

Examen – Maths 2 – FaSEST
Sections 1 et 3 - Mai 2024 - Durée 2h

*Documents interdits. Calculatrices de type « collège » autorisées. Les réponses doivent être justifiées.
Le sujet comporte 3 exercices. De nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment.*

Exercice 1 (7,5 points)

Soit f définie $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Interpréter géométriquement.
- 3) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- b) Montrer que $f(x) = x+1 + \frac{4}{x-1}$
- c) En déduire que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ (justifier).
- 4) Démontrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
- 5) Dresser le tableau de variations de f .
- 6) BONUS : tracer l'allure de la courbe (grâce aux asymptotes !)

Exercice 2 (5,5 points)

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x - 1$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Calculer la dérivée de f .
- 3) Dresser le tableau de variation (complet !) de f .
- 4) Démontrer que f est positive sur \mathbb{R} .
- 5) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 2]$
- 6) Etudier la convexité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 3 (7 points)

Les parties sont indépendantes

Partie 1

Soit f définie par $f(x,y) = \frac{x^2-y}{x+y}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f (le représenter).
- 2) Déterminer la ligne de niveau $k = 0$ de f (la représenter).

Partie 2

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x,y) = 4x^2y + xy^3$. Calculer les dérivées partielles premières de f .

Partie 3

Soit f définie par $f(x,y) = x - \ln(y)$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f (le représenter).
- 2) Optimiser f sous la contrainte $g(x,y) = x - y - 2 = 0$