

Licence 2 – FaSEST – Calcul matriciel
Examen S4 –Section 1- Mai 2025 –
Durée 2h

Documents interdits. Calculatrice de type « collège » autorisée. Aucun brouillon ne sera corrigé, les résultats devront être justifiés.

Exercice 1 (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer A^{-1} par la méthode de Jordan-Gauss.

2) En déduire la résolution du système $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 2 (6 points)

On considère le système $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y + mz = 1 \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.} \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$

- 1) A quelle(s) condition(s) sur m , le système est-il de Cramer ?
 2) Résoudre le système dans le cas où $m = -1$.
 3) Résoudre le système grâce aux formules de Cramer lorsque $m = 1$.

Exercice 3 (10 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Démontrer que le polynôme caractéristique est $P(X) = (X-2)^2(X-1)$. Déduire les valeurs propres de A .
 2) Déterminer les sous-espaces propres et vecteurs propres associés aux valeurs propres.
 3) Justifier que la matrice est diagonalisable.
 4) Préciser les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
 5) Déterminer l'expression de A^n (expression complète en fonction de n).
 6) BONUS (2 points)

Soit les suites $(U_n), (V_n)$ et (W_n) définies par $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + V_n + W_n \\ V_{n+1} = -U_n + 3V_n + W_n, U_0 = V_0 = W_0 = 1 \\ W_{n+1} = U_n - V_n + 3W_n \end{cases}$

En utilisant ce qui précède, déterminer l'expression de U_n , V_n et W_n en fonction de n .

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ V_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ W_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^5$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right) \\ &= \frac{n^5(n+1)^5}{72} + \frac{n^3(n+1)^3(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))}{120} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^6$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^6 &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^3 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^2 \\ &= \frac{n^6(n+1)^6}{216} + \frac{n^4(n+1)^4(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^2}{1080} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^7$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^7 &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^4 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^3 \\ &= \frac{n^7(n+1)^7}{1296} + \frac{n^5(n+1)^5(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^3}{360} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^8$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^8 &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^5 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^4 \\ &= \frac{n^8(n+1)^8}{7290} + \frac{n^6(n+1)^6(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^4}{2160} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^9$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^9 &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^6 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^5 \\ &= \frac{n^9(n+1)^9}{51840} + \frac{n^7(n+1)^7(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^5}{1440} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{10}$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{10} &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^7 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^6 \\ &= \frac{n^{10}(n+1)^{10}}{362880} + \frac{n^8(n+1)^8(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^6}{1080} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{11}$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{11} &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^8 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^7 \\ &= \frac{n^{11}(n+1)^{11}}{241920} + \frac{n^{10}(n+1)^{10}(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^7}{1440} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{12}$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{12} &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^9 + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^8 \\ &= \frac{n^{12}(n+1)^{12}}{17297280} + \frac{n^{11}(n+1)^{11}(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^8}{1440} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{13}$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{13} &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^{10} + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^9 \\ &= \frac{n^{13}(n+1)^{13}}{12096000} + \frac{n^{12}(n+1)^{12}(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^9}{1440} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{14}$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{14} &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^{11} + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^{10} \\ &= \frac{n^{14}(n+1)^{14}}{87600000} + \frac{n^{13}(n+1)^{13}(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^{10}}{1440} \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{15}$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{15} &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^{12} + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)^{11} \\ &= \frac{n^{15}(n+1)^{15}}{65472000} + \frac{n^{14}(n+1)^{14}(n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1))^{11}}{1440} \end{aligned}$$