Fonctions affines

Table des matières

1 Rappels : définition et propriétés

1.1 Définition

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut s'écrire $f(x) = ax + b$. Les réels a et b sont constants[1]
a est le **coefficient directeur** de f
b est **l'ordonnée à l'origine** de f.

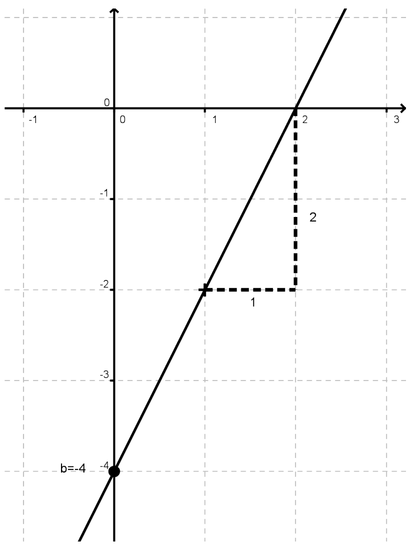
1.2 Exemples

On donne $f(x) = 2x - 4, g(x) = (1 - x)^2$ et $g(x) = x^2 - (x + 1)^2$.
- f est bien une fonction affine de coefficient directeur 2 et d'ordonnée à l'origine 4.
- g n'est pas affine. On peut développer[2] $g(x) = 1 - 2x + x^2$ et il est impossible de faire disparaître le terme en x^2.
- On développe $g(x) = x^2 - \left[x^2 + 2x + 1\right] = -2x - 1$. g est donc affine de coefficient directeur 2 et d'ordonnée à l'origine 1.

1.3 Propriété

La représentation graphique d'une **fonction affine** est une **droite** d.
On peut la représenter en choisissant deux valeurs de x.
Par exemple, pour $f(x) = 2x - 4$:

x	0	1
$2x - 4$	-4	-2



2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

2.1 Lecture graphique

- L'ordonnée à l'origine b de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est l'ordonnée à laquelle la droite coupe l'axe Oy des ordonnées.
- Le coefficient directeur a se lit de la façon suivante : partant d'un point de d, si x augmente de 1, y augmente de a.

Dans l'exemple précédent $f(x) = 2x - 4$ on retrouve bien $b = -4$ et $a = 2$.

1. Ils ne dépendent pas de x : leur écriture n'est constituée que de chiffres et d'opérations.
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2.2 Par le calcul

Pour deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, yB)$ de la droite d,

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{et} \quad b = y_A - a \times x_A$$

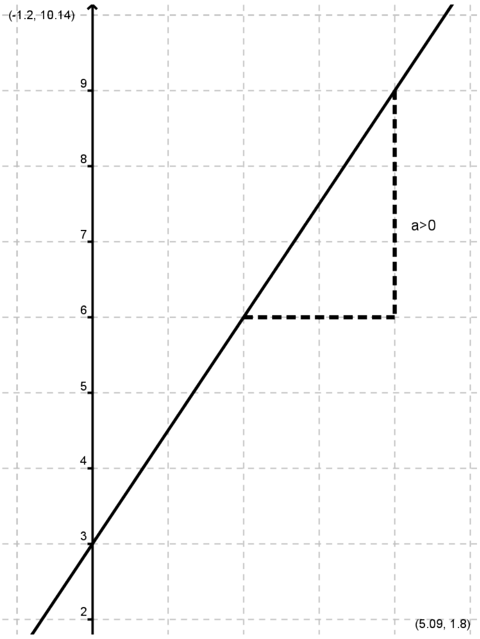
3 Sens de variation d'une fonction affine

3.1 Théorème

Soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$

Si $a > 0$

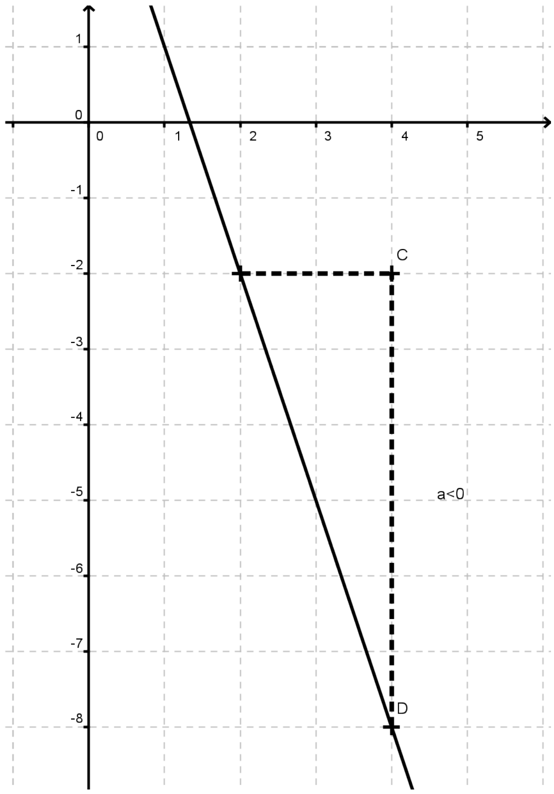
Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$

Si $a < 0$

Alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

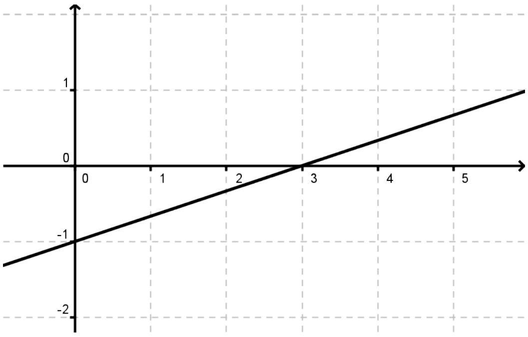


3.2 Remarques

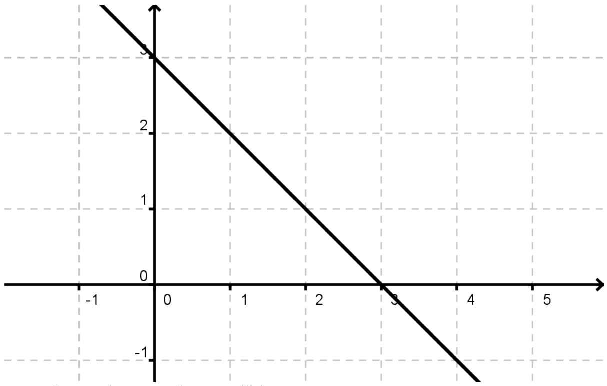
– Si $a = 0$, $f(x) = b$ et f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
– Si $b = 0$, $f(x) = ax$ et f est une fonction linéaire traduisant une situation de proportionnalité sur $\mathbb{R}$.

4 Signe de $f(x) = ax + b$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(3) = 0$.
On en déduit que $f(x) > 0$ si $x > 3$ et que $f(x) < 0$ si $x < 3$.



$f : x \mapsto -x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(3) = 0$.
On en déduit que $f(x) < 0$ si $x > 3$ et que $f(x) > 0$ si $x < 3$.



Le signe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est donc donné par deux éléments :
- Le signe de a
- La valeur $-\dfrac{b}{a}$

Théorème
Le signe de $ax + b$ se résume ainsi :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a