## Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3 - 2y^2$

1. Déterminer $\lim\limits_{y\to-\infty} f(0,y)$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(0,y)$
2. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
3. Déterminer les points critiques de $f$. On en trouvera 2.
4. En chaque point critique, déterminer si $f$ présente un extremum local. Si oui, préciser sa nature et sa valeur.
5. Les extrema trouvés sont-ils globaux ?

---

1. $f(0,y) = y^3 - 2y^2$ est un polynôme en une variable donc ses limites à l'infini sont celles de son terme de plus haut degré.
   - $\lim\limits_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} y^3 = -\infty$
   - $\lim\limits_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim\limits_{y\to+\infty} y^3 = +\infty$
2. $f$ est un polynôme défini sur $\mathbb{R}^2$ qui admet des dérivées partielles à tous les ordres sur $\mathbb{R}^2$. $f$ vérifie le théorème de Schwartz car c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y^2 - 4y$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 4$
3. Les points critiques de $f$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

   $f$ a donc deux points critiques sur $\mathbb{R}^2$ : $O(0,0)$ et $A(-2;2)$.
4. En $O(0;0)$. $r = 2, s = 2, t = -4$ donc $\delta = rt - s^2 = -12 < 0$. L'origine est un point col de $f$.
   En $A(-2;2)$. $r = 2, s = 2, t = 8$ donc $\delta = rt - s^2 = 12 > 0$ et $r > 0$. $f$ admet un minimum local en $A$.
5. Les limites obtenues en 1. montrent que $f$ n'a pas de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
   En effet, $\lim\limits_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} y^3 = -\infty$.
   Il existe donc un point $B$ sur l'axe des abscisses où $f(B) < f(A)$.

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + 5y^3$

1. Justifier que $f$ est homogène à l'aide de la définition.
2. Vérifier le résultat précédent à l'aide du théorème d'Euler.
3. Après en avoir justifier l'existance, calculer les élasticités partielles de $f$ en $A(1;0)$.
4. Calculer une valeur approchée de $f(0.98;1.03)$.

---

1. $\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0,$

   $$f(tx,ty) = 2(tx)^3 - 4(tx)^2(ty) + 2(tx)(ty)^2 + 5(ty)^3 = t^3 \times (2x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + 5y^3) = t^3 \times f(x,y)$$

   Donc $f$ est homogène de degré 3.
2. $f$ est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}^2$ et
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 8xy + 2y^2$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 + 4xy + 15y^2$
   donc
   $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x \times (6x^2 - 8xy + 2y^2) + y \times (-4x^2 + 4xy + 15y^2)$
   $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^3 - 8x^2y + 2xy^2 - 4x^2y + 4xy^2 + 15y^3$
   $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^3 - 12x^2y + 6xy^2 + 15y^3 = 3f(x,y)$
   Donc $f$ est homogène de degré 3 d'après le théorème d'Euler.
3. $f$ est de classe $(C)_1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $f(1,0) = 2 \neq 0$ donc $f$ admet des élasticités partielles en $A(1,0)$.
   $e_x^f(1,0) = \dfrac{x_A}{f(A)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \dfrac{1}{2} \times 6 = 3$
   $e_y^f(1,0) = \dfrac{y_A}{f(A)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{0}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$
4. On peut utiliser l'approximation affine en $B(1,1)$ pour approcher l'image en $C(0.98;1.03)$ car $f$ est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}^2$ et
   $f(0.98, 1.03) \approx f(1,1) - 0.02 \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 0.03\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$
   $f(0.98, 1.03) \approx 5 - 0.02 \times 0 + 0.03 \times 15 = 5.45$
   La valeur exacte est $f(0.98, 1.03) = 5.468535$ et l'écart est de $0.33\%$.