Calcul littéral

Table des matières

1 Égalité « pour tout x » et équation

1.1 Égalité « pour tout x »

Un nombre possède plusieurs écritures.
Par exemple : $0,5 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{50}{100}$. Ce sont différentes écritures d'un même nombre.
De mêmes plusieurs expressions algébriques peuvent correspondre à la même fonction.

— Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace x dans les expressions

$$(x-3)(x+1)-5\ ,\ x^2-2x-8\ ,\ (x-4)(x+2)$$

on obtient le même résultat.

— On écrit : **pour tout x réel,** $(x-3)(x+1)-5 = x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$.

— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x+1)-5$.
On a aussi $f(x) = x^2-2x-8$ et $f(x) = (x-4)(x+2)$ **pour tout réel x.**

— Pour calculer des images ou des antécédents par f, pour étudier des propriétés de f on peut utiliser l'une ou l'autre de ces expressions, **la mieux adaptée.**

1.2 Exemple

— On calcule facilement $f(0)$ avec x^2-2x-8.
$f(0) = 0-0-8 = -8$

1.3 Équation

Les expressions $2x-1$ et x^2-4 ne sont pas égales pour toutes valeurs de x.
Par exemple, pour $x=0$; $2x-1$ prend la valeur 1 tandis que x^2-4 prend la valeur -4.
En revanche, pour $x=3$, on a $2x-1=5$ et $x^2-4=5$.

— Quand x prend la valeur 3, on a bien l'égalité $2x-1 = x^2-4$:
On dit que 3 est **une solution de l'équation** $2x-1 = x^2-4$.

— **Résoudre une équation** c'est chercher **toutes** les solutions de cette équation.

2 Développer, factoriser

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

2.1 Distributivité

pour tous réels k, a, b, c, d :

— **simple distributivité**

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

— **double distributivité**

$$(a+b) \times (c+d) = a \times b + a \times c + a \times d + b \times d$$

2.2 Identités remarquables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && (1)\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && (2)\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && (3) \end{aligned}$$

Attention aux confusions, :

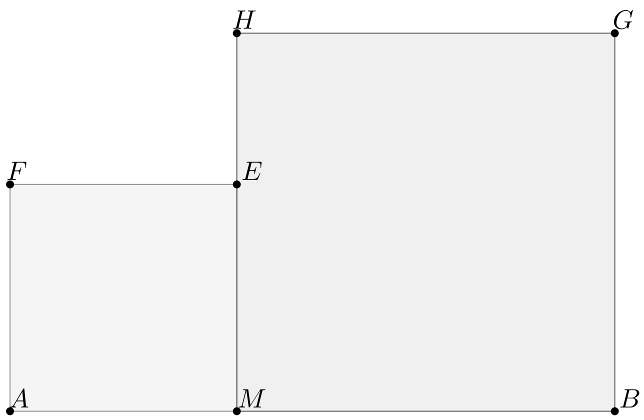
$$3x^2 \quad \neq \quad (3x)^2$$

$$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 \quad \neq \quad (3+x)^2 = 9 + 6x + x^2$$

D'ailleurs, $(3+x)^2 \neq 9 + x^2$!

2.3 Application : développer puis choisir la bonne forme

Enoncé $AB = 8$ et M appartient à AB. $AMEF$ et $MBGH$ sont des carrés. On pose $x = AM$ avec $x \in [0; 8]$.



1. Vérifier que l'aire totale est $A(x) = x^2 + (8-x)^2$
2. Démonter que, pour tout x de $[0; 8]$, $A(x) = 2x^2 - 16x + 64$ puis que $A(x) = 32 + 2(x-4)^2$.
3. Calculer $A(4)$ puis montrer que $A(x) \geq A(4)$ pour tout x de $[0, 8]$.
   Interpréter ce résultat en terme d'aire.

Solution

1. L'aire du carré $AMEF$ est x^2. La longueur MB vaut $AB - MN = 8 - x$ donc l'aire de $MBGH$ est $(8-x)^2$. Il vient $A(x) = x^2 + (8-x)^2$.
2. Développons l'expression $A(x)$.
   On utilise la seconde identité remarquable et il vient, pour tout x de $[0, 8]$:
   $$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + (8-x)^2 \\ &= x^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times x + x^2 \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$
   De même, pour tout x de $[0; 8]$,
   $$\begin{aligned} 32 + 2(x-4)^2 &= 32 + 2(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$
   On retrouve la même expression donc, pour tout x de $[0; 4]$, $A(x) = 32 + 2(x-4)^2$.
3. Utilisons la dernière expression de $A(x)$.
   $A(4) = 32 + (4-4)^2 = 32$.
   Un carré est toujours positif donc $2(x-4)^2$ l'est.
   On en déduit que $32 + 2(x-4)^2 \geq 32$ donc que $A(x) \geq A(4)$ pour tout x de $[0; 8]$.
   L'aire est minimale quand $x = 4$ donc quand M est milieu de $[AB]$.

3 Factoriser en pratique

3.1 Méthode

Pour factoriser une expression « à la main » on analyse sa structure et on se pose un certain nombre de questions.

Q1 : Est-ce une somme (ou une différence) ? De combien de facteurs ?
Q2 : Chaque terme est-il un produit ? Ou peut-il être écrit comme un produit ?
Quels sont les facteurs de chaque terme ? Y-a-t-il un facteur commun ?
Q3 : Sinon, peut-on utiliser une identité remarquable ?
Q4 : Sinon, peut-on factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable ?
Q5 : Sinon on développe en espérant pouvoir factoriser ensuite.

3.2 Exemples

3.2.1 Exemple 1

Factoriser $f(x) = (x+1)(2x-3) + 4(x+1)$.

Q1 : Cette expression est la somme de deux termes.
Q2 : Chaque terme est un produit de deux facteurs.
Q2 : $(x+1)$ est un facteur commun aux deux termes.
Q2 : On factorise : $f(x) = (x+1) \times [(2x-3) + 4]$.
Q2 : On réduit le second facteur : $f(x) = (x+1)(2x+1)$, pour tout x.

3.2.2 Exemple 2

Factoriser $g(x) = 16x^2 - (x+1)^2$

Q1 : C'est la différence de deux termes.
Q2 : Les termes sont des produits sans facteur commun.
Q3 : On a une différence de deux carrés $a^2 - b^2$: $g(x) = (4x)^2 - (x+1)^2$
On utilise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
On factorise $g(x) = [4x - (x+1)][4x + (x+1)]$ et on réduit chaque facteur. Pour tout x,
$$g(x) = (3x-1)(5x+1),$$

3.2.3 Exemple 3

Factoriser $h(x) = x^2 - 9 + 3(x - 3)$.

Q1, Q2, Q3 : $h(x)$ est une somme de trois termes, on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable.

Q4 : On peut factoriser $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Cela fait apparaître $x - 3$ comme facteur commun : $h(x) = (x - 3)(x + 3) + 3(x - 3)$.
On factorise : $h(x) = (x - 3) \times [(x + 3) + 3]$.
On réduit : $h(x) = (x - 3)(x + 6)$, pour tout x.

3.3 Exercice

Factoriser :

- $f(x) = 4x^3 - x$.
- $g(x) = (x + 1)(x - 4) + 3x + 3$
- $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$.
- $k(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

3.4 Remarque

— Certaines expressions **ne peuvent pas se factoriser**. C'est le cas de $x^2 + 1$. Il **n'existe pas** de meilleure « factorisation » de cette expression avec des coefficients réels.

— Parfois, une meilleure factorisation **existe**, mais **les méthodes vues précédemment ne permettent pas de l'obtenir**.
Par exemple, si on part de $f(x) = x^2 - 8x + 41$, aucune des méthodes précédentes ne permet d'aboutir...
Mais, si on part d'une autre écriture de $f(x) = (x - 4)^2 - 25$, on peut factoriser en utilisant $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et écrire : $f(x) = (x - 4 - 5)(x - 4 + 5)$, qui devient $f(x) = (x - 9)(x + 1)$.

— Une méthode générale pour factoriser les expressions du second degré sera présentée en seconde et est au programme de première.
Il est toujours possible d'utiliser un **logiciel de calcul formel** pour obtenir les factorisations... quand elles existent !

4 Résoudre algébriquement une équation

4.1 Equations équivalentes

Deux équations sont dites **équivalentes** quand elles sont les mêmes solutions.

Résoudre :

$$
\begin{aligned}
2(x + 3) - 4 &= 5x - 1 \\
\Leftrightarrow 2x + 2 &= 5x - 1 \\
\Leftrightarrow 2x - 5x &= -1 - 2 \\
\Leftrightarrow -3x &= -3 \\
\Leftrightarrow x &= 1.
\end{aligned}
$$

Cette équation a pour unique solution $x = 1$.

4.2 Propriété

Pour transformer une équation en une équation équivalent, on peut utiliser les propriétés suivantes :

— Développer, factoriser, réduire certains termes
— Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre de l'équation
— Multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre **non nul**.

4.3 Degré de l'équation

Premier degré Les équations du premier degré sont celles qui peuvent s'écrire sous la forme $ax + b = cx + d$ où a, b, c, d sont des réels. L'exemple est une équation du premier degré.
Elles se résolvent directement en appliquant les transformations ci-dessus.
Autres équations

— Si après développement l'équation est équivalente à une équation du premier degré, on applique la méthode précédente.
— Sinon, on transforme l'équation pour obtenir un second membre nul et on factorise pour pouvoir appliquer l'un des résultats suivants :

4.4 Propriétés

- **Théorème du produit nul**.
  Un **produit** de facteur est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$$P \times Q = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

- **Théorème du quotient nul**.
  Un **quotient** de facteur est nul si le numérateur est nul et le **dénominateur est non nul**.

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P = 0 \text{ et } Q \neq 0.$$

4.5 Exercice

Résoudre graphiquement puis par le calcul :

1. $(E_1) \quad 3x^2 + 3x - 2 = -x - 2$
2. $(E_2) \quad (x-1)^2 + 3x = x^2 - 1$