Les nombres réels

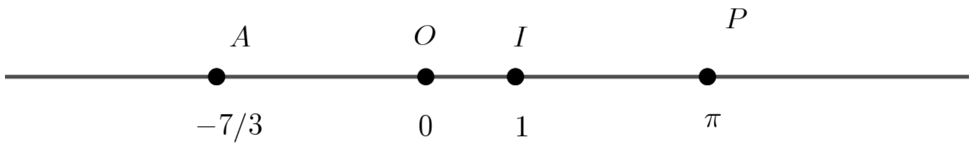
Table des matières

1 Les ensembles de nombres

Propriété 1. *Admise.* On peut associer à tout point M d'une droite graduée $\mathcal{D}$ un nombre appelé *abscisse* de M

Définition 1. L'ensemble des abscisses des points de $\mathcal{D}$ est appelé *ensemble des réels.* Il est noté $\mathbb{R}$.

Exemple. L'absisse du point O est 0, celle de I est 1, celle de A est $-\dfrac{7}{3}$ et celle de P est π.

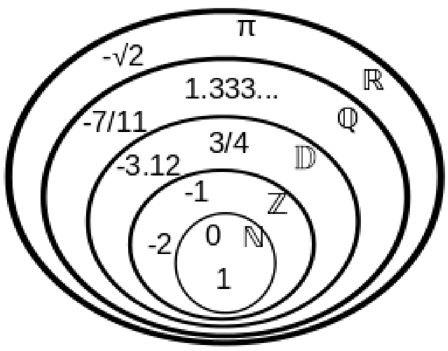


Définition 2. Durant les années antérieures on a construit différents ensembles de nombres *imbriqués.* $\mathbb{R}$ les contient tous.

Ensemble de nombres	**Notation**	**Éléments et exemples**
Entiers naturels	$\mathbb{N}$	0 ; 1 ; 3 etc.
Entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	-10 ; -5 ; -1 ; 0 ; 1 ; 23
Décimaux	$\mathbb{D}$	$-1/2$; 0.5 ; $12,345$; 1
Rationnels	$\mathbb{Q}$	$\left\{\dfrac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0\right\}$
Réels	$\mathbb{R}$	π ; $\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{3}$

Propriété 2. Les ensembles de nombres sont contenus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Propriété 3. Les nombres rationnels de l'ensemble $\mathbb{Q}$ peuvent s'écrire $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.
Ils admettent une *écriture décimale* qui se termine ou qui se répète.

Exemple. *Nombres rationnels :* $\dfrac{1}{3} = 0,3333\underline{3}$ $\qquad \dfrac{1}{10} = 0,1$ $\qquad \dfrac{324}{11} = 29,45\underline{45}$
On souligne les chiffres qui se répètent.

Remarque. On étudiera plus tard l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux. Ce sont les nombres qui admettent une écriture décimale *qui se termine* comme $\dfrac{246}{128} = 1,921875$.

Méthode 1. Démontrer qu'un nombre n'est pas un décimal.

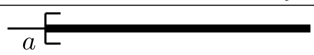
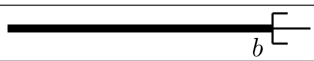
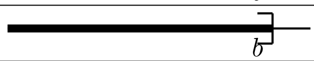
Méthode 2. Démontrer qu'un nombre n'est pas un rationnel.

Remarque. L'un des objectifs de cette année est de répondre à la question générale : ce nombre x est il dans cet ensemble E ?

2 Intervalles

Définition 3. Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est noté $[\ a\ ;\ b\ ]$. C'est l'intervalle des nombres compris entre a et b, bornes incluses.

Il existe plusieurs sortes d'intervalles, selon leurs bornes :

Intervalle	Ensemble des réels x tels que ...	Représentation graphique
$[a\ ;\ b]$ fermé	$a \leq x \leq b$	
$[a\ ;\ b[$ fermé à gauche, ouvert à droite	$a \leq x < b$	
$]a\ ;\ b]$ ouvert à gauche, fermé à droite	$a \leq x < b$	
$]a\ ;\ b[$ ouvert à gauche, ouvert à droite	$a < x < b$	
$[a\ ;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a\ ;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$	
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leq b$	

Le symbole ∞ , se lit « infini » . Ce n'est pas un nombre réel.
Du côté de l'infini, le crochet est toujours tourné vers l'extérieur : $]-\infty;3]$ ou $]4;+\infty[$.

Méthode 3. Représenter un intervalle sur une droite graduée

Définition 4. Soient I et J deux intervalles.

1. L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé l'intersection de I et J.
   Cet ensemble est noté $I \cap J$.
2. L'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J est appelé la réunion de I et J.
   Cet ensemble est noté $I \cup J$.

Exemple. Intersections et réunions d'intervalles :

1. $[4\ ;\ 5] \cap [2\ ;\ 3] = \emptyset$
2. $[2\ ;\ 5] \cap [2\ ;\ 3] = [2\ ;\ 3]$
3. $[4\ ;\ 7] \cap [6\ ;\ 8] = [6\ ;\ 7]$
4. $[4\ ;\ 7] \cup [6\ ;\ 8] = [4\ ;\ 8]$

Méthode 4. Déterminer l'intersection, la réunion de deux intervalles

Propriété 4. Résolution d'équations affines
On considère une *expression affine* : $ax+b$ où a et b sont deux nombres réels **avec** $a \neq 0$.
L'*équation* $ax+b=0$ admet pour unique *solution* $x = -\dfrac{b}{a}$.

Méthode 5. Résolution d'inéquations affines
Toutes les inéquations affines se résolvent de la même manière, en remplaçant *l'inégalité* par le symbole correspondant.
Résolvons $ax+b>0$:

$$ax+b>0 \Leftrightarrow ax > -b \qquad (I)$$

— Si $a>0$, $(I) \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$.
  Les solutions sont $\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$
— Si $a<0$, $(I) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$.
  Les solutions sont $\left]-\infty;\dfrac{b}{a}\right[$

Propriété 5. Signe d'une expression affine : le tableau de signes

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Lecture du tableau : par exemple, celui de gauche.
Le symbole + en bas signifie que les nombres x entre $-\infty$ et $-\dfrac{b}{a}$ ont une valeur *positive* par $x \mapsto ax+b$.

Méthode 6. Résoudre une inéquation

3 Encadrer un réel par deux nombres

Définition 5. On dit que les nombres réels a et b *encadrent* le nombre réels x si :

$$a < x < b$$

$b-a$ est *l'amplitude* de cet encadrement.

Théorème 6. *Admis*
Tout nombre réel x peut être encadré par deux nombres décimaux avec une amplitude choisie.

Exemple.
- $1,2 < \sqrt{2} < 2$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $0,8$
- $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, encadrement d'amplitude $0,1$ (au dixième)
- $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, encadrement d'amplitude $0,01$ (au centième)

Vocabulaire :
- $1,41$ est une *valeur approchée par défaut*,
- $\sqrt{2}$ et la *valeur exacte*,
- $1,42$ est une *valeur approchée excès.*

Méthode 7. Trouver des valeurs approchées d'un nombre réel.

4 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 6. On appelle *valeur absolue* d'un nombre réel a, le nombré noté $|a|$ et défini par :

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0, \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Exemple. $|3| = 3$ car $3 > 0$, $\quad |-2| = -(-2) = 2$ car $-2 < 0$.

Propriété 7. *Admise.*

- Pour tout nombre réel a, $|a| \geq 0$,
- a et $-a$ ont la même valeur absolue,
- $|a - b| = |b - a|$; $\quad |a \times b| = |a| \times |b|$ et $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Définition 7. Distance entre deux nombres réels.
La *distance* entre les réels a et b est $|b - a|$.
C'est ce qu'on appelle souvent *l'écart* entre ces nombres

Exemple. La distance entre $3,5$ et 10 est $|10 - 3,5| = |6,5| = 6,5$

Remarque. On réalise **d'abord** les additions et soustractions dans les valeurs absolues avant d'essayer de les enlever.

Méthode 8. Résoudre des inéquations et des équations comportant des valeurs absolues.