

Arbres binaires

Terminale NSI - Travaux dirigés

novembre-décembre 2019

Qu'est-ce qu'un arbre ?

Dessignons un arbre !

Arbre en informatique

Les *arbres* sont des structures de données¹

- hiérarchiques,
- naturellement récursives,

utilisées pour représenter des ensembles de données structurées hiérarchiquement. Par exemple² :

- système de fichiers,
- base de données,
- sites web,
- fichiers XML.

Un arbre est une structure de données non-linéaire (comparée aux tableaux, listes, piles, et files qui sont des structures linéaires).

Une structure de données arborescente peut être définie récursivement comme un ensemble de nœuds accessibles depuis un nœud racine. Chaque nœud étant une structure composée d'une valeur et d'une liste de références vers d'autres nœuds, avec les contraintes suivantes : aucune référence n'est dupliquée (chaque nœud a un unique parent), et aucune référence ne désigne le nœud racine (qui n'a donc pas de parent).

Nous allons nous restreindre aux *arbres binaires* pour lesquels la liste des références vers d'autres nœuds comporte au plus deux éléments.

Ces arbres binaires sont largement utilisés, par exemple sous forme d'ABR – arbres binaires de recherche –, de tas, d'arbres équilibrés comme les AVL, ou encore d'arbres bicolores rouge-noir.

Un peu (beaucoup...) de vocabulaire préliminaire

→ Terminologie

- un *nœud* est caractérisé par
 - une donnée (on parle aussi d'étiquette),
 - un nombre fini de fils.

¹Le terme d'arbre recouvre plusieurs notions distinctes : arbres libres, arbres enracinés, arbres binaires, etc. Nous ne traiterons pas des arbres libres qui relèvent de la théorie des graphes.

Nous nous intéresserons aux *arbres enracinés* que nous nommerons plus simplement *arbres*, et aux *arbres binaires*, un cas particulier de ces arbres enracinés.

²Voir aussi la section *Examples of trees* de *Problem Solving with Algorithms and Data Structures using Python*, Brad Miller and David Ranum, Luther College. Franklin, Beedle & Associates Inc. (2011). Consultable en ligne à runestone.academy/runestone/static/pythonds/index.html.

- une *arête* relie deux nœuds. Chaque nœud, à l'exception de la racine, est relié à un autre nœud, son père, par exactement une arête entrante. Chaque nœud peut avoir une ou plusieurs arêtes sortantes le reliant à ses fils. On parle aussi de *lien*.
- la *racine* d'un arbre est le seul nœud sans père.
- un *chemin* est une liste de nœuds reliés par des arêtes.
- une *branche* est le chemin le plus court reliant un nœud à la racine.
- les *fils* sont l'ensemble des nœuds reliés à un même nœud par des arêtes entrantes.
- le *père* ou *parent* est le nœud relié à ses nœuds fils par une arête sortante.
- un *sous-arbre* est l'ensemble des nœuds et arêtes d'un nœud parent et de ses descendants.
- une *feuille* est un nœud sans fils.
- un *nœud interne* est un nœud qui n'est pas une feuille.

Pour assurer la cohérence de ces définitions, on considère que l'arbre vide n'est pas un nœud.

→ Quelques mesures sur les arbres

- la *taille* d'un arbre est le nombre de nœuds de l'arbre.
- la *profondeur* d'un nœud est le nombre d'arêtes sur la branche qui le relie à la racine. La profondeur de la racine est nulle.
- la *hauteur* d'un arbre est la profondeur maximale de l'ensemble des nœuds de l'arbre.
- l'*arité d'un nœud* est le nombre de fils du nœud.
- l'*arité d'un arbre* est le nombre maximal de fils des nœuds de l'arbre.

→ **Définition. Arbre binaire**

Un *arbre binaire* est donc un arbre d'arité deux.

Un arbre binaire est

- soit l'arbre vide, noté Δ ;
- soit un triplet (e, g, d) , appelée *nœud*, dans lequel
 - e est l'élément, ou encore *étiquette*, de la racine de l'arbre,
 - g est le sous-arbre gauche de l'arbre, et
 - d est le sous-arbre droit de l'arbre.

Les sous-arbres gauche et droit d'un arbre binaire non vide sont eux-mêmes des arbres binaires. La structure d'arbre binaire est donc une structure récursive.

- on appelle *fils gauche*, resp. *fils droit*, le sous-arbre gauche, resp. droit, d'un nœud.

Se familiariser avec les arbres binaires

» Quelques arbres binaires

Dessinez chacun des arbres ci-dessous, donnez sa taille et sa hauteur, le nombre de feuilles, le nombre de nœuds à chaque profondeur.

1. $(1, \Delta, \Delta)$
2. $(3, (1, \Delta, (4, (1, \Delta, (5, \Delta, \Delta)), \Delta)), \Delta)$
3. $(3, (1, (1, \Delta, \Delta), \Delta), (4, (5, \Delta, \Delta), (9, \Delta, \Delta)))$
4. $(3, (1, (1, \Delta, \Delta), (5, \Delta, \Delta)), (4, (9, \Delta, \Delta), (2, \Delta, \Delta)))$

» Des arbres binaires

- Combien de feuilles au minimum comporte un arbre binaire de hauteur h ?
Au maximum ?
- Combien de nœuds au minimum comporte un arbre binaire de hauteur h ?
Au maximum ?

» Squelettes d'arbres binaires

On appelle squelette ou forme d'arbres binaires tout arbre binaire dans lequel on ne tient pas compte des étiquettes.

Combien y a-t-il de squelettes d'arbres binaires de taille 0, de taille 1 ?

Dessinez tous les squelettes d'arbres binaires de taille 2, 3, 4 ; donnez-en le nombre.

» Taille et hauteur

Proposez des algorithmes pour calculer

- la taille d'un arbre binaire
- la hauteur d'un arbre binaire. On conviendra conventionnellement que la hauteur de l'arbre vide Δ est -1.

Caractériser les arbres binaires

Les arbres binaires sont caractérisés par le fait que chaque nœud possède au plus deux fils.

D'autres caractéristiques sont définies, qui permettent par exemple d'identifier des arbres pour lesquels le coût de certaines opérations sera minimal, ou de définir des algorithmes spécifiques à ces arbres.

- Un arbre binaire **filiforme** ou *dégénéré* est un arbre dans lequel tous les *nœuds internes* n'ont qu'un seul *fils*.
(Un arbre filiforme ne possède donc qu'une unique feuille.)
- Un arbre binaire **localement complet** ou arbre binaire *strict* est un arbre dont tous les *nœuds internes* possèdent exactement deux *fils*.
(Autrement dit, un arbre binaire localement complet est un arbre dont chaque nœud possède zéro ou 2 fils. L'arbre vide n'est pas localement complet.)
- Un arbre binaire **complet** est un arbre binaire *localement complet* dans lequel toutes les *feuilles* sont à la même *profondeur*.
(Il s'agit d'un arbre dont tous les niveaux sont remplis.)
- Un arbre binaire **parfait** est un arbre dans lequel tous les niveaux sont remplis à l'exception éventuelle du dernier, et dans ce cas les feuilles du dernier niveau sont alignées à gauche.
- Un arbre binaire **équilibré** est un arbre dont les deux fils sont des arbres équilibrés dont les hauteurs diffèrent d'au plus une unité.

Ainsi, l'accès à n'importe lequel des *nœuds* est en moyenne minimisé.

Comme le mentionne la page [Wikipedia Arbre_binaire#Types_d'arbres_binaires](#), il existe des usages contradictoires des termes *complet* et *parfait* qui peuvent parfois être intervertis. Des confusions peuvent aussi exister entre le français et l'anglais, dans lequel on trouve les termes *perfect* et *complete*.

La terminologie utilisée ici est cohérente avec celle de Froidevaux et al.³, alors que Beauquier et al.⁴ en utilisent une autre.

³ *Types de données et algorithmes*, Christine Froidevaux, Marie-Claude Gaudel, Michèle Soria. McGraw-Hill (Paris, 1990), Ediscience (1994). Téléchargeable depuis la page de Marie-Claude Gaudel lri.fr/~mcg/

⁴ *Éléments d'algorithmique* Danièle Beauquier, Jean Berstel, Philippe Chrétienne. Masson (1992 pour la 1re édition). Téléchargeable depuis la page de Jean Berstel www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/

Se repérer dans cette forêt d'arbres

» Compter ces arbres

- Combien de nœuds au maximum comporte un arbre localement complet de hauteur h ?
Au minimum?
- Combien de nœuds comporte un arbre complet de hauteur h ?
- Combien de squelettes d'arbres parfaits de hauteur h existe-t-il?
- Combien de squelettes d'arbres filiformes de hauteur h existe-t-il?

» Reconnaître ces arbres

Proposez des algorithmes pour les prédicats

- reconnaître un arbre binaire filiforme
- reconnaître un arbre binaire localement complet
- reconnaître un arbre binaire complet
- reconnaître un arbre binaire parfait

» Superposer deux arbres

Proposez un prédicat pour tester l'égalité du squelette de deux arbres binaires.

» Numéroté les nœuds

La numérotation de Sosa-Stradonitz des nœuds d'un arbre binaire, utilisée notamment en généalogie, est la suivante :

- le nœud racine est numéroté par 1
- si un nœud numéroté par i
 - son fils gauche est numéroté par $2i$
 - son fils droit est numéroté par $2i + 1$

Cette numérotation peut être utilisée pour représenter un arbre dans un tableau : l'élément j du tableau mémorise le nœud numéroté par j .

Combien d'éléments doit contenir un tableau utilisé pour représenter

- un arbre binaire complet de n nœuds?
- un arbre binaire parfait de n nœuds?
- un arbre binaire quelconque de n nœuds (dans le pire des cas)?

À suivre...

Il s'agira de

- parcourir les arbres
- identifier les opérations primitives pour manipuler les arbres

et de découvrir les ABR, *arbres binaires de recherche*.