La loi de la gravitation universelle

1 Introduction: une longue histoire en quatre étapes

L'observation et l'étude des corps célestes est à l'origine de la loi de la gravitation universelle.

Figure 1: La Voie Lactée

1.1 Les modèles géocentriques

Dès l'Antiquité, les savants ont observé les étoiles et ont essayé de comprendre leur mouvement.

Figure 2: QR-code de l'application

Les premiers modèles qui ont tenté de rendre compte du mouvement des astres étaient géocentriques : le mouvement des astres se fait par rotation autour de la Terre, qui est le centre de l'univers.

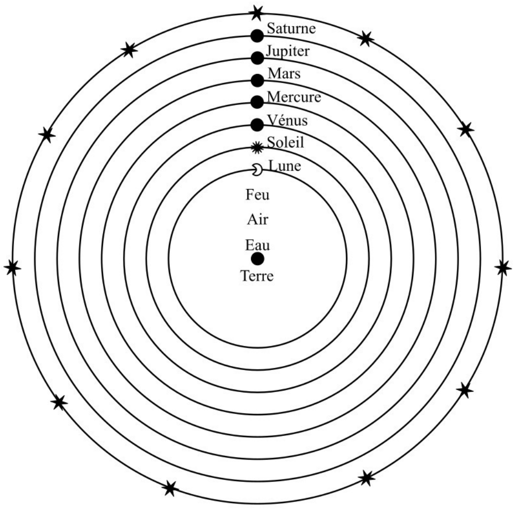


Figure 3: Le modèle géocentrique

Cependant, ce modèle est très vite confronté à certaines difficultés. L'une d'elles concerne le mouvement de Mars autour de la Terre.

Figure 4: QR-code: Orbite de Mars autour de la Terre

Tu peux observer sur l'animation ci-dessus que Mars a un mouvement rétrograde autour de la Terre. Cette observation était déjà réalisée plus de deux siècles avant Jésus-Christ, et deux savants de l'époque, Apollonius et Hipparque, ont tenté d'expliquer pourquoi Mars a un tel mouvement : ils ont mis au point les premiers modèles par épicycles. Ces modèles décrivent le mouvement de Mars (mais aussi d'autres astres) de la manière suivante : Mars se déplace le long d'un cercle, à vitesse constante, et le centre de ce cercle se déplace lui-même sur un grand cercle dont le centre est la Terre.

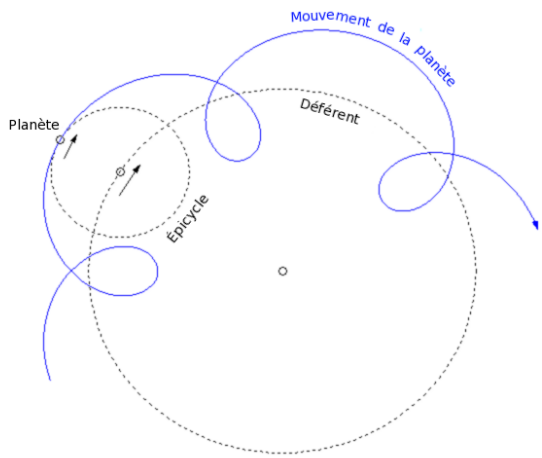


Figure 5: Modèle géocentrique avec épicycle

Ces modèles par épicycles ont été étudiés et raffinés pendant longtemps, pour aboutir au modèle de Ptolémée, qui proposa un modèle avec plusieurs épicycles pour expliquer les défauts de mesure des modèles d'Apollonius et Hipparque. Les travaux de Ptolémée furent la référence en astronomie jusqu'au XVIe siècle, avec l'arrivée du modèle héliocentrique de Copernic.

1.2 Les modèles héliocentriques

Malgré la précision importante des modèles géocentriques, les astronomes du XVIe siècle n'arrivent pas à prévoir parfaitement le mouvement des astres. Copernic émit l'hypothèse que le Soleil était au centre de l'Univers et que la Terre effectue un mouvement circulaire autour de lui : c'est la naissance des modèles héliocentriques. Bien que le modèle héliocentrique de Copernic représente une révolution en astronomie, il ne permet pas une plus grande précision dans les prédictions que dans le modèle de Ptolémée. La raison est que Copernic suppose que les astres décrivent des cercles autour du Soleil.

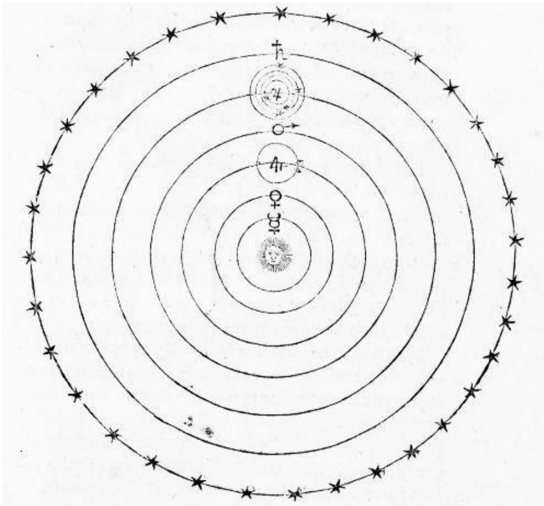


Figure 6: Le modèle de Copernic

Cependant, un atout du modèle de Copernic est sa simplicité par rapport au modèle avec épicycles. De plus, le mouvement rétrograde de Mars s'explique facilement comme un effet de perspective d'un observateur sur Terre.

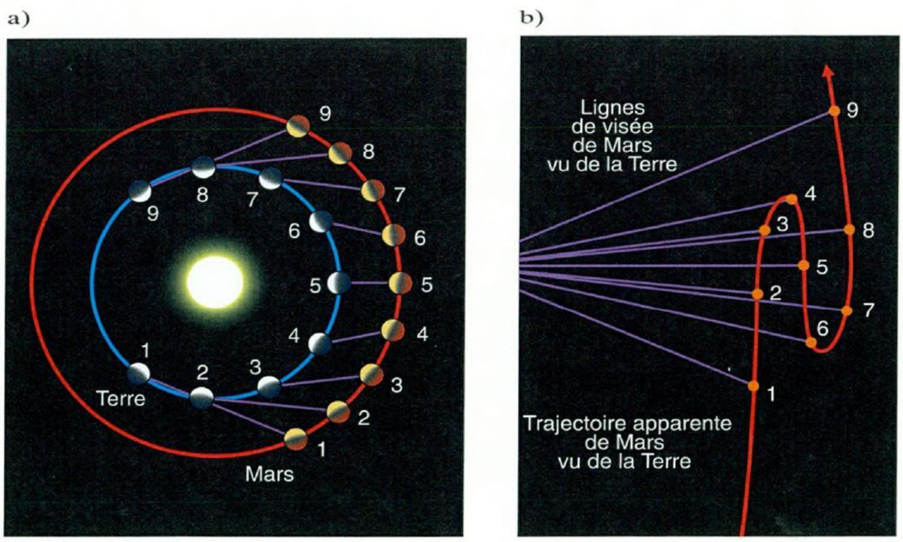


Figure 7: Orbite de Mars dans le modèle héliocentrique

Le modèle de Copernic ne rencontrera pas un franc succès auprès de ses contemporains : ceux-ci étaient, entre autres, influencés par le sens commun de l'époque et les dogmes religieux.
Au XVIIe siècle, Galilée se positionne en défenseur du modèle de Copernic : il apporta des arguments importants en faveur de ce modèle, grâce à des observations des satellites de Jupiter faites avec une lunette astronomique. Il observe que Jupiter et ses satellites forment un système planétaire miniature autour d'un centre qui n'est pas la Terre.

1.3 Les lois de Kepler

Le modèle de Copernic place le Soleil au centre de l'Univers et suppose que les astres décrivent un mouvement circulaire dont le centre est le Soleil. Cependant, les mesures des mouvements des astres ne collent pas parfaitement aux trajectoires du modèle et Copernic fait vite appel aux épicycles pour améliorer son modèle. Malgré ces améliorations, le modèle héliocentrique reste imparfait.

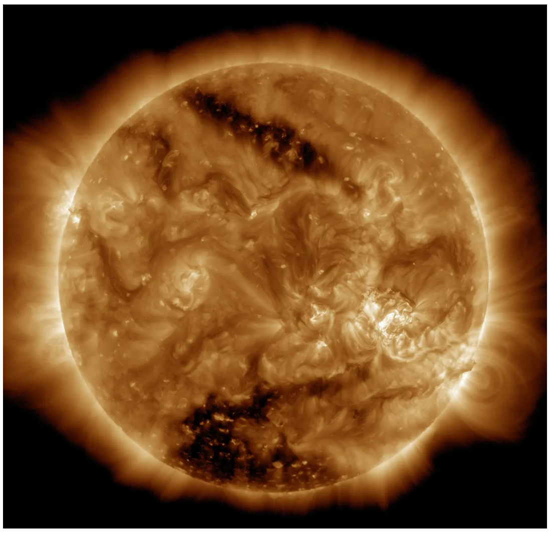
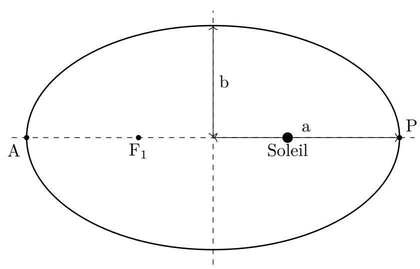


Figure 8: Le soleil

C'est à la fin du XVIe siècle qu'une avancée majeure est réalisée pour expliquer le mouvement des astres : Johannes Kepler, sur base de mesures méticuleuses réalisées par l'astronome danois Tycho Brahe, se rend compte que les planètes ne décrivent pas des mouvements circulaires mais elliptiques, dont un des foyers est occupé par le Soleil. Il s'agit de sa première loi, parmi trois qui tentent de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil.

> **Première loi: la loi des orbites.**
>
> La trajectoire de chaque planète est une ellipse dont un foyer est occupé par le Soleil.



Éléments de la trajectoire elliptique :
F_1, Soleil : Foyers
a : Demi-grand axe
b : Demi-petit axe
A : Aphélie, point le plus loin du Soleil
P : Périhélie, point le plus proche du Soleil.

Deuxième loi: loi des aires.

Le segment qui joint le Soleil à une planète balaie des secteurs d'aires égales en des durées égales, quelles que soient ces durées.

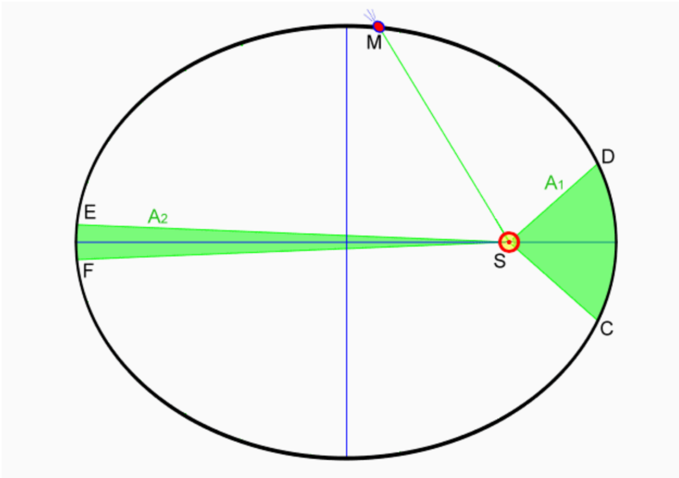


Figure 9: Loi des aires

Troisième loi: loi des périodes.

Le quotient du cube du demi-grand axe par le carré de la période de révolution est le même pour toutes les planètes :

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \ldots$$

Exercice 1.1. Complète le tableau suivant à l'aide de la 3e loi de Kepler.

Planète	$a(10^9\mathrm{m})$	$T(10^6\mathrm{s})$	$a^3/T^3(10^{15}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2)$
Mercure	57,9	7,61	3356
Vénus	108,1	19,41	3354
Terre	149,6	31,56	3362
Mars	228,0	59,36	3364
Jupiter	778,4	374,3	3367
Saturne	1424	928,4	3352

1.4 La loi de la gravitation universelle

Kepler a décrit avec précision le mouvement des planètes, mais il ne l'a pas expliqué. Il faut attendre le XVIIe siècle et Isaac Newton pour comprendre pourquoi les planètes suivent ces trajectoires elliptiques.

Figure 10: La terre vue de la Lune

Newton propose que toutes les masses s'attirent mutuellement avec une force qui dépend de certaines de leurs carctéristiques. Il va montrer ainsi que l'interaction qui fait tomber un objet sur Terre est aussi responsable du mouvement des planètes autour du Soleil. Cette idée révolutionnaire unifie les phénomènes terrestres et célestes sous une même loi.

Cette loi permet non seulement d'expliquer les trajectoires des planètes décrites par Kepler, mais aussi d'autres phénomènes tels que la chute des objets sur Terre, les marées ou encore le mouvement des satellites artificiels.

Newton montre que les lois de Kepler sont une conséquence directe de la gravitation universelle : en appliquant ses lois du mouvement et la force gravitationnelle, il retrouve les trajectoires elliptiques des planètes. C'est ainsi que la physique moderne voit le jour : un même principe explique à la fois le mouvement des corps célestes et celui des objets terrestres.

Figure 11: La galaxie du sombrero

2 La loi de la gravitation universelle

2.1 La démarche de Newton

Nous allons énoncer la loi de la gravitation universelle en suivant la démarche de Newton.

La première idée de Newton est d'interpréter le mouvement de la Lune autour de la Terre comme une chute libre. Voici une animation qui illustre cette interprétation :

Figure 12: QR-code de l'application

Tout objet proche de la surface de la Terre est soumis à une force gravitationnelle. Par exemple, une pomme que vous tenez dans la main subit une accélération dirigée vers le centre de la Terre, d'intensité $g = 9,81$ m/s^2. Si vous lâchez cette pomme, elle tombe. Si vous la lancez horizontalement, elle suit une trajectoire parabolique.

En s'appuyant sur cette idée, Newton a imaginé un tir horizontal où la vitesse initiale est si grande que l'objet ne retombe jamais au sol. La Lune, selon cette vision, est en perpétuelle chute libre autour de la Terre, mais sa vitesse lui permet de ''manquer'' la Terre en permanence.

Les observations montrent que la trajectoire de la Lune est approximativement circulaire. Nous allons donc supposer dans la suite qu'elle décrit un mouvement circulaire uniforme (MCU) autour de la Terre, avec une vitesse d'intensité constante. Ce modèle implique que la Lune possède une accélération centripète a_L, que nous allons comparer à l'accélération d'un objet en chute libre sur Terre.

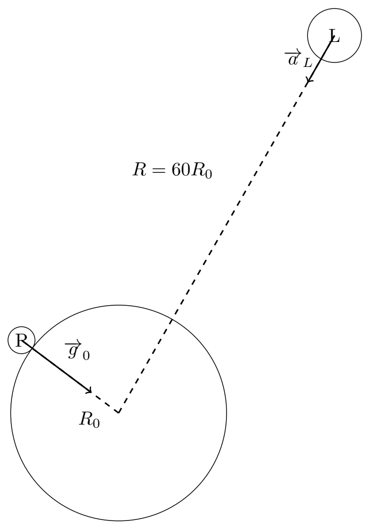


Figure 13: La Pomme de Newton et la Lune

Pour rappel :

1. $a_L = \omega^2 R = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$

2. Le rayon Terre-Lune est $R = 385000$ km
3. Le rayon de la Terre est $R_0 = 6370$ km

Exercice 2.1.

1. Calculer $\frac{g}{a_L}$.
2. Calculer $\frac{R}{R_0}$.
3. Déduire que $\frac{g}{a_L} \simeq \left(\frac{R}{R_0}\right)^2$.

1. La période de révolution de la Lune est de 27,321 jours (je demanderai de chercher l'info en ligne quand on sera à ce stade du cours).
Comme 27,321 jours= 2,36 . 10^6 s, on a
a_L=(4 pi^2 385 10^6)/(2,36 . 10^6)^2 ~ 0,00273 m/s^2
Donc g/a_L~3600
2. R/R_0~60
3. Comme 60^2=3600, on en déduit que
g/a_L~(R/R_0)^2

Newton en déduit que la force exercée par la Terre sur la pomme, $\vec{F}_{\mathrm{T/P}}$, est de même nature que celle exercée sur la Lune, $\vec{F}_{\mathrm{T/L}}$. Les résultats de l'exercice précédent montrent que cette force est proportionnelle à $\frac{1}{R^2}$.

! Dépendance de la distance

Autrement dit, l'intensité de la force d'attraction terrestre diminue avec le carré de la distance au centre de la Terre.

D'après la deuxième loi de Newton, la force gravitationnelle $\vec{F}_{\mathrm{T/L}}$ est reliée à l'accélération de la Lune par :

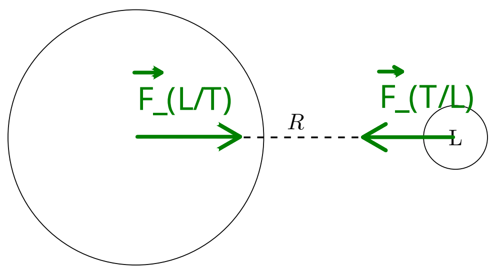
$$\vec{F}_{\mathrm{T/L}} = m_L \vec{a}_L.$$

On en déduit que cette force dépend de la masse de la Lune, m_L.

Un autre paramètre intervient : la masse de la Terre, m_T. En effet, selon la loi des actions réciproques, la Lune exerce également une force sur la Terre, $\vec{F}_{\mathrm{L/T}}$. Ces deux forces sont opposées mais de même intensité :

$$\vec{F}_{\mathrm{T/L}} = -\vec{F}_{\mathrm{L/T}}.$$

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{F}_{\mathrm{T/L}}$ dépend donc aussi de la masse de la Terre.



$\boxed{\vec{F}\text{\_(T/L)}=-\vec{F}\text{\_(L/T)}}$

Figure 14: L'attraction de la Lune par la Terre

2.2 L'énoncé de la loi de la gravitation universelle

En résumé, la force $\vec{F}_{\mathrm{T/L}}$ est :

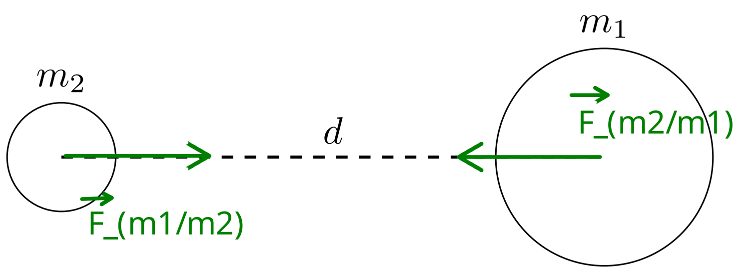
1. proportionnelle aux masses m_L et m_T,
2. inversement proportionnelle au carré de la distance R entre les deux corps.

Le génie de Newton a été d'étendre ce raisonnement à tous les astres du système solaire, puis à tous les corps matériels. Il en a déduit une loi fondamentale de la nature.

Loi de la gravitation universelle

Deux corps ponctuels s'attirent avec une force dirigée selon la droite qui les joint. L'intensité de cette force est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$F_{m_1/m_2} = F_{m_2/m_1} = k_g \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$



La constante k_g est universelle. Elle a été estimée par Newton et mesurée avec précision par Cavendish en 1798 :

$$k_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

Cette valeur montre que la force gravitationnelle est généralement faible. Elle diminue rapidement lorsque la distance entre les objets augmente. Pour mieux comprendre cette relation, représentons graphiquement la variation de la force gravitationnelle entre deux objets en fonction de leur distance.
On choisi deux masses $m_1 = m_2 = m$ de sorte à ce que $k_g m^2 = 1$. Ceci permet d'écrire que $F_{m_1/m_2} = \frac{1}{d^2}$. Voici une représentation graphique de F_{m_1/m_2} en fonction de la distance entre les objets.

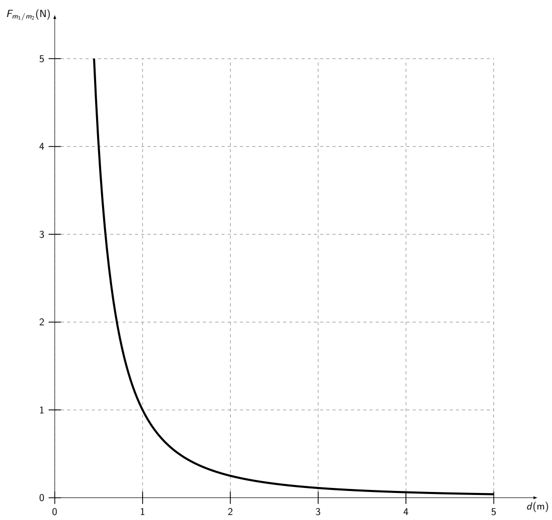


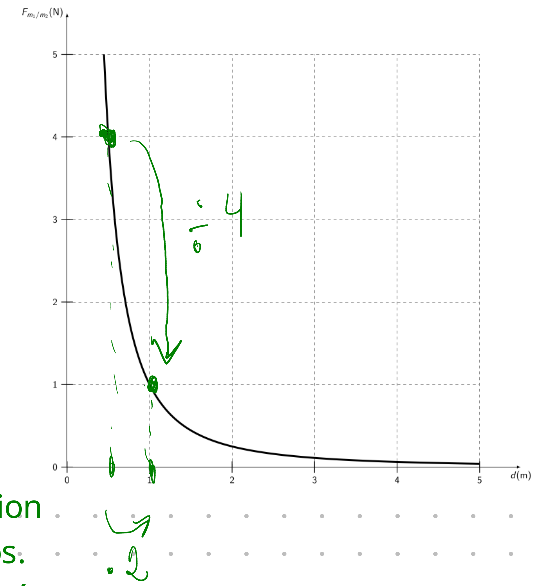
Figure 15: Intensité de la force en fonction de la distance

Exercice 2.2.

1. Si la distance entre deux objets double, comment est modifiée la force gravitationnelle entre eux ?
2. Un astronaute lâche un objet en chute libre sur une planète inconnue. Son accélération augmente-t-elle au cours de la chute ?
3. Le poids d'un kilogramme de plumes est-il le même sur la Terre et sur la Lune ? Justifier.

1. Si d'=2d, on a que

F'_(m1/m2)=k_g(m1.m2)/(2d)²
= k_g(m1.m2)/(4d²)
= 1/4 . k_g(m1.m2)/d²
= 1/4 F_(m1/m2)



Donc la force est 4 fois plus petite. On peut faire ce constat aussi à l'aide du graphique ci-contre.

2. Oui, comme F=ma par la 2e loi de Newton, l'accél. augmente si la force augmente. Or, la force de gravitation est inversément prop. à la distance entre les deux corps. Donc si la distance diminue, la force augmente. En conséquence l'accélération augmente aussi.

3. Non car la force de gravitation dépend de la masse des deux corps en interaction. Or la Lune a une plus petite masse que la Terre. Donc le poids du kilo de plume sera plus petit sur la Lune que sur la Terre.

Exercice 2.3. Calcule la force d'attraction que tu exerces sur ton voisin le plus proche. Explique ensuite pourquoi tu n'est pas collé à ton voisin.

Supposons m1=60kg et m2=70kg, d=0,5m

Donc F_(m1/m2)=F_(m2/m1)= k_g(m1.m2)/(0,5)²=1.12 . 10^{-6} N.

Je ne suis pas collé à mon voisin car les forces de frottement de la chaise sur mon corps et du sol sur la chaise compensent la force d'attraction que j'exerce sur mon voisin.

Exercice 2.2.

1. Si la distance entre deux objets double, comment est modifiée la force gravitationnelle entre eux ?
2. Un astronaute lâche un objet en chute libre sur une planète inconnue. Son accélération augmente-t-elle au cours de la chute ?
3. Le poids d'un kilogramme de plumes est-il le même sur la Terre et sur la Lune ? Justifier.

Exercice 2.3. Calcule la force d'attraction que tu exerces sur ton voisin le plus proche. Explique ensuite pourquoi tu n'est pas collé à ton voisin.

2.3 Applications

Pour les exercices qui suivent, les constantes suivantes seront utilisées.

Constante	Valeur
Constante gravitationnelle k_g	$6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$
Accélération terrestre g	$9,81 \text{ m/s}^2$
Masse de la Terre m_T	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg
Masse du Soleil m_S	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg

2.4 Mouvement des astres dans le système solaire

La première loi de Kepler dit que la trajectoire des planètes autour du soleil est elliptique. Voici une représentation de quelques unes de ces trajectoires:

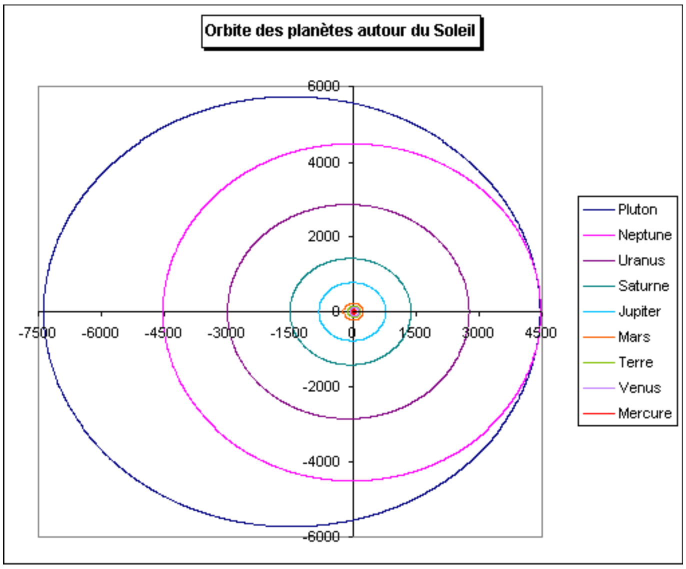


Figure 16: Orbites du système solaire (échelle: 10^9m)

Tu peux constater que les trajectoires ont l'air d'être des cercles. Nous supposerons donc, afin de faciliter les calculs, que les trajectoires des astres dans le système solaire sont circulaires. Ceci nous permettra de faire appel à la théorie des MCU pour résoudre les exercices.

Voyons un exemple d'application pour trouver la vitesse ou la période de révolution d'un astre.

Exemple 2.1. Dans cet exemple, nous allons estimer la vitesse orbitale de Neptune, en sachant que le rayon de l'orbite de Neptune autour du soleil est 30 fois plus grande que le rayon de l'orbite de la Terre autour du soleil.

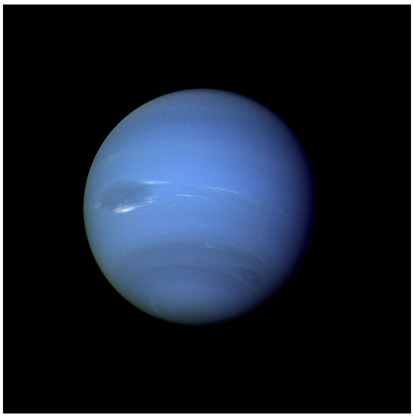


Figure 17: Neptune

Explicitons ce que dit l'énoncé de l'exemple:

1. $F_{S/N} = k_g \dfrac{m_S m_N}{R_N^2}$
2. $R_N = 30R_T$

D'après la deuxième loi de Newton, on a que $F_{S/N} = m_N a_N$, où $a_N = \dfrac{v^2}{R_N}$ est l'accélération centripète.

On a donc $v^2 = k_g \dfrac{m_S}{R_N}$. Comme $R_N = 30R_T = 30 \cdot 6,37 \cdot 10^6$m, on a que

$$v^2 = k_g \frac{m_S}{R_N} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{6,37 \cdot 10^6} = \frac{6,67 \cdot 1,99}{6,37} \cdot 10^{13} = 2,08 \cdot 10^{13} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

Donc $v \simeq 4,5 \cdot 10^6 \mathrm{m/s} = 4,5 \mathrm{km/s}$.

Exercice 2.4. Un satellite artificiel tourne autour de la Terre à une altitude de 500 km.

1. Exprime le rayon de son orbite en fonction du rayon terrestre.
2. Calcule sa vitesse orbitale en supposant que $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.
3. Donne la période de révolution du satellite.

Exercice 2.5. La station spaciale internationale (ISS) est en orbite circulaire autour de la Terre à une altitude de 400km. Calcule la vitesse de l'ISS.

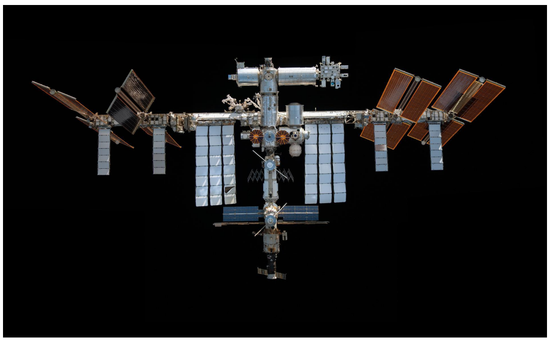


Figure 18: L'ISS

Exercice 2.4. Un satellite artificiel tourne autour de la Terre à une altitude de 500 km.

1. Exprime le rayon de son orbite en fonction du rayon terrestre.
2. Calcule sa vitesse orbitale en supposant que $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.
3. Donne la période de révolution du satellite.

1. R= R_T+h
2. On suppose que l'orbite du satellite est circulaire autour de la Terre. Son accélération est donc centripète.

On a grâce à la 2e loi de Newton: F=m_sa=k_g m_T m_s/R², où m_s est la masse du satellite.

Donc a=k_g m_T/R².
Mais comme a est centripède, on a a=v²/R.
Donc v²=k_gm_4/R= 6,67 . 10^{-11} . 5,97 . 10^{24} / (6,37 . 10^6 + 5 . 10^5)² = 57 962 008,73 m²/s²
Donc v~7613,29 m/s=7,613km/s

3. La circonférence de l'orbite est 2piR=43 165 483,06. Comme T=circonférence/vitesse, on a

T= 43 165 483,06/7613,29=5669,75 s =1h34min30sec

Exercice 2.5. La station spaciale internationale (ISS) est en orbite circulaire autour de la Terre à une altitude de 400km. Calcule la vitesse de l'ISS.

On suppose que l'orbite de l'ISS est circulaire autour de la Terre. Son accélération est donc centripète.

On a grâce à la 2e loi de Newton: F=m_sa=k_g m_T m_s/R², où m_s est la masse du satellite.

Donc a=k_g m_T/R².
Mais comme a est centripède, on a a=v²/R.
Donc v²=k_gm_4/R= 6,67 . 10^{-11} . 5,97 . 10^{24} / (6,37 . 10^6 + 4 . 10^5) = 58 818 168,39 m²/s²
Donc v~7669,3 m/s=7,669km/s

2.5 Détermination de la masse des corps célestes

La loi de la gravitation est une des seules manières dont nous pouvons mesurer la masse des astres.

Prenons l'exemple de la Terre. Comment peut-on déterminer sa masse sans avoir à la ''peser'' directement ?

L'idée repose sur la relation entre la force gravitationnelle et l'accélération gravitationnelle g.

Nous savons que tout objet de masse m situé près de la surface terrestre subit une accélération $g = 9,81$ m/s^2. Cette accélération est due à la force gravitationnelle exercée par la Terre.

En appliquant la deuxième loi de Newton :

$$mg = k_g \frac{mm_T}{R_T^2}$$

On peut simplifier :

$$g = k_g \frac{m_T}{R_T^2}$$

D'où :

$$m_T = \frac{gR_T^2}{k_g} \simeq 5,97 \cdot 10^{24}\text{kg}.$$

Ce raisonnement nous permet de déterminer la masse de n'importe quel astre en connaissant son rayon et son influence sur un objet en orbite autour de lui ou à sa surface.

Exercice 2.6. En utilisant $g_M = 3,71$ m/s^2 et $R_M = 3,39 \cdot 10^6$ m, calcule la masse de Mars.

Exercice 2.7. Le but de cet exercice est de calculer la masse du Soleil, sur base du mouvement de la Terre.

1. Calcule la vitesse de la terre autour du soleil, sachant que la distance Terre-Soleil vaut 150 millions de km.
2. Déduis-en la masse du Soleil.

3 La gravité autour de la Terre

L'accélération gravitationnelle varie avec l'altitude.

Exercice 3.1. Considérons une bille de plomb de 1kg. Calcule la force de gravitation exercée par la Terre sur cette masse si:

1. elle est à 10m au dessus de la surface de la Terre.
2. elle est à 10km au dessus de la surface de la Terre.
3. elle est dans la Station Spaciale Internationale (400km d'altitude).

Exercice 2.6. En utilisant $g_M = 3,71$ m/s^2 et $R_M = 3,39 \cdot 10^6$ m, calcule la masse de Mars.

Pour un objet de masse m à la surface de Mars, son poids est de mg_M. Or,

m g_M = k_g m_M m/R_M^2

Donc m_M= g_M R_M^2/k_g= 6,39 10^{23} kg

Exercice 2.7. Le but de cet exercice est de calculer la masse du Soleil, sur base du mouvement de la Terre.

1. Calcule la vitesse de la terre autour du soleil, sachant que la distance Terre-Soleil vaut 150 millions de km.
2. Déduis-en la masse du Soleil.

1\. On suppose que le mouvement de la Terre est circulaire autour du Soleil. Ainsi, son accélération est centripète.

Donc v= 2pi d/T= 2pi (150 . 10^9)/(365 . 24 . 60^2)=29885,77m/s.

2\.

On a m_T a = k_g m_S m_T /d^2

Donc m_S = a d^2 /k_g.

Ici, a= v^2/d. Donc m_S= v^{2}d /(k_g) = (29885,77)^2 (150 . 10^9)/(6,67 . 10^{-11})
~ 2 . 10^{30} kg

Exercice 3.1. Considérons une bille de plomb de 1kg. Calcule la force de gravitation exercée par la Terre sur cette masse si:

1. elle est à 10m au dessus de la surface de la Terre.
2. elle est à 10km au dessus de la surface de la Terre.
3. elle est dans la Station Spaciale Internationale (400km d'altitude).

Ici F = k_g m_T/(R_T+h)^2

1\. F = k_g m_T/(6,37 . 10^6 + 10)^2= 9,81 N
2\. F=9,78 N
3\. F= 8,69N

Les calculs réalisés dans l'exercice précédent peuvent se généraliser pour un objet de masse m à une altitude h:

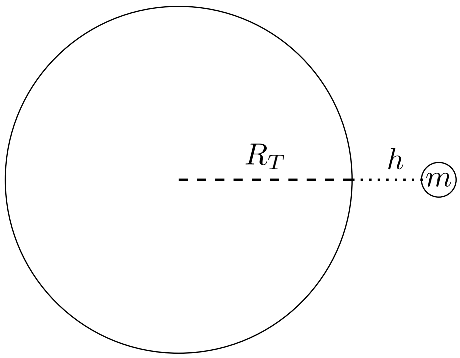


Figure 19: Accélération gravitationnelle en fonction de l'altitude

Pour cet objet, s'il est à la surface de la Terre, nous avons $g = \frac{k_g m_T}{R_T^2} = 9,81 \text{m/s}^2$. Mais si l'objet est à une altitude h, la distance qui le sépare du centre de la Terre devient $R_T + h$. En notant g_h son accélération centripète, on obtient:

$$mg_h = k_g \frac{m_T m}{(R_T + h)^2}.$$

La nouvelle accélération gravitationnelle est donc :

$$g_h = \frac{k_g m_T}{(R_T + h)^2}$$

Ainsi on constate à nouveau que plus on s'éloigne de la Terre, plus l'intensité de la force de gravité terrestre diminue.

Exercice 3.2.

1. Calcule la gravité ressentie par un astronaute à bord de l'ISS, située à 400 km d'altitude.
2. Compare cette valeur avec $g = 9,81$ m/s^2.

4 Le champ gravitationnel

Nous avons vu que l'intensité de l'accélération de pesanteur d'un objet proche de la Terre dépend de son altitude. En effet, pour une altitude donnée, nous avons vu que

$$g_h = \frac{k_g m_T}{(R_T + h)^2}$$

Voici un shéma qui représente divers accélérations pour différentes altitudes, autour de la Terre.

Exercice 3.2.

1. Calcule la gravité ressentie par un astronaute à bord de l'ISS, située à 400 km d'altitude.
2. Compare cette valeur avec $g = 9,81$ m/s^2.

1. g_400 = k_g m_T/(6,37 . 10^6 + 4 . 10^5)= 8,69 m/s^2
2. Le poids ressenti par un astronaute est plus petit sur l'ISS que sur Terre.

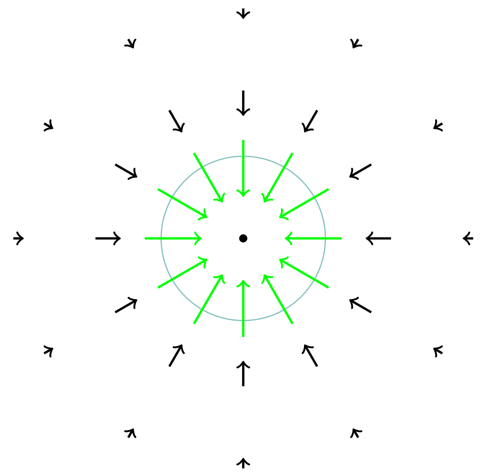


Figure 20: Vecteur accélération gravitationnelle en fonction de l'altitude

Ce mode de représentation porte le nom de *champ gravitationnel*: on place en chaque point autour de la terre un vecteur dont l'intensité vaut g_h et pointant vers le centre de la Terre. Ce mode de représentation permet d'observer visuellement l'influence que la terre exerce sur les objets proches d'elle.

Formellement, on définit le champ gravitationnel autour d'un objet comme suit:

Définition 4.1. Soit un astre de masse M. Le **champ gravitationnel** $\vec{g}_M$ autour de cet astre est défini en tout point, d'altitude h, de l'espace comme:

$$\vec{g}_M(h) = \frac{k_g M}{(R_M + h)^2}\vec{u},$$

où R_M est le rayon de l'astre et $\vec{u}$ représente un vecteur de longueur 1 pointant vers le centre de l'objet M.

Le champ gravitationnel permet donc de décrire l'attraction qu'il exerce sur un objet autour de lui. Plus précisément, tout objet de masse m subira une force gravitationnelle décrite par l'équation suivante:

$$\vec{F}_{M/m} = m\vec{g}.$$

On retrouve bien la loi de la gravitation universelle !

Exercice 4.1. Le rayon de la Lune vaut 1738km.

1. Ecris la formule du champ gravitationnel autour de la Lune.
2. Peut-on affirmer qu'à la surface de la Lune, le poids d'un astronaute est 6 fois plus grand que sur Terre?

5 Orbite géostationnaire et satellites

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste immobile par rapport à la Terre. Cela signifie qu'il doit tourner en **exactement 24h**.

Exercice 5.1.

1. Ecris une formule qui lie la période d'un satellite et la force de gravitation que celui-ci subit par la Terre.
2. Déduis-en l'altitude de ce satellite si celui-ci est en orbite géostationnaire.

Exercice 4.1. Le rayon de la Lune vaut 1738km.

1. Ecris la formule du champ gravitationnel autour de la Lune.
2. Peut-on affirmer qu'à la surface de la Lune, le poids d'un astronaute est 6 fois plus grand que sur Terre?

1. $$\overrightarrow{g}_L(h) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,738 \cdot 10^6 + h)^2}\overrightarrow{u} = \frac{4,2 \cdot 10^{12}}{(1,738 \cdot 10^6 + h)^2}\overrightarrow{u}$$

2. On applique la formule pour h=0. Danc ce cas:

$$\overrightarrow{g}_L(0) = \frac{4,2 \cdot 10^{12}}{(1,738 \cdot 10^6)^2}\overrightarrow{u} = 1,62\overrightarrow{u}$$

Donc l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune est de 1,62 m/s².

Or 9,81/6=1,635. Donc on ne peut pas affirmer que le poids d'un astronaute est six fois plus grand sur la Lune que sur la Terre. Plutôt: le poids est six fois plus petit sur la Lune que sur la Terre.

Exercice 5.1.

1. Ecris une formule qui lie la période d'un satellite et la force de gravitation que celui-ci subit par la Terre.
2. Déduis-en l'altitude de ce satellite si celui-ci est en orbite géostationnaire.

1. On suppose que l'orbite géostationnaire est circulaire. Ainsi l'accélération centripète sur cette orbite vaut

a= 4pi² (R_T+h)/T², ou h est l'altitude inconnue.

Par la 2e loi de Newton, on a:

m a = k_g m_T m/(R_T+h)², où m est la masse du satellite.

Donc m 4pi² (R_T+h)/T²=k_g m_T m/(R_T+h)²

2. On doit résoudre l'équation précédente d'inconnue h.

On la simplifie d'abord: 4pi²(R_T+h)³=k_g m_T T².
Donc (R_T+h)³ = k_g m_T T²/(4pi²)= 7,53 . 10^{22}
Donc R_T+h = racine cubique (7,53 . 10^{22})= 4,22 . 10^7 m
Donc h = 4,22 . 10^7 - 6,37 . 10^6 = 35 830 km.