Correction de certains exercices de Calcul Matriciel

Cette correction vous permet de comparer vos résultats et de vous assurer de la justesse de vos raisonnements. Elle ne saurait remplacer votre présence active en séance de T.D.
Dans la majorité des cas les calculs numériques ne sont pas détaillés.
Si vous repérez des erreurs, n'hésitez pas à m'en faire part.

Exercice 5

1. Commençons par une remarque simple : si $a = 1$, les trois vecteurs sont égaux et donc liés.
   Supposons maintenant $a \neq 1$. On traduit la question en un système :
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xX_1 + yY_1 + zZ_1 = \overrightarrow{0}\,(S)$. A-t-on nécessairement $x = y = z = 0$?
   On transforme cette équation (S) en un système qui s'écrit
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& 0 \\ x+ay+z &=& 0 \\ x+y+az &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 0 \\ x+ay+z &=& 0 \\ ax+y+z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 0 \\ (a-1)y+(1-a)z &=& 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z &=& 0 \end{array}\right.$$
   Comme $a \neq 1$, on peut simplifier les lignes 2 et 3 par $1 - a$ ce qui donne :
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 0 \\ -y+z &=& 0 \\ y+(1+a)z &=& 0 \end{array}\right. (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 0 \\ y &=& z \\ (2+a)z &=& 0 \end{array}\right.$$
   On suppose, de plus, que $a \neq -2$ et la dernière ligne donne $z = 0$. Il vient ensuite $y = 0$ puis $x = 1$.
   Donc, si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, la seule solution de (S) est $(0, 0, 0)$ ce qui signifie que les trois vecteurs sont indépendants.
2. Si $a = 1$, on a déjà dit que les vecteurs étaient égaux. $X_1 - X_2 = \overrightarrow{0}$
   Si $a = -2$, on vérifie aisément que $X_1 + X_2 + X_3 = \overrightarrow{0}$

Exercice 6

1. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = U$
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y &=& 1 \\ 2x+3y &=& 0 \\ x+4y &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y &=& 1 \\ 5y &=& 2 \\ 5y &=& 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y-1 = -\dfrac{3}{5} \\ y &=& \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$
   On a donc $-\frac{3}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 = U$
2. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = V$
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y &=& 2 \\ 2x+3y &=& -1 \\ x+4y &=& 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y &=& 1 \\ 5y &=& 3 \\ 5y &=& 4 \end{array}\right.$$
   C'est impossible et V n'est pas combinaison linéaire de U et V.

Exercice 7

Notons A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des seconds membres.
On cherche alors à résoudre le système :
$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X+Y &=& A \\ X+2Y &=& B \end{array}\right. (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y &=& B-A \\ X &=& A-Y = 2A-B \end{array}\right.$$
Il vient donc $Y = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Pour que le produit XY d'une matrice X ayant n lignes et p colonnes avec une matrice Y ayant q lignes et r colonnes soit défini il faut que $p = q$.

- AB n'est pas défini,
- $BA = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$,
- $CA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$,

- BC n'est pas défini,
- $CB = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,
- A^2 n'est pas défini, A n'est pas une matrice carré,
- $B^2 = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,
- C^2 n'est pas défini, C n'est pas une matrice carré.

Je pense qu'il faut remarquer que le produit de matrice n'est pas commutatif : en général $AB \neq BA$.
Il arrive même que AB soit défini sans que BA le soit.

Exercice 9

Posons $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
Calculons MN et NM :

- $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ az & at \end{pmatrix}$
- $NM = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+at \end{pmatrix}$

Ces deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients le sont :

$$\begin{cases} ax+bz &= ax \\ ay+bt &= bx+ay \\ az &= az \\ at &= bz+at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bz &= 0 \\ bt &= bx \\ bz &= 0 \end{cases}$$

Deux possibilités :
$b = 0$ et alors toutes les matrices N commutent avec M ; M serait alors *diagonale*.
OU
$b \neq 0$ et alors il faut $t = x$ et $z = 0$. Dans ce cas, les matrices qui commutent avec M sont de la forme $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

Exercice 10

Il faut vérifier que $(AB)C = A(BC)$.
Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- $BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 11

On pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$

   Donc $\begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$

   et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$

   Donc $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$ puis $x = y = z = t = 0$

   et $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, on a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro.*
Dans le second cas, on perçoit que ce n'est pas toujours possible pour une matrice, d'être un diviseur de zéro.

Exercice 12

1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors $aI_3 + bB + cC = M$.
2. On pose les calculs et on obtient : $BC = 2I_3,\ CB = 2I_3,\ B^2 = C$ et $C^2 = 2B$.
   Considérons deux matrices M et M' de E, il existe alors a, b, c des réels et a', b', c' des réels tels que
   $aI_3 + bB + cC = M$ et $a'I_3 + b'B + c'C = M'$.
   Le produit MM' s'écrit alors $(aI_3 + bB + cC)(a'I_3 + b'B + c'C)$ qu'on peut développer en :
   $MM' = (aa'I_3 + ab'B + ac'C) + (ba'B + bb'B^2 + bc'BC) + (ca'C + cb'CB + cc'C^2)$
   On simplifie avec les égalités de la question 1 et il vient :
   $MM' = (2bc' + aa' + 2cb')I_3 + (ab' + 2cc' + a'b)B + (ac' + bb' + ca')C$
   Et MM' est bien un élément de E.

Exercice 13

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis

$A({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $({}^tA)A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 14

On obtient : $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cela vient du fait que A et B ne commutent pas ($AB \neq BA$).

Exercice 15

1. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^2A$
2. On conjecture que $A^n = 2^{n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Prouvons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n = 1$, la propriété est vraie.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = 2^{n-1}A$ alors, $A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \times 2A = 2^nA$.
   Et, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
2. $B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
3. (a) On vérifie par le calcul que $AB = B$
   (b) La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels $A - B = I_3$ et $A + 0 \times B = A$.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = A + (n-1)B$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 17

1. On calcule et on obtient $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0_3$.
2. On remarque que $3Q - 3P = A$. Donc $a = -3$ et $b = 3$.
3. La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels $A^0 = I_3 = (P + Q)$ et $A = -3P + 3Q$
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = a^n P + b^n Q$ alors
   $A^{n+1} = (aP + bQ)(a^n P + b^n Q) = a^{n+1}P^2 + ab^n PQ + ba^n QP + b^{n+1}Q^2 = a^{n+1}P + b^{n+1}Q$.
   Ce qui prouve la propriété d'après le principe de récurrence.

Exercice 18

1. $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$
   et $A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$
2. (a) On pose $B = A - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) Il vient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   puis $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   On en déduit que pour $k \geq 3$, $B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3$
   (c) On applique le binôme de Newton pour αI_3 et B^n qui commutent.
   $A^n = (\alpha I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k$
   Or, on sait que $B^k = 0_3$ pour $k \geq 3$ donc $A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} B + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$.
   On a utilisé : $B^0 = I_3, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   Il vient $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

Exercice 19

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{a}{2} & 2 - \frac{a}{2} & a + b + ac \\ 2 - \frac{b}{2} & 2 - \frac{b}{2} & a + b + bc \\ -1 - \frac{c}{2} & -1 - \frac{c}{2} & c^2 - \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$
   Donc $A^2 = O_3 \Rightarrow a = 4, b = 4$ et $c = -2$ (première colonne). On vérifie immédiatement que ces paramètres fonctionnent dans tous les coefficients.
2. (a) $P = M - I_3$ donc P est la solution obtenue à la question précédente (suprise).
   (b) i. I_3 commute avec toutes les matrices carrée de taille 3 donc on peut appliquer les identités remarquables.
   Il vient $M^2 = (I_3 + P)^2 = I_3^2 + 2I_3 P + P^2 = I_3 + 2P$, car $P^2 = O_3$
   puis $M^3 = M \times M^2 = (I_3 + P)(I_3 + 2P) = (I_3 + 3P + P^2) = I_3 + 3P$
   ii. Prouvons ce résultat par récurrence. On a déjà initialisé aux rangs 1, 2 et 3.
   Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $M^n = I + nP$,
   alors $M^{n+1} = M \times M^n = (I_3 + P)(I_3 + nP) = I_3^2 + (n+1)P + nP^2 = I_3 + (n+1)P$
   (c) On applique le binôme de Newton avec I_3 et P qui commutent :
   $M^n = (I_3 + P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = I_3 + nP$
   car $P^k = O_3$ si $k \geq 2$ et $\binom{n}{1} = n$.
3. $S_n = (I_3 + P) + (I_3 + 2P) + \cdots + (I_3 + nP) = nI_3 + (1 + 2 + \cdots + n)P = nI_3 + \dfrac{n(n+1)}{2} P$.
   On a utilisé l'indication : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 20

1. $M(a,b)^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 - b^2 & ab + b^2 + ab - b^2 \\ -ab - b^2 - ab + b^2 & -b^2 + (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2ab & 2ab \\ -2ab & a^2 - 2ab \end{pmatrix}$

2. (a) $bB = M - aI_3$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.
   On en déduit que, pour $k \geq 2$, $B^k = B^2 B^{k-2} = O_2$

   (c) On utilise le binôme de Newton avec aI_2 et bB qui commutent (I_2 commute avec tout le monde).
   $M^n = (aI_2 + bB)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k}(bB)^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k}(bB)^k = a^n I_2 + na^{n-1}bB$
   $M(a,b)^n = \begin{pmatrix} a^n + na^{n-1}b & na^{n-1}b \\ -na^{n-1}b & a^n - na^{n-1}b \end{pmatrix}$

   (d) Pour $a = n = 0$, la formule donne $I_2 = I_2$ qui est juste.

3. (a) Pour $a = 1$ et $b = 2$ on pose $M = I_2 + 2B$.

   (b) On utilise une récurrence immédiate : $X_1 = MX_0$, $X_2 = MX_1 = M^2 X_2$ etc.
   Plus rigoureusement, la formule est initialisée au rangs $n = 0$ et $n = 1$.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = M^n X_0$ alors $X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_n$.
   Ce qui prouve le résultat d'après le principe de récurrence.

   (c) $X_n = M(1,2)^n X_0 = \begin{pmatrix} 1^n + n1^{n-1}2 & n1^{n-1}2 \\ -n1^{n-1}2 & 1^n - n1^{n-1}2 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix} X_0$
   donc $\left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & (1+2n)u_0 + 2nv_0 \\ y_n & = & -2nu_0 + (1-2n)v_0 \end{array} \right.$

Exercice 21

- $\det(I_3) = 1^3 = 1$
- $\det(M_1) = -\det(I_3) = -1$ (échange des colonnes 1 et 2).
- $\det(M_2) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
- $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$
- $\det(N_1) = 0$ (colonne nulle)
- $\det(N_2) = 0$ (deux colonnes égales)
- $\det(N_3) = 0$ (les colonnes sont liées : $C_3 = 2C_1$)

Exercice 23

1. On developpe $\det(A)$ par rapport à la troisième ligne.
   Le coefficient 2 est associé à une position « $-$ »donc
   $\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
   On développe à nouveau, par rapport à la dernière ligne. Le coefficient -1 est associé à un signe « + »
   $\det(A) = 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-7) = 14$

2. On développe $\det(B)$ par rapport à la première ligne :
   $\det(B) = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) + 2 \times (-3) + 3 \times 6 = 9$

Exercice 24

1. On effectue la combinaison linéaire $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 + 2C_3$ et on développe par rapport à C_2
   $\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{6}$

2. On effectue la combinaison linéaire $L_2 \leftarrow L_1 - L_3$ et on développe par rapport à C_2
   $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10$

3. On effectue les combinaisons linéaires $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
on développe par rapport à C_2
$\det(C) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 0 = 0$

Exercice 25

1. On soustraie L_1 à toutes les autres lignes afin de faire apparaître beaucoup de zéros.
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$
On développe ensuite par rapport à C_1 et on obtient un déterminant diagonal.
Ensuite on applique le cours et $\Delta_1 = (-2)^3 = -8$.
2. On developpe successivement par L_4, C_3 et L_2 et $\Delta_2 = abcd$
3. On soustraie d'abord L_1 à toutes les autres pour développer par rapport à C_1
$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$
On soustraie maintenant L_1 aux autres et
$\Delta_3 = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix}$
On développe par rapport à L_1 et
$\Delta_3 = a(b-a)((c-b)(d-b) - (c-b)^2) = a(b-a)(c-b)(d-b-c+b) = a(b-a)(c-b)(d-c)$

Exercice 26

1. On développe Δ_n par rapport à la première colonne.
$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\Delta_{n-1} = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$
2. On utilise le résultat précédent :

$$\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \Delta_{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \Delta_{n-3} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 + \Delta_0 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Exercice 27

1. On a, d'après le cours, $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$
Or, si n impair, $(-1)^n = -1$ donc ${}^tA = -A \Longrightarrow \det(A) = -\det(A)$ et $\det(A) = 0$.
2. On a bien, $n = 3$ qui est impair, ${}^tA = -A$ et $\det(A) = -(-1 \times 0 - 4 \times 3) + 4(-1 \times (-3) - 4 \times 0) = 0$.
3. Si n est pair, $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \det(A)$ donc il n'y a aucune raison que le déterminant soit nul.
Essayons avec $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$. On a bien ${}^tA = -A$ mais $\det(A) = 1$. Le résultat est faux.

Exercice 28

1. On trouve $P^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $P^3 = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 4 \\ 24 & -7 & 10 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ Puis $P^3 - 2P^2 - 8P = -15I_3$
2. On factorise P dans l'égalité précédente et $P(P^2 - 2P - 8I_3) = -15I_3$ donc $P \times \frac{-1}{15}(P^2 - 2P - 8I_3) = I_3$
Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{-1}{15}(P^2 - 2P - 8I_3)$

Exercice 29

1. $B^2 = I_3$ donc B est inversible et $B^{-1} = B$.
2. La solution du système est $B^{-1}Y = BY$ avec $Y =^t \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   On calcule $BY =^t \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 30

1. $A^2 + 3A = I_n \Leftrightarrow A(A + 3I_n) = I_n$ donc A inversible et $A^{-1} = A + 3I_n$.

Exercice 31

1. Posons $N = I_n - A$ et $B = I_n + N + N^2 + \cdots N^p$.
   Calculons :
   $AB = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^p)$
   $AB = I_n + N + N^2 + \cdots + N^p - N - N^2 - \cdots - N^{p+1}$
   $AB = I_n + (N - N) + (N^2 - N^2) + \cdots (N^p - N^p) - N^{p+1}$ or N nilpotente d'ordre p
   donc $AB = I_n$.
   Aussi A est inversible et $A^{-1} = B = I_n + N + N^2 + \cdots + N^p$.
2. On pose $N = A - I$. Il vient $N^3 = O_3$ donc N nilpotente d'ordre 2.
   L'inverse de A est alors $I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 32

1. $(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 4z & = & a \\ y + z & = & b + a \\ 3y + 5z & = & c - 2a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a - 2y + 4z \\ y & = & b + a - z \\ 2z & = & c - 2a - 3(b + a) = -5a - 3b + c \end{array} \right.$
   $(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a - 2y + 4z = a - 2(7a/2 + 5b/2 - c/2) + 4(-5a/2 - 3b/2 + c/2) = -16a - 11b + 3c \\ y & = & b + a - (-5a/2 - 3b/2 + c/2) = 7a/2 + 5b/2 - c/2 \\ z & = & -5a/2 - 3b/2 + c/2 \end{array} \right.$
2. Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ 7/2 & 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 33

Dans cet exercice nous allons inverser les matrices en résolvant des systèmes avec un pivot de Gauss

1. En posant $X =^t \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $Y =^t \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}$ il vient :
   $AX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + bz & = & d \\ y + cz & = & e \\ z & = & f \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & c - ay - bz = c - ad + acf - bf = c - ad + (ac - b)f \\ y & = & d - cf \\ z & = & f \end{array} \right.$
   Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $X =^t \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$ et $Y =^t \begin{pmatrix} b & c & d & e \end{pmatrix}$ il vient :
   $AX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - ay & = & b \\ y - az & = & c \\ z - at & = & d \\ t & = & e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & b + ay = b + ac + a^2d + a^3e \\ y & = & c + az = c + ad + a^2e \\ z & = & d + ae \\ t & = & e \end{array} \right.$
   Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 34

1. On développe directement par rapport à la première ligne et il vient :
   $\det(A) = -1 \times (4 \times \lambda - 3 \times 4) - 1 \times (4 \times (-3) - 3 \times (-3)) = -4\lambda + 15$.
   A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \neq \frac{15}{4}$.

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & -16+4\lambda \\ -12+3\lambda & 12-3\lambda & -15+\lambda^2 \end{pmatrix}$

   (b) Pour que $A^2 = I_3$ il faut que les coefficients diagonaux soient égaux à 1 et les autres à 0. Ce qui donne $-12+3\lambda = 0$ et $-16+4\lambda = 0$ et $-15+\lambda^2 = 1$.
   L'unique solution est évidemment $\lambda = 4$.

3. « Calcul direct » signifie sans doute : en utilisant les comatrices.
   Rappel : la comatrice de A est matrice des cofacteurs. Le cofacteur A_{ij} est le déterminant de A dans lequel on a barré la ligne i et la colonne j.
   $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A) = \dfrac{1}{15-4\lambda}{}^t\begin{pmatrix} 12-3\lambda & 12-4\lambda & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15-4\lambda}\begin{pmatrix} 12-3\lambda & -1 & 1 \\ 12-4\lambda & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$
   Pour $\lambda = 4$ on retrouve $A^{-1} = A^2$.

Exercice 35

1. $\det A = 13 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\det A = ac$. Si $ac \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
3. $\det A = 0$ car la première et troisième colonne sont opposées. A n'est pas inversible.
4. B est triangulaire dont sont déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
   $\det B = 1 \times 3 \times 0 \times 1 = 0$. B n'est pas inversible (ouf).

Exercice 36

1. $S \iff AX = Y$ avec $X = ^t(x \quad y \quad z), Y = ^t(1 \quad 1 \quad 1)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \end{vmatrix} = 1 \times (1-a^3)^2$
   où l'on a successivement utilisé un pivot de Gauss pour faire apparaître des zéros sur la première colonne et développé par rapport à celle-ci.
   Le système est de Cramer si et seulement si la matrice est inversible.
   C'est-à-dire si $(1-a^3) \neq 0 \iff a \neq 1$.
3. Formules de Cramer : si le système est de Cramer, il a une unique solution donnée par :
   $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$.
   où A_k est obtenue en remplaçant la $k-$ième colonne de A par le second membre.
   Les calculs, non détaillés, prennent 1 page donc...
   $x_1 = \dfrac{-a^2}{(1+a+a)^2}$
   $x_2 = \dfrac{-a}{1+a+a^2}$
   $x_3 = \dfrac{-1}{1+a+a^2}$