# Calcul littéral

## Table des matières



## 1 Égalité « pour tout $x$ »et équation

### 1.1 Égalité « pour tout $x$ »

Un nombre possède plusieurs écritures.
Par exemple, 0,5 ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{2}{4}$ et $\frac{50}{100}$ sont différentes écritures d'un même nombre.
De mêmes plusieurs expressions algébriques peuvent correspondre à la même fonction.

— Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace $x$ dans les expressions

$$(x-3)(x+1)-5\ ,\ x^2-2x-8\ ,\ (x-4)(x+2)$$

on obtient le même résultat.

— On écrit : **pour tout $x$ réel,** $(x-3)(x+1)-5 = x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$.

— Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x+1)-5$. On a aussi $f(x) = x-2-x-8$ et $f(x) = (x-4)(x+2)$ **pour tout réel** $x$.

— Pour calculer des images ou des antécédents par $f$, pour étudier des propriétés de $f$ on peut utiliser l'une ou l'autre de ces expressions, **la mieux adaptée.**

### 1.2 Exemple

— On calcule facilement $f(0)$ avec $x^2-2x-8$. $f(0) = 0-0-8 = -8$

### 1.3 Équation

Les expressions $2x-$ et $x^2-4$ ne sont pas égales pour toutes valeurs de $x$.
Par exemple, pour $x = 0$; $\quad 2x-1$ prend la valeur $1$ tandis que $x^2-4$ prend la valeur $-4$.
En revanche, pour $x = 3$, on a $2x-1 = 5$ et $x^2-4 = 5$.

— Quand $x$ prend la valeur 3, on a bien l'égalité $2x-1 = x^2-4$ :
On dit que $3$ est **solution de l'équation** $2x-1 = x^2-4$.

— **Résoudre une équation** c'est chercher **toutes** les solutions de cette équation.

## 2 Développer, factoriser

**Développer** une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
**Factoriser** une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

## 2.1 Distributivité

pour tous réels $k, a, b, c, d$ :

— **simple distributivité**

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

— **double distributivité**

$$(a+b) \times (c+d) = a \times b + a \times c + a \times d + b \times d$$

## 2.2 Identités remarquables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (1) \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (2) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 & (3) \end{aligned}$$

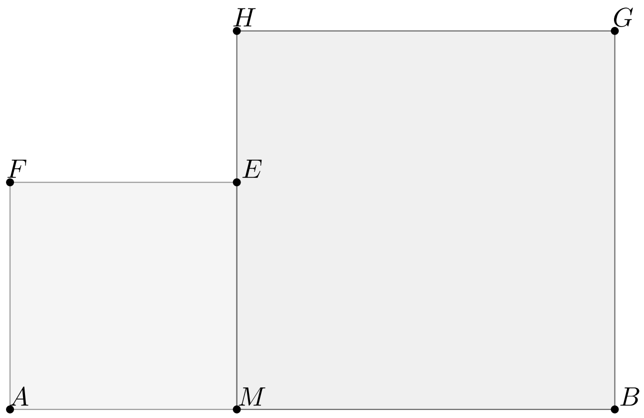
**Attention,** il ne faut pas confondre :

$$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 \quad \text{et} \quad (3+x)^2 = 9 + 6x + x^2$$

D'ailleurs, $(3+x)^2 \neq 9 + x^2$ !

## 2.3 Application : développer puis choisir la bonne forme

[allowframebreaks] **Enoncé** $AB = 8$ et $M$ appartient à $AB$. $AMEF$ et $MBGH$ sont des carrés. On pose $x = AM$ avec $x \in [0; 8]$.




[allowframebreaks]

1. Vérifier que l'aire totale est $A(x) = x^2 + (8-x)^2$
2. Démonter que, pour tout $x$ de $[0; 8]$, $A(x) = 2x^2 - 16x + 64$ puis que $A(x) = 32 + 2(x-4)^2$.
3. Calculer $A(4)$ puis montrer que $A(x) \geq A(4)$ pour tout $x$ de $[0, 8]$.
   Interpréter ce résultat en terme d'aire.

[allowframebreaks]
**Solution**

1. L'aire du carré $AMEF$ est $x^2$. La longueur $MB$ vaut $AB - MN = 8 - x$ donc l'aire de $MBGH$ est $(8-x)^2$. Il vient $A(x) = x^2 + (8-x)^2$.
2. Développons l'expression $A(x)$.
   On utilise la seconde identité remarquable et il vient, pour tout $x$ de $[0,8]$ :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + (8-x)^2 \\ &= x^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times x + x^2 \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$

   De même, pour tout $x$ de $[0;8]$,

$$\begin{aligned} 32 + 2(x-4)^2 &= 32 + 2(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$

   On retrouve la même expression donc, pour tout $x$ de $[0;4]$, $A(x) = 32 + 2(x-4)^2$.
3. Utilisons la dernière expression de $A(x)$.
   $A(4) = 32 + (4-4)^2 = 32$.
   Un carré est toujours positif donc $2(x-4)^2$ l'est.
   On en déduit que $32 + 2(x-4)^2 \geq 32$ donc que $A(x) \geq A(4)$ pour tout $x$ de $[0;8]$.
   L'aire est minimale quand $x = 4$ donc quand $M$ est milieu de $[AB]$.

# 3 Factoriser en pratique

## 3.1 Méthode

Pour factoriser une expression « à la main »on analyse sa structure et on se pose un certain nombre de questions.

**Q1 :** Est-ce une somme (ou une différence) ? De combien de facteurs ?
**Q2 :** Chaque terme est-il un produit ? Ou peut-il être écrit comme un produit ?
Quels sont les facteurs de chaque terme ? Y-a-t-il un facteur commun ?
**Q3 :** Sinon, peut-on utiliser une identité remarquable ?
**Q4 :** Sinon, peut-on factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable ?
• : Sinon on développe en espérant pouvoir factoriser ensuite.

## 3.2 Exemples

### 3.2.1 Exemple 1

— <1-> Factoriser $f(x) = (x+1)(2x-3) + 4(x+1)$.
— <2-2> **Q1** Cette expression est la somme de deux termes.
— <3-> **Q2** Chaque terme est un produit de deux facteurs.
$(x+1)$ est un facteur commun aux deux termes.
— <4-> On factorise : $f(x) = (x+1) \times [(2x-3) + 4]$.
On réduit le second facteur : $f(x) = (x+1)(2x+1)$, pour tout $x$.

### 3.2.2 Exemple 2

— <1-> Factoriser $g(x) = 16x^2 - (x+1)^2$
— <2-2> **Q1** C'est la différence de deux termes.
— <3-3> **Q2** Les termes sont des produits sans facteur commun.
— <4-> **Q3** On a une différence de deux carrés $a^2 - b^2$ : $g(x) = (4x^2) - (x+1)^2$
On utilise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
— <5-> On factorise $g(x) = (4x - (x+1))(4x + (x+1))$ et on réduit chaque facteur : $g(x) = (3x-1)(5x+1)$, pour tout $x$.

#### 3.2.3 Exemple 3

— <1-> Factoriser $h(x) = x^2 - 9 + 3(x - 3)$.
— <2-2> **Q1, Q2, Q3 :** $h(x)$ est une somme de trois termes, on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable.
— <3-> **Q4** On peut factoriser $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
— <4-> Cela fait apparaître $x - 3$ comme facteur commun : $h(x) = (x - 3)(x + 3) + 3(x - 3)$.
— <5-> On factorise : $h(x) = (x - 3) \times [(x + 3) + 3]$. On réduit : $h(x) = (x - 3)(x + 6)$, pour tout $x$.

### 3.3 Exercice

Factoriser :
— $f(x) = 4x^3 - x$.
— $g(x) = (x + 1)(x - 4) + 3x + 3$
— $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$.
— $k(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

### 3.4 Remarque

[allowframebreaks]
— Certaines expressions **ne peuvent pas se factoriser**. C'est le cas de $x^2 + 1$. Il **n'existe pas** de meilleure « factorisation »de cette expression avec des coefficients réels.
— Parfois, une meilleure factorisation **existe**, mais **les méthodes vues précédemment ne permettent pas de l'obtenir**.
Par exemple, si on part de $f(x) = x^2 - 8x + 41$ aucune des méthodes précédentes ne permet d'aboutir...
Mais, si on part d'une autre écriture de $f(x) = (x - 4)^2 - 25$, on peut factoriser en utilisant $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et écrire : $f(x) = (x - 4 - 5)(x - 4 + 5)$, qui devient $f(x) = (x - 9)(x + 1)$.
— Une méthode générale pour factoriser les expressions du second degré sera présentée en seconde et au programme de première.
Il est toujours possible d'utiliser un **logiciel de calcul formel** pour obtenir les factorisations... quand elles existent !

## 4 Résoudre algébriquement une équation

### 4.1 Equations équivalentes

Deux équations sont dites **équivalentes** quand elles sont les mêmes solutions.

- <1-> Résoudre $2(x + 3) - 4 = 5x - 1$
- <2-> $\Leftrightarrow 2x + 2 = 5x - 1$
- <3-> $\Leftrightarrow 2x - 5x = -1 - 2$
- <4-> $\Leftrightarrow -3x = -3$
- <5-> $\Leftrightarrow x = 1$.
- <6-> Cette équation a pour unique solution $x = 1$.

### 4.2 Propriété

Pour transformer une équation en une équation équivalent, on peut utiliser les propriétés suivantes :
— Développer, factoriser, réduire certains termes
— Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre de l'équation
— Multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre **non nul**.

### 4.3 Degré de l'équation

**Premier degré** Les équations du premier degré sont celles qui peuvent s'écrire sous la forme $ax + b = cx + d$ où $a, b, c, d$ sont des réels. L'exemple est une équation du premier degré.
Elles se résolvent directement en appliquant les transformations ci-dessus.
**Autres équations**
— Si après développement l'équation est équivalente à une équation du premier degré, on applique la méthode précédente.
— Sinon, on transforme l'équation pour obtenir un second membre nul et on factorise pour pouvoir appliquer l'un des résultats suivants :

### 4.4 Propriétés

- Un **produit** de facteur est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$$P \times Q = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

- Un **quotient** de facteur est nul si le numérateur est nul et le dénominateur est non nul.

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P = 0 \text{ et } Q \neq 0.$$

### 4.5 Exercice

Résoudre graphiquement puis par le calcul :

1. $(E_1) \quad 3x^2 + 3x - 2 = -x - 2$
2. $(E_2) \quad (x-1)^2 + 3x = x^2 - 1$