Fonction carré, fonction cube

Table des matières

1 La fonction carré : $x \mapsto x^2$

1.1 Définition et propriétés

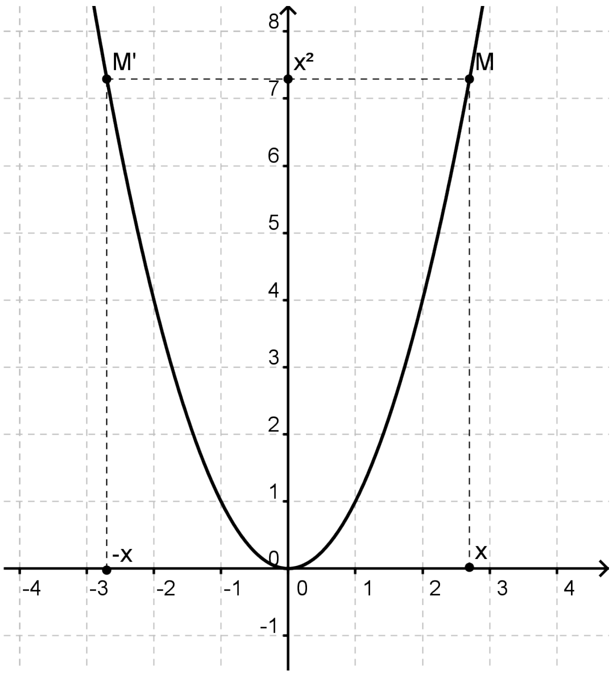
Définition 1. La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Propriété 1. La fonction carré est
- strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$
- strictement croissante sur $[0, +\infty[$

La fonction carré n'est ni linéaire, ni affine.

1.2 Parabole d'équation $y = x^2$



La fonction carré est représentée par une courbe appelée **parabole.** Elle est constituée de tous les points $M(x, x^2)$ et a pour équation $y = x^2$.
Le point $O(0, 0)$ est son **sommet.**
La fonction carré est *paire*.

Propriété 2. Dans un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = x^2$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Démonstration. Pour n'importe quel réel x, on a $(-x)^2 = x^2$.
Les points $M(x; x^2)$ et $M'(-x; x^2)$ appartiennent tous les deux à la courbe et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnée est donc un axe de symétrie de cette parabole. □

1.3 Équations $x^2 = a$

1.3.1 N'oublions pas les solutions négatives !

Exemple. La démarche « naturelle »qui consiste à résoudre l'équation $x^2 = 4$ en $x = 2$ est fausse.
En effet, on attend **TOUTES** les solutions et on a oublié -2 qui vérifie pourtant $(-2)^2 = 4$.
D'où vient cette erreur ?
Des applications du théorème de Pythagore ! En effet souvenons-nous :

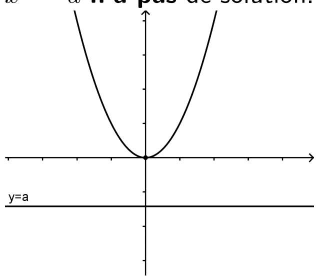
Si ABC est rectangle en A et que $AB = 3$ et $AC = 4$ alors le théorème de Pythagore s'applique et il vient :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 4^2 + 3^2 &= BC^2 \\ 25 &= BC^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $BC = 5$ car BC est une distance, donc un **nombre positif.** La solution $BC = -5$ est exclue, car **impossible.**
Rien n'indique dans l'équation $x^2 = 4$ que x soit positif... donc rien ne permet d'exclure $x = -2$!

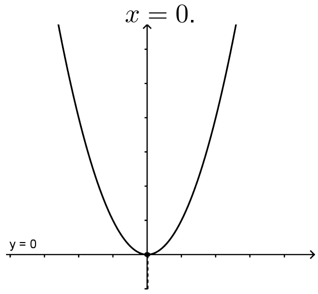
1.3.2 Cas général

Si $a < 0$,
$x^2 = a$ **n'a pas** de solution.



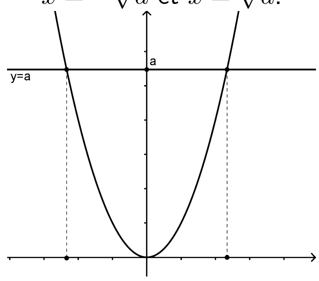
Démonstration. $x^2 \geq 0$ pour tout réel x. Donc x^2 ne peut jamais être égal à un nombre strictement négatif. □

Si $a = 0$,
$x^2 = 0$ a une **unique solution**
$x = 0$.



Démonstration. $x^2 = 0$ signifie $x \times x = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. 0 est donc la seule solution. □

Si $a > 0$,
$x^2 = a$ a **deux solutions**
$x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.



Démonstration. $x^2 = a$ revient à $x^2 - a = 0$. Comme a est positif, il est le carré de $\sqrt{a}$. L'équation s'écrit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$.
Soit $x = -\sqrt{a}$ ou $x = +\sqrt{a}$. □

2 La fonction cube : $x \mapsto x^3$

2.1 Définition et propriétés

Définition 2. La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

La fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty ; +\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

Propriété 3.
La fonction cube n'est ni linéaire, ni affine.

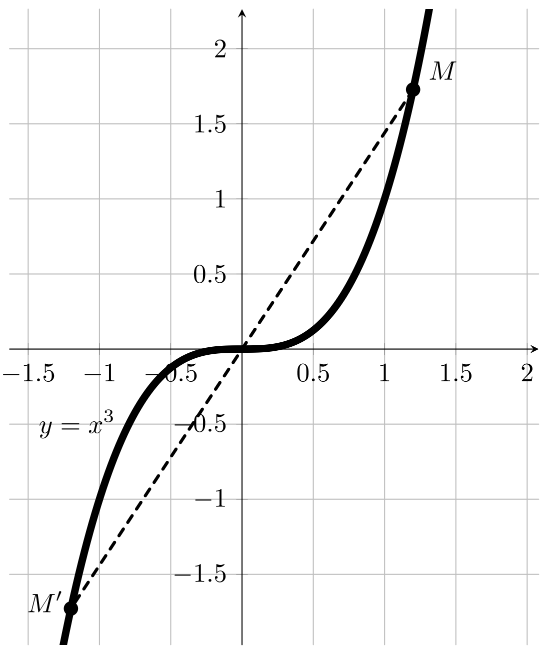
2.2 Courbe d'équation $y = x^3$

La fonction cube est représentée par une courbe constituée de tous les points $M(x, x^3)$ et a pour équation $y = x^3$.
La fonction cube est *impaire*.

Propriété 4. Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^3$ admet l'origine comme centre de symétrie.

Démonstration. Pour n'importe quel réel x, on a $(-x)^3 = -x^3$.
Les points $M(x; x^3)$ et $M'(-x; -x^3)$ appartiennent tous les deux à la courbe et sont symétriques par rapport à l'origine. L'origine est donc centre de symétrie de cette courbe.

□



2.3 Équations $x^3 = a$

Propriété 5. Pour tout réel a, l'équation $x^3 = a$ admet une unique solution notée $\sqrt[3]{a}$.

Exemple.
$x^3 = -8$ a pour unique solution $x = -2$.
$x^3 = 26$ a pour unique solution $x = \sqrt[3]{26} \approx 2.9624$.