Déterminant

Soit M une matrice de taille n $(n \geq 1)$.

Le déterminant est un nombre réel et pas une matrice

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors son déterminant noté $\det(M) \in \mathbb{R}$. (on note aussi $|M|$)

Le calcul du déterminant est très utile. Il nous servira par exemple quand on sera amener à calculer l'inverse d'une matrice (si il existe).

I Méthode de calcul du déterminant

Nous allons developper une méthode générale du calcul du déterminant d'u matrice. Avant de developper cette méthode attardons-nous un peu sur 2 notions ut pour le reste du cours.

II Mineur et cofacteur

a) *1 Mineur Soit M une matrice t.q $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On appelle **mineur** noté $|M_{ij}|$ de l'élément a_{ij} le Déterminant d'ordre $(n-1)$ en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

2) Exemple Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow |M_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^{*} = 5 \times 3 - (2) \times 0$$

$|M_{11}|$

$$|M_{11}| = 15$$

* Pour un Déterminant 2×2, on utilisera la règle du "gamma" γ

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (5 \times 3) - (-2 \times 0) = 15 - 0 = 15$$

II) 4) Cofacteur

On appelle cofacteur, noté Δ_{ij} de l'élément a_{ij}, le mineur $|M_{ij}|$ affecté du signe + ou − suivant la relation :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

III Calcul d'un déterminant

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La valeur d'un déterminant $\det(M) = |M|$ d'ordre n est donnée suivant un développement suivant :

* une ligne i : $|M| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$

ou

* une colonne j : $|M| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$

① Exemple 1 : cas d'une matrice 2×2

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} = 6 & 2 \\ a_{21} = 1 & \underset{\downarrow \, |M_{11}|}{-3} \end{vmatrix}$$

on va développer notre calcul suivant la 1ère colonne.

$$|M| = a_{11}\,\Delta_{11} + a_{21}\,\Delta_{21}$$

$$|M| = 6\times(-1)^{1+1}\,|M_{11}| + 1\times(-1)^{2+1}\,|M_{21}|$$

$$|M| = 6\times(-1)^{2}\times(-3) + 1\times(-1)^{3}\times(2)$$

$$|M| = 6\times(-3) - 1\times 2$$

$$|M| = -18 - 2$$

$$\boxed{|M| = -20}$$

② **Exemple 2** : Cas d'une matrice 3×3

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a_{13} = -1 \\ 3 & 5 & a_{23} = 0 \\ 2 & -2 & a_{33} = 3 \end{pmatrix}$$

On va développer notre calcul du déterminant suivant la 3ème colonne.

(elle contient un zéro).

$$|M| = a_{13}\,\Delta_{13} + a_{23}\,\Delta_{23} + a_{33}\,\Delta_{33}$$

$$|M| = -1 \times (-1)^{1+3}\,|M_{13}| + 0 \times (-1)^{2+3}\,|M_{23}| + 3 \times (-1)^{3+3}\,|M_{33}|$$

$$|M| = -1 \times |M_{13}| \overbrace{-\,0 \cdot |M_{23}|}^{=0} + 3 \cdot |M_{33}|$$

$$|M| = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|M| = -1 \times (-6-10) + 3\,(5-6) = 16 - 3$$

Ainsi $\det(M) = \underline{\underline{13}}$