L2 S4 Examen 2021 Correction

Exo 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B = 2I_2 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$. B est nilpotente d'ordre 2.

$\forall n \geqslant 2,\quad B^n = B^2 \cdot B^{n-2} = O_2 \cdot B^{n-2} = O_2.$

3) $A = 2I_2 + B$ et I_2 commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

donc on peut appliquer le binôme de Newton

$$A^n = (2I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2^{n-k} B^k$$

$B^n = O_2 \quad \forall n \geqslant 2$

$$A^n = \binom{n}{0} 2^n B^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} B$$

$$A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} B = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3n \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4) (S) $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2v_n \\ u_0 = 1, v_0 = 2 \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$

a) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ donc $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

$M \quad X_n \quad = \quad X_{n+1}$

b) $X_{n+1} = MX_n$ Mq $X_n = M^n X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $\underline{n=0}$ $\quad X_0 = M^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$ ✓

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = M^n X_0$ alors

$X_{n+1} = MX_n = M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0$. ✓

Par récurrence, $X_n = M^n X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) D'après 3) $\quad X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \cdot 2^{n-1} n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3n2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \leftarrow u_n \\ \leftarrow v_n \end{matrix}$

Exo 2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $P(\lambda) = \det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3^2$

$$= (2-\lambda-3)(2-\lambda+3)$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

2 vp distinctes : $\lambda = -1$ et $\lambda = 5$

en dim 2, avoir 2 vp distincts suffit à ce que C soit diagonalisable.

2. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice des vp.

$\vec{vp}$ pour $\lambda = -1$. On résout $(C + I_2) X = 0_2$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ pour $\lambda = -1$

$\vec{v_p}$ pour $\lambda = 5$. On résout $(C - 5I_2)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$ $L_1 \iff L_2$ $\iff x = y$

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{v_p}$ pour $\lambda = 5$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et le cours nous dit que $C = PDP^{-1}$

Exo 3

(S) $\begin{cases} -mx + y + z = m \\ x - my + z = 1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$

1) (S) est de Cramer ssi $M = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ inversible

ssi $\det M \neq 0$.

Calculons $\det M$

$$\det M = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 2-m & 2-m & 2-m \end{vmatrix} = (2-m)\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 + L_1$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

DVLP % L_3

$$\det M = \begin{vmatrix} -m-1 & 0 & 1 \\ 0 & -m-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -m-1 & 0 \\ 0 & -m-1 \end{vmatrix} = (-m-1)^2$$

$\det M \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ (S) est de Cramer ssi $m \neq -1$

2) Pour $m = -1$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = -1 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases}$$

impossible

$\mathcal{S} = \emptyset$

3) $\underline{m=0}$ $\quad M : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y = 1 - 1 = 0. \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exo 4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. λ est vp de A $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_3) = 0$

Calculons $\det(A - 0 I_3) = \det A$ et $\det(A - I_3)$.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \text{ vp de } A.$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ 2 colonnes identiques.

$$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 \text{ vp de } A$$

$C_2 = -C_1$

On aurait dû lire l'énoncé !
Il vaut mieux calculer $P(X)$

1) Retour sur la Q1

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ -3 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

~~$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$~~ $$\cancel{= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1-\lambda \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

DVLP % L_1

$$p(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2 \lambda$$

Les vp sont 1 (multiplicité 2) et 0 (multiplicité 1)

2) $\vec{vp}$ pour $\lambda = 0$ On résout $AX = 0$

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\cap$ de 2 plans de $\mathbb{R}^3 = 1$ droite

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ pour $\lambda = 0$

$\vec{vp}$ pour $\lambda = 1$ On résout $(A - I_3)X = 0$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ -3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ $\cap$ de 2 plans $= \underline{1 \text{ droite}}$

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ pour $\lambda = 1$

3. A n'est pas diagonalisable.

la vp $\lambda = 1$ est de multiplicité 2 et on n'a qu'une droite de $\overrightarrow{vp}$ pour $\lambda = 1$. Il faudrait un plan

4.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

inverse de Q. Réduction de Gauss-Jordan

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \qquad L_3 \leftarrow -L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{ et } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

5. $Q T Q^{-1}$

$$\begin{array}{cccc} & T & Q^{-1} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ QTQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A \\ Q & QT & \end{array}$$

On a $QTQ^{-1} = A$

On a trigonalisé A.

6. a)

$$\begin{matrix} & & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\\ T^3 = & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix} \\ & & T^2 & T^3\end{matrix}$$

b) · La prop est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

· Supposons $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{bmatrix}$

Alors

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{bmatrix} \\ T^{n+1} = T \cdot T^n = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-n-1\\0&0&1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

Vrai au rang $n+1$

Par récurrence, vrai $\forall n \geqslant 0$.

6. c) $A = Q\,T\,Q^{-1} \underset{\text{Comme}}{\Rightarrow} A^n = Q\,T^n\,Q^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc

$$A^5 = Q\,T^5\,Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$QT^5Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -7 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$