Exercice 5

1. Commençons par une remarque simple : si $a = 1$, les trois vecteurs sont égaux et donc liés.
   Supposons maintenant $a \neq 1$. On traduit la question en un système :
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xX_1 + yY_1 + zZ_1 = \overrightarrow{0}$ (S). A-t-on nécessairement $x = y = z = 0$?
   On transforme cette équation (S) en un système qui s'écrit
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 0 \\ x+ay+z & = & 0 \\ x+y+az & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ x+ay+z & = & 0 \\ ax+y+z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ (a-1)y+(1-a)z & = & 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z & = & 0 \end{array} \right.$$
   Comme $a \neq 1$, on peut simplifier les lignes 2 et 3 par $1 - a$ ce qui donne :
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ y+(1+a)z & = & 0 \end{array} \right. (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ y & = & z \\ (2+a)z & = & 0 \end{array} \right.$$
   On suppose, de plus, que $a \neq -2$ et la dernière ligne donne $z = 0$. Il vient ensuite $y = 0$ puis $x = 1$.
   Donc, si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, la seule solution de (S) est $(0, 0, 0)$ ce qui signifie que les trois vecteurs sont indépendants.
2. Si $a = 1$, on a déjà dit que les vecteurs étaient égaux. $X_1 - X_2 = \overrightarrow{0}$
   Si $a = -2$, on vérifie aisément que $X_1 + X_2 + X_3 = \overrightarrow{0}$

Exercice 6

1. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = U$
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 1 \\ 2x+3y & = & 0 \\ x+4y & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 1 \\ 5y & = & 2 \\ 5y & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y-1 = -\dfrac{3}{5} \\ y & = & \dfrac{2}{5} \end{array} \right.$$
   On a donc $-\dfrac{3}{5}X_1 + \dfrac{2}{5}X_2 = U$
2. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = V$
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 2 \\ 2x+3y & = & -1 \\ x+4y & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 1 \\ 5y & = & 3 \\ 5y & = & 4 \end{array} \right.$$
   C'est impossible et V n'est pas combinaison linéaire de U et V.

Exercice 7

Notons A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des seconds membres.
On cherche alors à résoudre le système :
$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X+Y & = & A \\ X+2Y & = & B \end{array} \right. (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & B-A \\ X & = & A-Y = 2A-B \end{array} \right.$$
Il vient donc $X = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Pour que le produit XY d'une matrice X ayant n lignes et p colonnes avec une matrice Y ayant q lignes et r colonnes soit défini il faut que $p = q$.

- AB n'est pas défini,
- $BA = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$,
- $CA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$,
- BC n'est pas défini,
- $CB = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,
- A^2 n'est pas défini, A n'est pas une matrice carré,
- $B^2 = \begin{pmatrix} 33 & 0 & -21 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

- C^2 n'est pas défini, C n'est pas une matrice carré.

Je pense qu'il faut remarquer que le produit de matrice n'est pas commutatif : en général $AB \neq BA$.
Il arrive même que AB soit défini sans que BA le soit.

Exercice 9

Posons $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
Calculons MN et NM :

- $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ az & at \end{pmatrix}$
- $NM = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+at \end{pmatrix}$

Ces deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients le sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+bz & = & ax \\ ay+bt & = & bx+ay \\ az & = & az \\ at & = & bz+at \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} bz & = & 0 \\ bt & = & bx \\ bz & = & 0 \end{array} \right.$$

Deux possibilités :
$b=0$ et alors toutes les matrices N commutent avec M ; M serait alors *diagonale*.
OU
$b \neq 0$ et alors il faut $t=x$ et $z=0$. Dans ce cas, les matrices qui commutent avec M sont de la forme $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

Exercice 10

Il faut vérifier que $(AB)C = A(BC)$.
Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- $BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 11

On pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$
   Donc $\begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$
   et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$
   Donc $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$ puis $x = y = z = t = 0$
   et $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, on a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro*.
Dans le second cas, on perçoit que ce n'est pas toujours possible pour une matrice, d'être un diviseur de zéro.

Exercice 12

1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors $aI_3 + bB + cC = M$.

2. On pose les calculs et on obtient : $BC = 2I_3,\ CB = 2I_3,\ B^2 = C$ et $C^2 = 2B$.
   Considérons deux matrices M et M' de E, il existe alors a, b, c des réels et a', b', c' des réels tels que $aI_3 + bB + cC = M$ et $a'I_3 + b'B + c'C = M'$.
   Le produit MM' s'écrit alors $(aI_3 + bB + cC)(a'I_3 + b'B + c'C)$ qu'on peut développer en :
   $MM' = (aa'I_3 + ab'B + ac'C) + (ba'B + bb'B^2 + bc'BC) + (ca'C + cb'CB + cc'C^2)$
   On simplifie avec les égalités de la question 1 et il vient :
   $MM' = (2bc' + aa' + 2cb')I_3 + (ab' + 2cc' + a'b)B + (ac' + bb' + ca')C$
   Et MM' est bien un élément de E.

Exercice 13

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis

$A({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $({}^tA)A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$