Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d'exercices du 22/09/25

Présentation

Pour voir ces slides:

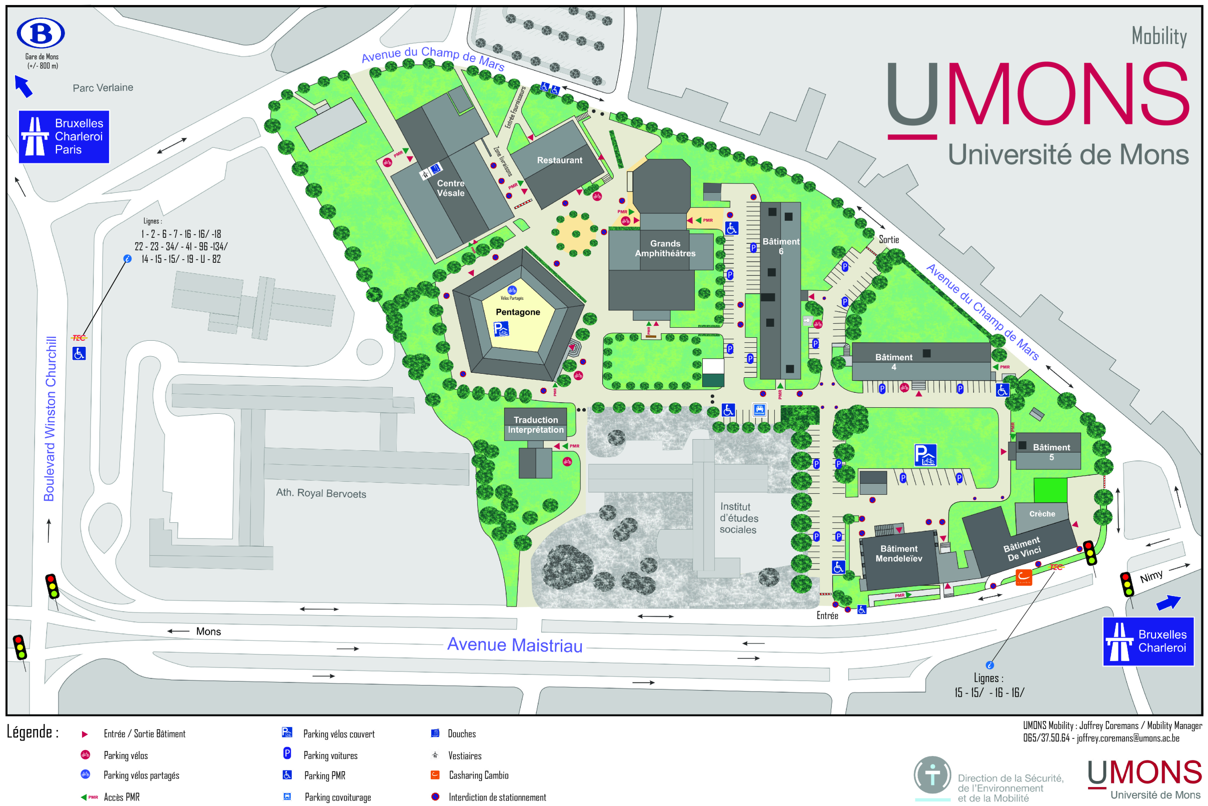
Contact

- Mail: quentin.lambotte@umons.ac.be
  - → Préciser l'object de l'email
  - → Respecter une structure professionnelle dans le corps de l'email
- Prise de rendez-vous:
  - → Préciser la raison de la prise de rendez-vous
  - → Préciser les disponibilités
    - Je serai indisponible les:
      - lundis après midis
      - mercredis et jeudis matins
      - vendredis
  - → Je n'accepterai le rendez-vous que si vous participez aux remédiations

Bureau

- Bâtiment De Vinci, 2e étage, bureau 2.36 (tout au fond du couloir)
- Le bâtiment De Vinci est sur le campus de Nimy

Plan d'accessibilité du Campus de la Plaine de Nimy



Plan

A vous!

- Vous allez répondre à un questionnaire wooclap. Sortez votre smartphone!

Comment rentabiliser les séances d’exercices

Comment rentabiliser les séances d'exercices

- Avant = préparer la séance:
  → étudier la théorie (les cours théoriques précédents)
  → faire les préparations annoncées lors de la séance précédente ou sur moodle
  → poser des questions sur le Forum moodle si nécessaire
- Pendant = venir en séance = y participer activement
  → prendre note, rester concentré.e, résoudre les exercices en séance

Comment rentabiliser les séances d'exercices

- Après = prendre du recul:
  - → faire le point (qu'avons nous fait? qu'ai-je retenu?)
  - → refaire des exercices qui posent problème
  - → réétudier la théorie si nécessaire

Attention! Étudier $\neq$ relire!

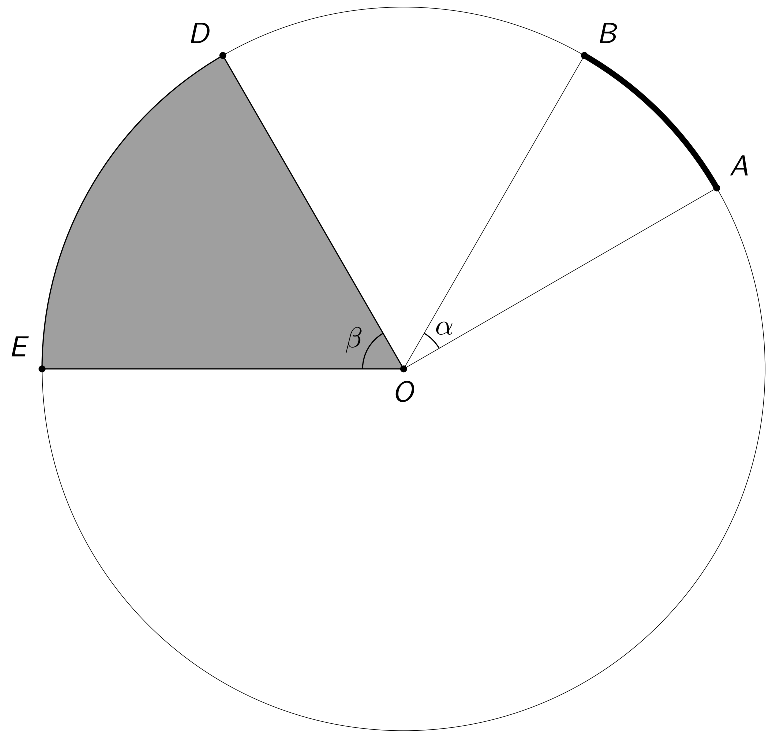
→ Ne pas négliger la théorie face aux exercices: l'un ne va pas sans l'autre!

Remédiations

- (Presque) chaque semaine
- Alternance entre Q/R et séances thématiques
- Sur inscription (cf. annonces sur moodle)

Trigonométrie

Mesures d'un angle: radians et degrés



Dans le cercle ci-contre:

- la longueur de l'arc AB vaut
$$|AB| = \frac{\alpha \cdot 2\pi r}{360}$$
- L'aire du secteur AOB vaut
$$|AOB| = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360}$$

où α est exprimé en degrés.

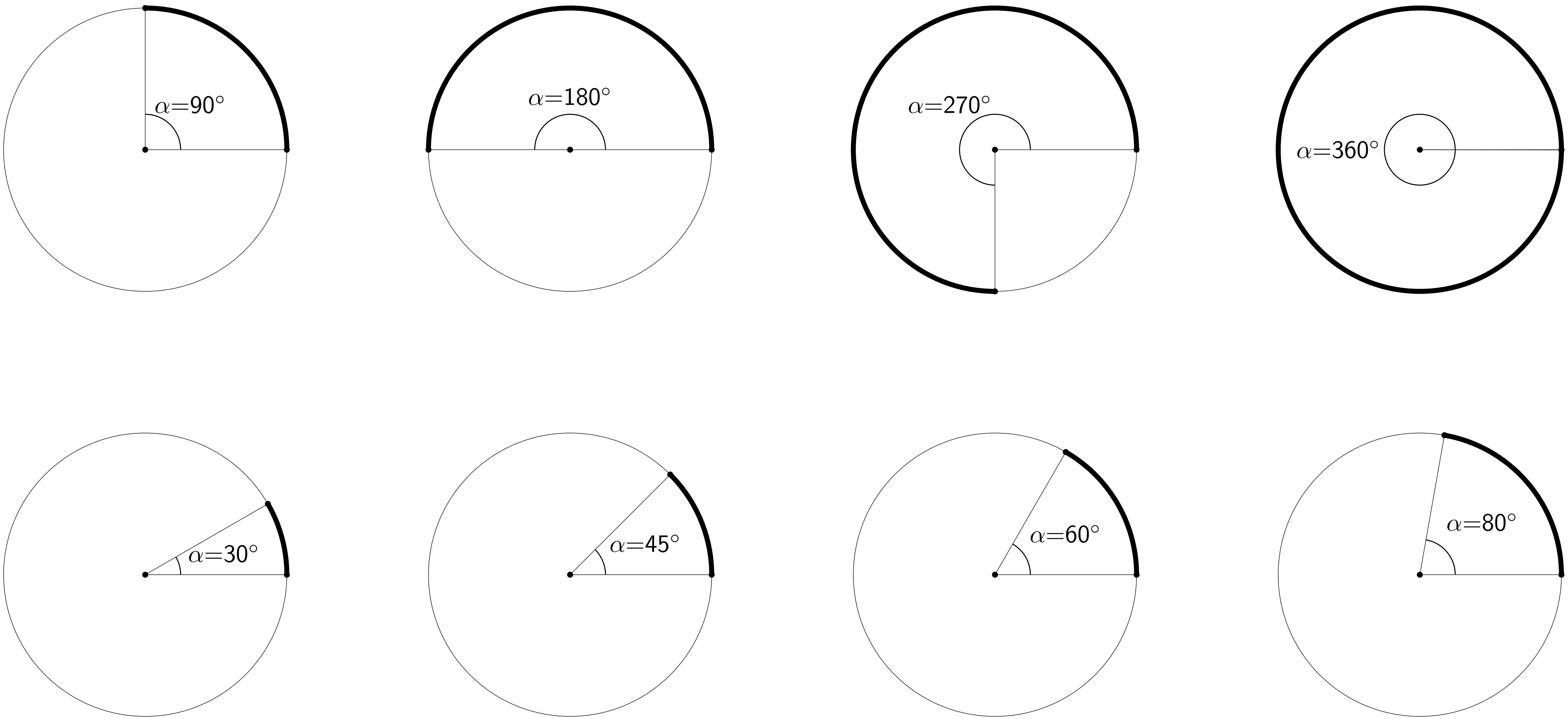
Un changement d'unité de mesure permet de rendre ces formules plus simples.

Le radians

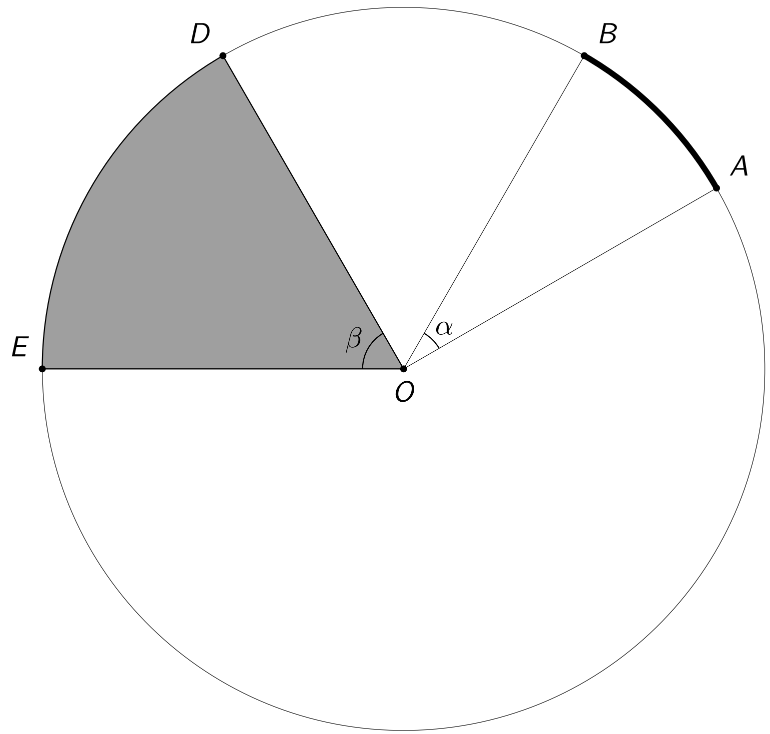
Définition: Étant donné un angle α en degrés, sa mesure en *radian* est la longueur d'un arc intercepté par α dans un cercle de rayon 1.

Le radians

Exemples: Tous les cercles suivants sont de rayon 1.



Mesures d'un angle: radians et degrés



Dans le cercle ci-contre:

- la longueur de l'arc AB vaut $|AB| = \alpha \cdot r$
- L'aire du secteur AOB vaut $|AOB| = \alpha \cdot r^2/2$

où α est exprimé en radians.

Conversion

La conversion entre les deux unités se fait via une règle de trois. (Remarque: si l'unité de mesure de l'angle n'est pas précisée, alors on utilise le radian)

Exemple: $225^\circ = \dfrac{5\pi}{4}(rad)$

Exercice 1

1. $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$
2. $315^\circ = \frac{7\pi}{4}$
3. $240^\circ = \frac{4\pi}{3}$
4. $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$
5. $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$
6. $300^\circ = \frac{5\pi}{3}$

Exercice 2

1. $\dfrac{2\pi}{3} = 120^\circ$
2. $\dfrac{7\pi}{6} = 210^\circ$
3. $\dfrac{5\pi}{3} = 300^\circ$
4. $\dfrac{3\pi}{4} = 135^\circ$
5. $\dfrac{7\pi}{4} = 315^\circ$

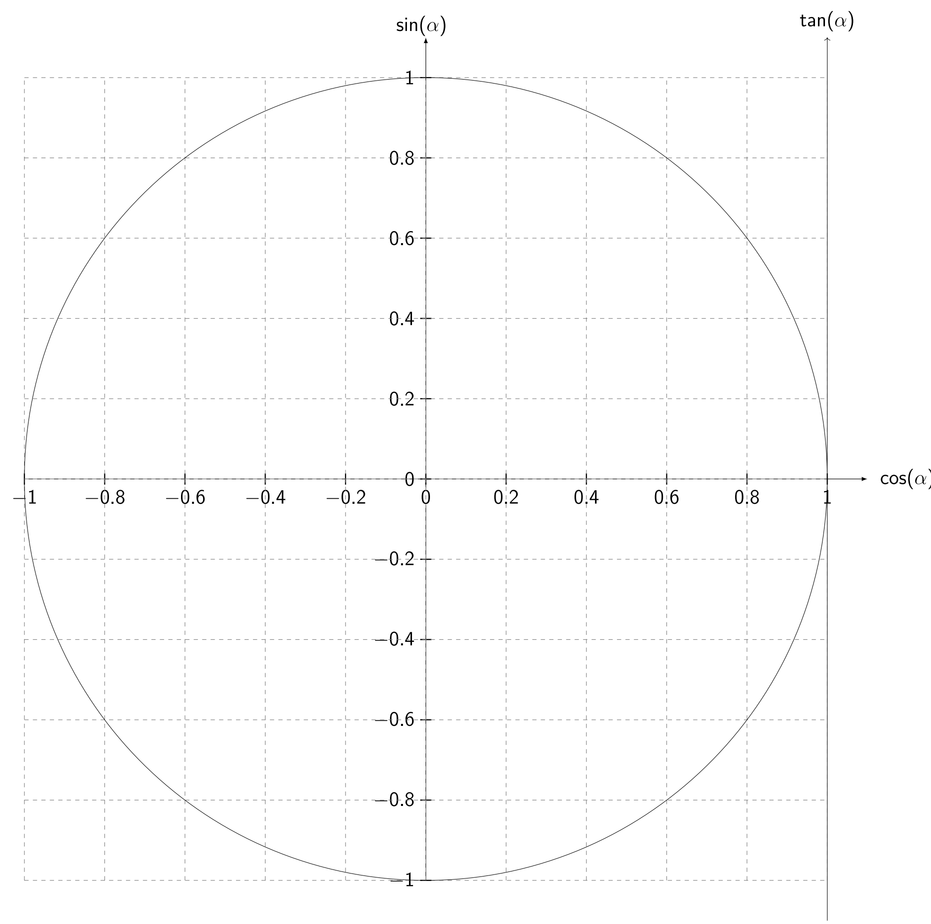
Exercice 3

(arrondis au 100e.)

1. $\mathbf{3,145^\circ = 0,05}$ rad
2. $\mathbf{30,204^\circ = 0,53}$ rad
3. $\mathbf{-27,543^\circ = -0,48}$ rad
4. $\mathbf{131,78^\circ = 2,3}$ rad
5. $\mathbf{0,69^\circ = 0,012}$ rad
6. $\mathbf{28,66^\circ = 0,5}$ rad

Le cercle trigonométrique (CT)

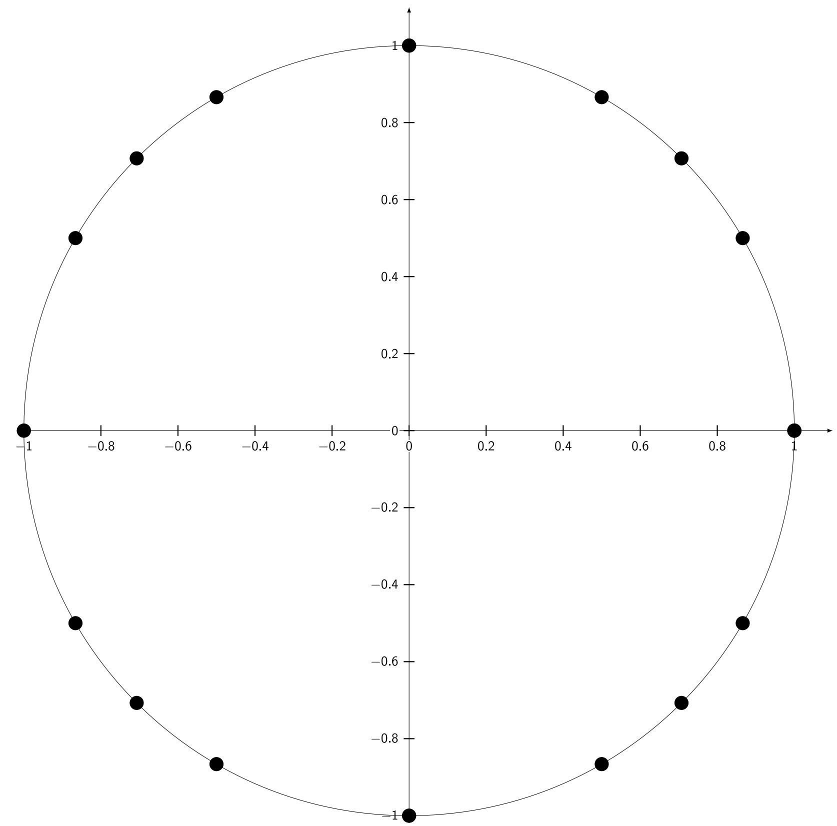
Définition: Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré à l'origine d'un repère (orthonormé). Ce cercle sera utilisé pour représenter les angles orientés, en prenant toujours comme origine le point (1;0).



Exercice 4

Mesure en degrés	Mesure en radians
0	
	$\frac{\pi}{6}$
45	
60	
	$\frac{\pi}{2}$
120	
	$\frac{3\pi}{4}$
150	
	π

Mesure en degrés	Mesure en radians
210	
225	
	$\frac{4\pi}{3}$
270	
	$\frac{5\pi}{3}$
315	
	$\frac{11\pi}{6}$
360	

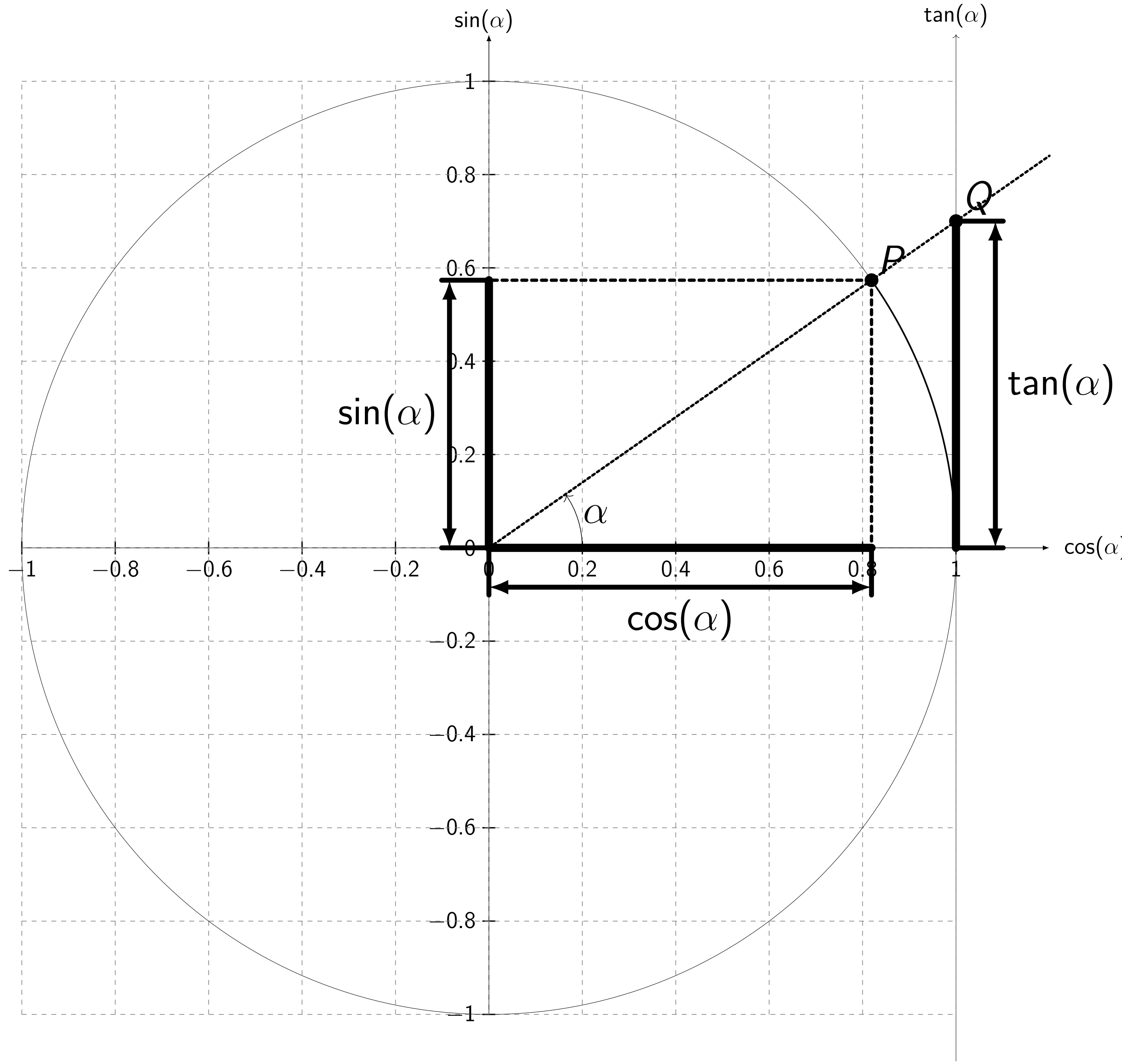


Les nombres trigonométriques dans le CT

Définition: Soit α un angle et P le point correspondant sur le cercle trigonométrique. Alors:

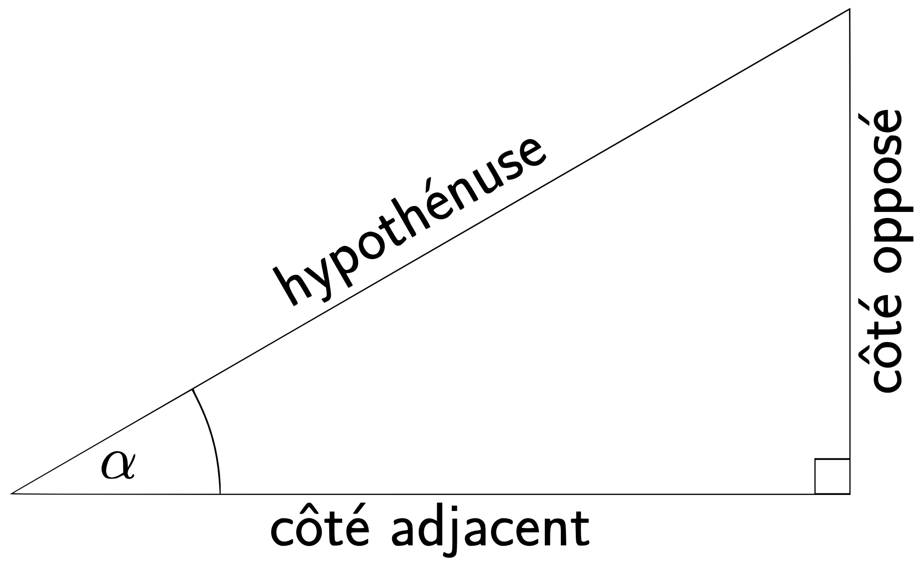
1. le *cosinus* de α, noté $\cos(\alpha)$, est l'abscisse du point P
2. le *sinus* de α, noté $\sin(\alpha)$, est l'ordonnée du point P
3. la *tangente* de α, notée $\tan(\alpha)$, vaut $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et vaut l'ordonnée du point d'intersection de OP avec l'axe des tangentes.

Les nombres trigonométriques dans le CT



Les théorèmes principaux de la trigonométrie

- Formule fondamentale: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
  - → Variante: $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
- Dans un triangle rectangle:
  - → Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$



SOHCAHTOA

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté } \textbf{O}\text{pposé}}{\textbf{H}\text{ypothénuse}}$$

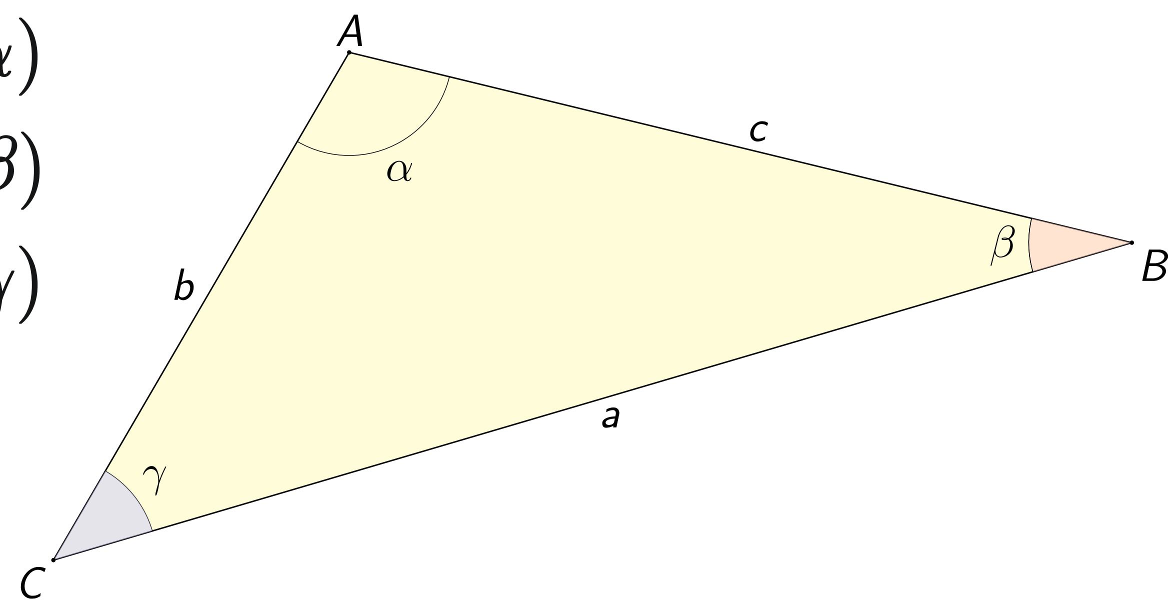
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté } \textbf{A}\text{djacent}}{\textbf{H}\text{ypothénuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté } \textbf{O}\text{pposé}}{\text{côté } \textbf{A}\text{djacent}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Les théorèmes principaux de la trigonométrie

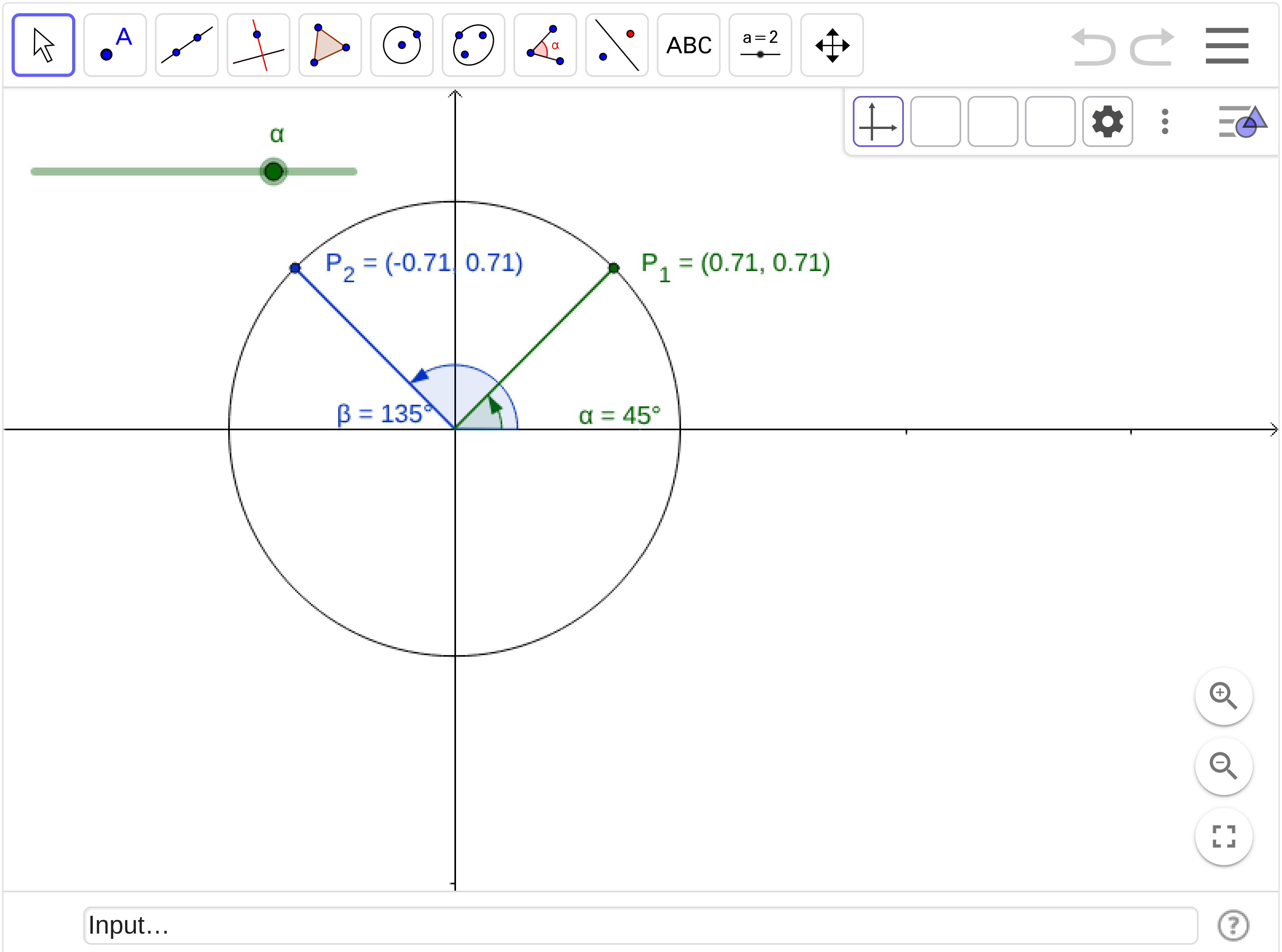
- Dans un triangle qcq:
  - → Loi des aires: $\mathbf{Aire} = \frac{ab\sin(\gamma)}{2} = \frac{ac\sin(\beta)}{2} = \frac{bc\sin(\alpha)}{2}$
  - → Loi des sinus: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
  - → Loi des cosinus:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$



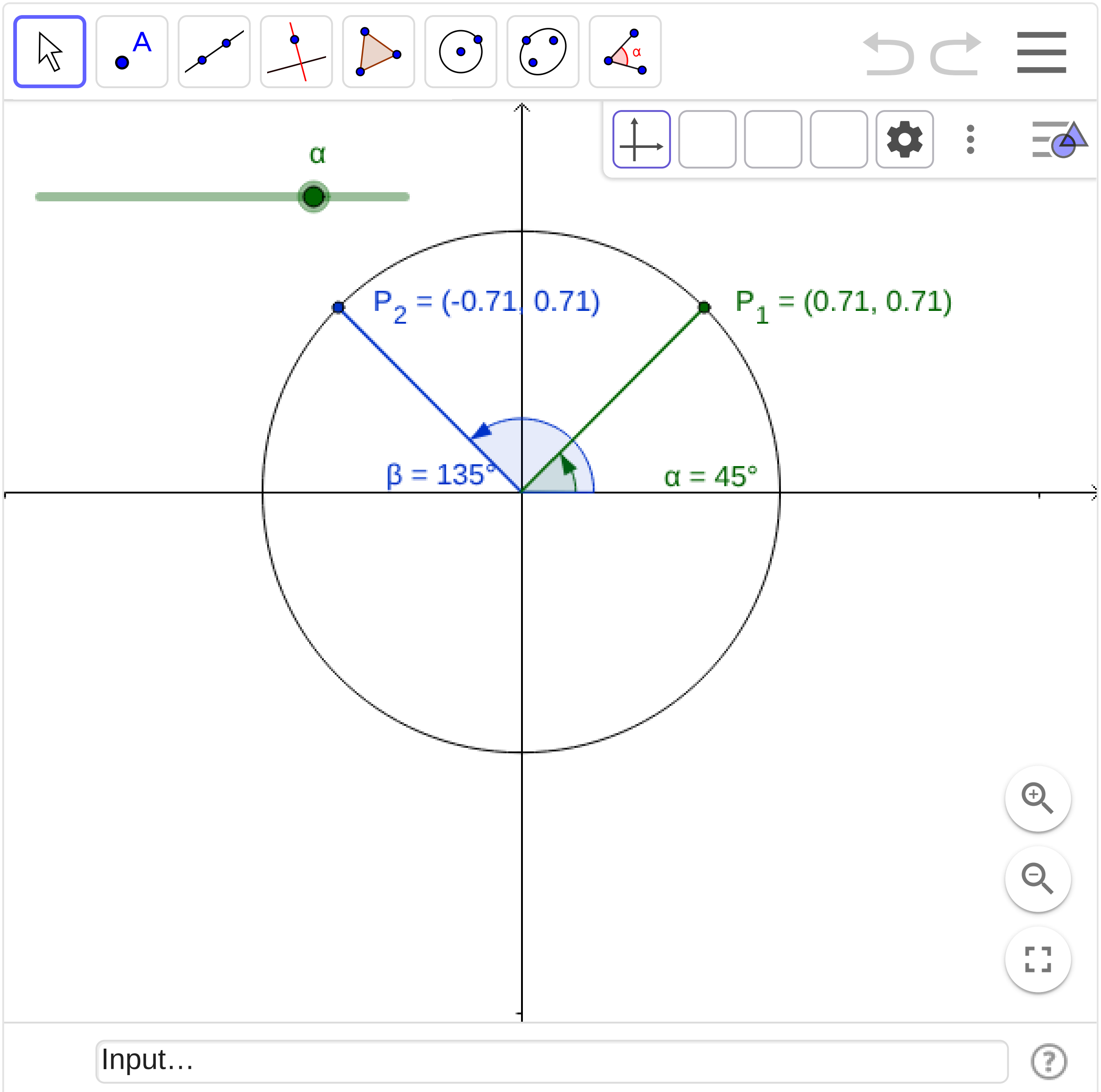
Symétries du CT

Symétrie d'axe y



…
…

Symétrie d'axe y

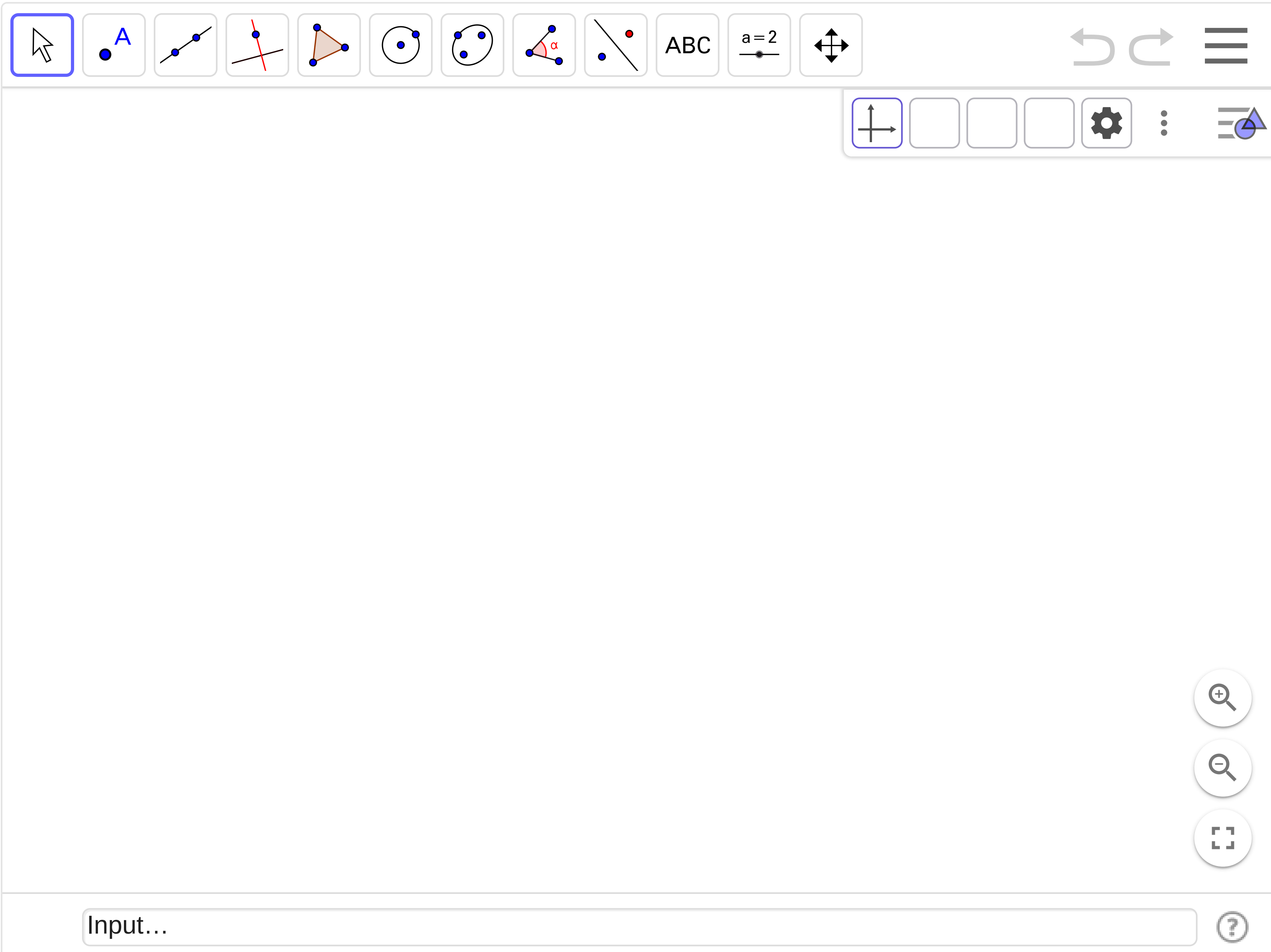


Angles suppplémentaires:
leur somme vaut π (=180°)

Propriété:

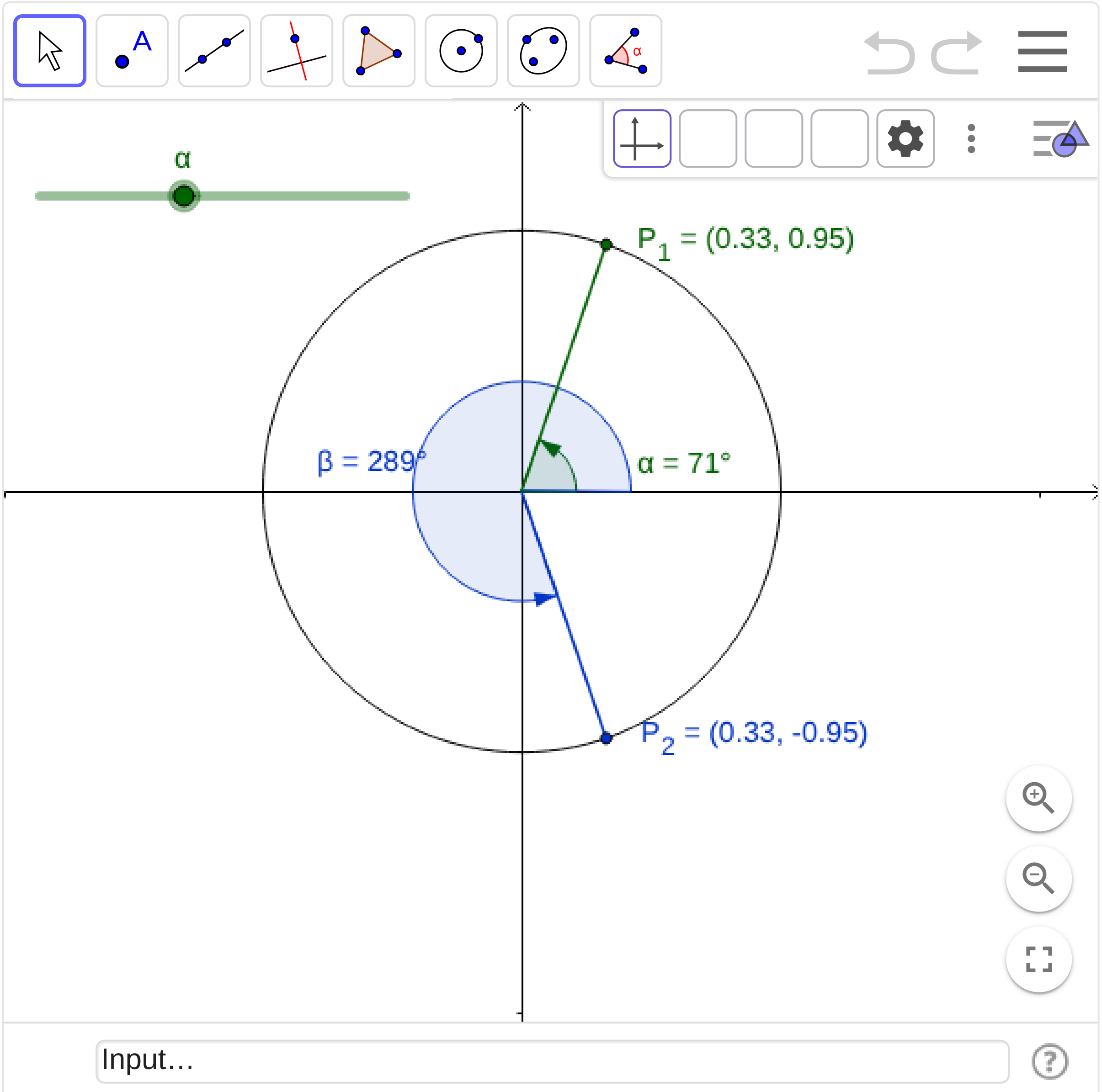
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

Symétrie d'axe x



…
…

Symétrie d'axe x

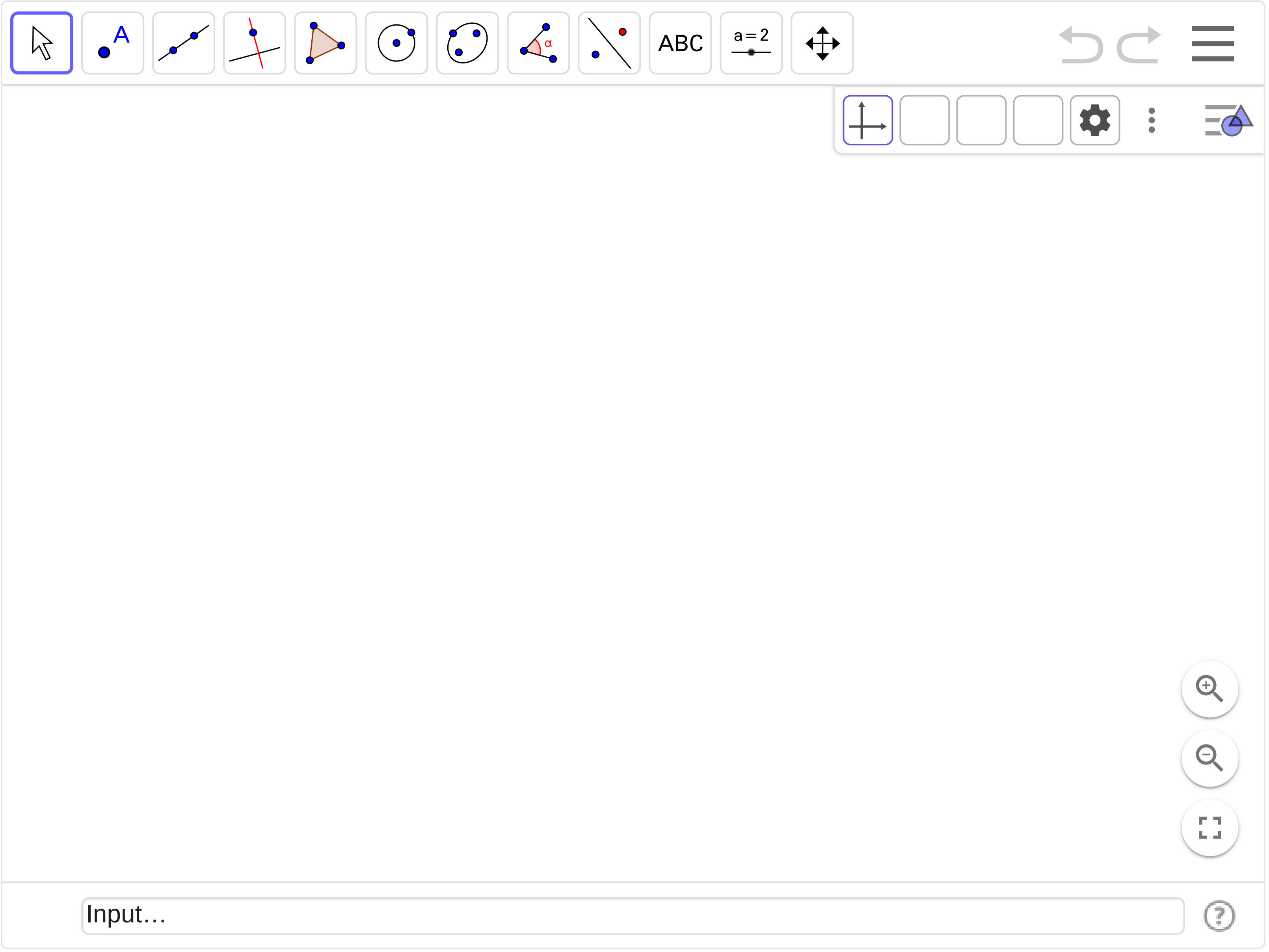


Angles opposés: leur somme vaut $\mathbf{0}$ (=0°)

Propriété:

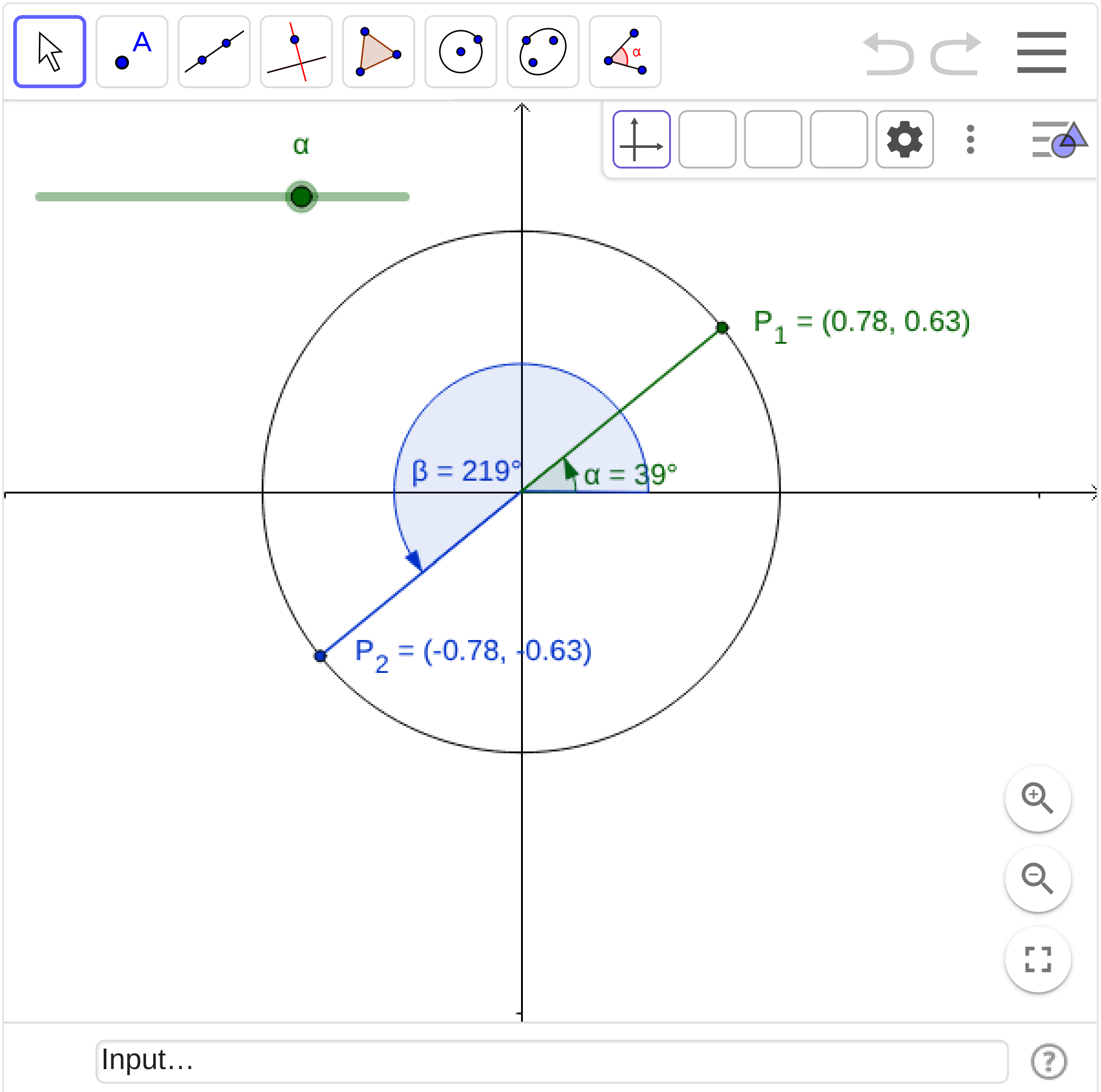
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

Symétrie centrale à l’origine



…
…

Symétrie centrale à l'origine



Angles antisuplémentaires: leur différence vaut π (=180 °)

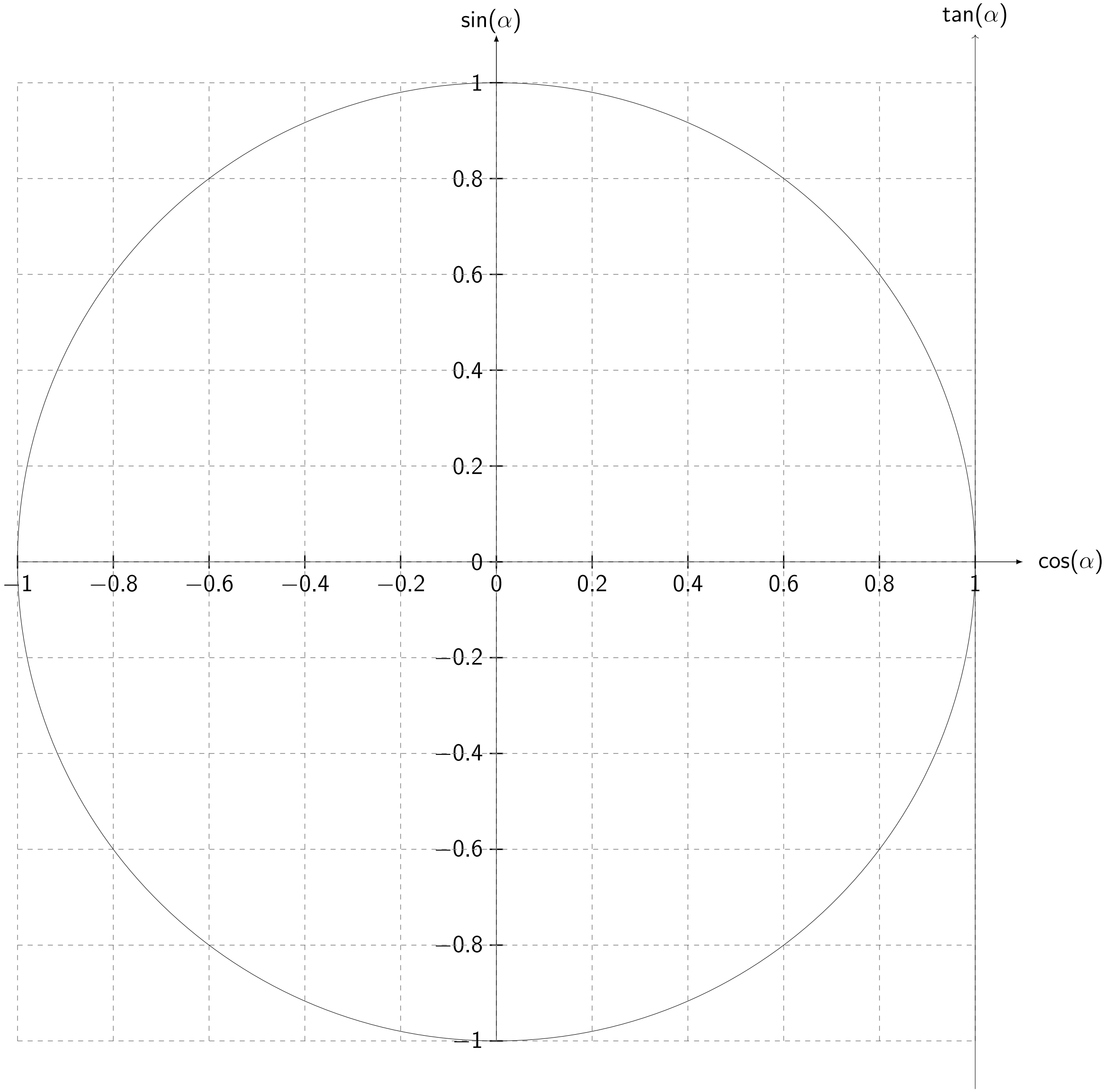
Propriété:

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$

Résumé

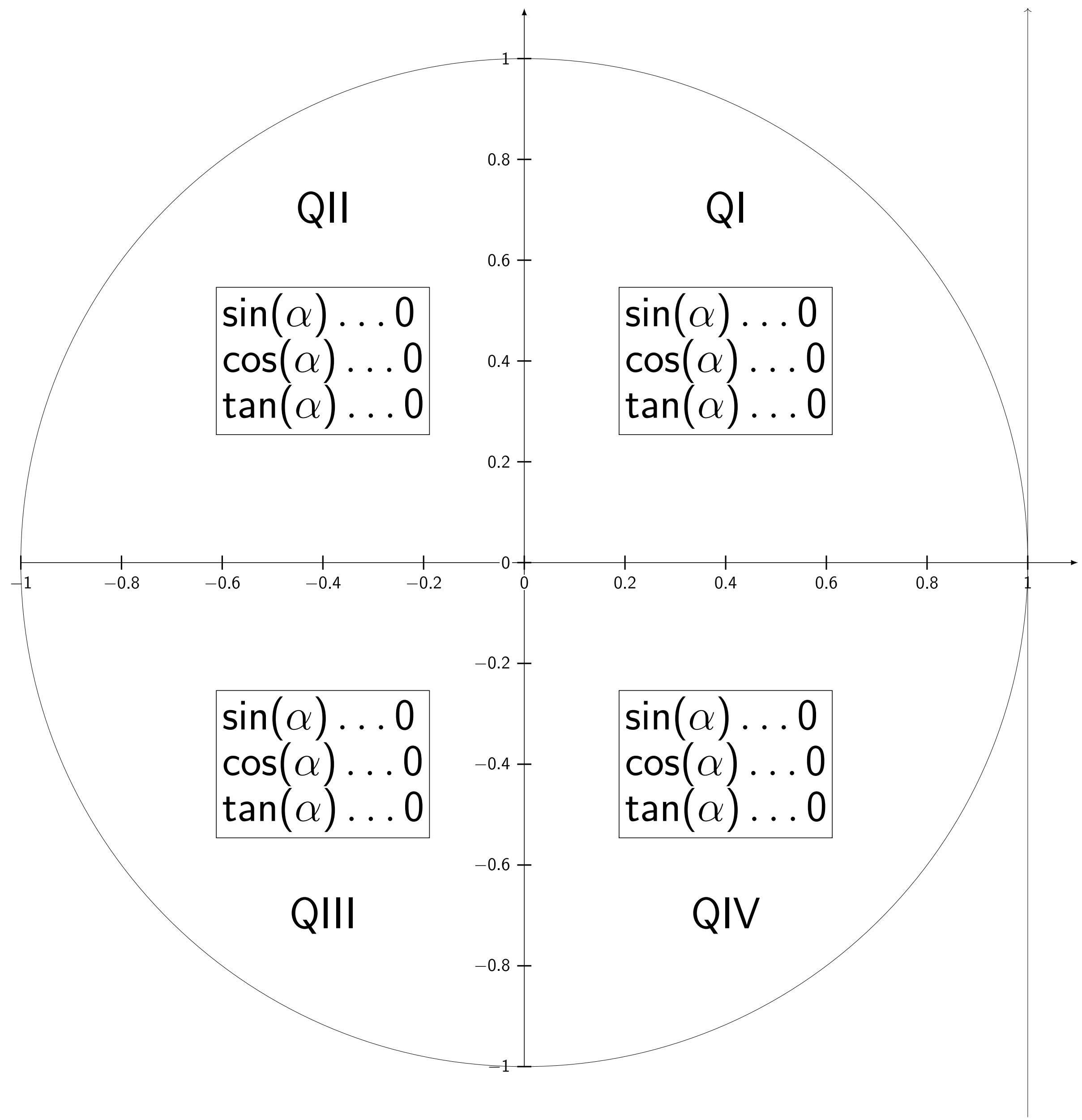
- Angles supplémentaires: α et $\pi - \alpha$
  - → $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
  - → $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- Angles opposés: α et $-\alpha$
  - → $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
  - → $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- Angles antisupplémentaires: α et $\pi + \alpha$
  - → $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
  - → $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$

Résumé



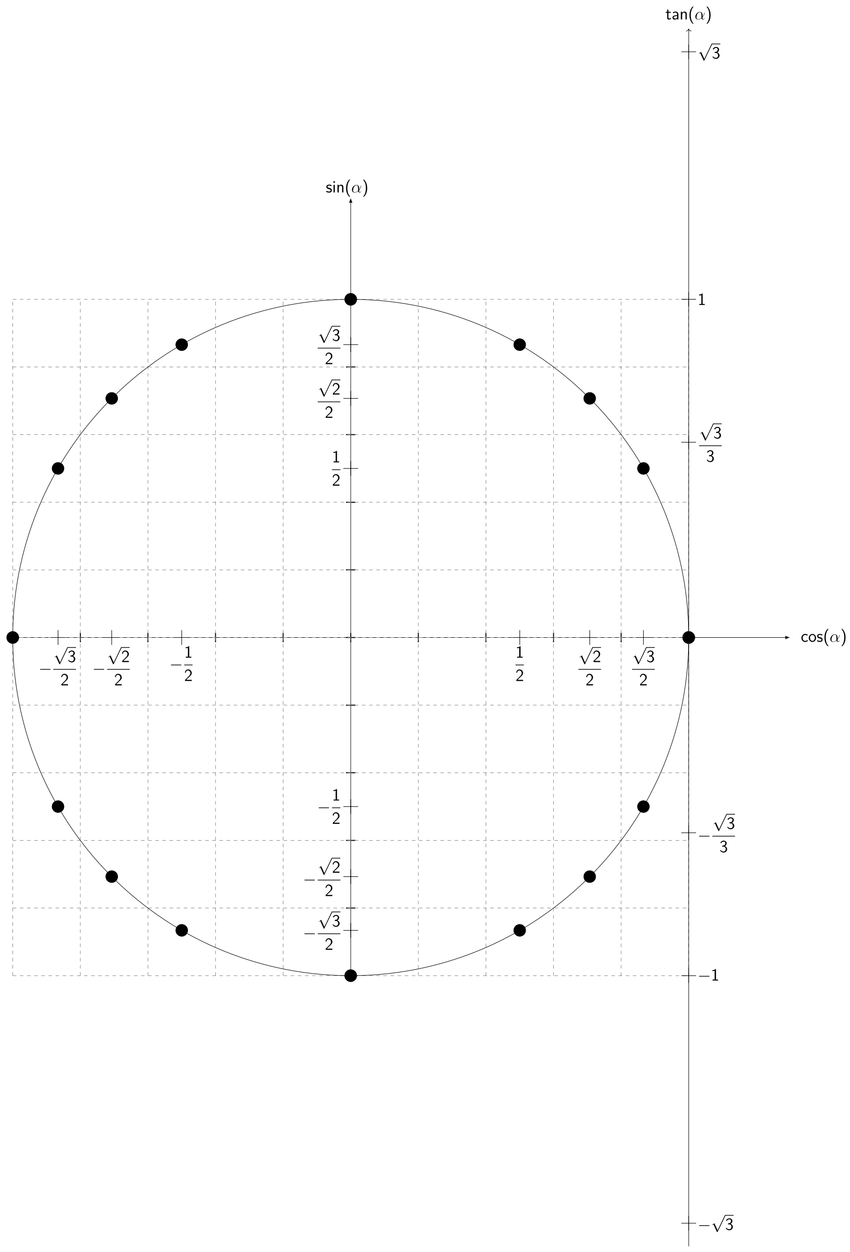
- (Bonus) angles complémentaires: la somme vaut $\frac{\pi}{2}(= 90°)$.
  - → $$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$$
  - → $$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Exercice 5



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
QII
QI
QIII
QIV
sin(α) . . . 0
cos(α) . . . 0
tan(α) . . . 0
sin(α) . . . 0
cos(α) . . . 0
tan(α) . . . 0
sin(α) . . . 0
cos(α) . . . 0
tan(α) . . . 0
sin(α) . . . 0
cos(α) . . . 0
tan(α) . . . 0

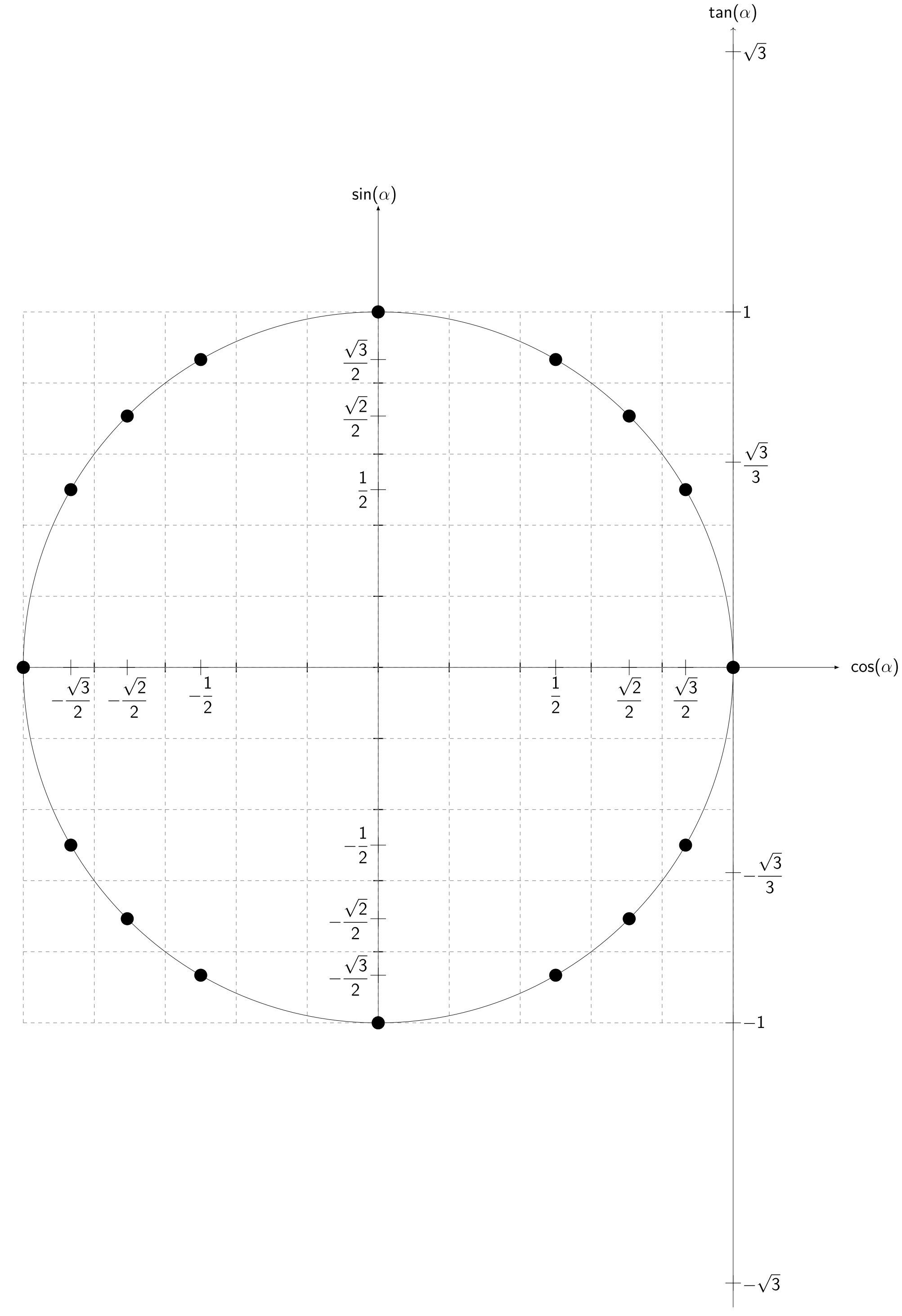
Valeurs particulières



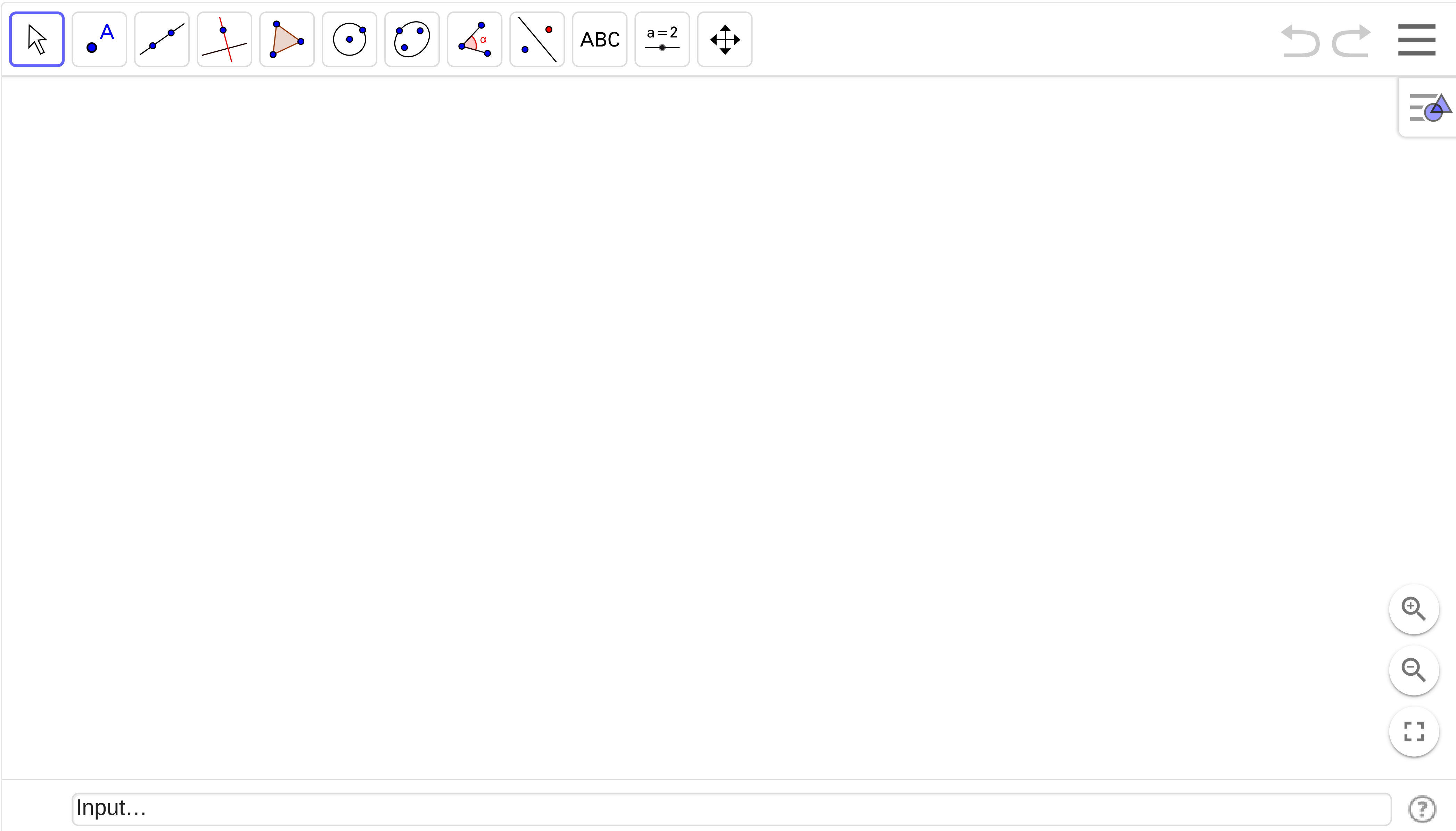
α en degrés	0	30	45	60	90
α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N'existe pas

Exercice 6

α en radians	-2π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$					
$\cos(\alpha)$					
$\tan(\alpha)$					



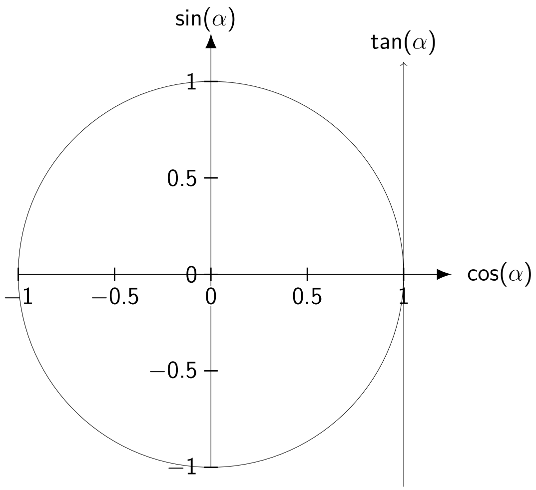
Les fonctions trigonométriques



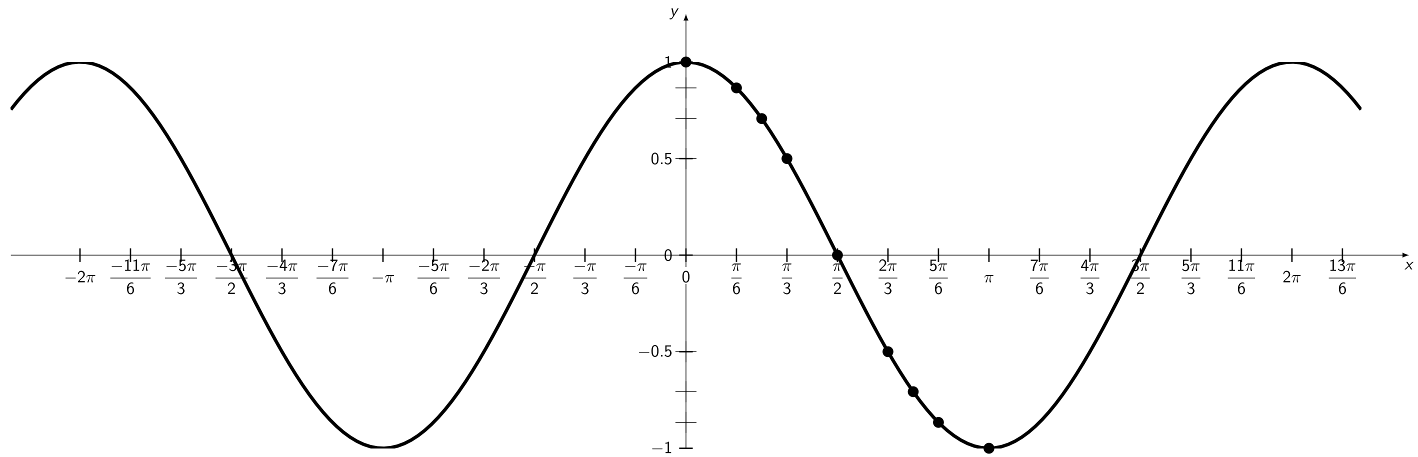
Équations

Exercice A

Résous graphiquement l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

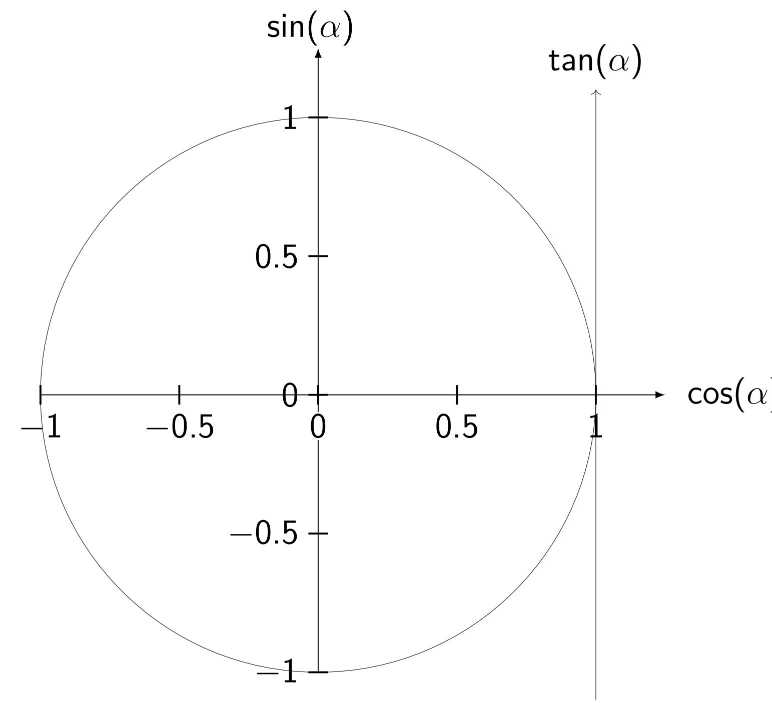


Graphique de cos(x)

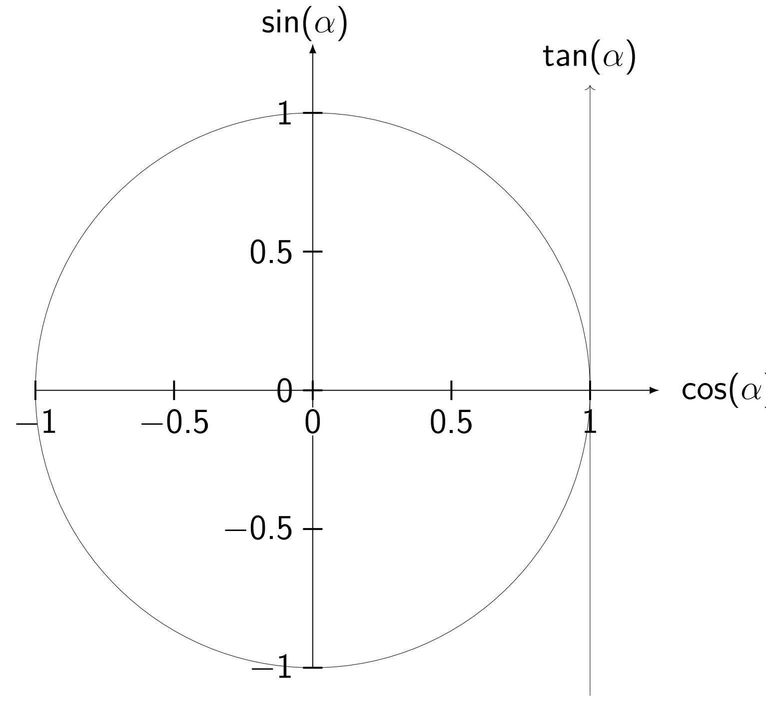


Exercice B

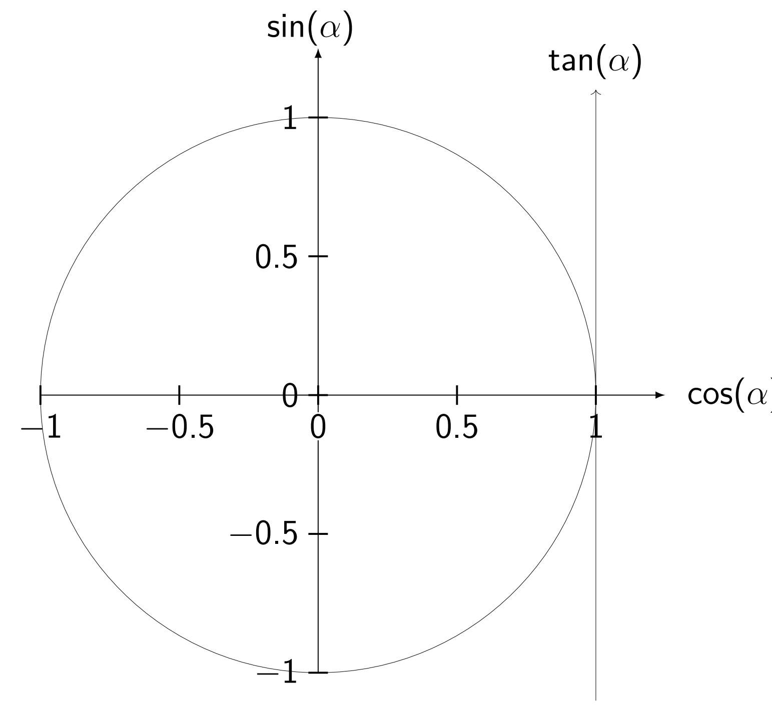
$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$



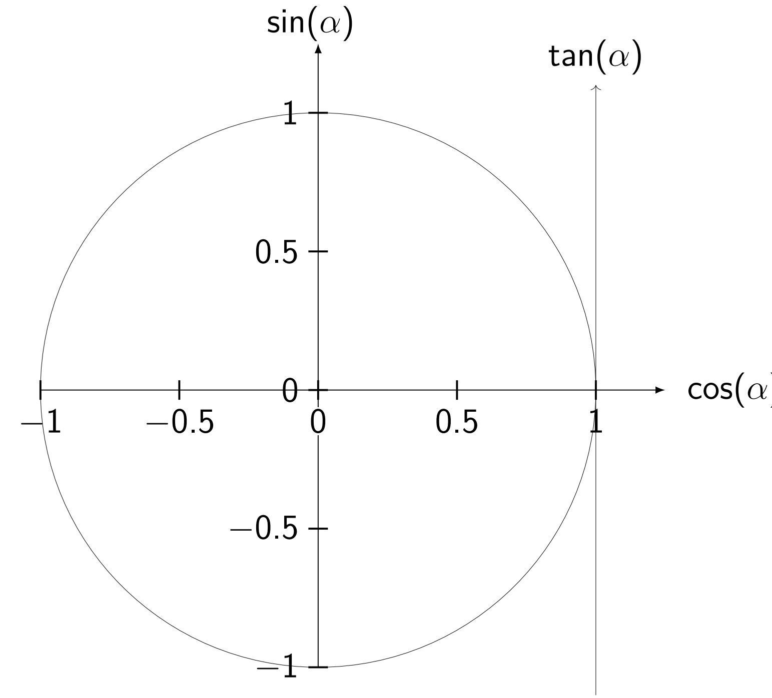
$$2\cos(x) = -1$$



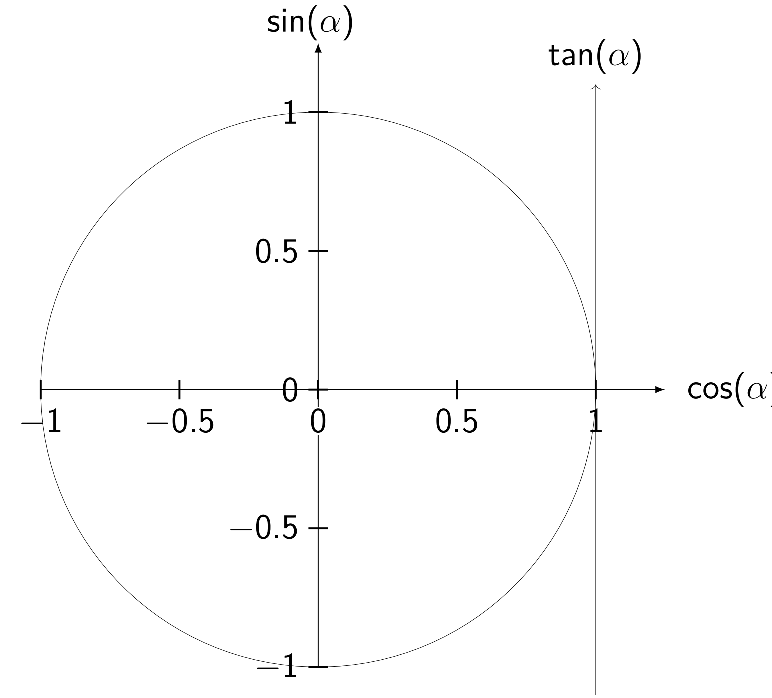
$$2\sin(x) = 4$$



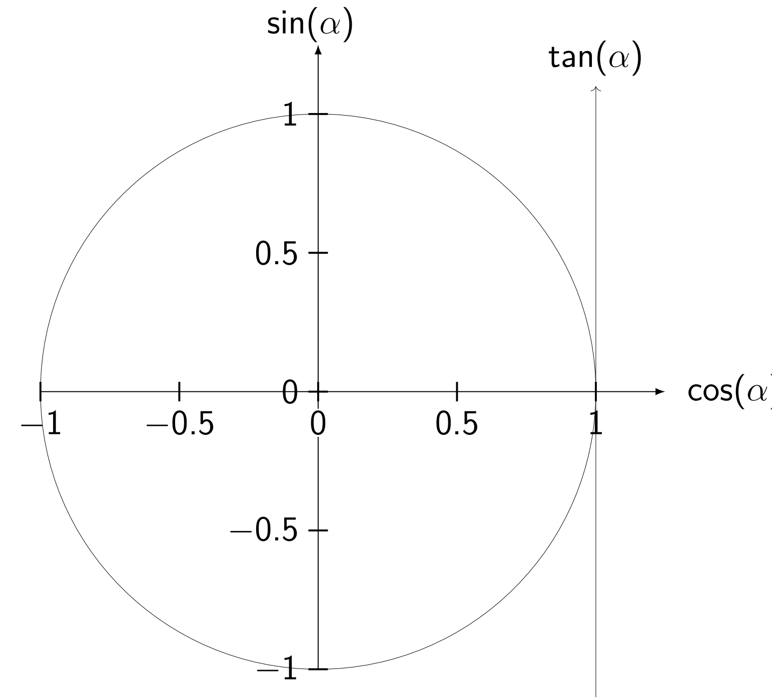
$$\tan(x) = \sqrt{3}$$



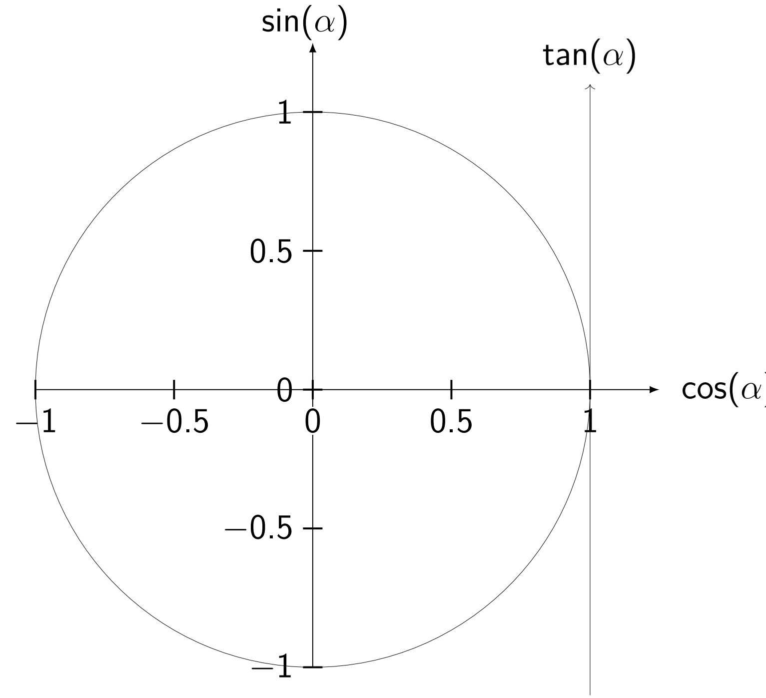
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$



$$\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$3\tan\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$$



$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$