

L2S4 Examen 2021 Correction

Exo 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B = 2I_2 + B \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \quad B \text{ est nilpotente d'ordre 2.}$$

$$\forall n \geq 2, \quad B^n = B^2 \cdot B^{n-2} = O_2 \cdot B^{n-2} = O_2.$$

$$3) A = 2I_2 + B \text{ et } I_2 \text{ commute avec toute matrice de } M_2(\mathbb{R})$$

donc on peut appliquer le binôme de Newton

$$A^n = (2I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2^{n-k} B^k$$

$$A^n = \binom{n}{0} 2^n B^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} B$$

$$A^n = 2^n I_2 + \binom{n}{1} 2^{n-1} B = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2^n & 3n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$B^n = O_2 \quad \forall n \geq 2$$

$$4) (S) \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2v_n \\ u_0 = 1, v_0 = 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$a) (S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \text{ donc } M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$M X_n = X_{n+1}$$

$$b) X_{n+1} = M X_n \quad \text{Mq} \quad X_n = M^n X_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Pour } \underline{n=0} \quad X_0 = M^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0 \quad \checkmark$$

$$\text{Supposons } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = M^n X_0 \quad \text{alors}$$

$$X_{n+1} = M X_n = M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0. \quad \checkmark$$

$$\text{Par récurrence, } X_n = M^n X_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) D'après 3)

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3n2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$\swarrow u_n$
 $\nwarrow v_n$

Exo 2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $P(\lambda) = \det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3^2$

2 v.p. distinctes : $\lambda = -1$ et $\lambda = 5$
en dim 2, avoir 2 v.p. distinctes suffit à ce que C soit diagonalisable.

2. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice des v.p.

\vec{v} pour $\lambda = -1$. On résout $(C + I_2) X = 0_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$$

par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un \vec{v} pour $\lambda = -1$

\vec{v}_p pour $\lambda: 5$. On résout $(C - 5I_c) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un \vec{v}_p pour $\lambda = 5$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le cours nous dit que $C = P D P^{-1}$

Exo 3
(5)

$$\begin{cases} -mx + y + z = m \\ x - my + z = 1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$$

1) (5) est de Cramer
ssi
ssi

$$M = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

$\det M \neq 0.$

Calculons $\det M$

$$\det M = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 2-m & 2-m & 2-m \end{vmatrix} = (2-m) \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 + L_1$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$



Rectification postérieure à la vidéo...

DVLP % L_3

$$\det M = (2-m) \begin{vmatrix} -m-1 & 0 & 1 \\ 0 & -m-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-m) \begin{vmatrix} -m-1 & 0 \\ 0 & -m-1 \end{vmatrix} = (-m-1)^2 (2-m)$$

$\det M \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ et $m \neq 2$ (S) est de Cramer ssi

2) Pour $m = -1$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$m \neq -1$
 $\text{et } m \neq 2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = -1 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases}$$

impossible

$$S = \emptyset$$

$$3) \underline{m=0}$$

$$M: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - y = 1 - 1 = 0.$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$


Exo 4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

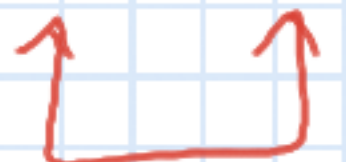
1. λ est v.p. de $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$

Calculons $\det(A - 0I_3) = \det A$ et $\det(A - I_3)$.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \text{ v.p. de } A.$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$  2 colonnes identiques.

$$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

 $C_2 = -C_1$

$\Rightarrow 1 \text{ v.p. de } A$

On aurait dû lire l'énoncé!
Il vaut mieux calculer $P(\lambda)$

1) Retour sur la Q1

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ -3 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

~~$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$~~

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1-\lambda \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$$
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$p(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{DVL } p \% L_1}{=} (1-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2 \lambda$$

Les v.p. sont 1 (multiplicité 2) et 0 (multiplicité 1)

2) \vec{v} pour $\lambda = 0$ On résout $AX = 0$

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

\wedge de 2 plans de $\mathbb{R}^3 = 1$ droite.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un \vec{v} pour $\lambda = 0$

\vec{v} pour $\lambda = 1$ On résout $(A - I_3)X = 0$

$$\begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ -3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \wedge$ de 2 plans = 1 droite

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un \vec{v} pour $\lambda = 1$

3. A n'est pas diagonalisable.

la vp $\lambda = 1$ est de multiplicité 2 et en a qu'une droite de \vec{v} pour $\lambda = 1$. Il faudrait un plan

4.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

inverse de Q .

Reduction de Gauss-Jordan

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \text{ et } Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$5. \quad Q^T Q^{-1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right)^{Q^{-1}}$$

$$Q^T Q^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) = A$$

D est une matrice triangulaire A .

$$Q^T Q^{-1} = A$$

6. a)

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T^2 T^3

b) La p.p est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Alors

$$T^{n+1} = T \cdot T^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vrai au rang $n+1$

Par récurrence,
vrai $\forall n \geq 0$.

6. c)

$$A = Q T Q^{-1}$$

 \Rightarrow
 Com, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A^n = Q T^n Q^{-1}$$

dowc

$$A^5 = Q T^5 Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$Q T^5 Q^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -7 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$