45. Densité et loi uniforme

■ Densité

Définition. Soit X une variable aléatoire sur Ω, prenant ses valeurs sur un intervalle I de bornes $a < b$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. La loi P_X de X est *à densité continue* s'il existe une fonction f (la *densité*) définie sur I et vérifiant :

- f est positive et continue ;
- $\displaystyle\int_a^b f = 1$;
- $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f$.

Si $x_0 \in I$ alors $\mathrm{P}_X(x_0) = \mathrm{P}(X = x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f = 0$ (la loi est *diffuse*). Ainsi une issue peut être réalisable tandis que sa probabilité vaut 0.
Une conséquence est qu'on ne peut définir la probabilité d'un intervalle comme la somme (intégrale) des probabilités des points qui le composent. On peut par contre interpréter l'aire rectangulaire $f(x)\mathrm{d}x$ comme $\mathrm{P}(X \in [x; x + \mathrm{d}x])$, c'est-à-dire la probabilité que X soit dans un voisinage infinitésimal de x. On a alors naturellement $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(X \in [x; x + \mathrm{d}x])$.

Définition. Soit X une variable aléatoire sur Ω, prenant ses valeurs sur un intervalle I de bornes $a < b$, à densité f sur I.

- $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{P}(X \in [x; x + \mathrm{d}x]) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$ (moyenne des x pondérés) ;
- $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 = \displaystyle\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{E}(X)^2$;
- $\mathrm{F}_X(t) = \mathrm{P}(X \leqslant t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $a \leqslant t \leqslant b$ *(fonction de répartition)*.

Théorème. Dans ces conditions :

- les propriétés de l'espérance et de la variance sont les mêmes que dans le cas discret ;
- F_X est une primitive de f.

■ Loi uniforme

Définition. La *loi uniforme* sur $[a; b]$ est la loi $\mathcal{U}([a; b])$ de densité $\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a; b]$.

Théorème. Si $X \sim \mathcal{U}([a; b])$ alors :

- $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$;
- $\mathrm{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$;
- $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.

En particulier, si $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$ alors $F(x) = x$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

■ Exercices

45.1. Soit $U \sim \mathcal{U}([0; 1])$.

1. Calculer *ex nihilo* la variance de U.
2. Quelle loi suit la v.a. $X = (b - a)U + a$?
3. Retrouver la variance de X vue dans le cours.

46. Loi normale

■ Loi centrée réduite

Définition. La loi de densité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$ est la *loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$.

La densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est paire, donc si la v.a. X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathrm{P}(X<0)=\mathrm{P}(X>0)=\dfrac{1}{2}$.
La courbe de la densité $\mathcal{N}(0,1)$ est une *gaussienne*, et la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est fréquemment appelée *gaussienne* ou *loi de Laplace-Gauss*.

Théorème. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction de répartition ϕ, alors :
- $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)=\phi(b)-\phi(a)$;
- $\phi(-a)=1-\phi(a)$;
- $\mathrm{P}(-a \leqslant X \leqslant a)=2\phi(a)-1$.

Avec un logiciel de calcul on obtient les deux résultats à connaître suivants :
- $\mathrm{P}(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96)\approx 0,95$;
- $\mathrm{P}(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58)\approx 0,99$.

Théorème. Si X est une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors :
- $\mathrm{E}(X)=0$;
- $\mathrm{V}(X)=1$.

■ Loi générale

Définition. Soit X une v.a. à densité. Si $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ alors X suit la *loi normale* $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. On a alors $X=\sigma Z+\mu$.

La valeur de σ influence l'étalement de la densité : plus elle est grande, plus la courbe s'aplatit et la dispersion devient grande.
Avec un logiciel de calcul on obtient les trois résultats à connaître suivants :
- $\mathrm{P}_X([\mu-\sigma;\mu+\sigma])\approx 0,6827$;
- $\mathrm{P}_X([\mu-2\sigma;\mu+2\sigma])\approx 0,9545$;
- $\mathrm{P}_X([\mu-3\sigma;\mu+3\sigma])\approx 0,9973$.

Théorème. Si X est une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ alors :
- $\mathrm{E}(X)=\mu$;
- $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$;
- $\sigma(X)=\sigma$.

■ Exercices

46.1. Soit $X\sim\mathcal{N}(0,1)$. Calculer :
1. $\mathrm{P}(X<1,47)$;
2. $\mathrm{P}(X\leqslant 3,2)$;
3. $\mathrm{P}(X<-1,47)$;
4. $\mathrm{P}(X>0,94)$;
5. $\mathrm{P}(X\geqslant -2,32)$;
6. $\mathrm{P}(1,13<X<2,86)$;
7. $\mathrm{P}(-1,72\leqslant X\leqslant -0,62)$;
8. $\mathrm{P}(-1,2<X<0,23)$.

46.2. Soit $X \sim \mathcal{N}(2; 0,3)$. Calculer :

1. $\mathrm{P}(X < 1,47)$;
2. $\mathrm{P}(X \leqslant 3,2)$;
3. $\mathrm{P}(X < -1,47)$;
4. $\mathrm{P}(X > 0,94)$;
5. $\mathrm{P}(X \geqslant -2,32)$;
6. $\mathrm{P}(1,13 < X < 2,86)$;
7. $\mathrm{P}(-1,72 \leqslant X \leqslant -0,62)$;
8. $\mathrm{P}(-1,2 < X < 0,23)$.

46.3. Soit $X \sim \mathcal{N}(2,5; 0,2)$. Déterminer α tel que $\mathrm{P}(X < \alpha) = 0,67$.

46.4. Soit $X \sim \mathcal{N}(2,5; 0,2)$. Donner $\mathrm{E}(X)$, $\sigma(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

46.5. Une machine fabrique des résistors. La variable aléatoire X associe à chaque résistor sa résistance exprimée en ohms. On suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 100$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On prélève un résistor au hasard dans la production. Il est considéré comme conforme si sa résistance est comprise entre $94,75$ et $105,25$ ohms. Calculer la probabilité qu'un résistor ne soit pas conforme.
2. Déterminer le réel a tel que 97 % des résistors produits par la machine aient une résistance comprise entre $100 - a$ et $100 + a$.

46.6. Une machine fabrique des condensateurs de 5 μF en très grande série. La capacité X de ces condensateurs suit une loi normale de moyenne $\overline{X} = 4,96\ \mu F$ et d'écart-type $\sigma = 0,05\ \mu F$. On considère qu'un condensateur est acceptable si sa capacité est comprise entre $4,85\ \mu F$ et $5,15\ \mu F$. La machine est considérée comme bien réglée si 99 % de sa production est acceptable.

1. Calculer la probabilité qu'un condensateur soit acceptable.
   La machine est-elle bien réglée ?
2. On prélève un échantillon de 10 condensateurs de la production.
   Quelle est la probabilité qu'au moins 9 d'entre eux soient acceptables ?
3. On souhaite accélérer la production, quitte à diminuer la qualité ; l'écart-type σ va donc augmenter. On en profite pour régler correctement la machine sur $\overline{X} = 5\ \mu F$. Déterminer σ afin que 80 % de la production soit acceptable.

47. Approximations par la loi normale

Approximation d'une binomiale

Théorème. Pour n assez grand (disons $n > 30$), pour p ni voisin de 0 ni de 1 (disons $0,1 < p < 0,9$) et avec npq assez grand (disons $npq > 10$), on peut raisonnablement approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

Les conditions données sur n, p et npq sont bien sûr indicatives, sachant qu'on ne précise pas l'ordre de l'approximation effectuée.
Les conditions sur $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ dans le théorème signifient que le nombre de répétitions n doit être important, que la probabilité de succès p doit être non extrême et que $\mathrm{V}(X)$ ne doit pas être trop faible.
Dans ces conditions : $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < \dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) \approx \phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$.
Une v.a. binomiale X prend des valeurs entières alors qu'une v.a. normale prend des valeurs réelles. Il se produit donc des effets de bord dans l'approximation. Lorsqu'on cherche $\mathrm{P}(X < k)$, cela signifie aussi $\mathrm{P}(X \leqslant k-1)$. On peut donc être amené à prendre $\mathrm{P}(X < k - 0,5)$ pour effectuer l'approximation par la loi normale. De la même manière, lorsqu'on cherche $\mathrm{P}(X \leqslant k)$, cela signifie aussi $\mathrm{P}(X < k+1)$ et on peut donc être amené à prendre $\mathrm{P}(X < k + 0,5)$. C'est la *correction de continuité*.

Approximation d'une somme de v.a.

Théorème (théorème de la limite centrée)**.** Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des v.a. indépendantes et de même loi de moyenne μ et d'écart-type σ alors on peut raisonnablement approcher la loi de $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercices

47.1. Sous GeoGebra, mettre en évidence le théorème d'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

47.2. Sur une chaîne de fabrication, 25 % des pièces sont défectueuses. On prélève 100 pièces sur une très importante production et on note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $\mathrm{P}(X \leqslant 25)$.
3. Montrer qu'on peut raisonnablement approcher la loi de X par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. Calculer $\mathrm{P}(X \leqslant 25)$ à l'aide de cette approximation et apprécier sa qualité.

47.3. Sur une chaîne de fabrication mal réglée, 60 % des pièces produites sont défectueuses. On prélève 300 pièces sur une très importante production et on note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Peut-on calculer facilement $\mathrm{P}(X > 200)$? Effectuer le calcul avec un logiciel de calcul formel.
3. Montrer qu'on peut raisonnablement approcher la loi de X par une loi normale dont on précisera les paramètres.
4. Calculer $\mathrm{P}(X > 200)$ à l'aide de cette approximation et apprécier sa qualité.

48. Problèmes

48.1. Chaque jour, une entreprise produit des condensateurs identiques en grande quantité. Chaque condensateur fabriqué peut présenter deux défauts : l'un au niveau des armatures, appelé défaut A, et l'autre, appelé défaut B, au niveau du diélectrique.
Une étude statistique a montré que 2 % des condensateurs fabriqués présentent le défaut A et 1 % le défaut B. La présence du défaut A sur un condensateur choisi au hasard dans la production est considérée comme un évènement aléatoire indépendant de la présence du défaut B sur le même condensateur.

1. On prélève un condensateur au hasard dans la production.
   (a) Calculer la probabilité que ce condensateur présente les deux défauts A et B.
   (b) Calculer la probabilité que ce condensateur ne présente aucun défaut.
   (c) Calculer la probabilité que ce condensateur présente au moins un des deux défauts.
2. On réalise des prélèvements aléatoires de 100 condensateurs dans la production. Chacun de ces prélèvements est assimilé à un tirage avec remise.
   Un condensateur est dit défectueux lorsqu'il présente au moins un des deux défauts.
   On admet, pour cette question, que la probabilité qu'un condensateur prélevé au hasard soit défectueux est 0,03.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de condensateurs défectueux dans un lot de 100 condensateurs prélevés au hasard.
   (a) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait dans un lot exactement 3 condensateurs défectueux.
3. La capacité nominale des condensateurs est 210 μF . Un condensateur est déclaré « conforme » lorsque sa capacité réelle appartient à l'intervalle $[189; 252]$.
   On note Z la variable aléatoire qui associe à un condensateur choisi au hasard dans la production sa capacité réelle en μF.
   On admet que la variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne 210 et d'écart type 12.
   On prélève au hasard un condensateur dans la production.
   Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que ce condensateur soit conforme.

48.2. Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle.
Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

A − Une pièce fabriquée est conforme si son épaisseur est comprise en $14,3$ et $15,5$ mm.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur en millimètres. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ. La moyenne m dépend du réglage de la machine.

1. Dans cette question, on suppose que $\sigma = 0,35$. De plus, la machine a été réglée de sorte que $m = 15$.
   (a) Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée soit conforme.
   (b) Calculer le nombre réel positif h tel que $p(15 - h \leqslant X \leqslant 15 + h) = 0,95$.
   (c) Interpréter le résultat de la question précédente à l'aide d'une phrase.
2. La machine est désormais réglée de sorte que $m = 14,9$.
   Quel devrait être alors l'écart type pour que le pourcentage de pièces conformes soit égal à 90 % ?

B − On admet que la proportion de pièces conformes dans la production d'une journée est de 90 %. On prélève au hasard un lot de 100 pièces dans la production pour vérification de l'épaisseur. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire prenant le nombre de pièces non conformes dans ce lot.

1. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux pièces non conformes dans ce lot.
3. Montrer que la loi de probabilité de Y peut être approchée par une loi normale.
4. En utilisant cette loi normale, calculer la probabilité que le lot contienne au plus deux pièces non conformes.

C – Pour améliorer sa production, l'usine achète une deuxième machine.
On sait que 40 % des pièces sont fabriquées par la première machine M_1, les autres pièces étant fabriquées par la nouvelle machine M_2.
Par ailleurs, 90 % des pièces fabriquées par la machine M_1 sont conformes. De plus, une étude faite sur la production journalière globale de l'usine a montré que 6 % des pièces produites sont non conformes.
On prélève au hasard une pièce dans la production journalière globale de l'usine.
On définit les événements suivants :

- A : « La pièce prélevée provient de la machine M_1. »
- $\overline{A}$: « La pièce prélevée provient de la machine M_2. »
- C : « La pièce est conforme. »

1. Montrer que la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 et soit non conforme est $0,04$.
2. Recopier et compléter avec des probabilités, le tableau suivant :

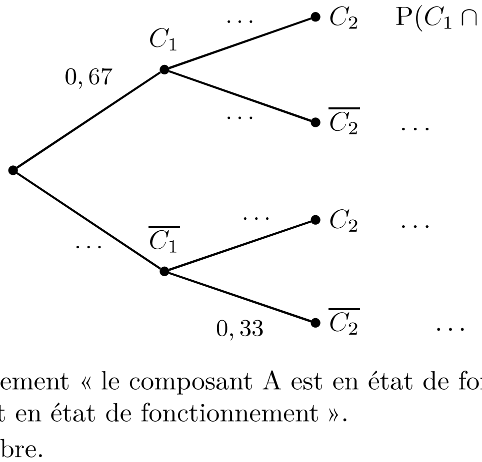
	C	$\overline{C}$	
A			
$\overline{A}$			
		$0,06$	

3. Calculer la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 sachant que cette pièce est conforme.
4. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

48.3. On s'intéresse à un dispositif comportant deux composants électriques A et B montés en parallèle. Si un seul de ces deux composants est défaillant, le dispositif continue à fonctionner.

A – Dans cette partie, on étudie la durée de vie de ce dispositif.
La durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire.

1. On désigne par t un nombre réel strictement positif. On admet que la probabilité $p(t)$ que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à t est donnée par $p(t) = \int_0^t 0,0004\,\mathrm{e}^{-0,0004\,x}\,\mathrm{d}x$.
   Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 1000 heures.
2. On donne l'arbre pondéré décrivant la situation du dispositif au bout de 1000 heures :



   où C_1 désigne l'événement « le composant A est en état de fonctionnement » et C_2 désigne l'événement « le composant B est en état de fonctionnement ».
   (a) Compléter cet arbre.
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement C_2.
   (c) Les événements C_1 et C_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
   (d) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au bout de 1000 heures le dispositif soit en état de fonctionnement.

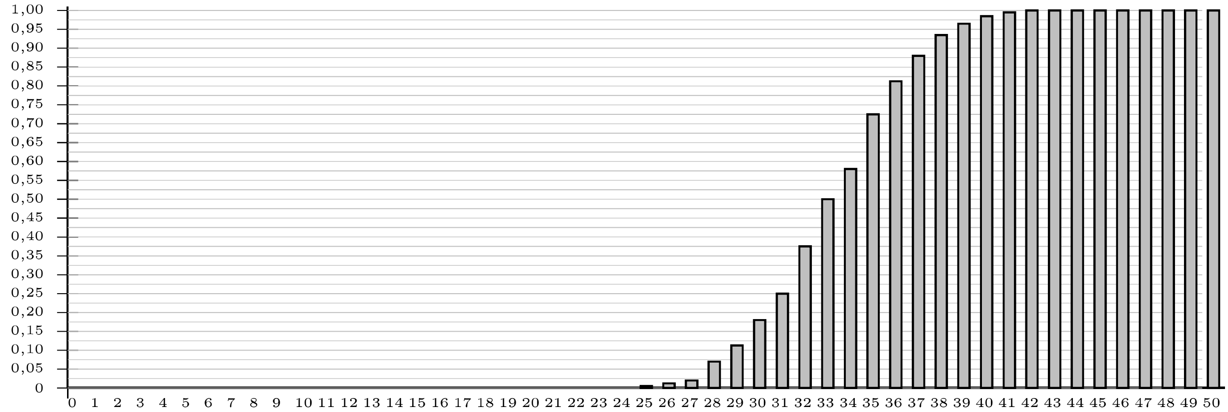
B – Dans cette partie, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3} près.
Une entreprise produit en grande série le composant A dont il est question dans la partie A. Une étude statistique permet d'admettre que la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 1000 heures est $0,67$.
Les durées de vie des composants sont indépendantes les unes des autres.
Pour un échantillon de 50 composants, on note X la variable aléatoire égale au nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1000 heures.

1. Établir que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $P(X = 42)$.
3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau, obtenu à l'aide d'un tableur, donnant les valeurs des probabilités $P(X \leqslant k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,50]$.

	A	B	C	D
1	k	$P(X \leqslant k)$		
2	38	0,93714961		
3	39	0,96825995		
4	40	0,98562989		
5	41	0,99423141		
6	42	0,99797363		
7	43	0,99938718		
8	44	0,99984376		
9	45	0,99996736		
10	46	0,99999464		
11	47	0,99999935		
12	48	0,99999995		
13	49	1		
14	50	1		
15				
16				

À l'aide de ce tableau, déterminer la probabilité que le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1000 heures parmi cet échantillon soit strictement supérieur à 42.

4. Le diagramme en bâtons suivant représente les valeurs de $\mathrm{P}(X \leqslant k)$ en fonction de k :



(a) À l'aide de ce diagramme, déterminer le plus petit nombre entier naturel k_1 tel que $\mathrm{P}(X \leqslant k_1) > 0,025$ puis le plus petit nombre entier naturel k_2 tel que $\mathrm{P}(X \leqslant k_2) > 0,975$.

(b) Peut-on affirmer : « le nombre de composants dont la durée de vie est supérieure à 1000 heures appartient à l'intervalle [27 ; 40] avec une probabilité supérieure à 0,95 » ? Justifier la réponse.

C – Dans cette partie, on décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $33,5$ et d'écart type $3,3$.

On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu = 33,5$ et d'écart type $\sigma = 3,3$.

1. Justifier le choix des paramètres μ et σ.
2. Calculer la probabilité $P(Y \leqslant 42)$ arrondie à 10^{-2}.
3. Déterminer la plus petite valeur, arrondie à 10^{-1}, du réel a tel que $\mathrm{P}(33,5 - a \leqslant Y \leqslant 33,5 + a) \geqslant 0,95$.