french

Recherche de cycles hamiltoniens sur des polyèdres

Francesco De Comité

Résumé

Un cycle hamiltonien sur un graphe est un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe. Le nom vient de William Roman Hamilton, astronome irlandais du XIXème siècle, qui inventa un jeu où il fallait chercher un tel cycle sur un dodécaèdre. Le but du projet est d'écrire un programme qui cherchera les cycles hamiltoniens sur un polyèdre passé en paramètre. La solution sera fournie sous un format lisible par un humain, afin de permettre à celui-ci d'en réaliser un modèle physique. Plusieurs possibilités de réalisations concrètes seront discutées.

Définitions

Cycles hamiltoniens

Un cycle hamiltonien sur un graphe est un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet de ce graphe. Il existe des graphes qui n'ont pas de cycles hamiltoniens, tandis que d'autres en ont un grand nombre. Il n'est pas simple de décider si un graphe possède un cycle hamiltonien : c'est même plutôt difficile (le problème est *NP-Complet*). On dira qu'un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien. Par contre, vérifier qu'un cycle est hamiltonien se fait rapidement...

Du point de vue de la programmation, le fait que le problème soit compliqué a plusieurs conséquences qu'il vaut mieux connaître avant de se lancer :

— Plus le graphe sera grand, plus la recherche prendra de temps.
— Si le graphe n'est pas hamiltonien, on devra attendre que tous les chemins aient été explorés avant de le savoir.
— Pour certains graphes, le nombre de cycles hamiltoniens différents est très grand, et il serait illusoire de tous les énumérer.

Polyèdres

Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones (et un polygone est une surface limitée par des segments de droite). A chaque polyèdre est associé un graphe : celui qui connecte les sommets du polyèdre en suivant ses arêtes. On peut donc parler de cycles hamiltoniens sur des polyèdres. Il existe plusieurs familles de polyèdres (allez voir sur Wikipedia si vous voulez les listes, les noms et les images) :

— Les polyèdres platoniciens : toutes les faces sont les mêmes. Il en existe cinq : le tétraèdre , l'icosaèdre, l'octaèdre, (les faces de ces trois polyèdres sont des triangles équilatéraux)le cube (les faces sont des carrés) et le dodécaèdre (les faces sont des pentagones). Ils sont tous hamiltoniens.
— Les polyèdres archimédiens : les faces sont toujours des polygones réguliers, mais on peut utiliser plusieurs polygones différents, en maintenant le plus de symétries possibles. Par exemple, le ballon de football (plus formellement l'icosaèdre tronqué), composé de 12 pentagones et de 20 hexagones. Il y a 13 polyèdres archimédiens, ils sont tous hamiltoniens.
— Les solides de Johnson : c'est une généralisation des polyèdres archimédiens, mais on a levé la contrainte d'avoir des sommets équivalents. Il y en a 92 différents. Ils sont tous hamiltoniens.
— Les solides de Catalan. Ce sont les duals des polyèdres archimédiens : toutes les faces sont égales, mais ce ne sont plus des polygones réguliers. Les arêtes peuvent avoir des longueurs différentes. Seulement sept sur les treize sont hamiltoniens. On n'étudiera pas ces polyèdres dans ce projet.

Pour ce projet, nous ne considérons que les polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers, c'est à dire les platoniciens et les archimédiens.

Objectif du projet

Pour chacun de ces polyèdres, on vous fournira à *cette adresse* un fichier contenant sa description au format *.off* décrit ci-après. Votre programme, qui aura comme paramètre un nom de polyèdre, devra :

1. Ouvrir le fichier correspondant à ce polyèdre et en extraire les informations dont il aura besoin.
2. Rechercher tous les cycles hamiltoniens sur ce polyèdre (ou bien dire qu'il n'y en a pas).
3. Pour chaque cycle trouvé, générer un fichier de description *dot* (voir figure 3) qui permettra de visualiser le graphe et le cycle en utilisant des couleurs différentes pour les arêtes du graphe (voir figure 2).
4. Lorsque ce graphe sera engendré, vous pourrez suivre ses indications (soit, dans l'exemple du graphe de la figure 3 : aller du sommet 11 au sommet 13, puis du sommet 13 au sommet 12 ...) pour construire un modèle physique du polyèdre et de son cycle hamiltonien.

Chacune des quatre étapes définies ci-dessus va maintenant être détaillée.

Lire les fichiers .off

Les fichiers dont le suffixe est ".off" contiennent chacun la description d'un polyèdre, dont le nom est aussi celui du fichier. Tous ces fichiers sont construits de la même façon, étudions celui qui décrit le dodécaèdre (figure 1)

- la première ligne du fichier donne le nom du polyèdre (en anglais). Le symbole # définit les commentaires.
- Peuvent suivre une ou plusieurs lignes de commentaires (et donc commençant par un #).
- Les trois nombres figurant à la ligne 3 sont respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes.
- Viennent ensuite les coordonnées 3D de chacun des 20 sommets. De façon implicite, cette première liste attribue un numéro à chaque sommet (celui de la ligne 4 sera repéré par la suite comme étant le sommet d'indice 0, et celui de la ligne 23 aura l'indice 19).*Les coordonnées des sommets ne devraient pas vous être utiles dans ce projet.*
- Les 12 lignes suivantes décrivent les faces. Chaque ligne commence par un entier n, qui est le nombre de cotés de la face considérée, suivi de n nombres entiers, qui sont les indices des sommets formant la face. *A priori, ces informations ne devraient pas vous être nécessaires.*
- Les 30 lignes suivantes décrivent chacune des arêtes, en indiquant les indices des sommets que joint cette arête.

Rechercher les cycles

L'algorithme qui énumère les cycles hamiltoniens d'un graphe donné se comporte de la façon suivante :

- Soit un graphe à n sommets.
- Imaginons que l'on connaisse déjà un chemin C de longueur k (k étant le nombre de sommets, $k \leq n$), commençant au sommet d'indice a_0, et menant au sommet d'indice a_{k-1}
- Si k est strictement plus petit que n, on va essayer de prolonger le chemin de toutes les façons possibles : pour chaque voisin v du sommet a_{k-1} qui n'est pas déjà dans le chemin C, considérer le chemin $C \cup \{v\}$. Si tous les voisins de a_{k-1} sont déjà dans C : on est arrivé dans un cul-de-sac, on ne trouvera pas de chemin continuant C. Sinon, le chemin a été prolongé, on continue.
- Si k est égal à n, on a trouvé un *chemin hamiltonien* qui passe par tous les sommets du graphe. Ce ne sera un *cycle* que si le premier et le dernier élément de C sont voisins.

Générer une visualisation du chemin

L'algorithme engendrera une liste de chemins, chacun étant un cycle hamiltonien, qu'il nous faudra ensuite représenter d'une façon ou d'une autre. Les représentations proposées sont les suivantes :

- Représentation sous forme de graphe, le chemin hamiltonien sera visualisé par des arcs de couleur et d'épaisseur différente des autres arcs du graphe (voir figure 2).
- Réalisations physiques :
  - A l'aide de pailles en plastique et de cure-pipe.
  - En construisant un polyèdre à l'aide de techniques d'origami modulaire.

Dessiner le graphe

GraphViz (`https://www.graphviz.org`), disponible par défaut sur les distributions Ubuntu, mais existant aussi sur les autres plateformes, met à votre disposition des outils de description et de visualisation de graphes. Par exemple, le graphe de la figure 3 a été obtenu à partir du fichier de la figure 2 à l'aide de la commande

```
neato -Tjpeg dodecahedron0.dot  -o  imagedugraphe.jpg
```

Reportez-vous à la documentation de `dot` pour le fonctionnement de ce programme (`http://www.graphviz.org/pdf/dotguide.pdf`)

Réalisation physique

Pour réaliser physiquement un polyèdre sur lequel on représente un cycle hamiltonien, il faudra de toute façon être passé par l'étape précédente, et suivre les indications du graphe pour construire l'objet arête par arête. La seule différence entre les deux méthodes décrites ci-dessous, ce sont les objets de base utilisés pour représenter les arêtes.

Pailles et cure-pipe

En utilisant des pailles plastique de deux couleurs, et en les reliant entre elles par des cure-pipes, on peut représenter n'importe quel polyèdre et un de ses cycles hamiltoniens. On peut couper les pailles en deux ou en trois pour éviter que le modèle devienne énorme.

Origami modulaire

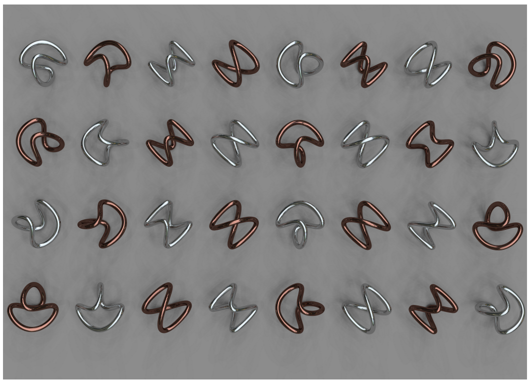
A cette adresse : `https://imaginary.org/fr/node/747` vous trouverez un document qui vous explique pas à pas comment fabriquer des modules élémentaires par pliage (origami), qu'on peut assembler pour représenter presque tous les polyèdres (les polyèdres ayant trop peu de sommets (en pratique moins de 20) sont plus difficiles à construire : le papier se déchire).

Travail à effectuer

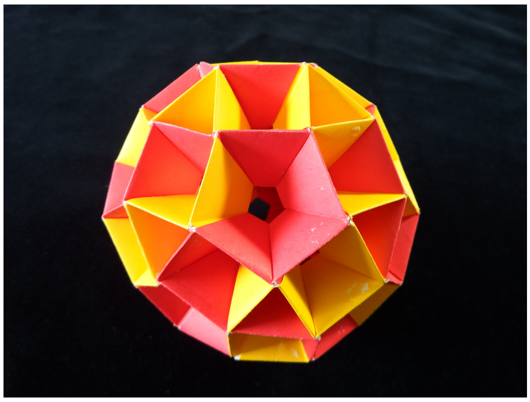
Ecrire un programme qui prendra en paramètre le nom d'un des polyèdres dont les descriptions sont fournies et qui retournera :

— La représentation d'au moins un cycle hamiltonien sur ce polyèdre (si celui en possède), sous forme d'un graphe comme celui de la figure 3.

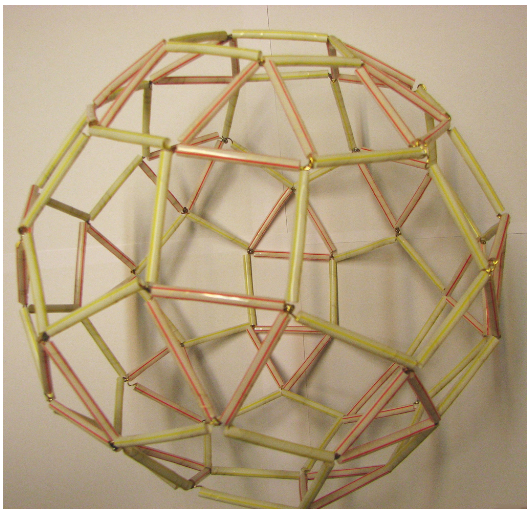
— Eventuellement, une réalisation physique (pailles et cure-pipe, origami, ...).



Les 36 cycles de l'icosaèdre



Un cycle sur un rhombiscosidodecaèdre (origami modulaire)



Un polyèdre en pailles (mais pas de cycle hamiltonien sur cette photo)

Un cycle hamiltonien sur un icosidodécaèdre (impression métal 3D)

```
# Dodecahedron
# Data: Exact Mathematics
20 12 30
 0.5773502691896  0.5773502691896  0.5773502691896
-0.0000000000000  0.9341723589627 -0.3568220897731
-0.5773502691896  0.5773502691896  0.5773502691896
-0.0000000000000  0.9341723589627  0.3568220897731
-0.9341723589627  0.3568220897731 -0.0000000000000
-0.5773502691896  0.5773502691896 -0.5773502691896
 0.9341723589627 -0.3568220897731 -0.0000000000000
 0.9341723589627  0.3568220897731 -0.0000000000000
 0.5773502691896  0.5773502691896 -0.5773502691896
 0.5773502691896 -0.5773502691896  0.5773502691896
 0.3568220897731  0.0000000000000  0.9341723589627
-0.3568220897731  0.0000000000000  0.9341723589627
-0.9341723589627 -0.3568220897731 -0.0000000000000
-0.5773502691896 -0.5773502691896  0.5773502691896
-0.0000000000000 -0.9341723589627  0.3568220897731
 0.3568220897731  0.0000000000000 -0.9341723589627
 0.5773502691896 -0.5773502691896 -0.5773502691896
-0.0000000000000 -0.9341723589627 -0.3568220897731
-0.3568220897731  0.0000000000000 -0.9341723589627
-0.5773502691896 -0.5773502691896 -0.5773502691896
5 2 4 5 1 3
5 0 7 6 9 10
5 8 15 16 6 7
5 8 7 0 3 1
5 5 18 15 8 1
5 0 10 11 2 3
5 6 16 17 14 9
5 11 13 12 4 2
5 11 10 9 14 13
5 19 17 16 15 18
5 19 12 13 14 17
5 18 5 4 12 19
0 3
0 7
0 10
1 3
1 5
1 8
2 3
2 4
2 11
4 5
4 12
5 18
6 7
6 9
6 16
7 8
8 15
9 10
9 14
10 11
11 13
12 13
12 19
13 14
14 17
15 16
15 18
16 17
17 19
18 19
```

FIGURE 1 – Description d'un dodécaèdre

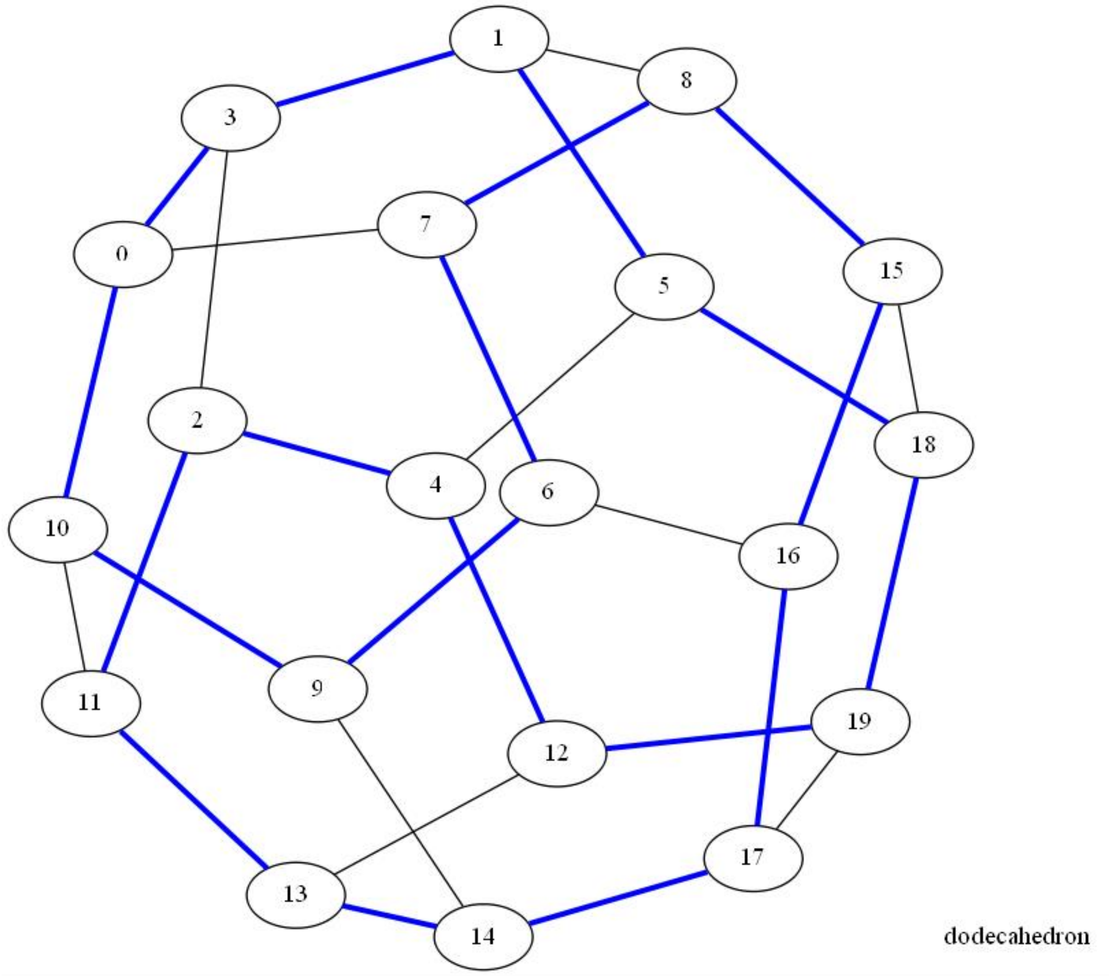


FIGURE 2 – Un cycle hamiltonien sur un dodecaèdre

```
strict graph G1{
dodecahedron[shape=plaintext]
edge[len=6;edgesep=10];
 overlap=false;
 0--3
0--7
0--10
1--3
1--5
1--8
2--3
2--4
2--11
4--5
4--12
5--18
6--7
6--9
6--16
7--8
8--15
9--10
9--14
10--11
11--13
12--13
12--19
13--14
14--17
15--16
15--18
16--17
17--19
18--19
0[color=green,style=filled]
1[color=green,style=filled]
2[color=green,style=filled]
3[color=green,style=filled]
4[color=green,style=filled]
5[color=green,style=filled]
6[color=green,style=filled]
7[color=green,style=filled]
8[color=green,style=filled]
9[color=green,style=filled]
10[color=green,style=filled]
11[color=green,style=filled]
12[color=green,style=filled]
13[color=green,style=filled]
14[color=green,style=filled]
15[color=green,style=filled]
16[color=green,style=filled]
17[color=green,style=filled]
18[color=green,style=filled]
19[color=green,style=filled]
11--13[color=blue,penwidth=3]
13--12[color=blue,penwidth=3]
12--4[color=blue,penwidth=3]
4--2[color=blue,penwidth=3]
2--3[color=blue,penwidth=3]
3--0[color=blue,penwidth=3]
0--7[color=blue,penwidth=3]
7--6[color=blue,penwidth=3]
6--16[color=blue,penwidth=3]
16--15[color=blue,penwidth=3]
15--8[color=blue,penwidth=3]
8--1[color=blue,penwidth=3]
1--5[color=blue,penwidth=3]
5--18[color=blue,penwidth=3]
18--19[color=blue,penwidth=3]
19--17[color=blue,penwidth=3]
17--14[color=blue,penwidth=3]
14--9[color=blue,penwidth=3]
9--10[color=blue,penwidth=3]
10--11[color=blue,penwidth=3]
}
```

Figure 3 – Graphe d'un cycle hamiltonien sur un dodécaèdre