L2 S4 - Vendredi 28 avril 2022 - 15h-17h - Révisions

Exo 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) $A = aI_2 + B \iff B = A - aI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Avec $a = 2$ cela donne $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{a = 2}$ $\underline{B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

B est nilpotente d'ordre 2 et

$\forall n \geq 2,\ B^n = O_2$.

En effet $B^n = B^{n-2} \cdot B^2 = B^{n-2} \cdot O_2 = O_2$

$\forall n \geq 2$.

3) On a $A^n = (2I_2 + B)^n$

I_2 commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = \underbrace{\binom{n}{0} 2^n B^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{1} 2^{n-1} B}_{k=1}$$

Q2

$(I_2^{n-k} B^k = I_2 B^k = B^k)$ $\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{1} = n$

$$M^n = A^n = 2^n I_2 + n 2^{n-1} B$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 3 \times n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4.a) $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 0u_n + 2v_n \\ u_0 = 1 \; ; \; v_0 = 2 \end{cases}$ $\iff$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$

et $u_0 = 1 \; ; \; v_0 = 2.$

$M = A$

4. b) On a

$M^3 X_{n-3}$

$X_n = M X_{n-1} = M^2 \boxed{X_{n-2}} = \cdots = M^n X_0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$X_{n-1} = M X_{n-2}$ $\quad$ $M^2 \times M X_{n-3}$

c)

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3n2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1+3n) \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

u_0 $\quad$ v_0

Exo 2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5$ $\quad$ $\Delta = 16 + 20 = 36 = 6^2 > 0$

1) valeurs propres, vecteurs propres.

$$P(\lambda) = \det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3^2 =$$

$$P(\lambda) = \underline{(2-\lambda-3)}(2-\lambda+3) = (-1-\lambda)(5-\lambda).$$

λ

2 racines $\neq$

c-à-d 2 valeurs propres : $\lambda = -1$, $\lambda = 5$

2 valeurs propres distinctes en dim 2 $\Rightarrow$ C est diagonalisable.

2) Vecteurs propres pour $\boxed{\lambda = -1}$

On résout $(C + I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 3y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -x}$

Pour $\underline{x = 1}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ pour $\lambda = -1$.

On résout $(C - 5I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$

$L_1 \Leftrightarrow L_2$

Pour $\underline{x = 1}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ pour $\lambda = 5$

Donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Exo 3}}$ 1) $\begin{cases} -mx + y + z = m \\ x - my + z = 1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$

(S) est de Cramer ssi la matrice associée $\begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ est <u>inversible</u>

ssi $\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} \neq 0$. Calculons le déterminant.

$$\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 2-m & 2-m & 2-m \end{vmatrix} = (2-m)\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2$

$$= (2-m)\begin{vmatrix} -m-1^{+} & 0 & 0 \\ 0 \; ^{-} & -m-1^{+} & 0^{-} \\ 1 & 1 & 1^{+} \end{vmatrix} = (2-m)\times 1 \times \begin{vmatrix} -m-1 & 0 \\ 0 & -m-1 \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$= (2-m)(-m-1)^2$$

$\det M \neq 0 \iff m \neq 2$ et $m \neq -1$

(S) est de Cramer $\iff m \neq 2$ et $m \neq -1$

2) Si $\underline{m = -1}$ $\quad (S) : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{1 = x + y + z = -1}$

L_1 et L_2 se contredisent : <u>impossible</u> et (S) n'a pas de soluθ.

3) Si $\underline{m = 0}$ $\quad (S) : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2, \; L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = \frac{1}{2} \\ y = -z = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Exo } 4}$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) <u>vp de A</u> $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ -3 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 1-\lambda & 4-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1^{+} & 3 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}$ $\textcircled{*}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ DVLP % C_1

$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)\times(-\lambda) + 0\right) = -(1-\lambda)^2 \lambda.$

2 valeurs propres :

0 de multiplicité 1

1 - - - - - - 2

2) $\overrightarrow{vp}$ pour $\lambda = 0$

On résout $(A - 0I_3)X = 0 \iff AX = 0 \iff \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$

On substitue

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un $\overrightarrow{vp}$ pour $\lambda = 0$

$\overrightarrow{vp}$ pour $\lambda = 1$

On résout $(A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ -3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$

(*)

$\iff \boxed{\begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}} \iff \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$

(*) $\cap$ de 2 plans = 1 droite

$\Rightarrow$ 1 droite de $\overrightarrow{vp}$

$$\begin{cases} 0 - z = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ pour $\lambda = 1$

On substitue

---

3) A n'est pas diagonalisable

La multiplicité de la vp $\lambda = 1$ est 2 mais tous les $\vec{vp}$ pour $\lambda = 1$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ PAS ASSEZ de $\vec{vp}$ pour que A soit diagonalisable.

4) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$L_3 \leftarrow -L_3$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$= Q^{-1}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ $\qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

5)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$QTQ^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{Q} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{QT} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A$$

On retrouve A. (ouf)

6. a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{"}T^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{"}T^3}$$

6-b) * La formule est vraie pour $n=1$ et $n=2$.

* Supposons $\exists n \in \mathbb{N}^* \,/\, T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors

$$T^{n+1} = T^n . T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Par récurrence bla bla...

c) $A^5 = ?$

$A = Q\,T\,Q^{-1} \Rightarrow A^n = Q\,T^n\,Q^{-1}$

cours (par récurrence)

donc $A^5 = Q\,T^5\,Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ + produits

6-b)

$$A^5 = Q T^5 Q^{-1} =$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -7 & 8 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = QT$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -7 & 8 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = Q T Q^{-1}$$

$\square$ ...