

**Examen Calcul matriciel - Mai 2023**

(durée 2 heures)

**Les calculatrices “collège” sont autorisées****Merci d’indiquer le numéro de votre section**

**Avertissement :** *On insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barème donné a seulement une valeur indicative.*

**Exercice 1. [6 points]** On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **[2 points]** Calculer le déterminant et le rang de chaque matrice.
2. **[1 point]** Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles inversibles ? (justifier votre réponse)
3. **[1 point]** Justifier que  $A$  admet 3 valeurs propres qu’on déterminera.  $A$  est-elle diagonalisable ?
4. **[2 points]** Justifier que  $B$  admet une seule valeur propre qu’on déterminera. Déterminer le sous-espace propre associé à cette valeur propre.  $B$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 2. [5 points]** Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $(S)$  le système d’inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x - my + z = m \\ 2mx + y + z = m \\ x - y + mz = 0 \end{cases}$$

1. **[1,5 points]** A quelle(s) condition(s) sur le paramètre  $m$  le système est-il de Cramer ?
2. **[1 point]** Résoudre  $(S)$  lorsque  $m = 1$ .
3. **[1 point]** Résoudre  $(S)$  lorsque  $m = 0$ .
4. **[1,5 points]** Résoudre  $(S)$  dans le cas  $m = 2$ , en utilisant les formules de Cramer.

**Exercice 3. [9 points + 2 points bonus]**

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On notera  $P_A(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $A$ .

**Tourner la page SVP**

1. **[1,5 points]** Montrer que  $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)(1 - \lambda)(\lambda - 3)$ .
2. **[3 points]** Déterminer les valeurs propres de  $A$  ainsi que les vecteurs propres associés.
3. **[1 point]** Trouver une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ , où  $P^{-1}$  est la matrice inverse de  $P$ .
4. **[1,5 point]** Calculer  $P^{-1}$ .
5. **[2 points]** Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Calculer  $A^n$ .
6. **[2 points]** On considère les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par :  
 $u_0 = v_0 = w_0 = 1$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Exprimer  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ .

—oooOooo—