Feuille d'exercices

Limites 1/2

Exercice 1 :

Déterminer les limites de chacune des fonctions *f* suivantes aux extrémités de l'intervalle I :

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; I= $]0;+\infty[$ 2) $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$; I= $]-\infty;2[$ 3) $f(x)=-2x^3+5x+1$; I= $\mathbb{R}$

4) $f(x)=x^2-2x+1+\dfrac{1}{x}$ I= $]0;+\infty[$ 5) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ I= $\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$ I= $]0;+\infty[$ 7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$ I= $]0;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^4+1}$ I= $\mathbb{R}$ 9) $f(x)=\dfrac{-2x^3+1}{x^2-1}$ I= $]1;+\infty[$.

Exercice 2 :

Etudier la limite de la fonction *f* en *a* dans les cas suivants (on pourra distinguer si nécessaire la limite à droite $x>a$ et la limite à gauche $x<a$)

1) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$; $a=1$ 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-1}$; $a=1$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $a=3$

4) $f(x)=\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$; $a=1$ 5) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$; $a=4$ 6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$; $a=0$

7) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $a=0$ 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$; $a=1$ 9) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-16}$; $a=4$.

Exercice 3 :

Etudier les limites des fonctions dans les différents cas indiqués

1) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ quand *x* tend vers –3, 4, $+\infty$, $-\infty$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$ quand *x* tend vers 2, 5, 0, $+\infty$, $-\infty$.

3) $f(x)=\dfrac{(m+1)x^2+3x}{2x-1}$ quand *x* tend vers $\dfrac{1}{2}$, $+\infty$ (suivant la valeur de *m*)

4) $f(x)=\sqrt{x+2}\sqrt{x}$ quand *x* tend vers $+\infty$

Exercice 4 :

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.

Etudier le comportement de *f* en 1, -3, $+\infty$, $-\infty$.

2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3,1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2(x-3)}$.

Etudier le comportement de *f* en -1, 3, $+\infty$, $-\infty$.

Exercice 5 :

Etudier le comportement de la fonction *f* suivante en $+\infty$: $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}-x+2$

Exercice 6 :

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0;1]$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$. Montrer que $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Feuille d'exercices

Limites 2/2

Exercice 7 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\{7\}$ par : $f(x)=\dfrac{(x+5)(x+10)}{(x+7)^2}$

1) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$, $-\infty$, -7. Montrer que la courbe représentative de *f* admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale.
2) Vérifier que $f(x)=-1+\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{6}{(x+7)^2}$. Situer la courbe par rapport à l'asymptote horizontale.

Exercice 8 :

Soit *f* la fonction définie par : $f(x)=x-2+\dfrac{1}{|x-1|}$

Etudier les limites éventuelles de la fonction lorsque *x* tend vers $+\infty$, $-\infty$, 1.
Montrer que la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe © représentative de *f*.

Exercice 9 : *Asymptotes*

Soit *f* la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-1}$

1) Déterminer trois nombres réels *a*, *b*, *c* tels que pour tout nombre réel *x* de $]1;+\infty[$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$
2) En déduire que la courbe représentative C de *f* admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation.
3) Etudier la position de C par rapport à D sur l'intervalle $]1;+\infty[$
4) La courbe C admet-elle une autre asymptote ? Si oui, en donner une équation.

Fonctions circulaires

Exercice 9 :

On utilisera si cela est nécessaire les résultats suivants : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin kt}{kt}=1$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan kt}{kt}=1$

1) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ on utilisera la relation $1-\cos t=2\sin^2\dfrac{t}{2}$

2) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{3t}$ 3) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 2t}{3t}$ 4) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{\sin t}$

Fonctions équivalentes

Exercice 10 :

Montrer au voisinage de 0 les équivalences suivantes :

1) $(1+x)^2-1\sim 2x$ 2) $\dfrac{1}{1+x}\sim -x$

Représentation de fonctions simples

Exercice 11 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction *h* :
Si $t\in\,]-\infty;0[,\ h(t)=0$
Si $t\in[0;1[,\ h(t)=2$
Si $t\in[1;+\infty[,\ h(t)=0$

Donner la représentation graphique du signal *h* dans un repère orthonormal.