L2 S4 Séance 2 : 7, 8, 9, 10, 11, 12

Exo 7

Vérifions que $(AB)\cdot C = A(BC)$ avec

$$B : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad c : \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = AB \qquad AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = (AB)\,C$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B\,C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = BC \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = A\cdot(BC)$$

On a bien $(AB)\,C = A\,(BC)$ (ouf !)

Exo 8 1. On cherche $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{"A"} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad *$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $*$ devient

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix}}_{= AX} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 matrices sont égales si leurs coeffs. le sont donc

$$\begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \\ 2z = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

⚠ Pas d'info sur x et y.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \right\}}$$

⚠ La th. du produit nul ne s'applique pas aux matrices.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Soit $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$AX = B \iff$

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x+z = 1 \\ y+t = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \iff \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Unique solution</u>

Exo 9 Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = A & L_1 \\ X + 2Y = B & L_2 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} Y = B - A \\ X = A - Y & L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X = A - B + A = 2A - B \\ Y = B - A \end{cases}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exo 10

1. AB, BA, $(A+B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$
2. ${}^t(AB)$ et ${}^tA \cdot {}^tB$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AB$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

On a $AB \neq BA$

$$A+B \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -12 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix} = (A+B)^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A^2$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \\ -8 & -5 & 6 \end{pmatrix} = B^2$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -8 \\ -20 & -3 & 7 \\ -9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

Conséquence de $AB \neq BA$.

2. $\,{}^t(AB)$

toujours vrai :

$${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tB \cdot {}^tA =$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Par contre

${}^tA \cdot {}^tB$:

$$
\begin{array}{cc}
 & {}^tB \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exo 11

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 .$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^3$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^4.$$

$\boxed{A^4 = O_4}$.

Par récurrence, Montrons que $A^n = O_4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

- Vrai pour $n = 4$.
- Supposons $\exists$ $n \geq 4$ tel que $A^n = O_4$

Alors $A^{n+1} = A^n \cdot A = O_4 \cdot A = O_4$. $\square$

CCL : $\forall n \geq 4$ $\boxed{A^n = O_4}$ A est nilpotente.

Exo 12

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = A^2.$

2) B telle que $\underline{A^2 = A + B} \iff B = A^2 - A$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3 . a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = B .$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

On a bien $AB = B$.

3 . b) Pour $\underline{n = 1}$ $A^1 = A + 0 \cdot B = A + (1-1) B$.

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = A + (n-1) B$

Alors $A^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \cancel{A^n . A} \\ A . A^n \end{array} \right. = A . \left(A + (n-1) B \right)$

$= A^2 + (n-1) AB = A + B + (n-1) B = A + nB$.

$\square$.