Mathématiques pour l'économiste
Licence 2 économie et gestion
Partiel du 25 octobre 2018

La qualité de la rédaction prendra part dans l'appréciation des copies. Documents interdits. Calculatrices de type "collège" autorisées. Aucun brouillon ne sera corrigé.

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par : $f(x,y) = \dfrac{yx^2}{y^2+x^4}$.

On pose $X = (x,y)$. On cherche à étudier la limite de la fonction f au point $(0,0)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et justifier que f est continue sur $\mathcal{D}$.
2. Soit (Δ) la droite passant par l'origine définie par l'équation $y = x$.
   Déterminer $\lim\limits_{\substack{X\to(0,0)\\ X\in\Delta}} f(x,y)$.
3. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y = x^2$.
   Déterminer $\lim\limits_{\substack{X\to(0,0)\\ X\in\mathcal{P}}} f(x,y)$.
4. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \ln(y-1+x^2)$

1. Déterminer et représenter l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Justifier que f est derivable sur $\mathcal{D}$ et calculer ses derivées partielles.
3. Les élasticités partielles de f en $X_0 = (-1,2)$ existent-elles ? Si oui, que valent-elles ?
4. Déterminer et représenter la courbe de niveau 0 de f (on écrira $\ln 1 = 0$).

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction homogène et préciser son degré d'homogénéité.
2. Donner la définition de "f a pour limite 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$".
3. Montrer que pour tout réels x et y, on a $xy \leq \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.
4. En déduire que pour tout x, y réels, $|f(x,y)| \leq \frac{|x-y|}{2}$ et montrer que f a une limite finie en $(0,0)$.
5. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.