Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

1. Préciser le domaine de définition D.
2. Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre en un point quelconque de D.
3. Exprimer les conditions du premier ordre à l'existence d'un extrema local de f et les résoudre.
4. Déterminer les extrema locaux éventuels de f sur D.

Correction

1. $D = \mathbb{R}^2$
2. — $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y$
   — $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$
3. On pose le système :
   $$\begin{cases} 3x^2 + 3y & = 0 \\ 3y^2 + 3x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = -x^2 \\ x^4 + x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^3 + 1) & = 0 \\ y & = -x^2 \end{cases}$$
   Soit deux points critiques : $O(0; 0)$ et $A(-1; -1)$.
4. En O, $rt - s^2 = -9 < 0$ et O est un point selle. En A, $rt - s^2 = 27 > 0$ et $r = -6$ donc A est un maximum local.

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy - y$

1. Préciser le domaine de définition D.
2. Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre en un point quelconque de D.
3. Exprimer les conditions du premier ordre à l'existence d'un extrema local de f et les résoudre.
4. Déterminer les extrema locaux éventuels de f sur D.

Correction

1. $D = \mathbb{R}^2$
2. — $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$
   — $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 3x - 1$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$
3. On pose le système :
   $$\begin{cases} 2x + 3y & = 0 \\ 2y + 3x - 1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = -\dfrac{2}{3}x \\ -\dfrac{4}{3}x + 3x & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{5}{3}x & = 1 \\ y & = -\dfrac{2}{3}x \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \dfrac{3}{5} \\ y & = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$
   Soit un point critique : $A : \left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$
4. En A, $rt - s^2 = -5 < 0$ donc A est un point col.

Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

1. Préciser le domaine de définition D.
2. Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre en un point quelconque de D.
3. Exprimer les conditions du premier ordre à l'existence d'un extrema local de f et les résoudre.
4. Déterminer les extrema locaux éventuels de f sur D.

Cf sujet 1.

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y^2 - y^2$

1. Préciser le domaine de définition D.
2. Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre en un point quelconque de D.
3. Exprimer les conditions du premier ordre à l'existence d'un extrema local de f.
   On vérifiera que ce système a 7 solutions :
$$P_0 = (0,0),$$
$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), P_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), P_4 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$
$$P_5 = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), P_6 = \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$
4. Déterminer la nature des points critiques P_1 et P_5 : extrema local ou point selle.

1. $D = \mathbb{R}^2$
2. — $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2xy^2$
   — $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x^2y - 2y$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2y^2$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2x^2 - 1$
   — $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy$
3. On pose le système :
   $\begin{cases} 4x^3 - 2xy^2 & = 0 \\ 4y^3 - 2x^2y - 2y & = 0 \end{cases}$
   On remplace dans les dérivées partielles pour chaque point et on trouve systématiquement 0.
   Tous ces points sont bien des points critiques.
   pour P_1 : $4\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} - 2\sqrt{1}3\frac{2}{3} = 0$
   Pour P_2, P_3, P_4 les signes ne changent rien.
   Pour P_5 et P_6 on trouve 0 sans calcul.
4. En P_1, $rt - s^2 = \left(4 - \frac{4}{3}\right)\left(8 - \sqrt{\frac{1}{3}} - 1\right) - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\left(7 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3} > 0$ et $r > 0$ donc P_1 min local.
   En P_5, $rt - s^2 = -1 \times 5 < 0$ donc P_5 est un point col.