

Fonction carré, fonction cube

Table des matières

| | | |
|---|-------------------------------------|---|
| 1 | La fonction carré : $x \mapsto x^2$ | 1 |
| 2 | La fonction cube : $x \mapsto x^3$ | 2 |

1 La fonction carré : $x \mapsto x^2$

1.1 Définition et propriétés

Définition 1. La fonction carré est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Propriété 1. La fonction carré est

- strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$
- strictement croissante sur $[0, +\infty[$

La fonction carré n'est ni linéaire, ni affine.

| | | | |
|-------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| x^2 | | 0 | |

1.2 Parabole d'équation $y = x^2$

La fonction carré est représentée par une courbe appelée **parabole**. Elle est constituée de tous les points $M(x, x^2)$ et a pour équation $y = x^2$.

Le point $O(0, 0)$ est son **sommet**.

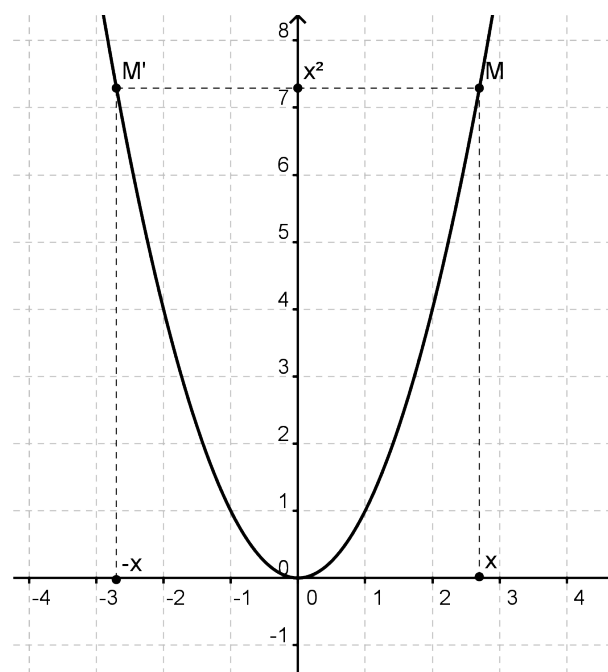
La fonction carré est *paire*.

Propriété 2. Dans un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = x^2$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Démonstration. Pour n'importe quel réel x , on a $(-x)^2 = x^2$.

Les points $M(x; x^2)$ et $M'(-x; x^2)$ appartiennent tous les deux à la courbe et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées est donc un axe de symétrie de cette parabole.

□



1.3 Équations $x^2 = a$

1.3.1 N'oublions pas les solutions négatives !

Exemple. La démarche « naturelle » qui consiste à résoudre l'équation $x^2 = 4$ en $x = 2$ est fautive.

En effet, on attend **TOUTES** les solutions et on a oublié -2 qui vérifie pourtant $(-2)^2 = 4$.

D'où vient cette erreur ?

Des applications du théorème de Pythagore ! En effet souvenons-nous :

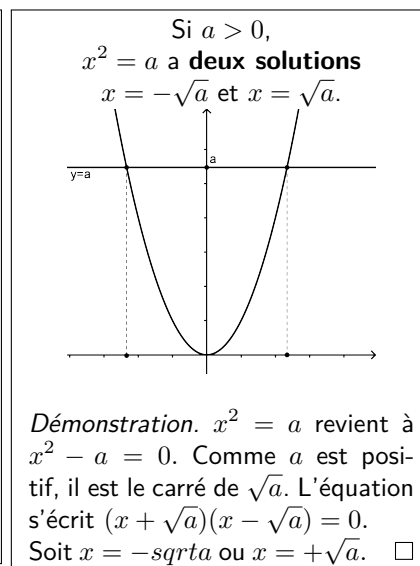
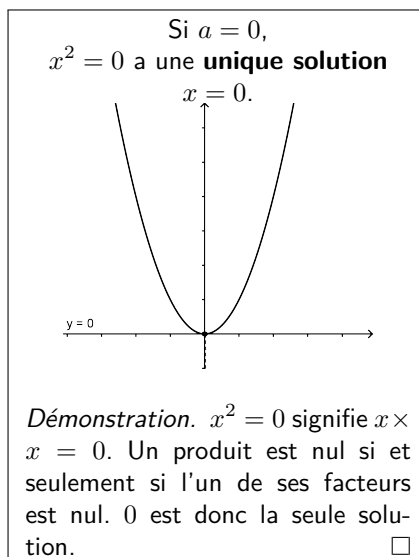
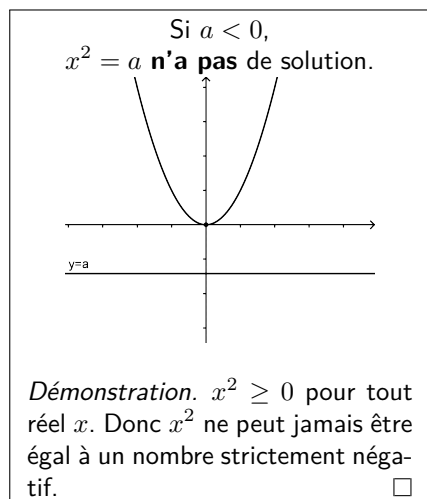
Si ABC est rectangle en A et que $AB = 3$ et $AC = 4$ alors le théorème de Pythagore s'applique et il vient :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 4^2 + 3^2 &= BC^2 \\ 25 &= BC^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $BC = 5$ car BC est une distance, donc un **nombre positif**. La solution $BC = -5$ est exclue, car **impossible**.

Rien n'indique dans l'équation $x^2 = 4$ que x soit positif... donc rien ne permet d'exclure $x = -2$!

1.3.2 Cas général



2 La fonction cube : $x \mapsto x^3$

2.1 Définition et propriétés

Définition 2. La fonction cube est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

La fonction cube est strictement croissante sur $] -\infty; +\infty[$

Propriété 3.

La fonction cube n'est ni linéaire, ni affine.

| | | |
|-------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| x^3 | | |

2.2 Courbe d'équation $y = x^3$

La fonction cube est représentée par une courbe constituée de tous les points $M(x, x^3)$ et a pour équation $y = x^3$.

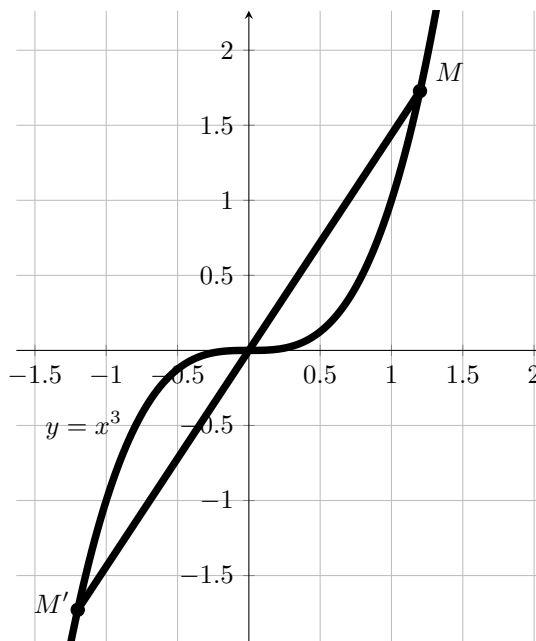
La fonction cube est *impaire*.

Propriété 4. Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^3$ admet l'origine comme centre de symétrie.

Démonstration. Pour n'importe quel réel x , on a $(-x)^3 = -x^3$.

Les points $M(x; x^3)$ et $M'(-x; -x^3)$ appartiennent tous les deux à la courbe et sont symétriques par rapport à l'origine. L'origine est donc centre de symétrie de cette courbe.

□



2.3 Équations $x^3 = a$

Propriété 5. Pour tout réel a , l'équation $x^3 = a$ admet une unique solution notée $\sqrt[3]{a}$.

Exemple.

$x^3 = -8$ a pour unique solution $x = -2$.

$x^3 = 26$ a pour unique solution $x = \sqrt[3]{26} \approx 2.9624$.