7.3.6 Lien entre le discret et le continu

Variable aléatoire discrète	**Variable aléatoire continue**
Univers des valeurs de X fini	Intervalle I infini
Événement E : partie (sous-ensemble) de l'univers	Événement J : sous-intervalle de I (ou partie engendrée par des intervalles)
Probabilités $p(X=k)$ où k appartient à l'univers des valeurs possibles pour X $\sum_k p(X=k)=1$	Densité de probabilité f $\int_I f(t)\mathrm{d}t=1$
Espérance d'une variable aléatoire discrète X où k appartient à l'univers des valeurs possibles pour X $E(X)=\sum_k k\times p(X=k)$	Espérance d'une variable aléatoire continue X $\int_I tf(t)\mathrm{d}t$

7.4 Exercices

7.4.1 Lois à densité

EXERCICE 7.1.
Soit a un réel et f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=ax(1-x)$

1. Déterminer le nombre réel a pour que cette fonction f soit une loi de densité sur $[0;1]$.
2. On considère X une variable aléatoire continue de densité f avec a ayant la valeur trouvée ci-dessus.
   Calculer la probabilité de l'événement $\{0,25\leqslant X\leqslant 0,75\}$.

EXERCICE 7.2.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=3x^2$.
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[0;1]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   - $p(0\leqslant X\leqslant \frac{1}{2})$
   - $p(X\in[0,4;0,6])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
2. f est la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\frac{x}{2}$.
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[0;2]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des événements suivants :

- $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$
- $p(X \in [1\,;2])$

(c) Déterminer $E(X)$.

3. f est la fonction définie sur $[-1\,;\,]$ par $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$.
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[-1\,;1]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   - $p(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
   - $p\left(X \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]\right)$

   (c) Déterminer $E(X)$.

EXERCICE 7.3.
On s'intéresse à la durée de vie X, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de densité f, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
Ainsi $p(0 \leqslant X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années, et λ un réel positif.

1. Calculer $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$ en fonction de λ.
2. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.
   Calculer λ.

EXERCICE 7.4.
On s'intéresse à la fonction $\ln x$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. (a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.
   (b) Trouver un nombre réel $b > 1$ tel que $\int_1^b \ln x dx = 1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;b]$.
2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1\,;b]$.
   (a) Calculer $p(X \leqslant 2)$.
   (b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

7.4.2 Loi uniforme

EXERCICE 7.5.
Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0\,;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

EXERCICE 7.6.
Suite à un problème sur sa ligne téléphonique, Christophe contacte le service après-vente de son opérateur. Le conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance jeude entre 18 h et 19 h. Sachant que ce technicien appelle de manière aléatoire, donc uniforme, sur le créneau donné, quelle est la probabilité que Christophe attende entre 15 et 40 min ?