Mathématiques appliquées aux sciences de la vie

Remédiation de la semaine du 08/02/2026

Télécharger le PDF

Équations différentielles

Définition

Définition 1 Une équation différentielle est une équation

1. dont l'inconnue est une **fonction** $y : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$,
2. qui contient la fonction y et certaines de ses **dérivées** y', y'', etc.

Remarque 1. Dans la construction d'une équation différentielle, on peut utiliser les opérations suivantes:

1. $+, -, \cdot, /$
2. les fonctions de référence ($\sin$, $\cos$,$\ln$, x^2,...) et la composition de fonction.

Exemples et contre-exemples

Dans les expressions suivantes, y est une fonction et t une variable.

$$y' = y$$

$$2y'' = 3\sin(y) + t^2$$

$$3y'' - 5y' + y = 0$$

$$y \cdot (\sin(t) + 1)$$

$$t^2 + t - 1 > \mathrm{e}^t$$

Terminologie

1. L'**ordre** d'une ED est l'odre de la plus grande dérivée de y apparaîssant dans l'équation.
2. Une **ED ordinaire (EDO)** est une équation différentielle où la variable ne dépend que d'une seule variable.

Exercice

Exercice 1 Identifie l'ordre des ED suivantes:

1. $y' + y = y''' - 5t$
2. $\sin(y) + (y'')^2 = 0$
3. $y'' + y' - y = y''$

Solutions d’une équation différentielle

Définition

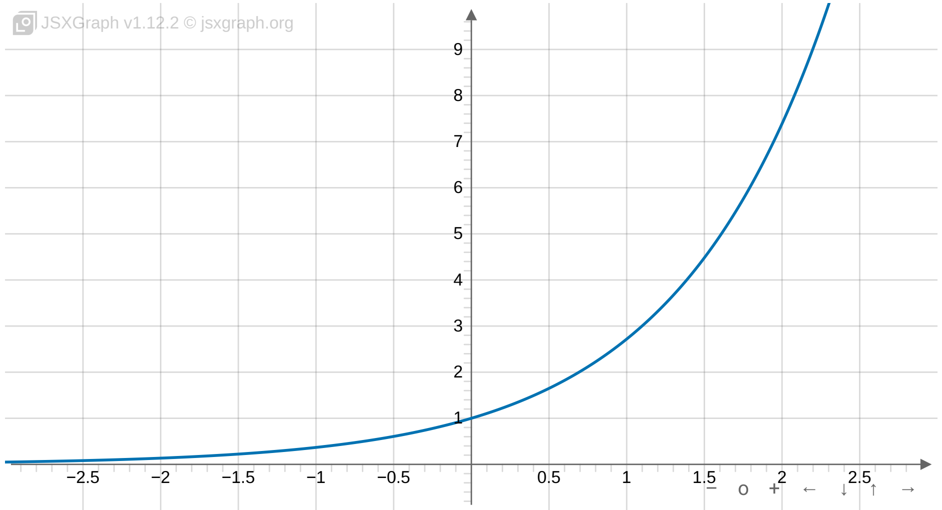
Définition 2 Une solution d'une EDO est une **fonction** $y(t)$ qui satisfait cette équation pour tout t.

Exemples

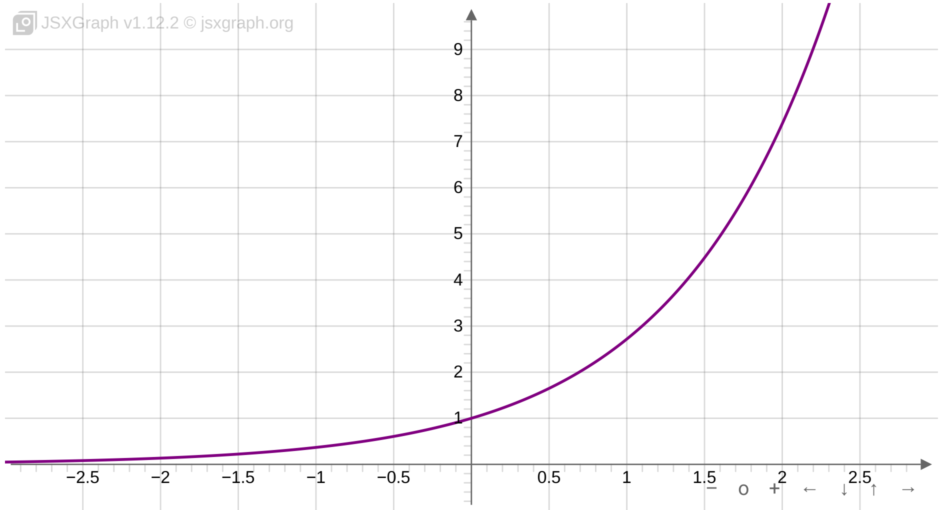
Soit l'EDO $y' - y = 0$, qui équivaut à $y' = y$.

1. $y(t) = \mathrm{e}^t$ est une solution

Graphe de y



Graphe de y'

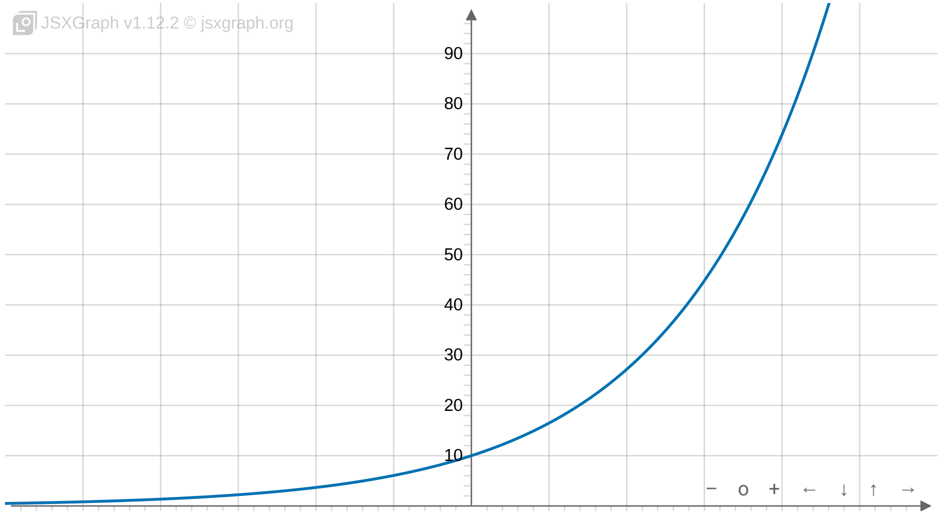


Exemples

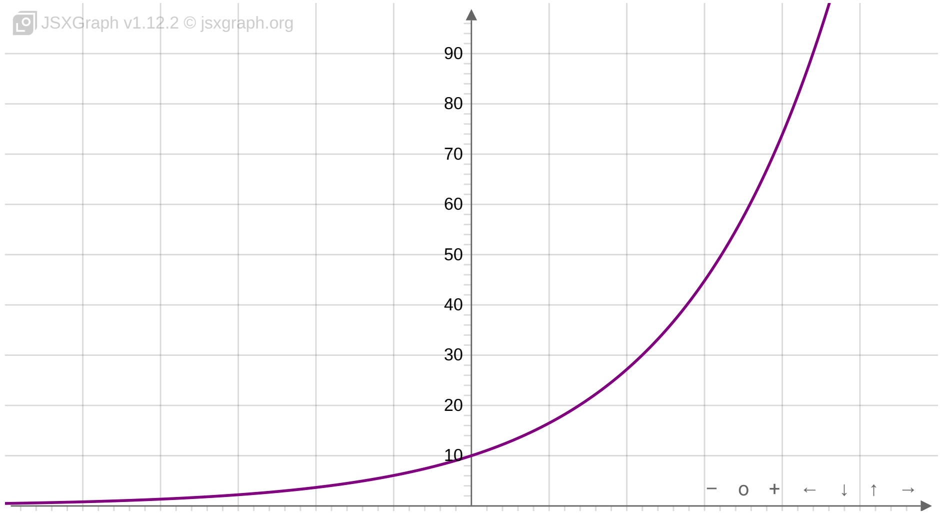
Soit l'EDO $y' - y = 0$, qui équivaut à $y' = y$.

2. $y(t) = 10e^t$ est une solution

Graphe de y



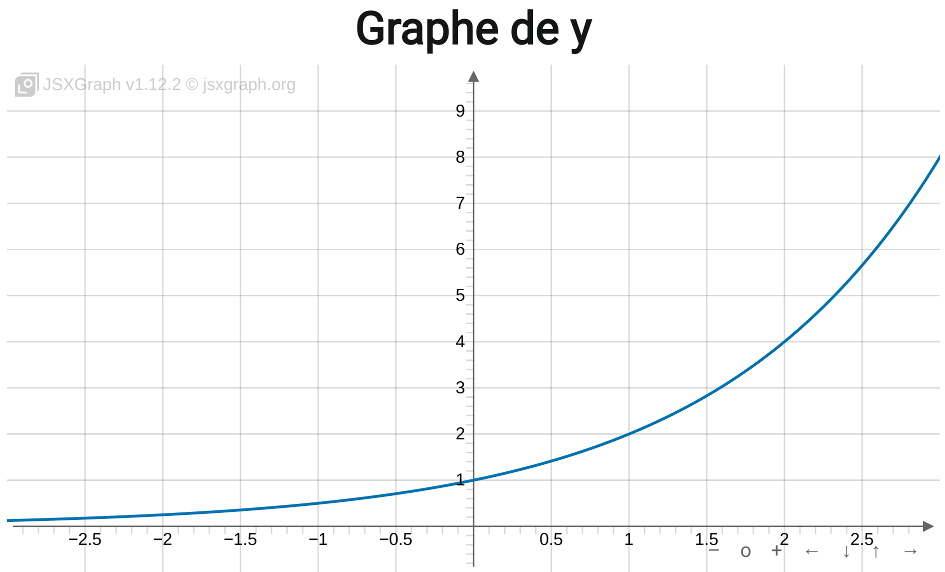
Graphe de y'

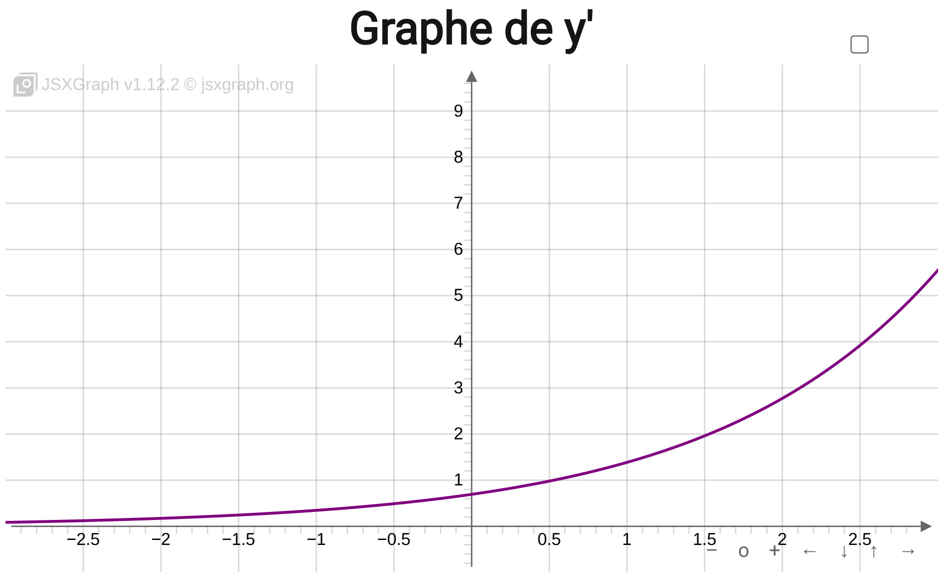


Exemples

Soit l'EDO $y' - y = 0$, qui équivaut à $y' = y$.

3. $y(t) = 2^t$ **n'est pas** une solution



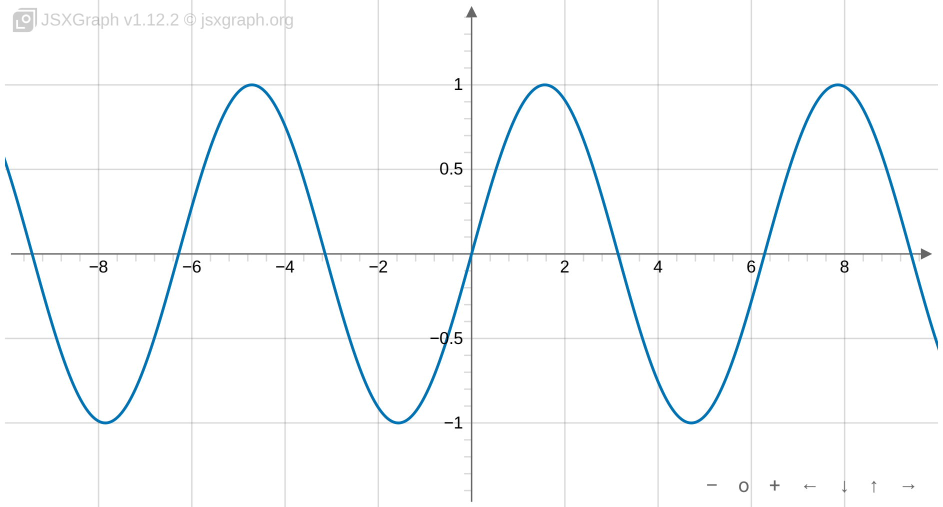


Exemples

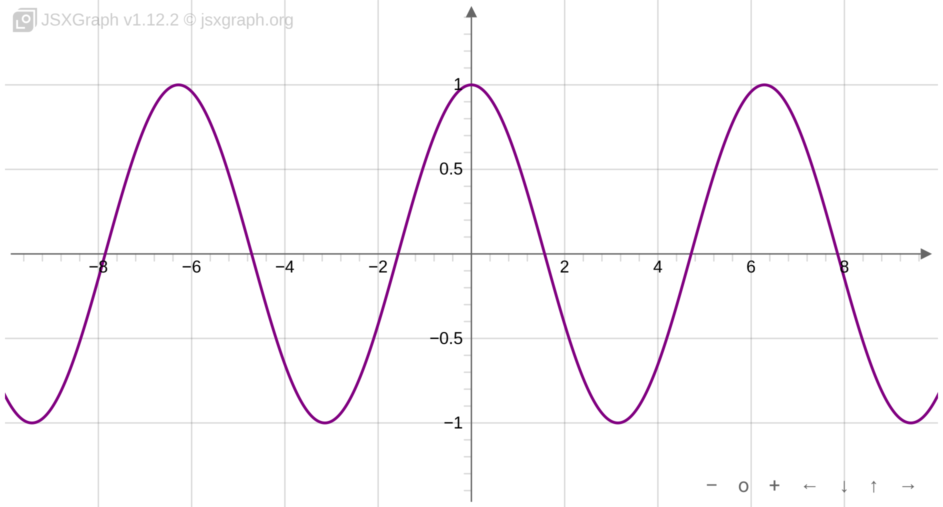
Soit l'EDO $y' - y = 0$, qui équivaut à $y' = y$.

4. $y(t) = \sin(t)$ **n'est pas** une solution

Graphe de y



Graphe de y'



Exercices

Exercice 2 Détermine si les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation $y'' + y = 0$.

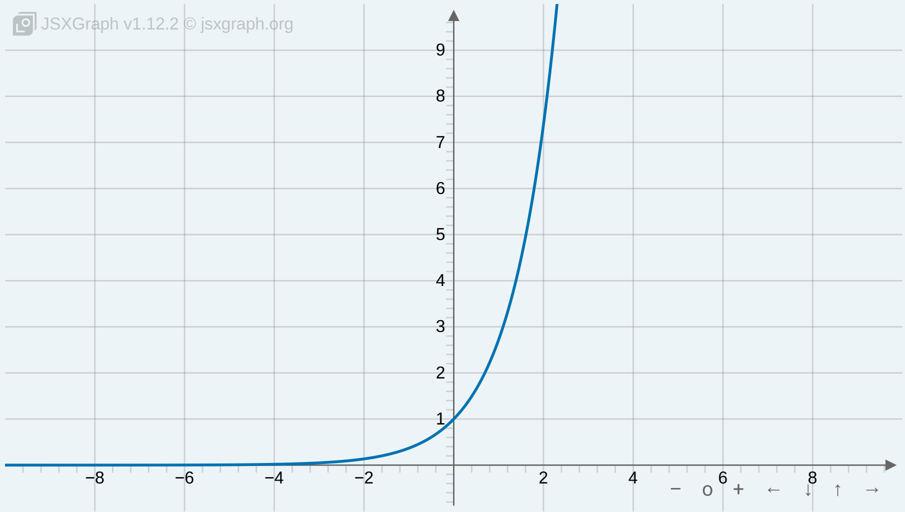
1. $3\sin(x)$
2. $\sin(3x)$
3. e^x
4. $\tan(x)$
5. $3\cos(x)$

Exercices

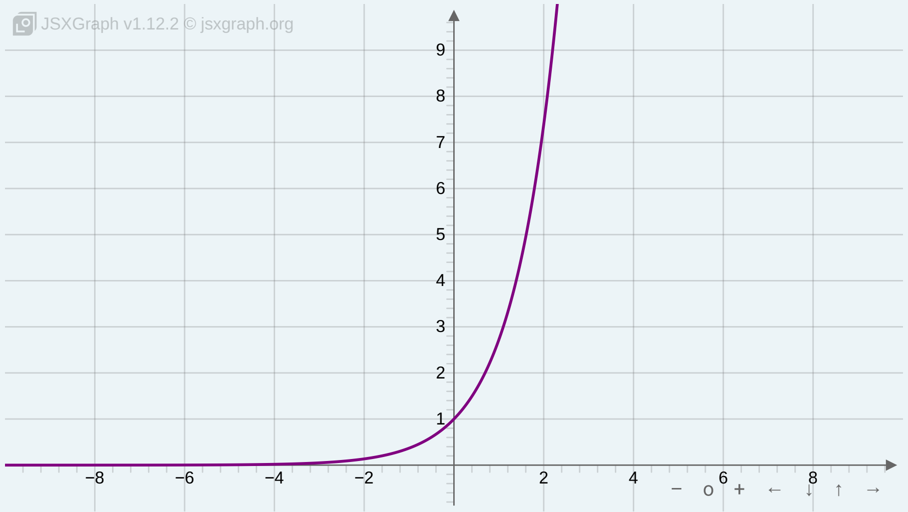
Exercice 3 Détermine si les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation $y' = \frac{y}{2} + 1$.

1.

Graphe de y



Graphe de y'

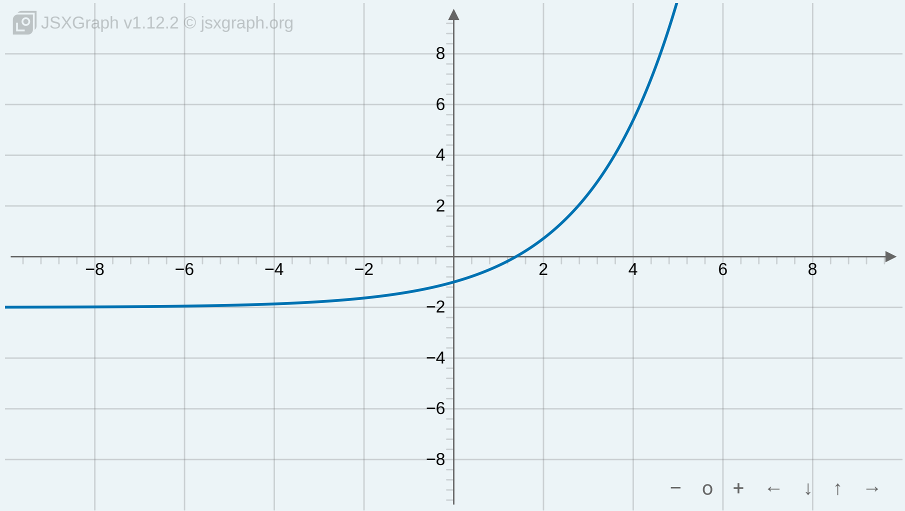


Exercices

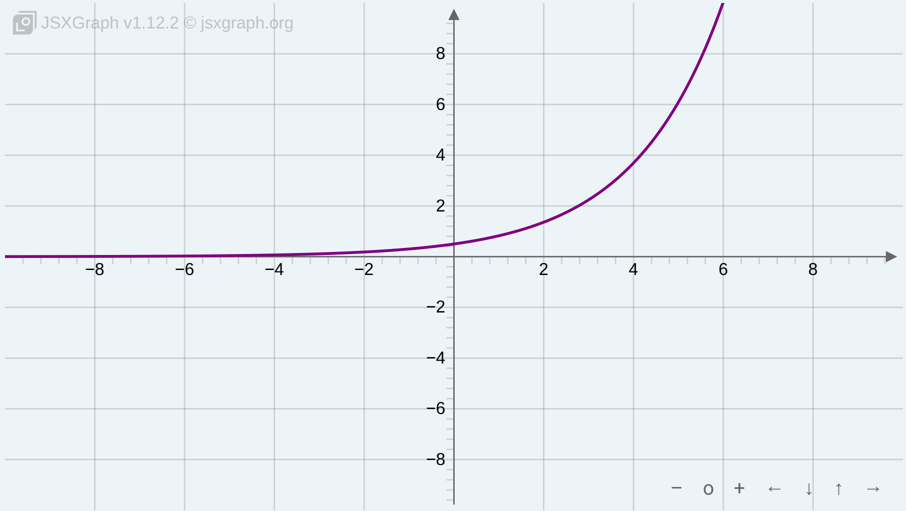
Exercice 4 Détermine si les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation $y' = \frac{y}{2} + 1$.

2.

Graphe de y

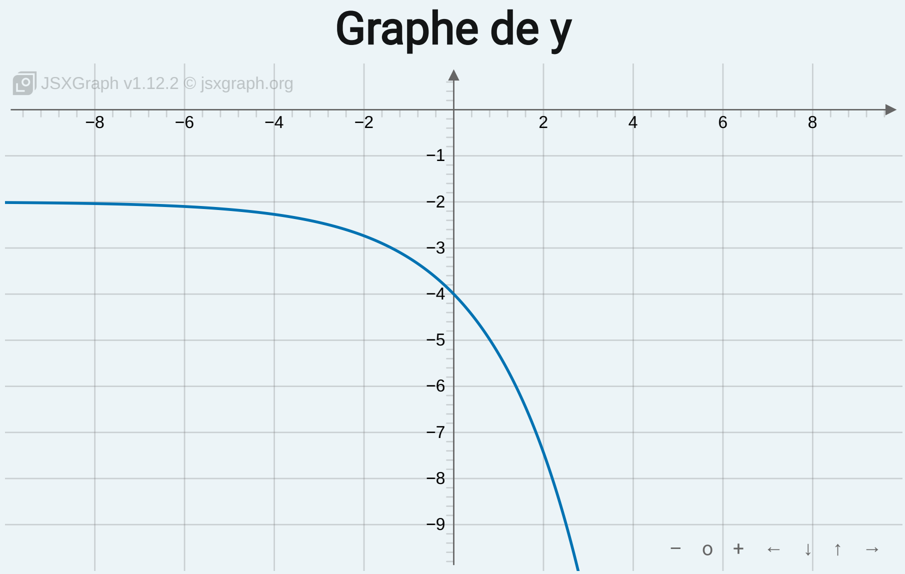


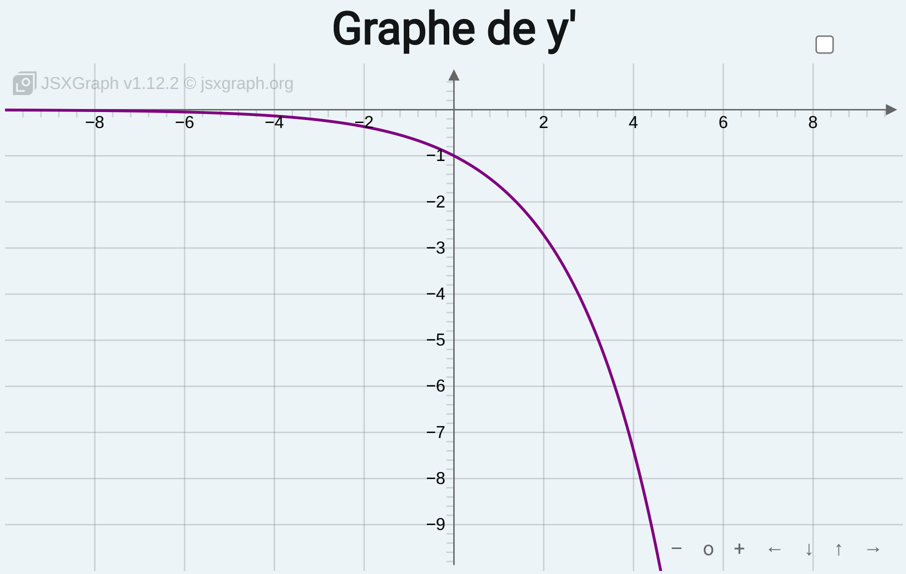
Graphe de y'



Exercice 5 Détermine si les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation $y' = \frac{y}{2} + 1$.

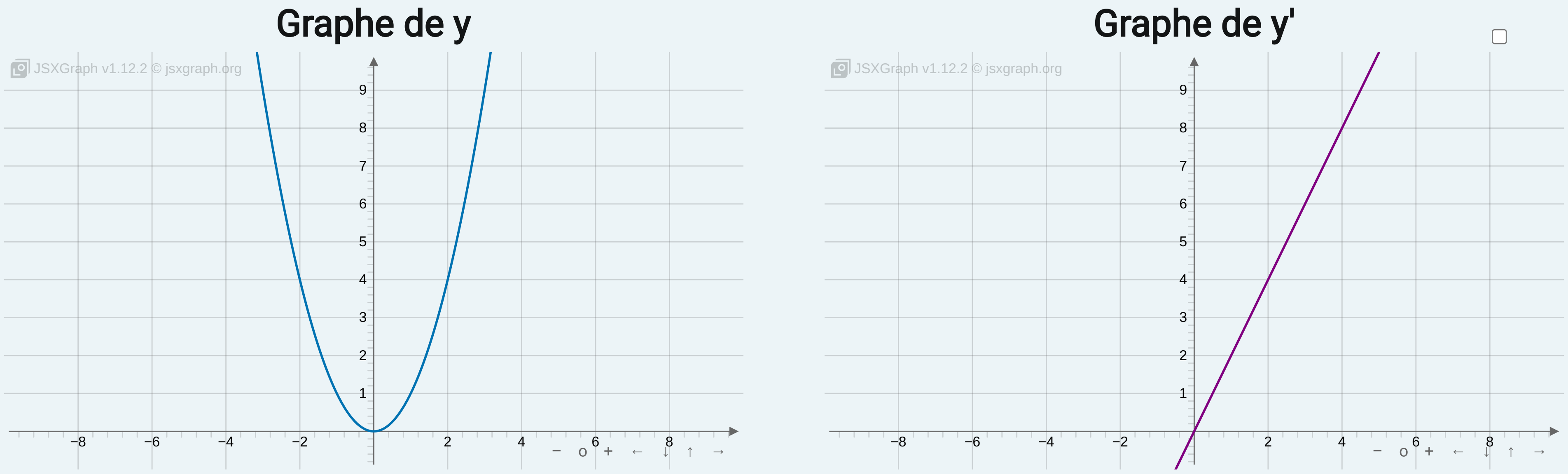
3.





Exercice 6 Détermine si les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation $y' = \frac{y}{2} + 1$.

4.



Équations différentielles: séparation des variables

Définition

Définition 3 Une EDO **séparable** est une équation de la forme

$$y' = f(t)g(y(t)),$$

où f est g sont deux fonctions **intégrables**.

Exemples et contres-exemples

$$y' = y(y + 2ty)$$

$$y' - yt = 2y$$

$$y'' + y' = t$$

$$y' = y + t$$

Exercices

Exercice 7 Écris les équations suivantes sous la forme $y' = f(t)g(y)$.

1. $ty' + y = yt$
2. $y' \sin(y) = t - yt$

Exercices

Exercice 8 Dans les équations séparables suivantes, identifie qui est $f(t)$ et qui est $g(y)$.

1. $y' = yt$
2. $y' = \sin(y)t^2$
3. $y' = \sin(t)y^2$
4. $y' = \sqrt{t}\cos(t)$
5. $y' = y + \sin(t)y$
6. $yy' + y = \mathrm{e}^t t$

Exemple

On veut résoudre l'équation $y' = \mathrm{e}^y \cdot t$. Ici: $f(t) = t$ et $g(y) = \mathrm{e}^y$.

Étape 1: on réécrit l'équation: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^y \cdot t$.

Étape 2: on sépare les variables: les y d'un côté et les t de l'audre:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^y} = t\mathrm{d}t.$$

Exemple

On veut résoudre l'équation $y' = \mathrm{e}^y \cdot t$.

Étape 3: on intègre chacun des membres:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^y} = \int t\mathrm{d}t.$$

Étape 4: on on calcule les intégrales:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^y} = \int \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = -\int -\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = -\mathrm{e}^{-y} + k_1, k_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + k_2, k_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple

On veut résoudre l'équation $y' = \mathrm{e}^y \cdot t$.

Étape 5: on isole y dans $-\mathrm{e}^{-y} + k_1 = \frac{t^2}{2} + k_2$. Si on pose $k = k_1 - k_2$:

$$y = -\ln(k - \frac{t^2}{2})$$

Conclusion: l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\ln(k - \frac{t^2}{2}) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$

Prérequis

Quels sont les prérequis pour résoudre une équations séparable?

1. Maîtriser l'algèbre de base (PEMDAS, distributivité, mise en évidence, produits remarquables, etc.)
2. Savoir manipuler les équations en appliquant les principes d'équivalence.
3. Savoir résoudre les équations du second degré, exponentielles et trigonométriques du Q1.
4. Savoir dériver.
5. Savoir intégrer.