L2 S4 Séance 5 — Systèmes 24(1), 25, 26, 29 Déterminants — 31

24 1) $\begin{cases} x+3y+5z=22 \\ -x+2y+3z=12 \\ -12x+y-z=-13 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_1+L_2$

$L_3 \leftarrow L_3+12L_1$

$\begin{cases} x+3y+5z=22 \\ 5y+8z=34 \\ 37y+59z=251 \end{cases}$

$L_3 \leftarrow 5L_3-37L_2$

$\begin{cases} x+3y+5z=22 \\ 5y+8z=34 \\ -1z=-3 \end{cases}$

$5\times 59-8\times 37=-1$

$5\times 251-37\times 34=-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=22-3y-5z \\ 5y=34-8z=34-8\times 3=10 \\ z=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=22-6-15=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

$\mathcal{S}=\{(1,2,3)\}$

unique solution

25 x : nb d'employés y : nb de techniciens z : nb de cadres

effectif : $x + y + z = 60$

salaires : $1500x + 2600y + 4200z = 114\,000$

Après $\nearrow$: $1{,}064 \times 1500x + 1{,}045 \times 2600y + 1{,}045 \times 4200z = 1{,}056 \times 114\,000$

quel $\uparrow$: $0{,}064 \times 1500x + 0{,}045 \times 2600y + 0{,}045 \times 4200z = 0{,}056 \times 114000$

$\iff 96x + 117y + 189z = 6384$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 96x + 117y + 189z = 6384 \end{cases} \underset{(\div 3)}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 32x + 39y + 63z = 2128 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 2x - 13y - 21z = -152 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 15L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 11y + 27z = 240 \\ -15y - 23z = -272 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y - z + 60 \\ 11y = 240 - 27z \\ -152z = -608 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow 11L_3 - (-15)L_2$

$$\begin{cases} x = -12 - 4 + 60 = 44 \\ y = \dfrac{240 - 27 \times 3}{11} = 12 \\ z = \dfrac{608}{152} = 4 \end{cases}$$

L'entreprise comporte 44 employés, 12 techniciens et 4 cadres

26

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad \underset{\Leftrightarrow}{L_1 \leftrightarrow L_2} \quad \begin{cases} x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

meilleur pivot

meilleur 2nd membre

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ (1-a^2)y + (1-a)z = 1-a^2 \\ (1-a)y + (a-1)z = a^2 - a \end{cases}$$

$- (1-a)z$

$1 - a^2 = (1-a)(1+a)$

$a^2 - a = a(a-1) = -a(1-a)$

Pour diviser par $1-a$, il faut que $a \neq 1$

Supposons $\boxed{a \neq 1}$

Si $\underline{a \neq 1}$, on divise par $1-a$

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ (1+a)y + z = 1+a \\ y - z = -a \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ y - z = -a \\ (2+a)y = 1 \end{cases} \iff$$

Si $a \neq -2$ (et tjrs $a \neq 1$)

Alors

$$\begin{cases} x = a - ay - z \\ z = y + a \\ y = \dfrac{1}{2+a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - \dfrac{a}{2+a} - \dfrac{(1+a)^2}{2+a} = \dfrac{2a + a^2 - a - (1+a)^2}{2+a} = \dfrac{a + a^2 - 1 - 2a - a^2}{2+a} \\ y = \dfrac{1}{2+a} \\ z = \dfrac{1}{2+a} + a = \dfrac{1 + 2a + a^2}{2+a} = \dfrac{(1+a)^2}{2+a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-a-1}{2+a} \\ y = \dfrac{1}{2+a} \\ z = \dfrac{(1+a)^2}{2+a} \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ (unique solution)

- Si $a=1$ les 3 lignes sont identiques : $x+y+z=1$
  c'est l'éq° d'un plan dans l'espace.

- Si $a=-2$ $(a+2=0)$

$$\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_1+L_2+L_3$

$$\begin{cases} \text{———} & L_1 \\ \text{———} & L_2 \\ 0x+0y+0z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{———} & L_1 \\ \text{———} & L_2 \\ 0=3 \end{cases}$$

impossible

Pas de solution

29

Système augmenté

1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ -1 & -1 & 5 & b \\ 2 & 7 & -3 & c \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{A \text{ du } 2.}$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 3 & 5 & c-2a \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow 2L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 2 & 2 & 2a+2b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 2 & 0 & 7a+5b-c \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -16a - 11b + 3c \\ 0 & 2 & 0 & 7a + 5b - c \\ 0 & 0 & 2 & -5a - 3b + c \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -32a - 22b + 6c \\ 0 & 2 & 0 & 7a + 5b - c \\ 0 & 0 & 2 & -5a - 3b + 2c \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + 2L_3$

$2 I_3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \text{sol}^n\ \theta$

$$\underbrace{y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -32a - 22b + 6c \\ 7a + 5b - c \\ -5a - 3b + 2c \end{pmatrix}}_{A^{-1} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

2.

Donc, on a aussi calculé A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -32 & -22 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminants

$\boxed{\text{s'il existe une col. nulle, le det. est nul}}$

det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\det(M) \neq 0 \iff M$ est inversible $\iff rg(M) = n$
- 1) $\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$$

idem si T est <u>triangulaire</u>

lorsqu'on échange 2 lignes (ou 2 colonnes), dét change de signe

31

- $\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$

- $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = -1$

  $L_1 \leftrightarrow L_2$

- $\begin{vmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 1 = 2$

- $\det(2 I_3) = \begin{vmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

- $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

1 colonne nulle

- $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$C_3 = C_1$

$\exists$ Combinaison linéaire entre les colonnes.

- $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 0$

$C_3 = 2\,C_1$