Statistiques

Table des matières

1 Effectifs et fréquences

1.1 Définition

Dans une série statistique,
- l'effectif d'une valeur est le nombre de données correspondant à cette valeur ;
- La fréquence d'une valeur est $f = \dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$.

1.2 Exemple

En lançant dix fois un dé, on obtient : 2 ; 2 ; **6** ; **6** ; 3 ; 4 4 5 3 6.
L'effectif total est 10. La valeur **6** apparaît 3 fois : son effectif est 3, sa fréquence est $\dfrac{3}{10} = 0,3$

Valeur x_i	2	3	4	5	6
Effectif n_i	1	2	3	1	3
Fréquence f_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Quand on cherche le nombre de valeurs de la série inférieures ou égales à une valeur donnée, on est amené à ajouter (cumuler) les effectifs :

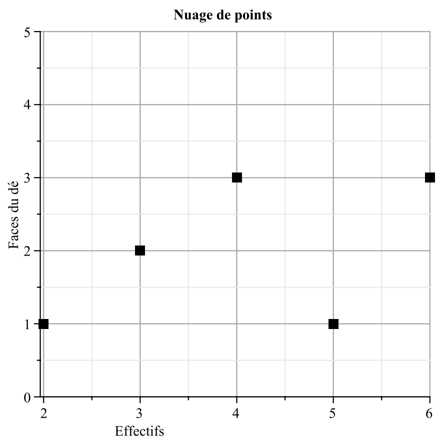
Valeur x_i	2	3	4	5	6
Effectif n_i	1	2	3	1	3
Effectif cumulé	1	1+2=3	3+3=6	6+1=7	7+3=10

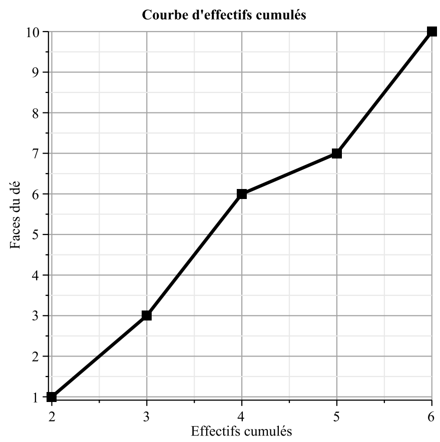
On retrouve en dernière case l'effectif total : 10.
Il y a 6 valeurs de la série inférieures ou égales à 4.

2 Graphiques

Le choix d'un graphique dépend du type de série et de ce que l'on veut montrer :
- Un diagramme en bâtons (pour des valeurs discrètes ou qualitatives) et un histogrammes (pour des valeurs numériques regroupées en classes) représentent les effectifs ou fréquences pour chaque valeur ou classe ;
- Un diagramme circulaire montre la part de chaque valeur ou classe.

On utilisera aussi les graphiques suivants (relatifs à l'exemple précédent).





3 Indicateurs de position

3.1 Moyenne

x est la série statistique résumée dans le tableau ci-dessous :
La **moyenne** $\overline{x}$ d'une série statistique est

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_k \times x_k}{n_1 + \cdots + n_k} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots f_k \times x_k$$

On peut aussi retenir : $\overline{x} = \dfrac{\text{somme des (effectifs } \times \text{ valeurs)}}{\text{somme des effectifs}}$

Valeurs	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Effectifs	n_1	n_2	$\dots$	n_k
Fréquences	f_1	f_2	$\dots$	f_k

3.2 Médiane

La **médiane** Me d'une série statistique de n valeurs **ordonnées** est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 50% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

x_1 x_2 $\dots$ $\dots$ 50 % des valeurs	$\dots$ $\dots$ x_n 50 % des valeurs
Me	

3.3 Remarques

1. La médiane ne dépend que de l'ordre des valeurs... il est indispensable de les avoir classées et ordonnées.
2. La médiane dépend très peu des valeurs extrêmes. Ce n'est pas le cas de la moyenne qui est fortement influencée par les valeurs extrêmes.

3.4 Exemple

Enoncé

Ce tableau donne les salaires mensuels des 185 employés d'une entreprise.

1. Déterminer le salaire moyen de cette entreprise
2. Déterminer le salaire médian.
3. Peut-on affirmer ici que la moitié des salariés gagnent moins que la moyenne ?

Salaire brut	1405	1480	1554	1870	2739	4215
Effectifs	40	15	81	35	9	5
Effectifs cumulés	40	55	136	171	180	185

Solution

1. $\overline{x} = \dfrac{40 \times 1405 + 15 \times 1480 + \cdots}{40 + 15 + \cdots} = \dfrac{315451}{185} \approx 1705,14$ €
2. Le salaire médian est situé « au milieu »donc à la 93^{e} valeur. La 93^{e} valeur est 1554 € donc $Me =$ 1554 €.
3. Oui, car la moitié des salariés gagnent moins que la médiane (1554 €) et celle-ci est inférieure à la moyenne.

4 Indicateurs de dispersion

4.1 Etendue

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre les valeurs maximales et minimale.

4.2 Variance et écart-type

La **variance** d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
L'écart-type d'une série statistique est la racine carrée de la variance.

Propriété : l'écart-type est un **indicateur de dispersion** d'une série statistique.
Plus il est élevé, plus la série est dispersée.

Notation : La variance est notée V et l'écart-type σ (se lit, sigma).
Exemple
On considère la série donnée dans le tableau ci-dessous. On a ajouté les lignes permettant le calcul de la variance.

Valeurs	0	1	3	5
Effectifs	2	4	2	2
Écarts à la moyenne	-2	-1	1	3
Carré de l'écart à la moyenne	4	1	1	9

On calcule la moyenne $\overline{x} = \dfrac{2 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times 3 + 2 \times 5}{4 + 3 + 1 + 2} = 2$

La troisième ligne du tableau est obtenue en calculant les écarts entre les valeurs et la moyenne. Par exemple pour $x = 0$, l'écart est $0 - 2 = -2$.
La quatrième ligne contient les carrés de la troisième.
On calcule ensuite la moyenne des carrés des écarts à la moyenne :
$V(x) = \dfrac{2 \times 4 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 9}{10} = 3.2$
L'écart-type $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{3.8} \approx 1.79$

Formule simplifiée de l'écart-type
Il est possible de simplifier cette démarche à l'aide de la formule suivante :

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Pour les calculs à la main, cela permet d'éviter de calculer les écarts à la moyenne puis leurs carrés.
On doit cependant toujours ajouter une ligne au tableau, pour les carrés de x.

4.3 Les Quartiles

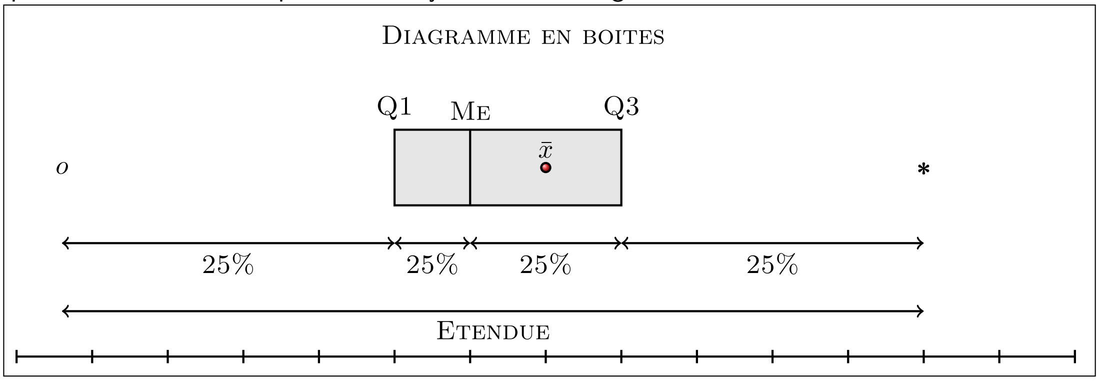
Les **quartiles** découpent la série en quatre parties ordonnées et de même effectif.
Q_1 est le troisième. Q_1 est le plus petite valeur de la série telle que 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
Q_3 est le **troisième quartile**. Q_3 est le plus petite valeur de la série telle que 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
L'**écart inter-quartile** est la différence $Q_3 - Q_1$.

Remarque

La médiane est donc le deuxième quartile.

4.4 Diagramme en boîtes

On représente toutes ces informations dans un diagramme particulier.
L'axe des abscisses représentes les valeurs ordonnées. On ne représente que les valeurs minimales et maximales, les quartiles, la médiane et, parfois, la moyenne. Le rectangle contient 50 % des valeurs.



4.5 Exemple

Énoncé

1. Déterminer l'étendue et les quartiles de la série de l'exemple 3.4.
2. Représenter l'étendue, les quartiles et la médiane sur un même diagramme.

Solution

1. L'étendue est $4215 - 1405 = 2810$ €.
   Il y a 185 données. Or $185 \times \dfrac{1}{4} = 46.25$ et $185 \times \dfrac{3}{4} = 138.75$ Le premier quartile est donc la 47e valeur de la série ordonnée et le troisième quartile la 139e valeur.
   $Q_1 = 1480$€ et $Q_3 = 1870$€. L'écart inter-quartile est 390 €.
2. Diagramme en boites
   Remarques : Cette série est **asymétrique.** L'écart-inter-quartile est sept fois plus petit que l'étendue (très sensible au plus gros salaire).