dans le programme, on fera construire ici un ou plusieurs exemples de programme avec boucle et test : par exemple, recherche du premier entier n tel que $u_n < (1/2)\ u_0$ (ou $|u_n| < (1/2)\ |u_0|$ ou $u_n < 2u_0$…). Un autre exemple se prêtant particulièrement à un problème de boucle et test et représentant un problème encore ouvert, est celui de la suite de Syracuse (u_n) définie à partir d'un entier u_0 par $u_{n+1} = u_n /2$ si u_n est pair et $u_{n+1} = 3\ u_n + 1$ (sinon, on peut inclure un arrêt si $u_n = 1$ et faire afficher le nombre de pas nécessaires pour parvenir à cet arrêt).

Le programme indique qu'une définition de la convergence d'une suite doit être donnée. L'objectif de l'introduction de cette définition est de :
– montrer qu'à l'intérieur du champ des mathématiques, il existe une définition précise et relativement complexe à partir de laquelle on établit des propriétés et des théorèmes (théorème des « gendarmes », par exemple) qui permettent d'éviter de recourir à cette définition complexe ;
– proposer un travail de nature épistémologique sur la façon dont s'élaborent les mathématiques : on pourra signaler, en s'appuyant sur des éléments historiques, que les mathématiques ont beaucoup avancé sans définition précise de la notion de limite de suite ou de fonction mais qu'à un moment, quand la notion intuitive s'avère buter sur des difficultés, il devient nécessaire de l'expliciter et de l'introduire comme nouvelle notion mathématique ;
– travailler un ou deux exemples de suites divergentes très simples (c'est l'occasion d'un travail de logique sur la définition) ;
– montrer par un exemple qu'on ne peut pas conclure pour la limite à partir de ce que l'on observe sur un écran d'ordinateur.
L'objectif n'est en aucun cas de tout compliquer par une définition dont on ne comprend pas la nécessité, ou d'essayer subrepticement de « couper des ε en quatre ».

Statistique et probabilités

Cette partie est détaillée en annexe (p. 67).

Annexe 1

Statistique et probabilités

En classe de seconde, les élèves ont été sensibilisés à la fluctuation d'échantillonnage dans des cas simples correspondant à des expériences aléatoires dont le résultat ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs ; ils ont fait et simulé des expériences liées à des choix de chiffres au hasard : ces expériences et ces simulations ont en principe été consignées dans un cahier de statistique (dans de tels cahiers, les élèves ont écrit pourquoi telle expérience est faite, ce que l'on observe, des explications éventuelles de ce qui est observé, et fait le lien entre diverses expériences et simulations). Les élèves ont ainsi observé des résultats qui appellent une explication. De telles explications relèvent des mathématiques, mais nécessitent de formaliser et de préciser dans le cadre d'une théorie (celle des probabilités) le langage utilisé pour parler de l'aléatoire. Le programme de *Probabilités-Statistique* de la série S introduit les notions de loi de probabilité et de variable aléatoire, notions indispensables pour comprendre l'esprit de la statistique et aborder la problématique propre à cette discipline ; quelques éléments de statistique descriptive sont introduits, mais celle-ci a une part modeste dans cette série. La terminologie en usage pour la statistique et les probabilités sera réduite au minimum ; on s'efforcera de garder le langage ensembliste et de ne pas développer deux terminologies parallèles : on introduira seulement le terme « événement » ; l'ensemble des éventualités liées à une expérience gardera le nom d'« ensemble », on parlera d'« événements complémentaires » ou d'« événements disjoints » (s'ils sont utilisés, les termes d'« univers », d'« événements contraires » ou « incompatibles » ne seront pas systématisés). L'important est de savoir résoudre des problèmes, de relier les résultats de calculs faits sur des observations aux questions posées. On trouvera en fin de cette annexe un lexique des principaux termes liés à la statistique et que l'élève doit connaître.

Statistique descriptive

Quelques éléments de statistique descriptive sont présentés pour les séries numériques : écart type et diagramme en boîte (cf. annexe commune aux séries ES, L et S, p. 83). Il est important ici de démontrer que la moyenne minimise la fonction $x \mapsto \frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - x\right)^2$ qui mesure la dispersion autour d'un point, et que ce minimum est appelé variance. Les diagrammes en boîte permettent une comparaison graphique de plusieurs séries de données (voir fiche « Sondages » du document d'accompagnement de seconde) ; on remarquera à l'aide d'exemples que le résumé d'une série par le couple (médiane, écart interquartile) n'est pas sensible aux valeurs extrêmes et ne peut faire l'objet de calculs par paquets. Résumer une série de données par moyenne, écart type a des propriétés théoriques qui rendent son usage fréquent, notamment en biologie et physique pour ce qui touche aux mesures expérimentales. On regardera comment se transforment les quantités introduites si on change les unités et/ou si on décale l'origine ; les résumés numériques déterminés à partir de la distribution des fréquences sont aussi affectés par la fluctuation d'échantillonnage. On peut observer par simulation de p séries de taille n d'une même expérience que la variance s_g de la série des p moyennes est plus petite que la variance des np données (ou plus simplement situer s_g dans la série des p variances des séries) : la moyenne d'une série est une quantité variable, mais « moins variable » que les données elles-mêmes. On notera que la moyenne d'une série de données étant l'isobarycentre des termes et le barycentre des valeurs prises pondérées par les fréquences, elle bénéficie de la propriété d'associativité des barycentres et permet donc les calculs par sous-groupes. La variance permet aussi les calculs par sous groupes ; la formule de décomposition de la variance ci-dessous n'est pas au programme et figure ici à l'usage des enseignants :
« Soit une série de n données, de moyenne m et de variance s^2, décomposée en k sous-séries de tailles respectives n_i, $i = 1, \ldots, k$. Soit m_i et s_i^2 les moyennes et les

variances dans chaque sous-série ; alors s^2 est la somme de la moyenne des variances s_i^2 pondérées par les n_i/n et de la variance de la série des m_i affectés des poids n_i/n :

$$s^2 = \sum \frac{n_i}{n}\left(m_i - m\right)^2 + \sum \frac{n_i}{n} s_i^2$$

On a souvent prôné, pour l'enseignement de la statistique, le recueil de données par les élèves eux-mêmes : ce recueil est considéré comme motivant et permettant de percevoir le champ de l'aléatoire. Or, la perception de l'aléatoire s'acquiert aujourd'hui aussi par la simulation et les paramètres de dispersion introduits peuvent être calculés sur des séries simulées. Un recueil effectif de données par les élèves n'est donc à envisager que s'il ne prend pas beaucoup de temps et traite d'une question que les élèves ont fortement contribué à formuler. Par ailleurs, pour de nombreuses questions abordables dans le cadre du lycée, des données existent : elles sont réactualisées régulièrement, leur contenu est riche, elles sont accessibles dans des banques de données et on pourra les utiliser. Il est préférable de n'étudier qu'un seul exemple motivant plutôt que de petits exemples dont le traitement se réduit à des calculs numériques sans objet. Si on veut traiter de grandes séries de données, on fournira aux élèves des résultats numériques complets ou partiels (il suffit de donner la somme des termes et la somme de leurs carrés) ; l'important ici n'est pas de faire systématiquement des calculs soi-même ni d'être virtuose de l'emploi des touches statistiques d'une calculatrice ou du tableur. L'objectif reste toujours de savoir quelle question ou étude a motivé de traiter des données, de comprendre les calculs et de savoir interpréter les résultats.

Probabilité, modélisation, simulation

Le programme de probabilité du cycle terminal de la série S concerne la modélisation d'expériences de référence, modélisation définie par la loi de probabilité équirépartie sur un ensemble fini convenablement choisi. Les lois de probabilité non équiréparties rencontrées en première et terminale sont le plus souvent l'image par une variable aléatoire d'une loi équirépartie, et on introduira donc presque simultanément la notion de loi de probabilité et celle de variable aléatoire.

Loi de probabilité

On recensera les propriétés mathématiques élémentaires de l'objet « distributions de fréquences » (cf. tableau ci-dessous) et on définira une loi de probabilité comme un objet mathématique ayant les mêmes propriétés.

Distribution de fréquences sur E = $\{x_1,\ldots, x_r\}$	Loi de probabilité sur E = $\{x_1,\ldots, x_r\}$
$(f_1,\ldots, f_i)$ $f_i \geq 0$; $\sum f_i = 1$ A$\subset$ E, fréquence de A : $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$ Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$ Événements A et B disjoints : $f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$ Cas numérique : Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i\, x_i$ Variance empirique : $s^2 = \sum f_i\,(x_i - \bar{x})^2$ Écart type empirique : $s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$	$(p_1,\ldots, p_r)$ $p_i \geq 0$; $\sum p_i = 1$ A$\subset$ E, probabilité de A : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$ Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Événements A et B disjoints : $P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$ Cas numérique : Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i\, x_i$ Variance d'une loi P : $\sigma^2 = \sum p_i\,(x_i - \mu)^2$ Écart type d'une loi P : $\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}$

Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité.

Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales alors que la probabilité d'un événement est un « nombre théorique ». Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques et indépendantes varient (fluctuent) ; la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience.

L'objectif est que les élèves comprennent à l'aide d'exemples (cf. « Modélisation d'expériences de référence », p. 15) que modéliser, c'est ici choisir une loi de probabilité. Il ne s'agit en aucun cas d'avoir des discours généraux sur les modèles et la modélisation. Les élèves devront bien distinguer ce qui est empirique (du domaine de l'expérience) de ce qui est théorique; en particulier, on réservera la lettre grecque σ à l'écart type d'une loi et on évitera de noter avec cette même lettre un écart type empirique (il s'agit là de règles de notations internationales).

En classe de première, une loi de probabilité P sur un ensemble fini est la liste des probabilités des éléments de E; à partir de cette liste, on définit naturellement les probabilités d'événements (c'est-à-dire implicitement une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0\ ;\ 1]$, application qui sera encore désignée par P) et on fera remarquer que $P(E) = 1$ et que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour des événements disjoints.

Il est inutilement complexe, pour le cas des ensembles finis, de partir d'une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0\ ;\ 1]$, vérifiant certains axiomes, puis de montrer ensuite que cette application est entièrement caractérisée par $(p_1,\ldots, p_r)$. Le fait de ne pouvoir simplement généraliser aux ensembles continus cette définition et la nécessité d'une définition ensembliste seront abordés en terminale.

Si tous les éléments d'un ensemble E ont même probabilité, la loi de probabilité est dite équirépartie; dans ce cas, la probabilité d'un événement est le quotient de son nombre d'éléments par le nombre d'éléments de l'ensemble.

On évitera tout développement théorique sur le langage des événements et le calcul ensembliste qui en découle : ces notions et la pratique de la logique qu'ils impliquent (étude du complémentaire de l'événement « A ou B », ou de l'événement « A et B ») s'acquièrent au fil d'exercices.

L'expression « choisir au hasard » (respectivement « selon une loi de probabilité P ») un élément dans un ensemble fini E est admise et a même sens que : « on considère la loi de probabilité équirépartie sur E (resp. la loi de probabilité P sur E) ». Par exemple, pour parler du modèle associé au lancer d'un dé, on dira que l'on choisit un nombre au hasard dans $\{1,\ldots, 6\}$.

Variable aléatoire

Une application T de E dans E' (E et E' finis) permet de transporter la loi P définie sur E en une loi P' définie sur E' par le procédé suivant :

$$P'(x') = P\,(T = x')$$

où $P\,(T = x')$ désigne la probabilité de l'ensemble des éléments de E dont l'image par T est x' (cet ensemble est souvent noté $\{T = x'\}$, on écrit en fait $P\,(T = x')$ au lieu de $P\,(\{T = x'\})$).

On montrera sur des exemples que même si la loi P est équirépartie, la loi transportée P' par T, appelée loi de T, n'est en général pas l'équiprobabilité.

Dans ce cadre-là, ce qui nous intéresse dans l'application T, c'est ce qui se passe à l'arrivée : partant d'un élément x choisi dans E selon la loi P, on arrive à un élément x' choisi dans E' selon la loi P'. Pour nommer T, on parle habituellement de variable aléatoire.

Dans le cas numérique, l'espérance et la variance de la loi P' sont appelées plus simplement espérance de T (notée E(T)) et variance de T.

Le programme parle à deux reprises d'espérance, de variance et d'écart type (pour les lois de probabilité et les variables aléatoires) : il s'agit dans les deux cas de la même notion. L'objectif n'est pas de faire des calculs d'espérance et de variance sans objet, mais de généraliser au plan théorique les paramètres empiriques de tendance centrale et de dispersion rencontrés dans l'étude de séries de données.

Le programme n'évoque pas la linéarité de l'espérance ni le lien entre l'écart type de $(aX + b)$ et de X : l'étude faite en statistique (linéarité en classe de seconde, influence d'une transformation affine sur l'écart type en classe de première) suffira pour justifier ici leur utilisation.

Remarque : on ne définit une loi de probabilité que sur un ensemble fini. Cet ensemble sera le plus souvent un ensemble de nombres, et l'on pourra ainsi définir l'espérance, la variance et l'écart type de cette loi. Les exemples où l'ensemble n'est pas numérique (couleur d'une carte, par exemple) ne sont pas pour autant exclus. Dans ce cas, on ne peut pas définir l'espérance.

Exercices

• On considère une population de dix hommes et de dix femmes d'un club de jeux (échecs, bridge ou go…). On considère qu'une femme et un homme sont partenaires s'ils ont joué au moins une partie d'échecs ensemble. Une femme est partenaire avec les dix hommes, une autre femme avec deux hommes et les huit autres ne sont partenaires d'aucun homme.

On fait un sondage de taille 2 parmi les femmes, c'est-à-dire que l'on choisit au hasard un couple parmi les couples de femmes, et on lui associe la demi-somme de leur nombre de partenaires (hommes). Calculer la loi de probabilité P de la variable aléatoire X « demi-somme », son espérance et sa variance.

On fait un sondage de taille 2 parmi les hommes, c'est-à-dire que l'on choisit au hasard un couple parmi les couples d'hommes et on lui associe la demi-somme de leur nombre de partenaires (femmes). Calculer la loi de probabilité P' de la variable aléatoire Y « demi-somme », son espérance et sa variance.

On notera que la probabilité du résultat 0 est 0,62 pour les femmes et que la probabilité du résultat 1 est 0,62 pour les hommes. Faire une simulation pour estimer la probabilité, quand on choisit un couple au hasard chez les femmes et un couple au hasard chez les hommes, d'obtenir (0,1) comme résultat.

La variable aléatoire X est définie sur l'ensemble des 45 couples de femmes muni de la loi équirépartie (on choisit un couple au hasard) et prend les valeurs 0, 1, 5, 6 avec les probabilités respectives (28/45, 8/45, 8/45, 1/45) soit, approximativement : 0,62 ; 0,18 ; 0,18 ; 0,02. L'espérance de X est 1,2 (on retrouve le nombre moyen de relations de la population des dix femmes), la variance de X est 3,98.

La variable aléatoire Y est définie sur l'ensemble des 45 couples d'hommes muni de la loi équirépartie (on choisit un couple au hasard) et prend les valeurs 1 ; 1,5 ; 2 avec les probabilités respectives (28/45, 16/45, 1/45) (soit, approximativement : 0,62, 0,36, 0,02). L'espérance de Y est 1,2 (on retrouve le nombre moyen de relations de la population des dix hommes et de plus que l'espérance de X et Y doivent être les mêmes), la variance de Y est 0,07.

Si on simule des choix de couples d'hommes et de femmes au hasard, on verra que dans environ 35 % des cas, X vaut 0 et Y vaut 1.

• Quel jeu choisir dans un casino où l'on peut jouer aux jeux suivants :

Jeu A : on choisit un chiffre selon une loi de probabilité telle que la probabilité du chiffre i est proportionnelle à $i + 1$. Le gain associé au chiffre i est $2\,000/(i + 1)$.

Jeu B : on choisit un chiffre selon une loi de probabilité telle que la probabilité du chiffre i est proportionnelle à $1/(i + 1)$. Le gain associé au chiffre i est $100(i + 1)$.

Modélisation d'expériences de référence

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience un ensemble et une loi de probabilité sur cet ensemble. Ce choix, c'est-à-dire la modélisation de l'expérience, est en général délicat, sauf dans certains cas où des considérations propres au protocole expérimental conduisent à proposer *a priori* un modèle. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés pour lesquels des considérations de symétrie conduisent au choix d'un modèle où la loi de probabilité est équirépartie. On se restreindra donc aux expériences de référence en évitant tout discours général sur ce qu'est ou n'est pas la modélisation.

La traduction mathématique de « une pièce a autant de chances de tomber sur pile que sur face » est ainsi : « la probabilité de pile et de face sont égales ». On précisera clairement que les termes *équilibré* et *choix au hasard* indiquent par convention un choix du modèle de l'expérience où la probabilité est équirépartie.

En dehors de tels cas où des considérations quant à la nature des expériences permettent de proposer un modèle, le choix d'un modèle à partir de données expérimentales ne sera pas abordé dans l'enseignement secondaire. On se contentera, si nécessaire, de fournir un modèle en indiquant que des techniques statistiques ont permis de déterminer et de valider un tel modèle.

La modélisation ne relève pas d'une logique du vrai et du faux. Un modèle n'est ni vrai ni faux : il peut être validé ou rejeté au vu de données expérimentales. Une des premières fonctions de la statistique dite inférentielle est d'associer à une expérience aléatoire un modèle ou une gamme de modèles compatibles (en un certain sens à définir) avec les données expérimentales dont on dispose, et de définir des procédures de validation.
Pour valider un modèle probabiliste, le premier outil dont on dispose est un **théorème de mathématiques** appelé « loi (forte) des grands nombres », dont un énoncé intuitif est:
Dans le monde théorique défini par une loi de probabilité P sur un ensemble fini, les fréquences des éléments de cet ensemble dans une suite de n expériences identiques et indépendantes « tendent » vers leur probabilité quand n augmente indéfiniment.
Ou encore :
Si on choisit n éléments selon une loi de probabilité P, indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est voisine de P lorsque n est grand.

Pour les enseignants

Il s'agit là d'un énoncé vulgarisé. Pour être un peu plus précis, le théorème appelé *loi forte des grands nombres* dit que, dans l'ensemble, des suites infinies d'éléments choisis selon P, le sous-ensemble des suites pour lesquelles la distribution des fréquences ne convergent pas vers P est « négligeable ». Par exemple, dans une suite finie de n lancers d'une pièce équilibrée, on peut n'obtenir que des faces (code 0) ou que des piles (code 1), ou 001001…001, etc.; ces trois suites finies ont chacune une probabilité 2^{-n}; si on « prolonge » ces suites, les fréquences de 1 et de 0 ne tendent pas vers 1/2, mais la probabilité de l'ensemble de ces trois suites tend vers 0. Le théorème ci-dessus indique que l'ensemble de toutes les suites imaginables pour lesquelles les fréquences ne tendent pas vers 0,5 est de « probabilité nulle » – pour une loi de probabilité construite sur l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 à partir de l'équiprobabilité sur {0 ; 1}. Le mathématicien dira qu'il y a convergence presque sûre des fréquences des éléments vers leur probabilité. Le statisticien, s'il observe dans une longue série d'expériences des distributions de fréquences qui fluctuent de moins en moins, choisira comme modèle, en vertu de cette loi des grands nombres, une loi de probabilité « proche » de la dernière distribution observée.
Une validation du modèle de la loi équirépartie pour le lancer d'un dé consistera à vérifier que la distribution des fréquences est « proche » de (1/6,…, 1/6) sur {1,…, 6} quand le nombre de lancers est grand : cela sera traité en classe terminale.

Exercice

Un petit bac peut, en plus des voyageurs, transporter une seule voiture à la fois pour aller dans une île. Il faut réserver et payer la veille; en cas de désistement, le propriétaire du bac ne rembourse que la moitié du prix du billet. On estime qu'en période estivale, une proportion stable p des réservations donne lieu à un désistement. Comme il y a toujours au moins deux demandes de réservation par trajet, le propriétaire se demande s'il n'aurait pas intérêt à prendre deux réservations pour chaque trajet : s'il n'y a pas de désistement, il prend une voiture et fait transporter à ses frais l'autre par un confrère dont le prix de passage est double du sien.
Pour quelles valeurs de p a-t-il intérêt, à long terme, à prendre ce système de surréservation ?
Ce problème pourra être repris en terminale, quand les élèves auront vu la loi binomiale, dans des cas plus complexes.

Remarques à l'usage des enseignants

À propos des termes « loi de probabilité » et « espérance d'une loi de probabilité »

Nous avons choisi pour l'enseignement secondaire d'employer le terme de loi de probabilité sur un ensemble, que celle-ci soit ou non la loi d'une variable aléatoire.
On parle ainsi d'une loi de probabilité, de la probabilité d'un événement ou d'un élément, mais le terme de probabilité, seul, n'est pas défini à ce niveau d'étude.
Dans les livres de probabilité, on parle d'espérance d'une variable aléatoire et de moyenne ou de moment d'ordre 1 d'une loi de probabilité; nous ne parlons que d'espérance, que ce soit pour une loi de probabilité ou pour une variable aléatoire. Le terme espérance marque bien pour l'élève la différence avec moyenne (empirique),

mais il convient de ne pas se livrer à une guerre des mots : un élève qui emploierait le terme moyenne ou moyenne théorique d'une loi de probabilité en ayant compris le concept ne doit pas être sanctionné.

À propos de la notion d'échantillon d'une expérience

Dans le document d'accompagnement de seconde (page 11), on dit qu'un échantillon de taille n d'une expérience est la série $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots, x_n)$ des résultats obtenus en faisant n fois la même expérience. Si le modèle associé à une expérience est le choix d'un élément d'un ensemble E selon une loi de probabilité P, le modèle associé à un échantillon de taille n de cette expérience est une liste de n variables aléatoires $(X_1,\dots, X_n)$, qui sont les projections de $\Omega = E^n$, $X_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, où les éléments de Ω sont choisis suivant la loi P_n telle que la probabilité d'une série de résultats est le produit des probabilités de chacun d'eux :

$$P^n (x_1,\dots, x_n) = P(x_1) \times\dots \times P (x_n).$$

Les variables aléatoires X_i sont alors par construction indépendantes et de même loi. Une liste $(X_1,\dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi P est appelée un échantillon de la loi P. Un échantillon d'une expérience est ainsi toujours modélisé par un échantillon de la loi P modélisant l'expérience.

En classe de première, on rencontrera cette situation dans les cas simples de deux lancers d'un dé ou de n lancers d'une pièce équilibrée et ce formalisme est bien inutile ; il suffit de dire que les résultats possibles (couples de nombres dans $\{1, \dots, 6\}$, listes de 0 et de 1) sont équiprobables et on en restera à cette approche intuitive pour ce niveau. On étudiera comme exemples les variables aléatoires somme ou produit des variables X_i dans le cas de n lancers d'un dé ou d'une pièce équilibrée ($n < 4$).

Simulation de chiffres au hasard

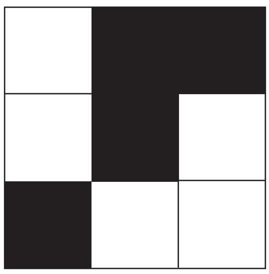
On clarifiera brièvement les positions respectives de la modélisation et de la simulation : modéliser consiste à associer un modèle à des données expérimentales, alors que simuler consiste à produire des données à partir d'un modèle prédéfini. On parlera de simulation d'une loi de probabilité P ; la simulation d'une telle loi avec des listes de chiffres au hasard ne peut se faire que si P peut être construite à partir d'une loi équirépartie. Pour simuler une expérience, on associe d'abord un modèle à l'expérience en cours, puis on simule la loi du modèle ; on pourra détailler ces étapes, sans cependant le faire systématiquement dans les cas simples des expériences de référence.

Exemples d'activités utilisant des simulations

1 – On considère deux stratégies de choix de nombres parmi les nombres 1, 3, 5.
- Choix au hasard.
- Choix selon la loi (0,1, 0,1, 0,8).

Calculer l'espérance des deux lois ci-dessus. Simuler n choix selon l'une des deux méthodes ; regarder si au vu de la moyenne des séries observées, quelqu'un ne connaissant pas le modèle choisi pour simuler peut le deviner. On fera varier n.

2 – Pour la grille suivante, on considère trois procédures de choix de cases blanches :



a) On choisit une case blanche au hasard parmi les cinq cases blanches.
b) On choisit au hasard une ligne puis, dans la ligne, une case au hasard parmi les cases blanches de cette ligne.
c) On choisit au hasard une colonne puis dans la colonne une case au hasard parmi les cases blanches de cette colonne.

Déterminer dans chacun des trois cas la loi de probabilité mise en jeu sur l'ensemble des cases blanches.
Pour une des trois lois de probabilité, un élève simule n choix de cases blanches ; au vu de la distribution des fréquences obtenue, un autre élève qui ignorerait quelle loi a été simulée peut-il la deviner ?
Dans les deux exemples ci-dessus, on insistera sur le fait que l'observation de résultats simulés ne permet pas de remonter au modèle à coup sûr : une des fonctions de la statistique est de calculer la probabilité que l'on a de se tromper en « remontant d'une distribution de fréquences à une loi de probabilité ».

Exercice
Une expérience consiste à choisir successivement deux chiffres d et u au hasard. On considère l'application T qui à (d,u) fait correspondre $10d + u$. Calculer la probabilité que $10d + u \leqslant k$, où k est un entier entre 0 et 99. On justifie ainsi que pour construire une liste de nombres au hasard entre 0 et 99, on lit les chiffres d'une table de chiffres au hasard deux par deux.

Cahier de statistique

Dans le document d'accompagnement de seconde, il était suggéré que l'élève ait un cahier de statistique où figurent les expériences ou les simulations faites en classe ou à la maison, à la demande de l'enseignant ou selon sa propre initiative. L'élève pourra alors revenir en première sur des questions posées en seconde, compléter certaines expériences de l'année précédente et enrichir son cahier de nouvelles simulations, observations et questions.

Lexique

Choix au hasard dans un ensemble E : la loi de probabilité en jeu sur E est l'équiprobabilité.

Diagramme en boîte (ou à pattes ou à moustaches ou diagramme de Tuckey) : on divise l'intervalle des valeurs de la série non plus en intervalles de même longueur comme pour de nombreux histogrammes mais en intervalles qui contiennent des pourcentages des données fixés à l'avance.
On trouvera en annexe à ce document une note à l'usage des enseignants sur les diagrammes en boîte.

Écart interquartile : différence entre le troisième et le premier quartile.

Écart type : racine carrée de la variance ; l'unité de l'écart type est celle des données.

Espérance d'une loi de probabilité sur un ensemble E de nombres : moyenne des valeurs des éléments de E pondérées par leur probabilité.

Espérance d'une variable aléatoire : espérance de la loi de cette variable aléatoire.

Étendue : différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

Événement : un événement est un sous-ensemble de l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Événement A et B : si A et B sont deux événements, l'événement « A et B » est l'événement $A \cap B$.

Événement A ou B : si A et B sont deux événements, l'événement « A ou B » est l'événement $A \cup B$.

Expériences aléatoires identiques : signifie que l'on associe à chacune d'elles le même modèle. Les expériences de référence ont d'ailleurs aussi ceci de remarquable que, par exemple, le même modèle est pertinent pour des pièces (ou des dés) de fabrications différentes lancées par des individus différents : on parlera donc dans ce cas d'expériences identiques.

Expériences de référence : lancers de dés, de pièces équilibrées ; choix de nombres au hasard, tirages au hasard de boules coloriées dans une urne, de cartes dans un jeu, etc. Considérons une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité P sur un ensemble fini E. On pourra le plus souvent trouver une expérience de référence qui, à un codage près des issues possibles, est régie par le même modèle ; les questions relatives à l'expérience originelle pourront être traduites dans le cadre de l'expérience de référence. Associer l'expérience originelle à une expérience de référence n'est néanmoins pas une activité à systématiser : l'élève aura recours à cette possibilité uniquement selon ses besoins.

Intervalle interdécile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le neuvième déciles.

Intervalle interquartile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le troisième quartiles.

Loi de probabilité sur $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$: c'est une liste $(p_1, \ldots, p_r)$ de nombres positifs et de somme 1, associés aux éléments de E.

Loi des grands nombres (en langage imagé) :

Si on choisit n éléments d'un ensemble fini E selon une loi de probabilité P, indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est proche de la loi de probabilité P lorsque n est grand.

Loi d'une variable aléatoire : soit T une variable aléatoire définie sur E à valeurs dans E'. Soit P une loi de probabilité définie sur E. La loi de T est une loi de probabilité définie sur E' par $P'(x') = P(T = x')$, où $P(T = x')$ désigne la probabilité de l'ensemble des éléments de E dont l'image par T est x'.

Médiane (empirique) : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n + 1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n + 1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n + 1$ dans cette série ordonnée. La définition de la médiane n'est pas figée : certains logiciels et certains ouvrages définissent la médiane comme étant le deuxième quartile ou le cinquième décile ; dans la pratique de la statistique, les différences entre ces deux définitions sont sans importance. Au lycée, on évitera tout développement à ce sujet qui ne serait pas une réponse individuelle à une question d'un élève.

Modèle d'une expérience aléatoire : c'est une loi de probabilité sur un ensemble, qui est souvent celui des issues observables de l'expérience.

Neuvième décile (empirique) : c'est le plus petit élément d' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 90 % des données soient inférieures ou égales à d'.

Pièce équilibrée : on choisit pour modéliser le lancer d'une telle pièce l'équiprobabilité de pile et de face.

Premier décile (empirique) : c'est le plus petit élément d des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 10 % des données soient inférieures ou égales à d.

Premier quartile (empirique) : c'est le plus petit élément q des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à q.

Probabilité d'un événement : c'est la somme des probabilités des éléments qui le composent.

Troisième quartile (empirique) : c'est le plus petit élément q' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à q'.

Variable aléatoire : application définie sur un ensemble muni d'une loi de probabilité P ; son rôle est de transporter P sur un autre ensemble (voir *loi d'une variable aléatoire*).

Variance d'une loi de probabilité : espérance des carrés des écarts à l'espérance ; c'est aussi la différence entre « l'espérance des carrés » et « le carré de l'espérance ».

Variance d'une variable aléatoire : c'est celle de sa loi.

Variance empirique : moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; c'est aussi la différence entre « la moyenne des carrés » et « le carré de la moyenne ».

Annexe 2

Lieux géométriques dans le plan

La notion de lieu fait l'objet d'une rubrique du programme, mais comme cela est précisé, elle peut se rapporter à de nombreux chapitres et ne doit pas être traitée indépendamment.
On trouvera d'abord ci-dessous quelques activités très simples, ne nécessitant aucune connaissance spécifique de la classe de première. La notion de lieu y est présentée comme la recherche des positions possibles pour un élément répondant à une question, compte tenu des contraintes de la figure ; il convient de s'interroger aussi sur le caractère complet de la recherche : a-t-on bien obtenu toutes les positions possibles et n'en a-t-on pas rajouté ?
On trouve ensuite des situations choisies pour montrer comment cette activité de recherche de lieu fait appel à des connaissances très diverses : caractérisation du triangle rectangle, triangles semblables, triangles isométriques, distance d'un point à une droite, bissectrice, repérage, produit scalaire et bien sûr transformations.
Cette notion de lieu se prête particulièrement à la mise en œuvre d'activités mathématiques riches et formatrices, notamment dans le domaine du raisonnement.

Quelques situations simples (approche de la notion de lieu)

Triangle d'aire donnée

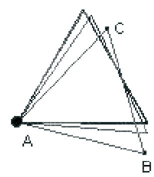
Soit un segment [AB] de longueur 5 cm. Construction d'un triangle ABC d'aire 10 cm^2 ; détermination de l'ensemble des positions possibles pour C.

Parallélogramme d'aire donnée

Soit un segment [AB] de longueur 5 cm.
a) Construction de C et D tels que ABCD soit un parallélogramme d'aire 15 cm^2 ; détermination de l'ensemble des positions possibles pour C, puis pour D.
b) Construction de C et D tels que ABCD soit un parallélogramme de périmètre 20 cm ; détermination de l'ensemble des positions possibles pour C, puis pour D.

Triangle équilatéral

Soit un point A.
a) Construction de B et C tels que ABC soit un triangle équilatéral de périmètre 12 cm ; ensemble de toutes les positions possibles pour B, puis pour C.
b) Construction de B et C tels que ABC soit un triangle équilatéral d'aire 12 cm^2 ; ensemble de toutes les positions possibles pour B, puis pour C.



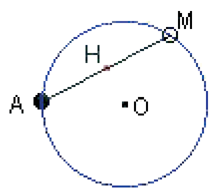
Rectangle ou losange de diagonale donnée

Soit A et C deux points donnés.
a) Construction de B et D tels que ABCD soit un rectangle de diagonale [AC] ; ensemble de toutes les positions possibles pour B, puis pour D.
b) Construction de M et N tels que AMCN soit un losange de diagonale [AC] ; ensemble de toutes les positions possibles pour M, puis pour N.

Autres situations

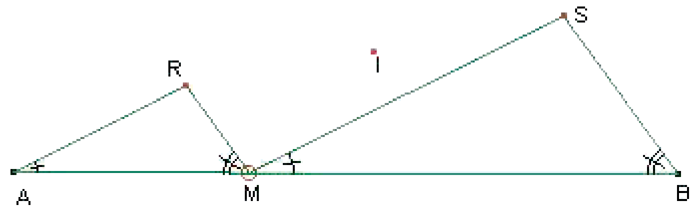
Projeté orthogonal

Soit un cercle de centre O et une corde [AM]. Soit H la projection orthogonale de O sur [AM]. Lieu de H lorsque M parcourt le cercle.



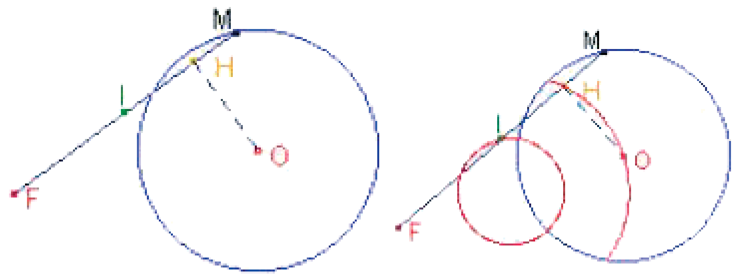
Triangles semblables

Soit deux angles a et b, un segment [AB], un point M de ce segment et deux triangles semblables AMR et MBS tels que R et S soient du même côté par rapport à [AB], $\hat{A} = \hat{M} = a$ et $\hat{M} = \hat{B} = b$.
Lieu du milieu I de [RS] lorsque M parcourt le segment [AB].



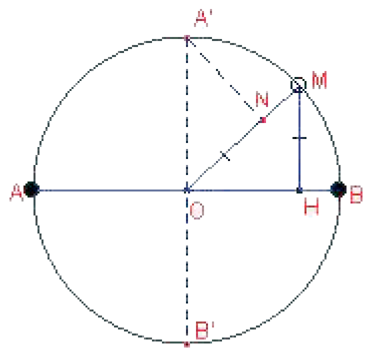
Un arc de cercle

Dans le plan, soit F un point et (C) un cercle de centre O. Un point M décrit le cercle (C).
Lieu du milieu I du segment [FM] ; lieu de la projection H de O sur le segment [FM].
Envisager le cas où F est à l'intérieur du cercle (C) et celui où il appartient à ce cercle.



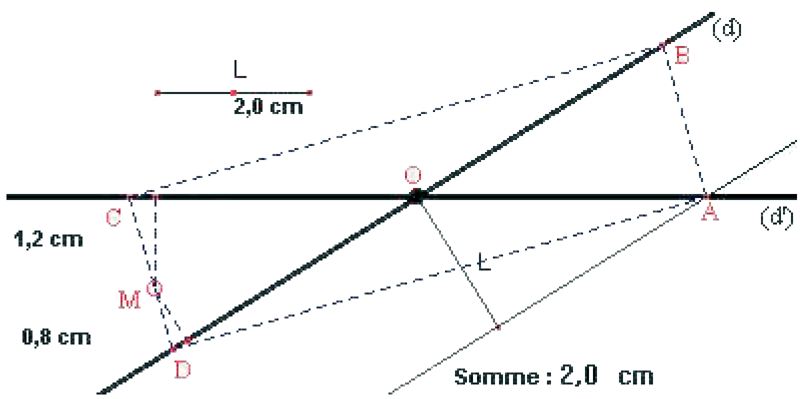
À l'aide de triangles isométriques

Soit M un point du cercle de centre O et de diamètre [AB]. Soit H la projection orthogonale de M sur [AB]. Soit N le point de la demi-droite [OM) tel que ON = MH.
Lieu du point N lorsque M parcourt le cercle.
Indication : considérer le diamètre [A'B'] orthogonal au diamètre [AB] et reconnaître deux triangles isométriques.



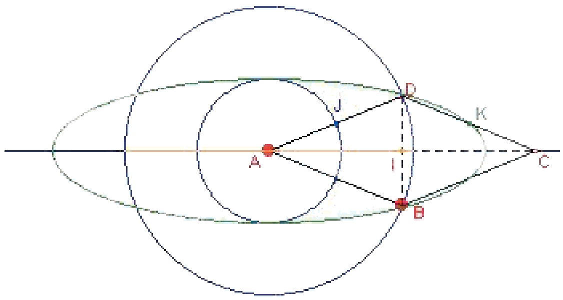
Somme des distances

Lieu des points M dont la somme des distances à deux droites (d) et (d') est égale à une longueur donnée L.
Indication : si M est un point de la base d'un triangle isocèle, la somme des distances de M aux côtés égaux est constante.



Losange articulé

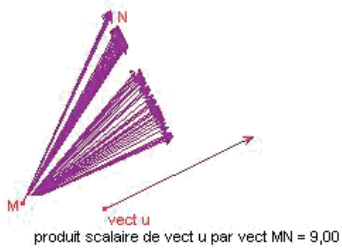
Soit ABCD un losange tel que A est fixe, la longueur AB est donnée (6 cm) et la direction de la diagonale (AC) est fixe.
Lieu de I, centre du losange ; lieu de J, milieu de [AD] ?
Soit K le milieu de [DC]. Conjecturer le lieu de K. Coordonnées de K en fonction de l'angle $\widehat{CAD}$. Lieu de K comme ensemble d'équation $x^2 + 9\,y^2 = 81$.



Produit scalaire

Soit un vecteur $\vec{u}$ de norme 3.

Soit M un point quelconque. Où placer N tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 9$?
Remarque : la réalisation de cette construction dans un logiciel de géométrie dynamique à partir d'un point M quelconque permet d'obtenir l'ensemble des vecteurs possibles. (Pour l'information des usagers de ces logiciels, le produit scalaire peut y être facilement obtenu à l'aide de $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.)



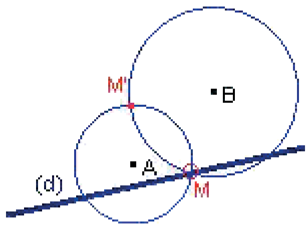
Avec des transformations

Parallélogramme

Soit A et B deux points fixes.
À tout point M, on associe le point N tel que ABMN soit un parallélogramme.
Lieu de N lorsque M décrit :
a) une droite (d)
b) un cercle (C)
c) une figure (F).

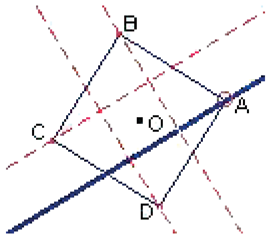
Intersection de deux cercles

Soit une droite (d) et deux points A et B en dehors de cette droite. À tout point M de (d), on associe le deuxième point M' d'intersection des cercles de centres respectifs A et B et passant par M. Lieu de M' quand M décrit (d).



Sommets d'un carré

Soit (d) une droite et O un point n'appartenant pas à (d). Soit A un point de (d) et ABCD le carré de sens direct ayant pour centre O.
Lieux des points B, C et D lorsque A parcourt (d).

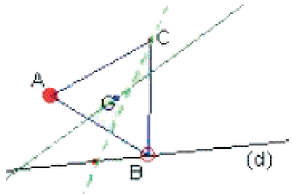


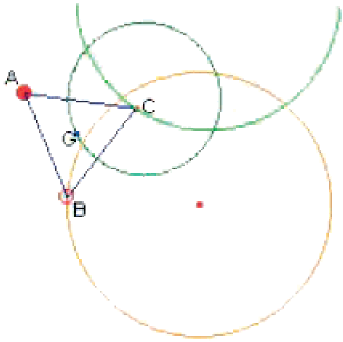
Triangle équilatéral

Soit un point A. Étant donné un point B, on construit C tel que ABC soit un triangle équilatéral (direct) ; soit G le centre de gravité de ce triangle ABC.

a) Lieu de C puis lieu de G lorsque B décrit une droite (d).

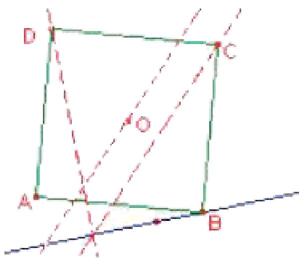
b) Même question lorsque B décrit un cercle.
Indication : chercher le lieu du milieu de [BC] pour déterminer le lieu de G.

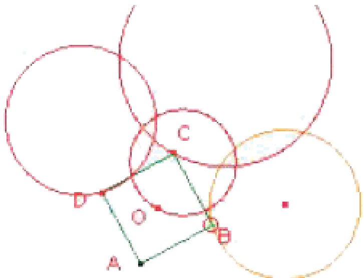




Carré

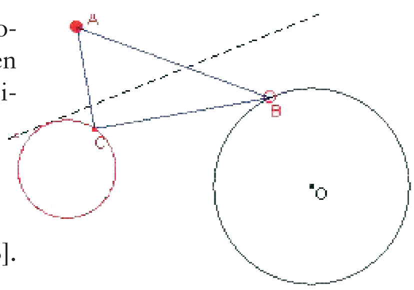
Exercice semblable au précédent mais en construisant cette fois C et D tels que ABCD soit un carré.
Lieu de C.
Prolongement possible : sans traiter explicitement ni la composée de transformation ni la similitude, on peut proposer la recherche des lieux de C et de O par l'intermédiaire, par exemple, du point D' de [AC] tel que AD' = AD.





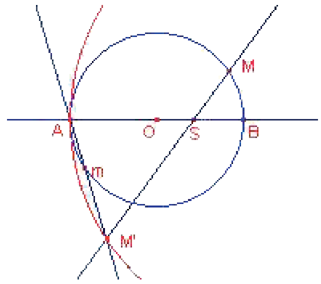
Équerre à 30°

Soit un point A fixe. À tout point B, on associe C tel que le triangle ABC soit rectangle en C et l'angle en A soit de 60° (ABC est demi-équilatéral).
Lieu du point C lorsque B décrit :
a) une droite (d)
b) un cercle (C).
Indication : chercher le lieu de I milieu de [AB].



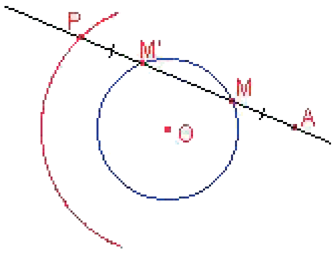
Point sur un cercle de diamètre donné

Soit A et B deux points, S un point de la droite (AB) et (C) le cercle de diamètre [AB].
À tout point de (C), on associe le point m diamétralement opposé à M et le point M' intersection des droites (SM) et (mA).
Lieu du point M' lorsque M décrit le cercle (C).
Indication : homothétie de centre S.



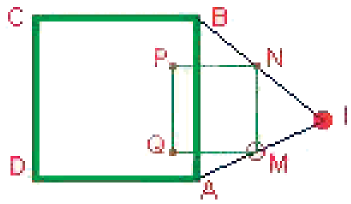
Sécante à un cercle

Soit un cercle (C) et A un point extérieur à ce cercle. Soit M un point quelconque du cercle (C) ; la droite (AM) recoupe le cercle en M'. Soit P le point tel que $\overrightarrow{M'P} = \overrightarrow{AM}$. Lieu du point P.



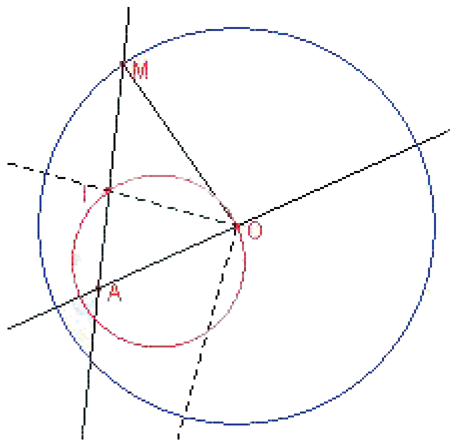
Sommets d'un carré

Soit ABCD un carré et I un point.
À un point M décrivant le segment [AI], on associe le point N de [BI] tel que (MN) soit parallèle à (AB) et les points P et Q tels que MNPQ soit un carré construit du même côté que ABCD.
Lieux des points P et Q.



Pied de la bissectrice

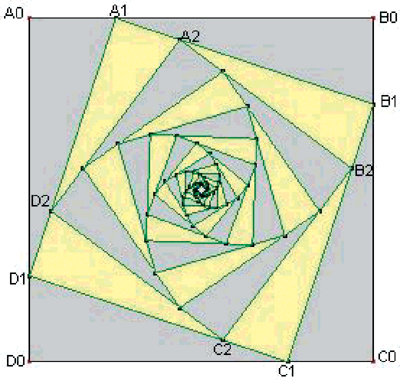
Soit un cercle de centre O et de rayon r et un point A intérieur à ce cercle.
Un point M décrit le cercle.
Lieu du point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$ avec le segment [AM].
Indication : le pied de la bissectrice de $\widehat{AOM}$ partage le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle $\widehat{AOM}$.



EXEMPLES DE SUITES

Figures géométriques et concept de limite

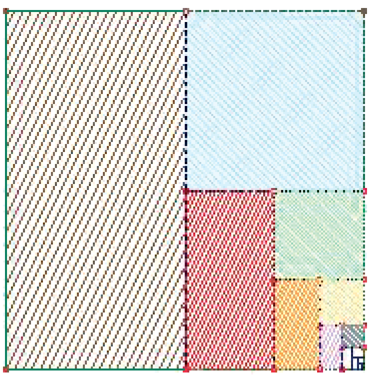
Soit $A_0B_0C_0D_0$ un carré de côté c_0.
On construit le point A_1 situé au quart du segment $[A_0B_0]$ à partir de A_0 ; le point B_1 au quart du segment $[B_0C_0]$ à partir de B_0 ; de même, C_1 sur $[C_0D_0]$ et D_1 sur $[D_0A_0]$. Et on itère…
Est-ce que le dessin s'arrête ? Comment évoluent les côtés et les aires des quadrilatères $A_nB_nC_nD_n$? Que donnent les calculs sur ordinateurs ? Quelle est la *figure limite* ?
Expression de c_{n+1} en fonction de c_n ; nature de la suite ; décroissance ; … convergence.



Voici les résultats obtenus à l'aide d'un tableur.

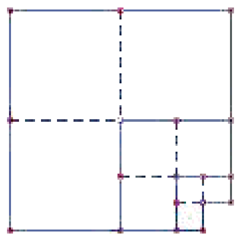
	sommet au quart	
n	c(n)	a(n)
1	4	16
2	3,16227766	10
3	2,5	6,25
4	1,97642354	3,90625
5	1,5625	2,44140625
6	1,23526471	1,52587891
7	0,9765625	0,95367432
8	0,77204044	0,59604645
9	0,61035156	0,37252903
10	0,48252528	0,23283064

Autres exemples

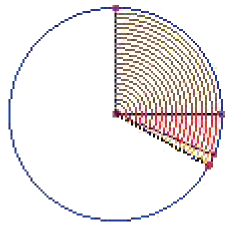


Quelles suites sont cachées dans cette figure ?

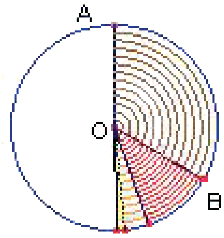
Pour calculer une somme infinie $1/4 + (1/4)^2 + \ldots$
Archimède a utilisé la figure ci-contre illustrant $3 \times (1/4) + 3 \times (1/4)^2 + 3 \times (1/4)^3 + 1/4 = 1$. Puis il est passé à la limite.
Qu'en pensez-vous ?



À un secteur, on ajoute le quart de ce secteur et on recommence. En partant d'un quart de disque, quelle surface parcourt-on ?



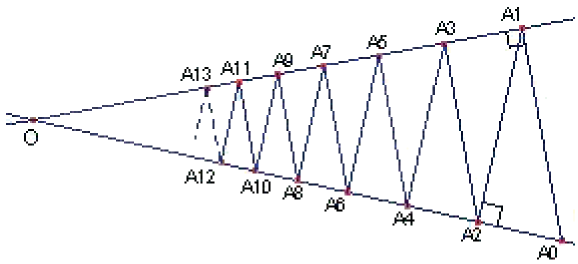
Même question si on ajoute cette fois le tiers et si on part du tiers.



Des triangles semblables

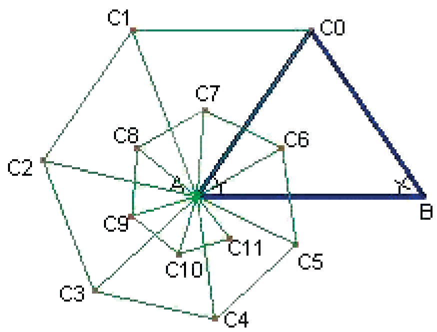
Soit deux droites sécantes (d) et (d') et un point A_0 situé sur une des droites. On définit la suite de points (A_n) telle que A_{n+1} soit la projection orthogonale de A_n sur l'autre droite.

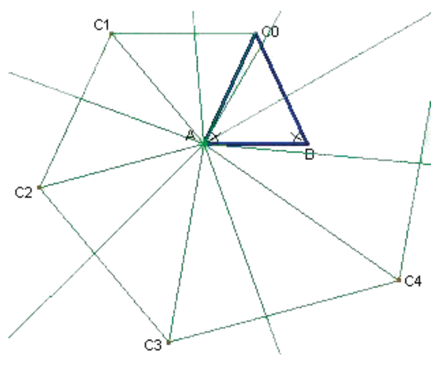
Étude des suites (A_nA_{n+1}), de $(A_{2n}A_{2n+1})$ et $(A_{2n+1}A_{2n+3})$; étude de la suite (a_n), a_n désignant l'aire du triangle $A_nA_{n+1}A_{n+2}$.



Spirale

Soit [AB] un segment de longueur donnée l et C_0 tel que ABC_0 soit un triangle isocèle.
Soit C_1 le point tel que AC_0C_1 soit directement semblable au triangle ABC_0 puis C_2 le point tel que AC_1C_2 soit directement semblable à AC_0C_1 et ainsi de suite.





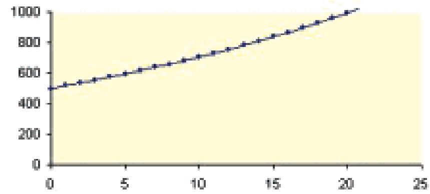
On définit une suite de triangles semblables AC_nC_{n+1}.
Calculer le rapport de similitude.
Déterminer la suite (c_n) des longueurs des côtés égaux des triangles isocèles AC_nC_{n+1}.
Déterminer la suite (a_n) des aires de ces triangles.
Variations de ces suites : envisager $AC_0 < AB$ et $AC_0 > AB$.

Croissance

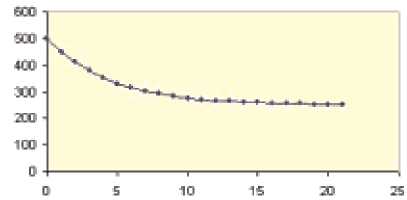
Évolution d'une population

Étudier simultanément les modèles suivants pour l'évolution d'une population d'animaux d'une réserve, population qui ne peut dépasser 1 000 individus :
– *observer* ce qui se passe sur 20 générations (graphique des valeurs) ;
– *expérimenter à propos de certains phénomènes observés* ;
– *obtenir quelques résultats théoriques*.

(1) Croissance exponentielle pure : $p_n = 1{,}035\ p_{n-1}$.

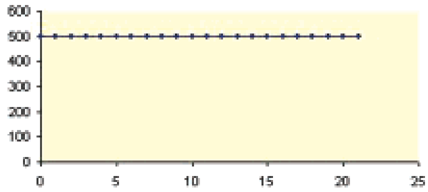


(2) Décroissance exponentielle et apport constant : $p_n = 0{,}8\ p_{n-1} + m$

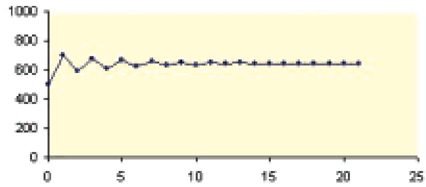


(3) Quelques modèles discrets : croissance tempérée (par la quantité de nourriture)

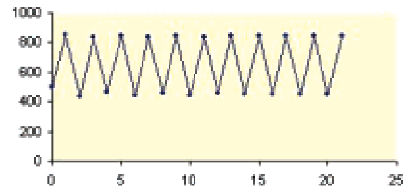
$p_n = 2\ (1 - 0{,}001 p_{n-1})\ p_{n-1}$



$p_n = 2{,}8\ (1 - 0{,}001 p_{n-1})\ p_{n-1}$

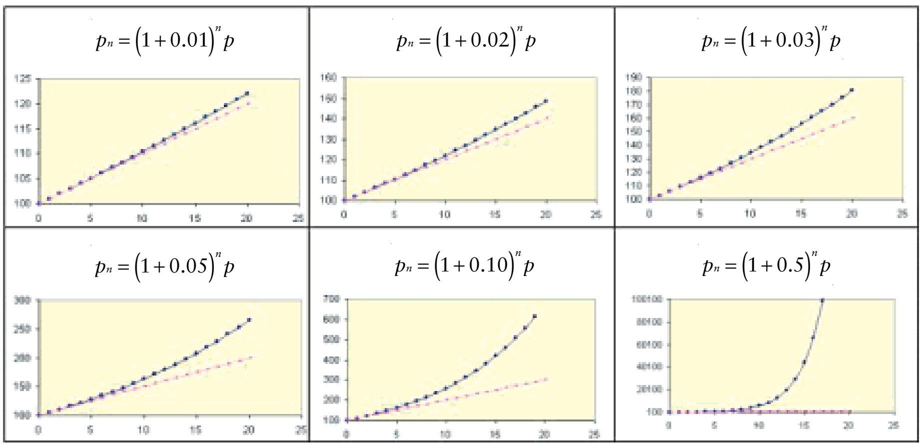


$p_n = 3{,}4\ (1 - 0{,}001 p_{n-1})\ p_{n-1}$



Placement d'un capital : $p_{n+1} = (1 + t)\ p_n$

On a donc $p_n = (1 + t)^n\ p_0$.
Évolution sur 20 ans pour certaines valeurs de t ; approximation de $(1 + t)^n$ par $1 + nt$.



Pour rendre plus concret le fait que le capital croît indéfiniment, on peut calculer le temps τ de doublement du capital : c'est un bon indicateur de la rapidité de croissance. Il serait intéressant d'exprimer τ en fonction de t : on aura l'occasion de le faire en terminale après avoir étudié les logarithmes.

Annexe commune aux séries ES, L et S : boîtes et quantiles

Quantiles

En statistique, pour toute série numérique de données à valeurs dans un intervalle I, on définit la fonction quantile Q, de [0,1] dans I, par :

$$Q(u) = \inf\{x, F(x) \geqslant u\},$$

où $F(x)$ désigne la fréquence des éléments de la série inférieurs ou égaux à x.

Soient $a_1,\ldots, a_r$ les valeurs prises par une série de taille n, ordonnées par ordre croissant ; la fonction F est discontinue et par ailleurs constante sur les intervalles $[a_i,a_{i+1}[$; sa représentation graphique est composée de segments horizontaux.
En pratique, en consultant la liste des nombres $\{F(a_1),\ldots, F(a_r)\}$, il est aisé de déterminer un quantile. Cependant, pour programmer le calcul de Q, on utilise la propriété suivante :
Soit n la taille de la série ; si on ordonne la série par ordre croissant, Q(u) est la valeur du terme de cette série dont l'indice est le plus petit entier supérieur ou égal à nu.

Dans le cadre de cette définition, les 3 quartiles sont Q (0,25), Q (0,50), Q (0,75). Les 9 déciles sont les valeurs de $Q(i/10)$, $i = 1\ldots9$; les 99 centiles sont les valeurs de $Q(i/100)$, $i = 1\ldots99$. On définit assez souvent la médiane m par $m = Q(0{,}5)$: la médiane est alors le second quartile, le cinquième décile, le cinquantième centile, etc.
Mais de nombreux statisticiens, de nombreux logiciels (de qualité) et de nombreux médias utilisent la définition suivante de la médiane d'une série : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n + 1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n + 1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n + 1$ dans cette série ordonnée.
C'est la définition adoptée dans le programme de seconde. Les deux définitions, Q (0,5) et celle-ci donnent en pratique, pour des séries à valeurs continues de grande taille, des résultats le plus souvent très proches.
La procédure qui consiste à tracer une courbe dite de fréquences cumulées croissantes, continue, obtenue par interpolation linéaire à partir des valeurs $F(a_i)$ définies ci-dessus et à définir la médiane comme l'intersection de cette courbe avec la droite d'équation $y = 0{,}5$ ou avec une courbe analogue dite des fréquences cumulées décroissantes n'est pas une pratique usuelle en statistique et ne sera pas proposée au lycée.
Si des données sont regroupées en classe, on parle de classe médiane.

Dans l'enseignement secondaire

Pour les quartiles, la définition proposée sera liée à la fonction quantile :
Premier quartile : c'est le plus petit élément q des valeurs des termes de la série tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à q.
Troisième quartile : c'est le plus petit élément q' des valeurs des termes de la série tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à q'.

Certains logiciels prennent pour le premier quartile une définition analogue à la médiane : par exemple si $n = 4r$, le premier quartile est la demi-somme des valeurs prises par le terme de rang r et le terme de rang $r + 1$. Nous n'adopterons pas cette définition un peu marginale.

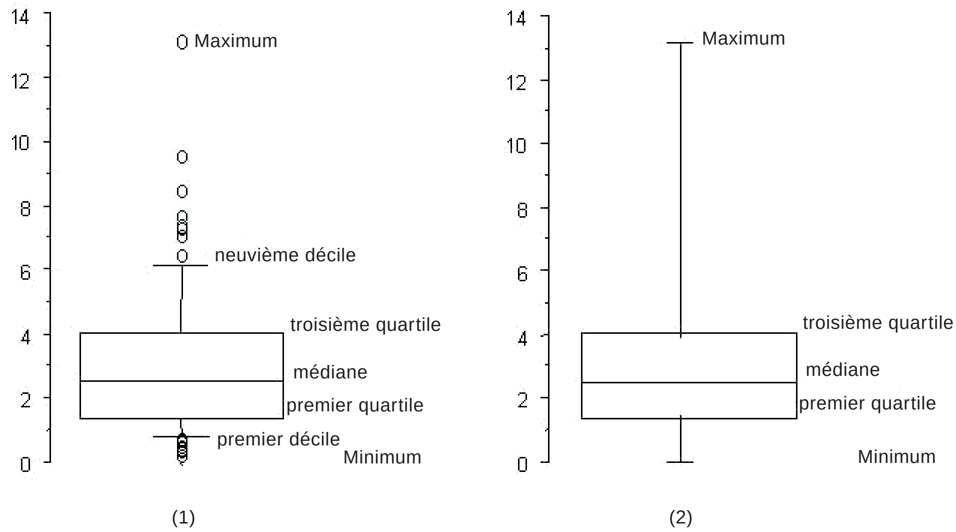
On ne définira que le premier et le neuvième décile :
Premier décile : c'est le plus petit élément d des valeurs des termes de la série tel qu'au moins 10 % des données soient inférieures ou égales à d
Neuvième décile : c'est le plus petit élément d' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 90 % des données soient inférieures ou égales à d'.
On pourra introduire les termes suivants :
Intervalle interquartile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le troisième quartiles.
Intervalle interdécile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le neuvième déciles.
Écart interquartile : longueur de l'intervalle interquartile, *i.e.* différence entre le troisième et le premier quartiles.
Écart interdécile : longueur de l'intervalle interdécile, *i.e.* différence entre le neuvième et le premier déciles.

Un abus de langage assez fréquent fait qu'on parle aussi d'intervalle interquartile au lieu d'écart interquartile : on évitera cet abus de langage au lycée.

Remarque : si les termes de la série subissent une transformation affine, $x \mapsto ax + b$, où a est positif (ce qui est le cas lors d'un changement d'unité), les quantiles subissent la même tranformation.

Diagrammes en boîtes

Ces diagrammes sont aussi appelés diagrammes de Tuckey, diagrammes à pattes ou à moustaches (*whiskers plot*). Il n'y a pas que le nom qui varie d'un logiciel à l'autre. Les deux situations les plus classiques sont représentées ci-dessous :



Nous conviendrons de choisir « par défaut » la définition représentée graphiquement en (1), où figurent les premiers et neuvièmes déciles. Si une ou plusieurs valeurs extrêmes sortent résolument des limites du dessin, on indique dessous leurs valeurs sans les représenter. D'autres représentations peuvent être considérées, en spécifiant alors comment sont définies les « moustaches » de la boîte.

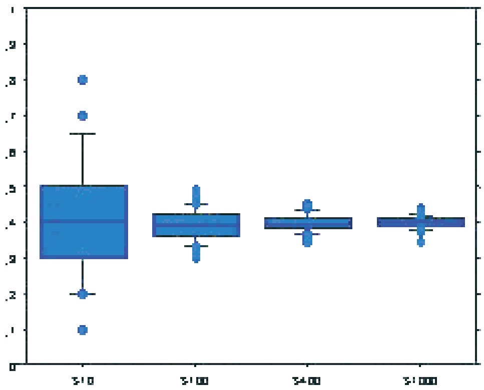
Néanmoins, les enseignants pourront utiliser des boîtes dont les extrémités sont les premiers et 99e centiles, les valeurs extrêmes, etc. L'essentiel est d'avoir compris le principe : un jour d'examen, on demandera simplement à l'élève de spécifier en légende les éléments représentés.

Les premiers diagrammes en boîtes sont les diagrammes de Tuckey où la longueur des « moustaches » est 1,5 fois l'écart interquartile ; les diagrammes de Tuckey étaient utilisés dans des secteurs où les données peuvent le plus souvent être modélisées en utilisant une loi de Gauss ; dans ce cas, au niveau théorique, les extrémités des « moustaches » sont voisines du premier et 99e centiles : ces diagrammes étaient surtout utilisés pour détecter la présence de données exceptionnelles. On utilise aujourd'hui les diagrammes en boîtes pour représenter des distributions empiriques de données quelconques, non nécessairement symétriques autour de la moyenne, et le choix de moustaches de longueur 1,5 fois l'écart interquartile ne se justifie plus.

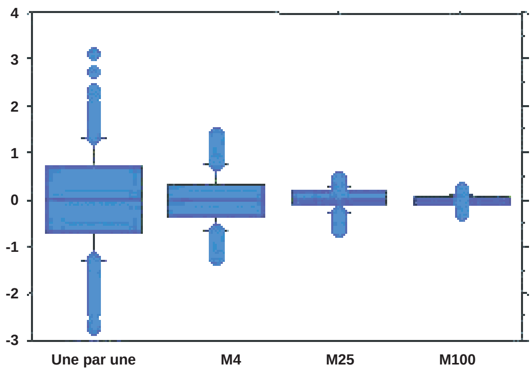
Les diagrammes en boîtes, comme les histogrammes, résument graphiquement une série ; l'idée de base est la suivante : au lieu de partager l'ensemble des valeurs possibles en segments égaux, on les partage en segments (quartiles, déciles, centiles) qui contiennent une proportion prédéterminée des valeurs de la série. Les diagrammes en boîtes permettent de visualiser certains phénomènes et notamment de comparer plusieurs répartitions de valeurs. Ainsi, dans la figure ci-dessous, on a représenté les diagrammes en boîtes de :

– 100 simulations d'un sondage de taille 10 dans une population dont les individus sont codés 0 ou 1, la proportion de 1 étant ce qu'on cherche à déterminer (un sondage

de taille n est ici le tirage au hasard – et avec remise – de n individus dans une population de taille N) ;
– 100 simulations d'un sondage de taille 100 dans la même population ;
– 100 simulations d'un sondage de taille 400 dans la même population ;
– 100 simulations d'un sondage de taille 1000 dans la même population.



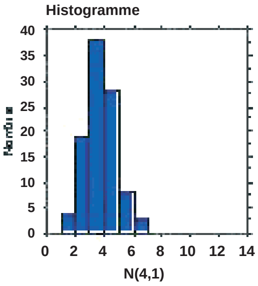
La deuxième figure représente des mesures de hauteur d'eau dans un barrage par rapport à un niveau fixé : on met 100 appareils qui mesurent cette hauteur d'eau. On a essayé quatre sortes d'appareils de mesure :
– ceux qui font une seule mesure ;
– ceux qui font 4 mesures et donnent leur moyenne ;
– ceux qui font 25 mesures et donnent leur moyenne ;
– ceux qui font 100 mesures et donnent leur moyenne.

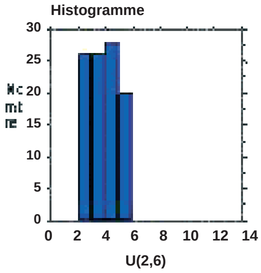


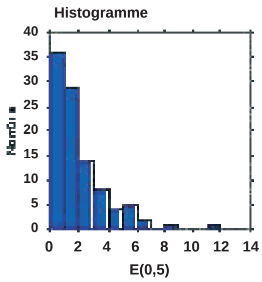
Les deux exemples situés ci-dessus sont spectaculaires et aisés à interpréter. Pour des séries de données quelconques, interpréter un diagramme en boîte demande un peu d'expérience et d'honnêteté pour ne pas transformer en affirmation théorique une observation lue sur un diagramme, que ce soit un histogramme ou un diagramme en boîte.
Ci-dessous, nous présentons pour des séries de taille 100 simulées à partir de modèles classiquement utilisés divers résumés numériques et graphiques qu'on pourra s'exercer à lire :
– deux séries simulées à partir de lois de Gauss de moyennes 4 et 6 et de variances 1 et 4 et une série simulée à partir de la loi uniforme sur 1,6. Ces lois sont symétriques autour de leur moyenne : l'espérance et la médiane théoriques coïncident et les graphiques théoriques sont symétriques.
– une série simulée à partir de la loi exponentielle d'espérance 2 et une série simulée à partir d'une loi du χ^2 à 4 degrés de libertés : ces lois de probabilité n'admettent pas de symétrie.

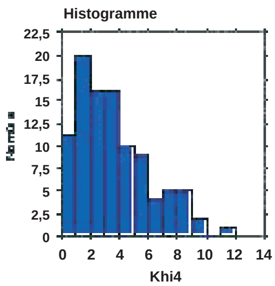
Statistiques descriptives

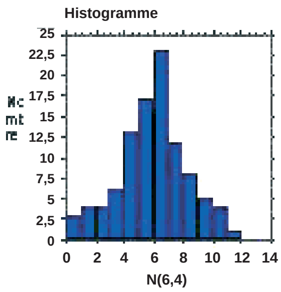
	Moy.	Dév. Std	Nombre	Minimum	Maximum	Médiane	Interquartile	10% Moy. élaguée
N(4,1)	3,782	,999	100	1,556	6,597	3,799	1,186	3,741
U(2,6)	3,927	1,153	100	2,006	5,927	3,881	1,999	3,932
E(0,5)	2,029	1,945	100	,055	11,633	1,562	1,926	1,706
N(6,4)	5,995	2,366	100	,185	11,762	6,056	3,376	6,021
Khi4	3,745	2,630	100	,095	13,430	3,085	3,428	3,423

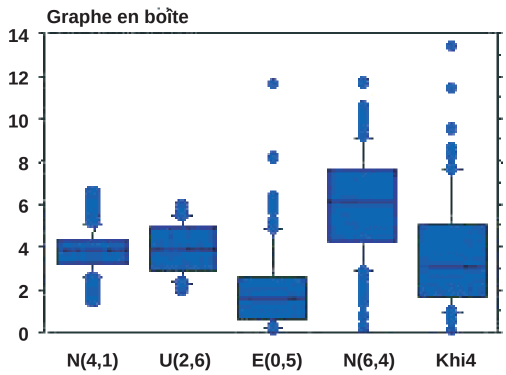












Enfin, à ce propos et pour sa propre formation, l'enseignant pourra utiliser le logiciel *SEL* (présent sur le cédérom joint). Plus précisément, il pourra :

– dans l'applet située à la page « Diagrammes en boîte » du lexique, voir comment fluctuent ces diagrammes lorsqu'on tire des échantillons au hasard dans un série de données réelles (tailles d'enfants de six ans) ;

– dans l'applet de simulations « diagrammes en bâtons, histogrammes et quantiles », superposer les histogrammes, fonctions de répartitions, fonctions quantiles et diagrammes en boîtes de différentes lois classiques avec celles d'échantillons simulés ;

– dans l'applet « ajustement par quantiles », visualiser une technique classique d'ajustement de lois à des données.