Correction de l'examen Maths 3 – Décembre 2023

Exercice A (8 points)

f(x,y) = $x^2y + \frac{1}{2}y^2 - y$

1) ***1 pt pour les dérivées premières,1 pt pour la résolution, 0.5pt pour les dérivées secondes, 1.5 pts pour la nature.***

On cherche les points critiques de f

On résout $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2xy = 0 \\ f'_y(x,y) = x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \; ou \; y = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} si \; x = 0, y = 1 \\ si \; y = 0, \; x = 1 \; ou \; x = -1 \end{cases}$

Donc 3 points critiques $X_1(0,1)$ $X_2(1,0)$ $X_3(-1,0)$

On calcule les dérivées 2nde : $f''_{x^2}(x,y) = 2y$ $\quad f''_{y^2}(x,y) = 1$ $\quad f''_{xy}(x,y) = 2x$

En $X_1(0,1)$, $\delta = 2\times 1 - 0 = 2 > 0$ donc il y a un extremum **en $\boldsymbol{X_1(0,1)}$, c'est un minimum** car r>0

En $X_2(1,0)$, $\delta = 0\times 1 - 4 = -4 < 0$ donc il y a un **point col en $\boldsymbol{X_2(1,0)}$**

En $X_3(-1,0)$, $\delta = 0\times 1 - 4 = -4 < 0$ donc il y a un **point col en $\boldsymbol{X_3(-1,0)}$**

2) ***0.5 pt pour l'écriture de φ, 1pt pour l'étude et les points critiques, 1 pt pour la conclusion pour f***

On exprime x = y - 1 grâce à la contrainte. La fonction devient

$\varphi(y) = (y-1)^2y + \frac{1}{2}y^2 - y = y^3 - \frac{3}{2}y^2$

$\varphi'(y) = 3y^2 - 3y = 3y(y-1)$, il y a 2 points critiques, y = 0 et y = 1.

$\varphi''(y) = 6y - 3$

$\varphi''(0) = -3$ donc il y a un maximum en 0 pour φ

$\varphi''(1) = 3$ donc il y a un minimum en 1 pour φ

Donc (-1,0) est un max pour f et (0,1) est un min pour f.

3) ***0.75 pts pour l'écriture de la formule, 0.75 pts pour le résultat.***

f(1.01,0.98) = f(1+0.01,1-0.02)≈ $f(1,1) + 0.01f'_x(1,1) - 0.02f'_y(1,1)$

$f(1,1) = \frac{1}{2}$ $\quad f'_x(1,1) = 2$ $\quad f'_y(1,1) = 1$

Donc **f(1.01,0.98)**≈ $\boldsymbol{\frac{1}{2} + 0.01 \times 2 - 0.02 \times 1 \approx \frac{1}{2}}$

Exercice B (5 points)

1 pt pour le calcul des dérivées premières, 1.5 pts pour la résolution, 0.5pt pour les dérivées secondes, 2pts pour la nature.

On résout $\begin{cases} f'_x(x,y) = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \; ou \; x = 3 \\ y = 1 \; ou \; y = -1 \end{cases}$

Donc 4 points critiques $X_1(-2,1)$ $X_2(-2,-1)$ $X_3(3,1)X_3(3,-1)$

On calcule les dérivées secondes

$f''_{x^2}(x,y) = 12x - 6$ $\quad f''_{y^2}(x,y) = 6y$ $\quad f''_{xy}(x,y) = 0$

En $X_1(-2,1)$, δ = -30× $6 - 0 < 0$ donc il y a un **point col en $\boldsymbol{X_1(-2,1)}$**

En $X_2(-2,-1)$, δ = -30× $(-1) - 0 > 0$ donc il y a un extremum **en $\boldsymbol{X_2(-2,-1)}$, c'est un Maximum** car r<0

En $X_3(3,1)$, δ = 30× $1 - 0 > 0$ donc il y a un extremum **en $\boldsymbol{X_3(3,1)}$, c'est un minimum** car r>0

En $X_4(3,-1)$, δ = 30× $(-1) - 0 < 0$ donc il y a un **point col en $\boldsymbol{X_1(3,-1)}$**

Exercice C (5 points) ***1pt + 2pts + 2pts***

1) ax+b+$\frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+(c-b)}{x-1}$

On identifie $\frac{ax^2+(b-a)x+(c-b)}{x-1} = \frac{2x^2-x}{x-1}$, ce qui donne a = 2, b-a =-1 et b- c = 1 d'où **a = 2, b = c = 1**

2) $I = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 (2x + 1 + \frac{1}{x-1})dx = [x^2 + x + \ln(x-1)]_2^4 = \mathbf{14 + ln3}$

3) On pose u = ln(x – 1) u' = $\frac{1}{x-1}$

v' = 4x - 1 v = 2x² - x

J = $[(2x^2 - x)\ln(x-1)]_2^4 - \int_2^4 \frac{2x^2-x}{x-1}dx = 28\ln3 - I = 28\ln3 - (14 + \ln3) = \mathbf{27ln3 - 14}$

Exercice D (2 points) ***1pt par série***

1) $U_n = \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n}$

$\frac{2}{n^2}$ est le t.g. d'une série de Rieman convergente car $\alpha > 1$

$\frac{3}{n}$ est le t.g. d'une série de Rieman divergente car $\alpha = 1$

Donc la série de t.g. U_n diverge.

2) $V_n \geq 0$, on utilise le critère de Cauchy.

$\sqrt[n]{V_n} = \frac{2n+1}{5n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5} < 1$ donc la série converge.