DS - Licence 1- FaSEST - Outils mathématiques pour l'économiste – Novembre 2021
Durée 2h

Documents interdits, calculatrice collège autorisée. Les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 Les questions sont en partie indépendantes

1) Résoudre l'équation $x^2 - x - 6 = 0$
2) En déduire la résolution de l'équation $x^4 - x^2 - 6 = 0$.
3) Soit $A(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 12$.
   a) Montrer que $x = 2$ est une racine évidente de l'équation $A(x) = 0$
   b) Déterminer les constantes a, b, c telles que $A(x) = (x - 2)(ax^2+bx+c)$
   c) Résoudre $A(x) \leq 0$.

Exercice 2

Soit $f(x) = x^2 - ax + 4$, où a est un paramètre.

1) Pour quelles valeurs de a, l'équation $h(x) = 0$ admet -elle une unique solution ? (justifier)
2) Pour quelles valeurs de a, le sommet de la parabole représentative de h a-t-il une ordonnée positive ou nulle ? (justifier)

Exercice 3

La fonction offre d'un produit est donnée par la relation $q_{offre} = 30p - 45$.

La fonction demande du même produit est décrite par une droite d'équation $q_{demande} = mp + b$. On sait que pour un prix de 50€ la demande est de 105, pour un prix de 30€ la demande est de 405.

1) Trouver l'expression de la fonction $q_{demande}$.
2) Trouver le prix et la quantité d'équilibre, par le calcul **et** graphiquement.

Exercice 4 Les questions sont indépendantes

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$, de raison r = -1.

Calculer U_9 puis $S = U_0 + \cdots + U_9$

2) Soit (V_n) une suite géométrique telle que $V_4 = 4$ et $V_8 = 64$.

Donner l'expression de V_n puis calculer $S = V_4 + \cdots + V_{13}$

3) Soit (U_n) une suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$, de raison r = 3. Déterminer n tel que

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = 665$$

4) En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, calculer

$S = \frac{1}{3} + 1 + 3 + \cdots + 729$

Correction DS – Novembre 2021

21 pts.

Exercice 1 6 pts

1,5 1) $\Delta = 1 - 4\times1\times(-6) = 25$ $\quad x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ $\quad x_2 = \frac{1+5}{2} = \boxed{3}$.

1 2) $\begin{cases} X = x^2 \\ X = -2 \text{ ou } X = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = -2 \text{ impossible} \\ \text{ou } x^2 = 3 \end{cases}$ $\left\{ \boxed{x = \pm\sqrt{3}} \right.$

0,5 3) a) $A(2) = -8 + 3\times4 + 8 - 12 = 0$

b) $A(x) = ax^3 - 2ax^2 + bx^2 - 2bx + cx - 2c$

$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

on identifie avec $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12$

1,5 $\begin{cases} a = -1 \\ b - 2a = 3 \\ c - 2b = 4 \\ -2c = -12 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 + 2a = 3 - 2 = 1 \\ \\ c = 6 \end{cases}$

donc $A(x) = (x-2)(-x^2+x+6)$

$\boxed{A(x) = (x-2)(-1)(x^2-x-6)}$

$A(x) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 3$.

1,5 c)

x		-2		2		3	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $A(x) \leq 0 \iff \boxed{x \in [-2;2] \cup [3;+\infty[}$.

Exercice 2 3 pts

1,5 1) $\Delta = a^2 - 16 = 0$ $\quad \boxed{a = \pm 4}$ $\quad$ 1 unique soluθ.

1,5 2) $S\left(\frac{\pm a}{2} ; \frac{16-a^2}{4}\right)$ Donc ordonnée $\geq 0 \iff 16 - a^2 \geq 0$

$\iff a^2 \leq 16$

$\iff \boxed{a \in [-4;4]}$

Exercice 3 4 pts

1) $\begin{cases} 105 = 50m + b \\ 405 = 30m + b \end{cases}$ $\begin{cases} 105 = 50m + b \\ L_2 - L_1 : 300 = -20m \end{cases}$ $\begin{cases} b = 105 - 50\times(-15) = 855 \\ m = -15 \end{cases}$

1,5 Donc $q_{demande} = -15p + 855$.

2) on résout $q_{offre} = q_{demande}$ soit $\begin{cases} 30p - 45 = q \\ -15p + 855 = q \end{cases}$ $\begin{cases} q = 30p - 45 \\ 30p - 45 = -15p + 855 \end{cases}$

1,5 $\begin{cases} q = 30p - 45 \\ 45p = 900 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} q = 555 \\ p = 20 \end{cases}}$

Graphiqt : on trace $y = -15p + 855$ et $y = 30p - 45$

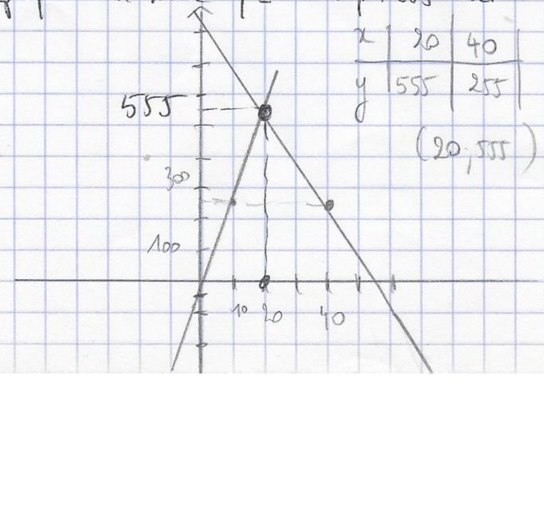
x	0	10
y	-45	255

$(0,-45)(10,255)$

x	20	40
y	555	255

$(20,555)(40,255)$

1



Exercice 4   8 points

1 1) $u_9 = u_0 + 9 \times r = 2 - 9 = \boxed{-7}$

1 $S = u_0 + \dots + u_9 = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \frac{2+(-7)}{2} = \boxed{-25}$.

2) $V_8 = V_4 \times q^4$

1,5 $64 = 4 \times q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow \boxed{q = 2}$ (ou -2)

$V_4 = V_0 \times 2^4 \Rightarrow V_0 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ $\Big\}$ $V_n = V_0\, q^n$ $\boxed{V_n = \frac{1}{4} \times 2^n}$

1 $S = V_4 \times \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1}$

$\boxed{S = 4(2^{10} - 1)}\ \boxed{= 4092}$

3) $u_2 + \dots + u_n = (n-1)\, \frac{u_2 + u_n}{2}$ $u_2 = u_0 + 2 \times 3 = 8$

$= (n-1) \times \frac{8 + 2 + 3n}{2}$ $u_n = u_0 + n \times 3 = 2 + 3n$.

1 $= (n-1) \times \frac{(10 + 3n)}{2}$

1 $(n-1)(3n+10) = 1330 \iff 3n^2 + 7n - 10 = 1330$
$\iff 3n^2 + 7n - 1340 = 0$

$\Delta = 49 + 12 \times 1340 = 16129 = 127^2$.

$n_1 = \frac{-7 - 127}{6} \leq 0$ impossible $\boxed{n_2} = \frac{-7 + 127}{6} = \boxed{20}$.

4) $S = \frac{1}{3} + 1 + 3 + \dots + 729$.

1,5 $V_0 = \frac{1}{3}$ $q = 3$. $V_n = V_0 \times 3^n$ $729 = \frac{1}{3} \times 3^n$

$2187 = 3^n$ $n = 7$

$S = V_0 + \dots + V_7$.

$S = V_0\, \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = \boxed{\frac{1}{6}(3^8 - 1) \simeq 1093,3}$.