Exercice 5

1. Commençons par une remarque simple : si $a=1$, les trois vecteurs sont égaux et donc liés.
   Supposons maintenant $a \neq 1$. On traduit la question en un système :
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xX_1 + yY_1 + zZ_1 = \overrightarrow{0}\,(S)$. A-t-on nécessairement $x=y=z=0$?
   On transforme cette équation (S) en un système qui s'écrit
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 0 \\ x+ay+z & = & 0 \\ x+y+az & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ x+ay+z & = & 0 \\ ax+y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ (a-1)y+(1-a)z & = & 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z & = & 0 \end{array}\right.$$
   Comme $a \neq 1$, on peut simplifier les lignes 2 et 3 par $1-a$ ce qui donne :
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ y+(1+a)z & = & 0 \end{array}\right. (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az & = & 0 \\ y & = & z \\ (2+a)z & = & 0 \end{array}\right.$$
   On suppose, de plus, que $a \neq -2$ et la dernière ligne donne $z=0$. Il vient ensuite $y=0$ puis $x=1$.
   Donc, si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, la seule solution de (S) est $(0,0,0)$ ce qui signifie que les trois vecteurs sont indépendants.
2. Si $a=1$, on a déjà dit que les vecteurs étaient égaux. $X_1 - X_2 = \overrightarrow{0}$
   Si $a=-2$, on vérifie aisément que $X_1 + X_2 + X_3 = \overrightarrow{0}$

Exercice 6

1. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = U$
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 1 \\ 2x+3y & = & 0 \\ x+4y & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 1 \\ 5y & = & 2 \\ 5y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y-1 = -\dfrac{3}{5} \\ y & = & \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$
   On a donc $-\frac{3}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 = U$
2. On cherche à résoudre le système (S) : $xX_1 + yX_2 = V$
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 2 \\ 2x+3y & = & -1 \\ x+4y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 1 \\ 5y & = & 3 \\ 5y & = & 4 \end{array}\right.$$
   C'est impossible et V n'est pas combinaison linéaire de U et V.

Exercice 7

Notons A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des seconds membres.
On cherche alors à résoudre le système :
$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X+Y & = & A \\ X+2Y & = & B \end{array}\right. (S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y & = & B-A \\ X & = & A-Y = 2A-B \end{array}\right.$$
Il vient donc $Y = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Pour que le produit XY d'une matrice X ayant n lignes et p colonnes avec une matrice Y ayant q lignes et r colonnes soit défini il faut que $p=q$.

- AB n'est pas défini,
- $BA = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$,
- $CA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$,
- BC n'est pas défini,
- $CB = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,
- A^2 n'est pas défini, A n'est pas une matrice carré,
- $B^2 = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

- C^2 n'est pas défini, C n'est pas une matrice carré.

Je pense qu'il faut remarquer que le produit de matrice n'est pas commutatif : en général $AB \neq BA$.
Il arrive même que AB soit défini sans que BA le soit.

Exercice 9

Posons $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
Calculons MN et NM :

- $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ az & at \end{pmatrix}$
- $NM = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+at \end{pmatrix}$

Ces deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients le sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+bz & = & ax \\ ay+bt & = & bx+ay \\ az & = & az \\ at & = & bz+at \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} bz & = & 0 \\ bt & = & bx \\ bz & = & 0 \end{array} \right.$$

Deux possibilités :
$b = 0$ et alors toutes les matrices N commutent avec M ; M serait alors *diagonale*.
OU
$b \neq 0$ et alors il faut $t = x$ et $z = 0$. Dans ce cas, les matrices qui commutent avec M sont de la forme $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

Exercice 10

Il faut vérifier que $(AB)C = A(BC)$.
Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- $BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 11

On pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$

   Donc $\begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$

   et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$

   Donc $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$ puis $x = y = z = t = 0$

   et $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, on a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro*.
Dans le second cas, on perçoit que ce n'est pas toujours possible pour une matrice, d'être un diviseur de zéro.

Exercice 12

1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors $aI_3 + bB + cC = M$.

2. On pose les calculs et on obtient : $BC = 2I_3,\ CB = 2I_3,\ B^2 = C$ et $C^2 = 2B$.
   Considérons deux matrices M et M' de E, il existe alors a, b, c des réels et a', b', c' des réels tels que $aI_3 + bB + cC = M$ et $a'I_3 + b'B + c'C = M'$.
   Le produit MM' s'écrit alors $(aI_3 + bB + cC)(a'I_3 + b'B + c'C)$ qu'on peut développer en :
   $MM' = (aa'I_3 + ab'B + ac'C) + (ba'B + bb'B^2 + bc'BC) + (ca'C + cb'CB + cc'C^2)$
   On simplifie avec les égalités de la question 1 et il vient :
   $MM' = (2bc' + aa' + 2cb')I_3 + (ab' + 2cc' + a'b)B + (ac' + bb' + ca')C$
   Et MM' est bien un élément de E.

Exercice 13

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis

$$A({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } ({}^tA)A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 14

On obtient : $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cela vient du fait que A et B ne commutent pas ($AB \neq BA$).

Exercice 15

1. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^2A$
2. On conjecture que $A^n = 2^{n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Prouvons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n = 1$, la propriété est vraie.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = 2^{n-1}A$ alors, $A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \times 2A = 2^nA$.
   Et, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
2. $B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
3. (a) On vérifie par le calcul que $AB = B$
   (b) La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels $A - B = I_3$ et $A + 0 \times B = A$.
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = A + (n-1)B$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 17

1. On calcule et on obtient $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0_3$.
2. On remarque que $3Q - 3P = A$. Donc $a = -3$ et $b = 3$.
3. La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 pour lesquels $A^0 = I_3 = (P + Q)$ et $A = -3P + 3Q$
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = a^nP + b^nQ$ alors
   $A^{n+1} = (aP + bQ)(a^nP + b^nQ) = a^{n+1}P^2 + ab^nPQ + ba^nQP + b^{n+1}Q^2 = a^{n+1}P + b^{n+1}Q$.
   Ce qui prouve la propriété d'après le principe de récurrence.

Exercice 18

1. $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$

   et $A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$

2. (a) On pose $B = A - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Il vient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   puis $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On en déduit que pour $k \geq 3$, $B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3$

   (c) On applique le binôme de Newton pour αI_3 et B^n qui commutent.
   $A^n = (\alpha I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k$

   Or, on sait que $B^k = 0_3$ pour $k \geq 3$ donc $A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} B + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$.

   On a utilisé : $B^0 = I_3$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

   Il vient $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

Exercice 19

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{a}{2} & 2 - \frac{a}{2} & a + b + ac \\ 2 - \frac{b}{2} & 2 - \frac{b}{2} & a + b + bc \\ -1 - \frac{c}{2} & -1 - \frac{c}{2} & c^2 - \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$

   Donc $A^2 = O_3 \Rightarrow a = 4, b = 4$ et $c = -2$ (première colonne). On vérifie immédiatement que ces paramètres fonctionnent dans tous les coefficients.

2. (a) $P = M - I_3$ donc P est la solution obtenue à la question précédente (suprise).

   (b) i. I_3 commute avec toutes les matrices carrée de taille 3 donc on peut appliquer les identités remarquables.
   Il vient $M^2 = (I_3 + P)^2 = I_3^2 + 2I_3P + P^2 = I_3 + 2P$, car $P^2 = O_3$
   puis $M^3 = M \times M^2 = (I_3 + P)(I_3 + 2P) = (I_3 + 3P + P^2) = I_3 + 3P$

   ii. Prouvons ce résultat par récurrence. On a déjà initialisé aux rangs 1, 2 et 3.
   Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $M^n = I + nP$,
   alors $M^{n+1} = M \times M^n = (I_3 + P)(I_3 + nP) = I_3^2 + (n+1)P + nP^2 = I_3 + (n+1)P$

   (c) On applique le binôme de Newton avec I_3 et P qui commutent :
   $M^n = (I_3 + P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = I_3 + nP$
   car $P^k = O_3$ si $k \geq 2$ et $\binom{n}{1} = n$.

3. $S_n = (I_3 + P) + (I_3 + 2P) + \cdots + (I_3 + nP) = nI_3 + (1 + 2 + \cdots + n)P = nI_3 + \dfrac{n(n+1)}{2} P$.

   On a utilisé l'indication : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 20

1. $M(a,b)^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 - b^2 & ab + b^2 + ab - b^2 \\ -ab - b^2 - ab + b^2 & -b^2 + (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2ab & 2ab \\ -2ab & a^2 - 2ab \end{pmatrix}$

2. (a) $bB = M - aI_3$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

   On en déduit que, pour $k \geq 2$, $B^k = B^2 B^{k-2} = O_2$

(c) On utilise le binôme de Newton avec aI_2 et bB qui commutent (I_2 commute avec tout le monde).
$M^n = (aI_2 + bB)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k}(bB)^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k}(bB)^k = a^n I_2 + na^{n-1}bB$
$M(a,b)^n = \begin{pmatrix} a^n + na^{n-1}b & na^{n-1}b \\ -na^{n-1}b & a^n - na^{n-1}b \end{pmatrix}$

(d) Pour $a = n = 0$, la formule donne $I_2 = I_2$ qui est juste.

3. (a) Pour $a = 1$ et $b = 2$ on pose $M = I_2 + 2B$.

(b) On utilise une récurrence immédiate : $X_1 = MX_0$, $X_2 = MX_1 = M^2X_2$ etc.
Plus rigoureusement, la formule est initialisée au rangs $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = M^n X_0$ alors $X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1}X_n$.
Ce qui prouve le résultat d'après le principe de récurrence.

(c) $X_n = M(1,2)^n X_0 = \begin{pmatrix} 1^n + n1^{n-1}2 & n1^{n-1}2 \\ -n1^{n-1}2 & 1^n - n1^{n-1}2 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix} X_0$

donc $\begin{cases} x_n = (1+2n)u_0 + 2nv_0 \\ y_n = -2nu_0 + (1-2n)v_0 \end{cases}$

Exercice 21

- $\det(I_3) = 1^3 = 1$
- $\det(M_1) = -\det(I_3) = -1$ (échange des colonnes 1 et 2).
- $\det(M_2) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
- $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$
- $\det(N_1) = 0$ (colonne nulle)
- $\det(N_2) = 0$ (deux colonnes égales)
- $\det(N_3) = 0$ (les colonnes sont liées : $C_3 = 2C_1$)