

## Exercice 5

1. Commençons par une remarque simple : si  $a = 1$ , les trois vecteurs sont égaux et donc liés.

Supposons maintenant  $a \neq 1$ . On traduit la question en un système :

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $xX_1 + yY_1 + zZ_1 = \vec{0}(S)$ . A-t-on nécessairement  $x = y = z = 0$  ?

On transforme cette équation  $(S)$  en un système qui s'écrit

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + az = 0 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (1-a)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

Comme  $a \neq 1$ , on peut simplifier les lignes 2 et 3 par  $1-a$  ce qui donne :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + az = 0 \\ -y + z = 0 \\ y + (1+a)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + az = 0 \\ y = z \\ (2+a)z = 0 \end{cases}$$

On suppose, de plus, que  $a \neq -2$  et la dernière ligne donne  $z = 0$ . Il vient ensuite  $y = 0$  puis  $x = 1$ .

Donc, si  $a \neq 1$  et  $a \neq -2$ , la seule solution de  $(S)$  est  $(0, 0, 0)$  ce qui signifie que les trois vecteurs sont indépendants.

2. Si  $a = 1$ , on a déjà dit que les vecteurs étaient égaux.  $X_1 - X_2 = \vec{0}$   
Si  $a = -2$ , on vérifie aisément que  $X_1 + X_2 + X_3 = \vec{0}$

## Exercice 6

1. On cherche à résoudre le système  $(S) : xX_1 + yX_2 = U$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ 5y = 2 \\ 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

On a donc  $-\frac{3}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 = U$

2. On cherche à résoudre le système  $(S) : xX_1 + yX_2 = V$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ 5y = 3 \\ 5y = 4 \end{cases}$$

C'est impossible et  $V$  n'est pas combinaison linéaire de  $U$  et  $V$ .

## Exercice 7

Notons  $A$  et  $B$  les deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  des seconds membres.

On cherche alors à résoudre le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = B - A \\ X = A - Y = 2A - B \end{cases}$$

Il vient donc  $Y = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

## Exercice 8

Pour que le produit  $XY$  d'une matrice  $X$  ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes avec une matrice  $Y$  ayant  $q$  lignes et  $r$  colonnes soit défini il faut que  $p = q$ .

- $AB$  n'est pas défini,
- $BA = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,
- $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ ,
- $CA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,
- $BC$  n'est pas défini,
- $CB = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ ,
- $A^2$  n'est pas défini,  $A$  n'est pas une matrice carré,
- $B^2 = \begin{pmatrix} 33 & 0 & -21 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ,

- $C^2$  n'est pas défini,  $C$  n'est pas une matrice carrée.

Je pense qu'il faut remarquer que le produit de matrice n'est pas commutatif : en général  $AB \neq BA$ .

Il arrive même que  $AB$  soit défini sans que  $BA$  le soit.

### Exercice 9

Posons  $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ .

Calculons  $MN$  et  $NM$  :

- $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ az & at \end{pmatrix}$
- $NM = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + ay \\ az & bz + at \end{pmatrix}$

Ces deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients le sont :

$$\begin{cases} ax + bz = ax \\ ay + bt = bx + ay \\ az = az \\ at = bz + at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bz = 0 \\ bt = bx \\ bz = 0 \end{cases}$$

Deux possibilités :

$b = 0$  et alors toutes les matrices  $N$  commutent avec  $M$  ;  $M$  serait alors *diagonale*.

OU

$b \neq 0$  et alors il faut  $t = x$  et  $z = 0$ . Dans ce cas, les matrices qui commutent avec  $M$  sont de la forme  $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

### Exercice 10

Il faut vérifier que  $(AB)C = A(BC)$ .

Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- $BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

### Exercice 11

On pose  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$$

$$\text{et } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0 \text{ puis } x = y = z = t = 0$$

$$\text{et } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas, on a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro*.

Dans le second cas, on perçoit que ce n'est pas toujours possible pour une matrice, d'être un diviseur de zéro.

### Exercice 12

- On pose  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . On obtient alors  $aI_3 + bB + cC = M$ .

2. On pose les calculs et on obtient :  $BC = 2I_3$ ,  $CB = 2I_3$ ,  $B^2 = C$  et  $C^2 = 2B$ .

Considérons deux matrices  $M$  et  $M'$  de  $E$ , il existe alors  $a, b, c$  des réels et  $a', b', c'$  des réels tels que  $aI_3 + bB + cC = M$  et  $a'I_3 + b'B + c'C = M'$ .

Le produit  $MM'$  s'écrit alors  $(aI_3 + bB + cC)(a'I_3 + b'B + c'C)$  qu'on peut développer en :

$$MM' = (aa'I_3 + ab'B + ac'C) + (ba'B + bb'B^2 + bc'BC) + (ca'C + cb'CB + cc'C^2)$$

On simplifie avec les égalités de la question 1 et il vient :

$$MM' = (2bc' + aa' + 2cb')I_3 + (ab' + 2cc' + a'b)B + (ac' + bb' + ca')C$$

Et  $MM'$  est bien un élément de  $E$ .

### Exercice 13

On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  donc  $({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Puis

$$A({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } ({}^tA)A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

### Exercice 14

On obtient :  $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Cela vient du fait que  $A$  et  $B$  ne commutent pas ( $AB \neq BA$ ).

### Exercice 15

1. On obtient  $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$  et  $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^2A$

2. On conjecture que  $A^n = 2^{n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Prouvons le par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n = 1$ , la propriété est vraie.

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^n = 2^{n-1}A$  alors,  $A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \times 2A = 2^nA$ .

Et, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 16

1.  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

2.  $B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3. (a) On vérifie par le calcul que  $AB = B$

- (b) La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels  $A - B = I_3$  et  $A + 0 \times B = A$ .

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A^n = A + (n-1)B$ , alors  $A^{n+1} = A \times A^n = A(A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$ . D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 17

1. On calcule et on obtient  $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0_3$ .

2. On remarque que  $3Q - 3P = A$ . Donc  $a = -3$  et  $b = 3$ .

3. La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels  $A^0 = I_3 = (P + Q)$  et  $A = -3P + 3Q$

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A^n = a^n P + b^n Q$  alors

$$A^{n+1} = (aP + bQ)(a^n P + b^n Q) = a^{n+1}P^2 + ab^n PQ + ba^n QP + b^{n+1}Q^2 = a^{n+1}P + b^{n+1}Q.$$

Ce qui prouve la propriété d'après le principe de récurrence.

**Exercice 18**

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$$

$$2. (a) \text{ On pose } B = A - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \text{ Il vient } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour  $k \geq 3$ ,  $B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3$

(c) On applique le binôme de Newton pour  $\alpha I_3$  et  $B^n$  qui commutent.

$$A^n = (\alpha I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k$$

$$\text{Or, on sait que } B^k = 0_3 \text{ pour } k \geq 3 \text{ donc } A^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

$$\text{On a utilisé : } B^0 = I_3, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{Il vient } A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 19**

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{a}{2} & 2 - \frac{a}{2} & a + b + ac \\ 2 - \frac{b}{2} & 2 - \frac{b}{2} & a + b + bc \\ -1 - \frac{c}{2} & -1 - \frac{c}{2} & c^2 - \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$$

Donc  $A^2 = O_3 \Rightarrow a = 4, b = 4$  et  $c = -2$  (première colonne). On vérifie immédiatement que ces paramètres fonctionnent dans tous les coefficients.

2. (a)  $P = M - I_3$  donc  $P$  est la solution obtenue à la question précédente (surprise).

(b) i.  $I_3$  commute avec toutes les matrices carrée de taille 3 donc on peut appliquer les identités remarquables.

$$\text{Il vient } M^2 = (I_3 + P)^2 = I_3^2 + 2I_3P + P^2 = I_3 + 2P, \text{ car } P^2 = O_3$$

$$\text{puis } M^3 = M \times M^2 = (I_3 + P)(I_3 + 2P) = (I_3 + 3P + P^2) = I_3 + 3P$$

ii. Prouvons ce résultat par récurrence. On a déjà initialisé aux rangs 1, 2 et 3.

Supposons qu'il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que  $M^n = I + nP$ ,

$$\text{alors } M^{n+1} = M \times M^n = (I_3 + P)(I_3 + nP) = I_3^2 + (n+1)P + nP^2 = I_3 + (n+1)P$$

(c) On applique le binôme de Newton avec  $I_3$  et  $P$  qui commutent :

$$M^n = (I_3 + P)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = I_3 + nP$$

$$\text{car } P^k = O_3 \text{ si } k \geq 2 \text{ et } \binom{n}{1} = n.$$

$$3. S_n = (I_3 + P) + (I_3 + 2P) + \dots + (I_3 + nP) = nI_3 + (1 + 2 + \dots + n)P = nI_3 + \frac{n(n+1)}{2}P.$$

$$\text{On a utilisé l'indication : } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Exercice 20**

$$1. M(a, b)^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 - b^2 & ab + b^2 + ab - b^2 \\ -ab - b^2 - ab + b^2 & -b^2 + (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2ab & 2ab \\ -2ab & a^2 - 2ab \end{pmatrix}$$

$$2. (a) bB = M - aI_3 \text{ donc } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

On en déduit que, pour  $k \geq 2$ ,  $B^k = B^2 B^{k-2} = O_2$

- (c) On utilise le binôme de Newton avec  $aI_2$  et  $bB$  qui commutent ( $I_2$  commute avec tout le monde).

$$M^n = (aI_2 + bB)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} (bB)^k = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} (bB)^k = a^n I_2 + na^{n-1}bB$$

$$M(a, b)^n = \begin{pmatrix} a^n + na^{n-1}b & na^{n-1}b \\ -na^{n-1}b & a^n - na^{n-1}b \end{pmatrix}$$

- (d) Pour  $a = n = 0$ , la formule donne  $I_2 = I_2$  qui est juste.

3. (a) Pour  $a = 1$  et  $b = 2$  on pose  $M = I_2 + 2B$ .

- (b) On utilise une récurrence immédiate :  $X_1 = MX_0$ ,  $X_2 = MX_1 = M^2X_0$  etc.

Plus rigoureusement, la formule est initialisée au rangs  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X_n = M^n X_0$  alors  $X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0$ .

Ce qui prouve le résultat d'après le principe de récurrence.

- (c)  $X_n = M(1, 2)^n X_0 = \begin{pmatrix} 1^n + n1^{n-1}2 & n1^{n-1}2 \\ -n1^{n-1}2 & 1^n - n1^{n-1}2 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 1 + 2n & 2n \\ -2n & 1 - 2n \end{pmatrix} X_0$

$$\text{donc } \begin{cases} x_n &= (1 + 2n)u_0 + 2nv_0 \\ y_n &= -2nu_0 + (1 - 2n)v_0 \end{cases}$$

## Exercice 21

- $\det(I_3) = 1^3 = 1$
- $\det(M_1) = -\det(I_3) = -1$  (échange des colonnes 1 et 2).
- $\det(M_2) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
- $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$
- $\det(N_1) = 0$  (colonne nulle)
- $\det(N_2) = 0$  (deux colonnes égales)
- $\det(N_3) = 0$  (les colonnes sont liées :  $C_3 = 2C_1$ )