Correction de certains exercices de Calcul Matriciel

Cette correction vous permet de comparer vos résultats et de vous assurer de la justesse de vos raisonnements. Elle ne saurait remplacer votre présence active en séance de T.D.
Dans la majorité des cas les calculs numériques ne sont pas détaillés.
Si vous repérez des erreurs, n'hésitez pas à m'en faire part.

Chapitre 0 : systèmes linéaires

Exercice 1

On utilise le pivot de Gauss pour résoudre ces deux systèmes.

1. Remarquons immédiatement qu'on a 4 équations pour trois inconnues. Si les nombres avaient été choisis au hasard, on aurait très probablement aucune solution... Mais c'est un exercice de mathématiques et les nombres ne sont pas choisis au hasard.
   On choisit comme pivot le coefficient 1 de la première ligne.
   On fait donc $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$. Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z & = & 2 \\ -8y-7z & = & -1 \\ -9y-z & = & -8 \\ 2y+4z & = & -2 \end{array}\right.$$

   On choisit cette fois $1/2L_4$ comme pivot. On réalise les échanges suivants : $L_2 \leftarrow 1/2L_4, L_3 \leftarrow L_2, L_4 \leftarrow L_3$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z & = & 2 \\ y+2z & = & -1 \\ -8y-7z & = & -1 \\ -9y-z & = & -8 \end{array}\right.$$

   On fait donc $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2, L_4 \leftarrow L_4 + 9L_2$. Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z & = & 2 \\ y+2z & = & -1 \\ 9z & = & -9 \\ 17z & = & -17 \end{array}\right.$$

   Hélas les deux dernières lignes NE SONT PAS INCOMPATIBLES... Il faut donc continuer.
   On trouver immédiatement $z = -1$. Les lignes 3 et 4 disent la même chose, on n'en garde qu'une. On remonte, depuis la valeur de z pour trouver successivement y et x. L'étape suivante se traite donc de bas en haut.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2z \\ y = -1 \ - \ 2z \\ z = -1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

   On peut remplacer dans l'énoncé pour vérifier.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2-2 = \ \ 2 \\ 6-2+1 = \ \ 5 \\ 4-5-3 = -4 \\ 2+4-6 = \ \ 0 \end{cases}$$

2. Rebelotte. On va bien s'amuser. Cette fois nous avons quatre inconnues pour seulement trois équations. Il faudra sans doute paramétrer en fonction d'une des inconnues...
   On choisit le coefficient 1 de la première ligne comme pivot et on réalise :
   $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -3w + 6z = 3 \\ \ \ -w + 2z = 1 \end{cases}$$

Ces deux lignes sont équivalentes à $w = 2z - 1$.
C'est encore différent, nous n'avons plus que deux équations et quatre inconnues.
Il faut maintenant paramétrer en fonction de deux inconnues bien choisies.
On choisit z et y parce qu'on a w en fonction de z et x s'isolera facilement dans la première ligne.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - z + 3(2z-1) \\ w = 2z \qquad - \qquad 1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 5z - 3 \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ w = 2z \quad - \quad 1 \end{cases}$$

Les lignes 2 et 3 signifient qu'on est libre de donner à y et z les valeurs qu'on veut. L'ensemble des solutions forme un espace de dimension 2 dans un espace de dimension 4.

Exercice 2

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + \ y + \ z = 1 \\ x + ay + \ z = a \\ x + \ y + az = a^2 \end{cases}.$$

Avant de se lancer il faut décider d'un pivot.
La meilleure approche est d'échanger les lignes 1 et 2 : z, y, x

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + \ z = a \\ ax + \ y + \ z = 1 \\ x + \ y + az = a^2 \end{cases}.$$

On réalise les opérations suivantes :
$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a \\ (1-a^2)y + (1-a)z & = & 1 - a^2 \\ (1-a)y + (a-1)z & = & a^2 - a \end{array} \right.$$

Supposons $a \neq 1$ afin de diviser par $1 - a$. Nous devrons traiter ce cas $a = 1$ plus tard.
On divise les secondes et troisième ligne par $1 - a$.
Remarquons que $1 - a^2 = (1-a)(1+a)$ et $a^2 - a = a(a-1) = -a(1-a)$. Il vient :

$$\text{Si } a \neq 1, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a \\ (1+a)y + z & = & 1 + a \\ y - z & = & -a \end{array} \right.$$

Dans ce système on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\text{Si } a \neq 1, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a \\ (1+a)y + z & = & 1 + a \\ (2+a)y & = & 1 \end{array} \right.$$

On suppose de plus que $a \neq -2$ et alors

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & y + a \\ x & = & a - ay - az \end{array} \right.$$

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{-a-1}{2+a} \\ y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & \frac{1+2a+a^2}{2+a} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que cette solution fonctionne dans le premier système.
Il reste à traiter les cas $a = 1$ et $a = -2$.
Si $a = 1$ les trois lignes sont identiques : $x + y + z = 1$. On obtient un plan de solutions dans l'espace.
Si $a = -2$ le système s'écrit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

La somme des trois lignes donne : $0x + 0y + 0z = 3$ ce qui est impossible. Il n'y alors pas de solution.

Exercice 3

1. Dans ce système on va substituer z en fonction de y et x en fonction de y :
$$(S) \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=4 \\ x-2y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=3 \\ z=2y-4 \\ x=2y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y-5= 3 \\ z=2y-4 \\ x=2y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=8/5 \\ z=2(8/5)-4 \\ x=2(8/5)-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=11/5 \\ y=8/5 \\ z=-4/5 \end{cases}$$
On peut vérifier en remplaçant dans le système de départ.
2. Dans ce système on va substituer y en fonction de z puis t en fonction de z :
$$(S) \begin{cases} y+3z+t=1 \\ x+2y+z+t=2 \\ y-4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y-z-t+2 \\ t=-y-3z+1 \\ y=4z \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y-z-t+2 \\ t=-7z+1 \\ y=4z \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2z+1 \\ t=1-7z \\ y=4z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$
On obtient une infinité de solution. Remplacer dans le premier système permet de vérifier.

Chapitre 1 : matrices

Exercice 4

Des vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ sont linéairement indépendants si toute combinaison linéaire $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ valant le vecteur nul a tous ses coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nuls.
Dans le cas de deux vecteurs, linéairement dépendant équivaut à colinéaires (=proportionnels)

1. X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires donc les vecteurs sont libres (=linéairement indépendants).
2. On remarque immédiatement que $\sqrt{6} \times \sqrt{2} \times X_2 = X_1$. C'est une combinaison linéaire non nulle de ces vecteurs. Ils sont liés (=linéairement dépendants).
3. Là encore, on remarque immédiatement que $X_2 + X_3 = X_1$. Ils sont liés (=linéairement dépendants).
4. Cette fois, on ne voit rien... (enfin si mais c'est non trivial). Ensuite ils sont plus de deux, l'argument de la colinéarité ne s'applique plus.
Posons x, y, z, t des réels tels que $(S) : xX_1 + yX_2 + zX_3 + tX_4 = \overrightarrow{0}$
Nous allons transformer cette équation en un système et le résoudre.
Si sa seule solution est : $x = y = z = t = 0$ alors les vecteurs sont libres. S'il existe une solution non nulle, ils sont liés.
On obtient le système en calculant xX_1, yX_2, zX_3 et tX_4 puis en les ajoutant.
$$(S) : \begin{cases} -t=0 \\ z+t=0 \\ -y-z-t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t=0 \\ z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{cases}$$
Donc toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs a tous ses coefficients nuls. Ils sont libres.

Exercice 5

1. Commençons par une remarque simple : si $a = 1$, les trois vecteurs sont égaux et donc liés.
Supposons maintenant $a \neq 1$. On traduit la question en un système :
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xX_1 + yY_1 + zZ_1 = \overrightarrow{0}\,(S)$. A-t-on nécessairement $x = y = z = 0$?
On transforme cette équation (S) en un système qui s'écrit
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+y+z &= 0 \\ x+ay+z &= 0 \\ x+y+az &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+az &= 0 \\ x+ay+z &= 0 \\ ax+y+z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+az &= 0 \\ (a-1)y+(1-a)z &= 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z &= 0 \end{cases}$$
Comme $a \neq 1$, on peut simplifier les lignes 2 et 3 par $1 - a$ ce qui donne :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+az &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ y+(1+a)z &= 0 \end{cases} \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+az &= 0 \\ y &= z \\ (2+a)z &= 0 \end{cases}$$

On suppose, de plus, que $a \neq -2$ et la dernière ligne donne $z = 0$. Il vient ensuite $y = 0$ puis $x = 1$.
Donc, si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, la seule solution de (S) est $(0, 0, 0)$ ce qui signifie que les trois vecteurs sont indépendants.

2. Si $a = 1$, on a déjà dit que les vecteurs étaient égaux. $X_1 - X_2 = \overrightarrow{0}$
Si $a = -2$, on vérifie aisément que $X_1 + X_2 + X_3 = \overrightarrow{0}$

Exercice 6

1. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = U$
$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y &=& 1 \\ 2x+3y &=& 0 \\ x+4y &=& 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y &=& 1 \\ 5y &=& 2 \\ 5y &=& 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& y-1 = -\dfrac{3}{5} \\ y &=& \dfrac{2}{5} \end{array} \right.$$
On a donc $-\dfrac{3}{5}X_1 + \dfrac{2}{5}X_2 = U$

2. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = V$
$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y &=& 2 \\ 2x+3y &=& -1 \\ x+4y &=& 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y &=& 1 \\ 5y &=& 3 \\ 5y &=& 4 \end{array} \right.$$
C'est impossible et V n'est pas combinaison linéaire de U et V.

Exercice 7

Notons A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des seconds membres.
On cherche alors à résoudre le système :
$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X+Y &=& A \\ X+2Y &=& B \end{array} \right. \quad (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Y &=& B-A \\ X &=& A-Y = 2A-B \end{array} \right.$$
Il vient donc $Y = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Pour que le produit XY d'une matrice X ayant n lignes et p colonnes avec une matrice Y ayant q lignes et r colonnes soit défini il faut que $p = q$.

- AB n'est pas défini,
- $BA = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$,
- $CA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$,
- BC n'est pas défini,
- $CB = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,
- A^2 n'est pas défini, A n'est pas une matrice carré,
- $B^2 = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,
- C^2 n'est pas défini, C n'est pas une matrice carré.

Je pense qu'il faut remarquer que le produit de matrice n'est pas commutatif : en général $AB \neq BA$.
Il arrive même que AB soit défini sans que BA le soit.

Exercice 9

Posons $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
Calculons MN et NM :

- $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ az & at \end{pmatrix}$
- $NM = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+at \end{pmatrix}$

Ces deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients le sont :

$$\begin{cases} ax+bz &= ax \\ ay+bt &= bx+ay \\ az &= az \\ at &= bz+at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bz &= 0 \\ bt &= bx \\ bz &= 0 \end{cases}$$

Deux possibilités :
$b=0$ et alors toutes les matrices N commutent avec M ; M serait alors *diagonale.*
OU
$b \neq 0$ et alors il faut $t=x$ et $z=0$. Dans ce cas, les matrices qui commutent avec M sont de la forme $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

Exercice 10

Il faut vérifier que $(AB)C = A(BC)$.
Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- $BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 11

On pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$
   Donc $\begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$
   et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$
   Donc $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$ puis $x = y = z = t = 0$
   et $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, on a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro.*
Dans le second cas, on perçoit que ce n'est pas toujours possible pour une matrice, d'être un diviseur de zéro.

Exercice 12

1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors $aI_3 + bB + cC = M$.
2. On pose les calculs et on obtient : $BC = 2I_3,\ CB = 2I_3,\ B^2 = C$ et $C^2 = 2B$.
   Considérons deux matrices M et M' de E, il existe alors a, b, c des réels et a', b', c' des réels tels que $aI_3 + bB + cC = M$ et $a'I_3 + b'B + c'C = M'$.
   Le produit MM' s'écrit alors $(aI_3 + bB + cC)(a'I_3 + b'B + c'C)$ qu'on peut développer en :
   $MM' = (aa'I_3 + ab'B + ac'C) + (ba'B + bb'B^2 + bc'BC) + (ca'C + cb'CB + cc'C^2)$
   On simplifie avec les égalités de la question 1 et il vient :
   $MM' = (2bc' + aa' + 2cb')I_3 + (ab' + 2cc' + a'b)B + (ac' + bb' + ca')C$
   Et MM' est bien un élément de E.

Exercice 13

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis

$A({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $({}^tA)A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 14

On obtient : $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cela vient du fait que A et B ne commutent pas ($AB \neq BA$).

Exercice 15

1. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^2 A$
2. On conjecture que $A^n = 2^{n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Prouvons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n = 1$, la propriété est vraie.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = 2^{n-1}A$ alors, $A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \times 2A = 2^n A$.
   Et, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
2. $B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
3. (a) On vérifie par le calcul que $AB = B$

   (b) La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels $A - B = I_3$ et $A + 0 \times B = A$.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = A + (n-1)B$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 17

1. On calcule et on obtient $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0_3$.
2. On remarque que $3Q - 3P = A$. Donc $a = -3$ et $b = 3$.
3. La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels $A^0 = I_3 = (P + Q)$ et $A = -3P + 3Q$
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = a^nP + b^nQ$ alors
   $A^{n+1} = (aP + bQ)(a^nP + b^nQ) = a^{n+1}P^2 + ab^nPQ + ba^nQP + b^{n+1}Q^2 = a^{n+1}P + b^{n+1}Q$.
   Ce qui prouve la propriété d'après le principe de récurrence.

Exercice 18

1. $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$
   et $A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$
2. (a) On pose $B = A - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Il vient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que pour $k \geq 3$, $B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3$

(c) On applique le binôme de Newton pour αI_3 et B^n qui commutent.

$A^n = (\alpha I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k$

Or, on sait que $B^k = 0_3$ pour $k \geq 3$ donc $A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} B + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$.

On a utilisé : $B^0 = I_3$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Il vient $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

Exercice 19

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{a}{2} & 2 - \frac{a}{2} & a + b + ac \\ 2 - \frac{b}{2} & 2 - \frac{b}{2} & a + b + bc \\ -1 - \frac{c}{2} & -1 - \frac{c}{2} & c^2 - \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = O_3 \Rightarrow a = 4, b = 4$ et $c = -2$ (première colonne). On vérifie immédiatement que ces paramètres fonctionnent dans tous les coefficients.

2. (a) $P = M - I_3$ donc P est la solution obtenue à la question précédente (suprise).

(b) i. I_3 commute avec toutes les matrices carrée de taille 3 donc on peut appliquer les identités remarquables.
Il vient $M^2 = (I_3 + P)^2 = I_3^2 + 2I_3P + P^2 = I_3 + 2P$, car $P^2 = O_3$
puis $M^3 = M \times M^2 = (I_3 + P)(I_3 + 2P) = (I_3 + 3P + P^2) = I_3 + 3P$

ii. Prouvons ce résultat par récurrence. On a déjà initialisé aux rangs 1, 2 et 3.
Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $M^n = I + nP$,
alors $M^{n+1} = M \times M^n = (I_3 + P)(I_3 + nP) = I_3^2 + (n+1)P + nP^2 = I_3 + (n+1)P$

(c) On applique le binôme de Newton avec I_3 et P qui commutent :
$M^n = (I_3 + P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = I_3 + nP$
car $P^k = O_3$ si $k \geq 2$ et $\binom{n}{1} = n$.

3. $S_n = (I_3 + P) + (I_3 + 2P) + \cdots + (I_3 + nP) = nI_3 + (1 + 2 + \cdots + n)P = nI_3 + \dfrac{n(n+1)}{2} P$.

On a utilisé l'indication : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 20

1. $M(a,b)^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 - b^2 & ab + b^2 + ab - b^2 \\ -ab - b^2 - ab + b^2 & -b^2 + (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2ab & 2ab \\ -2ab & a^2 - 2ab \end{pmatrix}$

2. (a) $bB = M - aI_3$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

On en déduit que, pour $k \geq 2$, $B^k = B^2 B^{k-2} = O_2$

(c) On utilise le binôme de Newton avec aI_2 et bB qui commutent (I_2 commute avec tout le monde).
$M^n = (aI_2 + bB)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} (bB)^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} (bB)^k = a^n I_2 + na^{n-1} bB$

$M(a,b)^n = \begin{pmatrix} a^n + na^{n-1}b & na^{n-1}b \\ -na^{n-1}b & a^n - na^{n-1}b \end{pmatrix}$

(d) Pour $a = n = 0$, la formule donne $I_2 = I_2$ qui est juste.

3. (a) Pour $a = 1$ et $b = 2$ on pose $M = I_2 + 2B$.

(b) On utilise une récurrence immédiate : $X_1 = MX_0$, $X_2 = MX_1 = M^2 X_2$ etc.
Plus rigoureusement, la formule est initialisée au rangs $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = M^n X_0$ alors $X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_n$.
Ce qui prouve le résultat d'après le principe de récurrence.

(c) $X_n = M(1,2)^n X_0 = \begin{pmatrix} 1^n + n1^{n-1}2 & n1^{n-1}2 \\ -n1^{n-1}2 & 1^n - n1^{n-1}2 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix} X_0$

donc $\left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & (1+2n)u_0 + 2nv_0 \\ y_n & = & -2nu_0 + (1-2n)v_0 \end{array} \right.$

Exercice 21

- $\det(I_3) = 1^3 = 1$
- $\det(M_1) = -\det(I_3) = -1$ (échange des colonnes 1 et 2).
- $\det(M_2) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
- $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$
- $\det(N_1) = 0$ (colonne nulle)
- $\det(N_2) = 0$ (deux colonnes égales)
- $\det(N_3) = 0$ (les colonnes sont liées : $C_3 = 2C_1$)

Exercice 23

1. On developpe $\det(A)$ par rapport à la troisième ligne.
   Le coefficient 2 est associé à une position « $-$ »donc
   $\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
   On développe à nouveau, par rapport à la dernière ligne. Le coefficient -1 est associé à un signe « $+$ »
   $\det(A) = 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-7) = 14$
2. On développe $\det(B)$ par rapport à la première ligne :
   $\det(B) = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) + 2 \times (-3) + 3 \times 6 = 9$

Exercice 24

1. On effectue la combinaison linéaire $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 + 2C_3$ et on développe par rapport à C_2
   $\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{6}$
2. On effectue la combinaison linéaire $L_2 \leftarrow L_1 - L_3$ et on développe par rapport à C_2
   $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10$
3. On effectue les combinaisons linéaires $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
   on développe par rapport à C_2
   $\det(C) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 0 = 0$

Exercice 25

1. On soustraie L_1 à toutes les autres lignes afin de faire apparaître beaucoup de zéros.
   $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$
   On développe ensuite par rapport à C_1 et on obtient un déterminant diagonal.
   Ensuite on applique le cours et $\Delta_1 = (-2)^3 = -8$.
2. On developpe successivement par L_4, C_3 et L_2 et $\Delta_2 = abcd$
3. On soustraie d'abord L_1 à toutes les autres pour développer par rapport à C_1
   $\Delta_3 = \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$
   On soustraie maintenant L_1 aux autres et

$\Delta_3 = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix}$

On développe par rapport à L_1 et

$\Delta_3 = a(b-a)((c-b)(d-b)-(c-b)^2) = a(b-a)(c-b)(d-b-c+b) = a(b-a)(c-b)(d-c)$

Exercice 26

1. On développe Δ_n par rapport à la première colonne.
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\Delta_{n-1} = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$$
2. On utilise le résultat précédent :
$$\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \Delta_{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \Delta_{n-3} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 + \Delta_0 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$
$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Exercice 27

1. On a, d'après le cours, $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$
Or, si n impair, $(-1)^n = -1$ donc ${}^tA = -A \Longrightarrow \det(A) = -\det(A)$ et $\det(A) = 0$.
2. On a bien, $n = 3$ qui est impair, ${}^tA = -A$ et $\det(A) = -(-1 \times 0 - 4 \times 3) + 4(-1 \times (-3) - 4 \times 0) = 0$.
3. Si n est pair, $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \det(A)$ donc il n'y a aucune raison que le déterminant soit nul.
Essayons avec $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$. On a bien ${}^tA = -A$ mais $\det(A) = 1$. Le résultat est faux.

Exercice 28

1. On trouve $P^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $P^3 = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 4 \\ 24 & -7 & 10 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ Puis $P^3 - 2P^2 - 8P = -15I_3$
2. On factorise P dans l'égalité précédente et $P(P^2 - 2P - 8I_3) = -15I_3$ donc $P \times \frac{-1}{15}(P^2 - 2P - 8I_3) = I_3$
Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{-1}{15}(P^2 - 2P - 8I_3)$

Exercice 29

1. $B^2 = I_3$ donc B est inversible et $B^{-1} = B$.
2. La solution du système est $B^{-1}Y = BY$ avec $Y =^t (1 \quad 3 \quad 4)$.
On calcule $BY =^t (-1 \quad -3 \quad -4)$.

Exercice 30

1. $A^2 + 3A = I_n \Leftrightarrow A(A + 3I_n) = I_n$ donc A inversible et $A^{-1} = A + 3I_n$.

Exercice 31

1. Posons $N = I_n - A$ et $B = I_n + N + N^2 + \cdots N^p$.
Calculons :
$AB = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^p)$
$AB = I_n + N + N^2 + \cdots + N^p - N - N^2 - \cdots - N^{p+1}$
$AB = I_n + (N - N) + (N^2 - N^2) + \cdots (N^p - N^p) - N^{p+1}$ or N nilpotente d'ordre p
donc $AB = I_n$.
Aussi A est inversible et $A^{-1} = B = I_n + N + N^2 + \cdots + N^p$.
2. On pose $N = A - I$. Il vient $N^3 = O_3$ donc N nilpotente d'ordre 2.
L'inverse de A est alors $I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 32

1. $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-4z &=& a \\ y+z &=& b+a \\ 3y+5z &=& c-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a-2y+4z \\ y &=& b+a-z \\ 2z &=& c-2a-3(b+a) = -5a-3b+c \end{array}\right.$

   $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a-2y+4z = a-2(7a/2+5b/2-c/2)+4(-5a/2-3b/2+c/2) = -16a-11b+3c \\ y &=& b+a-(-5a/2-3b/2+c/2) = 7a/2+5b/2-c/2 \\ z &=& -5a/2-3b/2+c/2 \end{array}\right.$

2. Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ 7/2 & 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 33

Dans cet exercice nous allons inverser les matrices en résolvant des systèmes avec un pivot de Gauss

1. En posant $X = ^t(x \quad y \quad z)$ et $Y = ^t(d \quad e \quad f)$ il vient :

   $AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+ay+bz &=& d \\ y+cz &=& e \\ z &=& f \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& d-ay-bz = d-ae+acf-bf = d-ae+(ac-b)f \\ y &=& e-cf \\ z &=& f \end{array}\right.$

   Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $X = ^t(x \quad y \quad z \quad t)$ et $Y = ^t(b \quad c \quad d \quad e)$ il vient :

   $AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-ay &=& b \\ y-az &=& c \\ z-at &=& d \\ t &=& e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& b+ay = b+ac+a^2d+a^3e \\ y &=& c+az = c+ad+a^2e \\ z &=& d+ae \\ t &=& e \end{array}\right.$

   Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 34

1. On développe directement par rapport à la première ligne et il vient :
   $\det(A) = -1 \times (4 \times \lambda - 3 \times 4) - 1 \times (4 \times (-3) - 3 \times (-3)) = -4\lambda + 15$.
   A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0 \iff \lambda \neq \frac{15}{4}$.

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & -16+4\lambda \\ -12+3\lambda & 12-3\lambda & -15+\lambda^2 \end{pmatrix}$

   (b) Pour que $A^2 = I_3$ il faut que les coefficients diagonaux soient égaux à 1 et les autres à 0. Ce qui donne $-12+3\lambda = 0$ et $-16+4\lambda = 0$ et $-15+\lambda^2 = 1$.
   L'unique solution est évidemment $\lambda = 4$.

3. « Calcul direct » signifie sans doute : en utilisant les comatrices.
   Rappel : la comatrice de A est matrice des cofacteurs. Le cofacteur A_{ij} est le déterminant de A dans lequel on a barré la ligne i et la colonne j.

   $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{com}(A) = \dfrac{1}{15-4\lambda} {}^t\begin{pmatrix} 12-3\lambda & 12-4\lambda & -3 \\ 3-\lambda & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15-4\lambda} \begin{pmatrix} 12-3\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 12-4\lambda & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

   Pour $\lambda = 4$ on obtient $A^{-1} = A$ et donc $A^2 = I_3$

Exercice 35

1. $\det A = 13 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\det A = ac$. Si $ac \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
3. $\det A = 0$ car la première et troisième colonne sont opposées. A n'est pas inversible.
4. B est triangulaire dont sont déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
   $\det B = 1 \times 3 \times 0 \times 1 = 0$. B n'est pas inversible (ouf).

Exercice 36

1. $S \iff AX = Y$ avec $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, Y = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \end{vmatrix} = 1 \times (1-a^3)^2$
   où l'on a successivement utilisé un pivot de Gauss pour faire apparaître des zéros sur la première colonne et développé par rapport à celle-ci.
   Le système est de Cramer si et seulement si la matrice est inversible.
   C'est-à-dire si $(1-a^3) \neq 0 \iff a \neq 1$.
3. Formules de Cramer : si le système est de Cramer, il a une unique solution donnée par :
   $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$.
   où A_k est obtenue en remplaçant la $k-$ième colonne de A par le second membre.
   Les calculs, non détaillés, prennent 1 page donc...
   $x_1 = \dfrac{-a^2}{(1+a+a)^2}$
   $x_2 = \dfrac{-a}{1+a+a^2}$
   $x_3 = \dfrac{-1}{1+a+a^2}$

Exercice 37

1. Le système est de Cramer si le déterminant de la matrice associée est non nul. Calculons le.
   $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
   On a fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.
   On développe maintenant par rapport à la première ligne et il vient :
   $\det A = (m+1)(0-(m-1)) = -(m+1)(m-1)$. $\det A = 0 \implies m = 0$ ou $m = 1$
   Le système est de Cramer si, et seulement si, $m \neq 1$ et $m \neq -1$.
2. Formules de Cramer : si le système est de Cramer, il a une unique solution donnée par :
   $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$.
   où A_k est obtenue en remplaçant la $k-$ième colonne de A par le second membre.
   $$x = \frac{\det A_1}{-(m+1)(m-1)} = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
   $$x = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2m \times (1-m)}{-(m+1)(m-1)} = \frac{2m}{(m+1)}$$
   $$y = \frac{\det A_2}{-(m+1)(m-1)} = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
   $$y = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-(m-1)}{-(m+1)(m-1)} \times 0 = 0$$
   $$z = \frac{\det A_3}{-(m+1)(m-1)} = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
   $$z = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(m-1)(1-m)}{-(m+1)(m-1)} = \frac{m-1}{m+1}$$
3. Pour $m = 1$, $S \iff \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 1-x \\ z &= 0 \end{cases}$
   On ne peut aller plus loin. Il y a une droite de solutions.

Pour $m=-1$, $S \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& -1 \\ x-y-z &=& 1 \\ x+y-z &=& 1 \end{array}\right.$
Les lignes 1 et 3 étant incompatibles, il n'y a aucune solution.

Diagonalisation

Exercice 38

Les valeurs propres λ d'une matrice M sont les racines du polynôme caractéristique (ie les solution de $\det(M-\lambda I_n)=0$) et les vecteurs propres, des vecteurs X tels que $MX=\lambda X$

1. On pose $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)^2-4=(4-\lambda-2)(4-\lambda+2)=(2-\lambda)(6-\lambda)$

   Les valeurs propres sont les solutions de $P(\lambda)=0$ soit 2 et 6.

   Pour $\lambda=2$, on cherche les vecteurs propres en résolvant $(A-2I_2)X=0.(S)$
   $S \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y &=& 0 \\ x+2y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -2x \end{array}\right.$
   Il suffit d'en décrire un, ou de décrire une base si la dimension du sous-espace propre dépasse 1.
   On donne donc $X_2={}^t\,(1 \quad -2)$. Les vecteurs propres pour $\lambda=2$ sont donc les vecteurs kX_2 pour $k\neq 0$

   Pour $\lambda=6$, on cherche les vecteurs propres en résolvant $(A-2I_6)X=0.(S)$
   $S \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+4y &=& 0 \\ x+-2y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 2x \end{array}\right.$
   On donne donc $X_6={}^t\,(1 \quad 2)$. Les vecteurs propres pour $\lambda=2$ sont donc les vecteurs kX_6 pour $k\neq 0$

   Conclusion (non demandée) :

   A est diagonalisable (2 valeurs propres distinctes en dimension 2) et sa matrice diagonale est $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

   La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on a $A=PDP^{-1}$

2. On fait exactement la même chose que dans la question précédente pour trouver comme valeurs propres -2 et 7.

   Ainsi, B, matrice carrée de taille 2 a 2 valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

   On résout $(B+2I)X=0$ pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre -2.

   Il vient : $4x+5y=0$ donc ${}^t(5 \quad -4)$ est un vecteur propre de B pour la valeur propre -2.

   On résout $(B-7I)X=0$ pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre -2.

   Il vient : $-x+y=0$ donc ${}^t(1 \quad 1)$ est un vecteur propre de B pour la valeur propre 7.

3. Cette fois c'est plus intéressant.

   Valeurs propres. On pose $P(\lambda)=det(C-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)+2]=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
   Les valeurs propres sont 1 et 2. Attention, C est une matrice de taille 3 qui n'a que deux valeurs propres distinctes, elle peut ne pas être diagonalisable.

   Cherchons un vecteur propre pour $\lambda=2$ (toujours commencer par le facteur de degré 1, c'est le plus facile...)
   On résout $(C-2I_3)X=0(S)$

   $S \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$
   et ${}^t(1 \quad -2 \quad 0)$ est un vecteur propre pour la vp 2.

   Cherchons 2 vecteurs propres libres pour la valeur propre 1. Attention, il se peut qu'on ne trouve qu'un et que les autres soient liés avec lui...
   Cela signifie que C n'est alors pas diagonalisable.
   On résout $(C-I_3)X=0(S)$

   $S \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y &=& 0 \\ -x-y &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$
   Donc, ${}^t(1 \quad 1 \quad 0)$ et ${}^t(1 \quad 1 \quad 1)$ sont deux vecteurs propres libres de C.
   En définitive cette matrice est diagonalisable.

Exercice 39

1. Rebelotte. Sans tous les détails fastidieux...
   $P(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$
   Les valeurs propres sont -1 et 3.
   Taille 2 avec 2 valeurs propres distinctes : diagonalisable.

   On résout $(A + I_2)X = 0$ et ${}^t(1 \quad -1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre -1.

   On résout $(A - 3I_2)X = 0$ et ${}^t(1 \quad 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 3.

   Donc $A = PDP^{-1}$ avec $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $P(\lambda) = (7-\lambda)(-5-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
   L'unique valeur propre est 1.
   Taille 2 avec 1 valeur propre : peut-être pas diagonalisable.

   On résout $(A - I_2)X = 0$ et ${}^t(3 \quad 2)$ est une base de vecteur propre pour la valeur propre 1.

   Le sous-espace propre n'a pas la dimension souhaitée et la matrice n'est pas diagonalisable.
   On peut aussi remarquer que si B était diagonalisable, sa matrice diagonale serait l'identité, ce qui, une fois remplacé dans PDP^{-1} ne serait pas possible.
3. $P(\lambda) = (3-\lambda)^2(7-\lambda)$
   Seulement deux valeurs propres en taille 3, peut-être pas diagonalisable.
   Pour la valeur propre 3 : on trouve deux vecteurs propres libres ${}^t(1 \quad 0 \quad 1)$ et ${}^t(1 \quad 1 \quad 1)$.
   Pour la valeur propre 7 : on trouve le vecteur propre ${}^t(0 \quad 1 \quad -1)$.
   Finalement cette matrice est diagonalisable.
   On a donc
   $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 40

1. On pose et calcule le polynôme caractéristique. Il dépend de a.
   $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2a + 3 - \lambda)(-a - \lambda) + 2(a+1)^2 = \lambda^2 + \lambda(-2a - 3 + a) - a(2a+3) + 2(a+1)^2 = \lambda^2 + \lambda(-a-3) + 2 + a$
   Calculons $\Delta = (3+a)^2 - 4(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
   On trouve rapidement ${}_1 = 1$ et $\lambda_2 = a + 2$
2. $a \neq -1$.
   (a) Les deux valeurs propres sont alors distinctes. La matrice est de taille 2 avec 2 valeurs propres distinctes donc diagonalisable.
   (b) On cherche les vecteurs propres pour chaque valeur propre.
   Si $\lambda = a + 2$, on résout le système $(S) \iff (A - (a+2)X = 0) \iff \begin{bmatrix} a+1 & -2(a+1) \\ a+1 & -2(a+1) \end{bmatrix} X = 0 \iff x - 2y = 0$. Donc le vecteur ${}^t(2 \quad 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $a + 2$.
   Si $\lambda = 1$, on résout le système $(S) \iff (A - X = 0) \iff \begin{bmatrix} 2(a+1) & -2(a+1) \\ a+1 & -(a+1) \end{bmatrix} X = 0 \iff x - y = 0$.
   Donc le vecteur ${}^t(1 \quad 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1.
   La matrice de passage est $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Elle vérifie l'égalité demandée et est inversible, d'après le cours.
3. Si $a = -1$, $A = I_2$ est déjà diagonale.

Exercice 41

1. On vérifie aisément que $AB = BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda(1+\lambda) - 2) - 2(-1+\lambda)\ (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda) = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$
   Donc les valeurs propres sont -1, 0 et 1.
   A étant de taille 3 et ayant 3 valeurs propres distinctes elle est diagonalisable.

On trouve les vecteurs propres en résolvant les systèmes associés (l'ayant fait 5 fois au moins, je ne détaille plus) :
Pour $\lambda = 0$: $X = ^t(-1 \quad 1 \quad 0)$ est un vecteur propre.
Pour $\lambda = -1$: $X = ^t(-1 \quad 1 \quad 1)$ est un vecteur propre.
Pour $\lambda = 1$: $X = ^t(0 \quad 1 \quad -1)$ est un vecteur propre.
On obtient alors $S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ telle que $A = SDS^{-1}$

3. On pose le sytème $SX = Y$ pour déterminer l'inverse de S et (voir plus haut pour des exemples)
$S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
On vérifie ensuite que $S^{-1}BS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 42

1. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour faire apparaître un zéro et simplifier les coefficients.
Il vient : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ \lambda - 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$
Maintenant qu'on a deux coefficients opposés ligne 2, on développe par rapport à cette ligne.
$P(\lambda) = -(\lambda - 2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(-3\lambda + 6) + (\lambda^2 - 4)\right] = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right]$
On factorise $\lambda^2 + 3\lambda - 2 = (2-\lambda)(1-\lambda)$ avec Δ et $P(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$.
Le déterminant de A est $P(0) = 4$.

2. (a) Les valeurs propres de A sont les racines de P : 1 et 2.
(b) On cherche pour chaque valeur propre un sous espace propre de même dimension que sa multiplicité.
La multiplicité est la puissance avec laquelle elle apparaît dans le polynôme caractéristique.
Commençons par $\lambda = 1$
On résout le système, de la même manière que dans les 5 exercices précédents, on cherche une solution au système :
$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 3y + 2z & = & 0 \\ -2x + 4y + 2z & = & 0 \\ 2x - 3y - z & = & 0 \end{array} \right.$
On remarque aisément que $X_1 = (1, 1, -1)$ est une solution de ce système.
Les plus motivés peuvent envisager un pivot de Gauss qui dira la même chose.
Donc X_1 est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$.

Pour $\lambda = 2$, on cherche 2 vecteurs propres libres.
En effet, la multiplicité est 2...
On résout alors : $S_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 3y + 2z & = & 0 \\ -2x + 3y + 2z & = & 0 \\ 2x - 3y - 2z & = & 0 \end{array} \right.$
Les trois lignes ayant le bon goût d'être équivalentes, il suffit on n'en garde qu'une. On cherche alors deux solutions libres à l'équation de plan $2x - 3y - 2z = 0$.
$(1, 0, -1)$ et $(3, 2, 0)$ sont deux solutions libres de cette équation.
Conclusion : on a trouvé deux vecteurs propres pour $\lambda = 2$.
La matrice A est bien diagonalisable avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui vérifient $A = PDP^{-1}$
(c) $A^n = (PDP^{-1})^n$.
On montre par une récurrence triviale que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 43

1. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix}$.

   On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ pour faire apparaître un zéro et simplifier les coefficients.

   Il vient : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1-\lambda \\ -1/2 & 1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix}$

   On développe par rapport à L_2.

   $P(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} - (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3/2-\lambda) - (1-\lambda)(1/2(1-\lambda)+1/2)$

   $= (1-\lambda)[(2-\lambda)(3/2-\lambda) - 1/2(2-\lambda)] = (1-\lambda)(2-\lambda)[(3/2-\lambda)-1/2] = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

   Les valeurs propres de A sont 1, avec la multiplicité 2 et 2 avec la multiplicité 1.

   Vecteurs propres pour $\lambda = 1$

   On résout le système, $(A - I)X = O$:

   $$S_1 \iff \begin{cases} y = 0 \\ (1/2)x + (1/2)y - (1/2)z = 0 \\ (-1/2)x - (1/2)y + (1/2)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

   Donc les vecteurs propres sont tous colinéaires à $(1, 0, 1)$.

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, qui est de multiplicité 2, est donc de dimension 1. Cela prouve (pour la question d'après) que la matrice n'est pas diagonalisable.

   Continuons avec $\lambda = 2$

   On résout le système, $(A - I)X = O$:

   $$S_1 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ (1/2)x - (1/2)y - (1/2)z = 0 \\ (-1/2)x + (1/2)y - (1/2)z = 0 \end{cases} S_1 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} S_1 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

   $$S_1 \iff \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

   On obtient, par exemple, le vecteur propre $(1, 1, 0)$.

2. Nous l'avons justifié dans la question précédente.

3. (a) On calcule le déterminant de P et il vaut -2.

   L'inverse de P est $P^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arrivé ici, j'imagine que vous n'avez plus besoin des détails.

   (b) Le produit $T = P^{-1}AP$ vaut : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Prouvons, par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   C'est trivialement vrai pour $n = 0$ et nous l'avons justifié pour $n = 1$ et $n = 2$.

   Supposons qu'il existe un naturel n tel que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   alors $T^{n+1} = T \times T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Ce qui prouve la formule, d'après le principe de récurrence.

   (c) $T = P^{-1}AP \iff A = PTP^{-1} \forall n \in \mathbb{N}$

   Le lecteur qui apprécie les produits de matrice n'a plus qu'à remplacer pour obtenir une expression de chaque coefficient de A.

Exercice 44

1. La diagonalisation est similaire à toutes les précédentes.
   Pour calculer le polynôme caractéristique on peut effectuer la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et développer par rapport à L_2.
   On obient après simplification : $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$
   Les valeurs propres sont 1 et 2 avec multiplicités respectives 2 et 1.
   Les vecteurs propres s'obtiennent en posant et résolvant les systèmes, il vient :
   Pour $\lambda = 2$, $(1, -1, 1)$ est un vecteur propre.
   Pour $\lambda = 1$, $(1, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$ sont des vecteurs propres libres.
   La matrice A est donc diagonalisable cas la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est 3 (la dimension de l'espace).
   On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui vérifient $A = PDP^{-1}$
   De plus $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   On a donc $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Le systeme s'exprime, en posant $X_n =^t (u_n, v_n, w_n)$:
   $X_{n+1} = AX_n$ et $X_0 =^t (1, 1, 1)$
   Donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n = PD^nP^{-1}X_0$
   Calculer l'expression de u_n, v_n et w_n demande d'effectuer tous les produits avec $n \in N$ quelconque.
   Cet entraînement est laissé aux lecteurs les plus téméraires...