36, 37, 38, 39, 40 L2 S4 Calcul Matriciel.

Séance 6

36

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

DVLP % C1

$$\Delta_1 = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 = -8.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = d\, c \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abcd$$

DVLP % L_4 DVLP % C_3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \text{DULP \% } C_1$$

$$\Delta_3 = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix}$$

DULP % C_1

$$\Delta_3 = a(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 = a(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ 0 & d-c \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

37

1)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_1$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} a-1 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

DVLP % L_1

2) A inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $(a+3)(a-1)^3 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \neq -3$ et $a \neq 1$.

$\square$

38 1) n impair, $n > 2$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si ${}^tA = -A$ (*), on utilise, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det({}^tM) = \det(M)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \det({}^tA) = \det(A) \\ (*) \Rightarrow \det({}^tA) = (-1)^n \det(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \det A = (-1)^n \det(A).$$

Soit $\det(A) \neq 0$ on a alors $1 = (-1)^n$ mais ... n est impair

aussi $(-1)^n = -1$. et $1 = -1$ impossible

La seule possibilité c'est $\det A = 0$.

2) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{DVLP C1}}{=} -(-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

${}^tA = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -A$

$= 1(1\times 0 - 3\times 4) + 4(1\times 3 - 0\times(-4))$

$= -12 + 12 = 0.$ La prop. est vérifiée sur cet exemple.

conclusion

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ 3 est impair, $3 > 2$.

hypothèses

3) Si est pair ... le raisonnement échoue à $\det A = (-1)^4 \det A$

$\Leftrightarrow \det A = \det A.$

pas de contradiction

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1.$ La matrice est inversible.

39

1) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ DVLP % L_1

$\det A = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = -\left[4(\lambda-3) - 3\right] = -(4\lambda - 15) = 15 - 4\lambda$

A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow 15 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{15}{4}$.

2) a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & \lambda \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & 4\lambda-16 \\ 3\lambda-12 & 12-3\lambda & -15+\lambda^2 \end{bmatrix}$

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-\lambda = 0 \\ 4\lambda - 16 = 0 \\ 3\lambda - 12 = 0 \\ 12 - 3\lambda = 0 \\ -15 + \lambda^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 4$

$A = I_3 \Leftrightarrow \lambda = 4$

3. Inverse "directement" = en utilisant les comatrices

Comatrice = matrice des cofacteurs. A_{ij}

A_{ij} : det A où ligne i et col j sont barrés.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}\mathrm{com}\,A$$

$$\mathrm{com}\,A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{com}\,A = \begin{bmatrix} 12-3\lambda & -(4\lambda-12) & -3 \\ -(\lambda-3) & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 12-3\lambda & 12-4\lambda & -3 \\ 3-\lambda & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}\mathrm{com}\,A = \frac{1}{15-4\lambda}\begin{pmatrix} 12-3\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 12-4\lambda & 3 & 4 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \square.$$

Si $\lambda \neq \frac{15}{4}$

$A^2 = I_3 \iff A \cdot A = I_3 \iff A = A^{-1}. \iff \underline{\lambda = 4}.$

$A^{-1} = A \iff \begin{cases} 12 - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{3 - \lambda}{15 - 4\lambda} = 1 \\ \underline{\text{et idem}} \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{\lambda = 4} \\ \lambda = 4 \\ \text{etc} \end{cases}$

$\lambda \neq \dfrac{15}{4}$

$$\boxed{A^2 = I_3 \iff \lambda = 4}$$

40

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 10 + 3 = 13 \neq 0 \quad A$ inversible

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ $\quad \det A \neq 0 \iff ac \neq 0 \iff a \neq 0$ et $c \neq 0$

et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

3)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$C_3 = -C_1$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

DVLP % C_3

A n'est pas inversible

4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 1 \times 3 \times 0 \times 1 \neq 0.$

A triangulaire

A n'est pas inversible