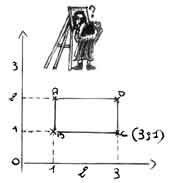
**4UAA6**

Géométrie analytique plane



Compétences à développer dans ce chapitre :

#### CONNAITRE

* Associer un lieu à son expression analytique.
* Représenter un vecteur dans le plan.

#### APPLIQUER

* Construire la somme de deux vecteurs.
* Représenter un multiple de vecteur.
* Décomposer un vecteur selon deux directions données.
* Rechercher les équations vectorielle et cartésienne d’une droite.
* Rechercher l’équation d’une droite comprenant deux points, comprenant un point et de direction donnée.
* Calculer la distance d’un point à une droite.
* Rechercher l’équation cartésienne d’un cercle.
* Rechercher le centre et le rayon d’un cercle d’équation donnée.
* Construire une parabole de foyer et de directrice donnée.
* Rechercher une intersection entre droites, entre droite et cercle.

#### TRANSFÉRER

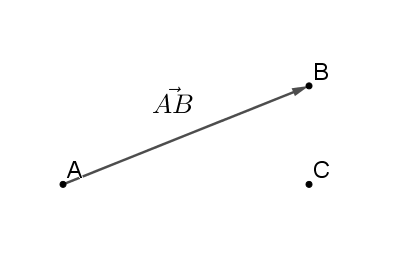
* Vérifier une propriété géométrique élémentaire par une méthode analytique.
* Résoudre un problème de géométrie analytique plane.
* Rechercher les coordonnées de points d’intersection de droites remarquables d’un triangle en limitant la technicité ou en utilisant l’outil informatique.

1. CALCUL VECTORIEL

# Notion de vecteur – Vecteur nul, vecteurs égaux, vecteurs opposés.

## Introduction

Un vecteur est une flèche qui représente un déplacement ou une translation. Par exemple, la translation qui applique sur peut être représentée par une flèche partant de et finissant en . C’est ce qu’on appelle le vecteur .



Ce vecteur nous donne trois informations :

* La .................................... du déplacement (celle de la droite
* Le .................................... du déplacement (de vers )
* La .................................... du déplacement (celle du segment ).

Appliquons la translation qui applique sur au point et notons son image. Nous obtenons dès lors le vecteur ......... Celui-ci caractérise un déplacement identique, une translation identique à celle appliquant sur . On dira que le vecteur .... .

Retiens qu’en mathématique (contrairement à la physique), le point de départ du vecteur n’est pas important.

Combien de vecteurs égaux aux vecteurs et pourrions-nous construire dans le plan ? .............................................................

Nous allons voir dans ce chapitre que les vecteurs sont semblables aux nombres : ils peuvent être additionnés, soustraits et multipliés par des nombres. Ceci va nous permettre de faire du calcul avec des vecteurs et ensuite redécouvrir la notion de droite, en la définissant de manière formelle.

Les physiciens utilisent beaucoup les vecteurs. Ils peuvent représenter un déplacement, comme en mathématique, mais aussi une force, une vitesse, une accélération et bien d’autres choses.

## Définition de vecteur

Une translation est complètement connue dès que l’on connaît un point et son image. Le déplacement d’un point vers son image est porteur de trois informations : sa direction, son sens et sa longueur, formant un « trio » de données à qui l’on donne le nom de « vecteur » de la translation.

#### Soient et deux points distincts, le vecteur est défini par :

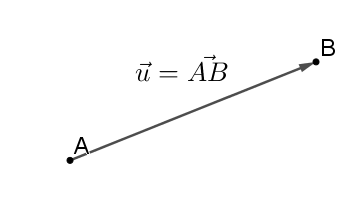
#### Une direction : celle de la droite ou de toute droite parallèle à

#### Un sens : de vers

#### Une longueur : celle du segment , appelée norme et notée

*Remarques :*

* On peut aussi noter un vecteur à l’aide d’une lettre minuscule surmontée d’une petite flèche :



Le point est appelé l’origine du vecteur

Le point est appelé l’extrémité du vecteur

* Lorsque l’origine et l’extrémité sont identiques, le vecteur est dit nul. Il représente un « déplacement » où on ne bouge pas.

#### Un vecteur est nul si son origine est égale à son extrémité.

*Exemples* : Vecteur ou

*Remarques* :

* Sa norme est nulle. Sa direction et son sens sont indéterminés.
* On le note
* On le représente généralement par une boucle ou un point.

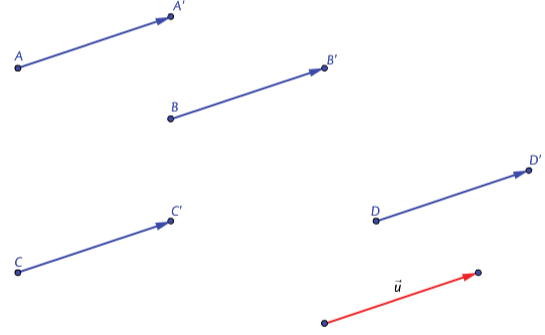
## Définition de vecteurs égaux

#### Deux vecteurs non nuls et sont égaux s’ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

#### On note : =

*Remarques* :

* Deux vecteurs égaux définissent une même translation.
* A partir de n’importe quel point du plan, il est possible de construire un vecteur égal au vecteur .

On note :

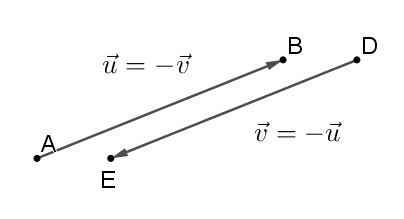
Les vecteurs , , et sont des **représentants** du vecteur . Il en existe une infinité.

## Définition de vecteurs opposés

Les vecteurs et ne sont pas égaux puisqu’ils n’ont pas le même sens. En effet, aller de vers ou de vers ne représente pas le même déplacement. Comme ces vecteurs ont la même direction (celle de la droite ) et la même norme (longueur du segment mais sont de sens contraires, on dira qu’ils sont opposés.

#### Deux vecteurs non nuls et sont opposés s’ils ont la même direction et la même norme mais s’ils sont de sens contraires.

#### On note : = - (se lit est l’opposé de ) ou = - (se lit est l’opposé de )



*Remarque* :

* Les vecteurs et sont opposés. On note : .

Si l’on applique successivement ces deux vecteurs, le déplacement de vers puis de vers revient à rester sur . C’est donc comme si finalement on restait sur place.

On peut donc écrire que .

Comme tout nombre, chaque vecteur a un opposé.

## Exercices

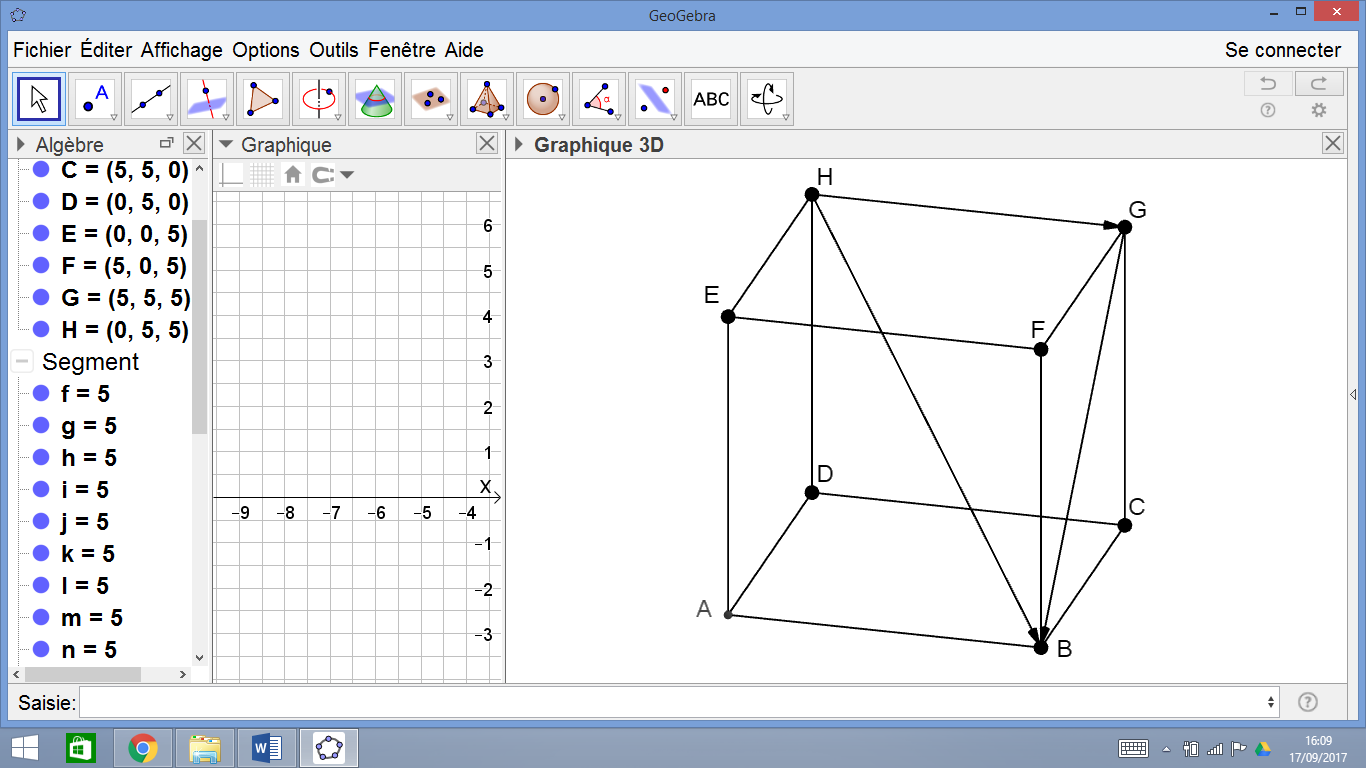
1. Parmi les vecteurs représentés ci-dessous, détermine :
   1. Un vecteur égal au vecteur 
   2. un vecteur nul
   3. un vecteur non nul, différent de mais de même sens que
   4. un vecteur non nul, de même direction mais pas de même sens que
   5. un vecteur de même norme que mais pas de même direction.
2. Soit le parallélogramme , et étant les milieux respectifs de et

A l’aide des points représentés et de ceux-là uniquement, détermine :

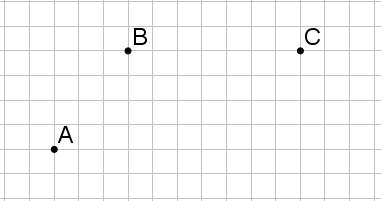
* 1. 2 vecteurs égaux entre eux (exactement 2)
  2. 3 vecteurs égaux entre eux (exactement 3)
  3. 4 vecteurs égaux entre eux (exactement 4)
  4. 6 vecteurs égaux entre eux (exactement 6)

A E B

D F C

1. Détermine, si possible, à l’aide des seuls points représentés :
   1. tous les vecteurs égaux à
   2. tous les vecteurs égaux à
   3. tous les vecteurs égaux à

1. Soient les 3 points non alignés A, B et C. Place le point D pour que .



A quoi correspond la figure ? ............................................................

#### Soient A, B, C et D quatre points du plan non alignés 3 à 3.

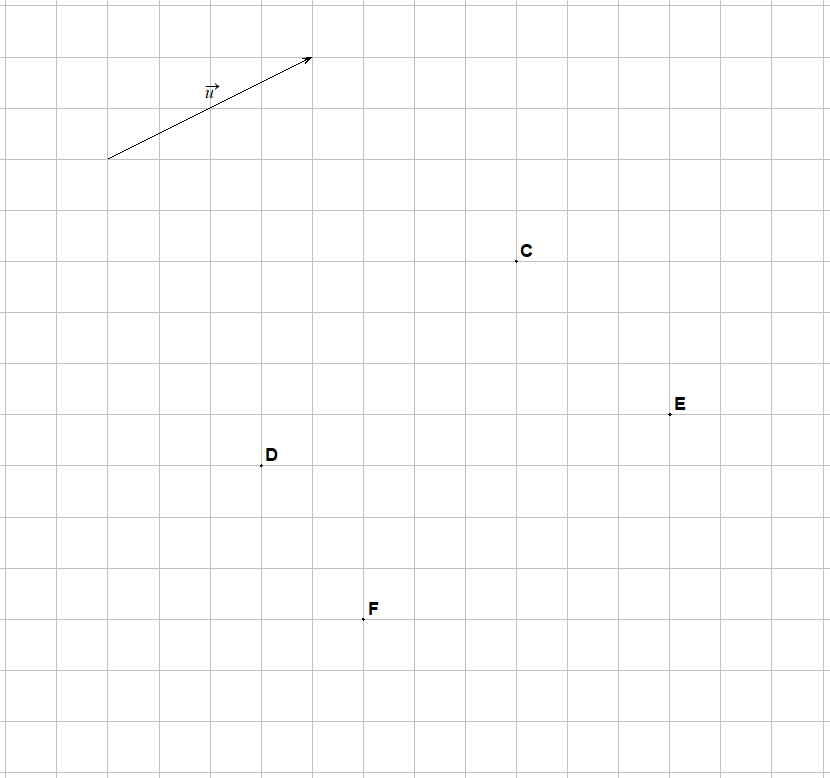
#### La figure ABCD est un parallélogramme

*Remarques :*

* Si , alors .
* Attention, la proposition « ABCD est un parallélogramme  » est fausse. En effet,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| est bien un parallélogramme | n’est pas un parallélogramme |

Lorsqu’on parle de la figure , deux lettres consécutives doivent être reliées par un segment.

1. Soit le vecteur et soient les points ,, et .

Construis

1. le vecteur égal à et d’origine
2. le vecteur égal à et d’extrémité
3. le vecteur opposé à et d’origine
4. le vecteur opposé à et d’extrémité .

## Exercices supplémentaires

1. Comment les vecteurs suivants sont-ils les uns par rapport aux autres ?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

1. Dans la figure ci-contre, les hexagones sont des hexagones réguliers de centre R,

S, T et U. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

# Composantes d’un vecteur.

## Mises en situation

1. Voici un schéma des rues d’une partie de la ville de New-York.
   1. Jonas, un pigeon domestiqué, est lâché sur Times Square (au croisement de la 8ème avenue et de la 42ème rue) et vole en ligne droite jusqu’au point marqué de l’autre croix sur le plan. Représente son trajet sur le plan.
   2. Jean-Pierre, le propriétaire de Jonas, se trouve également à Times Square. Il désire récupérer son pigeon. Ne pouvant pas voler, il doit se déplacer dans les rues. Représente un chemin qui emprunte d’abord une rue puis une avenue.
   3. Ce chemin est-il unique ? ………………

Combien de blocs a-t-il longé dans la rue qu’il a empruntée ? ………………

Combien en a-t-il longés dans l’avenue ? ………………

Ces nombres seuls ne te donnent pas l’information du sens à suivre. On va donc leur donner le signe + si on se déplace vers l’Est ou vers le Nord et le signe – si on se déplace vers l’Ouest ou vers le Sud.

Note les nombres trouvés à l’aide d’un couple. ………………………………………………

* 1. Jean-Pierre a récupéré Jonas et décide de se promener dans New-York. Il suit d’abord la rue vers l’Est et compte un bloc de maisons. Ensuite il bifurque à gauche dans l’avenue et longe 10 blocs de maisons.

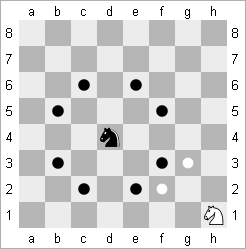
Donne sous forme d’un couple de nombres entiers le déplacement effectué. …………………………………………………

Relie sur le plan son point de départ et son point d’arrivée.

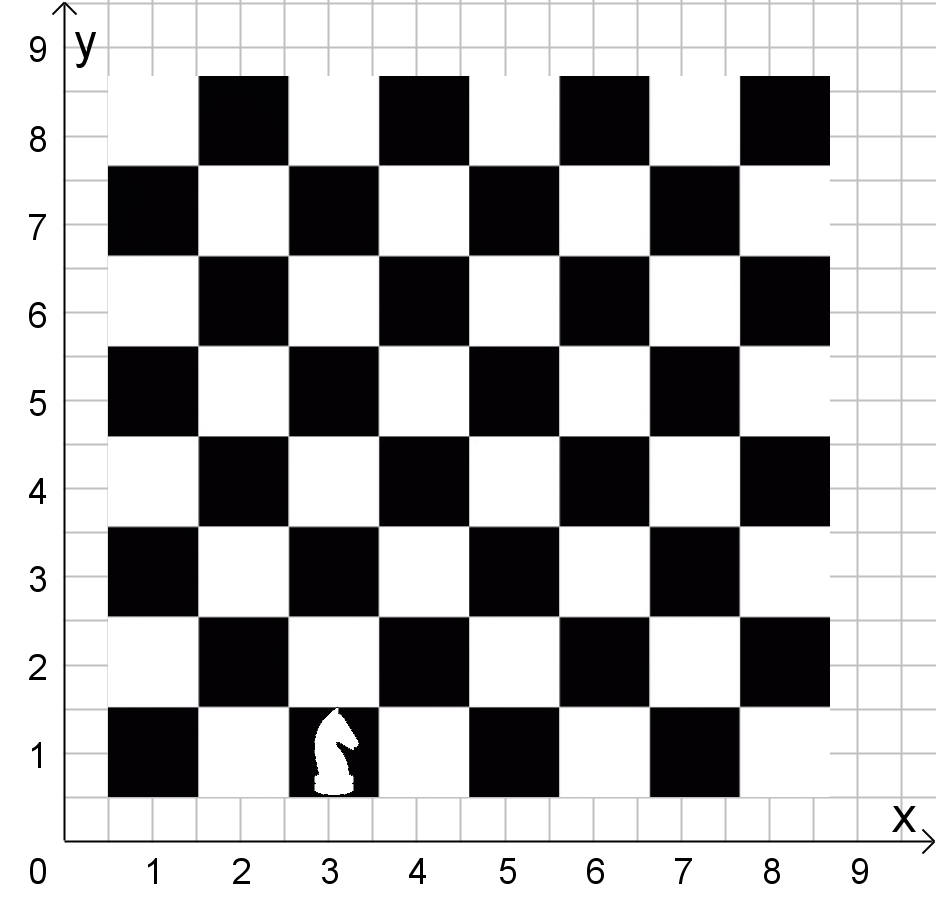
* 1. Que signifie un déplacement noté ?

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

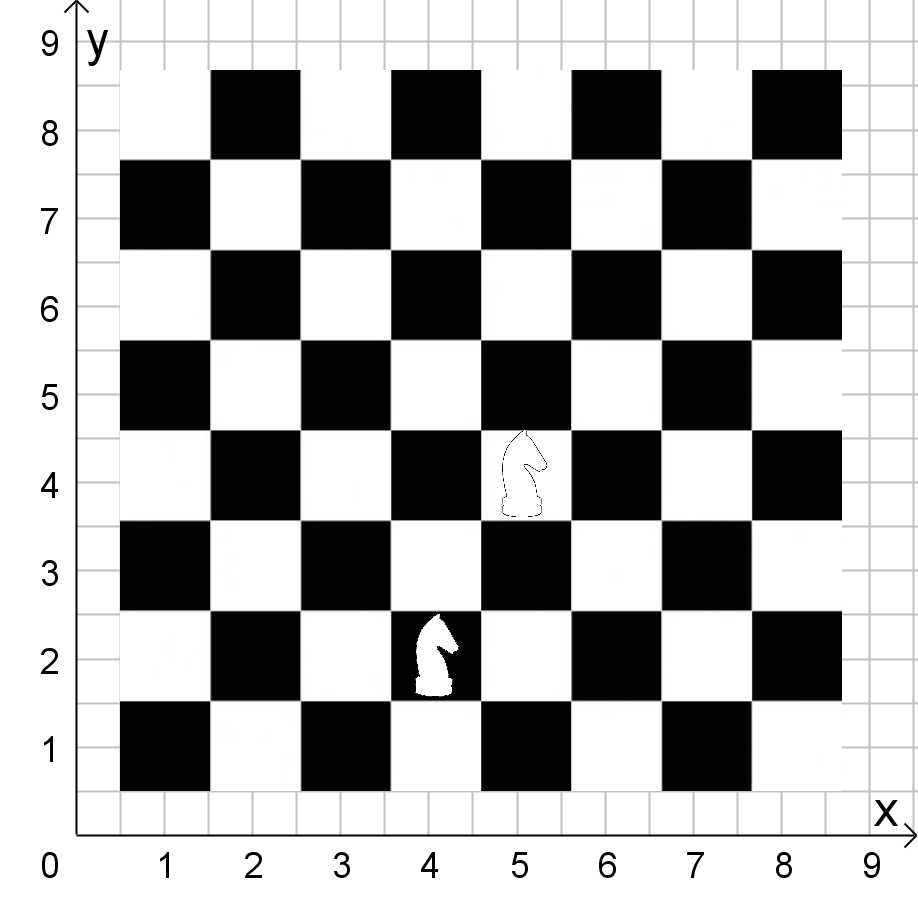
1. Dans le jeu d’échecs, le cavalier se déplace d’une manière particulière. Il se déplace de 3 cases en dessinant un L majuscule (2 cases horizontales + 1 verticale ou 1 case horizontale + 2 verticales). Voici les différents mouvements permis à partir d’une case donnée.



1. Sur l’échiquier que voici, et dans lequel un repère a été placé, le cavalier est placé au point . Il a effectué un déplacement de composantes. Quelles sont les coordonnées du point en lequel il arrive ?



1. Tu déplaces le cavalier du point au point . Quelles sont les composantes de ce déplacement ? Comment peut-on obtenir ces composantes à partir des coordonnées de et  ?



1. Réponds aux mêmes questions pour

* se déplacer de à
* se déplacer de à

## Définition des composantes d’un vecteur

Jusqu’à présent, nous avons envisagé les vecteurs uniquement en termes de déplacement. Nous allons désormais les associer à des nombres qui vont nous permettre de faire des calculs. Ces nombres sont appelés les composantes du vecteur.

Pour en parler, nous devrons placer nos vecteurs dans un repère. Dans ce cours, le repère sera toujours orthonormé (les axes seront perpendiculaires et gradués de manière identique, c’est-à-dire qu’une unité sur l’axe des x correspondra exactement à une unité sur l’axe des y).

Déterminer les composantes du vecteur , c’est décrire le déplacement permettant d’aller du point A au point B à l’aide de deux nombres :

* Le premier que nous noterons indique le nombre d’unités dont il faut se déplacer dans la direction de l’axe (si on se déplace dans le sens de l’axe , et si on se déplace dans le sens contraire de l’axe , )
* Le deuxième que nous noterons indique le nombre d’unités dont il faut se déplacer dans la direction de l’axe (si on se déplace dans le sens de l’axe , et si on se déplace dans le sens contraire de l’axe , )

Les composantes du vecteur seront notées

#### Dans un repère orthonormé du plan,

#### Si

#### les coordonnées de sont

#### les coordonnées de sont

#### Alors

#### La première composante (horizontale) du vecteur est ...............................

#### La deuxième composante (verticale) du vecteur est ...................................

#### On notera

Pour obtenir les composantes d’un vecteur à partir des coordonnées de l’origine et de l’extrémité, on fait la différence entre l’abscisse de l’extrémité et de l’origine ainsi que la différence entre l’ordonnée de l’extrémité et de l’origine.

## Propriétés

#### Dans un repère du plan, deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales.

Autrement dit,

Soient et

#### Dans un repère du plan, deux vecteurs sont opposés si et seulement si leurs composantes sont opposées.

Autrement dit,

Soient et

## Définition de la norme d’un vecteur

La norme d’un vecteur est la longueur qui caractérise ce vecteur. Soit le vecteur représenté ci-contre.

Sa norme se note et peut être calculée en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle en  :

........... + ...........

Donc, ................................................ (seule la solution positive est conservée puisqu’une longueur est un réel positif).

Sur base de cet exemple, on voit donc que la norme d’un vecteur peut être calculée à partir de ses composantes.

#### Dans un repère orthonormé du plan,

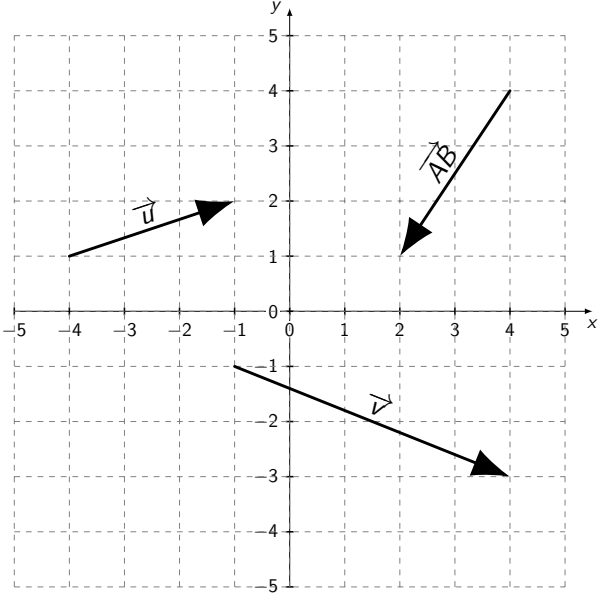
#### Soit un vecteur

#### Alors

#### De plus, si ,

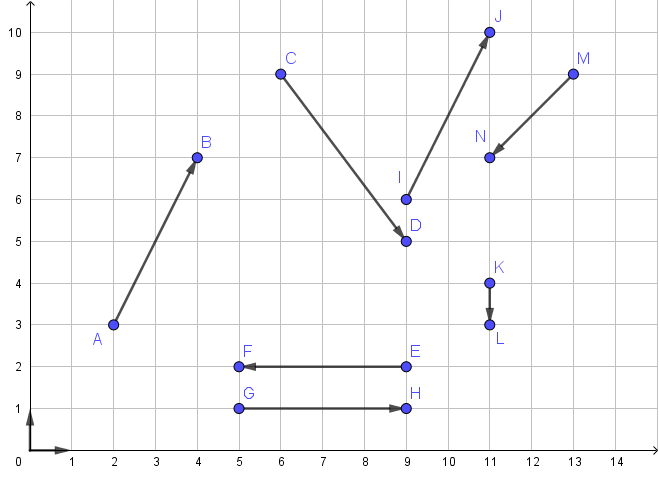
#### Alors

*Exemples :*

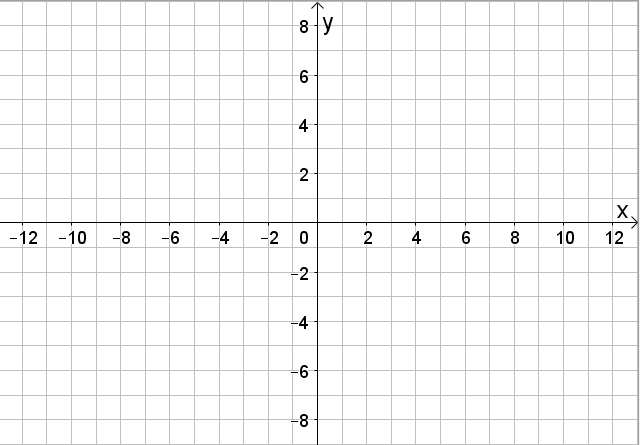
1. La norme du vecteur = vaut : .................................................................................………………………..
2. La norme du vecteur = vaut : .................................................................................………………………..
3. La norme du vecteur = vaut : .................................................................................………………………..

## Exercices

1. Donne les composantes des vecteurs repris ci-dessous.



1. On donne les points .
2. Calcule les composantes des vecteurs , , ,,
3. Construis ces vecteurs dans le repère suivant et vérifie la cohérence de tes réponses.
4. Calcule la norme de ces vecteurs.



1. Dans un repère du plan, on donne les points et . Vérifie que est un parallélogramme dans chacun des cas suivants :
2. Dans un repère du plan, on donne les coordonnées de 3 sommets , et d’un parallélogramme . Détermine par calcul les coordonnées du sommet si
3. Dans un repère du plan, on donne les coordonnées des points et . Détermine les coordonnées des points et sachant que ,

et .

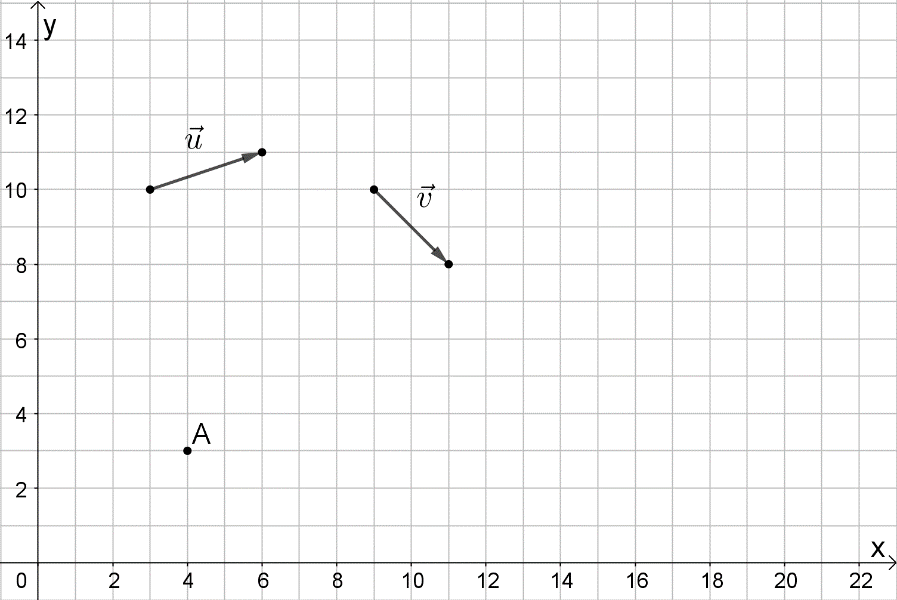
# Somme de vecteurs – Loi de Chasles.

Additionner des vecteurs, c’est tout simplement enchaîner les déplacements qu’ils représentent.

## Introduction

Soient les translations définies par les vecteurs et .

1. A partir du point , composons ces translations l’une après l’autre. Nommons le point image final.
2. Y a-t-il une unique translation qui permettrait d’aller directement de vers  ? Si oui, représente la dans le repère par un vecteur que tu nommeras

 ..... + ......

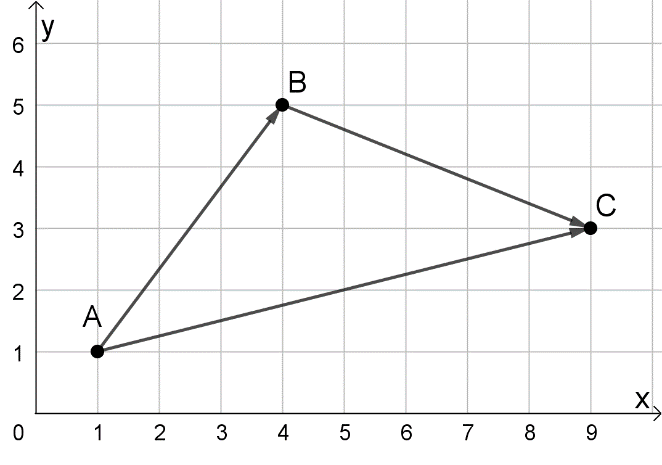
Comment trouver les composantes de à partir de celles de et de  ?

Il suffit d’............................. les composantes des vecteurs et pour trouver celles de .

## Addition de vecteurs consécutifs et – Loi de Chasles.

#### Quels que soient les points *A, B* et *C* du plan :

#### +

Cette loi dit simplement que le déplacement de vers est équivalent au déplacement de vers suivi du déplacement de vers . Elle est fondamentale pour le calcul vectoriel. En effet, elle permet d’exprimer que la somme de deux vecteurs consécutifs est un vecteur dont l’origine est l’origine du premier et dont l’extrémité est l’extrémité du second mais surtout que tout vecteur peut être décomposé en la somme de deux vecteurs consécutifs.

*Remarques* :

* Les vecteurs et sont dits consécutifs car l'origine du second correspond à l'extrémité du premier.
* La loi de Chasles peut être étendue à un nombre quelconque de vecteurs.



………………………………………………………………………………………….........

* Que vaut la somme de deux vecteurs opposés ?

……………………………………………………………………………………………....

………………………………………………………………………………………………

## Addition de vecteurs et de même origine

Pour construire le vecteur + ,

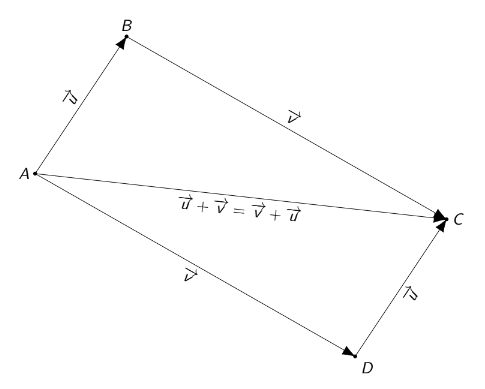
* Construire le représentant du vecteur
* Appliquer la loi de Chasles : + =

*Remarque* : dans ce cas, pour calculer la somme des 2 vecteurs, on peut aussi construire le parallélogramme qu’ils engendrent. Le vecteur somme aura pour origine le point (origine des deux vecteurs à additionner) et sera porté par la diagonale du parallélogramme.

## Addition de vecteurs quelconques et

Pour construire le vecteur ,

* Construire le représentant du vecteur .
* Appliquer la loi de Chasles : = + =



## Propriétés de l’addition vectorielle.

### Commutativité de la somme de vecteurs

Sur la figure ci-contre,

donc revient au déplacement de vers .

Pareillement,

donc revient au déplacement de vers .

On peut en conclure que et que l’addition vectorielle est donc commutative.

### Associativité de la somme de vecteurs

Sur la figure ci-contre,

.

Donc revient au déplacement de vers .

Pareillement,

.

Donc revient au déplacement de vers .

On peut en conclure que et que l’addition vectorielle est donc associative.

## Soustraction de deux vecteurs

Construis - .

-

..... + ......

Il faut donc ajouter à ............................. du vecteur .

#### Pour soustraire deux vecteurs, il suffit d'ajouter au premier le vecteur opposé du second.

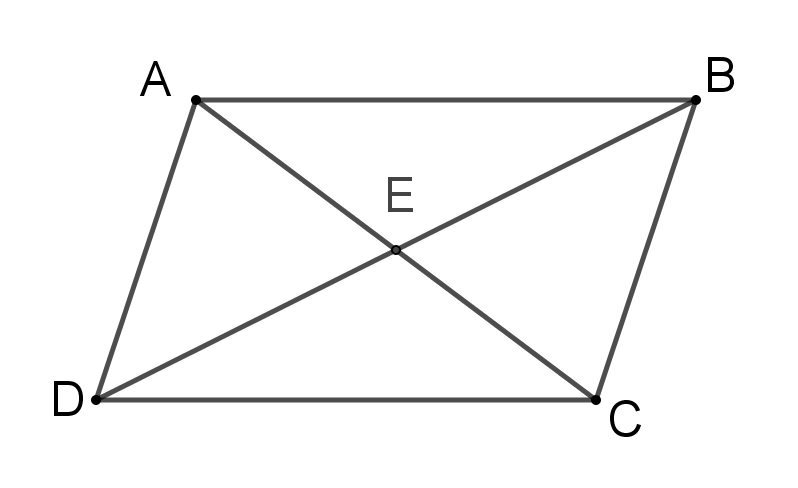
## Composantes du vecteur somme/différence

#### Soient les vecteurs et .

#### Les composantes du vecteur sont

## Exercices

1. On donne le parallélogramme ABCD et ses diagonales qui se coupent en E.



Recherche le vecteur dont la somme est :

a) d) g) +

b) e) + h)

c) f)

1. On donne les points et . Représente en couleur le vecteur dont la somme vaut :

|  |  |
| --- | --- |
| a) |  |
|  |  |
| b) |  |
|  |  |
| c) + |  |

|  |  |
| --- | --- |
| d) + |  |
|  |  |
| e) + |  |
|  |  |
| f) + |  |

|  |  |
| --- | --- |
| g) - |  |
|  |  |
| h) - |  |
|  |  |
| i) - |  |

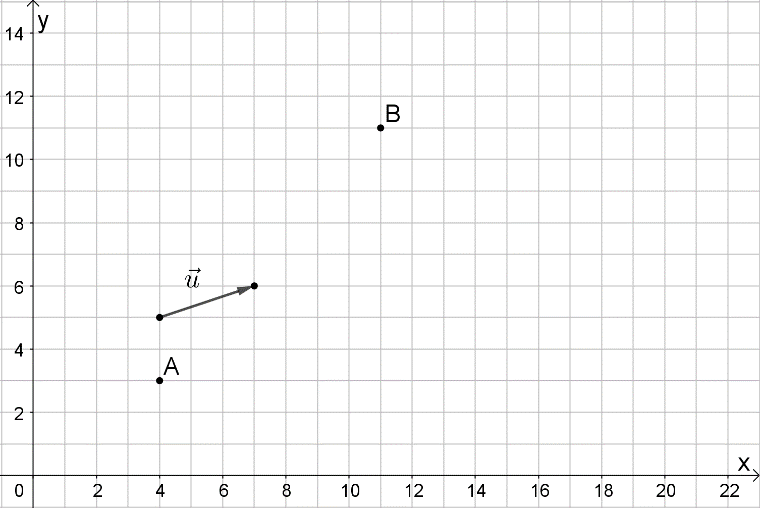
|  |  |
| --- | --- |
| j) - - |  |

# Produit d’un vecteur par un réel

## Introduction

Soit la translation définie par le vecteur .

1. A partir du point , appliquons 5 fois de suite cette translation et nommons le vecteur final obtenu.

 ..... + ..... + ..... + ..... + .....

..... . ......

et ont la même ................................

et ont le même ................................

La norme du vecteur est égale à ..... fois la norme du vecteur .

1. A partir du point , construisons à présent le vecteur

..... + ..... + .....

et ont la même ................................

et ont des ................. opposés

La norme du vecteur est égale à ..... fois la norme du vecteur .

## Définition

#### Soit un vecteur non nul et un réel non nul.

#### Le produit du vecteur par le réel k est le vecteur tel que :

#### a la même direction que

#### a le même sens que

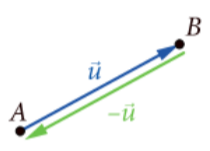
#### a le sens contraire de

#### =

*Exemples :*

|  |  |
| --- | --- |
|  | et |

*Remarques* :

1. Si = , alors =
2. Si , alors =
3. Le vecteur opposé de est

## Composantes du vecteur produit d’un vecteur par un réel.

#### Soit un vecteur et un réel .

#### Les composantes du vecteur sont

## Combinaisons linéaires

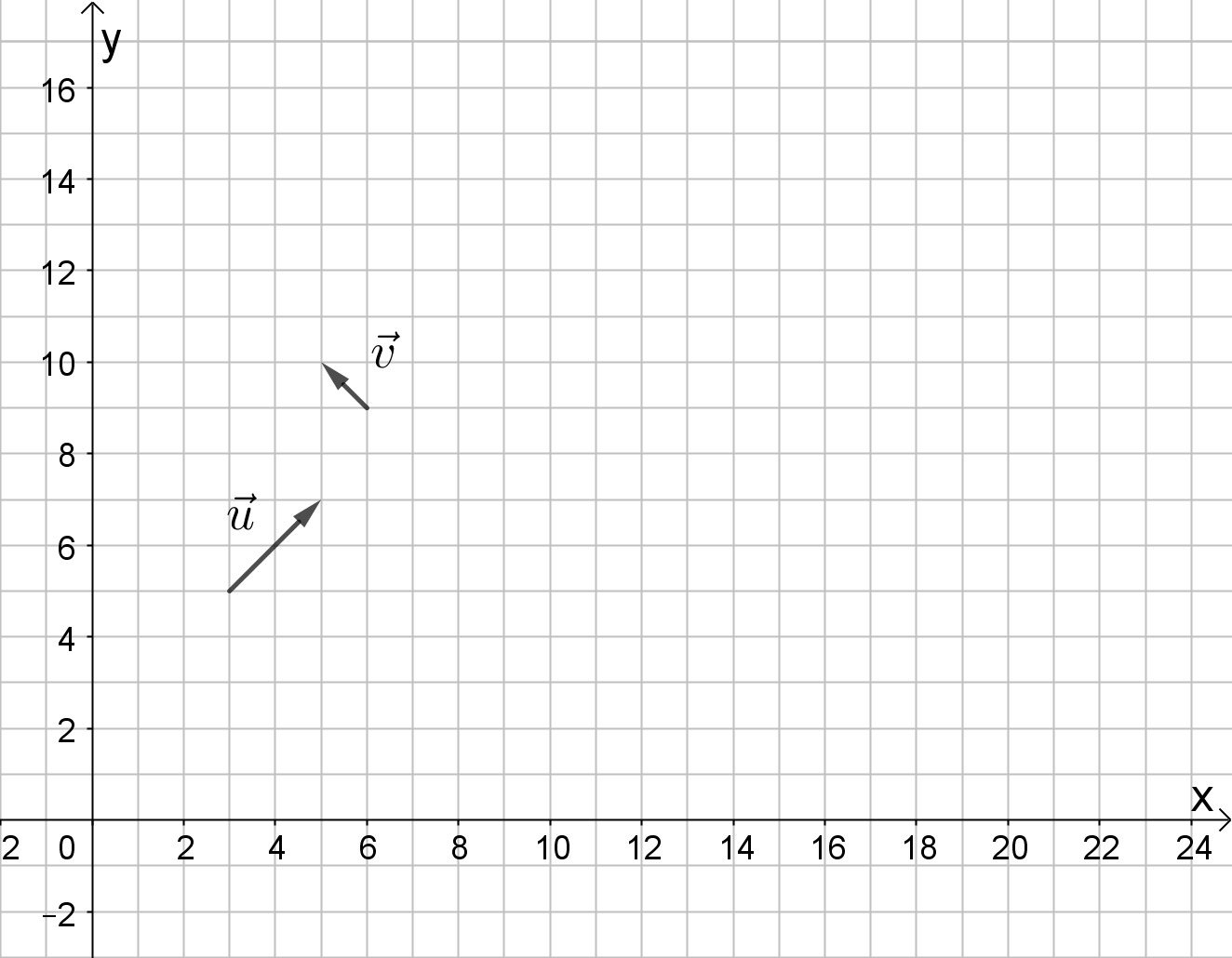
A partir de deux vecteurs donnés, il est possible à l’aide de l’addition et de la multiplication par un réel d’engendrer de nombreux autres vecteurs. Les vecteurs ainsi obtenus sont appelés des combinaisons linéaires des vecteurs donnés.

#### Soit et des vecteurs.

#### Soit et des réels.

#### Un vecteur est combinaison linéaire des vecteurs et si et seulement si

## *Exemples* : trace les vecteurs et dans le repère ci-dessous.

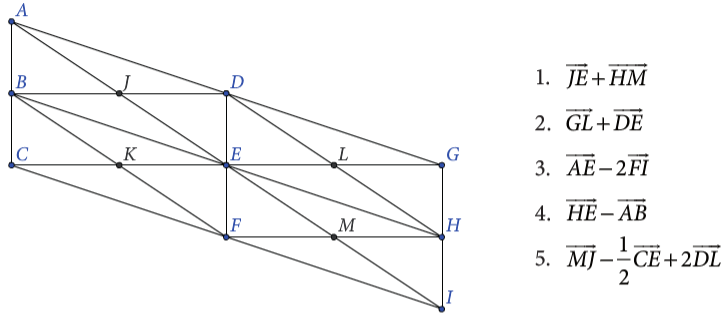


## Exercices

1. Dans le dessin ci-dessous, détermine un vecteur égal à :

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 2.() |  |

1. et sont des parallélogrammes représentés dans la figure ci-dessous. Détermine un représentant de chacun des vecteurs suivants :



1. Détermine les réels et pour que les égalités suivantes soient vraies.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Construis le vecteur égal à





1. Dans un repère du plan, on donne les points et .

Détermine les composantes des vecteurs suivants :

1. Dans le parallélogramme , on nomme , les milieux respectifs des côtés Exprime les vecteurs ci-dessous en fonction de et de .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

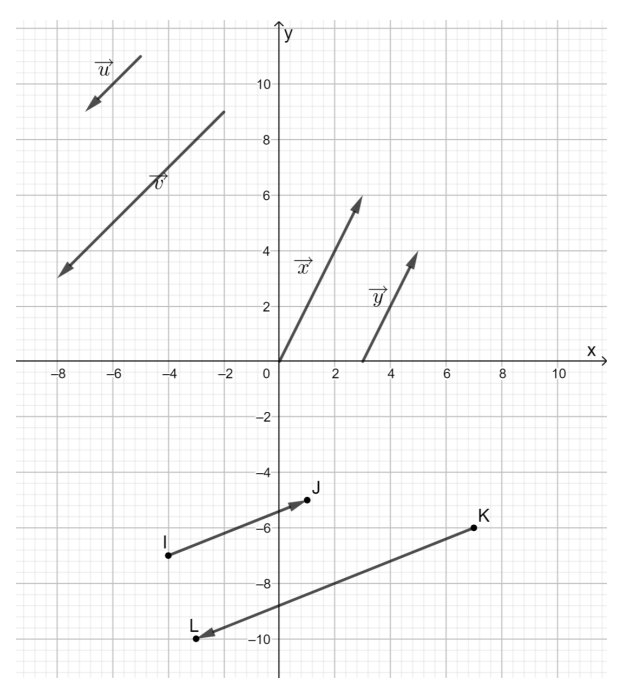
# Vecteurs colinéaires et perpendiculaires

Les notions de vecteurs colinéaires et orthogonaux vont nous permettre de définir précisément les notions de parallélisme et de perpendicularité de droites. En effet, jusqu’à présent, ces deux notions n’ont été introduites que de manière intuitive.

## Vecteurs colinéaires

### Introduction

Dans le repère orthonormé ci-dessous,



* 1. Ecris les composantes des vecteurs représentés.

* 1. Trouve un lien entre les composantes des vecteurs de même direction.
  2. Généralise la situation.

Si et et si et ont la même direction,

Alors ..........................................................ou................................................

### Définitions

#### Deux vecteurs sont dits parallèles ou colinéaires lorsqu’ils ont la même direction.

#### Deux vecteurs et sont colinéaires s’il existe un nombre réel tel que

#### ou

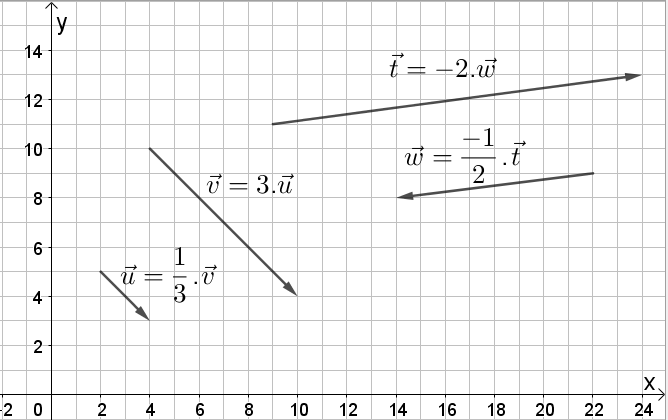
*Remarques* :

* On note
* Le vecteur nul est colinéaire à n’importe quel vecteur .

En effet, quel que soit ,

* Si les 2 vecteurs colinéaires et sont non nuls, alors sera forcément un nombre réel non nul.
* Ces égalités constituent une écriture paramétrique (fait intervenir le paramètre ) de la condition de colinéarité ou parallélisme de 2 vecteurs.

*Exemples* :



Dans cette figure, les vecteurs et ...... sont colinéaires. Il en est de même pour les vecteurs et ....... .

Par contre, les vecteurs et ne sont pas colinéaires.

En effet, pour qu’ils soient colinéaires, il faudrait pouvoir trouver un nombre réel unique tel que . Vérifions si c’est possible.

Il n’est pas possible que soit égal à la fois à et à . Donc et ne sont pas colinéaires.

Il existe un moyen plus rapide de détecter si deux vecteurs sont colinéaires et qui se base sur la propriété suivante.

### Propriété – condition non paramétrique de colinéarité

#### Deux vecteurs et sont colinéaires si et seulement si

#### ou encore si

*Remarque* : Cette égalité constitue une écriture non paramétrique (ne fait plus intervenir le paramètre ) de la condition de colinéarité ou parallélisme de 2 vecteurs.

*Démonstration* :

On ne fera la démonstration que dans le cas où les composantes du vecteur sont non nulles.

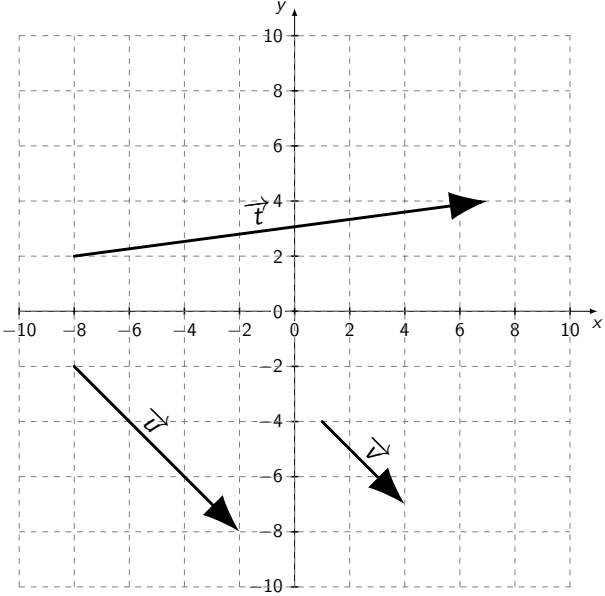
et sont colinéaires si et seulement si :

Par conséquent, il faut que :

Et donc que  .............. (par application du produit en croix)

*Exemples* :

Revenons aux exemples précédents.

Les vecteurs et sont colinéaires.

On peut constater que :

Les vecteurs et ne sont pas colinéaires.

On peut constater que :

### Exercices

1. En n’utilisant que les points figurant sur la figure, cite trois vecteurs différents qui ne sont pas égaux à mais qui sont colinéaires à .



1. Vrai ou Faux
2. Deux vecteurs égaux sont colinéaires.
3. Deux vecteurs opposés sont colinéaires.
4. Deux vecteurs colinéaires sont égaux.
5. Deux vecteurs colinéaires sont opposés.
6. Détermine la valeur à donner au paramètre pour que les vecteurs
   1. et soient colinéaires.
   2. et soient colinéaires.

## Propriétés diverses

### Condition de parallélisme de 2 droites

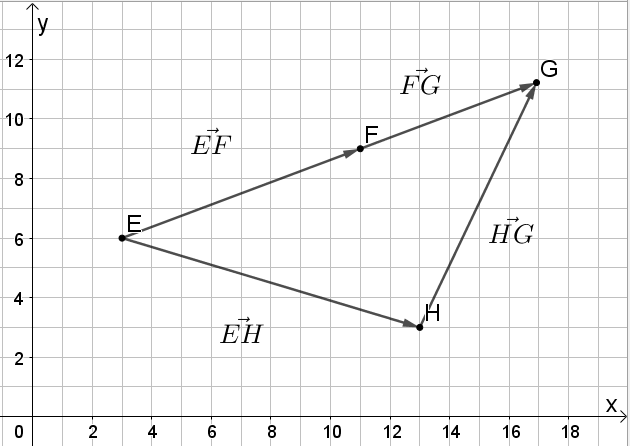
#### Soit 4 points distincts , , et .

#### La droite et la droite sont parallèles si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires.

### Alignement de trois points

#### Trois points distincts et sont alignés si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires.

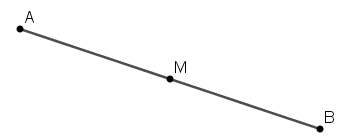
*Exemples :*

**

Dans la figure ci-contre :

* Les points et sont alignés. Ceci revient à dire que les vecteurs et sont colinéaires.
* Les points et ne sont pas alignés. De ce fait, les vecteurs et ne sont pas colinéaires.

### Milieu d’un segment

Soit le segment et son point milieu. Il est possible de caractériser la position du point à l’aide des vecteurs :

|  |  |
| --- | --- |
| est le milieu de si et seulement si |  |

*Remarque* : L’égalité est équivalente aux égalités suivantes ou

#### Soit les points et .

#### Si est le milieu de alors a pour coordonnées

*Démonstration*:

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

*Exemple n°1 :*

|  |  |
| --- | --- |
|  | Coordonnées du point  :  Coordonnées du point  :  Coordonnées du point  : |

*Exemple n°2 :* Dans un repère du plan, on donne les points et . Détermine les coordonnées du point , milieu de .

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

### Exercices

1. Dans un repère du plan, on donne les points et .
2. Soit le point . Vérifie par calcul que les vecteurs et sont colinéaires.
3. Soit le point . Détermine la valeur à donner à pour que les vecteurs et sont colinéaires.
4. Détermine les coordonnées du point sachant que est au 2/3 du segment
5. Dans un repère du plan, on donne les points ,,, et .
6. Vérifie, par calcul, que les vecteurs et sont colinéaires.
7. Soit . Détermine la valeur à donner à sachant queles vecteurs et sont colinéaires.
8. Soit . Détermine la valeur à donner à sachant que les vecteurs et sont colinéaires.

## Vecteurs perpendiculaires

### Introduction

1°) Dans les repères orthonormés ci-dessous, les vecteurs représentés sont perpendiculaires et **de même norme**. Pour chaque situation, donne les composantes des vecteurs représentés et trouve un lien entre les composantes.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Pour passer des composantes d’un vecteur à un second perpendiculaire de même norme, il suffit de ............................... les composantes et de prendre l’............................. d’une des 2 composantes.

Soit

Un vecteur est perpendiculaire à et de même norme si et seulement si

ou

2°) Dans les repères orthonormés ci-dessous, les vecteurs représentés sont perpendiculaires et **de normes différentes**. Pour chaque situation, donne les composantes des vecteurs représentés, calcule leur norme. Trouve un lien entre les composantes.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### Définitions

#### Deux vecteurs (non nuls) et sont perpendiculaires lorsque deux de leurs représentants issus d’un même point forment un angle droit.

#### Soit .

#### Un vecteur est perpendiculaire à si et seulement s’il existe un nombre réel tel que ou

*Remarque* : C’est une écriture paramétrique de la condition de perpendicularité de 2 vecteurs. A partir de celle-ci, on peut écrire une condition non paramétrique.

### Propriété – condition non paramétrique de perpendicularité

#### Deux vecteurs et sont perpendiculaires si et seulement si

*Remarque* : C’est une écriture non paramétrique (ne fait plus intervenir le paramètre k) de la condition de perpendicularité de 2 vecteurs.

*Démonstration* :

### Les vecteurs et sont perpendiculaires si et seulement si

*Exemple* :

Les vecteurs et sont perpendiculaires.

On peut constater que :

### Exercices

1. Détermine les composantes d’un vecteur tel que :

et sont deux vecteurs perpendiculaires de même norme

1. Détermine les composantes d’un vecteur tel que :

et sont deux vecteurs perpendiculaires

1. Détermine les composantes d’un vecteur tel que :

et sont deux vecteurs perpendiculaires

1. Vérifie si les vecteurs ci-dessous sont perpendiculaires.
   1. et
   2. et
2. Détermine la valeur du paramètre pour que les vecteurs
   1. et soient perpendiculaires.
   2. et soient perpendiculaires.

# Exercices supplémentaires sur le calcul vectoriel

1. Dans la figure ci-contre, les hexagones sont des hexagones réguliers de centre R,

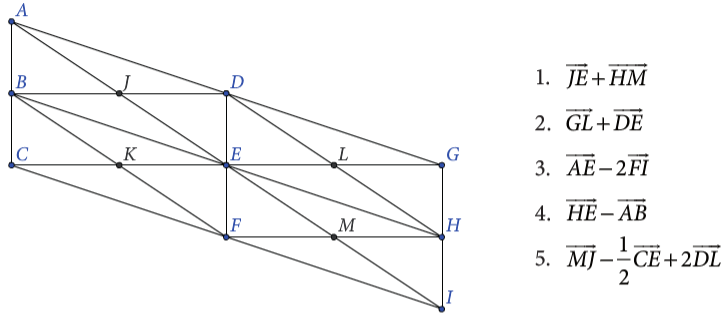
S, T et U. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Soit le vecteur et soient les points et . Construis :

|  |  |
| --- | --- |
| 1. le vecteur égal à et d’origine . 2. le vecteur égal à et d’extrémité . 3. le vecteur opposé à et d’origine . 4. le vecteur opposé à et d’extrémité. |  |

1. et sont des parallélogrammes représentés dans la figure ci-dessous. Détermine un représentant de chacun des vecteurs suivants :



1. Détermine les réels et pour que les égalités suivantes soient vraies.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Complète et représente (en couleur) ci-dessous un vecteur dont la somme vaut :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) | b) | c) |
|  |  |  |

1. Soient les points . Construis un représentant des vecteurs suivants :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. + 2. + 3. - |  |

1. Détermine les composantes et la norme du vecteur connaissant les coordonnées des points A et B.
2. et
3. et
4. et
5. et
6. et
7. Vrai ou faux ? Esquisse un schéma pour t’aider.

Soit le parallélogramme dont les diagonales se coupent en .

1. Vérifie si les points suivants sont alignés :
2. *, et*
3. *, et*
4. Soient, dans le repère du plan, les points , , et .
5. Calcule les composantes des vecteurs suivants :
6. Détermine les coordonnées du point pour que soit un parallélogramme.
7. Détermine les coordonnées du point milieu de
8. La droite dans le plan

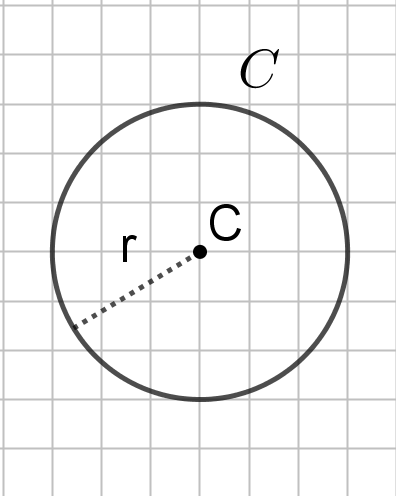
# Introduction

#### Un lieu géométrique est un ensemble de points qui ont une (ou plusieurs) propriété(s) géométrique(s) commune(s).

Cela signifie que tous les points du lieu jouissent de cette (ou ces) propriété(s) et qu’ils sont les seuls.

*Exemples :*

1. En se basant sur l’axiome d’Euclide « Par deux points donnés passe une et une seule droite », une droite peut se définir comme le lieu géométrique des points alignés à deux points donnés.
2. Le lieu des points situés à égale distance d’un point C est le cercle C.



L’équation d’un lieu est l’écriture de la propriété vérifiée par n’importe quel point appartenant à ce lieu.

Si un point appartient au lieu, ses coordonnées vérifient l’équation du lieu et réciproquement.

# De l’alignement de trois points à l’équation vectorielle d’une droite

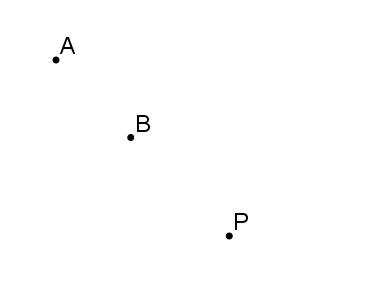
## Activités introductives

### Egalité vectorielle en cas d’alignement de 3 points

Dans la figure ci-dessous, les vecteurs et qui ont la même origine sont colinéaires.

Que peut-on dire des points , et ? ..........................................................................

Ecris l’égalité vectorielle reliant les vecteurs et  : .................................................



Représente 3 points et alignés.

Cite, au départ de cette situation, deux vecteurs colinéaires : .....................................

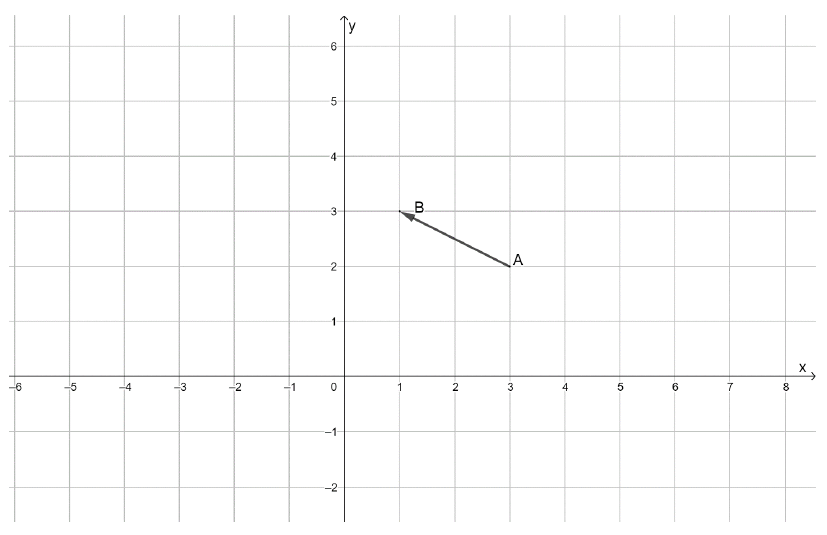
Ecris une égalité vectorielle faisant intervenir ceux-ci : ................................................

Y a-t-il une seule possibilité pour ces deux dernières questions ? .........

### Rôle du paramètre

1. Dans le repère orthonormé ci-dessous,

* Place le point tel que avec
* Place le point tel que avec
* Place le point tel que avec
* Place le point tel que avec
* Place le point tel que avec
* Place le point tel que avec



1. Quelle valeur faut-il donner à pour obtenir le point en  ?

..... .

1. Quelle valeur faut-il donner à pour obtenir le point en  ?

..... .

1. Le point est-il aligné avec et  ? Justifie en utilisant la condition de colinéarité de deux vecteurs.

Si les points , et étaient alignés, alors les vecteurs et devraient être ........................

Vérifions-le.

1. Le point est-il aligné avec et  ? Justifie en utilisant la condition de colinéarité de deux vecteurs.

Tous les points vérifiant l’égalité avec sont alignés avec les points et . L’ensemble de ces points constituent la droite passant par les points et .

Les points n’appartenant pas à la droite ne vérifient pas l’égalité avec .

Cette égalité vectorielle constitue donc une **équation vectorielle** de la droite passant par les points et . On écrira :

avec

Ceci se lit « la droite **a pour équation** avec  »

### Vecteur directeur de la droite

1. Soit les points et . Soit un point quelconque aligné avec et . Donne une équation vectorielle de la droite passant par les points et .
2. Détermine les coordonnées d’un autre point appartenant à la droite .

Soit .

Si appartient à la droite , alors les points , et sont alignés et les vecteurs et sont ........................

On peut donc écrire que ............................................... et choisir arbitrairement une valeur .

1. Cite un vecteur qui indique la direction de la droite . Donne ses composantes. En existe-t-il d’autres ?

Un vecteur qui indique la direction de la droite est appelé **vecteur directeur** de la droite. Il en existe une infinité pour une droite donnée.

## Equation vectorielle d’une droite et vecteur directeur

#### où est un réel et un point quelconque de la droite est appelée équation vectorielle de la droite .

#### Le vecteur est appelé vecteur directeur de la droite 𝑑 passant par les points 𝐴 et 𝐵.

*Remarques* :

* le symbole se lit « a pour équation ».
* est appelé le paramètre.
* Il existe une infinité de vecteurs directeurs de et donc une infinité d’équations vectorielles pour .
* Tout multiple non nul d’un vecteur directeur de la droite 𝑑 est aussi un vecteur directeur de la droite 𝑑.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Les vecteurs , , , ,.... sont des vecteurs directeurs de la droite .  Si la droite est parallèle à alors le vecteur est aussi un vecteur directeur de la droite . |

# De l’équation vectorielle à l’équation cartésienne en passant par les équations paramétriques

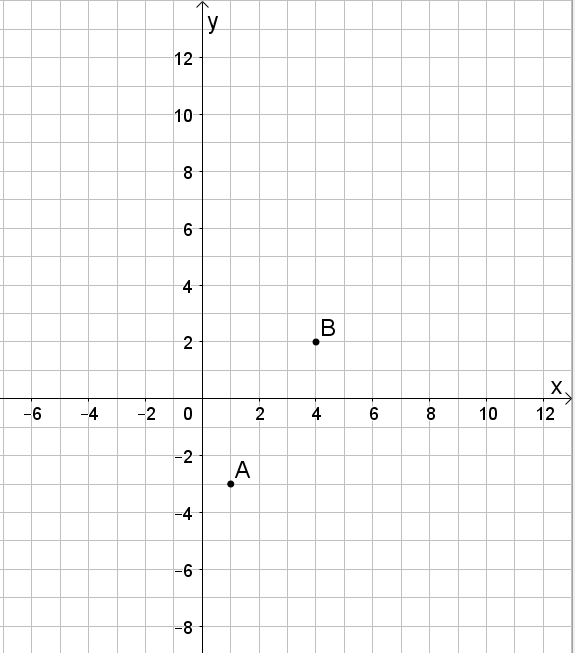
## De l’équation vectorielle aux équations paramétriques

Soit les points et . Soit un point quelconque de coordonnées appartenant à la droite .

1. Donne une équation vectorielle de la droite passant par les points et .
2. Dans l’égalité vectorielle obtenue, remplace les vecteurs par leurs composantes et développe au maximum de manière à isoler les coordonnées du point .

Le système de deux équations obtenu décrit les **équations paramétriques** de la droite. Il n’est vérifié que pour les points appartenant à la droite. Les deux équations explicitent la propriété vérifiée par l’abscisse 𝑥 et l’ordonnée 𝑦 d’un point quelconque de la droite 𝑑.

1. En remplaçant par une valeur quelconque dans les équations obtenues, par exemple , on obtient les coordonnées d’un point de la droite .
2. A l’aide des équations obtenues, détermine l’ordonnée du point appartenant à la droite et ayant pour abscisse.
3. Détermine l’abscisse du point appartenant à la droite et ayant pour ordonnée.
4. Vérifie tes réponses en te servant du repère ci-dessous.



## Equations paramétriques d’une droite

Soit , et un point quelconque de la droite .

Repartons de l’équation vectorielle (), exprimons les vecteurs en termes de composantes et isolons les coordonnées du point .

Ces équations permettent de déterminer l’abscisse et l’ordonnée de n’importe quel point de la droite en donnant une valeur au **paramètre** .

#### est le système des équations paramétriques de la droite passant par les points et .

Un point appartient à la droite si et seulement si son abscisse et son ordonnée vérifient chaque égalité pour une même valeur de .

*Remarques :*

Il existe une infinité de systèmes d’équations paramétriques pour une droite selon le choix arbitraire qui a été fait pour le point de départ du déplacement et pour le vecteur directeur lors de l’écriture de l’équation vectorielle de départ.

## Des équations paramétriques à l’équation cartésienne d’une droite

Soit une droite passant par les points et .

1. Cite un vecteur directeur de et donne ses composantes.
2. Ecris un système d’équations paramétriques de la droite (sans passer par l’étape de l’équation vectorielle).
3. Isole le paramètre au départ des équations paramétriques et égale les expressions obtenues.

L’équation obtenue ne contient plus le paramètre et est appelée **équation cartésienne** de la droite .

## Equation cartésienne d’une droite

Repartons du système d’équations paramétriques d’une droite passant par les points et et isolons le paramètre dans les deux équations :

Sachant que les coordonnées de chaque point de la droite peuvent être obtenues en prenant une valeur de identique dans les deux égalités, égalons les deux expressions obtenues pour  :

#### Soient , et un point de la droite

#### est une équation cartésienne de la droite pour autant que :

#### : la droite n’est pas parallèle à l’axe …..

#### : la droite n’est pas parallèle à l’axe …..

*Remarques :*

* Le paramètre n’intervient plus dans l’équation.

*Exemple :*

Soit une droite passant par les points et .

1. Cite un vecteur directeur de et donne ses composantes.
2. Ecris une équation cartésienne de la droite (sans passer par l’équation vectorielle, ni le système d’équations paramétriques).
3. Applique la propriété des proportions (produit des moyens = produit des extrêmes) et regroupe tous les termes dans le membre de gauche de l’égalité.

Cette seconde équation est une autre forme de l’**équation cartésienne** de la droite . A nouveau, le paramètre n’apparaît plus. L’équation exprime directement le lien entre l’abscisse et l’ordonnée d’un point quelconque de la droite .

1. Observe l’équation obtenue. Trouve un lien entre les coefficients de et de et les composantes du vecteur directeur.

#### Toute droite admet une équation cartésienne de type (avec , et des nombres réels et avec et non simultanément nuls).

#### et sont respectivement la composante verticale et l’opposé de la composante horizontale d’un même vecteur directeur de la droite.

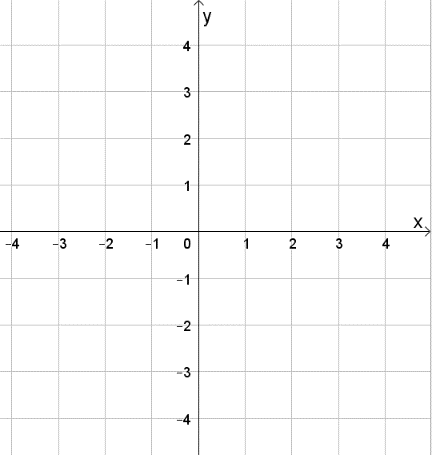
*Remarque* : on appelle cette forme de l’équation la **forme implicite**.

1. Reprends l’équation obtenue au point 3. et isole dans le membre de gauche de cette équation. Que constates-tu ?

Cette forme sera appelée **forme explicite** de l’équation et a déjà été étudiée dans le cours de 3ème. Nous verrons ultérieurement que cette forme n’existe pas pour toutes les droites. Les droites verticales n’admettent pas d’équation de cette forme.

### Cas particulier : droite parallèle à l’axe

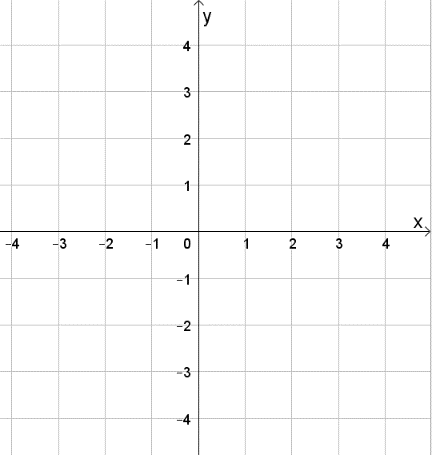
1. Quelle est la particularité des vecteurs directeurs de ces droites ?
2. Quelle est la particularité de leurs équations paramétriques/cartésiennes?
3. Trace la droite horizontale passant par le point dans le repère ci-dessous et note les coordonnées de quelques points de cette droite. Quelle est leur propriété commune ?



1. Traduis cette propriété commune par une équation.

### Cas particulier : droite parallèle à l’axe

1. Quelle est la particularité des vecteurs directeurs de ces droites ?
2. Quelle est la particularité de leurs équations paramétriques/cartésiennes?
3. Trace la droite verticale passant par le point dans le repère ci-dessous et note les coordonnées de quelques points de cette droite. Quelle est leur propriété commune ?



1. Traduis cette propriété commune par une équation.

## Exercices

1. Une équation cartésienne d’une droite est .

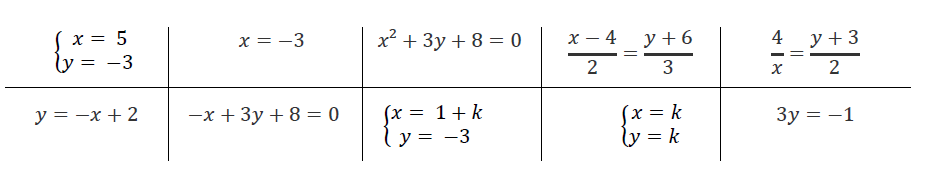
Donne deux autres formes de cette équation cartésienne.

* 1. Reconnais parmi les équations de droites données ci-dessous, les équations paramétriques et les équations cartésiennes. Donne pour chacune d’entre elles, les coordonnées d’un point appartenant à la droite et un vecteur directeur de celle-ci.

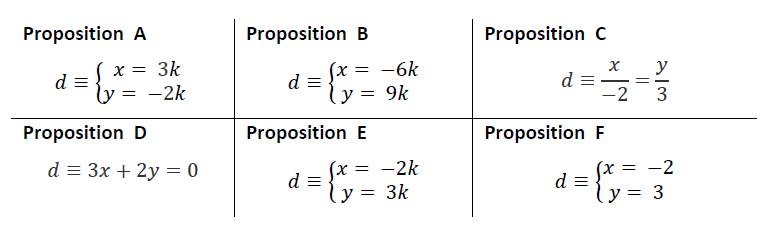
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

* 1. Vérifie si le point de coordonnées appartient aux droites ci-dessus.

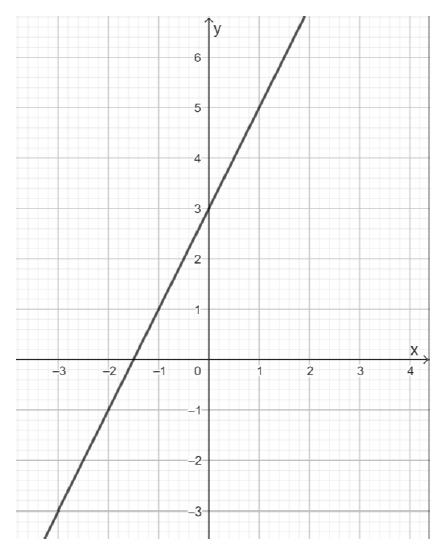
1. Soit la droite passant par les points et . Soit un point quelconque de coordonnées appartenant à la droite .
   1. Donne une équation vectorielle de la droite passant par les points et .
   2. Donne des équations paramétriques de .
   3. Donne une équation cartésienne de sous forme implicite et sous forme explicite.
   4. Vérifie si le point appartient à .
2. Parmi les 10 égalités proposées, repère celles qui sont des équations de droite. Uniquement pour celles-là, précise le type d’équations (paramétrique ou cartésienne). Précise aussi si la droite correspondante est quelconque ou parallèle aux axes.



1. La droite 𝑑 passe par l’origine et les composantes d’un de ces vecteurs directeurs sont . Parmi les égalités ci-dessous, quelles sont les équations de 𝑑 ?



1. Ecris une équation cartésienne (sous forme explicite) de la droite représentée.



# Coefficient angulaire d’une droite (non verticale)

Il est plus facile de déterminer une équation cartésienne d’une droite lorsqu’on connaît son coefficient angulaire . Le coefficient angulaire d’une droite(pente ou coefficient directeur) est un nombre qui caractérise l’inclinaison de la droite par rapport à l’axe des abscisses. **Il n’est pas défini pour des droites parallèles à l’axe (droites verticales)**.

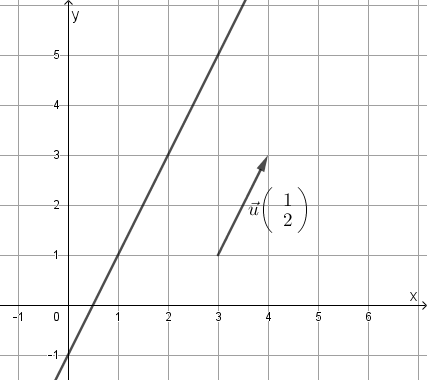
## Coefficient angulaire d’une droite dont on connait un vecteur directeur

#### On appelle coefficient angulaire (ou pente) d’une droite (non verticale) le rapport entre la composante verticale et la composante horizontale d’un vecteur directeur de cette droite.

#### Soit un vecteur directeur de .

#### avec

*Exemple :*



*Remarques :*

* Le coefficient angulaire ne dépend pas du vecteur directeur choisi.
* Si on choisit un vecteur directeur dont la composante horizontale vaut , alors sa composante verticale sera égale à .

En effet,

Par conséquent,

Et si , alors

* Retenons que si la pente de la droite est , alors un vecteur directeur de la droite est

## Coefficient angulaire d’une droite passant par deux points

#### Soit deux points et appartenant à .

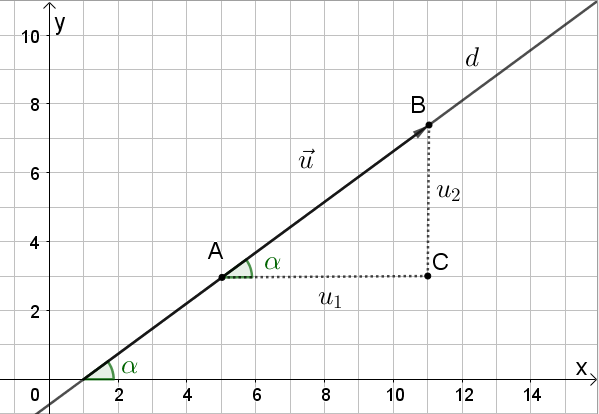
*Exemples :*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

## Coefficient angulaire d’une droite formant un angle avec l’axe des

#### Soit l’angle orienté que fait la droite avec le demi-axe des abscisses (voir figure ci-dessous).

*Démonstration*(dans le cas où )



Dans le triangle rectangle en ,

## Interprétation du coefficient angulaire

#### Lorsque , la droite est …………….………………….………...…….

#### Lorsque , la droite est ……………….………………………..……...

#### Lorsque , la droite est ……………………………………………….………………

#### Lorsque n’est pas défini, la droite est ………………………………………………..

## Réécriture de l’équation cartésienne explicite d’une droite

Repartons de la forme implicite de l’équation d’une droite.

Lorsque la droite n’est pas verticale, c’est-à-dire lorsque la composante horizontale des vecteurs directeurs n’est pas nulle et donc lorsque , il est toujours possible d’isoler dans l’équation.

avec un vecteur directeur de .

Il s’agit donc du .................................................................... de la droite.

est la valeur que prend lorsque s’annule.

Il s’agit donc de .................................................................... de la droite.

#### est une équation cartésienne explicite de la droite de coefficient angulaire égal à et d’ordonnée à l’origine égale à .

*Remarque* : un vecteur directeur de la droite est le vecteur .

*Exemple :*

Soit la droite qui passe par le point et par le point .

Donne une équation cartésienne sous forme explicite de .

## Exercices

1. Pour chaque situation décrite ci-dessous,
   1. Représente la droite.
   2. Détermine la pente de la droite (sans utiliser la représentation) et illustre ensuite ta réponse.
   3. Donne son équation cartésienne (sous forme explicite si possible) et vérifie ta réponse en utilisant la représentation.

|  |  |
| --- | --- |
| passe par le point et a pour vecteur directeur |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| passe par le point de coordonnées et forme un angle de avec l’axe des abscisses. |  |
| passe par les points et |  |
|  |  |
|  |  |

1. Ecris une équation cartésienne sous forme explicite si possible des droites suivantes. Ensuite, trace-les.

|  |  |
| --- | --- |
| passant par et |  |
| passant par et |  |
| passant par et |  |
| passant par et qui n’est pas défini |  |
| passant par et |  |
| dont l’ordonnée à l’origine vaut 5 et |  |

1. Parmi ces droites, repère celles qui passent par l’origine du repère, et celles qui sont parallèles à l’un ou l’autre axe du repère.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Soit la droite
2. Quel est le coefficient angulaire de la droite  ?
3. Quelle est l’ordonnée à l’origine de la droite  ?
4. En quel point la droite traverse-t-elle l’axe  ?
5. Quelles sont les coordonnées du point dont l’ordonnée vaut 4 ?
6. Quelles sont les coordonnées du point dont l’abscisse vaut 6 ?
7. Représente la droite et vérifie graphiquement les réponses obtenues.

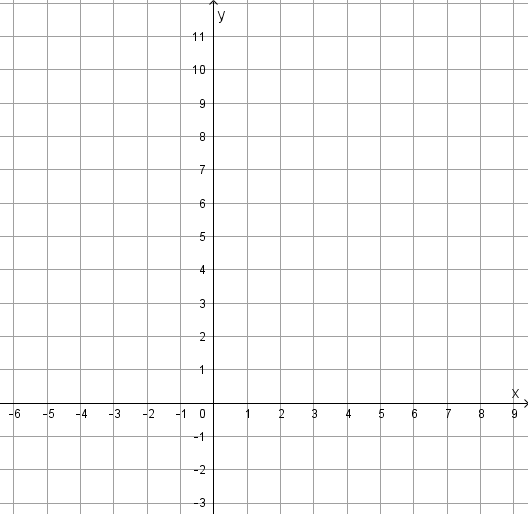


1. Détermine une équation cartésienne des droites représentées ci-dessous.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

*Exercices supplémentaires*

1. Ecris une équation cartésienne sous forme explicite si possible et trace les droites suivantes :
2. passant par et
3. passant par et
4. passant par et
5. passant par et
6. passant par et
7. passant par et
8. passant par et parallèle à l’axe des
9. avec et



1. Parmi ces droites, repère celles qui passent par l’origine, et celles qui sont parallèles à l’un ou l’autre axe du repère.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Vérifie si les points suivants appartiennent à la droite donnée.
2. Le point appartient-il à la droite d’équation
3. Le point appartient-il à la droite d’équation

*Solutions*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. a) : la droite passe par l’origine b) c) d) /
2. a) b)

# Synthèse

Considérons les points et . Soit un point quelconque de la droite .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Equations de la droite** | **Vecteur directeur** | **Coefficient angulaire / pente** |
| Vectorielle : | Tout multiple non nul de | Avec et  *Remarques :*   * Si la droite est parallèle à l’axe , alors n’est pas défini et . * Si la droite est parallèle à l’axe , alors   et . |
| Paramétriques : |
| Cartésienne :  *Remarque :* forme valable uniquement pour droites non parallèles à l’axe ou à l’axe . |
| Forme implicite :  Avec et non simultanément nuls |  | Avec |
| Forme explicite :    Avec l’ordonnée à l’origine  *Remarque :* forme valable uniquement pour droites non parallèles à l’axe . |  |  |

*Remarque :* Le coefficient angulaire peut également être obtenu à l’aide de l’angle formé entre la droite et l’axe horizontal : .

# Parallélisme et perpendicularité de droites

## Introduction

Observons les droites tracées dans le repère ci-dessous et déterminons leur coefficient angulaire.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | | --- | --- | | Droites | Coefficients angulaires | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |

Que constates-tu ?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

## Critère de parallélisme de 2 droites non parallèles à l’axe Oy

#### Deux droites et non parallèles à l’axe sont parallèles entre elles si et seulement si leur coefficient angulaire sont égaux, c’est-à-dire si

#### (non parallèles à l’axe )

*Démonstration :*

Soit une droite dont un vecteur directeur est .

Soit une droite, parallèle à dont un vecteur directeur est .

Démontrons que et sont parallèles si et seulement si .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Justifications |
| // ssi | ............................................................. | Condition de parallélisme de deux droites |
| // ssi | ............................................................. | Expression des vecteurs en termes de composantes |
| // ssi | ..........................................................(1)  ..........................................................(2) | Ecriture sous la forme d’un système d’équations |
| // ssi | ............................................................. | En divisant (2) par (1)  C.E. : ....................................  ............................................... |
| // ssi | ............................................................. | Selon la définition de la pente d’une droite |

*Remarque :* les droites doivent être non parallèles à l’axe car ………………………..

………………………………………………………………………………………………......

## Critère de perpendicularité de 2 droites non parallèles aux axes

#### Deux droites et non parallèles aux axes sont perpendiculaires entre elles si et seulement si le produit de leur coefficient angulaire vaut -1, c’est-à-dire si

#### (non parallèles aux axes)

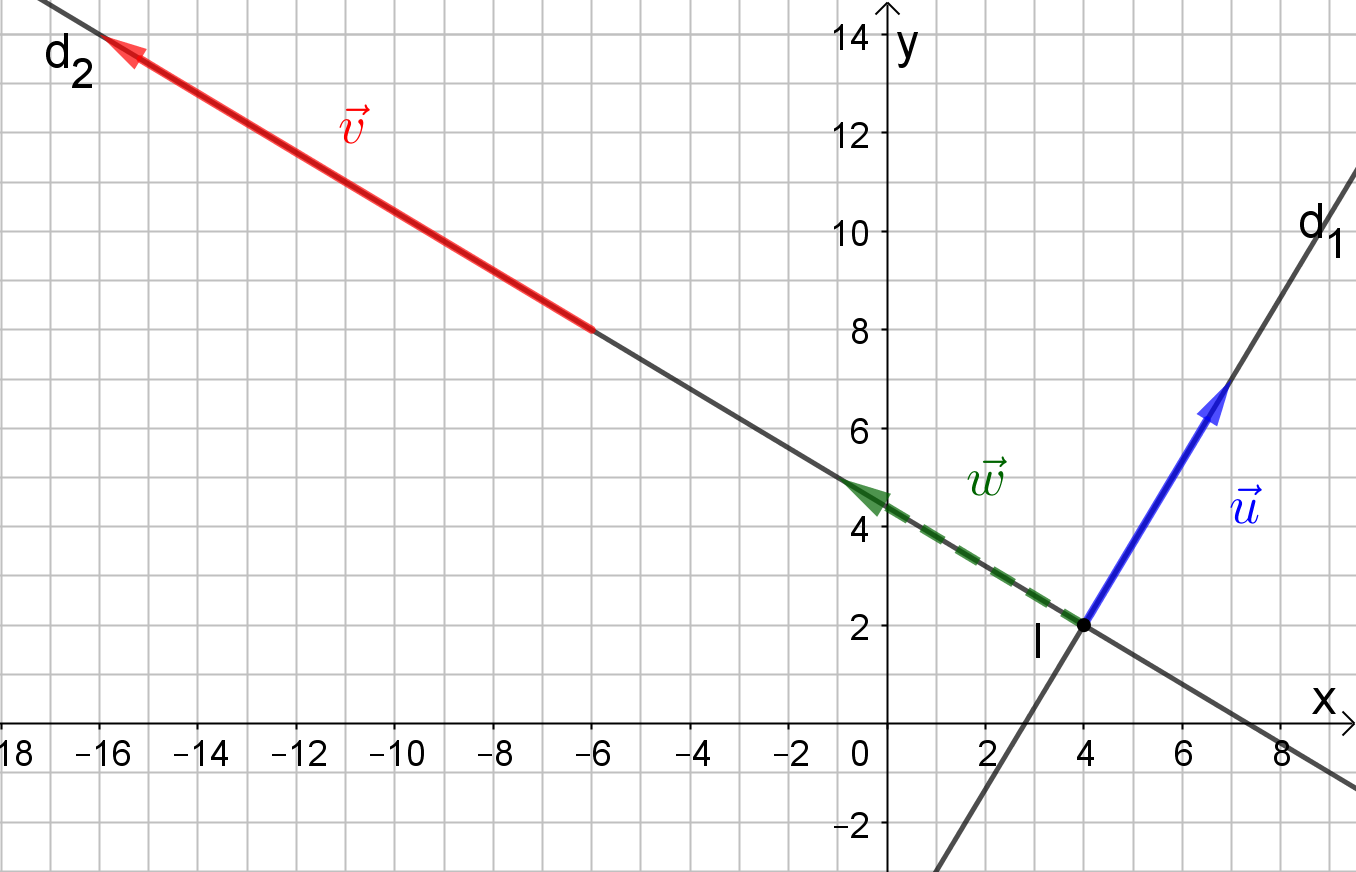
*Démonstration :*

Démontrons que si et sont perpendiculaires alors et admettons la réciproque (c’est-à-dire : si alors et sont perpendiculaires).

Soit une droite dont un vecteur directeur est .

Soit une droite, perpendiculaire à dont un vecteur directeur est .

Soit le point d’intersection de et de .



Appliquons une rotation de 90° dans le sens anti-horlogique et de centre au vecteur .

Appelons le vecteur obtenu et déterminons ses composantes à l’aide de celles du vecteur : .

|  |  |
| --- | --- |
| Si et sont perpendiculaires, alors les vecteurs et sont colinéaires (ils ont la même direction) et leurs composantes sont proportionnelles. On peut donc écrire que : | ………………………………………… |
| Expression des vecteurs en termes de composantes : | ..........................................................  ..........................................................  ......................................................... |
| Ecriture sous la forme d’un système d’équations : | ..........................................................  ..........................................................  .......................................................... |
| Exprimons le produit des pentes des droites et  : | ..........................................................  ..........................................................  ..........................................................  .......................................................... |

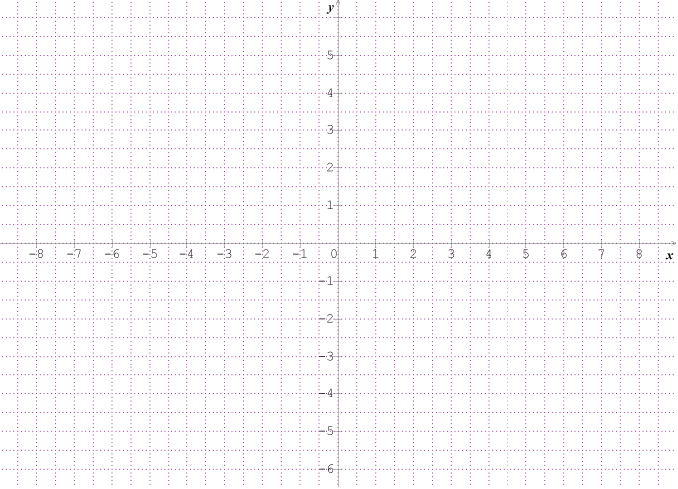
*Remarque :* les droites doivent être non parallèles aux axes car ………………………..

………………………………………………………………………………………………......

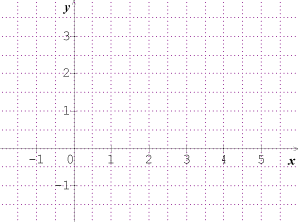
………………………………………………………………………………………………......

## Exercices

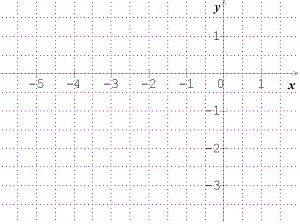
1. Donne une équation cartésienne (si possible sous forme explicite) et représente chacune des droites ci-dessous à la page suivante :
2. la droite , passant par le point et parallèle à la droite .
3. la droite , passant par le point et parallèle à la droite qui passe par les points et .
4. la droite , passant par le point et parallèle à la droite qui passe par les points et .



1. Donne une équation cartésienne de la droite comprenant le point et perpendiculaire à la droite :
2. et
3. et
4. et passant par les points et .
5. Le triangle est donné par les coordonnées de chaque sommet : , et .
6. Trace ce triangle dans le repère ci-dessous.



1. Trace les médianes issues des sommets et et écris leur équation (sans te baser sur le schéma ci-dessus qui ne servira qu’à vérifier les résultats).
2. Calcule les coordonnées du point , intersection des deux médianes (sans te baser sur le schéma ci-dessus qui ne servira qu’à vérifier les résultats).
3. Complète : Les médianes d’un triangle se coupent en un point qui est appelé ……………………………………….. du triangle. Celui-ci est situé aux …… de chaque médiane à partir du sommet correspondant.
4. Vérifie que le point appartient à la troisième médiane (sans te baser sur le schéma ci-dessus qui ne servira qu’à vérifier les résultats).
5. Le triangle est donné par les coordonnées de chaque sommet : , et .
6. Trace le triangle et sa hauteur issue du sommet dans le repère ci-dessous.



1. Ecris l’équation de la hauteur (sans te baser sur le schéma ci-dessus qui ne servira qu’à vérifier le résultat).
2. En quel point la hauteur traverse-t-elle l’axe  ?
3. Vérifie que les deux droites décrites ci-dessous sont perpendiculaires :

- droite passant par les points et .

- droite passant par les points et .

1. Soit le triangle avec , et .
2. Représente le triangle et complète ton dessin au fur et à mesure.
3. Démontre que le triangle est rectangle en .
4. Détermine l’équation des médiatrices des côtés [] et [].
5. Détermine le point d’intersection des médiatrices.

*Exercices supplémentaires*

1. Donne une équation cartésienne (si possible sous forme explicite) de la droite , passant par le point et parallèle à la droite .
2. Donne une équation cartésienne de la droite comprenant le point et perpendiculaire à la droite :
3. et
4. et

*Solutions*

1. a) b)

# Distances

## Distance entre deux points du plan

Grâce au théorème de Pythagore, nous savons que :

#### Dans le plan muni d’un repère orthonormé, la distance entre les points et est donnée par la formule :

*Remarque :*

Il existe plusieurs notations équivalentes pour la distance entre 2 points et  :

*Exemple :*

Calcule la distance entre les points et .

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

*Exercice :*

Calcule la distance entre les points et .

…………………………………………………………………………………………………

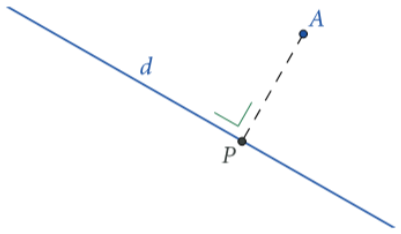
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

## Distance entre un point et une droite

La distance entre un point et une droite est définie comme étant la plus courte distance séparant et un point de la droite . C’est donc la distance du point au pied de la perpendiculaire à menée par .



### La droite n’est parallèle à aucun des axes du repère

#### Pour trouver la distance du point à la droite , nous procéderons de la manière suivante :

#### 1. Ecrire l’équation cartésienne de la droite perpendiculaire à passant par .

#### 2. Trouver le point d’intersection des deux droites.

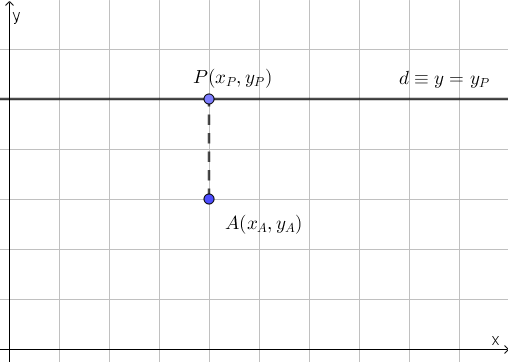
#### 3. Calculer la distance entre les points et .

*Exemple :*

Calcule la distance du point à la droite .

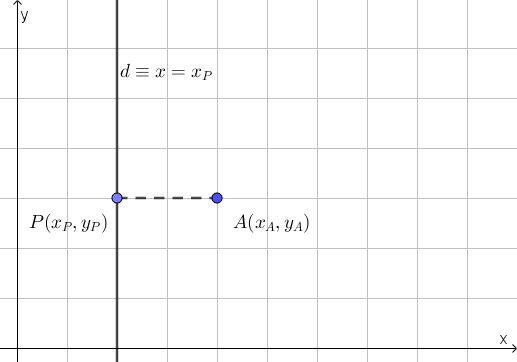
1. *Equation cartésienne de la droite perpendiculaire à passant par .*
2. *Coordonnées du point à l’intersection des deux droites*
3. *Distance entre les points et .*

### La droite est parallèle à l’axe des abscisses



Si

### La droite est parallèle à l’axe des ordonnées



Si

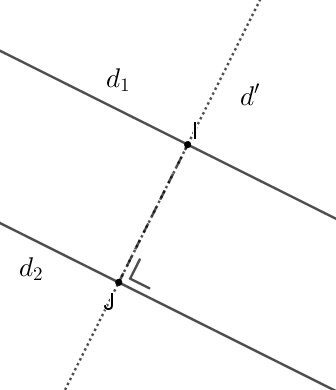
### Exercices

Détermine la distance entre le point et la droite

1. et
2. et
3. et

## Distance entre deux droites parallèles

La distance entre deux droites et parallèles correspond à la longueur du plus court segment de droite qui les sépare. C’est donc la longueur du segment qui leur est perpendiculaire et les relie.



### Méthode générale

#### Pour trouver la distance entre deux droites parallèles et , nous procéderons de la manière suivante :

#### 1. Déterminer les coordonnées d’un point appartenant à la droite (choisir son abscisse et déterminer son ordonnée grâce à une équation de ).

#### 2. Ecrire une équation cartésienne d’une droite passant par le point et perpendiculaire aux droites et .

#### 3. Déterminer les coordonnées du point , à l’intersection entre la droite et la droite (résoudre le système d’équations constitué des équations des deux droites et

#### 4. Calculer la distance entre les points et .

### Exercices

Détermine la distance entre les droites et  :

1. et
2. et
3. AUTRES lieux géometriques

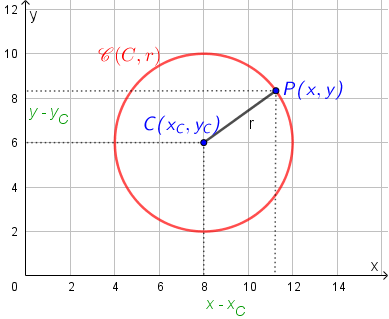
# Le cercle

## Définition

#### Un cercle est le lieu géométrique des points situés à égale distance d’un point donné, appelé centre du cercle. La distance de chacun de ces points au centre est le rayon du cercle.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Le cercle est le cercle de centre et de rayon . La distance du centre à chaque point du cercle vaut : . |

## Equation cartésienne d’un cercle

Soit un plan muni d’un repère orthonormé.

Soit le cercle de centre et de rayon .

Le point de coordonnées est un point quelconque du cercle si et seulement si la distance de à est égale à .

En utilisant la formule de la distance entre deux points, nous pouvons donc écrire que la distance de à vaut  :

…………………………………………………………………………………………………..

En élevant les deux membres au carré, on obtient :

…………………………………………………………………………………………………..

#### Dans le plan muni d’un repère orthonormé, une équation cartésienne du cercle de centre et de rayon est :

*Cas particulier*

L’équation du cercle de centre est : ……………………………………………………

*Exemples*

1. L’équation du cercle de centre et de rayon 4 est :
2. L’équation est celle d’un cercle de centre et de rayon 4. En effet :

*Regroupons les termes en et en  :*

*Complétons pour obtenir des trinômes carrés parfaits :*

1. L’équation n’est pas celle d’un cercle. En effet :

*Regroupons les termes en et en  :*

*Complétons pour obtenir des trinômes carrés parfaits :*

Cette dernière égalité est une égalité impossible !

1. L’équation est celle d’un cercle réduit à son centre. En effet :

*Regroupons les termes en et en  :*

*Complétons pour obtenir des trinômes carrés parfaits :*

## Exercices

1. Ecris l’équation du cercle :
   1. De centre (3,-1) et de rayon 5.
   2. De centre (0,5) et de rayon 5.
   3. De centre (-4,3) et passant par l’origine.
   4. De centre (5,3) et tangent à l’axe .
   5. De centre (1,1) et tangent à la droite d’équation .
2. Détermine les coordonnées du centre et le rayon des cercles suivants s’ils existent :

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Exercices supplémentaires :* |

## Intersection d’un cercle et d’une droite non parallèle à l’axe des ordonnées

### Marche à suivre

Considérons une droite et un cercle .

Comment déterminer l’intersection de la droite avec le cercle ?

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Graphiquement, trois situations se présentent :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| La droite ne coupe pas le cercle. Aucun point d’intersection. | La droite coupe une seule fois le cercle.  La droite est tangente au cercle. | La droite coupe le cercle en deux points distincts.  La droite est sécante au cercle. |

Afin de déterminer l’intersection d’un cercle et d’une droite, procédons de la manière suivante :

#### 1. Ecrire le système constitué de l’équation du cercle et de l’équation de la droite :

#### 2. En remplaçant par dans la première équation, nous obtenons :

#### 3. Après avoir développé, nous obtenons une équation du second degré dont les solutions sont les abscisses des éventuels points d’intersection recherchés.

### Exemples

1. Déterminons l’intersection entre le cercle de centre (2,3) et de rayon 2 avec la droite d’équation .

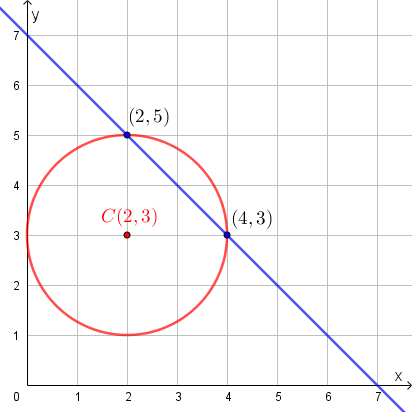
*Equation du cercle :*

*Equation de la droite :*

*Système d’équation :*

*Remplaçons par dans l’équation du cercle :*

*Résolution graphique :*



ou

Nous obtenons deux valeurs de qui sont les abscisses des points d’intersection de la droite et du cercle.

En remplaçant ces valeurs dans l’équation de la droite, nous obtenons les coordonnées de deux points (2,5) et (4,3)

1. Déterminons l’intersection entre le cercle d’équation et la droite d’équation .

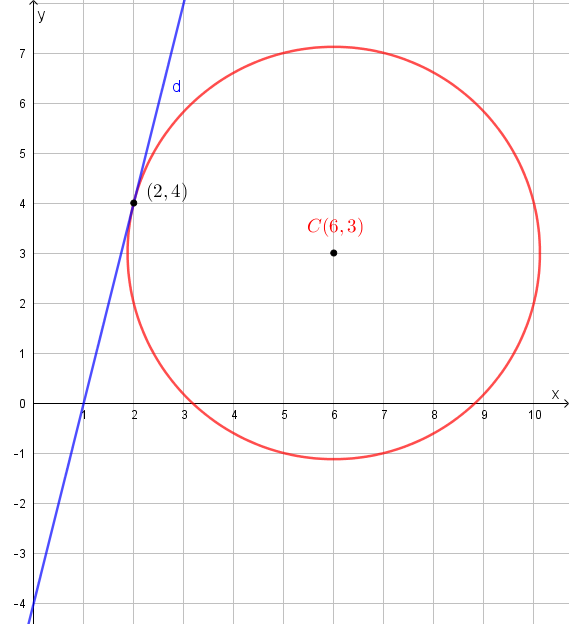
*Système d’équation :*

*Remplaçons par dans l’équation du cercle :*

*Déterminons:*

avec

*Résolution graphique :*



Nous obtenons une solution unique.

La droite a donc un seul point d’intersection avec le cercle, le point de coordonnée (2,4).

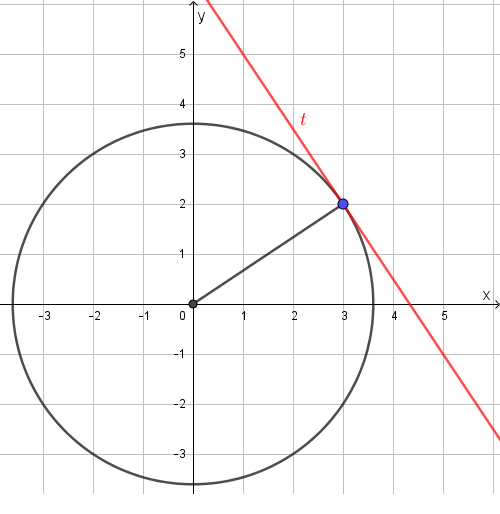
Elle est donc tangente au cercle.

### Exercices

1. Soit un repère orthonormé . Considérons les points et .
2. Détermine une équation du cercle de diamètre .
3. Détermine une équation de la tangente à au point .
4. Etudie l’intersection du cercle et de la droite dont les équations sont respectivement :
5. et
6. et
7. et

*Exercices supplémentaires*

1. et
2. et
3. Pour construire la tangente au cercle de centre (0,0) au point (3,2), on trace la perpendiculaire au rayon du cercle passant par ce point. Utilise cette construction pour vérifier analytiquement si la tangente à ce cercle au point (3,2) passe par le point (21,-24).



# La parabole

## Définition

#### Une parabole est le lieu géométrique des points du plan situés à égale distance d’un point fixe , appelé foyer, et d’une droite fixe ne comprenant pas le point , appelée directrice.

## Comment tracer une parabole ?

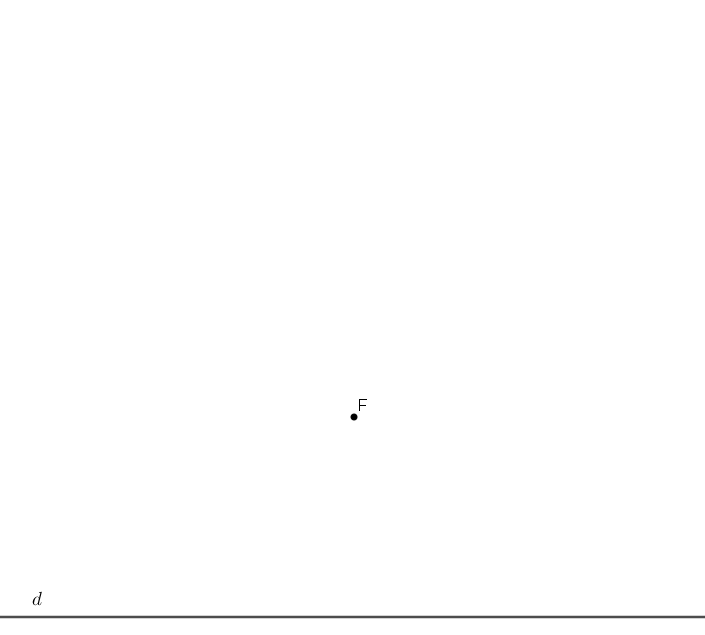
Soient un point et une droite qui ne passe pas par .

1. Plaçons d’abord le point sur la droite de façon telle que soit perpendiculaire à la droite .
2. Déterminons le point , le milieu du segment . est le sommet de la parabole.
3. Choisissons une longueur (supérieure à la longueur du segment ) et traçons :

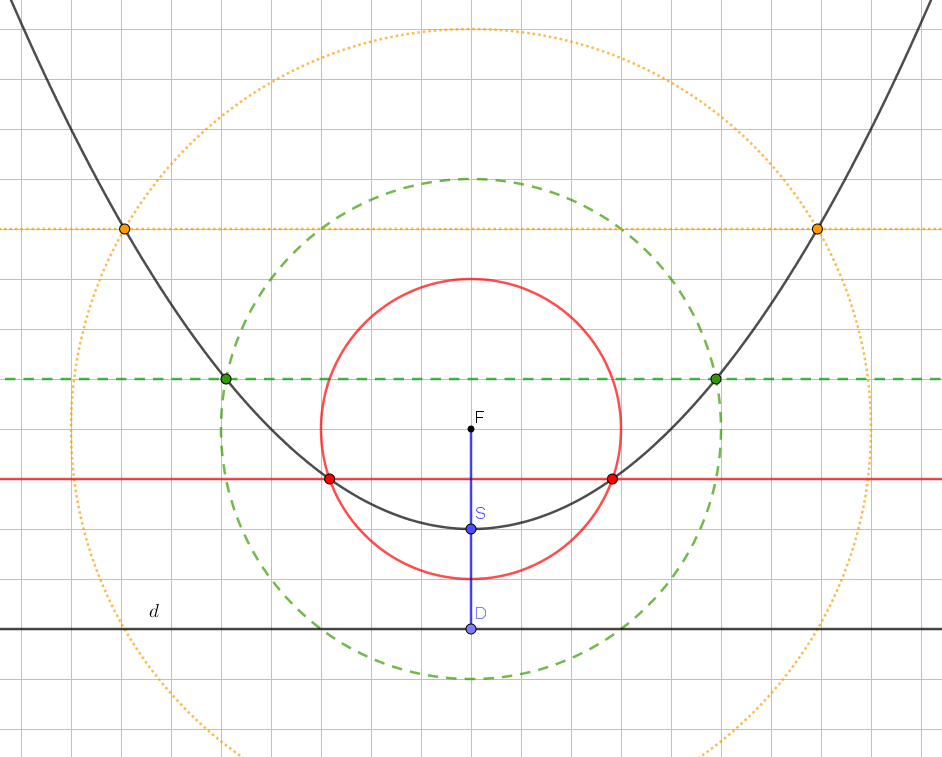
* Une parallèle à , située à une distance de et du même côté de que .
* Un cercle de centre et de rayon .

Les points communs à cette droite et à ce cercle sont sur la parabole.

1. Pour obtenir d’autres points de la parabole, on répète ces constructions en modifiant la longueur .

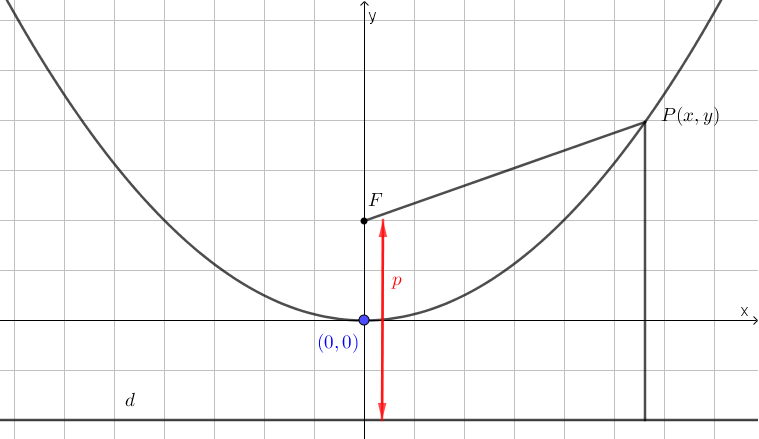


Cette construction point par point fait apparaître une symétrie orthogonale dont l’axe est la droite perpendiculaire à passant par . Cet axe coupe la parabole …………….. …………………………………………………………………………………………………..



## Equation cartésienne d’une parabole

Pour établir l’équation de la parabole, nous allons choisir un repère orthonormé dont l’origine est le sommet de la parabole et l’axe des ordonnées coïncide avec l’axe de symétrie de la parabole. De cette manière, l’axe des abscisses est la droite parallèle à passant par et l’axe des ordonnées est la droite perpendiculaire à passant par .



### Recherchons l’équation cartésienne d’une parabole

*Données :*

* L’axe de symétrie de la parabole est l’axe ,
* La coordonnée du sommet est (0,0),
* est la distance entre le foyer et la directrice .

Nous pouvons donc en déduire que la coordonnée de est et l’équation de la directrice est .

*Détermination de l’équation cartésienne de la parabole :*

* Le point est un point de la parabole si et seulement si :
* La droite étant horizontale :
* Elevons au carré les deux membres de l’égalité :
* Après simplification et regroupement des termes on obtient :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

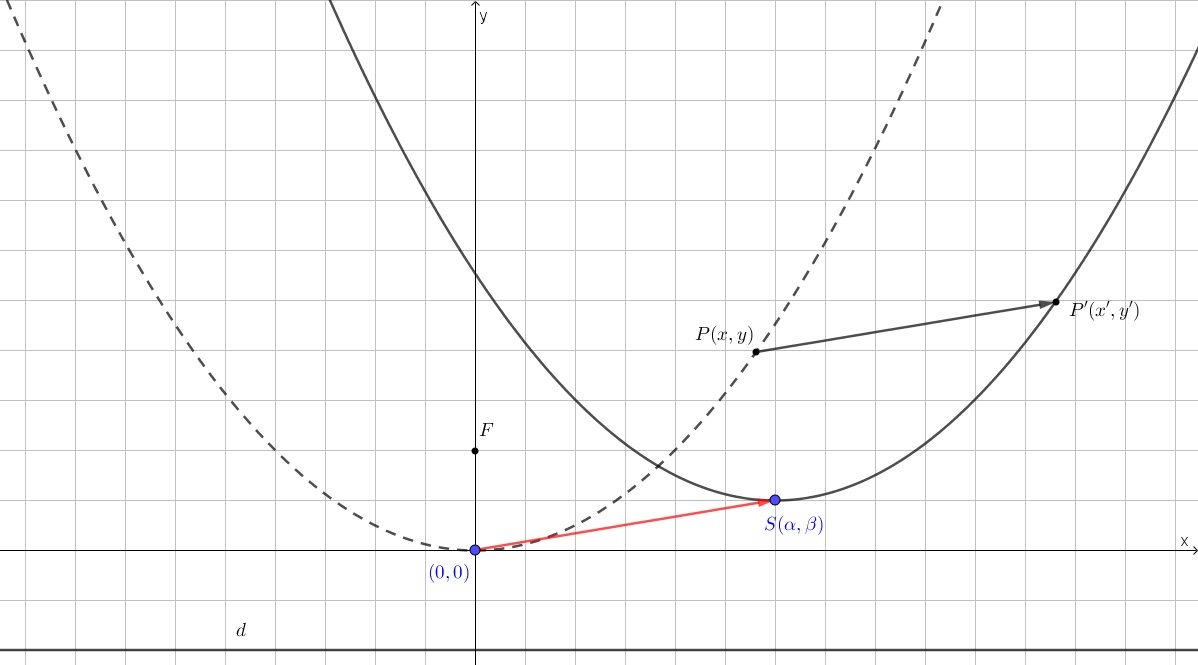
…………………………………………………………………………………………………

#### L’équation cartésienne d’une parabole , de foyer , de directrice

#### , dont le sommet est l’origine du repère et dont l’axe de symétrie est l’axe des est :

*Equation cartésienne d’une parabole de sommet et d’axe parallèle à l’axe :*

#### L’équation cartésienne d’une parabole , de foyer , de directrice , de sommet et dont l’axe de symétrie est parallèle à l’axe des est :



### Exemple

L’équation d’une parabole de foyer , de directrice et d’axe parallèle à est :

* Le sommet S de la parabole a donc pour coordonnée (4,1).
* La distance entre le foyer et la directrice vaut 2.
* Sachant que , nous pouvons donc déterminer :

La parabole a donc pour équation .

### Exercices

Détermine l’équation de la parabole qui admet comme foyer et comme directrice. Quelle est la coordonnée du sommet de la parabole ? Vérifie tes réponses en construisant celle-ci.



## Intersection d’une parabole et d’une droite non parallèle à l’axe des ordonnées

### Marche à suivre

Considérons une droite et une parabole .

Comment déterminer l’intersection de la droite avec la parabole ?

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Graphiquement, trois situations se présentent :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| La droite ne coupe pas la parabole. Aucun point d’intersection. | La droite coupe une seule fois la parabole.  La droite est tangente à la parabole. | La droite coupe la parabole en deux points distincts.  La droite est sécante à la parabole. |

Afin de déterminer l’intersection d’un cercle et d’une droite, procédons de la manière suivante :

#### 1. Ecrire le système constitué de l’équation de la parabole et de l’équation de la droite :

#### 2. En remplaçant par dans la première équation, nous obtenons :

#### C’est-à-dire :

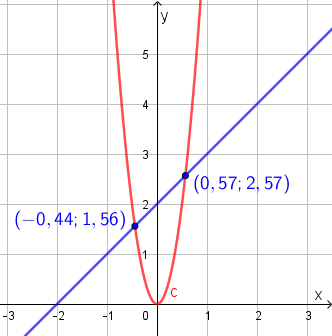
#### 3. Après avoir développé, nous obtenons une équation du second degré dont les solutions sont les abscisses des éventuels points d’intersection recherchés.

### Exemples

Déterminons l’intersection entre la parabole d’équation et la droite d’équation .

*Système d’équation :*

*Remplaçons par dans l’équation de la parabole :*

*Résolution graphique :* 

ou

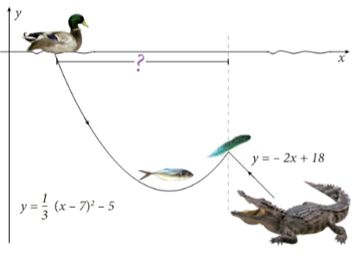
Nous obtenons deux valeurs de qui sont les abscisses des points d’intersection de la droite et de la parabole.

En remplaçant ces valeurs dans l’équation de la droite, nous obtenons les coordonnées de deux points :

(-0,44 ; 1,56) et (0,57 ; 2,57)

### Exercices

1. Précise la position de la droite d par rapport à la parabole (se coupent-elles, sont-elles tangentes ou ne se coupent-elles pas ?) :
2. et
3. et
4. Un canard flottant au-dessus d’un petit lac décide, non sans regret, de plonger à la recherche de nourriture.



La trajectoire du canard lors de sa plongée est donnée par la parabole :

A l’affût, au fond du lac, se trouve un crocodile rusé. Ce dernier s’élance en ligne droite vers le canard, après que ce dernier eut entamé sa remontée.

La trajectoire du crocodile est donnée par .

Quelle est la distance entre le point initial de flottaison du canard et l’endroit où le crocodile risque d’attraper le canard comme indiqué sur le dessin ?

7. Exercices

|  |  |
| --- | --- |
| [1] |  |
| [2] |  |
| [3] |  |
| [4] |  |
| [9] |  |
|  |  |

1. Dans un repère du plan, on donne les points , et , non alignés.
   1. Détermine par calcul les coordonnées du point pour que soit un parallélogramme.
   2. Détermine par calcul les coordonnées du point , milieu de .
   3. Détermine par calcul les coordonnées du point sachant que .
2. Dans un repère du plan, on donne les points , , et . Détermine la valeur du réel pour que soit parallèle à .

Considérons deux vecteurs et que nous allons rendre consécutifs comme sur la figure ci-dessous.

Mettre une figure

Selon le théorème de Pythagore, le triangle formé par ces vecteurs est rectangle si et seulement si :

Or,

Par conséquent, en remplaçant les normes dans l’égalité de Pythagore, on obtient :

#### Deux vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si

# Repères

## Base de vecteurs et différents types de repères

Dans le plan, un repère est défini par deux axes sécants (l’axe des abscisses et l’axe des ordonnées) et munis de graduations. Les graduations d’un axe sont séparées d’une distance identique (pas forcément la même sur chaque axe).

Le repère est défini par un triplet de points non alignés (,  :

* est le point d’intersection des deux axes (appelé origine du repère) ;
* est le point déterminant la 1ère graduation sur l’axe des abscisses ;
* est le point déterminant la 1ère graduation sur l’axe des ordonnées.

#### On appelle repère dans le plan, tout triplet constitué :

#### d’un point appelé origine du repère

#### d’une base de 2 vecteurs et non colinéaires, avec et avec .

*Exemples* :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Repère quelconque | Repère orthogonal | Repère orthonormé |

* Le repère est dit **orthogonal** lorsque les vecteurs et sont orthogonaux (portés par des droites perpendiculaires).
* Le repère est dit **orthonormé** lorsque les vecteurs et sont orthogonaux et de même norme : .

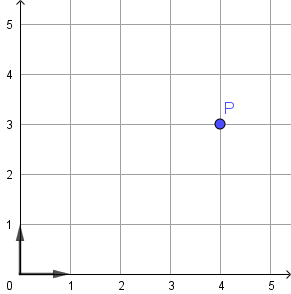
## Coordonnées d’un point

#### Dans le repère , les coordonnées du point sont l’unique couple tel que : .

#### Où est l’abscisse du point *e*t est l’ordonnée du point .

Autrement dit, pour atteindre le point à partir de l’origine du repère, il faut se déplacer de unités dans la direction de l’axe des abscisses et de unités dans la direction de l’axe des ordonnées.

*Exemple :*



1. La droite dans le plan

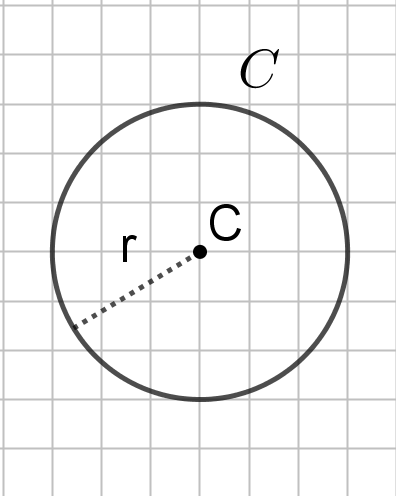
# Introduction

#### Un lieu géométrique est un ensemble de points qui ont une (ou plusieurs) propriété(s) géométrique(s) commune(s).

Cela signifie que tous les points du lieu jouissent de cette (ou ces) propriété(s) et qu’ils sont les seuls.

*Exemples :*

1. En se basant sur l’axiome d’Euclide « Par deux points donnés passe une et une seule droite », une droite peut se définir comme le lieu géométrique des points alignés à deux points donnés.
2. Le lieu des points situés à égale distance d’un point C est le cercle C.

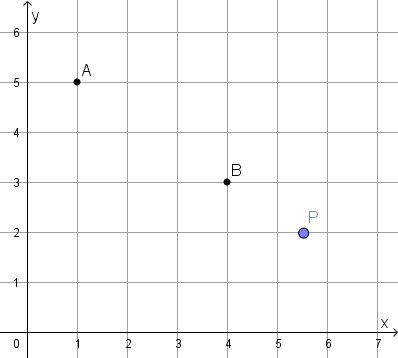


L’équation d’un lieu est l’écriture de la propriété vérifiée par n’importe quel point appartenant à ce lieu.

Si un point appartient au lieu, ses coordonnées vérifient l’équation du lieu et réciproquement.

# Equation vectorielle d’une droite

## Introduction



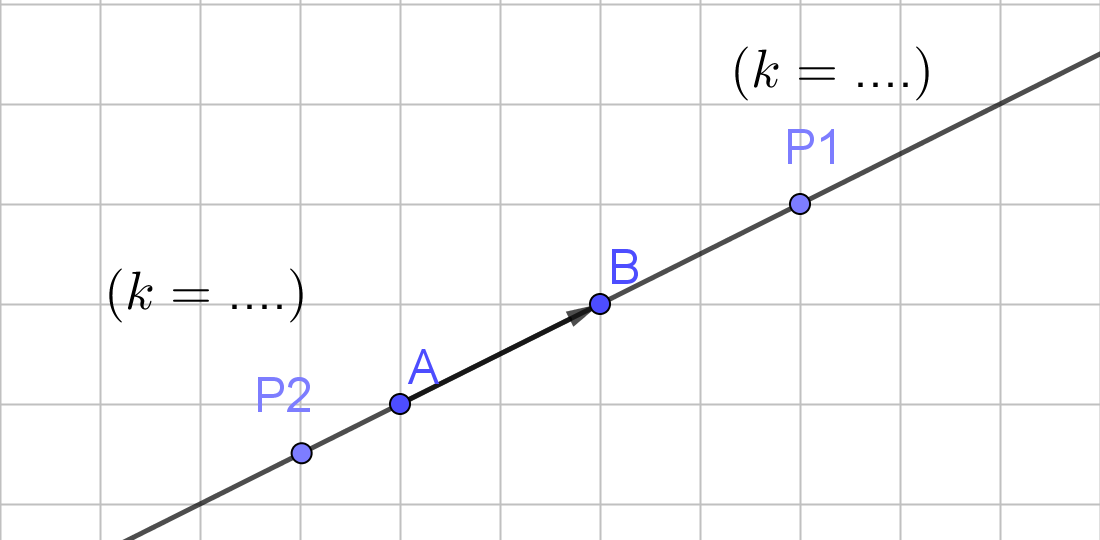
Pour qu’un point appartienne à cette droite, il faut que les vecteurs et soient ……..……………..…………...… c’est-à-dire qu’il existe un réel tel que : …………………………………………………………………………………………………

**On dira que la droite a pour équation () et on notera :**

**()**

#### où est un réel est appelée équation vectorielle de la droite .

Cette égalité vectorielle est bien une équation de la droite puisqu’elle est vérifiée pour tous les points de la droite et uniquement par eux. En effet, n’importe quel point de la droite peut être atteint en prenant des valeurs de différentes. Lorsque parcourt , le point parcourt la droite *.*



Le point est atteint en remplaçant par ..... dans l’équation.

Le point est atteint en remplaçant par ..... dans l’équation.

Le point est atteint en remplaçant par ..... dans l’équation.

Le point est atteint en remplaçant par ..... dans l’équation.

Dans cette équation vectorielle,

* fixe la direction, le sens et la longueur du « pas » suivant lequel on parcourt la droite .
* Le point fixe « le point de départ » de ce déplacement.
* est le nombre de « pas » à effectuer pour atteindre un point quelconque de la droite. est appelé **paramètre**.

## Vecteur directeur

Dans l’équation vectorielle de la droite (), le vecteur est un vecteur directeur de la droite. Il indique la direction de la droite. Il existe une infinité de vecteurs directeurs pour une droite donnée.

Tout vecteur de la droite, c’est-à-dire tout vecteur ayant pour origine et extrémité deux points distincts de la droite, est un vecteur directeur de la droite. Les points origine et extrémité doivent être distincts sinon le vecteur est nul et la direction n’est pas définie.

Plus largement, tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur de la droite est également un vecteur directeur de la droite. Autrement dit, tout multiple non nul d’un vecteur de la droite est également un vecteur directeur.

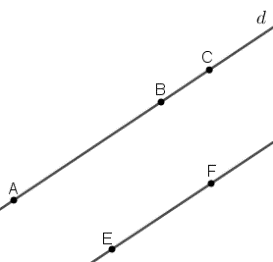
#### On appelle vecteur directeur d’une droite, tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur défini par deux points distincts de cette droite.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Les vecteurs , , , ,.... sont des vecteurs directeurs de la droite .  Si la droite est parallèle à alors le vecteur est aussi un vecteur directeur de la droite . |

*Remarque :*

Puisqu’une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, elle admet donc également une infinité d’équations vectorielles selon le choix arbitraire qui est fait :

* du point de départ du déplacement sur la droite,
* du vecteur directeur (non nul) de la droite.

*Exemple :*

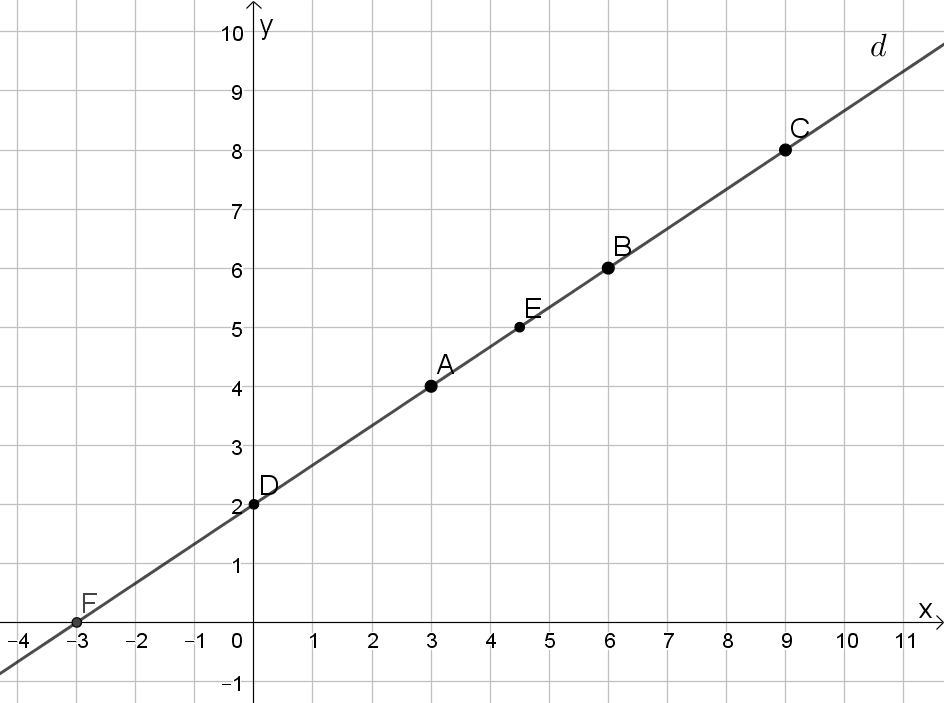
Deux équations vectorielles de la droite sont :

..................................................................................................

..................................................................................................

## Exercices

1. Soit la droite , passant par les points et , représentée ci-dessous.



1. Ecris 2 équations vectorielles différentes de la droite .
2. Donne les valeurs de correspondant aux points , et pour chaque équation vectorielle donnée précédemment.
3. Cite 4 vecteurs directeurs de la droite et donne leurs composantes.
4. Donne trois vecteurs directeurs de la droite passant par les points :
5. et
6. et
7. et

## Exercices

1. Ecris un système d’équations paramétriques de la droite passant par les points :
2. et
3. et
4. et
5. Ecris un système d’équations paramétriques de la droite dont un vecteur directeur est donné et passant par un point donné :
6. et
7. et
8. Le point appartient-il à la droite dont des équations paramétriques sont :
9. Le point appartient-il à la droite dont des équations paramétriques sont :
10. Le point appartient-il à la droite dont des équations paramétriques sont :

*Exercices supplémentaires*

1. Ecris un système d’équations paramétriques de la droite :
2. Passant par les points et
3. Passant par le point et de vecteur directeur
4. Le point appartient-il à la droite dont des équations paramétriques sont :

*Solutions*

1. a) b)
2. oui
3. Applique la propriété des proportions (produit en croix) et rassemble tous les termes dans le membre de gauche.

Cette seconde équation (2) est une autre forme de l’**équation cartésienne** de la droite . A nouveau, le paramètre n’apparaît plus. L’équation exprime directement le lien entre l’abscisse et l’ordonnée d’un point quelconque de la droite .