NSI 1ère - Données - Complément à deux

QK

Le complément à deux : comment coder les entiers négatifs dans une machine ?

Les entiers relatifs

Rappels :

- **Entiers naturels :** entiers positifs ou nuls (0, 1, 2 etc.)
- **Entiers relatifs :** entiers de n'importe quel signe (. . . , -2, -1, 0, 1,. . .)

Les entiers relatifs

Le problème du signe :

Un signe n'est pas un nombre. . .

On ne peut pas l'encoder directement en binaire.

Le principe est d'attribuer au *bit de poids fort* (premier bit) le signe du nombre.

- Si le *bit de poids* fort est **0**, le nombre est **positif**,
- Si le *bit de poids* fort est **1**, le nombre est **négatif**.

Nombres encodés sur un octet

Contrainte immédiate :
Il faut que la machine sache quelle est la taille du nombre !

Sinon :

- Comment déterminer “le bit de poids fort” ?
- Comment savoir où s’arrête le nombre ?

Durant tout le chapitre, on encodera **nos nombres entiers sur 8 bits.**

Approche naïve : binaire signé

Essayons avec cette simple règle :

Pour encoder un entier sur 8 bits,

- On détermine la représentation binaire de sa valeur absolue
- Ensuite on remplit de 0 à gauche.

Signe

- Si le nombre est positif, on garde le bit de poids fort à 0,
- **Sinon, on met le bit de poids fort à 1.**

Approche naïve : binaire signé

27

`27 = 0b11011`

`On complète sur 8 bits :`

`27 = 0b 0001 1011`

`27 > 0 on garde le premier bit à 0`

Approche naïve : binaire signé

-9

`La valeur absolue de -9 est 9.`

`9 = 0b1001`

`On complète sur 8 bits :`

`9 = 0b 0000 1001`

`-9 < 0 on remplace le premier bit par -1 :`

`-9 = 0b 1000 1001`

Jusqu'ici tout va bien...

Et soudain, c'est le drame...

Essayons d'ajouter ces exemples :

Vérifions que $27 + (-9) = 18$

```
  0b 0001 1011
+ 0b 1000 1001
--------------
= 0b 1010 0100
```

... mais `0b 1010 0100 = 164`

Échec total ! **Le binaire signé ne permet pas de réaliser les additions habitulles**

Exercice 1

On suppose toujours nos entiers encodés sur un octet.

1. Donner la représentation binaire naïve de 12 et -100 et de -88.
2. Réaliser l'addition binaire bit à bit de ces nombres.
3. Comparer avec le résultat obtenu.

La méthode naïve ne permet pas de faire de calculs !

Avec la méthode naïve, **on ne peut plus réaliser d'opération naturelle sur les entiers**. On a maintenant deux objectifs :

1. **Représenter les entiers relatifs,**
2. **Conserver le même algorithme pour l'addition**

Le complément à deux

Complètement à deux : entiers positifs

Pour les entier positifs

1. coder l'entier en binaire comme d'habitude,
2. compléter l'octet avec des 0 devant.

Complément à deux : entiers négatifs

Pour les entiers négatifs

1. Coder la valeur absolue du nombre en base 2,
2. compléter l'octet avec des 0 devant,
3. échanger tous les bits ($1 \leftrightarrow 0$),
4. ajouter 1.

Signe du complément à deux

- Si le bit de poids fort est 0 : le nombre est positif
- Si le bit de poids fort est 1 : le nombre est négatif

Exemples : 27

27

```
1. coder l'entier en binaire comme d'habitude,
    27 = 0b11011
2. compléter l'octet avec des 0 devant.
    27 = 0b 0001 1011
```

Le complément à 2 sur un octet de 27 est `0b 0001 1011`

Exemples : -9

-9

```
1. coder la valeur absolue du nombre :
    9 = 0b1001
2. compléter l'octet :
    0b 0000 1001
3. échanger tous les bits :
    0b 1111 0110
4. ajouter 1 :
    0b 1111 0111
```

Le complément à 2 sur un octet de -9 est `0b 1111 0111`

Exercice 2

Donner les compléments de à 2 de 12, -100 et -88.

Vérifions : $27 + (-9)$

Vérifions : $27 + (-9) = 18$

```
  0001 1011
+ 1111 0111
-----------
= 0001 0010
```

On vérifie immédiatement que `18 = 0b10010`

Remarque la dernière retenue (tout à gauche) disparait.

Exercice 3

1. Réaliser l'addition binaire des compléments à 2 des nombres 12 et -100.
2. Vérifier qu'on retrouve bien le résultat précédent pour -88.

Complément à deux vers décimal

Si l'entier est positif (son premier bit est 0)...

On fait comme d'habitude !

Exemple : `0b 0001 1011`

$1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 8 + 1 \times 16 = 27$ boom

Complément à deux vers décimal

Si l'entier est négatif (si premier bit est 1)

1. On échange tous les bits $0 \leftrightarrow 1$,
2. On ajoute 1,
3. On converti en binaire comme d'habitude,
4. On change le signe.

Exemple : `0b 1111 0111`

1. `On échange tous les bits,`
   `0b 0000 1000`
2. `On ajoute 1,`
   `0b 0000 1001`
3. `On converti en binaire comme d'habitude,`
   `0b 1001 = 1 * 1 + 1 * 8 = 9`
4. `On change le signe.`
   `0b 1111 0111 = -9`

Exercice 4

Donner les notations décimales des compléments à deux sur un octet suivants :

1. `0b1111 1111`
2. `0b1000 0000`
3. `0b0111 1111`
4. `0b1010 0011`

Remarque : Si mon entier négatif A à 4 chiffres décimaux, il est PLUS PETIT qu'un entier négatif à 3 chiffres décimaux : $-1234 < -999$

Cette propriété est-elle préservée dans le complément à deux ?

Table de valeurs

```
 bit
 de
signe
   0 1 1 1 1 1 1 1 =  127
   0      ...      =  ...
   0 0 0 0 0 0 1 0 =    2
   0 0 0 0 0 0 0 1 =    1
   0 0 0 0 0 0 0 0 =    0
   1 1 1 1 1 1 1 1 =   -1
   1 1 1 1 1 1 1 0 =   -2
   1      ...      =  ...
   1 0 0 0 0 0 0 1 = -127
   1 0 0 0 0 0 0 0 = -128
```

Combien d'entiers relatifs sur un octet ?

Règle

- Sur un octet on peut encoder de 0 (`0b00000000`) à 127 (`0b01111111`)
- Sur un octet on peut encoder de -1 (`0b11111111`) à -128 (`0b10000000`)

Combien d'entiers relatifs sur avec `n` bits ?

Règle

- Sur un octet on peut encoder de 0 à 2^{n-1}.
- Sur un octet on peut encoder de -1 à -2^{n}.

Complément à 2 : résumé

On a trouvé une méthode permettant d'ajouter des entiers (et donc de faire les opérations habituelles. . .) qui fonctionne aussi avec les entiers *négatifs*.

et Python là dedans ?

Aie, c'est compliqué. Les opérations précédentes ont toutes supposées une taille fixe des entiers : **codés sur un octet**

Dans Python les entiers ont une *taille arbitraire*, il ne peut afficher nativement le complément à deux.

```
>>> bin(12)
'0b1100'
>>> bin(-12)
'-0b1100'
```

Pour ceux que ça intéresse j'ai un TP Colab qui montre différentes manières d'afficher le complément à deux dans Python.