BTS Aéro - Intégration par parties

Intégration par parties

Il n'existe pas de formule générale donnant la primitive du produit de deux fonctions.
L'objectif de **l'intégration par parties** est de compléter les techniques d'intégration afin d'obtenir *parfois* la primitive d'un *produit*.

Démarche générale

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit uv est

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{donc} \qquad u'v = (uv)' - uv'.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, donc continues sur I ; si de plus u' et v' sont continues, alors les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont continues sur I, donc intégrables sur I.
Si a et b sont deux éléments de I, on a alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt,$$

soit encore, si on choisit uv comme primitive de $(uv)'$,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt,$$

Formule à apprendre

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a;b]$ alors :

$$\boxed{\int_a^b u'v dt = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dt}$$

Exemple

On désire calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$. On pose $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$ donc $u(t) = e^t$ et $v'(t) = t$
et il vient :

$$\int_0^1 te^t\,dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = e - \left[te^t\right]_0^1 = 1.$$

Choix de u' et de v

On a choisi $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$, on aurait pu faire le choix contraire : $u'(t) = t$ et $v(t) = e^t$.
Malheureusement, celui-ci nous *éloigne* de la réponse...

Conseil pratique - à apprendre - : comment choisir u' et v ?

- $\exp \times P$, où P est un polynôme : intégrer l'exponentielle, dériver le polynôme : $u' = \exp, v = P$.
  De même pour $\cos \times P$ ou $\sin \times P$.
- $\ln \times P$, où P est un polynôme. C'est le contraire. Intégrer le polynôme, dériver le logarithme : $u' = P, v = \ln$.
- Et sinon ? Pas de démarche générale malheureusement.